경찰 대학교 2003년도 문제

1. 다음 조건 p, q, r 에 대해 옳은 것은? (x, y는 실수)

$p: xy \neq 0$

$q: x^2 + y^2 \neq 0$

$r: xy > 0$

① p 는 q의 필요조건
② p 는 r의 충분조건
③ r 은 p의 충분조건
④ p 는 q의 필요충분조건
⑤ q 는 r의 필요충분조건

2. $a^2 - 6a + \frac{a}{b} + \frac{9b}{a}$ 은 $a = m,\ b = n$ 일 때 최소값을 갖는다. $m + n$의 값을 구하여라.

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

3. 이차방정식 $f(x) = 0$ 에서 두 근의 합이 4이다. 방정식 $f(2x+1) = 0$ 의 모든 근의 합?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

4. $A = \{x \mid x^2 + ax + b \leqq 0\}$, $B\ \{x \mid x^2 + cx + d \leqq 0\}$

$A \cap B = \{x \mid -3 \leqq x \leqq 1\}$
$A - B = \{x \mid -5 \leqq x \leqq -3\}$
$A \cup B = \{x \mid -5 \leqq x \leqq 4\}$

$a + b + c + d$를 구하여라.

5. 일차함수 $f(x)$가 $-1 \leqq f(0) \leqq 1$, $0 \leqq f(1) \leqq 2$를 만족시킬 때, $f(2)$의 값의 범위는?

① $-1 \leqq f(2) \leqq 2$ ② $-1 \leqq f(2) \leqq 5$ ③ $1 \leqq f(2) \leqq 2$
④ $1 \leqq f(2) \leqq 5$ ⑤ $2 \leqq f(2) \leqq 5$

6. $x^2 - \sqrt{3}x - 3 = 0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\log_3(\alpha^2 + \beta^2)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

7. x, y에 관한 연립방정식이 무수히 많은 근을 가질 때 a의 값을 α, 근을 하나도 갖지 않을 때 a의 값을 β 라고 하자. $\alpha - \beta$의 값?

$$\begin{pmatrix} a+4 & a+1 \\ 2 & a-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

① -7 ② -5 ③ 1 ④ 5 ⑤ 7

8. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = r^2$과 점 $p(7, 6)$에서 그은 두 접선이 직교할 때, r의 값을 구하여라.

9. 이차 정사각형렬 A가 다음 보기의 명제 중 옳은 것은? (E는 단위행렬, O는 영행렬)

가. $A^2 = A$ 이면 $A = E$
나. $A^3 = A^5 = E$ 이면 $A = E$
다. $A^2 + A + E = 0$ 이면 A의 역행렬 존재.

① 나 ② 다 ③ 가, 나 ④ 가, 다 ⑤ 나, 다

10. $f(x-y)=f(x)-f(y)$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 골라라.

㉮ $f(x) = -f(x)$
㉯ $f(x+y)=f(x)+f(y)$
㉰ $f(nx)=nf(x)$ (단, n 은 정수)

11. 삼차함수 $f(x)$ 가 다음을 만족할 때 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=1$, $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=2$ 이다.

이 때 방정식 $f(x)=0$ 의 모든 근의 합?

① $\frac{5}{3}$ ② 3 ③ $\frac{10}{3}$ ④ $\frac{13}{3}$ ⑤ 6

12. 세 직선 $3x-4y=0$, $3x+4y=48$, x 축에서 삼각형의 변 또는 내부에서의 한 점으로부터 세 직선까지 거리의 합의 최대값은?

13. 모눈종이 위에 모눈종이의 선을 따라 좌표평면을 표시하였다. 이 모눈종이를 어떤 직선을 따라 접었을 때 점 $(6,0)$ 과 $(0,2)$ 가 겹쳤다면 점 $(6,-10)$과 겹치는 점의 좌표는?

① $(-7,-8)$ ② $(-6,-6)$ ③ $(-5,-6)$
④ $(-4,-5)$ ⑤ $(-3,-7)$

14. $y=x(x+2)^2$, $y=k$ 가 서로 다른 세 점에서 만난다. 교점의 x 좌표가 등비수열은 이룰 때 k 의 값을 구하여라.

15. 무리함수 $y = \sqrt{3+2\sqrt{3x-x^2}} - \sqrt{3-2\sqrt{3x-x^2}}$ 의 최대값은?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ④ $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{6}$

16. P(x) 가 삼차방정식이고 $P(1) = \frac{3}{2}$, $P(2) = \frac{4}{3}$, $P(3) = \frac{5}{4}$, $P(4) = \frac{6}{5}$ 이다.
P(5) 의 값을 구하여라.

17. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음이 성립한다.

$$3a_{n+1} - a_n a_{n+1} > \frac{9}{4} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

18. 사각형 ABCD 에서 △ABO 의 넓이는 10, △CDO 의 넓이는 90 이다.
사각형의 넓이의 최소를 구하여라. (단, 점 O 는 사각형 내부의 한 점)

19. 자연수 n 에 대하여 곡선 $y = x^n$ 과 직선 $y = 1$, y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를
S_n 이라 할 때 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{n^2}$ 의 값을 구하여라.

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ ∞

20. $y=f(x)$에 대하여 점 $(a, f(a))$에서의 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$일 때 $\lim_{n\to\infty} n\left\{f(a)-2f(a-\frac{1}{n})+f(a+\frac{3}{n})\right\}$의 값을 구하여라.

21. 구간 $[0, \pi]$에서 함수 $f(x)=\frac{\sin x-1}{\cos x-3}$의 최대값은?

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{2}{3}$　③ $\frac{3}{4}$　④ $\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{3}{2}$

22. 자연수 n에 대하여 다항함수 $f_n(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$f_1(x)=x+2,\ f_{n+1}(x)=\frac{d}{dx}\{2xf_n(x)\}$$

$f_n(x)$의 상수항을 a_n, 일차항의 계수를 b_n라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$의 값은?

① 1　② 2　③ 4　④ 8　⑤ ∞

23. 다음을 만족시키는 다항함수 $f(x)$를 생각하자.

$$f(0)=1,\ f(1)=2,\ \int_0^1 |f'(x)|\,dx=9$$

구간 $[0,1]$에서 $|f(x)|$의 최대값은? (단, $f'(x)$는 $f(x)$의 도함수이다.)

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

24. 기침할 때, 기관(숨관)은 원기둥 모양을 유지하면서 축소한다. 기침할 때 기관의 반지름을 r, 기관 내의 공기 압력을 P라 하면, 기관을 통과하는 공기의 속력은 기관 내의 공기 압력 P와 기관의 단면의 넓이 πr^2의 곱에 정비례한다. 그리고 정상 상태의 기관의 반지름을 r_0이라 하면, P는 $r_0 - r$에 정비례한다. 공기의 속력이 최대가 되는 기관의 반지름은?

① $\frac{1}{4}r_0$ ② $\frac{1}{3}r_0$ ③ $\frac{1}{2}r_0$ ④ $\frac{2}{3}r_0$ ⑤ $\frac{3}{4}r_0$

25. 행렬 $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 을 이용한 암호문을 만들기 위하여, 다음과 같이 영어 알파벳과 0 부터 25 까지의 수를 대응시키자.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	0

또, 0보다 작거나 25보다 큰 정수는 26으로 나누었을 때의 나머지가 대응하는 알파벳과 대응시킨다. 예를 들면, 수 30 은 d, −10 은 p와 대응한다. 다음은 영어 단어 'meet'의 암호문 'erdy'를 구하는 과정으로, (1) 각 알파벳과 대응하는 수를 찾아서 앞에서부터 두 수씩 행렬을 만들고, (2) 행렬 A 와의 곱을 구하고, (3) 각 수에 대응하는 알파벳을 나열하면 된다.

$$\begin{array}{c} m \quad e \\ \downarrow \quad \downarrow \\ (13 \ \ 5)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (31 \ \ 18) \\ \qquad\qquad\quad \downarrow \quad \downarrow \\ \qquad\qquad\quad (5 \ \ 18) \\ \qquad\qquad\quad \downarrow \quad \downarrow \\ \qquad\qquad\quad e \quad r \end{array} \qquad \begin{array}{c} e \quad t \\ \downarrow \quad \downarrow \\ (5 \ \ 20)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (30 \ \ 25) \\ \qquad\qquad\quad \downarrow \quad \downarrow \\ \qquad\qquad\quad (4 \ \ 25) \\ \qquad\qquad\quad \downarrow \quad \downarrow \\ \qquad\qquad\quad d \quad y \end{array}$$

이와 같은 방법으로 만들어진 암호문 'mawa' 의 원래 단어는?

① deer ② late ③ love ④ take ⑤ tele