

# 9 Spezielle Zufallsprozesse

## 9.1 Punktfelder

### Aufgabenstellung

- bisher: Simulation eindimensionaler Zufallsprozesse, z.B. Ankunftsprozesse in der zeitlichen Entwicklung
- hier: Simulation von zweidimensionalen Zufallsprozessen, die z.B. eine Verteilung von Teilnehmern eines mobilen Kommunikationsnetzes in der Ebene darstellen
- Zweidimensionale Prozesse: Punktfelder (spatial process, planar process)

### 9.1.1 Punktfelder mit konstanter Punkteanzahl in einem Rechteck

- Erzeugung eines homogenen Punktfeldes mit  $n$  Punkten in einer rechteckigen Fläche  $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$
- Literatur: Prof. Dr. Dietrich Stojan, Helga Stojan: „Fraktale Formen Punktfelder“, Akademie Verlag, 1992, Kapitel 3.2.4, S. 245
- Algorithmus
  1. Wiederhole  $n$  Mal:
  2. Erzeuge zwei Zufallszahlen  $z_1, z_2 \sim U(0,1)$
  3. Berechne Punkt  $(x, y) = (a_1 + z_1 (a_2 - a_1), b_1 + z_2 (b_2 - b_1))$
- Punktfeld ist homogen und rotationsinvariant

### 9.1.2 Punktfelder mit variabler Punkteanzahl in einem Rechteck

- Inhalt der betrachteten Fläche:  $F$
- Durchschnittliche Punkteanzahl in  $F$ :  $E[X]$
- Intensität des Punktfeldes:  $\lambda = E[X]/F$
- Anzahl der Punkte ist Zufallsvariable  $X$  und folgt einer diskreten Verteilung
- Erzeugung:
  - Erzeuge  $X$
  - Erzeuge homogenes Punktfeld mit  $X$  Punkten gemäß 9.1.1

- Häufige Anwendungen:
  - Binomial-Punktfeld
  - Poisson-Punktfeld

### Binomial-Punktfeld

- Binomial verteilte Anzahl der Punkte in der Fläche gemäß

$$P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \text{ mit } p = \frac{E[X]}{n}$$

- Obere Schranke: n

### Poisson-Punktfeld

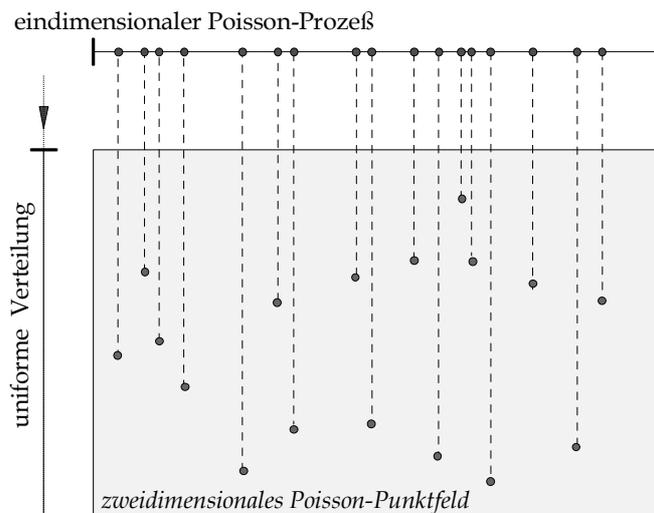
- Punktfeld ist ein Poisson-Punktfeld, falls die Anzahl X der Punkte in F Poisson-verteilt ist:

$$P(X = i) = \frac{(\lambda F)^i}{i!} e^{-\lambda F} \text{ mit Intensität } \lambda = \frac{E[X]}{F}$$

- Wesentlicher Unterschied zur Binomialverteilung: die Poisson-Verteilung ist unbeschränkt!
- Erzeugung wie oben
- Alternative, optimierter Erzeugungsalgorithmus in einem Rechteck
  1. Erzeuge einen eindimensionalen Poisson-Prozess in  $(a_1, a_2)$  mit Rate  $\lambda^* = \frac{E[X]}{a_2 - a_1}$ .
  2. Verteile die erzeugten Punkte gemäß einer Gleichverteilung in  $(b_1, b_2)$ .

Vorteil des optimierten Algorithmus:

- Vermeidung der Erzeugung von Poisson-verteilten Zufallsvariablen (Aufwändigkeit, numerische Instabilität)
- Verwendung aller erzeugten Zufallszahlen für die Erzeugung von Koordinaten



**Abbildung 9.1: Erzeugung eines Poisson-Punktfeldes durch zweidimensionalen Poisson-Prozess (optimierter Algorithmus)**

- Frage: Ergibt der konventionelle und der optimierte Erzeugungsalgorithmus dieselbe örtliche Punkteverteilung auf der x-Achse?

### Beweis für die Erzeugung genau eines Punktes

Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit, dass die x-Koordinate  $a$  des Punktes größer als ein  $u \in [a_1; a_2]$  ist, alles unter der Nebenbedingung, dass nur  $X=1$  Punkt realisiert wird.

- Bei einer gleichverteilten Platzierung auf des einzelnen Punktes auf der x-Achse gilt:

$$P(a > u | X = 1) = \int_u^{a_2} \frac{1}{a_2 - a_1} da = \frac{a_2 - u}{a_2 - a_1}$$

- Bei der Platzierung des Punktes auf der x-Achse durch einen eindimensionalen Poisson-Prozess gilt:

$$\begin{aligned}
P(X=1) &= \int_{a_1}^{a_2} P(A_1 = a) \cdot P(A_2 > ((a_2 - a_1) - a)) da = \\
&= \int_{a_1}^{a_2} \lambda^* \cdot e^{-\lambda^* \cdot a} \cdot e^{-\lambda^* \cdot ((a_2 - a_1) - a)} da = \int_{a_1}^{a_2} \frac{E[X]}{a_2 - a_1} \cdot e^{-\frac{E[X]}{a_2 - a_1} \cdot (a_2 - a_1)} da = \\
&= \frac{E[X]}{a_2 - a_1} \int_{a_1}^{a_2} e^{-E[X]} da = E[X] \cdot e^{-E[X]}
\end{aligned}$$

- Die Wahrscheinlichkeit, dass sich die x-Koordinate a des ersten (und in diesem Fall auch des einzigen) Punkt weiter als u auf der x-Achse befindet ist:

$$\begin{aligned}
P(a > u \wedge X=1) &= \int_u^{a_2} P(A_1 = a) \cdot P(A_2 > ((a_2 - a_1) - a)) da = \\
&= \frac{E[X]}{a_2 - a_1} \int_u^{a_2} e^{-E[X]} da = \frac{a_2 - u}{a_2 - a_1} \cdot E[X] \cdot e^{-E[X]}
\end{aligned}$$

- Damit ergibt sich  $P(a > u | X=1) = \frac{P(a > u \wedge X=1)}{P(X=1)} = \frac{a_2 - u}{a_2 - a_1}$
- Die beiden Wahrscheinlichkeiten sind gleich und somit ist für  $X=1$  die Gleichheit des Ergebnisses für den konventionellen und den optimierten Erzeugungsalgorithmus gezeigt.

### 9.1.3 Punktfelder mit variabler Punkteanzahl in einer beliebigen Fläche

#### Problem

- Fläche hat beliebige Form und Flächeninhalt  $F^*$
- Mittlere Punkteanzahl in  $F^*$ :  $E[X^*]$
- Rechteck ist Voraussetzung für obige Erzeugungsalgorithmen

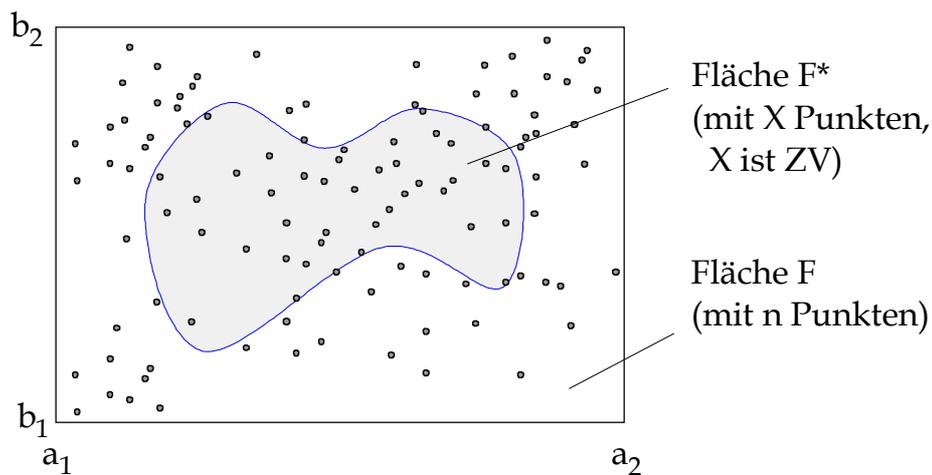


Abbildung 9.2: Erzeugung eines homogenen Punktfeldes in einer allgemeinen Fläche

### Lösung

- Beschreibe beliebige Fläche in ein Rechteck mit Fläche  $F$  ein.
- Generiere in die beliebige Fläche die entsprechende Anzahl Punkte
- Konstante Anzahl von Punkten
  - Erzeuge solange Punkte für homogenes Punktfeld in der großen Fläche, bis sich die gewünschte Anzahl  $n = E[X^*]$  in der beliebigen Fläche befindet
- Verteilung mit vorgegebenem Mittelwert von Punkten  $E[X^*]$ 
  - Punktintensität ist in beiden Flächen gleich:  $\frac{E[X^*]}{F^*} = \lambda^* = \lambda = \frac{E[X]}{F}$
  - Wähle als Mittelwert für die Erzeugung des homogenen Punktfeldes im Um-schließenden Rechteck:  $E[X] = E[X^*] \cdot \frac{F}{F^*}$

- Spezialfall Binomialverteilung

- Randbedingung:

Mittelwert  $E[X]$  und obere Schranke  $n$  sollen eingehalten werden

- Möglichkeit 1

- Wie gerade eben beschrieben

- Wähle  $F$  und setze  $E[X] = E[X^*] \cdot \frac{F}{F^*}$

- Dann wähle:  $p = \frac{E[X]}{n} = \frac{E[X^*]}{n} \cdot \frac{F}{F^*}$

- Nachteil:  $p < 1$  wird vorausgesetzt. Falls es keine rechteckige Fläche mit Flächeninhalt  $F \leq n \cdot \frac{F^*}{E[X^*]}$  gibt, die  $F^*$  umschließt, dann ist dieses Verfahren

nicht anwendbar.

- Anzahl benötigter Zufallszahlen

- $n$  für die Berechnung von  $\text{Binom}(n, p)$
- $2 \cdot E[X]$  für die Platzierung der Punkte

- Anzahl benötigter Zufallszahlen:  $n + 2 \cdot E[X] = n + 2 \cdot E[X^*] \cdot \frac{F}{F^*}$

- Möglichkeit 2

- Wenn im großen Rechteck  $n$  Punkte erzeugt werden, fällt jeder Punkt mit

Wahrscheinlichkeit  $q = \frac{F^*}{F}$  in die kleine allgemeine Fläche.

- Es muss gelten:  $E[X^*] = n \cdot q = n \cdot \frac{F^*}{F}$ , somit  $F = n \cdot \frac{F^*}{E[X^*]}$

- Algorithmus
  1. Konstruiere ein  $F^*$  umschließendes Rechteck mit  $F = n \cdot \frac{F^*}{E[X^*]}$
  2. Erzeuge  $n$  Punkte in der Fläche  $F$  und akzeptiere die Punkte in  $F^*$
- Nachteil: falls es keine rechteckige Fläche mit Flächeninhalt  $F = n \cdot \frac{F^*}{E[X^*]}$  gibt, die  $F^*$  umschließt, dann ist dieses Verfahren nicht anwendbar. (Problem wie bei Möglichkeit 1)
- Anzahl benötigter Zufallszahlen:  $2 \cdot n$
  
- Möglichkeit 3
  - Algorithmus (übliche Accept-Reject Methode)
    1. Erzeuge konstante Anzahl Punkte  $n$  in der kleinen beliebigen Fläche
    2. Akzeptiere jeden Punkt mit Wahrscheinlichkeit :  $p = \frac{E[X^*]}{n}$
  - Immer anwendbar
  - Anzahl benötigter Zufallszahlen
    - Punkt liegt mit Wahrscheinlichkeit  $q = \frac{F^*}{F}$  in  $F^*$
    - Anzahl der benötigten Punkte ist negativ-binomial verteilt mit Parametern  $n$  und  $q$
    - Im Mittel werden  $n + E[\text{Punkte außerhalb}] = n + n \cdot \left(\frac{1}{q} - 1\right) = n \cdot \frac{F}{F^*}$  Punkte erzeugt
    - Dann wird für  $n$  Punkte Accept/Reject durchgeführt
    - Benötigte Anzahl von Zufallszahlen:  $2 \cdot n \cdot \frac{F}{F^*} + n = 2 \cdot n \cdot \left(\frac{F}{F^*} + \frac{1}{2}\right) > 3 \cdot n$

### 9.1.4 Inhomogene Punktfelder

- Literatur: Prof. Dr. Dietrich Stojan, Helga Stojan: „Fraktale Formen Punktfelder“, Akademie Verlag, 1992, Kapitel 3.3.3, S. 257

#### 9.1.4.1 Inhomogene Poisson-Punktfelder

- Gegeben:
  - Intensität des Punktfeldes  $\lambda(x,y)$
  - Maximum  $\lambda^* = \max_{(x,y)}(\lambda(x,y))$
- Erzeuge homogenes Poisson-Punktfeld mit Intensität  $\lambda^*$
- Anwendung der Accept-Reject-Methode für jeden Punkt
  - $z \leq \frac{\lambda(x,y)}{\lambda^*}$ : accept
  - ansonsten: reject

#### 9.1.4.2 Clusterfelder

- Literatur: Prof. Dr. Dietrich Stojan, Helga Stojan: „Fraktale Formen Punktfelder“, Akademie Verlag, 1992, Kapitel 6, S. 334

#### Neyman-Scott-Felder

- Grundlage  
Elternpunkte, die als homogenes Poisson-Punktfeld mit Intensität  $\lambda_e$  erzeugt werden und Clusterzentren bilden

#### Beispiel: Matern-Clusterfeld

- Homogenes Poisson-Punktfeld um den Elternpunkt mit Radius R
- Intensität um Clusterpunkt 0:  $d(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \cdot R^2} & \|x\| \leq R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- Äquivalente Darstellung:  $d(r) = \begin{cases} \frac{2 \cdot r}{\pi \cdot R^2} & \|r\| \leq R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ , wobei r die Entfernung zum

Clusterpunkt ist

- Erzeugung der Punkte des Clusterfeldes
  - Erzeuge Poisson-verteilte Anzahl der Punkte X im Clusterfeld
  - Erzeuge Koordinaten für jeden Punkt:
    - Winkelkoordinate:  $[0, 2\pi)$

- Entfernung zwischen  $[0, R]$  gemäß der Dichte  $d(r)$
  - Häufige Fehlerquelle:  $d(r)$  ist keine Gleichverteilung  $[0, R]$ !
- Um Randeffekte zu vermeiden, sollte das betrachtete Rechteck um  $2 \cdot R$  nach außen erweitert werden, da sonst Punkte von Clusterzentren im Randgebiet unberücksichtigt bleiben könnten

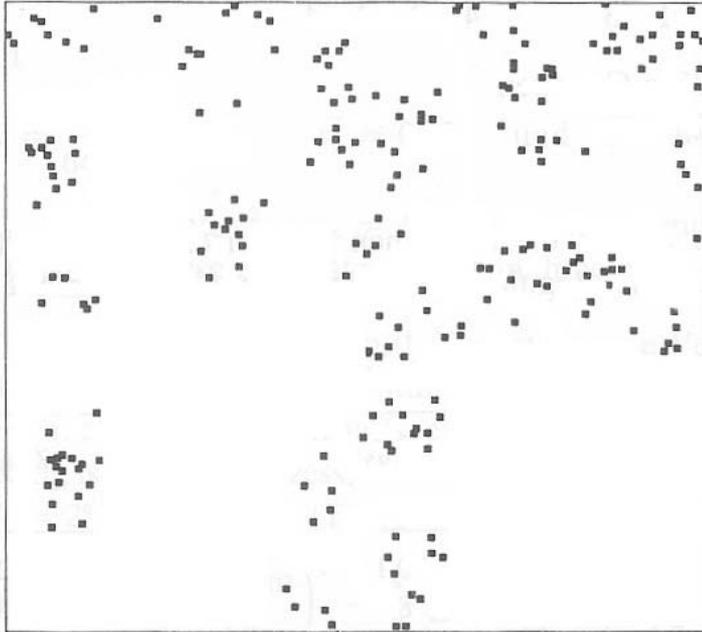


Bild III.8. Ausschnitt einer simulierten Realisierung eines Clusterfeldes. Die Clusterzentren (Elternpunkte) bilden ein Poisson-Feld der Intensität 50; zu jedem Cluster gehören fünf Punkte. Sie sind in einem Kreis mit dem Radius 0,05 gleichmäßig verteilt. (Die Länge der unteren Kante des Rechtecks ist gleich 1.)

**Abbildung 9.3: Matern-Clusterfeld (aus Stojan, S. 250)**

## 9.2 Instationäre Poisson-Prozesse

### 9.2.1 Aufgabenstellung

- bisher: Simulation (homogener) stationärer Poisson-Prozesse mit Rate  $\lambda$  :

Zwischenankunftszeit  $A_i = t_i - t_{i-1} \sim \text{exp o}(1/\lambda)$

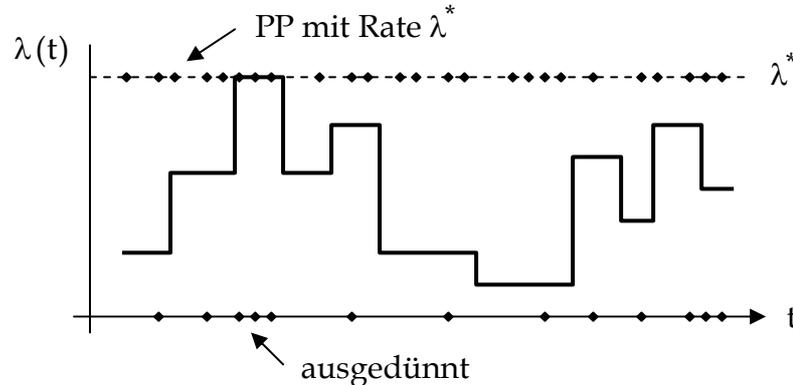
Erzeugung:  $U \sim U(0,1), t_i \leftarrow t_{i-1} - \ln U/\lambda$

- hier: Simulation instationärer Poisson-Prozesse mit zeitabhängiger Rate  $\lambda(t)$  :

### 9.2.2 Methoden und Lösungsansätze

#### 9.2.2.1: Ausdünnen (Thinning, Accept-Reject-Methode)

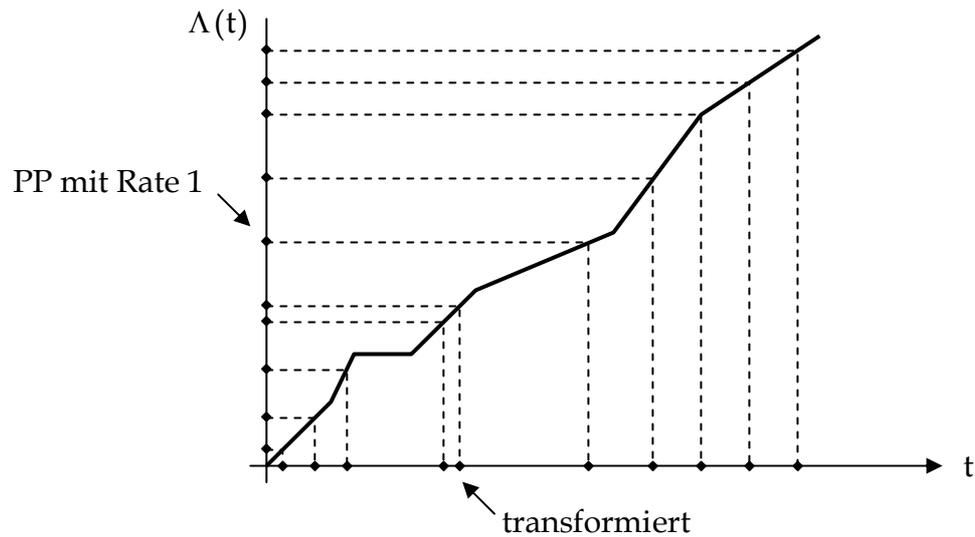
- notwendige Annahme:  $\lambda^* = \max_t \lambda(t) < \infty$
- Erzeugung eines stationären PP  $\{t_i^*\}$  mit Rate  $\lambda^*$  und anschließendes Ausdünnen mit Wahrscheinlichkeit  $1 - \lambda(t_i)/\lambda^*$



- Erzeugung:
  - Setze  $t \leftarrow t_{i-1}$
  - Erzeuge  $U_1, U_2 \sim U(0,1)$
  - $t \leftarrow t - \ln U_1/\lambda^*$
  - Falls  $U_2 \leq \lambda(t)/\lambda^*$ , dann  $t_i \leftarrow t$ . Sonst Schritt 2.
- Vorteil: einfaches Verfahren
- Nachteil: ineffizient, falls  $\lambda(t)$  deutlich kleiner als  $\lambda^*$

### 9.2.2.2 Transformation (Inversionsmethode)

- mittlere Anzahl von Ankünften in  $(0,t)$  :  $\Lambda(t) = E[N(t)] = \int_0^t \lambda(t) dt$
- Idee: Erzeuge Ankünfte  $t_i$  für PP mit Rate 1 und transformiere durch  $\Lambda^{-1}(t_i)$ , damit korrekte mittlere Anzahl von Ankünften in Intervall  $(0, t_i)$



- Erzeugung:
  1. Erzeuge  $U \sim U(0,1)$
  2.  $t'_i \leftarrow t'_{i-1} - \ln U$  (PP mit Rate 1)
  3.  $t_i \leftarrow \Lambda^{-1}(t'_i)$
- Vorteil: alle erzeugten Zufallszahlen werden verwendet
- Nachteil: Inversion von  $\Lambda(t)$

### 9.2.2.3 Vorwärts-Integral-Methode (direkte Inversionsmethode)

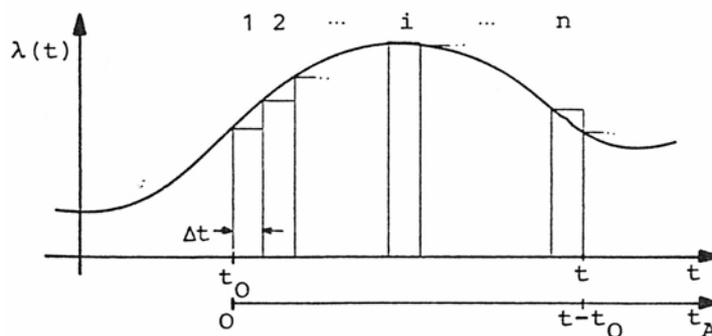
- $T_{A,t_0}$ : Zufallsvariable für die Zwischenankunftszeit von einem Ereignis zum Zeitpunkt  $t_0$  bis zum nächsten Ereignis
- Verteilungsfunktion von  $T_{A,t_0}$ :

$$F_{t_0}(t_A) = P(T_{A,t_0} \leq t_A) = 1 - \exp\left(-\int_{t_0}^{t_0+t_A} \lambda(t) dt\right)$$

(Verteilungsfunktion abhängig vom beobachteten Ereigniszeitpunkt)

- zeitabhängige Verteilungsfunktion kann zusammen mit der Inversionsmethode zur Erzeugung von Ereignissen (Vorwärts-Integral) eingesetzt werden

Herleitung:



- Betrachtung eines Ereignisses zum Zeitpunkt  $t_0$
- Unterteilung der Zeitspanne  $(t_0, t)$  in  $n$  gleiche Abschnitte der Länge  $\Delta t$
- Approximation der Ratenfunktion  $\lambda(t)$  durch eine Treppenfunktion mit

$$\lambda_i = \lambda(t_0 + (i - 1) \Delta t)$$

- Wahrscheinlichkeit, daß während des  $i$ -ten Zeitabschnittes kein Ereignis eintrifft:

$$P_0^{(i)} = e^{-\lambda_i \Delta t}$$

- Wahrscheinlichkeit, daß im Zeitintervall  $(t_0, t)$  kein Ereignis eintrifft:

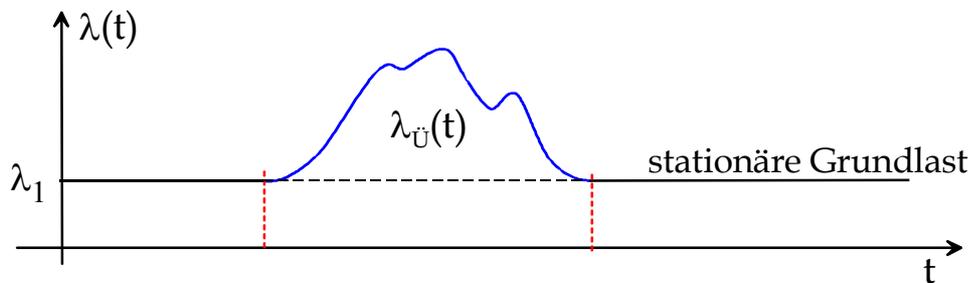
$$P(T_{A,t_0} > t_A) = \prod_{i=1}^n P_0^{(i)} = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda_i \Delta t} = \exp\left(-\Delta t \sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$$

- Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  ,  $\Delta t \rightarrow 0$

$$F_{t_0}^c(t_A) = P(T_{A,t_0} > t_A) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} \exp(-\Delta t \sum_{i=1}^n \lambda_i) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t_0+t_A} \lambda(t) dt\right)$$

oder  $F_{t_0}(t_A) = P(T_{A,t_0} \leq t_A) = 1 - \exp\left(-\int_{t_0}^{t_0+t_A} \lambda(t) dt\right)$  , q.e.d.

### Simulation eines Überlastimpulses



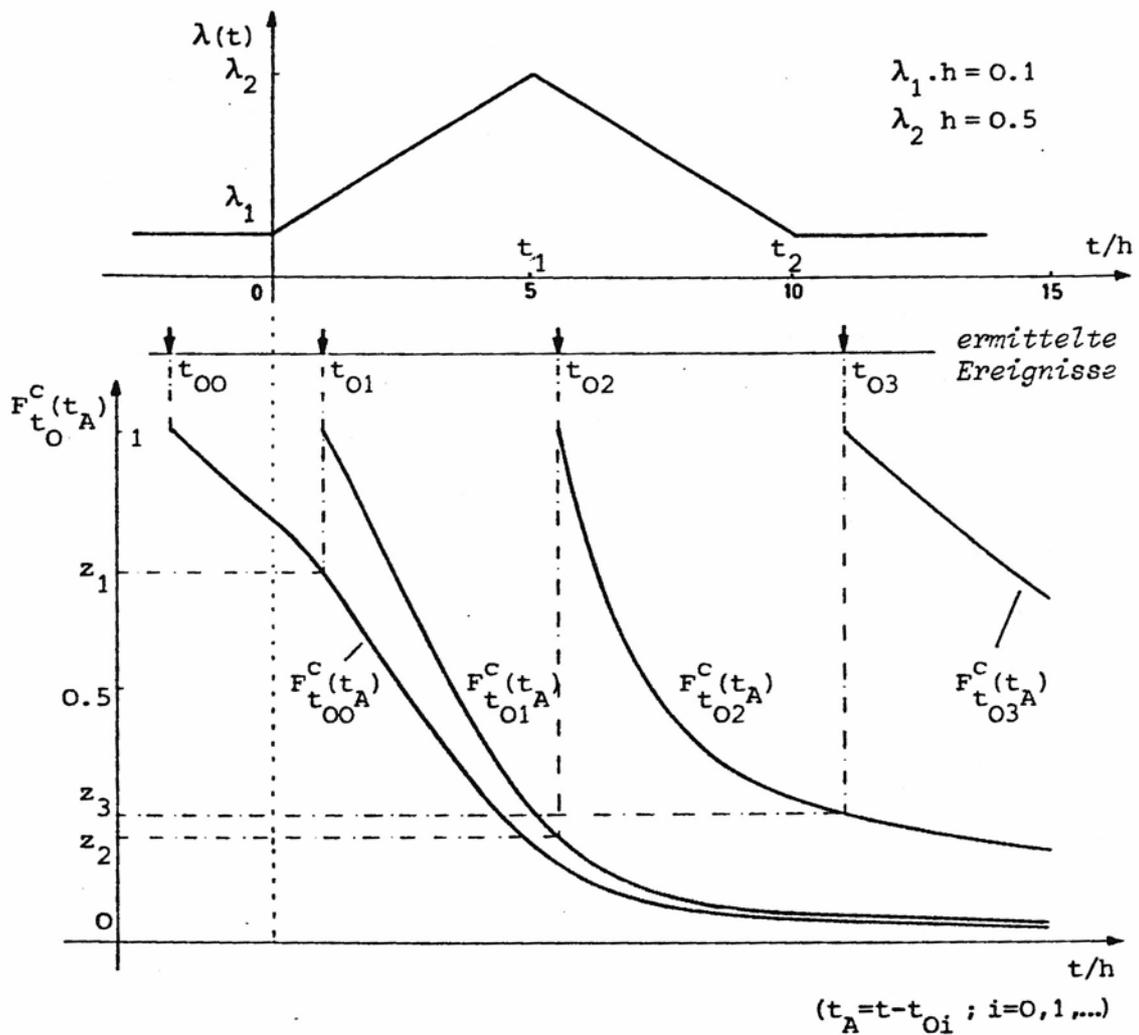
$$F_{t_0}(t_A) = 1 - \exp(-\lambda_1 t_A - K(t_0, t_A))$$

mit Korrekturterm 
$$K(t_0, t_A) = \int_{t_0}^{t_0+t_A} \lambda_{\ddot{U}}(t) \cdot dt$$

Beispiel: Dreieck-Überlastimpuls

$$\lambda(t) = \lambda_1 + \lambda \ddot{U}(t)$$

$$\text{mit } \lambda \ddot{U}(t) = \begin{cases} \frac{t}{t_1}(\lambda_2 - \lambda_1) & 0 \leq t < t_1 \\ \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1}(\lambda_2 - \lambda_1) & t_1 \leq t < t_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



zeitabhängige Zwischenankunftsverteilungsfunktion:

$$F_{t_0}(t_A) = 1 - e^{-\lambda_1 t_A - K(t_0, t_A)}$$

mit Korrekturterm  $K(t_0, t_A)$

$t_0 < 0$

$$K(t_0, t_A) = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \cdot \begin{cases} 0 & t_0 \leq t < 0 \\ \frac{t^2}{t_1} & 0 \leq t < t_1 \\ t_2 - \frac{(t_2 - t)^2}{t_2 - t_1} & t_1 \leq t < t_2 \\ t_2 & t \geq t_2 \end{cases}$$

$0 \leq t_0 < t_1$

$$K(t_0, t_A) = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \cdot \begin{cases} \frac{t^2 - t_0^2}{t_1} & t_0 \leq t < t_1 \\ t_2 - \frac{t_0^2}{t_1} - \frac{(t_2 - t)^2}{t_2 - t_1} & t_1 \leq t < t_2 \\ t_2 - \frac{t_0^2}{t_1} & t \geq t_2 \end{cases}$$

$t_1 \leq t_0 < t_2$

$$K(t_0, t_A) = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \cdot \begin{cases} \frac{(t_2 - t_0)^2 - (t_2 - t)^2}{t_2 - t_1} & t_0 \leq t < t_2 \\ \frac{(t_2 - t_0)^2}{t_2 - t_1} & t \geq t_2 \end{cases}$$

$t_0 \geq t_2$

$$K(t_0, t_A) = 0$$

Bestimmung von  $\lambda(t)$  aus Messungen:

Einteilung der Meßperiode in gleich lange Intervalle der Breite  $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ .

Messung der Anzahl der Ankünfte  $N_i$  in Intervall  $i$ :  $\lambda_i(t) = N_i/\Delta t \quad t_{i-1} \leq t < t_i$

Zur Erhöhung der statistischen Signifikanz über mehrere Messungen mitteln

(Problem: Wahl der Intervallbreite  $\Delta t$ : Kompromiß zwischen zu gezacktem und zu glattem Aussehen von  $\lambda(t)$ )

### 9.3 Bedingte Verteilungen (LK 8.5.1)

- Verteilung der Zufallsvariablen  $X(S)$  hängt von einem anderen Parameter  $S$  ab.  
Beispiele für  $S$ :
  - Systemzustand
  - andere Zufallsvariable
- Spezifiziere eine Verteilungstyp und Verteilungsparameter für alle Werte von  $S$
- Realisiere  $X(S)$  mittels der dazugehörigen Verteilung
- Für die Reduktion von Modellkomplexität geeignet
- Beispiel:
  - Anzahl der Ankünfte  $X$  eines Poisson-Prozesses innerhalb eines Intervalls fester Größe  $L$  ist Poisson-verteilt (Einsparung der Modellierung der Ankünfte)
  - Annahme: Intervalllänge  $L$  nicht konstant  
Anzahl von Ankünften kann durch  $X(L)$  modelliert werden.

### 9.4 Mehrdimensionale Zufallsvariablen (LK 8.5.2)

- Realisierung mehrerer gleichzeitiger Zufallsvariablen  $X_j(t_i)$
- $X_j(t_i)$  hängt nicht von Vorgängervariablen  $X_j(t_{i-1})$  ab aber von anderen gleichzeitigen Variablen z.B.  $X_{j-1}(t_i)$
- Beispiel: Intervalllänge  $L$  und Anzahl von Ankunftsereignissen  $X$ 
  - Realisierungsmöglichkeit durch bedingte Verteilungen
- Im Allgemeinen müssen gleichzeitige ZV nicht unabhängig sein, insbesondere kann gelten:  $c_{jk} = \text{COV}(X_j, X_k) \neq 0$ 
  - Realisierungsmöglichkeiten bei gegebener Kovarianzmatrix: Mehrdimensionale Normal bzw. Lognormalverteilungen (LK 8.5.2)

### 9.5 Stochastische Prozesse (LK 6.10.3, 8.5.6)

Zufallsvariablen, deren Realisierung von Vorgängerzufallsvariablen abhängt, können durch einen stochastischen Prozess modelliert werden. Es handelt sich hier nicht mehr um IID ZV!

Beispiel: Autoregressiver Prozess (AR)

$$\text{Erzeugungsvorschrift: } X_i = \mu + \left( \sum_{0 < k \leq p} \phi_k \cdot (X_{i-k} - \mu) \right) + \varepsilon_i$$

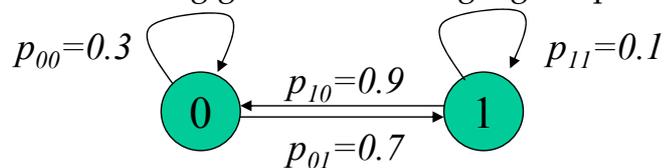
- $p$ : Ordnung des Prozesses (=Anzahl berücksichtigter Vorgänger-ZVs)
- $\mu$ : Mittelwert der  $X_i$
- $\varepsilon_i$ : normalverteilte Zufallsvariable mit Mittelwert 0
- $\phi_k$ : Wichtungskoeffizienten

Es gibt noch viele andere ähnliche stochastische Prozesse. Literatur dazu findet man unter dem Stichwort „Zeitreihen“ (R. Schlittgen, B. Streitberg: Zeitreihenanalyse, Oldenbourg, 1995)

## 9.6 Memory Markov Chain (MMC)

### 9.6.1 Markovketten

- Zustandsraum  $S = s_0 \dots s_{n-1}$  (z.B.  $\{0,1\}$ )
- Zufallsabhängige Zustandsübergänge, Bsp:



- Wahrscheinlichkeit des nächsten Zustandes hängt vom aktuellen Zustand ab
- Entspricht bedingter Zustandsübergangswahrscheinlichkeitsverteilung
  - $p_{i,j}$  ist dabei die Wahrscheinlichkeit für eine Zustandsänderung von  $s_i$  nach  $s_j$
  - Es gilt:  $\sum_j p_{i,j} = 1$
  - Anordnung der Übergangswahrscheinlichkeiten in der Zustandsübergangsmatrix  $P$ , Bsp.:  $P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.9 & 0.1 \end{pmatrix}$

- Folge der mit Hilfe von  $P$  erzeugten ZV nennt man Markovkette
- Die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Markov-Kette nach  $k$  Übergängen im Zustand  $s_m$  befindet wird mit  $\pi_k(s_m)$  bezeichnet.
- $\pi_k = (\pi_k(s_0) \dots \pi_k(s_{n-1}))$  charakterisiert Wahrscheinlichkeitsverteilung des Zustandes nach  $k$  Zustandsübergängen
- Sie kann berechnet werden durch  $\pi_k = \pi_{k-1} \cdot P = \pi_0 \cdot P^k$
- Durchschnittliche Zustandswahrscheinlichkeit der ersten  $k$  Zustände hängt

vom Anfangszustand ab:  $\bar{\pi}(k) = \frac{1}{k} \sum_{0 \leq j < k} \pi_j = \pi_0 \cdot \left( \frac{1}{k} \sum_{0 \leq j < k} P^j \right)$

- Der Grenzwert  $\pi = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\pi}(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{0 \leq j < k} \pi_j = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \pi_0 \cdot \left( \frac{1}{k} \sum_{0 \leq j < k} P^j \right) \right)$  konvergiert immer und wird als stationäre Zustandsverteilung bezeichnet.
- Es gilt:  $\pi = \pi \cdot P$  ( $\pi$  ist Eigenvektor von  $P$  zum Eigenwert 1, existiert immer für stochastische Matrizen)

- Falls P nicht zerlegbar ist, ist die stationäre Zustandsverteilung  $\pi$  unabhängig vom Anfangszustand  $\pi_0$  und somit eindeutig.

- Sie ist in jeder Zeile der Matrix  $P^\infty = \begin{pmatrix} \pi \\ \vdots \\ \pi \end{pmatrix}$  enthalten. Bsp.:

$$P^\infty = \begin{pmatrix} 0.5625 & 0.4375 \\ 0.5625 & 0.4375 \end{pmatrix}$$

- Einfache Systeme können als Markovkette modelliert und simuliert werden.

## 9.6.2 Struktur und Parametrisierung der MMC

Literatur: O. Rose, „A Memory Markov Chain for VBR Traffic With Strong Positive Correlations“, 16<sup>th</sup> International Teletraffic Congress, Edinburgh

### Problem

- korrelierte Zufallsvariablen, deren Korrelationen sich nicht oder nur schwer mittels herkömmlicher stochastischer Prozesse beschreiben lassen.
- Beispiel: Folge von Paketgrößen komprimierter Sprachproben  
31, 31, 31, 31, 11, 4, 4, 4, 12, 4, 4, 31, 31, 31, 11, 4, 4, 4, 12, 4, 4, 31, 31, 11, 4, 4, 4, 12, 4, 31, ...

### Idee

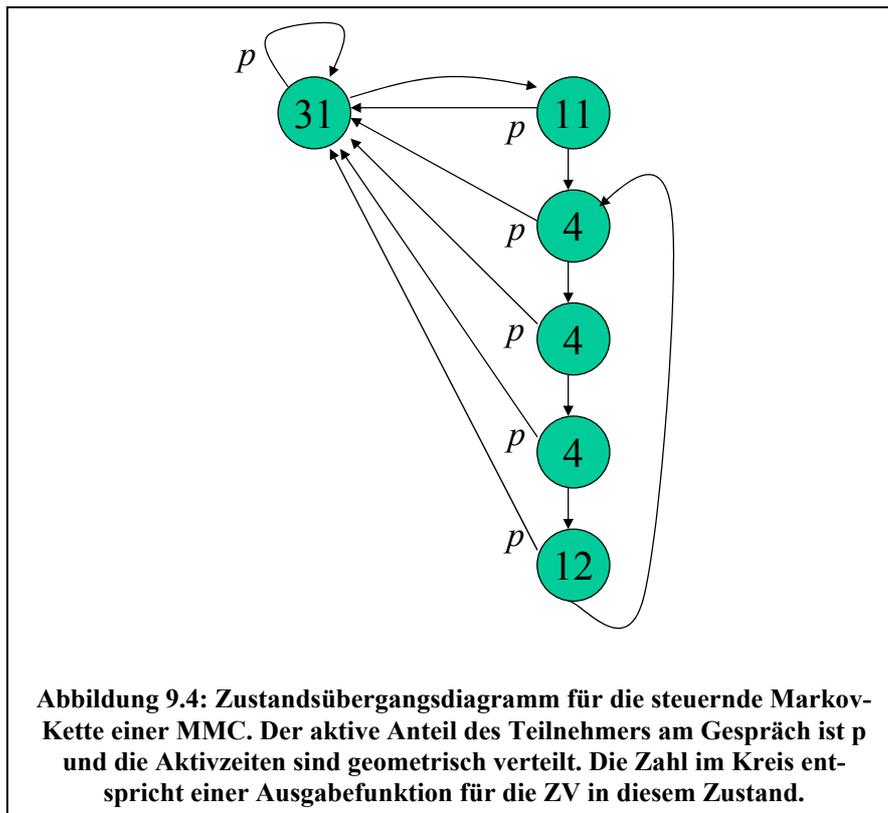
- Eine Variable S charakterisiert den Zustand eines Prozesses
- Für jeden Zustand gibt es eine Bedingte Verteilung, die zur Realisierung einer Zufallsvariable genutzt wird.
- Nach jeder Realisierung einer Zufallsvariable kann sich der Zustand S ändern.

### Simulation

- Realisierung der ZV gemäß der Verteilungsfunktion für X(S)
- Berechnung des nächsten Zustandes der Markov-Kette gemäß der diskreten von S=i abhängigen Verteilungsfunktion  $(j, p_{i,j})_{j \in \text{Dom}(S)}$

Übergangsmatrix passend zum obigen Beispiel und zur Abbildung 9.4

$$P = \begin{bmatrix} p & 1-p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 1-p & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 1-p & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & 1-p & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p \\ p & 0 & 1-p & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



### Parametrisierung der MMC

- $MMC(W, M_s, M_a)$
- Parameter: Fensterlänge  $W$ , Stichprobenzustandsgröße  $M_s$ , Durchschnittszustandsgröße  $M_a$
- Stichprobenmenge  $x_1, \dots, x_N$
- $\bar{x}_i = \frac{1}{W} \cdot \sum_{k=i-W} x_k$  für  $i=W+1, \dots, N$
- Generierung von Paaren (sample, average) =  $(x_i, \bar{x}_i)$
- Reduktion der Paare auf einen geeigneten Zustandsraum

- Zustandsraum  $(m_i^s, m_i^a) \in \{1, \dots, M_s\} \times \{1, \dots, M_a\}$

$$m_i^s = \begin{cases} 1 & x_i = \min_j(x_j) \\ \left\lceil \frac{x_i - \min_j(x_j)}{\max_j(x_j) - \min_j(x_j)} \cdot M_s \right\rceil & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$m_i^a = \begin{cases} 1 & \bar{x}_i = \min_j(\bar{x}_j) \\ \left\lceil \frac{\bar{x}_i - \min_j(\bar{x}_j)}{\max_j(\bar{x}_j) - \min_j(\bar{x}_j)} \cdot M_a \right\rceil & \text{otherwise} \end{cases}$$

- Zuordnung  $(x_i, \bar{x}_i) \sim (m_i^s, m_i^a)$
- Aufzählung der Zustände  $(m_i^s, m_i^a)$  aufsteigend nach absoluter Ordnung
- Bestimmung der Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix  $P$  anhand der Zeitreihe  $(m_i^s, m_i^a)$
- Bestimmung der stationären Zustandsverteilung  $\pi$
- Assoziation der Zustände  $1, \dots, M_s$  mit einer Ausgabefunktion  $s(j)$  für Zufallsvariablen:

$$s(j) = \frac{\sum_{W < i \leq N} \delta(m_i^s, j) \cdot x_i}{\delta(m_i^s, j)}$$

$$\delta(m_i^s, j) = \begin{cases} 0 & m_i^s \neq j \\ 1 & m_i^s = j \end{cases}$$

- Vektor  $s$  enthält die zu  $\pi$  entsprechenden ZV-Größen und  $\text{diag}(s)$  ist die dazu entsprechende Diagonalmatrix.
- Vergleich von empirischer und theoretischer Korrelation
  - Empirische Korrelation (siehe Kapitel 2, TIAutocorrelationCounter)
    - $\overline{\text{COV}}[X, Y] = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{0 \leq i < n} E[(X_i - \bar{X}(n)) \cdot (Y_i - \bar{Y}(n))]$
  - Theoretische Korrelation (siehe Kapitel 2)
    - Berechnung der Momente:  $E[X^k] = \pi \cdot \text{diag}(s^k) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$
    - Allgemein:  
 $\text{Cov}[X, Y] = E[(X - E[X]) \cdot (Y - E[Y])] = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y]$   
 analog für Markovketten:
    - $\text{Cov}(k) = \pi \cdot \text{diag}(s) \cdot P^k \cdot \text{diag}(s) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - E[X^2]$
- Falls empirische und theoretische Korrelation nicht gut übereinstimmen, wähle andere Parameter  $W, M_s, M_a!$

## 9.7 Zufallsgraphen

- Repräsentation von Rechnernetzen als Graphen  $G=(V, E)$ 
  - $V$ : Knoten = Router
  - $E$ : Kanten = Links
    - ungerichtet = bidirektional (hier)
    - gerichtet = unidirektional (auch möglich)
  - Knotengrad  $\delta(v)$ ,  $v \in V$ : Anzahl der Links mit denen  $v$  verbunden ist
  - Durchschnittlicher Knotengrad  $\delta^* = 2 \cdot |E| / |V|$
  - Durchmesser des Netzes: längster kürzester Weg zwischen zwei Knoten im Netz
  - Zusammenhang:
    - Einfach zusammenhängend: Löschen eines Knotens erzeugt mindestens zwei nicht-zusammenhängende Zusammenhangskomponenten. Das Netz „zerfällt“.
    - Definition analog für Links möglich.
    - Definition analog für mehrere Knoten möglich.
    - Beeinflusst Anzahl (disjunkter bzw. möglicher) Pfade zwischen je zwei Knoten und somit die Ausfallsicherheit in einem Netz.
- Simulation typischer Netze aus der Realität
  - Problem: Aussagen nur für dieses Netz gültig
  - Frage: Abhängigkeit der Ergebnisse von der Topologie?

### 9.7.1 Zufallsgraphen mit vorgegebenen Eigenschaften

- Vorgegebene Anzahl von Knoten wird in einer Ebene erzeugt
- Methoden zum Verbinden der Knoten durch Kanten
  1. Einfaches Modell: Kante zwischen zwei Knoten  $u$  und  $v$  existiert mit
    - statischer Wahrscheinlichkeit  $p$
    - Nachteile:
      - Anzahl der Links ist variabel, durchschnittlicher Knotengrad ist nicht kontrollierbar
      - Verbindungen über weite Strecken sind genauso wahrscheinlich wie die zwischen sehr nahen Knoten in der euklidischen Ebene = keine Lokalität (= räumliche Begrenztheit) der Links
  2. Waxman-Modell: Kante zwischen zwei Knoten  $u$  und  $v$  existiert mit
    - Entfernungssensitiver Wahrscheinlichkeit  $P(u, v) = \alpha \cdot \exp(-d/(\beta \cdot L))$ , wobei
      - $0 < \alpha, \beta \leq 1$  gilt,
      - $d$  die euklidische Distanz ist und
      - $L$  die maximale Distanz zwischen zwei Knoten ist.
    - Es gibt viele Variationen dieser Erzeugungsart

3. Methode zur Kontrolle des minimalen, durchschnittlichen und maximalen Knotengrades
  - Iteratives Hinzufügen von  $|E| = \delta \cdot |V| / 2$  Kanten
  - Vermeidung von Schleifen und Parallelen
  - Beachtung des minimalen und maximalen Knotengrades
  - Zufälliges Verbinden von Knotenpaaren, die diese Voraussetzungen erfüllen
4. Kombination aus 2. und 3.
  - $V_\alpha$ : Menge der für einen Link in Frage kommenden Quellknoten mit folgenden Invarianten:
    - Anfangs:  $\deg(v) = 0 \quad v \in V_\alpha$
    - Dann:  $\deg(v) \leq \deg_{\min} \quad v \in V_\alpha$
    - Dann:  $\deg(v) \leq \deg_{\max} \quad v \in V_\alpha$
  - Wähle zufällig  $v_\alpha \in V_\alpha$
  - $V_\omega$ : Menge der für einen Link  $(v_\alpha, v_\omega)$  in Frage kommenden Zielknoten mit denselben Randbedingungen wie oben und zusätzlich
    - Vermeidung von Schleifen
    - Vermeidung von Parallelen
  - Gewicht einer Kante wie im Waxman-Modell:  

$$P(u, v) = \alpha \cdot \exp(-d / (\beta \cdot L))$$
  - Induktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zielknoten auf  $V_\omega$ : 
$$p_{v_\alpha}(w) = \frac{P(v_\alpha, w)}{\sum_{v \in V_\omega} P(v_\alpha, v)}$$
  - Wahl von  $v_\omega \in V_\omega$  gemäß dieser Verteilung.

### 9.7.2 Tools zur Modellierung typischer Internet-Strukturen

- Die Modellierung von typischen Internet-Strukturen (Zugangsnetze, Kernnetze, Autonome System, ...) ist ein eigenes Forschungsgebiet.
  - Überblick und mehr Material unter <http://topology.eecs.umich.edu/>
- Es gibt Topologie-Generatoren, die typische Graphen liefern
  - <http://www.cs.bu.edu/brite/>
  - <http://www.cc.gatech.edu/projects/gtitm/>
  - <http://topology.eecs.umich.edu/inet/>