수리 영역

출 | 제 | 경 | 향

6월 평가원 모의고사는 수능에 대한 출제 경향과 문제의 형식을 미리 제시하여 학생들로 하여금 수능을 미리 대비하도록 하는 성격의 시험이다. 올해 표준점수, 백분위의 부활과 관련해서 이번 시험이 시사하는 바가 올 한해 학생들의 공부에 큰 영향을 미칠 것이다.

6월의 모의고사의 범위는 제한되어 있어 단원별 비중의 의미는 그리 크지 않으므로 각 문항의 출제 형식이나 난이도를 살피는 것이 더 의미 있을 것이다.

6월 모의고사의 출제 경향과 난이도는 작년과 비교하였을 때 큰 폭으로 변했다. 물론 9월 평가원 모의고사에서 재조정 될 여지가 있긴 하지만 이 시험의 성격이 그대로 간다면 학생들의 지금까지의 학습전략에 큰 폭의 수정이 필요하리라 본다.

물론 계산 능력, 추론 능력, 수학 내·외적 문제 해결 능력과 실생활과 관련된 문제 등의 평가 유형의 변화나 <보기>형 문제의 형식이나 새로운 기호를 도입한 문제 등의 외형적 변화는 별로 없는 듯 하지만 난이도에 있어서는 큰 폭의 조정이 있었다.

지금까지와는 달리 중간 정도 난이도의 문제도 여러 단계를 거쳐서 답을 구하게 하거나 상당한 노력이 요구되는 계산 과정을 요구하거나 해서 만만한 문제가 거의 없었다.

특히, 수리 (가)형의 경우는 작년 수능이 지나치게 쉬워서 체감 난이도가 현저히 증가하리라 예상된다.

수리 (나)형의 경우도 계산 과정이 복잡하고 시간이 많이 걸릴만한 문제가 많아서 큰 폭의 점수하락이 예상된다.

매년 평가원 모의고사에 등장하던 새로운 유형의 문제나 개념 학습에 중요한 시사점을 줄만한 잘 만들어진 문제가 보이지 않고 기존의 문제들을 여러 번 비틀어서 풀이 과정을 길게 요구하여 어렵게 만든 문제들이 많이 보이는 것이 이번 시험의 아쉬운 점이었다. 문제를 잘 이해하고 문제에서 묻고자 하는 착안만 정확히 하면 쉽게 답을 계산할 수 있는 기존의 수능 문제들에 적응한 학생들에게 상당한 당혹감을 주고 자신감을 떨어뜨릴 가능성이 커서 9월 평가원 모의고사까지 많은 학생들이 공부 방향을 잘 잡지 못하고 어려운 문제들에만 집착하여 기본 개념에 대한 학습이 소홀해지지 않을까 우려되기도 한다.

표준점수와 백분위의 부활로 (가)형, (나)형 표준점수의 균형에 매달려 출제한 결과가 아닐까 하는 생각이 든다.

(가)형, (나)형 모두 <보기>형 문제의 수가 증가하고 중간 난이도의 문제수가 감소하고 고난이도의 문제수가 증가하였는데 (가)형의 경우가 더 심하다.

가형 선택 미분과 적분 29번의 경우 삼각함수 공식을 반복적으로 적용하는 복잡한 계산이 많이 요구되어 끝까지 문제를 푸는데 성공한 학생 수가 적으리라 보이고 또한 5, 7, 8, 9번 등 초반에 나오는 문제의 계산도 불편할 정도로 여러 단계를 요구하였다.

(가), (나)형 공통 문제인 12, 13, 15번의 경우도 착안점을 잡기가 쉽지 않았고 계산도 간단하지 않았다. 17번의 경우 처럼 함수의 그래프에 대한 상당한 이해를 요구하고 직관적으로 알기 힘든 내용을 계산하게 하는 문제도 학생들을 꽤 괴롭혔을 것으로 보인다.

(나)형의 경우도 위의 공통 문항들과 함께 10번, 29번처럼 반복적인 계산을 하게하거나 16번, 21번과 같이 수열의 성질을 계산을 통해서 확인하게 하는 문제들에 시간을 어느 정도 소모하게 되어 나중에 어려운 문제를 풀 때 시간이 매우 부족하여 문제를 다 풀지 못하는 일들도 발생하게 했을 것이다.

작년 수능에 비해 (가)형의 난이도를 크게 올리는 과정에서 (나)형도 공통문항들이 까다로워짐으로써 난이도가 크게 상승하여 실제로 점수의 하락폭은 (나)형 학생들에게 더 클 것으로 보인다.

학 | 습 | 대 | 책

수험생들 입장에서 출제 경향과 난이도도 중요하겠지만 더 중요한 것은 자신만의 공부이다.

빠르고 정확한 계산, 기본적인 개념에 대한 철저한 이해, 새로운 수학 기호를 받아들이고 파악하는 능력, 기본 개념에 바탕을 둔 추론 능력 등은 출제 경향과 난이도와 관계없이 수학에서 필요한 중요한 점들이다.

앞으로 수능 당일까지 적지 않은 기간이 남은 만큼 수리 영역의 전 범위에 걸쳐 학습하여야 할 내용을 다시 한 번 점검하고, 쉼 없이 공부하도록 하자.

• 수 리 '가' 형 •

정 | 답

1. ⑤	2. ②	3. ⑤	4. ①	5. ①
6. ①	7. ③	8. ③	9. ④	10. ⑤
11. ②	12. ④	13. ②	14. ④	15. ⑤
16. ③	17. ④	18. 12	19. 21	20. 16
21. 25	22. 80	23. 32	24. 13	25. 30

〔미분과 적분〕

26. ③ 27. ③ 28. ② 29. ① 30. 65

〔확률과 통계〕

26. ① 27. ② 28. ⑤ 29. ③ 30. 14

〔이산수학〕

26. ① 27. ⑤ 28. ② 29. ③ 30. 15

출 | 제 | 문 | 항 | 분 | 석

문항	난이도	출제 단원	유의점
1	하	지수와 로그	간단한 지수계산
2	하	함수의 극한	부정형의 계산
3	하	행렬	역행렬과 행렬
4	중	함수의 극한	미정계수의 결정법
5	중	방정식과 부등식	고차부등식
6	하	통계	확률밀도 함수
7	중	미분	접선의 방정식
8	상	방정식과 부등식	분수부등식
9	상	방정식과 부등식	무리 방정식
10	상	함수의 극한	함수의 연속성
11	중	함수의 극한	함수의 연속성
12	중	수열	증명의 완성
13	중	지수/로그함수	외적영역의 해결능력
14	상	수열의 극한	무한등비급수의 활용
15	상	수열	수열과 규칙성
16	상	수열	수열과 참·거짓
17	상	지수/로그함수	로그함수의 그래프
18	하	미분	속도와 미분
19	하	미분	미분가능성
20	중	미분	극대극소
21	중	방정식과 부등식	분수 부등식
22	중	지수와 로그	로그함수와 최대·최소
23	중	미분	극대극소
24	상	확률	여사건의 확률
25	상	순열과 조합	경우의 수
26	중	삼각함수	삼각방정식
27	중	지수함수의 극한	e의 정의
28	상	삼각함수의 극한	$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$
29	상	삼각함수	탄젠트 덧셈정리
30	상	삼각함수의 극한	도형을 삼각함수로 나타내기
26	중	대표값	평균과 중앙값
27	중	확률	조건부 확률
28	중	자료의 분석	누적도수분포표
29	중	확률	경우의 수 구하기
30	상	경우의 수	목표 도달방법으로 바꾸어 생각하기
26	중	경우의 수	곱의 법칙
27	중	그래프	연결상태가 같은 그래프
28	상	경우의 수	곱의 법칙
29	상	그래프	해밀턴회로, 오일러회로, 색칠하기
30	중	그래프	오일러회로, 조나누기 경우의 수

풀 | 이

1. $(\sqrt{2\sqrt{6}})^4=(2\sqrt{6})^2=2^2\times 6=24$

2. $-x=t$로 놓으면

$x\to-\infty$이면 $t\to\infty$

$\therefore$ (주어진 식)$=\lim_{t\to\infty}\dfrac{-t+1}{\sqrt{t^2-t}+t}$

$=\lim_{t\to\infty}\dfrac{-1+\dfrac{1}{t}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{t}}+1}$

$=-\dfrac{1}{2}$

3. B가 역행렬이 존재하므로 $BA=B+E$의 양변의 왼쪽에 B^{-1}를 곱하면

$A=E+B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\-2&4\end{pmatrix}$

따라서, 행렬 A의 모든 성분의 합은 3이다.

4. $\lim_{x\to1}\dfrac{g(x)-2x}{x-1}$의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to1}\{g(x)-2x\}=0$

$\therefore\ g(1)=2$

$\therefore\ \lim_{x\to1}\dfrac{f(x)\cdot g(x)}{x^2-1}$

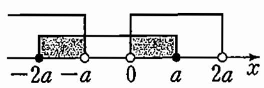
$=\lim_{x\to1}\dfrac{(x-1)(g(x)-1)\cdot g(x)}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to1}\dfrac{(g(x)-1)\cdot g(x)}{x+1}$

$=\dfrac{(g(1)-1)\cdot g(1)}{2}$

$=1$

5.



해는 $\begin{cases}0<x\le a\\-2a\le x<-a\end{cases}$

해의 정수해가 총 4개인데,

i) $a=$(정수)일 때

정수 x의 개수는 $0<x\le a$에서 a개

$-2a\le x<-a$에서 $(-a)-(-2a)=a$개

$\therefore\ 2a=4,\ a=2$

이때 정수해는 1, 2, -3, -4

ii) $a\ne$(정수), $2a\ne$(정수)일 때

정수 x의 개수는 $0<x\le a$에서 $[a]$개

$-2a\le x<-a$에서 $[-a]-([-2a]+1)+1$개

$[a]+[-a]-([-2a]+1)+1$

$=[a]+[-a]-[-2a]$

$=-1-[-2a]=4$

$[-2a]=-5$

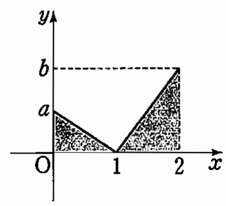
$-5<-2a<-4\quad(\because\ 2a\ne(\text{정수}))$

$\dfrac{5}{2}>a>2$

이때 정수해는 1, 2, -3, -4

$\therefore\ 2\le a<\dfrac{5}{2}$일 때 정수해는 1, 2, -3, -4이고 그 합은 -4

6. 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프를 그려보면 빗금친 부분의 넓이가 1이므로



$\dfrac{a+b}{2}=1,\ a+b=2$ ………… ㉠

$P(1\le X\le2)=\dfrac{b}{2}=\dfrac{a}{6},\ a=3b$ ………… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=\dfrac{3}{2},\ b=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ a-b=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}=1$

7. P(1, 0)에서 법선의 방정식을 구하면

$f'(1)=a+1$이므로

$y=-\dfrac{1}{a+1}(x-1)$ (단, $a\ne-1$) ………… ㉠

($\because$ $f'(1)=0$이면 법선이 x축에 수직이 되어 부적합)

㉠과 $y=f(x)$가 서로 다른 세 점에서 만나므로

$x(x-1)(ax+1)=-\dfrac{1}{a+1}(x-1)$

이것이 서로 다른 세 실근을 갖는다.

$(x-1)\left\{x(ax+1)+\dfrac{1}{a+1}\right\}=0$

$ax^2+x+\dfrac{1}{a+1}=0$이 $x=1$인 근을 갖지 않으므로, 서로 다른 두 실근을 가지면 된다.

$a(a+1)x^2+(a+1)x+1=0$

$D=(a+1)^2-4a(a+1)>0$

$(a+1)(3a-1)<0$

$\therefore\ -1<a<\dfrac{1}{3}$

이때 $a\ne0$이므로

$-1<a<0$ 또는 $0<a<\dfrac{1}{3}$

8. 조건 (가)에 의해 모든 실수 x에 대해

『$f(x)>0$이고 $g(x)>0$』이거나 ……………………… ㉠

『$f(x)<0$이고 $g(x)<0$』 ……………………………… ㉡

또,

(나) $\dfrac{g(x)}{f(x)}\times\dfrac{1}{h(x)}\geq 0$

그런데 (가)에 의해 모든 실수 x에 대해

$\dfrac{g(x)}{f(x)}>0$

이므로 (나)는

$\dfrac{1}{h(x)}\geq 0 \quad \therefore\ h(x)>0$ ……………………………… ㉢

ㄱ. $f(x)=0$이 실근을 가지면 (가)에 모순이므로 방정식 $f(x)=0$은 실근을 갖지 않는다. $\therefore$ 참

ㄴ. 위 ㉠의 경우이면 $g(x)>0$의 해집합은 실수 전체의 집합

위 ㉡의 경우이면 $g(x)>0$의 해집합은 공집합

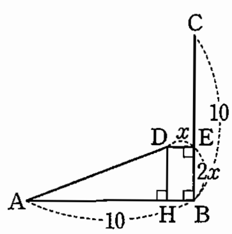
$\therefore$ 참

ㄷ. $|g(x)|>0,\ h(x)>0$이므로

항상, $|g(x)|+h(x)>0$이다.

즉, 방정식 $|g(x)|+h(x)=0$은 실근을 갖지 않는다. $\therefore$ 거짓

9. D에서 변 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{AD}=\sqrt{\overline{AH}^2+\overline{DH}^2}$

$=\sqrt{(10-x)^2+(2x)^2}$

$=\sqrt{5x^2-20x+100}$

따라서, 영희의 소요시간은

$\dfrac{\overline{AD}+\overline{DE}+\overline{EC}}{6}$

$=\dfrac{\sqrt{5x^2-20x+100}+x+(10-2x)}{6}$

$=\dfrac{\sqrt{5x^2-20x+100}+10-x}{6}$

철수의 소요시간은

$\dfrac{\overline{AB}}{3}+\dfrac{\overline{BC}}{6}=\dfrac{10}{3}+\dfrac{10}{6}=5$

이므로

$\dfrac{\sqrt{5x^2-20x+100}+10-x}{6}=3$

$\sqrt{5x^2-20x+100}=x+8$

$5x^2-20x+100=x^2+16x+64$

$4x^2-36x+36=0$

$x^2-9x+9=0$

$\therefore\ x=\dfrac{9\pm\sqrt{81-36}}{2}=\dfrac{9\pm\sqrt{45}}{2}=\dfrac{9\pm 3\sqrt{5}}{2}$

그런데 $\overline{BE}=2x$에서 $0<2x<10 \quad \therefore\ 0<x<5$

$\therefore\ x=\dfrac{9-3\sqrt{5}}{2}$

10. $h(x)=\begin{cases}f(x) & (x<a)\\ g(x) & (x\geq a)\end{cases}$라 하자.

$f(x),\ g(x)$가 다항함수이므로 $h(x)$는 모든 실수에서 연속 $\Leftrightarrow$ $h(x)$가 $x=a$에서 연속

$h(x)$가 $x=a$에서 연속이려면

$\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)=g(a)$ ……………………………………… ㉠

그런데 $\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a)$이므로

㉠ : $f(a)=g(a)$

즉, $x=a$에서 $h(x)$가 연속이려면 a가 방정식 $f(a)=g(a)$의 실근이면 된다.

ㄱ. 방정식 $x^2=x+1$의 실근이 2개이므로 $\therefore$ 참

ㄴ. $N(f,\ g)=n$ (n : 음이 아닌 정수)라 하면 n은 방정식 $f(a)=g(a)$의 실근의 개수이다.

$N(g,\ f)=m$(m : 음이 아닌 정수)라 하면

m은 방정식 $g(a)=f(a)$의 실근의 개수이다.

$\therefore\ m=n$

$\therefore$ 참

ㄷ. $f(a)=g(a)$의 실근의 개수를 n개라 하면

$N(f,\ g)=n$

한편, $(h\circ f)(a)=(h\circ g)(a)$

$\Leftrightarrow\ \{f(a)\}^3=\{g(a)\}^3$

$\Leftrightarrow\ f(a)=g(a)$이므로 $N(h\circ f,\ h\circ g)=n$

$\therefore$ 참

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

11. $y=f(g(x))$가 $x=1$에서 연속이므로

$f(g(1))=f(a)$ ……………………………………………… ㉠

$\displaystyle\lim_{x\to 1-0} f(g(x))=\lim_{x\to 1+0} f(g(x))=0$ ……………… ㉡

㉠, ㉡에서

$f(a)=\displaystyle\lim_{x\to 1} f(g(x))=0$

$f(x)=(x-1)(2x-1)(x+1)$에서

$f(a)=(a-1)(2a-1)(a+1)=0$

$a>1,\ f(a)=f(a+2)$이므로 $a=\dfrac{5}{2},\ 3,\ \cdots$

따라서, 구하는 a의 최솟값은 $\dfrac{5}{2}$이다.

12. x좌표의 차가 k인 변 AB를 택하는 경우의 수는 점 A의 x좌표가 $x=0$부터 $x=(n-k+1)$까지 가능하므로

$(n-k+1)+1=n-k+2$ ⬅ (가)

마찬가지로, 점 A의 y좌표는

$y=0$부터 $y=(n-k)$까지 가능하므로

$(n-k)+1=n-k+1$ ⬅ (나)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}\{(n+1)(n+2)-(2n+3)k+k^2\}$$
$$=n(n+1)(n+2)$$
$$-(2n+3)\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=\frac{n(n+1)}{6}(2n+4)$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$ ⬅ (다)

13. 초기 이산화탄소 농도 $C(0)=0.83$이고, 1시간뒤 즉 $t=1$일 때 이산화탄소 농도 $C(1)=0.43$이므로 주어진식에 $t=1$을 대입하면 환기량

$$Q=k\times\frac{V}{1}\log\frac{0.83-0.03}{0.43-0.03}=kV\cdot\log 2$$

이다. 이산화탄소 농도가 0.08%가 되는 t는

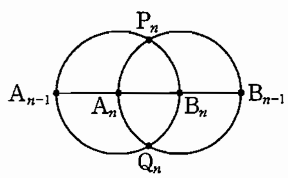
$$Q=k\times\frac{V}{t}\log\frac{0.83-0.03}{0.08-0.03}=\frac{4kV\log 2}{t}$$

를 만족한다. 그런데 환기량이 일정하므로

$$kV\log 2=\frac{4kV\log 2}{t}$$

$\therefore\ t=4$

14. 오른쪽 그림과 같이 n번째 얻어진 도형에 있는 두 원의 반지름의 길이를 r_n이라하면



$$\overline{A_nB_n}=\overline{A_nP_n}=\overline{B_nP_n}=r_n$$

이므로 $\angle P_nA_nB_n=\angle P_nB_nA_n=\frac{\pi}{3}$

두 호 $P_nA_nQ_n$, $P_nB_nQ_n$의 길이의 합

$$l_n=2\times r_n\times\frac{2}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi r_n$$

또 선분 $A_{n-1}B_{n-1}$의 삼등분점이 A_n, B_n이므로

$$\overline{A_nB_n}=\frac{1}{3}\overline{A_{n-1}B_{n-1}}$$

$$\therefore\ r_n=\frac{1}{3}r_{n-1}$$

따라서, 수열 l_n의 공비는 $\frac{1}{3}$, $r_1=\frac{8}{3}$이므로 초항

$$l_1=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{8}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n=\frac{\frac{32}{9}\pi}{1-\frac{1}{3}}=\frac{16}{3}\pi$$

15. $a_1+a_2=1+2$

$a_3+a_4=1+2+3+4$

$a_4+a_6=1+2+3+4+5+6$

$a_7+a_8=1+2+3+4+5+6+7+8$

$a_9+a_{10}=a_{11}+a_{12}=a_{13}+a_{14}$

$=1+2+\cdots+10=55$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{14} a_n=3+10+21+36+55+55+55$

$=235$

[다른풀이] 1번째줄, 2번째줄에 있는 전구는 14초가 될 때까지 모두 7번씩 켜지고 전구의 개수는 3개 이므로 3×7

3번째 줄, 4번째 줄에 있는 전구는 모두 7개가 있고 켜지는 횟수는 모두 6번씩이므로 7×6

이와 같은 방법으로

$$\sum_{n=1}^{14} a_n=3\times7+7\times6+11\times5+15\times4+19\times3$$
$$=235$$

16. ㄱ. $a_n=n$이면 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$

$$T_n=\frac{n^2(n^2-1)}{S_n}=2n(n-1)=2n^2-2n$$

$$b_n=T_n-T_{n-1}$$
$$=2n^2-2n-\{2(n-1)^2+2(n-1)\}$$
$$=4n-4$$ $\therefore$ 참

ㄴ. 수열 a_n의 첫째항을 a_1, 수열 b_n의 첫째항을 b_1라 하면

$$S_n=\frac{n\{2a_1+(n-1)d_1\}}{2},$$

$$T_n=\frac{n\{2b_1+(n-1)d_2\}}{2}$$

$S_nT_n=n^2(n^2-1)$에서 n^4의 계수를 비교하면

$\frac{d_1}{2}\times\frac{d_2}{2}=1$ $\therefore\ d_1d_2=4$ $\therefore$ 참

ㄷ. $a_n=2n$이면 $a_1=2\neq0$이다.

$S_n=n(n+1)$이므로 $T_n=n(n-1)=n^2-n$

$b_n=T_n-T_{n-1}=2n-2$가 돼서 b_n이 존재한다.

즉, $a_n\neq n$이면서 $a_1\neq0$이고 주어진 조건을 만족하는 a_n이 존재한다. $\therefore$ 거짓

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

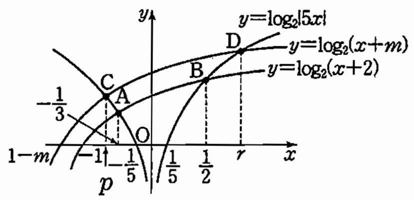
17. $y=\log_2|5x|$, $y=\log_2(x+2)$의 교점의 x좌표를 구하면 $|5x|=x+2$에서

$x>0$일 때 $5x=x+2$, $x=\frac{1}{2}$

$x<0$일 때 $-5x=x+2$, $x=-\frac{1}{3}$

$\therefore$ A$\left(-\frac{1}{3},\ \log_2\frac{5}{3}\right)$ $\therefore$ B$\left(\frac{1}{2},\ \log_2\frac{5}{2}\right)$

$y=\log_2|5x|$는 y축에 대하여 대칭인 함수이므로 $y=\log_2|5x|$, $y=\log_2(x+2)$, $y=\log_2(x+m)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. $m>2$이므로 그림에서 $r>\frac{1}{2}$, $p<-\frac{1}{3}$ $\therefore$ 참

ㄴ. $y=\log_2|5x|$, $y=\log_2(x+m)$의 교점을 구하면

$|5x|=x+m$에서 $x=\frac{m}{4},\ -\frac{m}{6}$

$\therefore$ C$\left(-\frac{m}{6},\ \log_2\frac{5m}{6}\right)$, D$\left(\frac{m}{4},\ \log_2\frac{5m}{4}\right)$

직선 AB의 기울기는

$$\frac{\log_2\frac{5}{2}-\log_2\frac{5}{3}}{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{6}{5}\log_2\frac{3}{2}$$

직선 CD의 기울기는

$$\frac{\log_2\frac{5m}{4}-\log_2\frac{5m}{6}}{\frac{m}{4}-\left(-\frac{m}{6}\right)}=\frac{12}{5m}\log_2\frac{3}{2}$$

$m>2$이므로 $\frac{12}{5m}<\frac{6}{5}$

따라서, 두 직선의 기울기는 서로 다르다.

$\therefore$ 거짓

ㄷ. B의 y좌표와 C의 y좌표가 같으므로

$\log_2\frac{5}{2}=\log_2\frac{5m}{6}$ $\therefore$ $m=3$

$\overline{BC}$가 공통이므로 $\overline{BC}$를 밑변으로 하면

$\triangle$ABC의 높이는 $\log_2\frac{5}{2}-\log_2\frac{5}{3}=\log_2\frac{3}{2}$

$\triangle$DBC의 높이는 $\log_2\frac{5m}{4}-\log_2\frac{5m}{6}=\log_2\frac{3}{2}$

따라서 $\triangle$ABC, $\triangle$DBC의 넓이는 같다.

$\therefore$ 참

18. P, Q의 속도를 구하면

$P'(t)=t^2+4$, $Q'(t)=4t$

두 점의 속도가 같아지는 시각은

$t^2+4=4t$, $(t-2)^2=0$

$\therefore$ $t=2$

시각 t일 때 두 점 사이의 거리는

$\overline{PQ}=\left|\frac{1}{3}t^3-2t^2+4t+\frac{28}{3}\right|$

에서 $t=2$일 때에는

$\overline{PQ}=\left|\frac{8}{3}-8+8+\frac{28}{3}\right|$

$=\frac{36}{3}$

$=12$

19. 각 구간에서 $f(x)$를 구하면

(ⅰ) $0<x<1$: $f(x)=2x-1$

(ⅱ) $x=1$: $f(1)=\frac{a+1}{2}$

(ⅲ) $x>1$: $f(x)=ax^b$

$x=1$에서 미분가능하므로

a) 연속조건 : $\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}f(x)=f(1)$

$\therefore$ $a=1$

b) 미분가능조건

$f'(x)=\begin{cases}2 & (x<1)\\ abx^{b-1} & (x>1)\end{cases}$

$\therefore$ $2=ab$

a)와 b)에서 $a=1$, $b=2$

$\therefore$ $a+10b=1+20=21$

20. ⅰ) $f'(x)=x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0$

$\therefore$ $x=3$에서 극솟값을 가진다.

$f(3)=\frac{1}{3}\cdot 3^3-3^2-3\cdot 3$

$=-9$

$\therefore$ $a=3$, $b=-9$

ⅱ) 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선은

$y-f(2)=f'(2)(x-2)$

$y=-3x-\frac{4}{3}$

$9x+3y+4=0$과 점 $(3,\ -9)$ 사이의 거리 d는

$d=\frac{|27-27+4|}{\sqrt{9^2+3^2}}=\frac{4}{\sqrt{90}}$

$\therefore$ $90d^2=90\times\frac{16}{90}=16$

21. $\frac{a}{x-2a}>1$, $\frac{a}{x-2a}-1>0$

$\frac{-x+3a}{x-2a}>0$

$(x-2a)(x-3a)<0$

$\therefore$ $2a<x<3a$ ………… ㉠

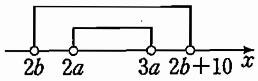
$\frac{10}{x-2b}>1$에서

$\frac{10-x+2b}{x-2b}>0$

$(x-2b)(x-10-2b)<0$

$\therefore$ $2b<x<2b+10$ ………… ㉡

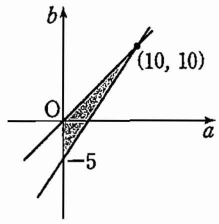
조건에서 ㉠은 ㉡에 포함되어야 한다.



$\therefore\ 2b \leqq 2a,\ 3a \leqq 2b+10$

$b \leqq a,\ 2b \geqq 3a-10$

그림으로 표현하면, 교점은 (10, 10)



따라서, 영역의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 10$

$=25$

22. i) $10 \leqq n < 81$이면 $[\log_9 n]=1$이므로

$\log_9 n-[\log_9 n]=\log_9\frac{n}{9}$이고

$\log_9\frac{n}{9}$이 최대이어야 하므로 $n=80$

ii) $81 \leqq n < 100$이면 $[\log_9 n]=2$이므로

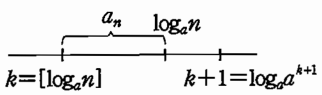
$\log_9 n-[\log_9 n]=\log_9\frac{n}{81}$이고

$\log_9\frac{n}{81}$이 최대이어야 하므로 $n=99$

따라서, i), ii)에서 $\log_9\frac{80}{9}>\log_9\frac{99}{81}$이므로

구하는 n은 80이다.

[다른풀이] $a_n=\log_9 n-[\log_9 n]$을 수직선 위에 나타내어보면 $[\log_9 n]=k$일 때



$\therefore$ n이 9^{k+1}보다 왼쪽에 있는 최대수일 때 즉 $9^{k+1}-1$일 때 a_n이 최대이다.

n이 두 자리수 이므로 $n=9^2-1=80$일 때 a_n이 최대이다.

23. $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 정수)
에서 기함수 조건($\because$ (가)) 때문에

$b=d=0$

따라서, $f(x)=ax^3+cx$이다.

(나)에서 $f(1)=a+c=5$ ……………………………… ㉠

또한 (다)에서

$1<3a+c<7$

㉠에서 $c=5-a$로 두면

$1<3a+5-a<7$

$-2<a<1$

$\therefore$ 정수 a는 -1과 0인데

삼차함수이므로 $a=-1$

또한, $c=6$

$\therefore\ f(x)=-x^3+6x$

미분하면

$f'(x)=-3x^2+6=0$

$x=\sqrt{2}$에서 극댓값을 가지므로

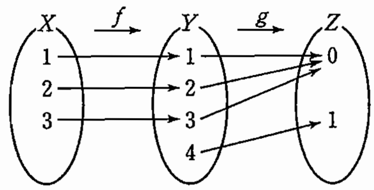
$m^2=\{f(\sqrt{2})\}^2$

$=(4\sqrt{2})^2$

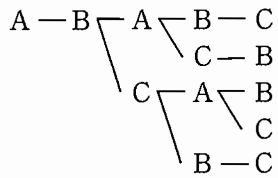
$=32$

24. 조건 (나)를 만족하는 함수 g의 개수는 $2^4-2=14$이고 함수 f 각각에 대하여 $g\circ f$의 치역이 Z가 아닌 경우는 모두 0 또는 모두 1에 대응하는 경우이고 아래 그림과 같이 2가지 뿐이므로

구하는 확률은 $1-\frac{2}{14}=\frac{6}{7}$



25. 서로 다른 3가지 색을 A, B, C라 하고 맨 위의 사다리꼴에 A를 칠하고 그 밑에 있는 사다리꼴에는 B를 칠하는 경우를 수형도로 그리면 다음과 같다.



$\therefore$ 첫 번째칸에 A를 칠하고 두 번째칸에 C를 칠하는 경우도 같으므로 A로 시작되는 경우는 10가지

따라서, 5개의 사다리꼴에 색을 칠하는 방법의 수는 30가지이다.

[다른풀이] 전체 가지수는 $3\times2\times2\times2\times2=48$
맨 위의 사다리꼴과 맨 아래의 사다리꼴이 같은 색으로 칠해지는 경우는

i) 맨 위의 사다리꼴과 맨 아래의 사다리꼴에 색을 칠하는 방법 ; 3가지

ii) 가운데 세 사다리꼴에 색칠하는 방법은
맨 위의 사다리꼴의 색을 정 가운데 사다리꼴에 색칠한 경우 4가지
맨 위의 사다리꼴의 색을 정 가운데 사다리꼴에 색칠하지 않은 경우 2가지

i), ii)에서 $3\times6=18$가지
따라서, 5개의 사다리꼴에 색을 칠하는 방법의 수는 $48-18=30$가지이다.

[미분과 적분]

26. $\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=-\cos 2x$

$$=-(2\cos^2x-1)=1-2\cos^2x$$

이므로

$1-2\cos^2x=2\cos^2x$에서 $\cos^2x=\frac{1}{4}$

$\therefore\ \cos x=\pm\frac{1}{2}$

$\cos x=\frac{1}{2}$이면 $x=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$

$\cos x=-\frac{1}{2}$이면 $x=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$

따라서, 모든 해의 합은 4π이다.

27. ㄱ. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^x$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^x$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}\right\}^{\frac{x}{x-1}}$$

그런데, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}=e,\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=1$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}\right\}^{\frac{x}{x-1}}=e^1=e$ $\therefore$ 참

ㄴ. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=e$이므로

$x+1=t$라 하면

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x+1)=\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=e$

수렴하는 함수의 곱은 수렴하므로

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\cdot f(x+1)=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\times\lim\limits_{x\to\infty}f(x+1)$

$$=e\times e=e^2$$ $\therefore$ 참

ㄷ. $\lim\limits_{x\to\infty}f(kx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{kx}{kx-1}\right)^{kx}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{kx-1}\right)^{kx}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{kx-1}\right)^{kx-1}\right\}^{\frac{kx}{kx-1}}$$

그런데, $x\to\infty$이면 $kx\to\infty$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{kx-1}\right)^{kx-1}=e$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{kx}{kx-1}=1$이므로

$\therefore\ \lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{kx-1}\right)^{kx-1}\right\}^{\frac{kx}{kx-1}}=e^1=e$

$\therefore$ 거짓

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

28. $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos(x^2)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)\{1+\cos(x^2)\}}{\{1-\cos(x^2)\}\{1+\cos(x^2)\}}$

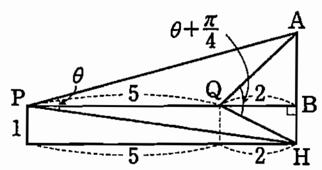
$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\cdot f(x)}{\sin^2(x^2)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{(x^2)^2}{\sin^2(x^2)}\cdot\frac{2\cdot f(x)}{(x^2)^2}$

$=2\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^4}=2$

따라서, $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^4}=1$이므로 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^p}=q$를 반드시 만족하는 상수 p, q는 $p=4$, $q=1$일 때이다.

29.



주어진 그림을 단순화하면 위의 그림과 같다.
그림에서 $\overline{AH}=x$라 둔다.
$\angle BQH-\angle BPH=\alpha$
$\angle BQA-\angle BPA=\beta$라고 하면

$$\tan\alpha=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}}=\frac{1}{3}$$

$$\tan\beta=\frac{\frac{x-1}{2}-\frac{x-1}{7}}{1+\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x-1}{7}}=\frac{5(x-1)}{14+(x-1)^2}$$

또한, $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{1}{3}+\frac{5(x-1)}{14+(x-1)^2}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{5(x-1)}{14+(x-1)^2}}=1$$

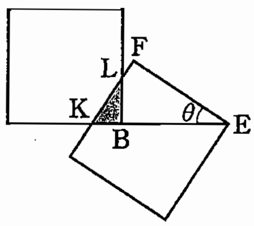
이 식을 정리하면

$x^2-12x+25=0$

따라서, 근과 계수의 관계에서

$a+b=12$

30. $\dfrac{\overline{EF}}{\overline{KE}}=\cos\theta$이므로



$\overline{KE}=\dfrac{1}{\cos\theta}$

$\therefore\ \overline{KB}=\dfrac{1}{\cos\theta}-1$

또, $\angle BKL=\dfrac{\pi}{2}-\theta$에서

$\dfrac{\overline{BL}}{\overline{KB}}=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$

$\therefore\ \overline{BL}=\overline{KB}\cdot\cot\theta$

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\overline{KB}\cdot\overline{BL}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)\times\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)\cdot\cot\theta$$
$$=\frac{1}{2}\frac{(1-\cos\theta)^2}{\cos^2\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{(1-\cos\theta)^2}{2\sin\theta\cos\theta}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0}\frac{(1-\cos\theta)^2}{2\sin\theta\cos\theta\cdot\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to0}\frac{(1-\cos\theta)^2(1+\cos\theta)^2}{2\sin\theta\cos\theta\cdot\theta^3(1+\cos\theta)^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin^4\theta}{2\sin\theta\cos\theta\cdot\theta^3(1+\cos\theta)^2}$$
$$=\frac{1}{2\cdot1\cdot2^2}=\frac{1}{8}$$

$\therefore\ p^2+q^2=65$

[확률과 통계]

26. 8개의 자료의 합이 $45+n$이므로

(평균)$=\dfrac{45+n}{8}$

8개의 자료 중 7개의 자료를 작은순으로 나열하면

4, 5, 5, 6, 8, 8, 9

따라서 중앙값은 다음과 같다.

i) $n\leq5$일 때 $\dfrac{5+6}{2}$

$\dfrac{11}{2}=\dfrac{45+n}{8}$에서 $n=-1\Rightarrow$ 모순!

ii) $n=6$일 때 6

$6=\dfrac{45+n}{8}$에서 $n=3\Rightarrow$ 모순!

iii) $n=7$일 때 $\dfrac{6+7}{2}$

$\dfrac{13}{2}=\dfrac{45+n}{8}$에서 $n=7$ $\therefore$ 성립

iv) $n\geq8$일 때 $\dfrac{6+8}{2}=7$

$7=\dfrac{45+n}{8}$에서 $n=11$ $\therefore$ 성립

따라서, i), ii), iii), iv)에서 가능한 n의 값은 $n=7$, $n=11$이고 합은 18이다.

27. 전체 중 비율을 따져보면

남성 기혼 : $\dfrac{60}{100}\times\dfrac{50}{100}=\dfrac{30}{100}$

남성 미혼 : $\dfrac{60}{100}\times\dfrac{50}{100}=\dfrac{30}{100}$

여성 기혼 : $\dfrac{40}{100}\times\dfrac{40}{100}=\dfrac{16}{100}$

여성 미혼 : $\dfrac{40}{100}\times\dfrac{60}{100}=\dfrac{24}{100}$

$\therefore$ P(여성 기혼|기혼)$=\dfrac{\text{P(여성 기혼}\cap\text{기혼)}}{\text{P(기혼)}}$

$=\dfrac{16}{30+16}=\dfrac{8}{23}$

28. ㄱ. 26 이상인 자료가 전체의 40%이므로 중앙값은 전체의 50%에 해당하는 누적도수이므로 중앙값은 26 미만이다. $\therefore$ 참

ㄴ. 가평균을 24라고 하면 가평균-계급값의 분포는

-3	28
-1	18
1	14
3	12
5 이상	28

이므로 (가평균-계급값)×도수는

$-84-18+14+36+140=88$보다 크다.

$\therefore$ 평균은 24보다 크다. $\therefore$ 참

ㄷ. 22보다 작은 자료는 대략 28%, 30보다 큰 자료는 대략 20%이므로 22보다 작은 자료의 비율은 30보다 큰 자료의 비율보다 크다. $\therefore$ 참

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

29. C는 4, 5, 6만이 가능하다.

$C=4$일 때 : $B=1,\ 2,\ 3$

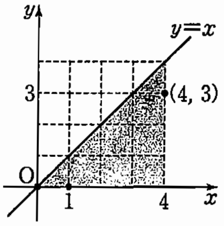
$C=5$일 때 : $B=1,\ 2,\ 3,\ 4$

$C=6$일 때 : $B=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

따라서, 구하는 확률은 $\dfrac{3+4+5}{36}=\dfrac{1}{3}$이다.

30. A가 이기면 x축 방향으로 한칸

B가 이기면 y축 방향으로 한칸으로 표시하면 구하는 경우의 수는 (0, 0)에서 (4, 3)으로 가는 방법 중 $x\geq y$인 영역만 지나는 경우의 수이다.

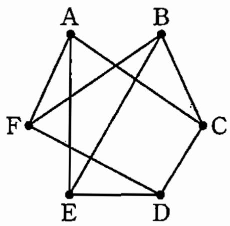


조건에 의해, (1, 0)은 반드시 지나야 하므로, 결국 위의 그림의 최단 경로의 수와 같다.
C→D로 가는 경로 중
C→P→D : $2\times1\times1\times2=4$
C→Q→D : $\frac{3!}{2!1!}\times\frac{3!}{2!1!}=9$
C→R→D : 1가지
∴ 구하는 경로의 수는 14가지

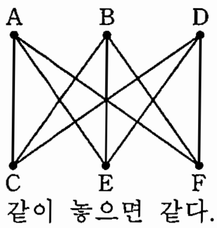
[이산수학]

26. $[\log_2 x]=2$, $[\log_2 y]=1$, $[\log_2 z]=1$인 경우 $x=4,\ 5,\ 6,\ 7$; $y=2,\ 3$; $z=2,\ 3$이므로 $(x,\ y,\ z)$는 $4\cdot2\cdot2=16$(가지)가 있다.
따라서, $[\log_2 y]=2$인 경우와 $[\log_2 z]=2$인 경우도 마찬가지이므로 $16+16+16=48$(가지)이다.

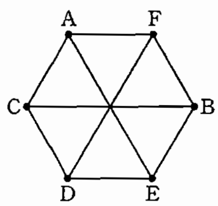
27. 문제의 그래프는



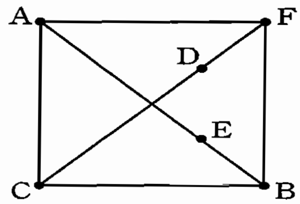
이므로 두 그룹 {A, B, D}, {C, E, F}로 나누면 그룹간은 연결되지 않고 다른 그룹과는 모두 연결된 그래프이다.
ㄱ.



와 같이 놓으면 같다.
ㄴ.



와 같이 놓으면 같다.
ㄷ.



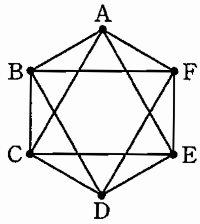
와 같이 놓으면 같다.
따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 같다.

28.

①	②	③	④	⑤

(i) b를 배치하는 방법
②, ④ 뿐이므로 2(가지)
(ii) a와 c를 배치하는 방법
a를 ⑤에 배치하는 경우엔 c는 b의 자리와 ⑤를 제외하는 곳에 배치하므로 3가지
a를 ⑤가 아닌 곳에 배치하는 경우엔 c는 b의 자리와 a의 자리, ⑤를 제외한 곳에 배치하므로 2가지
∴ $1\cdot3+2\cdot2=7$(가지)
(iii) d와 e를 배치하는 방법 : 2(가지)
따라서, (i), (ii), (iii)에 의해 $2\cdot7\cdot2=28$(가지)이다.

29. 마주보는 면을 제외한 모든 면이 모서리를 공유하므로 그래프를 그려보면 그림과 같다.



ㄱ. 꼭짓점이 6개인데, 차수가 3 이상이므로 해밀턴 회로를 갖는다. ∴ 참
ㄴ. 모든 꼭짓점의 차수가 4이므로 오일러회로를 갖는다. ∴ 참
ㄷ. A와 B는 다른색으로 칠해야 하는데, C는 이 두 꼭짓점과 연결되므로 다른 색으로 칠해야 한다. ∴ 거짓
따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

30. 오일러회로를 가질 필요충분조건은 모든 꼭짓점의 차수가 짝수이므로 홀수차수인 $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$를 최소 개수의 변을 추가하여 짝수 차수로 만들려면 3개의 변을 추가하여야 한다.
∴ ${}_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{3!}=15$(개)

・수 리 '나' 형・

정 | 답

1. ⑤	2. ②	3. ⑤	4. ①	5. ③
6. ⑤	7. ③	8. ①	9. ①	10. ④
11. ③	12. ④	13. ②	14. ④	15. ⑤
16. ③	17. ④	18. 12	19. 18	20. 17
21. 30	22. 80	23. 39	24. 11	25. 30
26. ②	27. ①	28. ④	29. ②	30. 34

출 | 제 | 문 | 항 | 분 | 석

문항	난이도	출제 단원	유의점
1	하	지수와 로그	간단한 지수계산
2	하	수열의 극한	간단한 극한계산
3	하	행렬	역행렬과 행렬
4	하	지수와 로그	지수함수의 그래프
5	중	행렬	연립방정식과 행렬
6	하	지수와 로그	지수방정식
7	하	행렬	역행렬의 연산
8	중	수열의 극한	간단한 극한계산
9	중	수열의 극한	무한급수의 합
10	상	지수/로그함수	복잡한 지수계산
11	상	지수와 로그	상용로그의 지표와 가수
12	중	수열	증명의 완성
13	중	지수/로그함수	외적영역의 해결능력
14	상	수열의 극한	무한등비급수의 활용
15	상	수열	수열과 규칙성
16	상	수열	수열과 참・거짓
17	상	지수/로그함수	로그함수의 그래프
18	하	수열의 극한	간단한 수열계산
19	중	행렬	행렬의 거듭제곱
20	하	지수/로그함수	지수법칙의 활용
21	중	수열	수열과 규칙성
22	중	지수와 로그	로그함수와 최대・최소
23	하	수열	순서도
24	중	지수와 로그	상용로그의 지표
25	상	순열과 조합	경우의 수
26	하	지수/로그함수	로그부등식
27	중	지수와 로그	지수부등식 대소관계
28	상	수열	수열과 약수
29	상	수열의 극한	극한에의 응용
30	중	순열과 조합	경우의 수

풀 | 이

1. $(\sqrt{2\sqrt{6}})^4=(2\sqrt{6})^2=2^2\times 6=24$

2. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-7n}{n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{7}{n}}{1+\frac{5}{n^2}}=2$

3. B가 역행렬이 존재하므로 $BA=B+E$의 양변의 왼쪽에 B^{-1}를 곱하면

$A=E+B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\-2&4\end{pmatrix}$

따라서, 행렬 A의 모든 성분의 합은 3이다.

4. y축 위의 점은 x좌표가 0이므로

$y=3^{x+m}$이 y축과 만나는 점은 $\mathrm{A}(0,\ 3^m)$

$y=3^{-x}$이 y축과 만나는 점은 $\mathrm{B}(0,\ 1)$

$\overline{\mathrm{AB}}=|3^m-1|=8$에서 $m=2$

5. $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}$

……

이므로 $A^n=\begin{pmatrix}1&0\\n&1\end{pmatrix}$

$A^n\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}$의 양변에 $(A^n)^{-1}$을 곱하면

$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-n&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3n+8\end{pmatrix}$

$\alpha+\beta=2$에서 $3+(-3n+8)=2$

$\therefore\ n=3$

6. $\left(\log_3\frac{x}{3}\right)^2-20\log_9 x+26=0$

$(\log_3 x-1)^2-10\log_3 x+26=0$

$(\log_3 x)^2-12\log_3 x+27=0$

$(\log_3 x-3)(\log_3 x-9)=0$

$\log_3 x=3$ 또는 $\log_3 x=9$

$\therefore\ x=3^3,\ 3^9$

따라서, 두 근의 곱은 $3^3\times 3^9=3^{12}$이다.

7. $AB=CA$의 양변의 오른쪽에 A^{-1}를 곱하면

$C=ABA^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&a\\b&1\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&a\\2b&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$

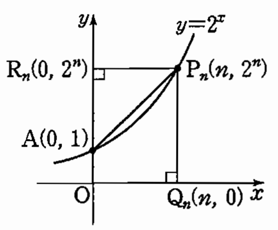
$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&a\\4b&2\end{pmatrix}$

행렬 C의 모든 성분의 합은 $2+\frac{1}{2}a+2b$이다. a와 b가 모두 양수이므로 산술평균, 기하평균 사이의 관계에 의해

$$2+\frac{1}{2}a+2b \geq 2+2\sqrt{\frac{1}{2}a \cdot 2b}=6$$

따라서, $a=4$, $b=1$일 때 최솟값 6을 갖는다.

8. 오른쪽 그림에서



$\triangle \mathrm{AP}_n\mathrm{R}_n$의 넓이

$$\mathrm{T}_n=\frac{1}{2}(2^n-1)\times n$$

사각형 $\mathrm{AOQ}_n\mathrm{P}_n$의 넓이

$$\mathrm{S}_n=\frac{1+2^n}{2}\times n$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{T}_n}{\mathrm{S}_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{1+2^n}=1$$

9. $(4n^2-1)x^2-4nx+1=0$

$\{(2n-1)x-1\}\{(2n+1)x-1\}=0$

$x=\frac{1}{2n-1},\ \frac{1}{2n+1}$

$\alpha_n>\beta_n$이고 n이 자연수이므로

$\alpha_n=\frac{1}{2n-1},\ \beta_n=\frac{1}{2n+1}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n-\beta_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=1$$

10. 점 A의 x좌표를 a, 점 B의 x좌표를 b라 하면

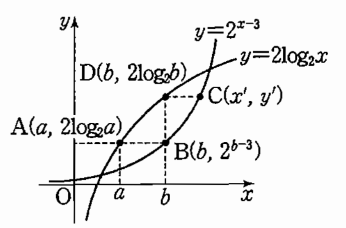
$\mathrm{A}(a,\ 2\log_2 a)$, $\mathrm{B}(b,\ 2^{b-3})$, $\mathrm{D}(b,\ 2\log_2 b)$

이고 $\overline{\mathrm{AB}}=2$에서 $b-a=2$ ……㉠

$\overline{\mathrm{BD}}=2$에서 $2\log_2 b-2\log_2 a=2$ ……㉡

($\because$ A와 B의 y좌표가 같으므로)

㉠, ㉡에서



$\log_2\frac{b}{b-2}=1$이고

$b=4,\ a=2$

점 C의 y좌표가 점 D의 y좌표와 같으므로

점 C의 좌표를 $(x',\ y')$라 하면

$y'=2^{x'-3}=2\log_2 4$이므로 $x'=5,\ y'=4$

$\therefore \mathrm{C}(5,\ 4)$

$\triangle\mathrm{ABD}$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times2\times2=2$

$\triangle\mathrm{BCD}$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times2\times1=1$

따라서, 사각형 ABCD의 넓이는 3이다.

11. ㄱ. $\log 100=2$의 지표가 2이므로

$f(100)=(-1)^2=1$ $\quad\therefore$ 참

ㄴ. $\log x$의 지표를 n_1이라 하면 $f(x)=-1$이므로

$(-1)^{n_1}=-1$

$\log 100x=2+\log x$이므로 $\log 100x$의 지표는 n_1+2

$f(100x)=(-1)^{n_1+2}=(-1)^{n_1}\times(-1)^2=-1$

$\therefore$ 참

ㄷ. $\log x_1$의 지표를 n_1, 가수를 α

$\log x_2$의 지표를 n_2, 가수를 β라 하면 (n_1, n_2는 정수, $0\leq\alpha<1$, $0\leq\beta<1$)

$\log x_1x_2=n_1+n_2+\alpha+\beta$이므로

$0\leq\alpha+\beta<1$이면 $\log x_1x_2$의 지표는

n_1+n_2 ……㉠

$1\leq\alpha+\beta<2$이면 $\log x_1x_2$의 지표는

n_1+n_2+1 ……㉡

$f(x_1)=1$, $f(x_2)=1$이므로 $(-1)^{n_1}=(-1)^{n_2}=1$이다.

하지만 ㉡의 경우

$f(x_1x_2)=(-1)^{n_1+n_2+1}$

$=(-1)^{n_1}\times(-1)^{n_2}\times(-1)=-1$

$\therefore$ 거짓

12. x좌표의 차가 k인 변 AB를 택하는 경우의 수는 점 A의 x좌표가 $x=0$부터 $x=(n-k+1)$까지 가능하므로

$(n-k+1)+1=n-k+2$ ⬅ (가)

마찬가지로, 점 A의 y좌표는

$y=0$부터 $y=(n-k)$까지 가능하므로

$(n-k)+1=n-k+1$ ⬅ (나)

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\{(n+1)(n+2)-(2n+3)k+k^2\}$$

$$=n(n+1)(n+2)-(2n+3)\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)}{6}(2n+4)$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$ ⬅ (다)

13. 초기 이산화탄소 농도 $C(0)=0.83$이고, 1시간뒤 즉 $t=1$일 때 이산화탄소 농도 $C(1)=0.43$이므로 주어진식에 $t=1$을 대입하면 환기량

$$Q=k\times\frac{V}{1}\log\frac{0.83-0.03}{0.43-0.03}=kV\cdot\log 2$$

이다. 이산화탄소 농도가 0.08%가 되는 t는

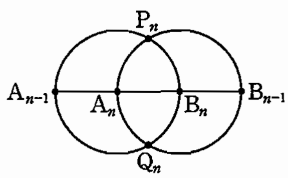
$$Q=k\times\frac{V}{t}\log\frac{0.83-0.03}{0.08-0.03}=\frac{4kV\log 2}{t}$$

를 만족한다. 그런데 환기량이 일정하므로

$$kV\log 2=\frac{4kV\log 2}{t}$$

$\therefore\ t=4$

14. 오른쪽 그림과 같이 n번째 얻어진 도형에 있는 두 원의 반지름의 길이는 r_n이라하면



$\overline{A_nB_n}=\overline{A_nP_n}=\overline{B_nP_n}=r_n$

이므로 $\angle P_nA_nB_n=\angle P_nB_nA_n=\frac{\pi}{3}$

두 호 $P_nA_nQ_n$, $P_nB_nQ_n$의 길이의 합

$$l_n=2\times r_n\times\frac{2}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi r_n$$

또 선분 $A_{n-1}B_{n-1}$의 삼등분점이 A_n, B_n이므로

$$\overline{A_nB_n}=\frac{1}{3}\overline{A_{n-1}B_{n-1}}$$

$$\therefore\ r_n=\frac{1}{3}r_{n-1}$$

따라서, 수열 l_n의 공비는 $\frac{1}{3}$, $r_1=\frac{8}{3}$이므로 초항

$$l_1=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{8}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{\frac{32}{9}\pi}{1-\frac{1}{3}}=\frac{16}{3}\pi$$

15. $a_1+a_2=1+2$

$a_3+a_4=1+2+3+4$

$a_4+a_6=1+2+3+4+5+6$

$a_7+a_8=1+2+3+4+5+6+7+8$

$a_9+a_{10}=a_{11}+a_{12}=a_{13}+a_{14}$

$=1+2+\cdots+10=55$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{14}a_n=3+10+21+36+55+55+55$$

$=235$

[다른풀이] 1번째줄, 2번째줄에 있는 전구는 14초가 될 때까지 모두 7번씩 켜지고 전구의 개수는 3개 이므로 3×7

3번째 줄, 4번째 줄에 있는 전구는 모두 7개가 있고 켜지는 횟수는 모두 6번씩이므로 7×6

이와 같은 방법으로

$$\sum_{n=1}^{14}a_n=3\times 7+7\times 6+11\times 5+15\times 4+19\times 3$$

$=235$

16. ㄱ. $a_n=n$이면 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$

$$T_n=\frac{n^2(n^2-1)}{S_n}=2n(n-1)=2n^2-2n$$

$b_n=T_n-T_{n-1}$

$=2n^2-2n-\{2(n-1)^2+2(n-1)\}$

$=4n-4$ $\therefore$ 참

ㄴ. 수열 a_n의 첫째항을 a_1, 수열 b_n의 첫째항을 b_1라 하면

$$S_n=\frac{n\{2a_1+(n-1)d_1\}}{2},$$

$$T_n=\frac{n\{2b_1+(n-1)d_2\}}{2}$$

$S_nT_n=n^2(n^2-1)$에서 n^4의 계수를 비교하면

$\frac{d_1}{2}\times\frac{d_2}{2}=1$ $\therefore\ d_1d_2=4$ $\therefore$ 참

ㄷ. $a_n=2n$이면 $a_1=2\neq 0$이다.

$S_n=n(n+1)$이므로 $T_n=n(n-1)=n^2-n$

$b_n=T_n-T_{n-1}=2n-2$가 돼서 b_n이 존재한다.

즉, $a_n\neq n$이면서 $a_1\neq 0$이고 주어진 조건을 만족하는 a_n이 존재한다. $\therefore$ 거짓

17. $y=\log_2|5x|$, $y=\log_2(x+2)$의 교점의 x좌표를 구하면 $|5x|=x+2$에서

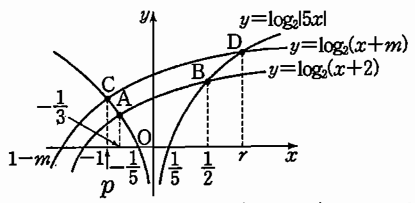
$x>0$일 때 $5x=x+2$, $x=\frac{1}{2}$

$x<0$일 때 $-5x=x+2$, $x=-\frac{1}{3}$

$\therefore\ A\left(-\frac{1}{3},\ \log_2\frac{5}{3}\right)$ $\therefore\ B\left(\frac{1}{2},\ \log_2\frac{5}{2}\right)$

$y=\log_2|5x|$는 y축에 대하여 대칭인 함수이므로 $y=\log_2|5x|$, $y=\log_2(x+2)$, $y=\log_2(x+m)$의 그래프는 다음과 같다.

ㄱ. $m>2$이므로 그림에서 $r>\frac{1}{2}$, $p<-\frac{1}{3}$ $\therefore$ 참



ㄴ. $y=\log_2|5x|$, $y=\log_2(x+m)$의 교점을 구하면

$|5x|=x+m$에서 $x=\frac{m}{4}$, $-\frac{m}{6}$

$\therefore C\left(-\frac{m}{6}, \log_2\frac{5m}{6}\right)$, $D\left(\frac{m}{4}, \log_2\frac{5m}{4}\right)$

직선 AB의 기울기는

$$\frac{\log_2\frac{5}{2}-\log_2\frac{5}{3}}{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{6}{5}\log_2\frac{3}{2}$$

직선 CD의 기울기는

$$\frac{\log_2\frac{5m}{4}-\log_2\frac{5m}{6}}{\frac{m}{4}-\left(-\frac{m}{6}\right)}=\frac{12}{5m}\log_2\frac{3}{2}$$

$m>2$이므로 $\frac{12}{5m}<\frac{6}{5}$

따라서, 두 직선의 기울기는 서로 다르다.

$\therefore$ 거짓

ㄷ. B의 y좌표와 C의 y좌표가 같으므로

$\log_2\frac{5}{2}=\log_2\frac{5m}{6}$ $\quad\therefore m=3$

$\overline{BC}$가 공통이므로 $\overline{BC}$를 밑변으로 하면

△ABC의 높이는 $\log_2\frac{5}{2}-\log_2\frac{5}{3}=\log_2\frac{3}{2}$

△DBC의 높이는 $\log_2\frac{5m}{4}-\log_2\frac{5m}{6}=\log_2\frac{3}{2}$

따라서 △ABC, △DBC의 넓이는 같다.

$\therefore$ 참

18. $r=\frac{1}{5}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a_1}{1-r}=\frac{a_1}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}a_1=15$$

$\therefore a_1=12$

19. $\begin{pmatrix}a&3\\0&a\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}a&3\\0&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&3\\0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2&6a\\0&a^2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a&3\\0&a\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}a^2&6a\\0&a^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&3\\0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^3&9a^2\\0&a^3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a&3\\0&a\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}a^3&9a^2\\0&a^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&3\\0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^4&12a^3\\0&a^4\end{pmatrix}$

$\vdots$

$\begin{pmatrix}a&3\\0&a\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}a^n&3n\cdot a^{n-1}\\0&a^n\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a&3\\0&a\end{pmatrix}^n$의 (1, 1) 성분과 (1, 2) 성분이 같으므로

$a^n=3n\cdot a^{n-1}$

$\therefore a=3n$

따라서, 가능한 a의 값은 $n=1$일 때 $a=3$, $n=2$일 때 $a=6$이다.

따라서, 가능한 a의 곱은 18이다.

20. $f(2a)f(b)=4$, $f(a-b)=2$에서

$2^{-2a}\cdot 2^{-b}=2^2$, $2^{-(a-b)}=2^1$이므로

$\therefore 2a+b=-2$

$a-b=-1$

$\therefore 3a=-3 \quad \therefore a=-1 \quad b=0$

$\therefore 2^{3a}+2^{3b}=\frac{1}{8}+1=\frac{9}{8}$

$\therefore p+q=17$

21. $a_n=5n+1$

$$b_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)$$

$$=1+\frac{n^2+n-2}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

a_n은 초항이 6이고 공차가 5인 등차수열이므로

a_1부터 a_{10} 중 홀수인 항은 5개이다.

$b_1=1$, $b_2=1+2$, $b_3=1+2+3$, ……이므로

b_n은 홀수 2개와 짝수 2개가 반복되는 수열이다.

따라서, 10 이하인 두 자연수 k, l에 대하여 a_k와 b_l의 곱이 홀수가 되는 순서쌍 (k, l)의 개수는

$5\times 6=30$

22. i) $10\le n<81$이면 $[\log_9 n]=1$이므로

$\log_9 n-[\log_9 n]=\log_9\frac{n}{9}$이고

$\log_9\frac{n}{9}$이 최대이어야 하므로 $n=80$

ii) $81\le n<100$이면 $[\log_9 n]=2$이므로

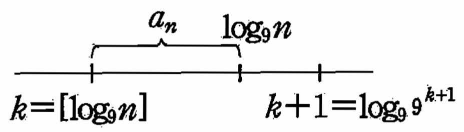
$\log_9 n-[\log_9 n]=\log_9\frac{n}{81}$이고

$\log_9\frac{n}{81}$이 최대이어야 하므로 $n=99$

따라서, i), ii)에서 $\log_9\frac{80}{9}>\log_9\frac{99}{81}$이므로

구하는 n은 80이다.

[다른풀이] $a_n=\log_9 n-[\log_9 n]$을 수직선 위에 나타내어보면 $[\log_9 n]=k$일 때



$\therefore$ n이 9^{k+1}보다 왼쪽에 있는 최대수일 때 즉 $9^{k+1}-1$일 때 a_n이 최대이다.

n이 두 자리수 이므로 $n=9^2-1=80$일 때 a_n이 최대이다.

23. $a=1$

$n=1,\ a=3\cdot 1=3$

$n=2,\ a=3+1=4$

$n=3,\ a=3\cdot 4=12$

$n=4,\ a=12+1=13$

$n=5,\ a=3\cdot 13=39$

$\therefore\ a=39$

24. $\log x$의 지표가 4, $\log y$의 지표가 1이므로

$4 \leqq \log x < 5,\ 1 \leqq \log y < 2$

$\log\frac{x}{y}=\log x-\log y$이므로

$2<\log\frac{x}{y}<4$ ......㉠

$\left(\log\frac{x}{y}\right)\left(\log\frac{y}{x}\right)=\left(\log\frac{x}{y}\right)\left(\log\left(\frac{x}{y}\right)^{-1}\right)=-\left\{\log\frac{x}{y}\right\}^2$

이다.

㉠에서

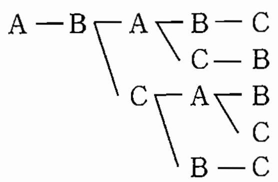
$-16<-\left\{\log\frac{x}{y}\right\}^2<-4$

이므로 구하는 정수는

$-15,\ -14,\ -13,\ \cdots,\ -6,\ -5$

따라서, 정수의 개수는 11개이다.

25. 서로 다른 3가지 색을 A, B, C라 하고 맨 위의 사다리꼴에 A를 칠하고 그 밑에 있는 사다리꼴에는 B를 칠하는 경우를 수형도로 그리면 다음과 같다.



$\therefore$ 첫 번째칸에 A를 칠하고 두 번째칸에 C를 칠하는 경우도 같으므로 A로 시작되는 경우는 10가지

따라서, 5개의 사다리꼴에 색을 칠하는 방법의 수는 30가지이다.

[다른풀이] 전체 가지수는 $3\times2\times2\times2\times2=48$

맨 위의 사다리꼴과 맨 아래의 사다리꼴이 같은 색으로 칠해지는 경우는

i) 맨 위의 사다리꼴과 맨 아래의 사다리꼴에 색을 칠하는 방법 ; 3가지

ii) 가운데 세 사다리꼴에 색칠하는 방법은

맨 위의 사다리꼴의 색을 정 가운데 사다리꼴에 색칠한 경우 4가지

맨 위의 사다리꼴의 색을 정 가운데 사다리꼴에 색칠하지 않은 경우 2가지

i), ii)에서 $3\times6=18$가지

따라서, 5개의 사다리꼴에 색을 칠하는 방법의 수는 $48-18=30$가지이다.

26. $|a-\log_2 x| \leqq 1$

$-1 \leqq a-\log_2 x \leqq 1$

$a+1 \geqq \log_2 x \geqq a-1$

$2^{a+1} \geqq x \geqq 2^{a-1}$

최댓값과 최솟값의 차는

$2^a\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot 2^a=18$

$\therefore\ 2^a=18\cdot\frac{2}{3}=12$

27. $A=m^{\frac{1}{m-8}}\cdot n^{\frac{1}{n-5}}$

$=\left(m^{n-5}\cdot n^{m-8}\right)^{\frac{1}{(m-8)(n-5)}}$

$B=m^{-\frac{1}{m-8}}\cdot n^{\frac{1}{n-5}}$

$=\left(m^{-(n-5)}\cdot n^{m-8}\right)^{\frac{1}{(m-8)(n-5)}}$

$C=m^{\frac{1}{m-8}}\cdot n^{-\frac{1}{n-5}}$

$=\left(m^{n-5}\cdot n^{-(m-8)}\right)^{\frac{1}{(m-8)(n-5)}}$

$1<m^{n-5}<n^{m-8}$이므로 $A>B>C$이다.

28. ㄱ. 8의 양의 약수는 1, 2, 4, 8이므로

$x_8=(-1)^1+(-1)^2+(-1)^4+(-1)^8=2$

$\therefore$ 참

ㄴ. 3^m의 양의 약수 a_k는 모두 홀수이고 $(-1)^{a_k}=-1$이다. 양의 약수의 개수는 $m+1$개이므로

$x_n=x_{3^m}=(-1)(m+1)=-m-1$ $\therefore$ 거짓

ㄷ. $n=2^m\cdot 5^m$의 양의 약수의 개수는 $(m+1)^2$개

그 중 홀수인 양의 약수 a_k의 개수는 $(m+1)$개이고 이 때 $(-1)^{a_k}=-1$

나머지 $(m+1)^2-(m+1)$개의 양의 약수 a_k는 짝수이므로 $(-1)^{a_k}=1$

$x_n = x_{10^m}$

$= (-1)\times(m+1)+1\times\{(m+1)^2-(m+1)\}$

$= m^2-1$ $\qquad \therefore$ 참

29. 집합 $\{k\,|\,1 \le k \le 2n,\ k$는 자연수$\}$의 세 원소 a, b, c 중 두 수만 결정되면 남은 수는 자동적으로 결정된다.

$b=2$인 경우 a를 정하는 방법은 1가지

$b=3$인 경우 a를 정하는 방법은 2가지

……

$b=n$일 경우 a를 정하는 방법은 $(n-1)$가지

$b=n+1$일 경우 c를 정하는 방법은 $(n-1)$가지

$b=n+2$일 경우 c를 정하는 방법은 $(n-2)$가지

……

$b=2n-1$일 경우 c를 정하는 방법은 1가지

$\therefore$ 등차수열을 이루는 집합 $\{a, b, c\}$의 개수는 $T_n = n(n-1)$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{n^2}=1$$

[다른풀이] $2b=a+c$이고, $a<b<c$이므로 a와 c를 결정하면 b는 자동적으로 결정된다.

$a+c$는 짝수이므로 (a, c)를 만들 수 있는 경우는

짝수 n개 중 2개를 취하는 경우 ${}_nC_2=\dfrac{n(n-1)}{2}$

홀수 n개 중 2개를 취하는 경우 ${}_nC_2=\dfrac{n(n-1)}{2}$

$\therefore$ 등차수열을 이루는 집합 $\{a, b, c\}$의 개수는 $T_n=n(n-1)$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{n^2}=1$$

30. 4분음표와 8분음표를 사용하여 한마디를 구성하는 경우는

♩ ♩ ♩ ♩
♩ ♩ ♩ ♪ ♪
♩ ♩ ♪ ♪ ♪ ♪
♩ ♪ ♪ ♪ ♪ ♪ ♪
♪ ♪ ♪ ♪ ♪ ♪ ♪ ♪

의 다섯 가지가 있고 각각에서 순서를 바꾸는 경우의 수를 생각하면

$$\frac{4!}{4!}+\frac{5!}{3!\times 2!}+\frac{6!}{4!\times 2!}+\frac{7!}{6!\times 1!}+\frac{8!}{8!}$$

$=1+10+15+7+1=34$

[다른풀이] 8분음표를 한 번에 1계단 오르는 것, 4분음표는 한 번에 2계단 오르는 것으로 생각하면 한번에 1계단 또는 2계단씩 올라가서 총 8개의 계단을 오르는 방법의 수와 같다 n계단 올라가는 방법의 수를 a_n이라 하면

$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=3,\ a_4=5,\ a_5=8,\ a_6=13,$

$a_7=21,\ a_8=34$

이므로 구하는 경우의 수는 34이다.