제 2 교시

수리 영역

나 형

성명		수험번호						3				

○ 자신이 선택한 유형('가'형/'나'형)의 문제지인지 확인하시오.
○ 답안지에 성명과 수험 번호를 써 넣고, 또 수험 번호, 문제유형, 답을 정확히 표시하시오.
○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. $8^{\frac{4}{3}} \times 4^{\frac{2}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 2^3 ② 2^4 ③ 2^5 ④ 2^6 ⑤ 2^7

2. 두 행렬 A, B가 $A = B^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$일 때, 행렬 BAB의 모든 성분의 합은? (단, X^{-1}는 X의 역행렬) [2점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

3. $\lim_{n \to \infty} n\left(\sqrt{n^2-n+1} - \sqrt{n^2-n-1}\right)$의 값은? [2점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

4. 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차가 각각 -2, 3일 때, 등차수열 $\{3a_n + 5b_n\}$의 공차는? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 9 ⑤ 15

5. 로그함수 $f(x)=\log_a x$에 대하여 $f(m)=2$, $f(n)=3$일 때, $f^{-1}(7)$의 값을 m, n으로 올바르게 나타낸 것은? (단, f^{-1}는 f의 역함수) [3점]

① mn^2 ② m^2n ③ m^2n^2
④ m^2n^3 ⑤ m^3n^2

6. 로그부등식 $2\log_{\frac{1}{3}}(x-4) > \log_{\frac{1}{3}}(x-2)$의 해가 $a < x < b$일 때, ab의 값은? [3점]

① 8 ② 12 ③ 18 ④ 24 ⑤ 30

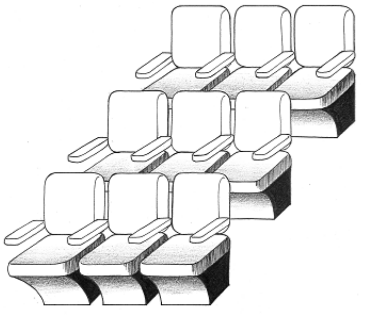
7. 자연수 n에 대하여 이차정사각행렬 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_n을 각각 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\cdots$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$이라 할 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, X^{-1}는 X의 역행렬) [3점]

<보 기>

ㄱ. 자연수 m, n에 대하여 $A_m + A_n = A_{m+n}$이 성립한다.
ㄴ. 자연수 m, n에 대하여 $A_m A_n = A_{mn}$이 성립한다.
ㄷ. 자연수 n에 대하여 $A_n^{-1} = \frac{1}{n}A_n$이 성립한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. 그림과 같은 3좌석씩 3줄인 9개의 좌석에서 남자 5명, 여자 4명이 함께 영화를 관람하려 할 때, 남자끼리 좌우에 이웃하여 앉지 않고, 여자끼리 좌우에 이웃하여 앉지 않는 방법의 수는? [3점]

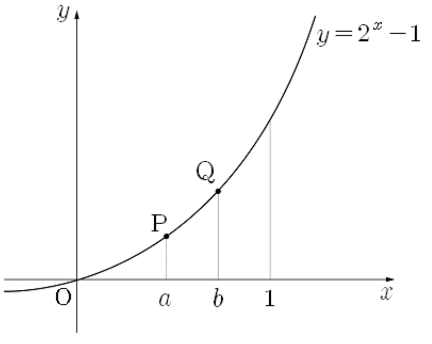


① $4! \times 5!$ ② $2 \times 3! \times 5!$ ③ $3 \times 4! \times 5!$
④ $5! \times 6!$ ⑤ $9 \times 4! \times 5!$

9. 그림에서 함수 $y=2^x-1$의 그래프 위의 서로 다른 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 a, b라 할 때,

$$A=\frac{2^a-1}{a},\ B=\frac{2^b-1}{b},\ C=\frac{2^b-2^a}{b-a}$$

의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? (단, $0<a<b<1$) [3점]



① $A<B<C$ ② $A<C<B$ ③ $B<A<C$
④ $B<C<A$ ⑤ $C<A<B$

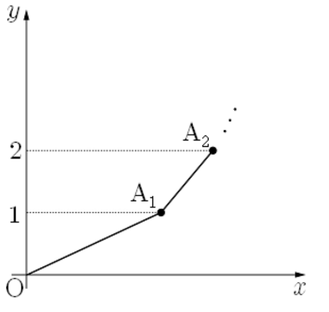
10. 함수 $f(x)=\log_a x$, $g(x)=\log_b x$가 $0<x<1$에서 $f(x)>g(x)$이 성립하기 위한 조건으로 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $1<b<a$
ㄴ. $0<a<b<1$
ㄷ. $0<a<1<b$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. 자연수 n에 대하여 점 A_n은 직선 $y=n$ 위에 있다. 선분 A_0A_1의 기울기가 $\frac{3}{4}$이고, 선분 A_nA_{n+1}의 기울기는 선분 $A_{n-1}A_n$의 기울기의 $\frac{4}{3}$배이다. 점 A_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} x_n$의 값은? (단, 원점 $O=A_0$) [3점]



① $\frac{16}{3}$ ② 5 ③ $\frac{14}{3}$ ④ $\frac{13}{3}$ ⑤ 4

12. 주머니에 흰 공 2개, 검은 공 2개가 들어 있다. 공을 1개 뽑아 흰 공이면 주머니에 넣지 않고 검은 공이면 다시 넣는 과정을 반복한다. 3회 시행 후 처음으로 주머니에 검은 공만 남아 있을 확률은? [3점]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{5}{36}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{7}{36}$

13. $n \geqq 2$인 자연수일 때, 부등식

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i}\right) < \frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{n}\right) \cdots ㉠$$

을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다.

(ⅰ) $n=2$일 때, 좌변은 $\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{12}$이고 우변은 $\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}$이므로 성립한다.

(ⅱ) $n=k$ $(k \geqq 2)$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i}\right) < \frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right) \cdots ㉡$$

㉡식의 양변에 $\boxed{(가)}$ 를 더하면

$$\sum_{i=1}^{k+1}\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i}\right) < \frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)+\boxed{(가)}$$

한편

$\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)+\boxed{(가)}$ 에서 $2(2k+1) > 4k$임을 이용하여

$$\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)+\boxed{(가)} < \frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)+\boxed{(나)}$$

$$= \frac{3}{4}-\frac{1}{4(k+1)}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 부등식 ㉠은 $n \geqq 2$인 모든 자연수에 대하여 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것은? [4점]

	(가)	(나)
①	$\frac{1}{2(2k+1)(k+1)}$	$\frac{1}{2k(k+1)}$
②	$\frac{1}{2(2k+1)(k+1)}$	$\frac{1}{4k(k+1)}$
③	$\frac{1}{2k(2k-1)}$	$\frac{1}{2k(k+1)}$
④	$\frac{1}{2k(2k-1)}$	$\frac{1}{4k(k+1)}$
⑤	$\frac{1}{2k(2k-1)}$	$\frac{1}{k(k+1)}$

14. $n \geqq 2$에 대하여 n개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 눈의 수의 최대값과 최소값의 차를 확률변수 X라 할 때, 확률 $\mathrm{P}(X>1)$을 구하는 과정이다.

n개의 주사위를 동시에 던질 때, 나올 수 있는 모든 경우의 수는 6^n가지이다.
$X>1$의 여사건의 경우는 $X \leqq 1$인 경우로
$X=0$, $X=1$의 두 가지이다.

(ⅰ) $X=0$인 경우
n개의 주사위를 던져 나온 눈의 수가 모두 같아야 되므로 경우의 수는 $\boxed{(가)}$ 가지이다.

(ⅱ) $X=1$인 경우
연속인 두 눈의 수가 나와야 한다. 즉, 1과 2, 2와 3, 3과 4, 4와 5, 5와 6이 나와야 한다.
그런데 n개의 주사위를 던졌을 때 나오는 눈의 수가 1 또는 2인 것은 $\boxed{(나)}$ 가지이고, 이 중에서 모두 1인 것과 2인 것은 제외해야 하므로 $\left(\boxed{(나)}-2\right)$가지이다. 2와 3, 3과 4, 4와 5, 5와 6인 경우도 마찬가지이므로
모든 경우의 수는 $\left(\boxed{(나)}-2\right)\times 5$이다.

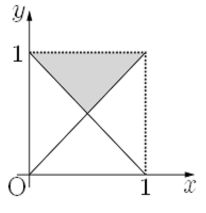
따라서, $\mathrm{P}(X \leqq 1)=\dfrac{\boxed{(가)}+\left(\boxed{(나)}-2\right)\times 5}{6^n}$ 이므로

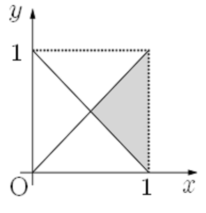
$\mathrm{P}(X>1)=1-\mathrm{P}(X \leqq 1)=\boxed{(다)}$ 이다.

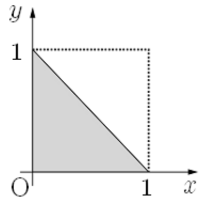
위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]

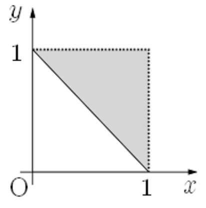
	(가)	(나)	(다)
①	6	n^2	$1-\frac{10n}{6^n}+\frac{4}{6^n}$
②	6	2^n	$1-\frac{5}{3^n}+\frac{4}{6^n}$
③	6	2^n	$1-\frac{10n}{6^n}+\frac{4}{6^n}$
④	3	$2n$	$1-\frac{5}{3^n}+\frac{4}{6^n}$
⑤	3	$2n$	$1-\frac{10n}{6^n}+\frac{4}{6^n}$

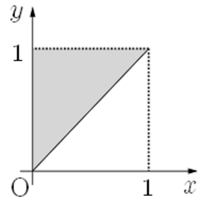
15. 정수 부분이 각각 두 자리, 세 자리인 양수 X, Y의 상용로그의 가수를 각각 x, y라 하자. XY의 정수 부분이 다섯 자리일 때, 점 $(x,\ y)$가 존재하는 영역을 어두운 부분으로 바르게 표시한 것은? [3점]

①


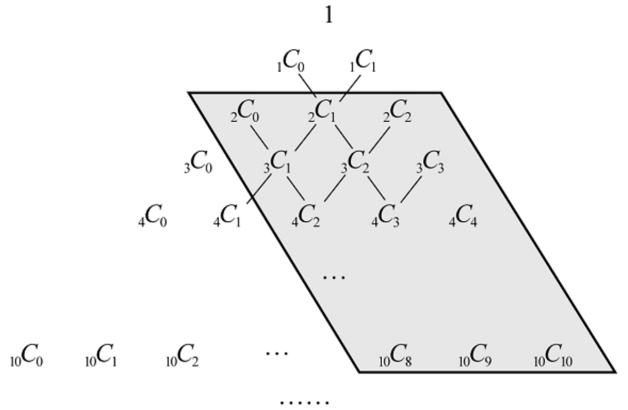
②


③


④


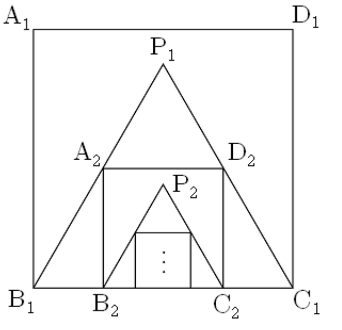
⑤


16. 그림과 같은 수의 배열을 파스칼의 삼각형이라고 한다. 어두운 부분의 모든 수들의 합은? [3점]



① 224 ② 226 ③ 228 ④ 230 ⑤ 232

17. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$이 있다. 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$의 내부에 선분 $\mathrm{B_1C_1}$을 한 변으로 하는 정삼각형 $\mathrm{P_1B_1C_1}$을 만든다. 다시 선분 $\mathrm{B_1C_1}$ 위에 정삼각형 $\mathrm{P_1B_1C_1}$에 내접하는 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$를 만든다. 이와 같은 방법으로 만들어지는 정사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $4\sqrt{3}+15$ ② $5\sqrt{3}+10$ ③ $5\sqrt{3}+25$
④ $6\sqrt{3}+5$ ⑤ $6\sqrt{3}+10$

단답형(18 ~ 25)

18. $\log_{\sqrt{2}} 9^{\log_3 8}$의 값을 구하시오. [3점]

19. 그림과 같이 컴퓨터의 로그인 화면을 실행하기 위하여 1부터 9까지 자연수 중에서 서로 다른 두 개의 숫자를 선택한 후 이 두 수를 사용하여 네 자리 수의 암호(PW)를 만들 때, 네 자리 모두 같은 수의 배열은 제외하여 암호를 만들려고 한다. 이때, 만들 수 있는 모든 암호의 경우의 수를 구하시오. [3점]

20. 반사계수(Γ)란 임피던스(교류 회로에서의 전압과 전류의 비)차에 의해 발생하는 반사량을 단순히 반사전압(V_-) 대 입력전압(V_+) 비, 즉 $\Gamma = \frac{V_-}{V_+}$로 계산한 값이다. 반사손실(RL)이란 반사계수(Γ)를 전력의 로그 스케일로 변환한 값을 말하며 반사계수(Γ)와 반사손실(RL)과의 관계식은 다음과 같다.

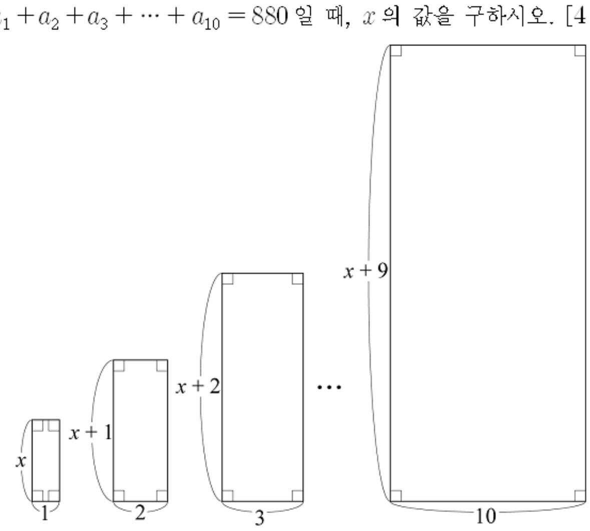
$$RL = 20 \log \frac{1}{|\Gamma|}$$

입력전압이 100, 반사전압이 2일 때의 반사손실을 A, 입력전압이 100, 반사전압이 20일 때의 반사손실을 B라고 할 때, $|A-B|$의 값을 구하시오. [3점]

21. $\log_{10}x = [\log_{10}x]$를 만족하는 $0 < x < 1$인 모든 x값들의 합을 S라 할 때, $99S$의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수) [4점]

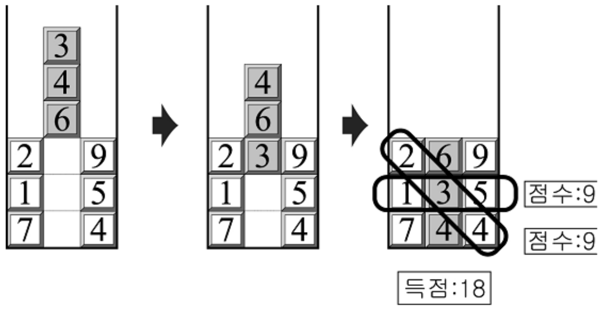
22. 무한수열 a_1, $2a_2$, 2^2a_3, $\cdots$, $2^{n-1}a_n$, $\cdots$ 의 첫째항부터 제 n항까지의 합이 $5n$ 일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값을 구하시오. [3점]

23. 그림과 같이 [그림1], [그림2], [그림3],$\cdots$, [그림10]의 직사각형의 넓이를 각각 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{10}이라 하자.
$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} = 880$일 때, x의 값을 구하시오. [4점]



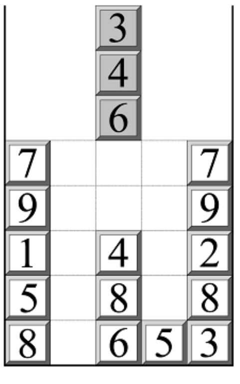
[그림1] [그림2] [그림3] [그림10]

24. 어느 게임은 [예시]와 같이 엔터키를 누르면 게임이 시작되면서 어두운 부분의 막대가 아래쪽으로 계속 내려가고 더 이상 내려가지 않으면 게임은 끝난다. 방향키로는 어두운 부분의 막대를 왼쪽, 오른쪽으로만 이동시킬 수 있고 마우스를 한 번 클릭할 때마다 어두운 부분의 막대 맨 위의 숫자가 맨 아래로, 나머지 숫자들은 한 칸씩 올라간다. 더 이상 내려가지 않는 어두운 부분의 막대와 이웃한 막대들 속의 세 숫자들이 상하, 좌우 또는 대각선 방향 순서대로 등차수열이 될 때, 그 숫자들을 더한 점수들의 합을 득점으로 하는 게임이 있다.

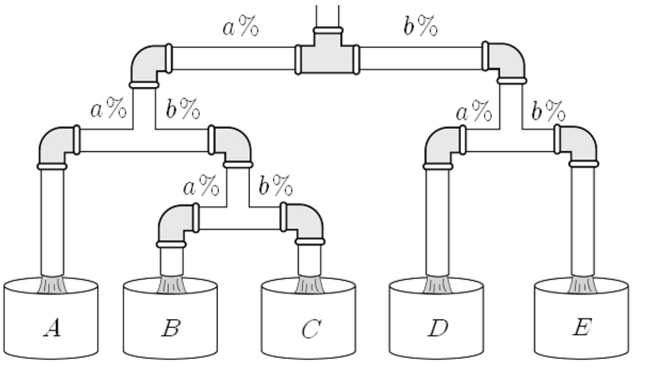


[예시]

다음 게임에서 얻을 수 있는 득점의 최대값을 구하시오. [4점]



25. 그림과 같은 수도관은 물을 흘려 보내면 유실되는 물이 없이 왼쪽으로 $a\%$, 오른쪽으로 $b\%$가 흐른다. 일정한 양의 물을 흘려 보낸 후 물통 A, B, C, D, E의 물의 양을 측정하면 물통 B, C, D순으로 등비수열을 이룬다. $b=p\sqrt{5}-q$(p, q는 유리수) 일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, $ab\neq0$) [4점]



5지선다형(26 ~ 29)

26. 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$, $AB+E=O$가 성립할 때, A^2+B^2을 간단히 하면?
(단, X^{-1}는 X의 역행렬, E는 단위행렬, O는 영행렬) [4점]

① A ② B ③ O ④ $-E$ ⑤ E

27. 무한수열의 극한값과 무한급수의 성질이다. <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ 이면 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ 이다.
(단, α, β는 상수)

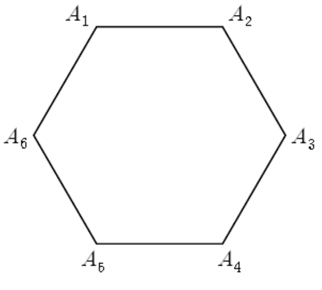
ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n + b_n)$과 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - 2b_n)$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴한다.

ㄷ. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha$ 이면 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 또는 $\lim_{n\to\infty} b_n$이 수렴한다.
(단, α는 상수)

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

28. 꼭지점이 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_6인 정육각형 모양의 게임판에서 다음 규칙에 따라 게임이 진행된다.

규칙1. A_1을 출발점으로 한다.
규칙2. 동전을 던져 앞면이 나오면 시계 방향의 이웃한 꼭지점으로 이동하고 뒷면이 나오면 반시계 방향의 이웃한 꼭지점으로 이동한다.
규칙3. A_4에 도달하면 더 이상 동전을 던지지 않고 게임은 끝난다.



동전을 다섯 번 던져서 게임이 끝날 확률은? [4점]

① $\frac{7}{32}$ ② $\frac{3}{16}$ ③ $\frac{5}{32}$ ④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{3}{32}$

29. 실수 a, b에 대하여 행렬

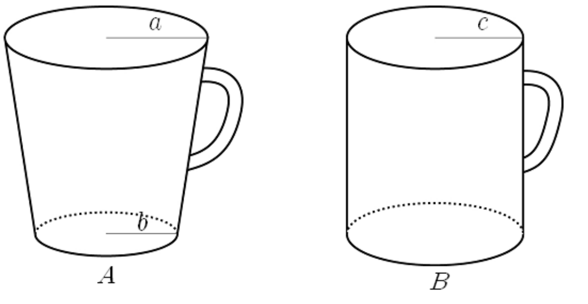
$$\begin{pmatrix} x^2+2x+a^2+b^2 & x+1 \\ x-1 & 2 \end{pmatrix}$$

이 역행렬을 갖지 않도록 하는 실수 x가 존재할 때, 점 (a, b)가 그리는 영역의 넓이는? [4점]

① $\frac{1}{2}\pi$ ② π ③ $\frac{3}{2}\pi$ ④ 2π ⑤ $\frac{5}{2}\pi$

단답형(30)

30. 직원뿔대 모양의 커피잔 A와 직원기둥 모양의 커피잔 B가 있다. 커피잔 A의 윗면의 반지름의 길이를 a, 아랫면의 반지름의 길이를 b, 커피잔 B의 반지름의 길이를 c라 할 때, a, c, b 순으로 등차수열을 이루고 $a:b=3:1$이며 각각의 높이는 윗면과 아랫면의 반지름의 길이의 합과 같다. A, B 두 커피잔에 커피를 높이의 $\frac{1}{2}$까지 부었을 때, 커피의 양을 각각 V_A, V_B라 하자. $\frac{V_A}{V_B}$의 값을 $\frac{q}{p}$(p, q는 서로소)라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. [4점]



* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.