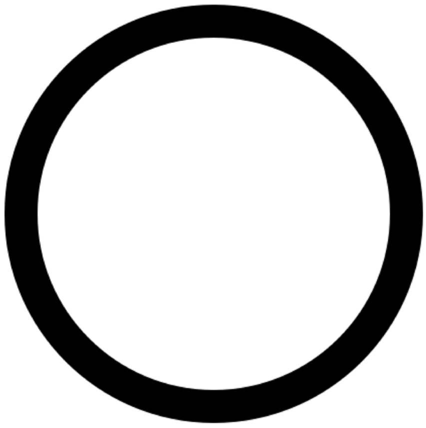
위키백과
우리 모두의 백과사전

원 (기하학)

기하학에서 원(圓, 영어: circle)은 평면 위의 한 점에 이르는 거리가 일정한 평면 위의 점들의 집합으로 정의되는 도형이다. 이러한 점을 원의 중심이라고 하고, 중심과 원 위의 점을 잇는 선분 또는 이들의 공통된 길이를 원의 반지름이라고 한다.



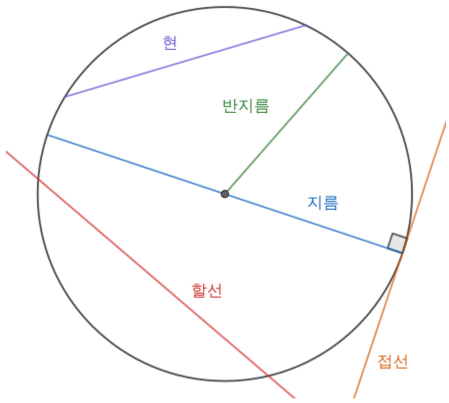
원

원은 이차 곡선의 일종인 타원에서 이심률이 0인 경우이다.

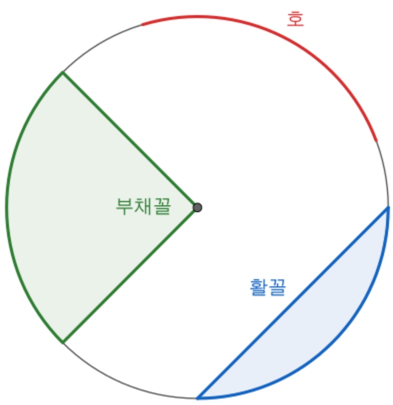
용어

원과 관련된 기본적인 용어들은 다음과 같다.

- **단위원**: 반지름이 1인 원
- **동심원**: 중심이 같은 두 원
- **반원**: 중심각이 평각인 부채꼴(활꼴)
- **반지름**: 원의 중심과 그 원 위의 점을 잇는 선분 또는 그 선분의 길이. 반지름의 길이는 지름의 2분의 1이다.
- **부채꼴**: 두 개의 반지름과 하나의 호로 둘러싸인 영역
- **사분원**: 중심각이 직각인 부채꼴
- **원주**: 원의 둘레
- **원주각**: 한 끝점을 공유하는 두 현이 원 내부에서 이루는 각. 크기는 이에 대응하는 중심각의 1/2이다.
- **원판**: 원으로 둘러싸인 도형
- **원환**: 두 동심원으로 둘러싸인 도형
- **접선**: 원과 한 점에서 만나는 직선
- **접현각**: 원의 현과 현의 한 끝점에서의 접선이 이루는 각
- **중심**: 원 위의 임의의 점에 이르는 거리가 일정한 그 원을 포함하는 평면 위의 점
- **중심각**: 호의 두 끝점을 지나는 반지름이 호와 같은 쪽에서 이루는 각. 크기는 이에 대응하는 원주각의 2배이다.
- **지름**: 원의 중심을 지나는 현 또는 그 길이. 길이는 반지름의 2배이다.
- **켤레호**: 원의 합하여 원주 전체를 이루는 두 호
- **할선**: 원과 두 점에서 만나는 직선
- **현**: 원 위의 두 점을 잇는 선분
- **호**: 원의 일부가 되는 곡선
- **활꼴**: 같은 끝점을 갖는 호와 현으로 둘러싸인 영역
- **시**: 할선의 중점을 수선의 발로 하는 선



현, 지름, 반지름, 할선, 접선



호, 활꼴, 부채꼴

역사

기원전 5세기경 안티폰은 정다각형의 변 수를 계속 늘려가면 결국엔 원이 된다고 생각했다. 이에 15세기 독일의 신학자 니콜라우스는 아무리 변을 늘려도 원이 될 수는 없다는 사상으로 반박했다.

해석적 성질

둘레와 넓이

어떤 원의 반지름의 길이를 r라고 하고, 지름의 길이를 d라고 하면, 원의 둘레는

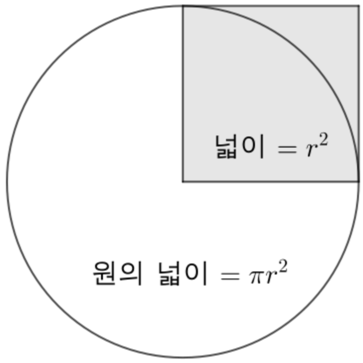
$$C = 2\pi r = \pi d$$

이다. 여기서 π는 원주율이다. 이는 약 3.1415...를 값으로 하는 초월수이다.

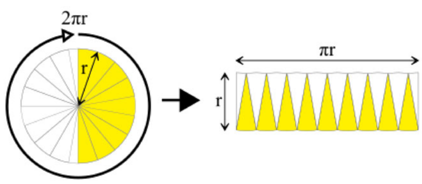
어떤 원의 반지름의 길이를 r라고 하고, 지름의 길이를 d라고 하고, 둘레를 C라고 하면, 원(으로 둘러싸인 도형)의 넓이는

$$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{C^2}{4\pi}$$

이다. 등주 부등식에 따르면, 이는 둘레가 C인 닫힌 곡선으로 둘러싸인 도형이 가질 수 있는 최대 넓이이다.



원의 넓이는 색칠된 정사각형의 넓이의 π배이다.



반지름의 길이가 r인 원은 무한히 작은 부채꼴들로 쪼개어 가로 길이 πr, 세로 길이 r의 직사각형으로 만들 수 있다.

방정식

직교 좌표계

2차원 직교 좌표계 위의 중심이 (a, b)이고 반지름이 r인 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

이다.[1]:22, §3 이는 피타고라스 정리를 통해 유도된다.

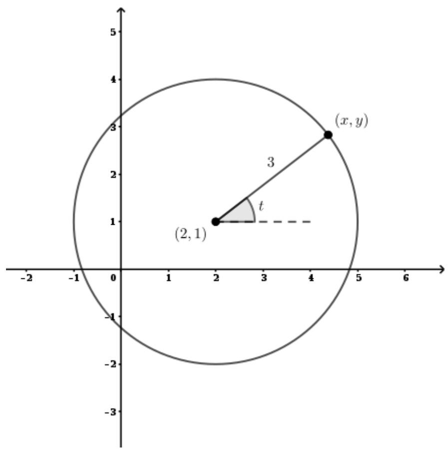
2차원 직교 좌표계 위의 원의 방정식의 일반적인 꼴은

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$$

이다. 단, d, e, f는 실수이며,

$$d^2 + e^2 - f > 0$$

이어야 한다.[1]:23, §3.2 좌변은 반지름의 4배에 대응하며, '=0'일 경우 한원소 집합이 되고, '<0'일 경우 공집합이 된다.[1]:24, §3.2, Example 3.2



중심이 (2, 1)이고 반지름이 3인 원

평면 위의 모든 원은 적절한 직교 좌표계를 취했을 때

$$x^2 + y^2 = r^2$$

와 같은 표준적인 방정식으로 표현된다. 단, $r > 0$이어야 한다. 이러한 꼴의 방정식을 얻으려면 원의 중심을 좌표계의 원점으로 삼기만 하면 된다.

2차원 직교 좌표계 위의 중심이 (a, b)이고 반지름이 r인 원은 다음과 같은 매개변수 방정식을 갖는다.[1]:23, §3.2, (3.5)

$$\begin{aligned} x &= a + r\cos t \\ y &= b + r\sin t \end{aligned} \qquad (0 \le t < 2\pi)$$

여기서 $\cos, \sin$은 각각 코사인 함수와 사인 함수이고, t는 매개 변수이다.

극좌표계

극좌표계 § 원의 극좌표 방정식 문서를 참고하십시오.

직교 좌표 (x, y) 대신 극좌표 (r, θ)를 사용할 수도 있다. 즉, 극좌표계 위의 중심이 (r_0, θ_0)이고 반지름이 R인 원의 방정식은

$$r^2 - 2rr_0\cos(\theta - \theta_0) + r_0^2 = R^2$$

이다.

복소평면

직교 좌표나 극좌표를 복소수 z로 대신하면, 원과 직선의 통일된 방정식을 얻을 수 있다.

복소평면 위에서, 중심이 z_0이고 반지름이 $r > 0$인 원의 방정식은

$$|z - z_0| = r$$

이다. 여기서 $|\cdot|$는 복소수의 절댓값이다.

또한 복소평면 위의 원의 방정식의 일반적인 꼴은

$$Az\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0$$

이다. 여기서 $\bar{\ }$는 켤레 복소수이다. 단, A, C는 실수이고, B는 복소수이며,

$$\begin{aligned} &|B|^2 - AC > 0 \\ &A \ne 0 \end{aligned}$$

이어야 한다. 또한, $A \neq 0$ 대신 $A = 0$을 취하고 다른 조건을 그대로 두면 복소평면 위의 직선의 방정식의 일반적인 꼴을 얻는다. 즉, $A \neq 0$이라는 조건을 제거하고 다른 조건을 그대로 두면 일반화 원의 방정식의 일반적인 꼴을 얻는다.

접선의 방정식

2차원 직교 좌표계 위에서, 원

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

의 (x_0, y_0)을 접점으로 하는 접선의 방정식은

$$(x_0-a)(x-a) + (y_0-b)(y-b) = r^2$$

이다.

원

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

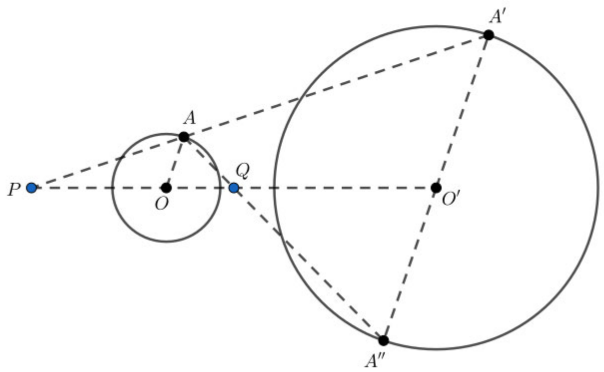
의 기울기가 m인 접선의 방정식은

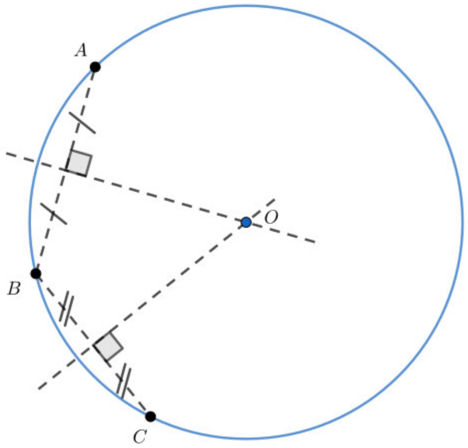
$$y - b = m(x-a) \pm r\sqrt{m^2+1}$$

이다.

기하적 성질

대칭

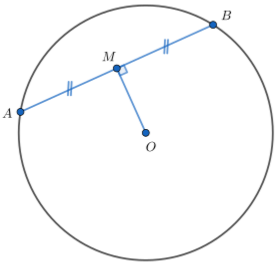


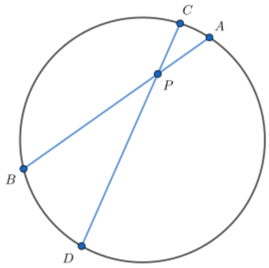


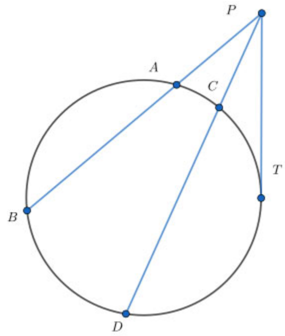
- 원은 지름에 대한 반사와 원의 중심에 대한 회전에 대하여 대칭이다.[2]:227, §20.1, Theorem 20.3
  - 즉, 원의 대칭군은 2차원 직교군 $\mathrm{O}(2, \mathbb{R})$이다.
- 임의의 두 원은 서로 중심 닮음이며, 동심원이 아닐 경우 두 원의 중심을 잇는 선분의 반지름의 비에 따른 내분점 및 외분점을 닮음 중심으로 갖는다.[3]:19, §25
- 반지름의 길이가 같은 모든 원은 서로 합동이다.[4]:23, §1F
- 공선점이 아닌 세 점을 지나는 원은 항상 유일하게 존재한다.[4]:23, §1F, Theorem 1.15

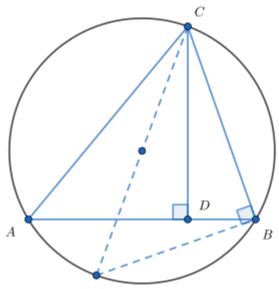
- 즉, 모든 삼각형의 외접원은 유일하게 존재한다.
- 즉, 임의의 세 점을 지나는 일반화 원은 항상 유일하게 존재한다.

호와 현



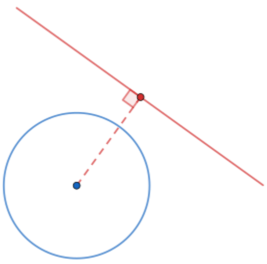


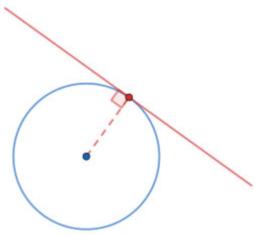


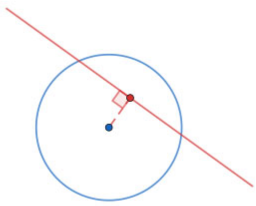


- 현의 수직 이등분선은 원의 중심을 지난다.[2]:227, §20.1, Theorem 20.2
  - 즉, 현에 수직인 지름은 현을 이등분한다.[2]:227, §20.1, Theorem 20.2
  - 즉, 지름이 아닌 현을 이등분하는 지름은 현에 수직이다.[2]:227, §20.1, Theorem 20.2
- 지름은 원의 가장 긴 현이다.[4]:23, §1F
- (방멱 정리) 원 위에 있지 않은 점 P를 지나는 두 직선 가운데 하나는 원과 점 A와 B에서 만나고, 다른 하나는 원과 점 C와 D에서 만난다고 하면, $PA \cdot PB = PC \cdot PD$이다.[4]:47, §1H, Theorem 1.35
- 원 위의 점과 현 사이의 거리와 지름의 곱은 점과 현의 양 끝점 사이의 거리의 곱과 같다.[3]:71, §101

원과 직선의 위치 관계





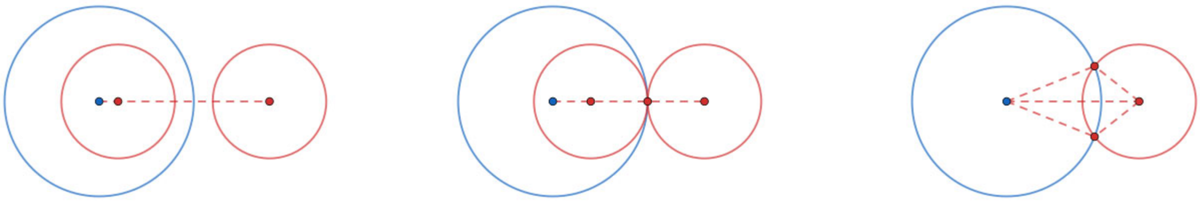


평면 위의 원과 직선의 위치 관계는 원의 중심에서 직선까지의 거리 d와 원의 반지름 r의 대소 관계에 따라 다음과 같은 경우로 나뉜다.

- 만약 $d > r$라면, 원과 직선은 만나지 않는다.

- 만약 $d = r$라면, 원과 직선은 한 점에서 만난다. 즉, 직선은 원의 접선이다.
- 만약 $d < r$라면, 원과 직선은 두 점에서 만난다. 즉, 직선은 원의 할선이다.

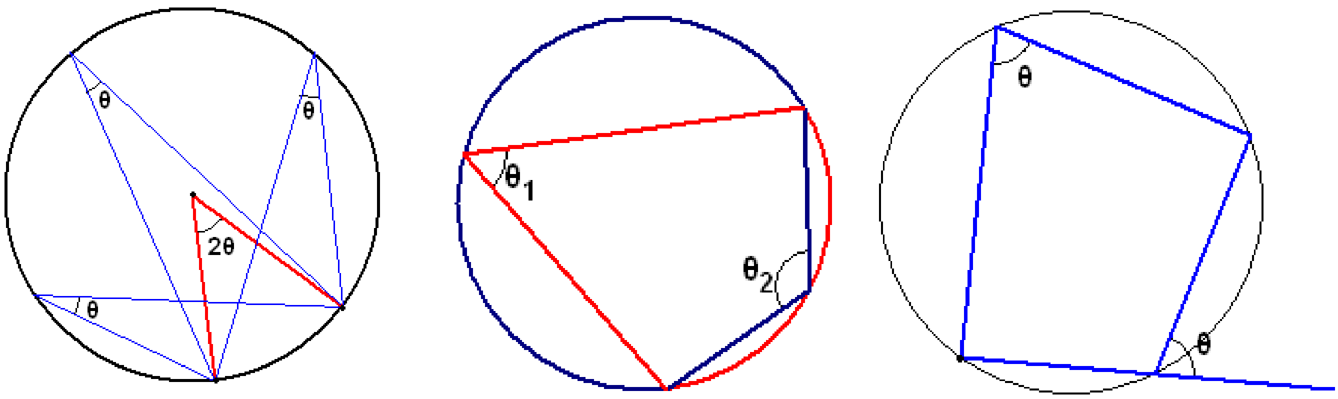
두 원의 위치 관계



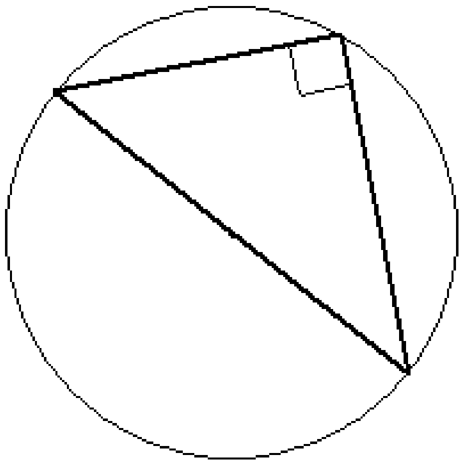
두 원의 위치 관계는 두 원의 반지름 R, r와 두 중심 사이의 거리 d에 따라 다음과 같은 경우로 나뉜다.

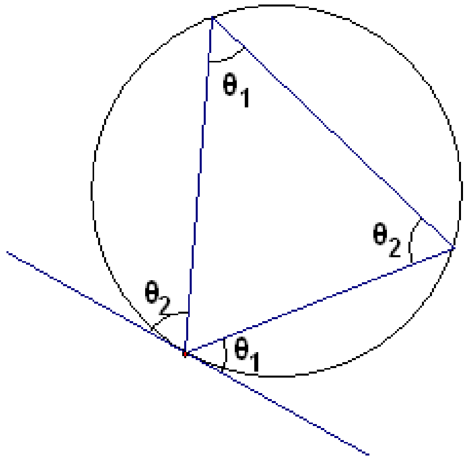
- 만약 $d > R + r$이거나 $d < |R - r|$라면, 두 원은 만나지 않는다.
  - 만약 $d > R + r$라면, 두 원은 서로의 외부에 놓이며, 교점을 가지지 않는다.
  - 만약 $d < |R - r|$라면, 작은 원은 큰 원의 내부에 놓이며, 교점을 가지지 않는다.
- 만약 $d = R + r$이거나 $d = |R - r|$라면, 두 원은 한 점에서 만난다. 즉, 두 원은 서로 접한다.
  - 만약 $d = R + r$라면, 두 원은 서로의 외부에서 접한다. 즉, 두 원은 외접한다.
  - 만약 $d = |R - r|$라면, 작은 원이 큰 원의 내부에서 큰 원에 접한다. 즉, 두 원은 내접한다.
- 만약 $|R - r| < d < R + r$라면, 두 원은 두 점에서 만난다.

중심각과 원주각



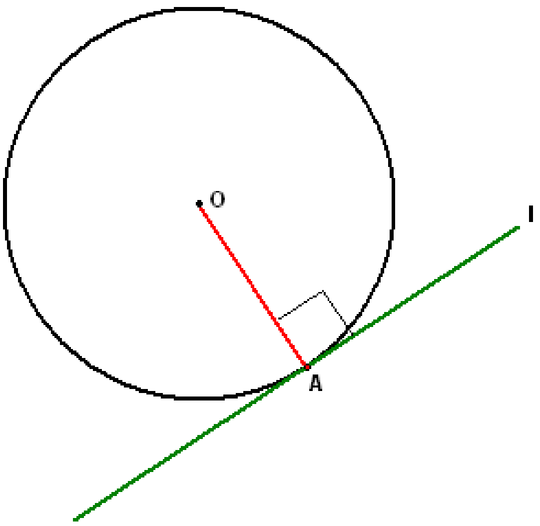
- 주어진 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 1/2이다.[4]:25, §1F, Theorem 1.16
- 같은 호에 대한 두 원주각의 크기는 서로 같다.[4]:25, §1F
- 결레호에 대한 두 중심각은 서로 보각이다.
  - 즉, 내접 사각형의 두 대각은 서로 보각이다.[4]:26, §1F, Corollary 1.17
  - 즉, 내접 사각형의 외각의 크기는 내대각과 같다.

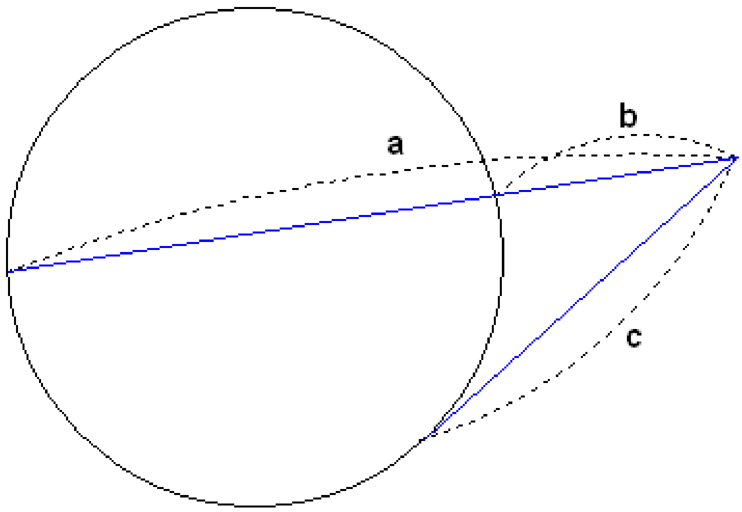




- (탈레스 정리) 지름에 대한 원주각은 직각이다.
  - 즉, 삼각형의 외심이 변 위에 있을 필요충분조건은 직각 삼각형이다.[4]:30, §1F, Corollary 1.22
- 원의 두 현이 원 내부에서 이루는 각의 크기는 이 각과 맞꼭지각의 내부에 포함되는 두 호에 대한 중심각의 합의 1/2이다.[4]:27, §1F, Corollary 1.19
- 원의 두 할선이 원 외부에서 이루는 각의 크기는 이 각의 내부에 포함되는 두 호에 대한 중심각의 차의 1/2이다.[4]:27, §1F, Corollary 1.18

접선





- 원 위의 한 점을 지나는 원의 접선은 유일하게 존재하고, 이는 이 점을 지나는 반지름에 수직이다.[2]:228, §20.1, Theorem 20.4[4]:30-31, §1F
  - 즉, 반지름의 반지름 끝점에서의 수선은 원에 접한다.[2]:228, §20.1, Theorem 20.4
  - 즉, 원의 접선의 접점에서의 수선은 원의 중심을 지난다.
- 원 외부의 한 점을 지나는 원의 접선은 정확히 2개이고, 이 점과 두 접점 사이의 거리는 같으며, 두 접선이 이루는 각과 두 접점을 지나는 반지름이 이루는 각은 서로 보각이다.
- 원의 접현각의 크기는 현을 기준으로 이와 같은 쪽에 있는 호에 대한 중심각의 1/2이다.[4]:31, §1F, Theorem 1.23
- 원의 접선과 할선이 원 외부에서 이루는 각은 각의 내부에 포함된 두 호의 중심각의 차의 1/2이다.[4]:31, §1F, Corollary 1.24

- 외접하는 두 원의 교점을 지나는 두 공통 할선 사이의 두 현은 서로 평행한다.[4]:31, §1F, Problem 1.25
- (접선에 대한 방멱 정리)원 외부의 점 P를 지나는 두 직선 가운데 하나는 원과 A와 B에서 만나고, 하나는 원에 점 T에서 접한다고 하면, $PA \cdot PB = PT^2$이다.

원의 직교

- 두 원의 교점에서의 두 접선이 서로 수직일 경우 두 원이 서로 직교한다고 한다.[3]:33, §48
- 두 원의 반지름이 r, r'이고, 두 중심 사이의 거리가 d라고 할 때, 두 원이 서로 직교할 필요충분조건은 $r^2 + {r'}^2 = d^2$이다.[3]:34, §48
- 주어진 원에 직교하고 중심이 원 외부의 주어진 점인 원은 유일하게 존재한다.[3]:34, §48
- 주어진 원에 직교하고 원의 지름이 아닌 현의 두 끝점을 지나는 원은 유일하게 존재한다.[3]:34, §48

작도

공선점이 아닌 세 점을 지나는 원

공선점이 아닌 세 점 A, B, C를 지나는 원은 컴퍼스와 자를 사용하여 다음과 같이 작도할 수 있다.

- 선분 AB의 수직 이등분선을 그린다.
- 선분 BC의 수직 이등분선을 그린다.
- 선분 AB와 BC의 교점 O를 취한다.
- 점 O를 중심으로 하고 선분 OA를 반지름으로 하는 원을 그린다. 이 경우 원은 점 A, B, C를 지난다.

원의 중심

주어진 원의 중심은 컴퍼스와 자를 사용하여 다음과 같이 작도할 수 있다.

- 원 위의 두 점 A, B을 취한다.
- 선분 AB의 점 B에서의 수선 BP를 그린다.
- 직선 BP와 원의 교점 C를 취한다. 이 경우 선분 AC는 원의 지름이다.
- 또 다른 지름 $A'C'$을 작도한다.
- 선분 AC와 $A'C'$의 교점 O를 취한다. 이 경우 점 O는 원의 중심이다.

원적 문제

이 부분의 본문은 원적 문제입니다.

원적 문제는 주어진 원과 넓이가 같은 정사각형을 컴퍼스와 자로 작도하는 문제를 일컫는다. 이는 원주율 π가 초월수이므로 불가능하다.

기타 관련 주제

내접원, 외접원, 방접원

모든 삼각형은 유일한 내접원 및 외접원과 정확히 3개의 방접원을 갖는다. 그러나, 일반적으로 다각형은 내접원이나 외접원을 가질 필요가 없다. 어떤 다각형이 모든 변에 접하는 원을 가질 경우, 이 다각형을 외접 다각형이라고 한다. 어떤 다각형이 모든 꼭짓점을 지나는 원을 가질 경우, 이 다각형을 내접 다각형이라고 한다. 동시에 외접 다각형이며 내접 다각형인 다각형을 이중중심 다각형이라고 한다. 예를 들어, 모든 삼각형과 모든 정다각형은 이중중심 다각형이다.

주어진 원의 내접 n각형 가운데 넓이가 가장 큰 것은 정n각형이다.[4]:35, §1G

문학

- 에드윈 A. 애보트의 공상 수학 소설 《플랫랜드》에서는 원이 성직자로 출현하며, 평면도형들 중 가장 고귀한 계급으로 여겨진다.

같이 보기

- 일각형
- 구
- 원기둥
- 부채꼴
- 컴퍼스
- 원주율
- 하위헌스 원리

각주

1. Gibson, C. G. (2003). 《Elementary Euclidean geometry》 (영어). Cambridge: Cambridge University Press. ISBN 978-0-521-83448-3.
2. Martin, George E. (1975). 《The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane》. Undergraduate Texts in Mathematics (영어). New York, NY: Springer. doi:10.1007/978-1-4612-5725-7 (https://dx.doi.org/10.1007%2F978-1-4612-5725-7). ISBN 978-1-4612-5727-1.
3. Johnson, Roger A. (1960) [1929]. 《Advanced Euclidean Geometry》 (영어). New York, N. Y.: Dover Publications.
4. Isaacs, I. Martin (2001). 《Geometry for College Students》. The Brooks/Cole Series in Advanced Mathematics (영어). Brooks/Cole. ISBN 0-534-35179-4.