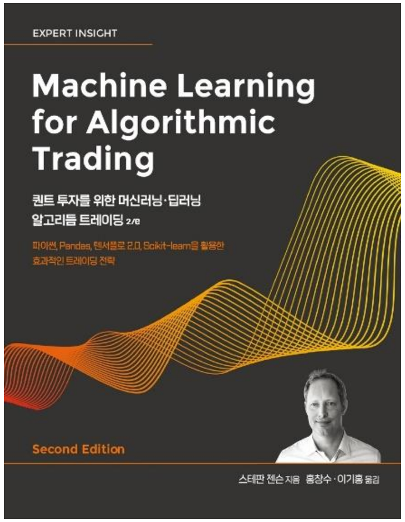
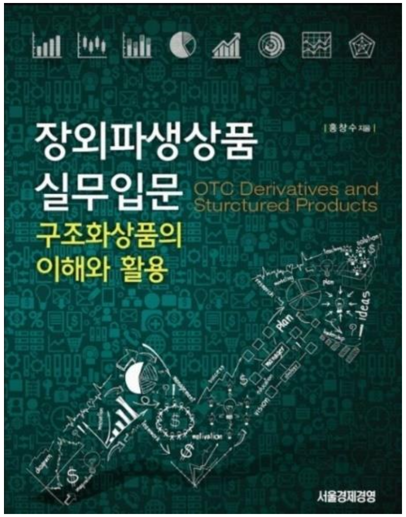
금융공학의 이해와 활용

NICE P&I㈜ 금융공학연구소
홍 창 수

홍창수 < 강연자 약력 >





한국외대 경영학 박사재무전공)

경북대 경영학 석사(재무전공)

現, NICE P&I㈜ 금융공학연구소 실장

한국금융공학회 산학협력위원회 간사

KRX 파생상품교육단 위촉강사

한화투자증권 금융공학팀, OTC파생팀

한국투자증권 리스크관리부, PI 센터

리딩투자증권 파생상품운용팀

외환선물㈜ 국제영업팀, 투자공학팀

한국금융공학포럼 시삽, 선물협회, 금융투자교육원, 연세대, 대한수학회

KAIST 금융전문대학원, 국세청, 금감원, 신한은행 등 강의 다수

강의 순서(目次)

- 본 강의에서 배울 것들
  - 금융공학을 위한 파생상품 입문
  - 금융공학 기초
  - 금융공학을 위한 금융수치해석
  - 변동성 스마일의 이해
  - 금융공학 실무사례 : 주식파생상품의 평가
  - 퀀트 전문가가 되는 길

금융공학을 위한 파생상품 입문

금융투자회사의 주요업무

구분	주요업무	주요 내용
IB 업무	전통업무	M&A, 기업구조조정 자문, 주식 및 채권 발행시장 업무
	주식업무	주식 현물, 파생상품, 선물옵션 거래
	FICC	금리, 외환, 원자재, 신용, 이머징 마켓, 증권화 상품 거래 등
자산관리	Asset Management, 펀드 판매	
기타	위탁매매, Private Banking, 벤처 캐피탈, 프로젝트 파이낸스, 리서치 등	

금융투자회사의 주요업무

■ 딜링룸 사진

D증권 트레이딩센터 전경

여의도로 몰려드는 수학자들

1세대 Quant가 밝힌 진짜 Quant의 세계 "방정식이 곧 돈이죠"

서울 여의도 우리투자증권 트레이딩룸. 네다섯 대의 모니터 뒤로 커다란 화이트보드가 눈에 띈다. 보드판에는 주가지수나 종목이 아닌 복잡한 '수식'이 빼곡하게 적혀 있었다."아 이거요? '블랙숄즈 방정식'이라는 겁니다. 주식시장 변화에 따라 매일 이 방정식과 씨름하는 게 우리 일입니다."

◆ 방정식 세워 수익률 계산

이달 초 만난 파생운용부 차기현 이사가 의아해하는 눈빛을 알아챘는지 이렇게 설명했다. 화이트보드를 가득 채운 수식은 대표적인 파생금융상품인 '주가연계증권(ELS)'의 설계도였다. 주가연계증권은 주식의 가격이나 주가지수에 연동돼 투자수익이 결정되는 금융상품이다. 보통 이 증권을 사는 고객이 투자하는 돈과 주식 종목, 은행 대출금리가 연결돼 상품이 구성된다. 예를 들어 40원이던 주식 값이 1년 뒤에 2배로 오르면 30원을 돌려주고, 주식 값이 떨어져도 손해를 보지 않는 파생상품을 만들 경우 먼저 이 상품을 고객한테 얼마에 팔 것인지를 정해야 된다. 그러기 위해선 이 상품의 '1년 뒤 가치'를 계산해야 하는데, 여기에 '블랙숄즈 방정식'이 이용된다. 만일 1년 뒤 이 주식 가격이 40원에서 80원으로 2배로 올랐을 경우 이 상품의 '1년 뒤 가치(C)'는 80원(S)에서, 현재 시점에서 40원을 은행에서 대출받을 경우 1년 뒤 상환해야 하는 원금과 이자를 합친 50원(B)을 뺀 30원, 즉 'C=S-B'라는 것이다. 여기까지 설명한 차 이사는 "이렇게만 보면 간단하지만 주식 시장이 실시간으로 변하기 때문에 이제부터가 시작"이라고 운을 뗐다. 증권회사가 '1년 뒤 가치'인 30원을 벌기 위해 은행에서 빌려야 하는 돈과 살 주식의 양을 결정하는 요소로 S와 B 앞에 계수가 붙는데, 매우 복잡한 수식으로 이뤄져 있다. 차 이사는 "이 계수는 1년 뒤의 주식 값을 통계 데이터를 토대로 예측하는 값이기 때문에 증권회사는 매일 주식 시장의 변화에 따라 이 계수를 새로 계산해서 투자 비율을 조정한다"고 덧붙였다.

◆ 수학 전공하고 Quant로 변신

차 이사처럼 조금 더 수익을 올리기 위해 매일 방정식과 씨름하는 이들을 '퀀트'라고 부른다. 퀀트는 '계량분석가(Quantitative Analyst)'를 뜻하는 영어의 줄임말이다. 포스텍에서 박사학위를 받고 이화여대 수학과 연구교수를 지낸 수학자인 차 이사는 1세대 퀀트다. 1세대 퀀트들은 2002년부터 증권사에 입사해 대학에서 이론으로만 배웠던 주가연계증권을 직접 설계하면서 소위 '맨땅에 헤딩'을 해야 했다. 컴퓨터 시스템도 없었고 경험도 부족해 밤을 새워 계산에 매달렸다. 이들의 노력 덕분에 10여 년이 흐른 지금, 주가연계증권은 지난해에만 시장규모가 48조 원에 이를 정도로 커졌다. 최근 여의도에는 수학과 출신 퀀트가 대거 늘었다. KAIST 수리과학과가 2009~2013년 졸업생의 진로 현황을 조사한 결과 전체의 57%가 금융계로 진출했다. 대학의 수학 교육도 바뀌고 있다. 2000년대 후반 들어 대부분 대학의 수학과에서는 학부과정에서부터 금융수학 과목을 개설해 가르치고 있다. 강완모 KAIST 수리과학과 교수는 "최근 수학과에서는 직접 파생상품을 설계하는 과정을 개설하는 등 다양한 형태의 금융수학 과목을 가르치는 추세"라고 말했다.

수학동아 최영준 기자 jxabbey@donga.com

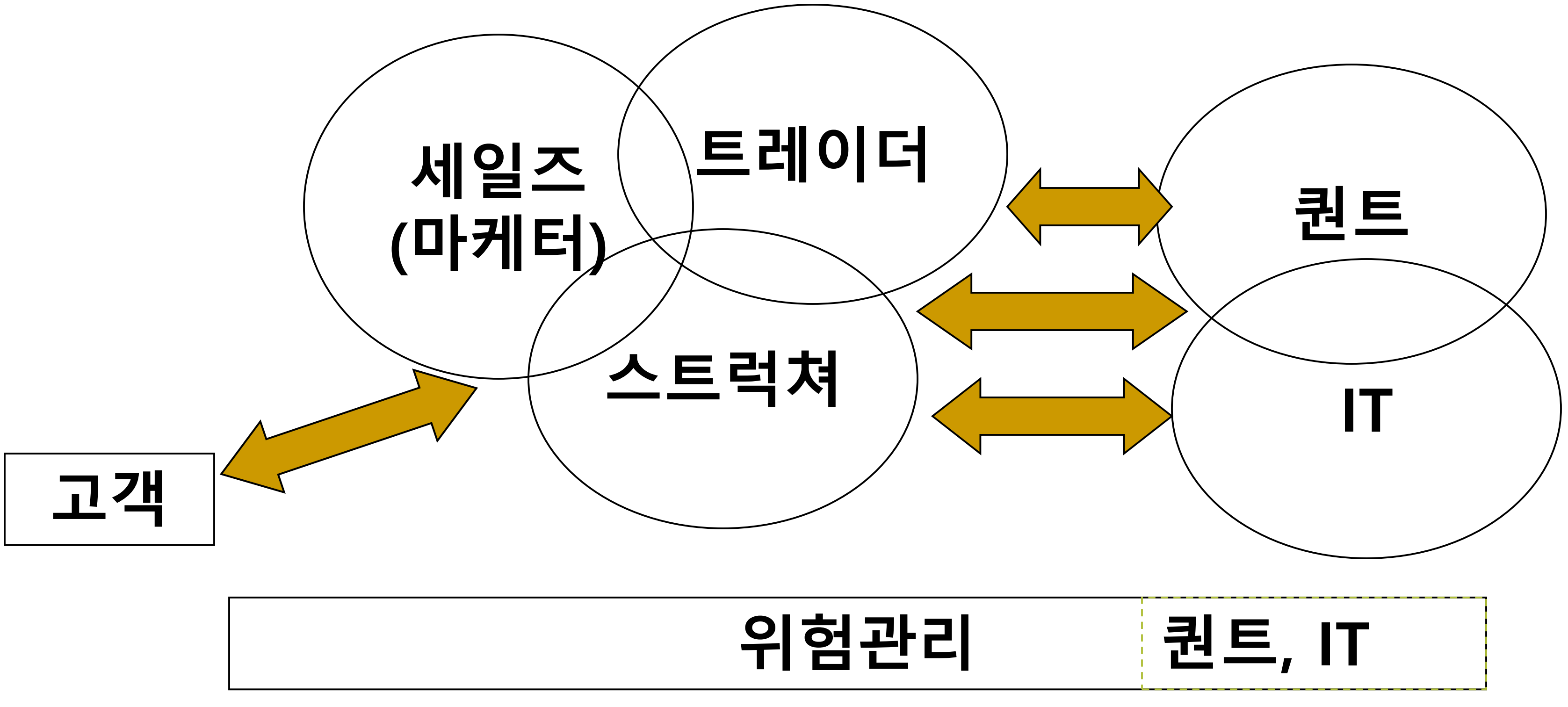
금융시장의 실제모습

- 시장의 현실적인 모습(유머)

International Herald Tribune, October 27, 1989. Kal, Cartoonists and Writers Syndicate, 1989.

금융공학부서의 주요업무

- 딜링룸: 독립업무와 부서간 협업



딜링룸 해부: 세일즈(Sales)

- 세일즈(Sales) 혹은 마케터(Marketer)
  - 고객과 접점(장외파생상품 등 계약 및 상품 판매)
  - 옵션을 팔거나 다른 금융기관의 상품 판매(Back To Back)

- 상품설계자(Structurer, 통상 '스트럭쳐'라 부름)
  - 고객에게 매력적인 신상품 설계
  - 고객 요구 : 낮은 위험, 높은 수익, 낮은 프리미엄(가격)

딜링룸 해부: 트레이더(Traders)

- 헤지 트레이더(Traders)
  - 오픈 포지션을 헤지(hedge)하는 역할
  - 기초자산의 움직임에 대한 포트폴리오의 민감도를 최소화하기 위해 옵션을 사거나 파는 매매
- 자기매매 트레이더(Prop-trader)
  - 시장의 움직임(방향성 및 변동성 등)을 예측하여 매매

퀀트(Quant) 소개

- 하는 업무
  - 증권사 및 은행의 위험계산과 구조화상품의 가격계산을 위한 수리적 모형(mathematical model)을 개발하고 구현하는 일
- 일하는 곳
  - 투자은행, 헤지펀드, 더 일반적으로 말하면 파생상품과 시장위험을 취급하는 모든 금융기관(운용사,보험사,감독기관 등)
- 학문적 배경:
  - 수학(Mathematics)
  - 물리학(Physics)
  - 공학(Engineering)
  - 재무(Finance) 및 경제학(Economy)

은행은 어떻게 돈을 버나?

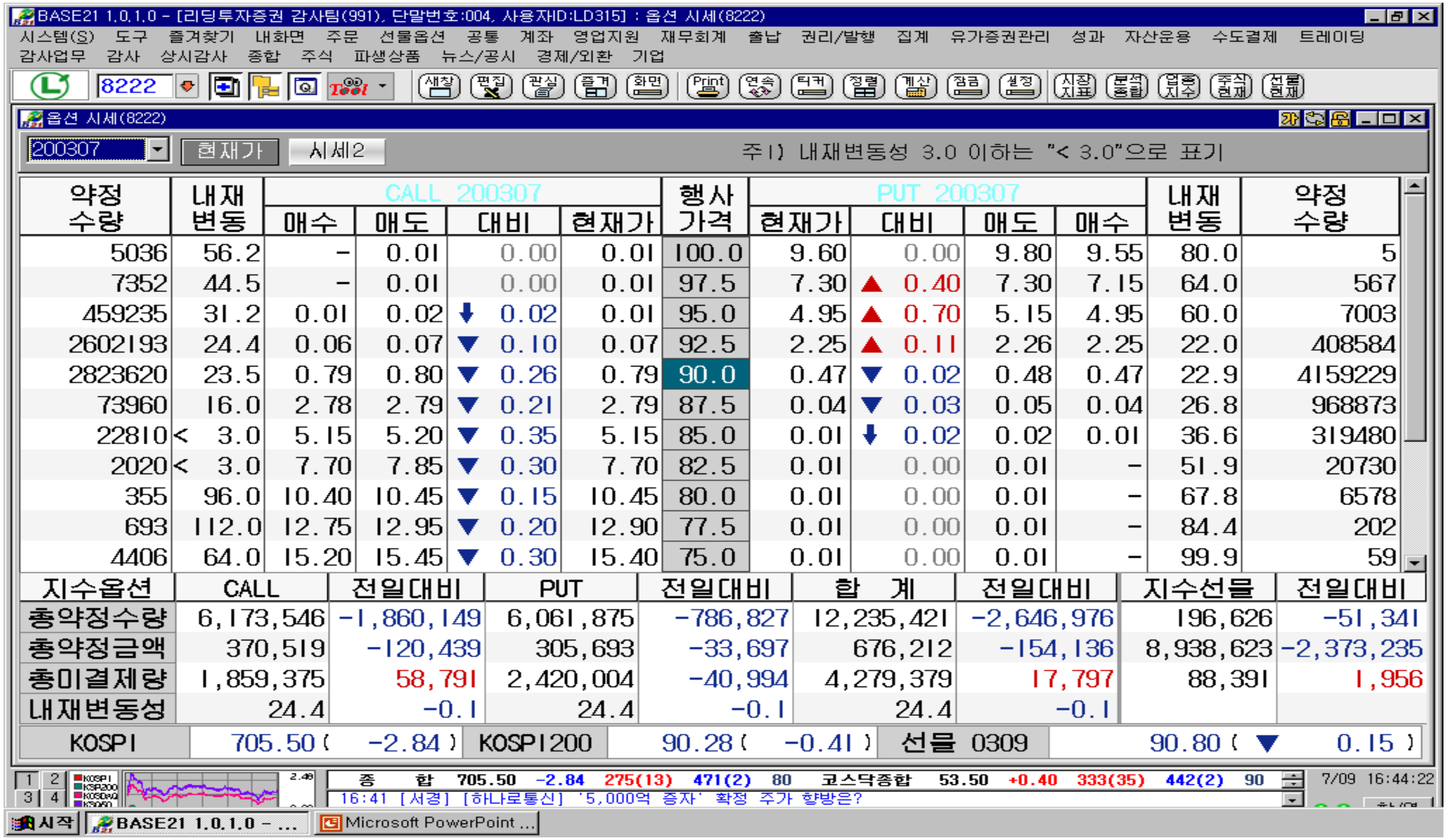
- BLASH(저가매수 고개매도 Buying low & sell high)
  - “매수-매도” 호가스프레드(매수가: bid, 매도가: offer)
- 은행은 고객에게 가장 좋은 스프레드를 제공하려함
- 스프레드는 너무 높아도 않 됨
  - 고객은 다른 은행으로 갈 수 있음
- 스프레드는 너무 낮아도 않 됨
  - 은행은 헤지 할 충분한 돈을 가지고 있지 않음

파생상품 : 핵심사항 정리

- 옵션의 “공정한” 가격(“fair” price)은 무엇인가?

- 일반적인 옵션가격의 특징:
  - 발행자가 헤징하기 더 어려울 수록 비싸다.
  - 만기가 길수록 더 비싸다.
  - 변동성이 클수록 더 비싸다.

파생상품 : 옵션시세표



BASE21 1.0.1.0 - [리딩투자증권 감사팀(991), 단말번호:004, 사용자ID:LD315] : 옵션 시세(8222)

옵션 시세(8222)

200307 현재가 시세2 주1) 내재변동성 3.0 이하는 "< 3.0"으로 표기

약정수량	내재변동	CALL 200307 매수	매도	대비	현재가	행사가격	PUT 200307 현재가	대비	매도	매수	내재변동	약정수량
5036	56.2	-	0.01	0.00	0.01	100.0	9.60	0.00	9.80	9.55	80.0	5
7352	44.5	-	0.01	0.00	0.01	97.5	7.30	▲ 0.40	7.30	7.15	64.0	567
459235	31.2	0.01	0.02	↓ 0.02	0.01	95.0	4.95	▲ 0.70	5.15	4.95	60.0	7003
2602193	24.4	0.06	0.07	▼ 0.10	0.07	92.5	2.25	▲ 0.11	2.26	2.25	22.0	408584
2823620	23.5	0.79	0.80	▼ 0.26	0.79	90.0	0.47	▼ 0.02	0.48	0.47	22.9	4159229
73960	16.0	2.78	2.79	▼ 0.21	2.79	87.5	0.04	▼ 0.03	0.05	0.04	26.8	968873
22810	< 3.0	5.15	5.20	▼ 0.35	5.15	85.0	0.01	↓ 0.02	0.02	0.01	36.6	319480
2020	< 3.0	7.70	7.85	▼ 0.30	7.70	82.5	0.01	0.00	0.01	-	51.9	20730
355	96.0	10.40	10.45	▼ 0.15	10.45	80.0	0.01	0.00	0.01	-	67.8	6578
693	112.0	12.75	12.95	▼ 0.20	12.90	77.5	0.01	0.00	0.01	-	84.4	202
4406	64.0	15.20	15.45	▼ 0.30	15.40	75.0	0.01	0.00	0.01	-	99.9	59

지수옵션	CALL	전일대비	PUT	전일대비	합 계	전일대비	지수선물	전일대비
총약정수량	6,173,546	-1,860,149	6,061,875	-786,827	12,235,421	-2,646,976	196,626	-51,341
총약정금액	370,519	-120,439	305,693	-33,697	676,212	-154,136	8,938,623	-2,373,235
총미결제량	1,859,375	58,791	2,420,004	-40,994	4,279,379	17,797	88,391	1,956
내재변동성	24.4	-0.1	24.4	-0.1	24.4	-0.1		

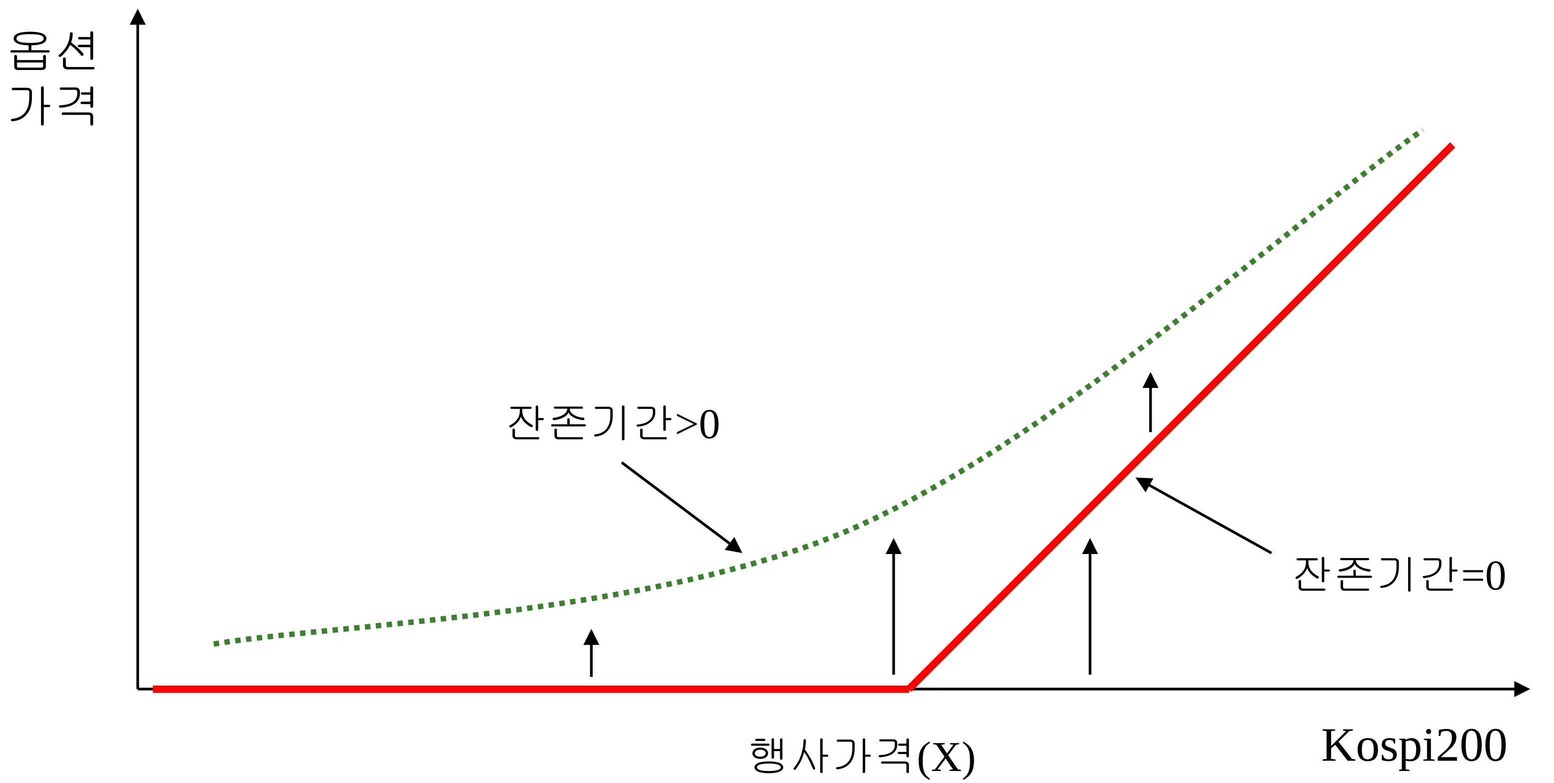
KOSPI 705.50 (-2.84) KOSPI200 90.28 (-0.41) 선물 0309 90.80 (▼ 0.15)

종 합 705.50 -2.84 275(13) 471(2) 80 코스닥종합 53.50 +0.40 333(35) 442(2) 90 7/09 16:44:22

16:41 [서경] [하나로통신] '5,000억 증자' 확정 주가 향방은?

- 옵션 만기일의 옵션시세표. 외가격(OTM)옵션의 프리미엄은 거의 0에 근접, 내가격(ITM)의 프리미엄은 거의 확정, 등가격(ATM중심)의 매매만 성립

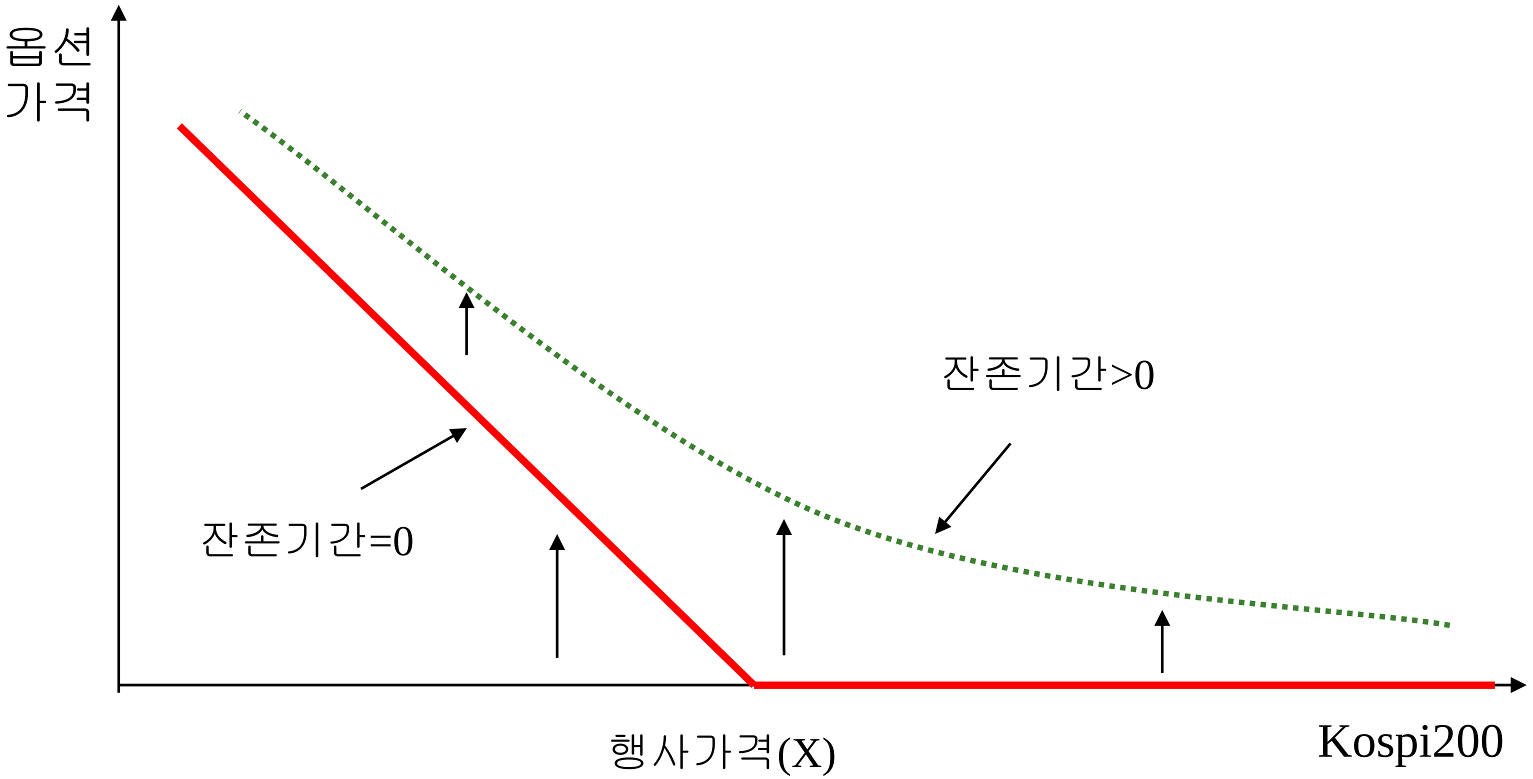
파생상품 : 콜옵션



☞ **주식, 선물 : 선형상품(Linear Product) 옵션: 비선형 상품(Nonlinear Product)**

옵션은 기초자산변화에 곡선의 형태를 띰(Optionality, 시간가치등의 변수에 의함)

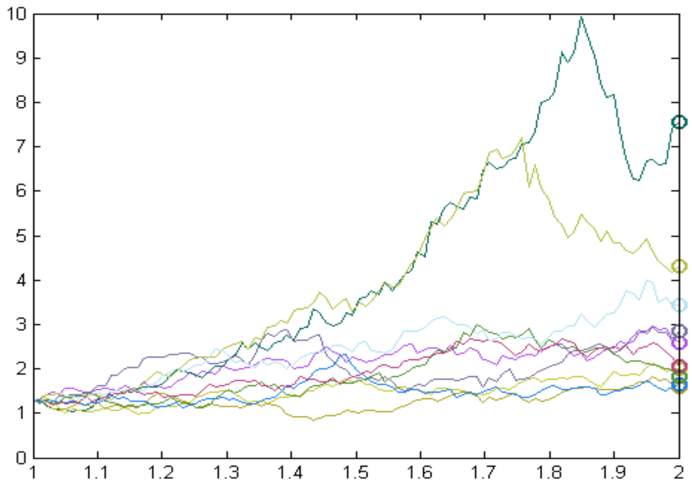
파생상품 : 풋옵션



☞ **풋옵션의 가격변화**

파생상품 : KOSPI200옵션에서 공정가격 계산

- 핵심아이디어는 유사:
- 공정가(fair price) ≒ 평균수익구조
- 10만번의 주식 시뮬레이션



- 최종가치를 기록
- 경로에 대한 손익구조 계산
- 모든 경로의 평균

- 할인(Discounting)
- 평균가격은 만기에서 유효하며
- 오늘의 가격과 동등한 계산 하기위해:
  - 오늘 은행계좌에 있는 N원 = T시점 후의 N · e^{rT} 원
- 역으로,
  만기의 P = P · e^{-rT} 오늘

※ 옵션가격 =
할인된 평균 수익구조(payoff)

확률이 취해진 평균은 모든 위험이 제거되었다는 의미임: 위험중립 척도(Risk-neutral measure)

파생상품 : 옵션 계산방식

① 옵션계산 방식

옵션가치평가

- 가격결정식
- Tree 방법
- 유한 차분법
- 시뮬레이션

② 옵션계산 사례

92회 사모 warrant

Black Sholes Model

Put

기초자산(S)	112.37
행사가격(X)	111.62
잔존만기(T)	0.9400
무위험이자율(r)	3.27%
보유비용(b)	3.27%
변동성(σ)	21.51%
프리미엄	7.2429

민감도

델타 Δ	-0.3883
감마 Γ	0.0164
베가	0.4175
세타 Θ	-0.0311
로 ρ	-0.4782

ELS사모 92회 옵션

Standard barrier options

[6] Up-and-out call

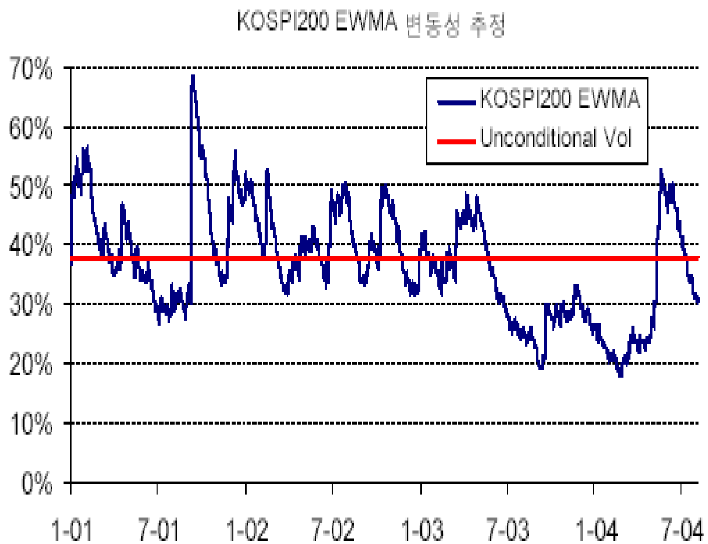
Continuously

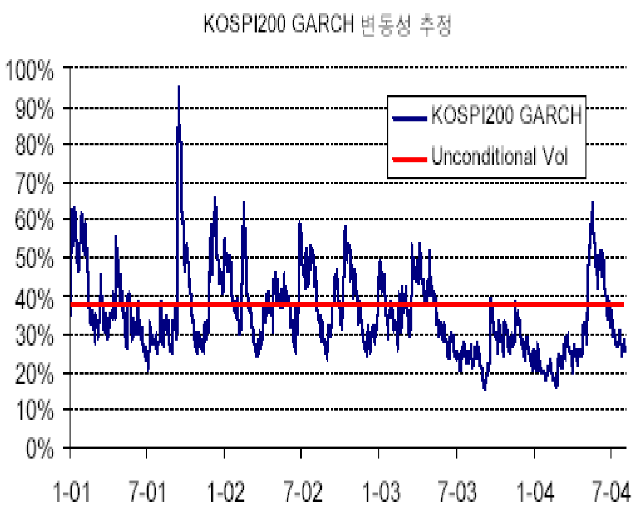
자산가격(S)	112.37
행사가격(X)	119.76
베리어(H)	148.28
현금 리베이트(K)	7.60
잔존만기(T)	0.98
무위험 이자율(r)	3.27%
보유비용(b)	3.27%
변동성(σ)	20.35%
조정된 베리어	148.28
프리미엄	3.4186

파생상품 : 변동성의 개념

☞ **사전적인 의미** : 일정 기간 동안 주식, 채권, 환율, 상품이 변동하는 정도로 , 위험을 계량화한 지표로써, 표준편차 혹은 분산을 이용

☞ **옵션에서의 의미** : 행사될 수 있는 가능성으로, 변동성이 곧 옵션의 가격 (역사적 변동성, 내재 변동성, 미래 변동성)

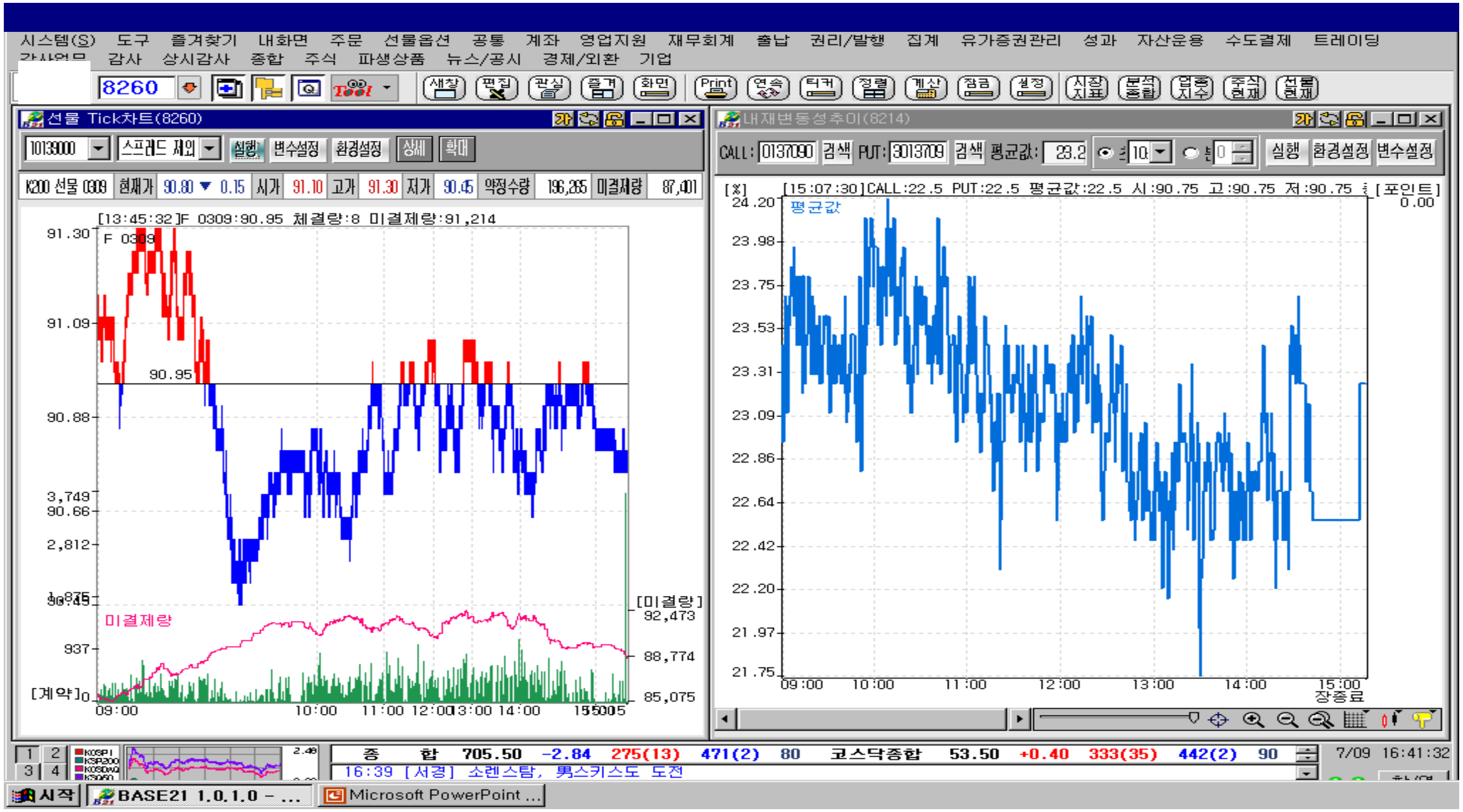




파생상품 : 변동성지수(VIX)

CBOE VOLATILITY INDEX
출처: http://finance.yahoo.com/q/bc?s=^VIX&t=2y

파생상품 : KOSPI200지수와 내재변동성



☞ 지수선물의 움직임과 내재변동성(IV)의 방향성 : 옵션 트레이더의 관심사항

지수상승 보다 지수하락에 민감 (상승보다 하락 시 변동성 증대 경향)

옵션민감도 : 델타(Delta)

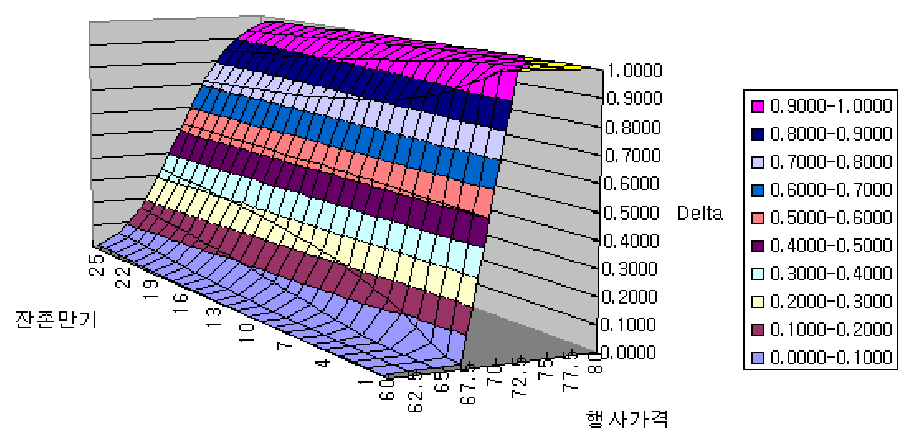
☞ **Delta 는 기초자산의 변화에 대한 특정옵션의 변화량을 나타냄.**

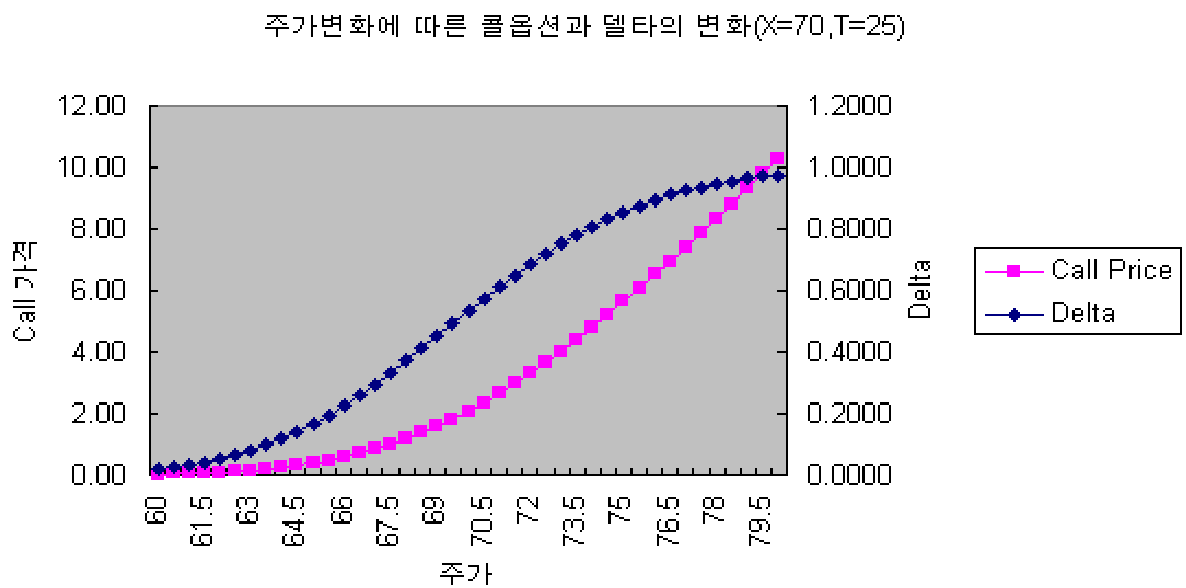
즉, 다음 그래프에 대해 1차 미분한 기울기를 나타내며 %로

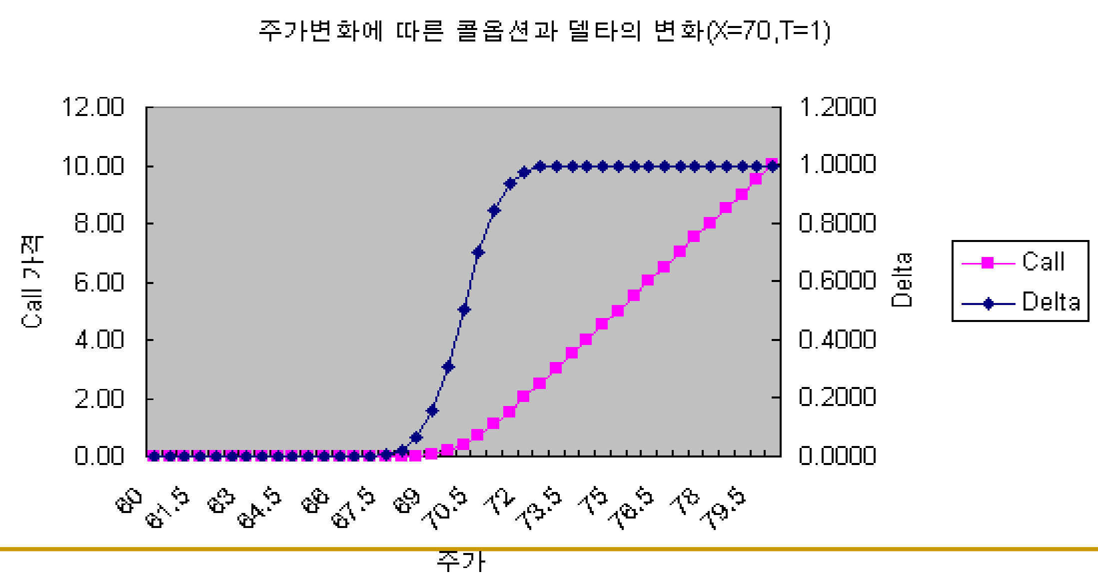
나타낼 때는 행사가능성에 대한 확률로도 해석할 수 있음.

$$\text{Delta} = \frac{\text{옵션가격의 변화}}{\text{기초자산 가격의 변화}} * 100$$

시간과 주가변화에 따른 델타의 변화




주가변화에 따른 콜옵션과 델타의 변화(X=70,T=25)
12.00
10.00
8.00
6.00
4.00
2.00
0.00
1.2000
1.0000
0.8000
0.6000
0.4000
0.2000
0.0000
Call 가격
Delta
60
61.5
63
64.5
66
67.5
69
70.5
72
73.5
75
76.5
78
79.5
주가
Call Price
Delta


주가변화에 따른 콜옵션과 델타의 변화(X=70,T=1)
12.00
10.00
8.00
6.00
4.00
2.00
0.00
1.2000
1.0000
0.8000
0.6000
0.4000
0.2000
0.0000
Call 가격
Delta
60
61.5
63
64.5
66
67.5
69
70.5
72
73.5
75
76.5
78
79.5
주가
Call
Delta

변동성 매매와 델타중립(Delta Neutral)

☞ Delta 는 방향성위험(Directional risk)을 나타냄

방향성 위험을 갖는 포지션 델타를 0으로 맞춰 매매 하는 것(변동성매매)

기초자산 가격변화에 옵션가치변화=>주기적인 델타포지션 조정 (선물이용)

☞ 변동성 매매를 하는 이유

변동성의 불확실성을 매매에 응용, 변동성 평균회귀(Mean reverting)특성

☞ 실무상 델타 헤지 트레이딩이 어려운 이유

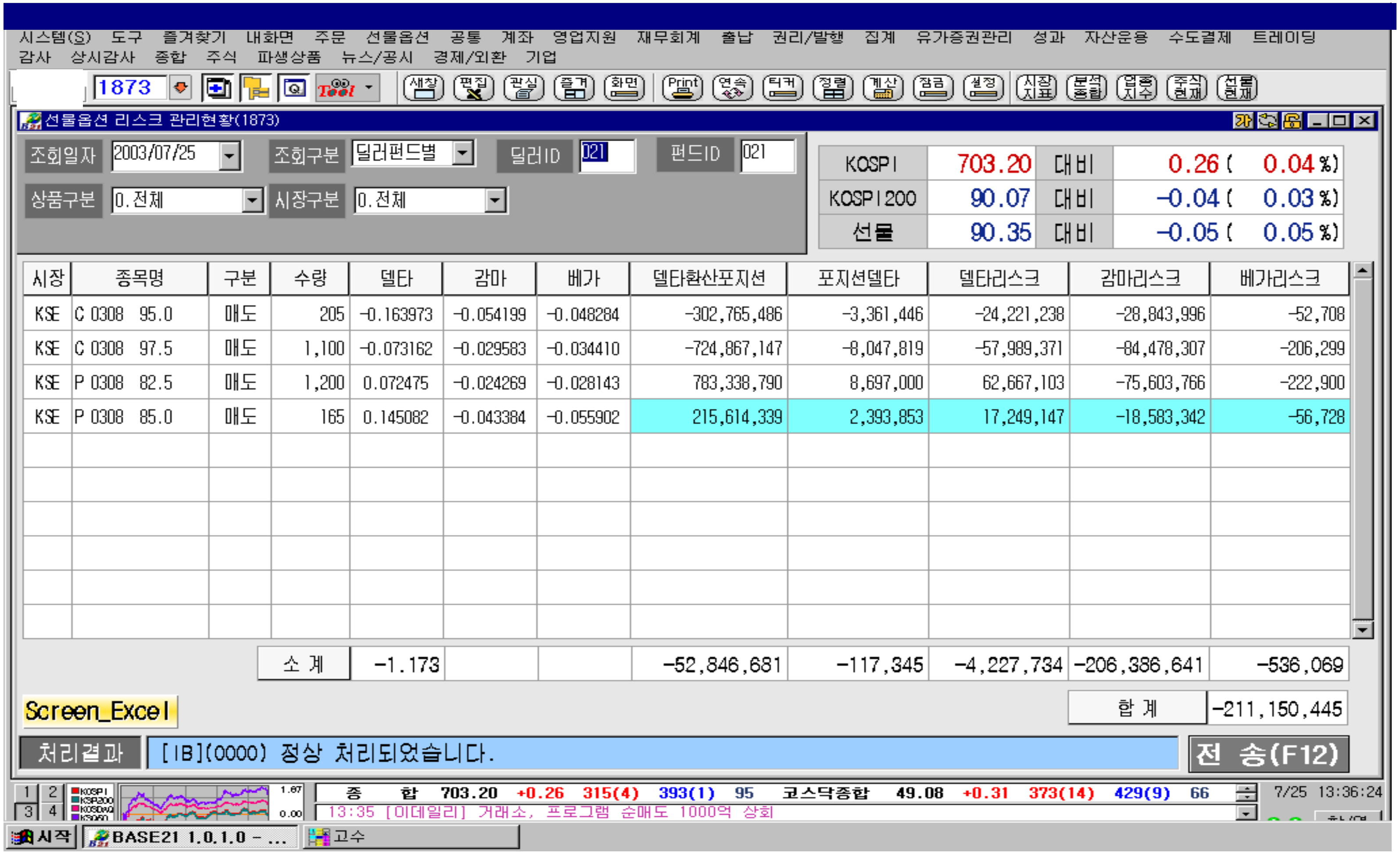
델타 헤징의 가정: 완만한 지수움직임, 연속적 헤징, 거래비용 없음

실제상 : 자산가격의 점프(Jump), 거래비용 (Transaction cost) 발생, 확률

변동성 고려, 실제 연속적 헤지를 할 수 없음(이산적 헤지)

주가변동에 따라 델타값은 변하므로, 변동하는 델타에 의해 옵션 혹은 선물 계약수를 조정하여 헤지하는 것 => 동적헤징(Dynamic Hedging)

옵션민감도 : 델타헤징의 사례


선물옵션 리스크 관리현황(1873)

조회일자 2003/07/25 조회구분 딜러펀드별 딜러ID 021 펀드ID 021
상품구분 0.전체 시장구분 0.전체

KOSPI	703.20	대비	0.26 (	0.04 %)
KOSPI200	90.07	대비	-0.04 (	0.03 %)
선물	90.35	대비	-0.05 (	0.05 %)

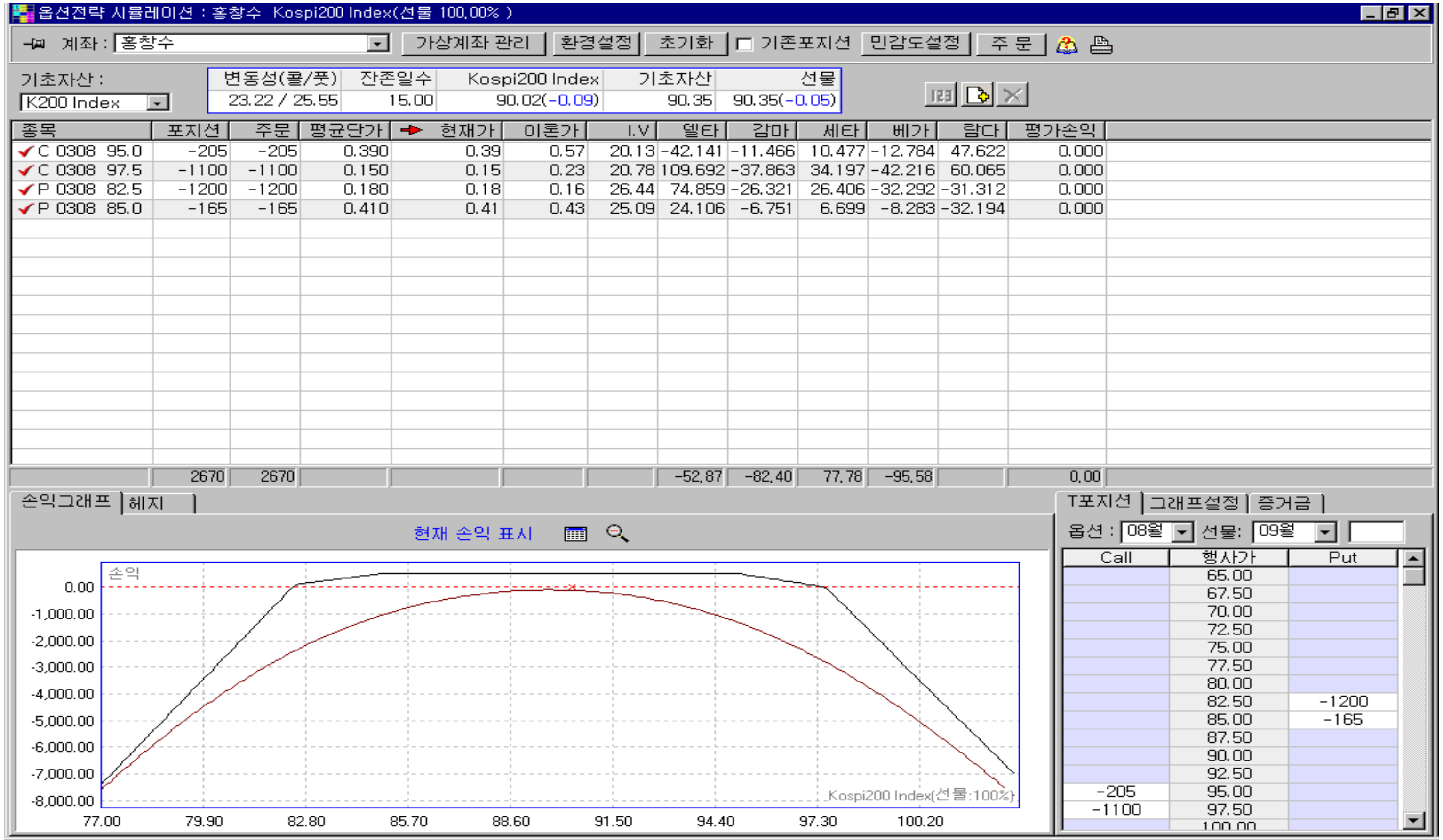
시장	종목명	구분	수량	델타	감마	베가	델타환산포지션	포지션델타	델타리스크	감마리스크	베가리스크
KSE	C 0308 95.0	매도	205	-0.163973	-0.054199	-0.048284	-302,765,486	-3,361,446	-24,221,238	-28,843,996	-52,708
KSE	C 0308 97.5	매도	1,100	-0.073162	-0.029583	-0.034410	-724,867,147	-8,047,819	-57,989,371	-84,478,307	-206,299
KSE	P 0308 82.5	매도	1,200	0.072475	-0.024269	-0.028143	783,338,790	8,697,000	62,667,103	-75,603,766	-222,900
KSE	P 0308 85.0	매도	165	0.145082	-0.043384	-0.055902	215,614,339	2,393,853	17,249,147	-18,583,342	-56,728
			소 계	-1.173			-52,846,681	-117,345	-4,227,734	-206,386,641	-536,069

합 계 -211,150,445

처리결과 [IB](0000) 정상 처리되었습니다.

☞ 델타헤징의 사례 : 옵션 Short Strangele 포지션의 예

옵션민감도 : 델타헤징의 사례

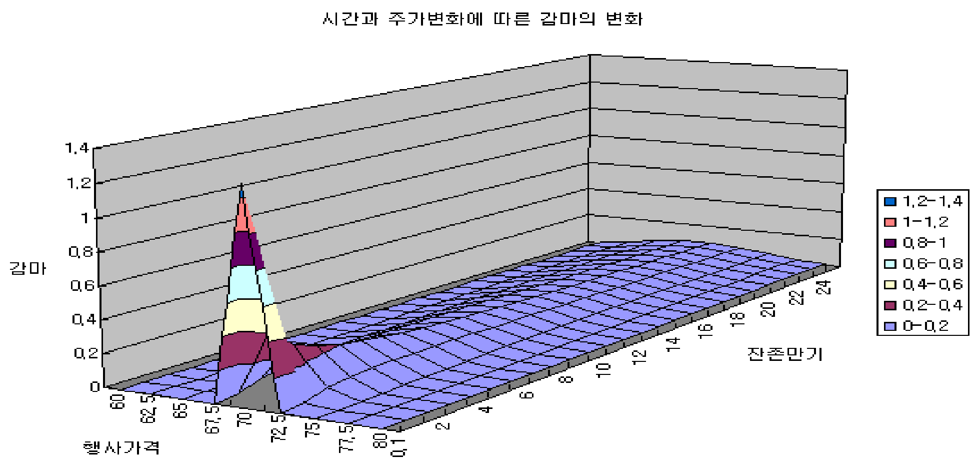


☞ **현재 포지션의 델타는 -52.87, 콜옵션 매도(- delta)+ 풋옵션 매도(+delta)로 포지션을 중립화(neutralrize) 한 것을 알 수 있음.**

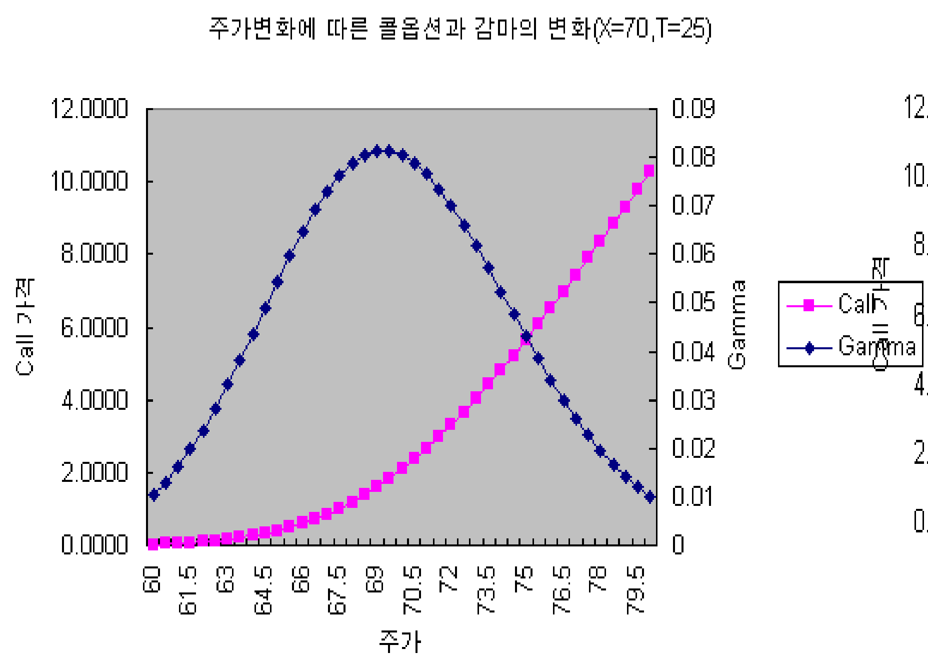
옵션민감도 : 감마(Gamma)

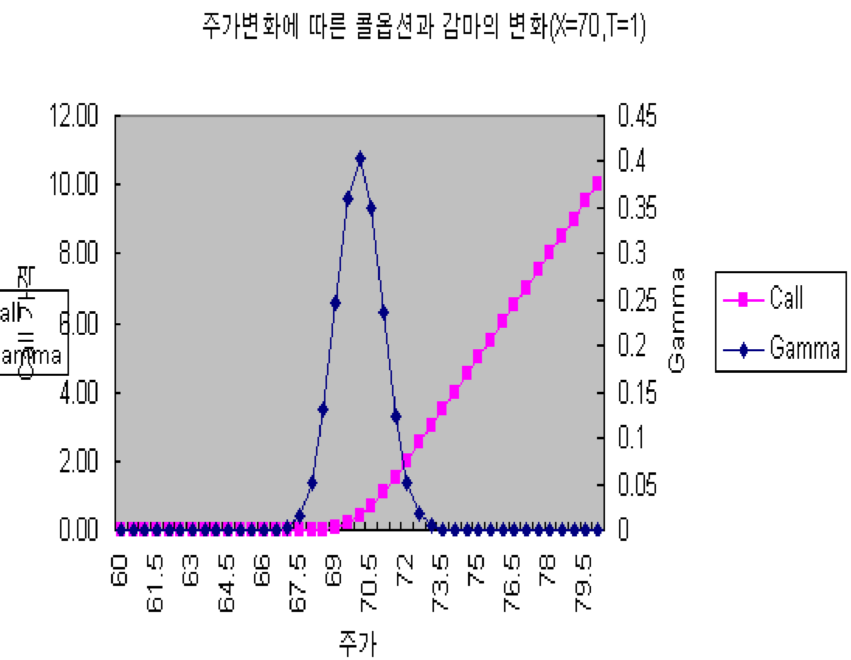
☞ **Delta가 옵션가격의 변화를 1차 미분한 기울기라면 Gamma 는 Delta 그래프를 다시 미분한 기울기를 나타내고 있으며, 옵션가격 변화의 2차 미분이라 생각할 수 있음. 이는 기초자산 가격의 변화에 대한 특정 옵션의 Delta 변화 정도를 나타내고 있음.**

$$\text{Gamma} = \frac{\text{옵션 Delta의 변화}}{\text{기초자산 가격의 변화}} * 100$$



옵션민감도 : 감마(Gamma)





☞ 위 챠트에서 잔존만기 25(D-25)일과 만기 하루전(D-1)의 감마의 변화를 보여줌. 극외 및 외가격 옵션의 행사가능성은 확정적인데 반해, 등가격(ATM)옵션의 행사가능성 불확실성으로 감마(Gamma)값 증대

옵션민감도 : 감마헤징의 사례

☞ **Delta 중립의 헤징오차 => Gamma Risk노출**

(감마의 절대값에 따라 델타의 조정(rebalancing) 빈도가 결정됨)

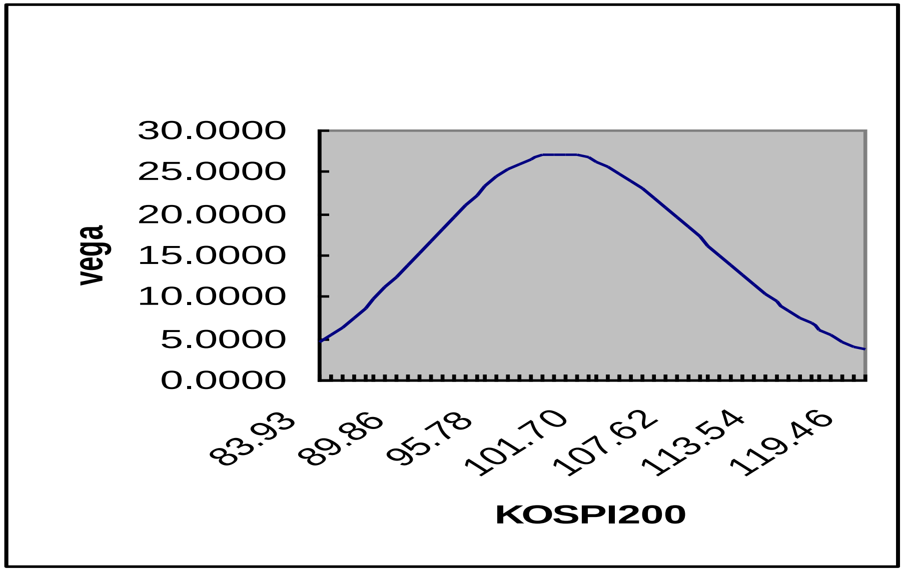
구분	매수/매도	계약	델타	감마	포지션델타	포지션감마
Call 70.0	매수	10.00	0.65	0.07	+6.5	+0.7
Call 75.0	매도	20.00	−0.30	−0.06	−6.00	−1.80
Put 67.5	매수	10.00	−0.20	0.05	−2.00	+1.00
합계	−	−	−	−	−1.50	−0.10

구분	매수/매도	계약	델타	감마	포지션델타	포지션감마
Call 70.0	매수	10.00	0.65	0.07	+6.5	+0.7
Call 75.0	매도	20.00	−0.30	−0.06	−6.00	−1.80
Put 67.5	매수	10.00	−0.20	0.05	−2.00	+1.00
Put 65.0	**매도**	**15.00**	**+0.10**	**−0.03**	**+1.5**	**−0.45**
합계	−	−	−	−	0.00	−0.55

옵션민감도 : 베가(Vega)

☞ **Vega 는 변동성의 변화에 대한 옵션가격의 변화를 나타냄**

$$\text{Vega} = \frac{\text{옵션가격의 변화}}{\text{변동성의 변화}}$$

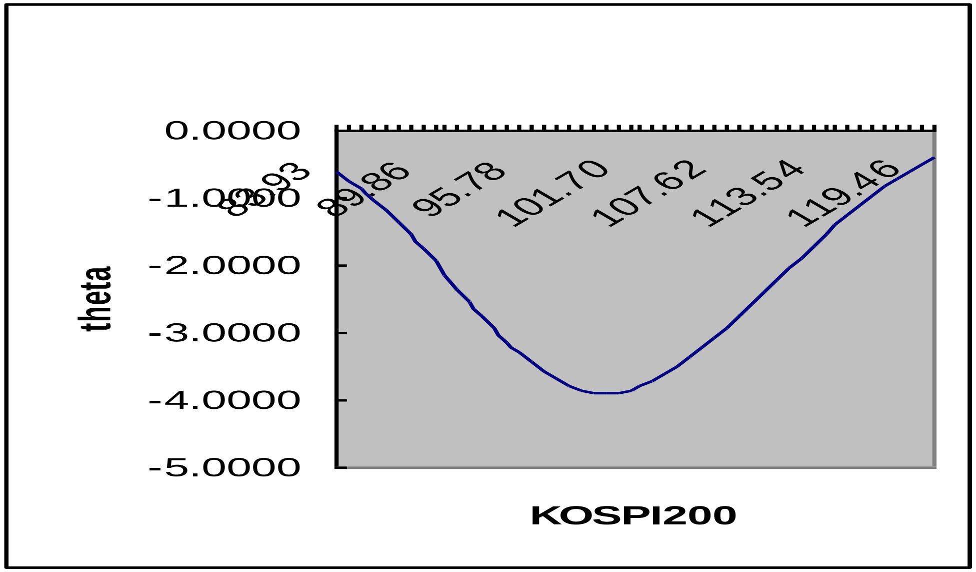


☞ **시간가치가 많고 감마 값이 큰 등가격이 변동성에 대해 가장 민감한 반응을 보임.**

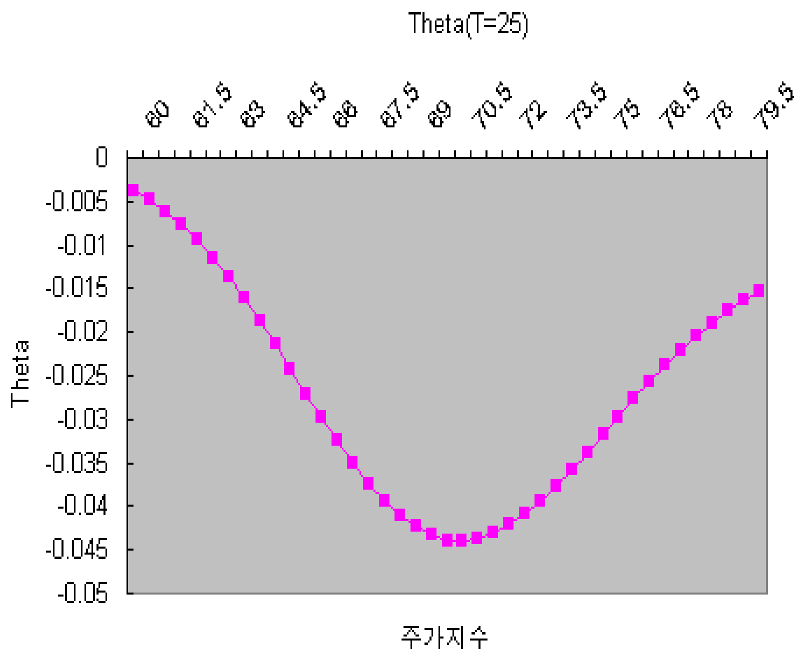
옵션민감도 : 쎄타(Theta)

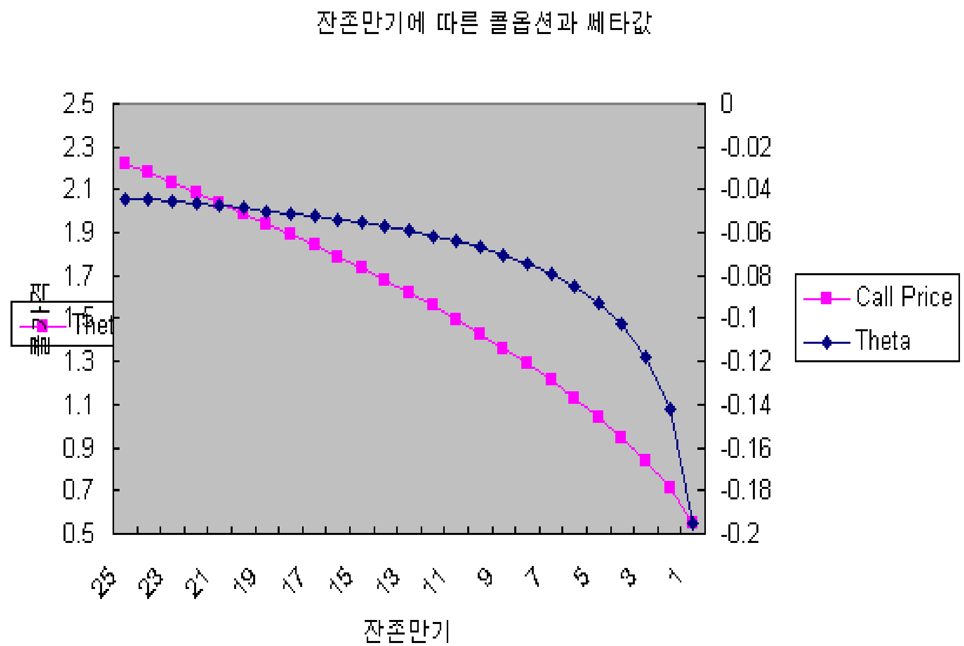
☞ Theta 는 특정옵션의 시간가치 소멸 정도를 나타내며, 시간가치는 만기가 다가옴에 따라 가속적(accelerating)인 소멸속도를 갖는데 이는 등가격인 경우에 그 정도가 심하게 됨.

$$\text{Theta} = \frac{\text{옵션가격의 변화}}{\text{시간의 변화}}$$



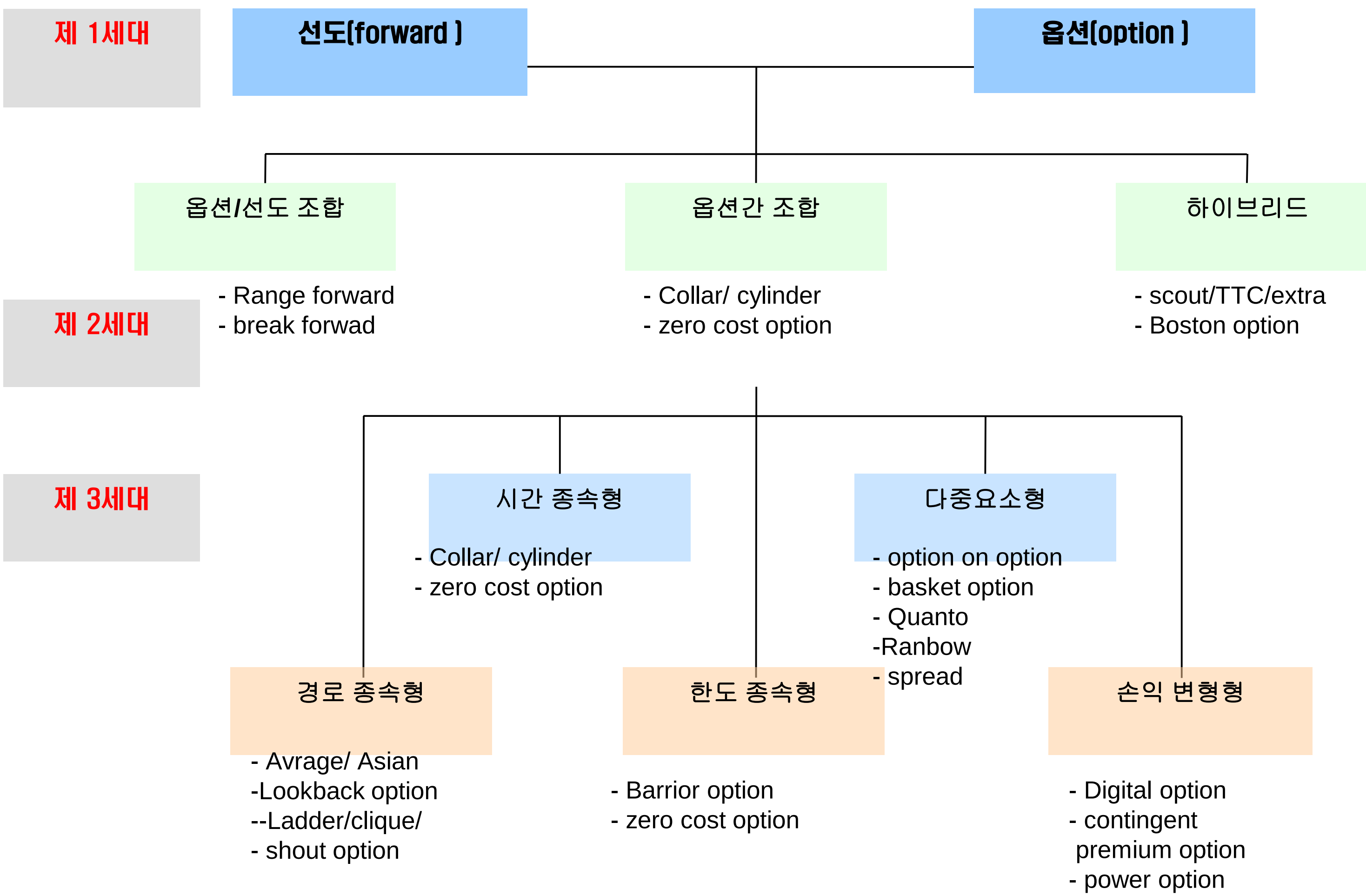
옵션민감도 : 쎄타(Theta)





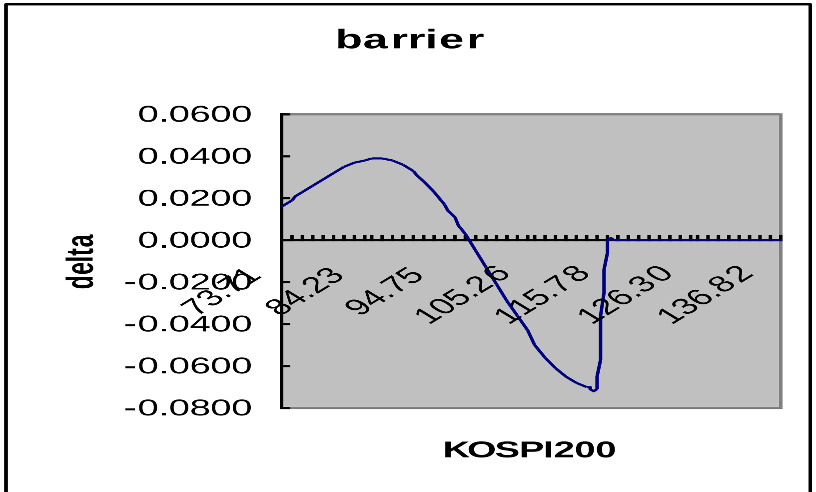
☞ 일정한 기간(하루)의 시간가치 소멸량을 측정하면 등가격이 가장 큰 소멸량을 갖음. 이것은 등가격의 시간가치가 가장 많기 때문임.

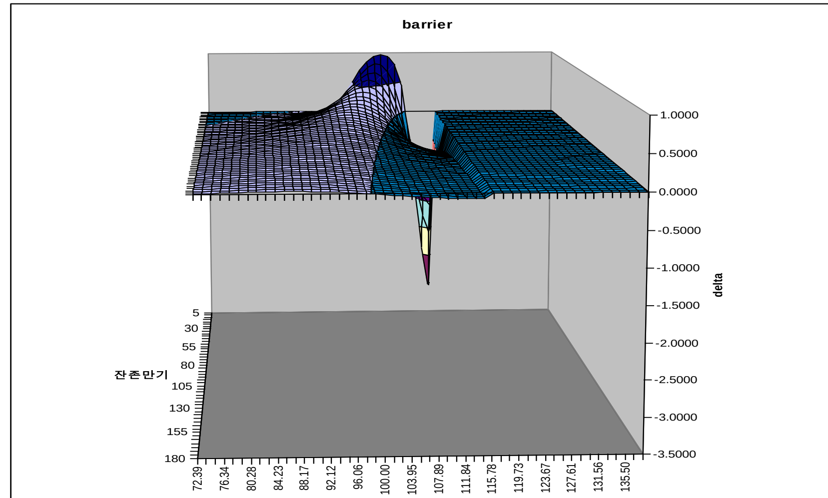
Exotic Option 분류

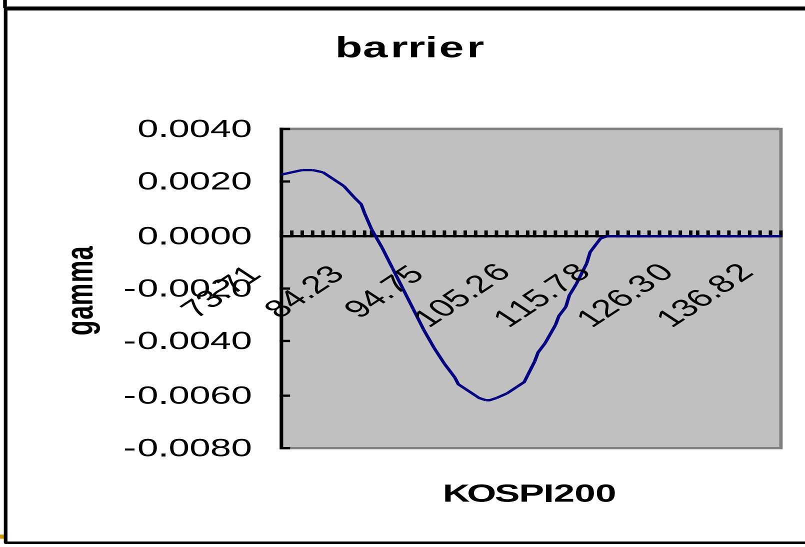


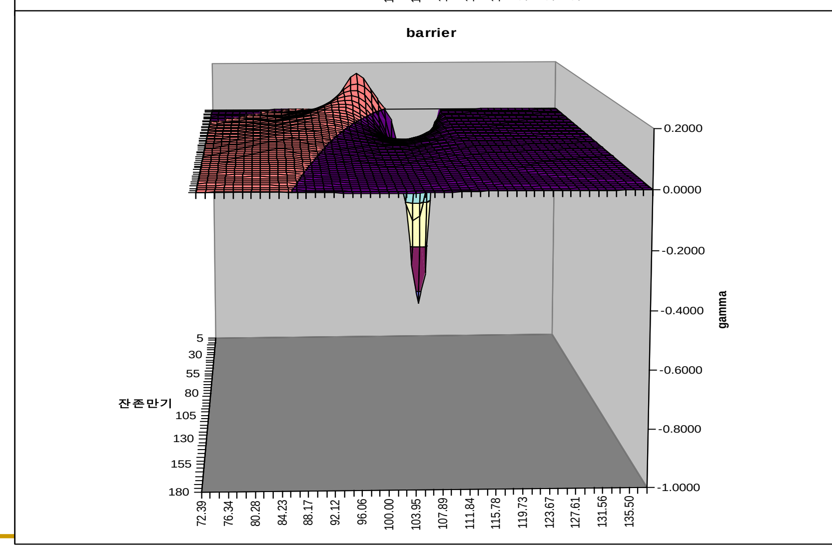
Barrier Option 민감도

☞ **Knock out call 의 경우(S=100, X=100, H=115, r=3.5%, sigma=23%,t=0.493, no rebate)**



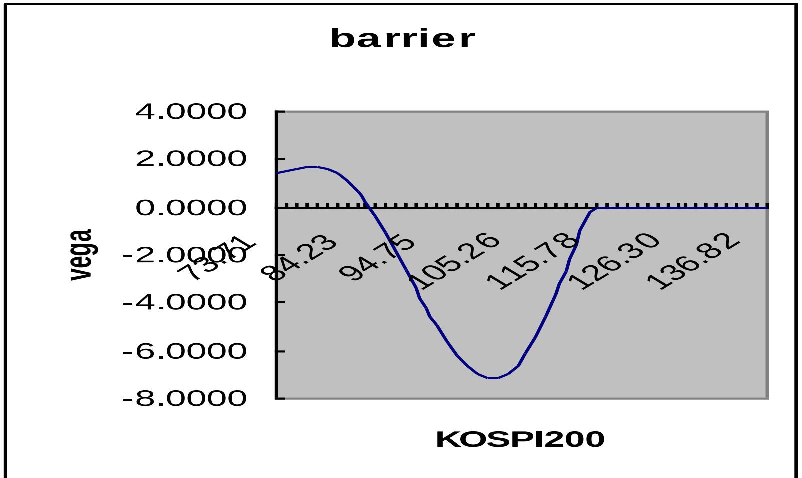


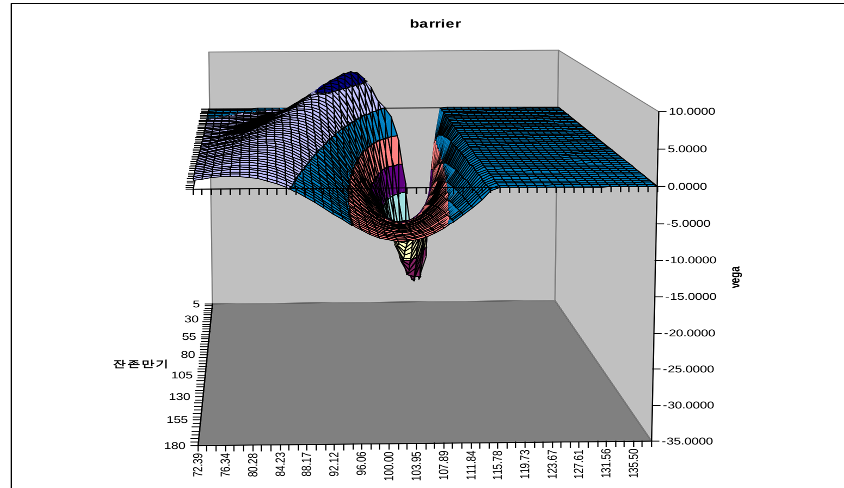


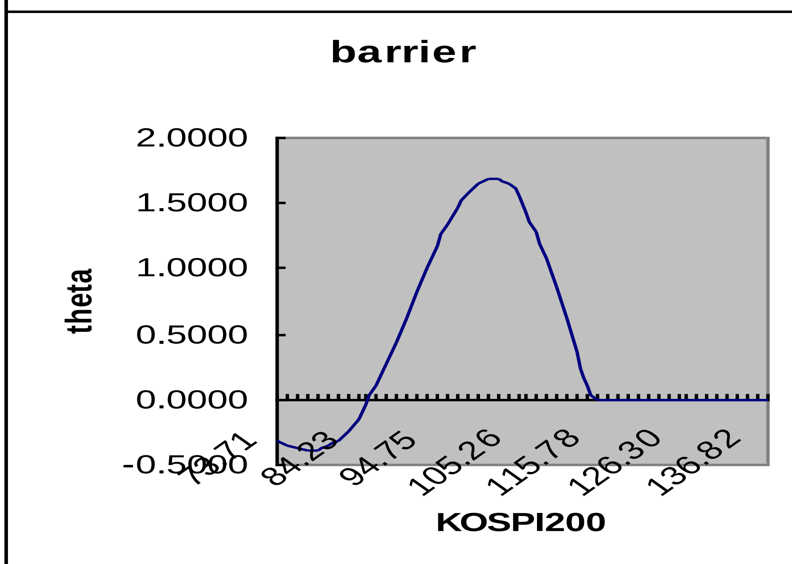


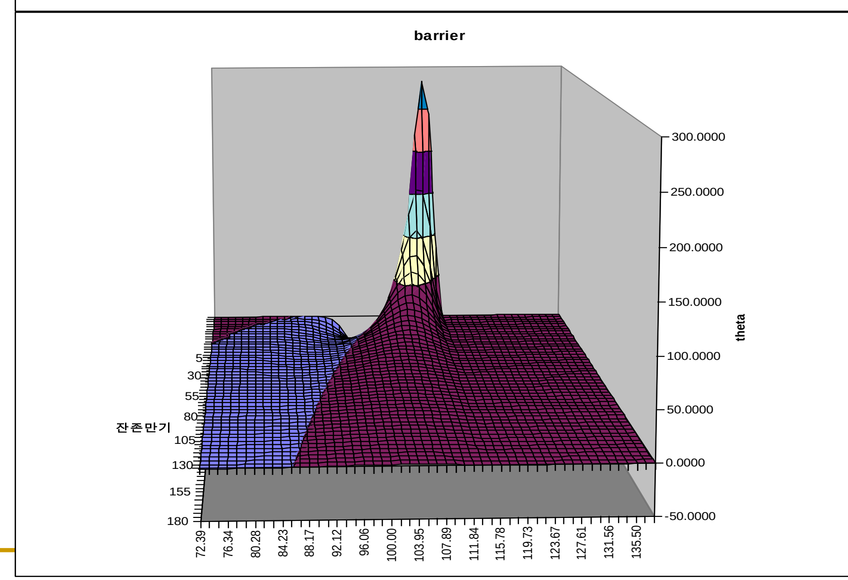
Barrier Option 민감도

☞ **Knock out call 의 경우(S=100, X=100, H=115, r=3.5%, sigma=23%, t=0.493)**



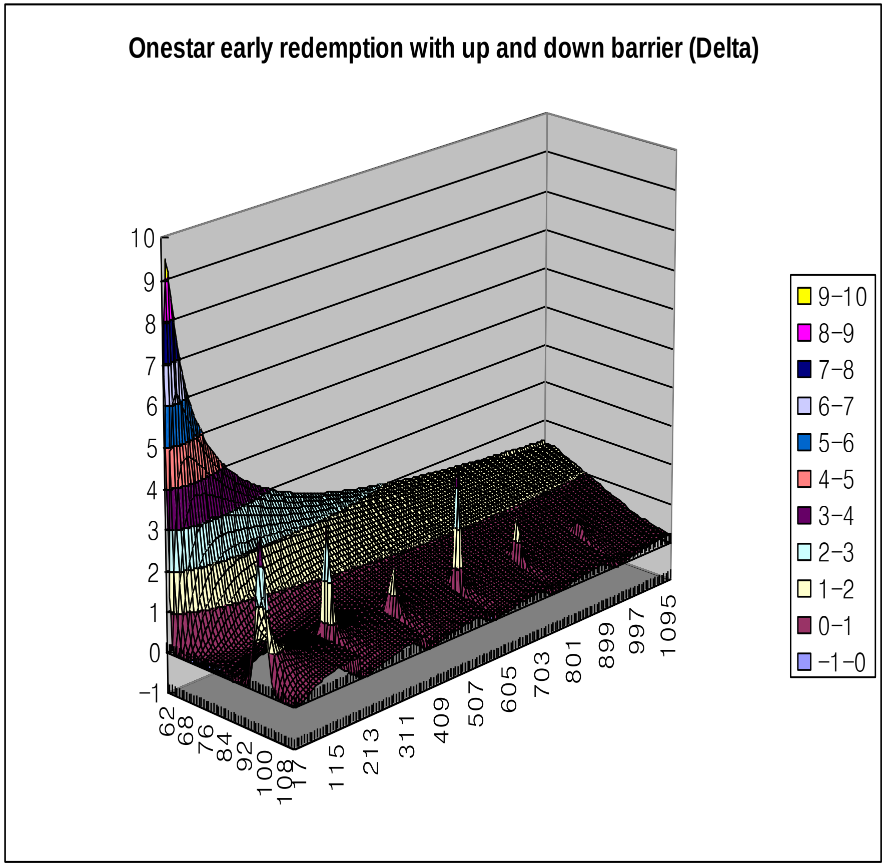


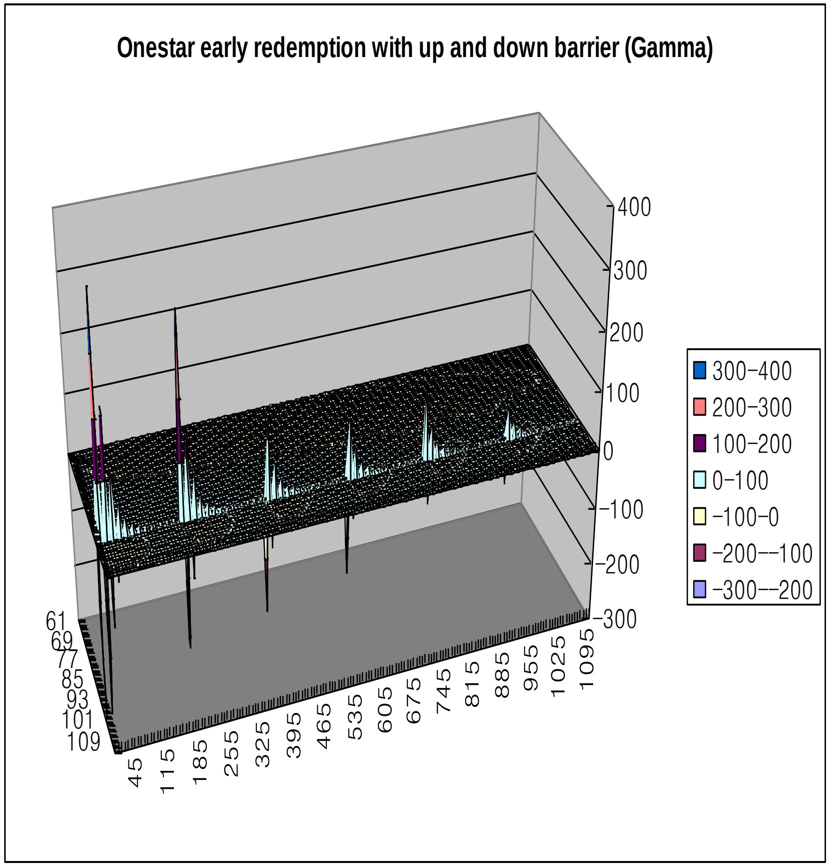




조기상환 옵션의 민감도

☞ 조기상환옵션 의 경우(**One star early redemption : 6chance)**





금융공학의 기초

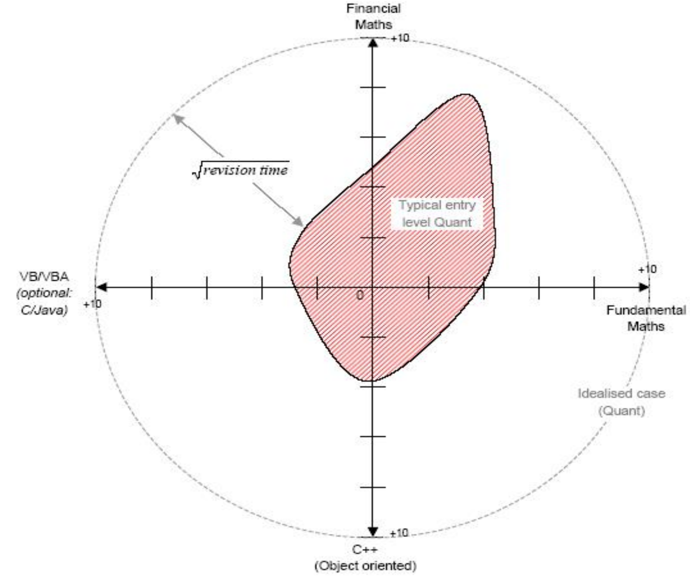
금융공학의 역사

1900 L. Bachelier	첫 옵션이론(Theorie de la speculation)
1905 A. Einstein	브라운운동연구(brownian motion)
1944 K. Ito	확률과정론 기초(확률적분 Ito의 공식)
1950 J. Doob	마팅게일 이론(martingale)
1952 H. Markowitz	평균분산 모형(Portfolio Selection)
1964 W. Sharp	자본자산가격결정 모형(CAPM)
1973 F. Black and Scholes	옵션가격결정모형(BS Model)
1973 R. Merton	옵션가격결정모형(Merton Model)
1979 Cox, Ross, Rubinstein	옵션가격결정모형(이항모형)
1979 Harrison and Pliska	무재정원리와 마팅게일 측도

금융공학을 위한 필요지식

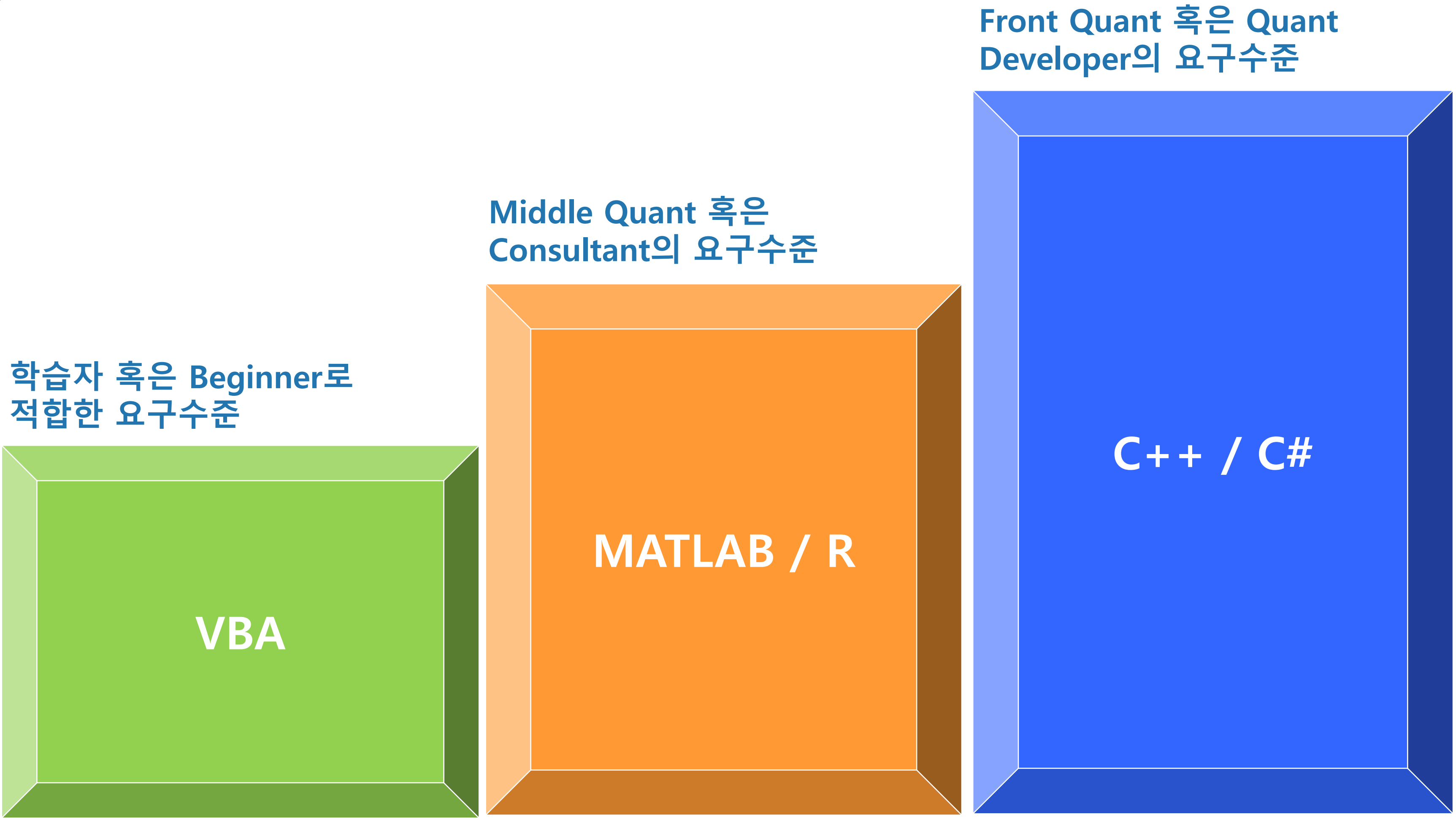
- **금융상품 일반지식(General Knowledge on Derivatives Products)**
  - Futures, Call Option, Put Option, Barrier Options, Exotic Options

- **금융수학(Mathematics Background for Financial Engineering)**
  - 확률론, 통계학, 수치해석, 선형대수
  - SDE, Ito Calculus, PDE
  - 파생상품 평가 이론 : Arbitrage Pricing Theory, 각종 이자율 모형, 신용파생상품 평가모형
  - Monte Carlo Simulation : Cholesky Decompositions
    * Quasi Monte Carlo : Sobol Sequence, Halton Sequence
  - Lattice Model : Binomial Tree, Trinomial Tree
  - FDM : Crank-Nicolson, ADI, OSM
  - Value at Risk



- **프로그래밍(Programming Knowledge)**
  - C++, Visual Basic, JAVA, Excel VBA
  - DLL, COM
  - GUI Programming

금융공학: 프로그래밍 능력



옵션의 가격결정이론

옵션의 가격 이론

❍ 옵션 이론가격 : 만기시 기대되는 수익의 현재가치

- 현재가치 = 만기 시 가치 × $(1+r)^{-\tau}$ (τ : 잔존만기)
- 콜옵션의 만기 시 수익 = Max[S−X, 0]

❍ 콜옵션의 가격 모형 ⇦ 블랙-숄즈모형

$$
\begin{aligned}
C &= E(C_T)\cdot\exp(-r\tau) \\
&= E(\max[S_T - X,\ 0])\cdot\exp(-r\tau) \\
&= S\cdot N(d_1) - X\cdot\exp(-r\cdot\tau)\cdot N(d_2)
\end{aligned}
$$

$$
d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + 0.5\sigma^2)\cdot\tau}{\sigma\sqrt{\tau}},\quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}
$$

❍ 옵션가격 결정요인

- 주가지수(S), 행사가격(X), 시중금리(r), 잔존기간(τ), 변동성(σ), 배당(d)

P = f(S, X, r, τ, σ, d)

옵션의 가격 이론

❍ 옵션 가격결정 요인별 영향

요인		옵션가격의 변화		이유
		콜옵션	풋옵션	
주가지수	상승	상승	하락	내재가치의 상승/하락
	하락	하락	상승	
행사가격	상승	하락	상승	내재가치 + 행사 가능성
	하락	상승	하락	
잔존만기	장기	높다		변동성 확대/축소 → 행사 가능성
	단기	낮다		
변동성	증가	상승		행사 가능성
	감소	하락		
배당 (금리)	있음(낮음)	낮다	높다	주식 보다 옵션이 유리 → 가격상승
	없음(높음)	높다	낮다	

변동성과 옵션 민감도

변동성의 이해

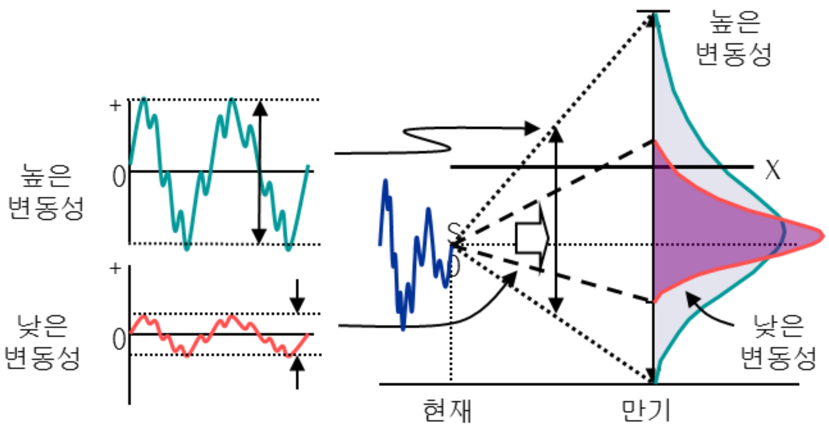
❍ 변동성(volatility) 의 중요성

➢ 옵션가격에 영향을 주는 6가지 결정요인 중 "유일한 미확인 변수"로 옵션가격을 설명하는 가장 중요한 변수

❍ 변동성(volatility)의 의미 → "행사 가능성"

➢ 변동성 = 주가가 특정기준을 중심으로 등락하는 정도

➢ 변동성 확대 → 행사가능성 확대 → 옵션 가격 상승



옵션 민감도

❍ 민감도(Greeks) : 옵션가격 결정요인들의 영향력 지표

➢ 가장 중요한 4가지로 요약

→ 델타(Δ), 감마(Γ), 베가(σ), 쎄타(Θ)

❍ 옵션 투자 전략 시 포지션 지표 및 도구로 이용

➢ 각 지표값은 측정시점의 수치이며, 행사가격(X), 변동성(σ), 잔존만기(τ) 등에 따라 끊임 없이 변화함

❍ 민감도의 의미

➢ 델타(Δ): 기초자산의 가격변화에 따른 옵션 가격의 변화

➢ 감마(Γ): 기초자산의 가격변화에 따른 델타의 변화

➢ 베가(σ): 기초자산변동성의 변화에 따른 옵션가격의 변화

➢ 세타(Θ): 만기의 변화에 따른 옵션 가격의 변화

➢ 로(δ): 이자율의 변화에 따른 옵션 가격의 변화

헤지의 종류 : Static vs Dynamic Hedge

헤지의 정의 및 종류

❍ 헤지란?

- 기초자산의 가격, 변동성, 만기, 이자율 등의 시장변동 따른 위험으로부터 보유하고 있는 운용포지션의 손익을 보호하기 위한 위험 회피 수단. 보유하고 있는 포지션과 리스크가 반대되는 포지션을 동시에 취함으로써 시장위험에 따른 손익변동 위험을 사전에 제거하는 행위

❍헤지의 종류

1. 정적헤지(Static Hedge)

- 포지션의 지속적인 재조정(rebalancing)이 필요하지 않도록 보유하고 있는 옵션포지션을 분해(decomposing)하여 동일한 구조로 복제함

- 정적헤지는 손익의 변동을 고정 혹은 최소화 할 수 있으나, 헤지 비용이 비쌈

- 정적헤지 예
  - 콜옵션 매수 = 풋옵션의 매수 + 기초자산 매수
  - 콜스프레드 = 저가콜옵션 매수 + 고가콜옵션 매도
  - ELS BTB 거래 = ELS매도(발행) + 외국계 ELN 매수

헤지의 종류 동적헤지

2. **동적헤지(Dynamic Hedge)**

- 보유 포지션의 민감도에 따라 주기적인 포지션 재조정을 통해 포지션의 위험을 제거함

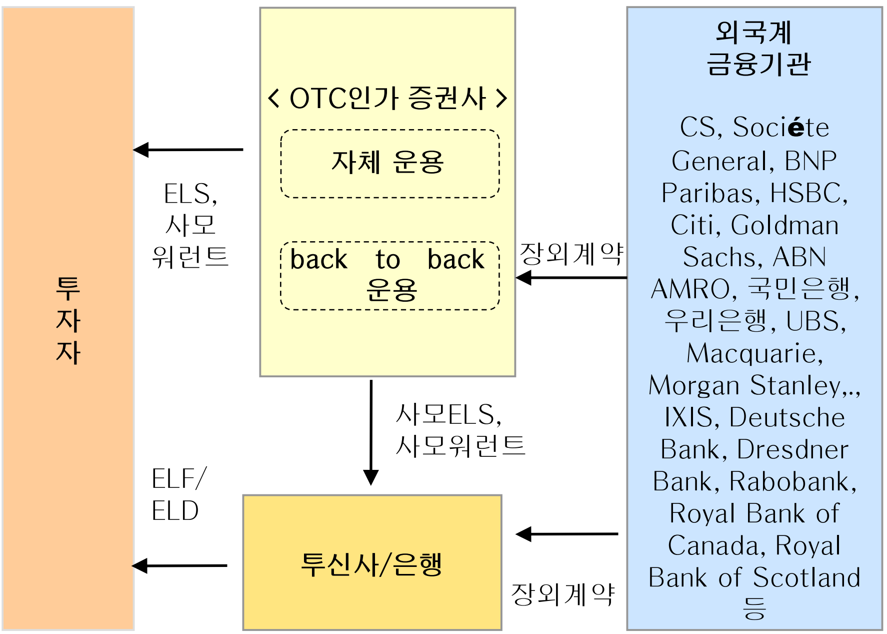
- 주기적인 포지션 재조정에 따른 거래비용이 발생함

- 민감도별 동적헤지 → 델타(delta), 감마(gamma), 베가(vega), 세타(theta) 등 옵션의 민감도에 따라 포지션을 재조정
  - 델타헤지 : 기초자산 현물 및 선물을 이용한 헤지
  - 감마헤지 : 동일한 기초자산의 옵션을 이용한 헤지
  - 베가헤지 : 동일한 기초자산 옵션/변동성스왑 헤지
  - 세타헤지 : 동일한 기초자산의 옵션을 이용한 헤지
  - 로헤지 : 채권, 채권선물, IRS 등 이자율 상품 이용 헤지

- 옵션 매도시 델타 동적헤지의 예
  - 선물 계약 수 = 옵션 계약 수 × 옵션델타 ÷ 500,000
  - 옵션 계약 수= 명목원금 ÷ KOSPI200 지수 × 참여율
  - · KOSPI200 콜옵션, 명목원금: 100억, 주가지수: 100
  - · $S=100$, $X=100$, $r=6\%$, $d=1\%$, $\sigma=25\%$, $\tau=0.5$
  - · 콜옵션 델타 = 0.5876
  - · 선물 계약 수 = 100억 ÷ 100.0 × 100% × 0.5876 ÷ 500,000 → 117.52 계약

헤지의 종류 : BTB Hedge vs 자체헤지

ELS 운용구조 : 자체헤지 VS. Back to back 거래



✧ 자체운용 가능 증권사: 우리투자, 대우, 삼성, 한국투자, 현대증권 등 대형 증권사 위주

✧ 신규 중소형사: 일부 자체헤지 운용을 하고 있으나, 백투백 거래 위주

ELS 수익 구조

❍ ELS 수익의 원천

➢ 정적헤지 : 외국계 금융기관을 활용한 BTB 영업 시

- 초기마진(=ELS발행가격   ELN매수가격)만 발생
- 리테일판매 초기마진 : 100bp내외
- 홀세일판매용 초기마진 : 30bp~50bp내외
- 초과수익 없음 → 헤지 과정에서의 운용수익 없음
- 운용에 따른 시장위험은 없으나, 거래상대방에 따른 신용위험 존재

➢ 동적헤지 : <u>자체헤지 시</u>

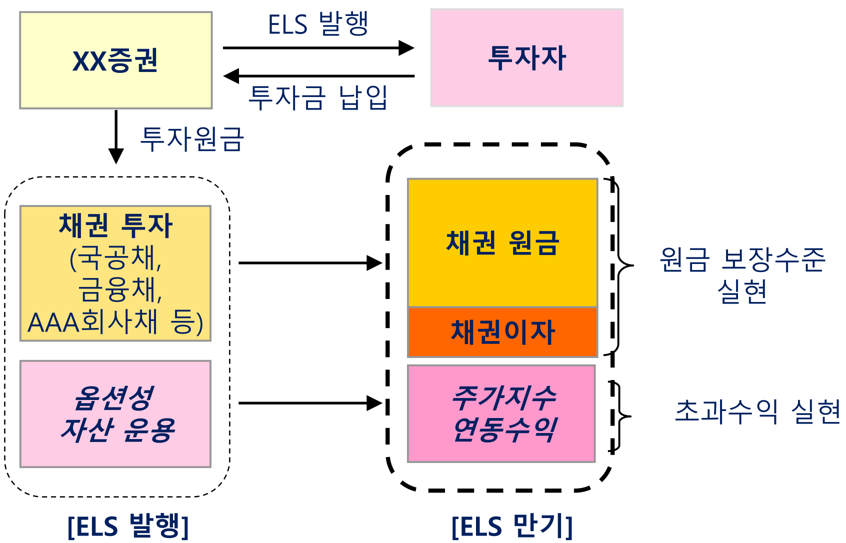
- 초기마진 + α(운용수익)
- 초기마진 : ELS발행가격 - 초기설정가격
- 자체헤지 시 초기마진 ≥ BTB 영업 시 초기마진
- 운용수익 : 헤지역량에 따라 수익 규모는 유동적이며, 시장위험에 따른 손실발생도 가능

헤지의 종류 : 자체헤지(원금비보장 vs 보장)

ELS 자체헤지 원금보장형

❍ 투자원금의 대부분을 우량채권에 투자하여 원금보장 부분을 확보

❍ 투자원금의 일부로 옵션을 매수



예시. 산금채 1Y 6.2% → 100 / (1+ 0.062) = 94.16

94.16 채권 + 5.04 옵션 프리미엄 + 발행사 마진 = **100 + α (원금과 초과 수익 추구!)**

ELS 자체헤지 원금비보장형

❍ ELS 민감도별 헤지방법

- 델타헤지 : 기초자산 현물 및 선물을 이용한 헤지

  "Sell High, Buy Low" → ELS 수익원천
- 베가헤지 : 동일기초자산의 옵션매수, 변동성스왑, ELW LP
- 로헤지 : 운용포지션 1,000억 이상시 채권선물 및 IRS

❍ 동적 델타헤징

- 기준가격을 결정하는 날 액면금액의 일정 비율(델타)만큼 기초자산 매수
- 기초자산의 가격 등락에 따라 델타가 변동. 그에 따라 매매("Sell High, Buy Low")하여 매매이익을 창출, 누적하여 ELS의 손익을 창출

❍ 손익의 변화

- 복합옵션으로 구성된 ELS의 손익은 기초자산의 변동성에 의해 좌우됨
- 기초자산의 변동성에 따른 손익변화
  - 예상한 변동성과 실제 시장의 변동성이 유사하거나 높을 경우 추가 운용 손익 확보
  - 예상한 변동성보다 실제 변동성이 낮을 경우 손실 가능

∴ ELS의 자체헤지 운용손익 및 상품의 조건, 가격 결정은 기초자산의 변동성이 좌우

옵션 Book의 헤징(옵션 포트폴리오)

옵션의 헤징 전략(이론적 방법)

- Delta of Option = Delta of Hedge Portfolio
- Gamma of Option = Gamma of Hedge Portfolio
- Theta of Option = Theta of Hedge Portfolio
- Rho of Option = Rho of Hedge Portfolio
- Vega of Option = Vega of Hedge Portfolio

옵션의 헤징 전략(실무적 방법)

- Delta of Option = Delta of Hedge Portfolio (주식 또는 선물 이용)
  c.f : 장내 옵션 이용가능

Delta Hedging of Large Portfolio

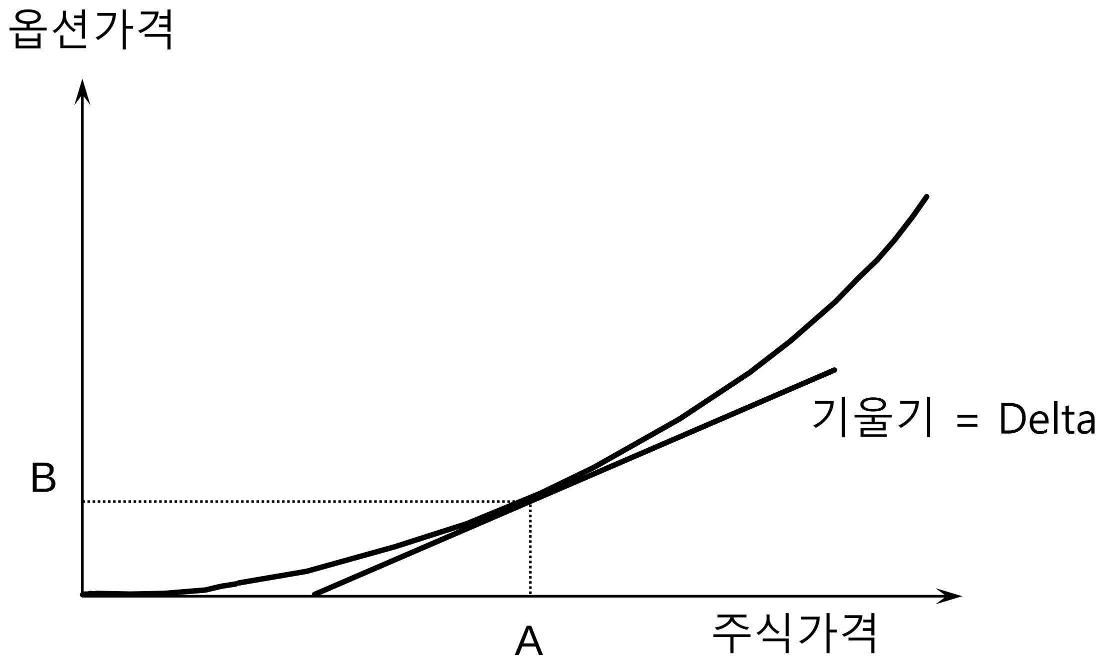
- Delta of Large Portfolio = Delta of Hedge Portfolio
- Gamma of Large Portfolio ≈ 0
- Vega of Large Portfolio ≈ 0

옵션 헤징 : 델타매매(선끗기)

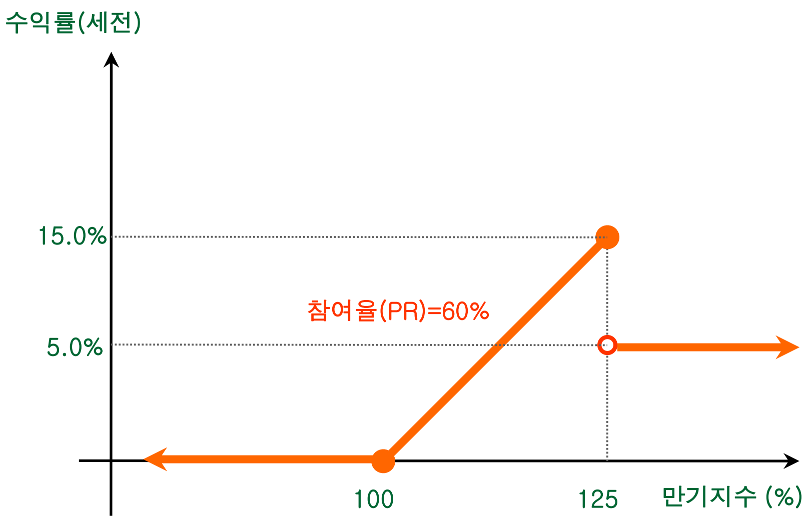
•**Black-Scholes 의 결과에 대한 리뷰**

- 만일 Black-Scholes 방정식을 유도할 때와 동일한 조건으로 포트폴리오의 조정이 가능하다면 (옵션 판매가 – 옵션 이론가)의 수익을 확보할 수 있음!
- B-S 모형에서 사용한 포트폴리오: 옵션 1단위 + Δ 주식

•Delta: (옵션의 가격 변화)/(주식의 가격변화)



원금보장형 낙아웃 상품



1. 기초자산 : **KOSPI 200**

2. 1년 만기 100% 원금보장형 상품 (Knock out 옵션 내재)

3. 만기 지급액

(1) Barrier Event 가 없었던 경우

최종지수가 최초지수 이상인 경우 :투자원금의 [100%+지수상승율 ×60%]

최종지수가 최초지수 미만인 경우 : 투자원금

(2) Barrier Event 가 있었던 경우

최종지수와 관계없이 투자원금의 [**105.0%**] 지급

* Barrier Event

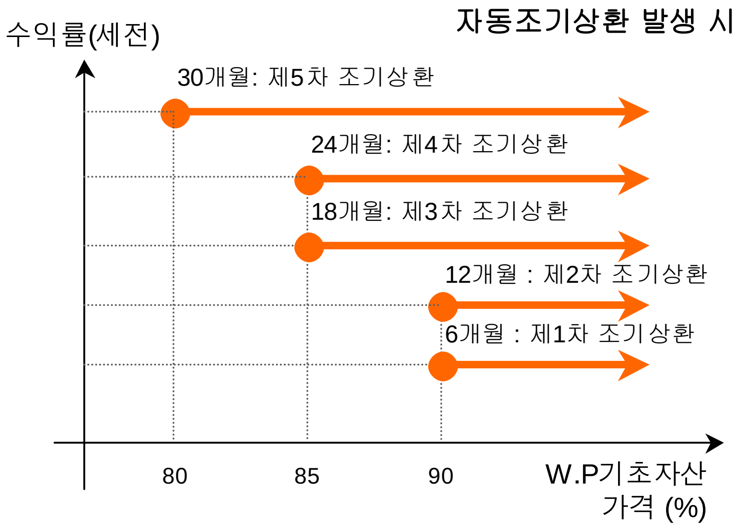
기초자산이 최초지수결정일부터 최종지수결정일(종가포함)까지

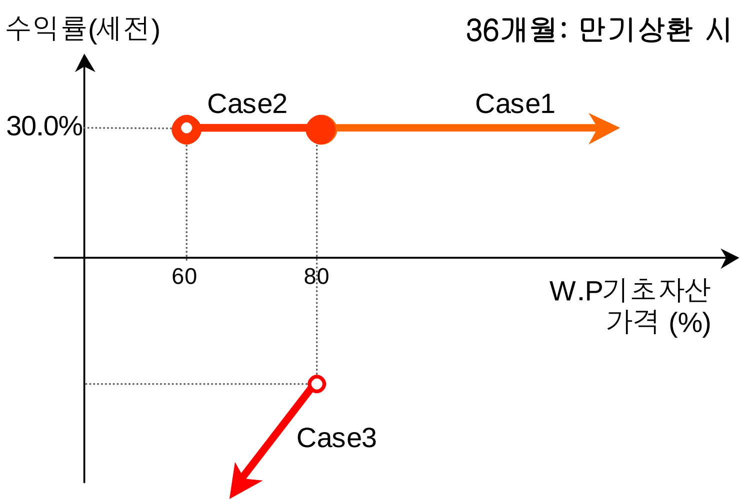
단 한번이라도 (장중 포함) 최초지수의 125% 를 초과하여 도달 한 사건

상품특징

원금보장형 ELS의 대표적인 형태 : 은행 주가연계예금(ELD) 상품 및 파생결합증권(DLS)에 주로 활용되는 구조
원금보장구간, 참여율 구간, 리베이트 구간으로 나뉨. 예를 들어 이익참여율이 60%이고 베리어가 25%인 경우
최대수익은 15%임. 지수가 마이너스 일때도 원금보장(안정성 추구투자자, 새마을 금고, 법인등에 적합한 상품)

원금비보장형 ELS





1. 기초자산 : **삼성전자 & KT**

2. 3년 만기 6개월 단위 조기상환형, 조기상환 시 연 10.0% 지급

3. 지급구조

(1) 1~2차 조기상환

매 4개월 단위 조기상환 시점에 기초자산 가격이 모두 해당 행사가 이상이면

⇒ 투자원금 + 연 [10.00%] 수익지급 (행사가격 및 해당 수익률 그림 참조)

(조기상환 시 증권의 효력 없어짐)

(2) 발행 후 24개월(만기상환)

<Case1>

최종지수결정일에 기초자산 가격이 모두 해당 행사가 이상이면

⇒ 투자원금의 [130.00%](연 10.0%) 지급

<Case2>

<Case1>의 상환요건을 충족하지 못하였더라도

두 개의 기초자산 가격이 모두

투자기간 1년간 최초지수의 [60% 이하] (장중포함), 이었던 적이 없는 경우

⇒ 투자원금의 [130.0%](연 10.0%) 지급

<Case3>

<Case1>의 상환요건을 충족하지 못하였고,

두 개의 기초자산 가격 중 어느 한 종목이라도

투자기간 1년간 최초지수의 [60% 이하](장중포함), 이었던 적이 있는 경우

⇒ 원금손실, 만기지급액 = 투자원금 × (최종지수 ÷ 최초지수),

(최종지수, 최초지수 : 하락률이 큰 종목을 기준으로)

파생결합증권의 운용원리

- 원금 보장형 ELS : 투자원금 중 대부분 우량채권에 투자하고 일부는 옵션 복제 재원으로 사용. 우량채권에서 투자한 원금과 이자를 합하여 사전에 제시한 수준의 원금을 보장

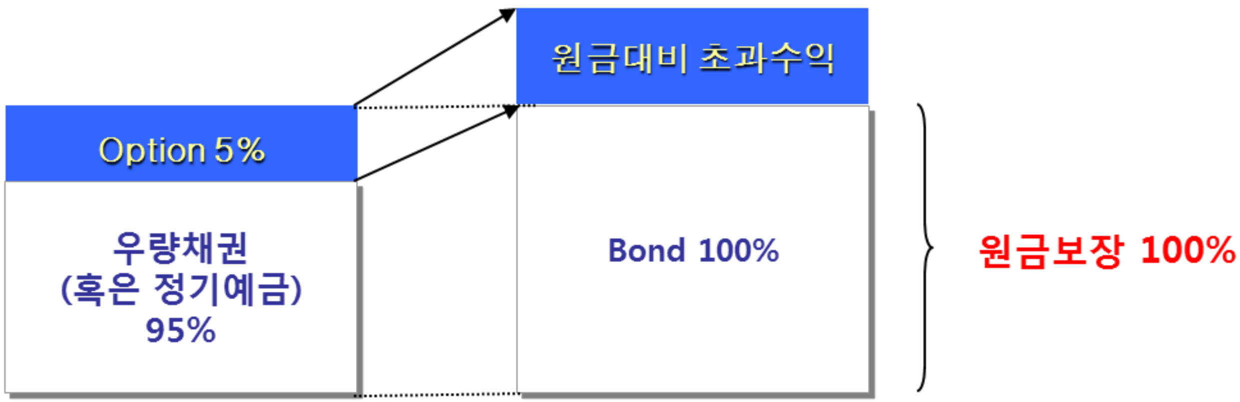
  ▣ 대표상품: 넉아웃 ELS, 운용방식 : 채권 + 옵션(워런트)으로 상품 복제

- 원금 비보장형 ELS : ELS의 수익확보를 위해 고객의 납입금액중 일정비율 (시장상황에 따라 매순간 바뀜) 헤지운용팀에서 꾸준하게 [저가매수, 고가매도] 전략을 취하고 있음. 이렇게 매일 매일 확보한 수익을 하루하루 쌓아 ELS 상환시점에 해당하는 수익률을 제공함. 주가가 하락하더라도 [저가매수, 고가매도] 전략을 취하기에 상환 시점 주가가 하락하더라도 수익 지급

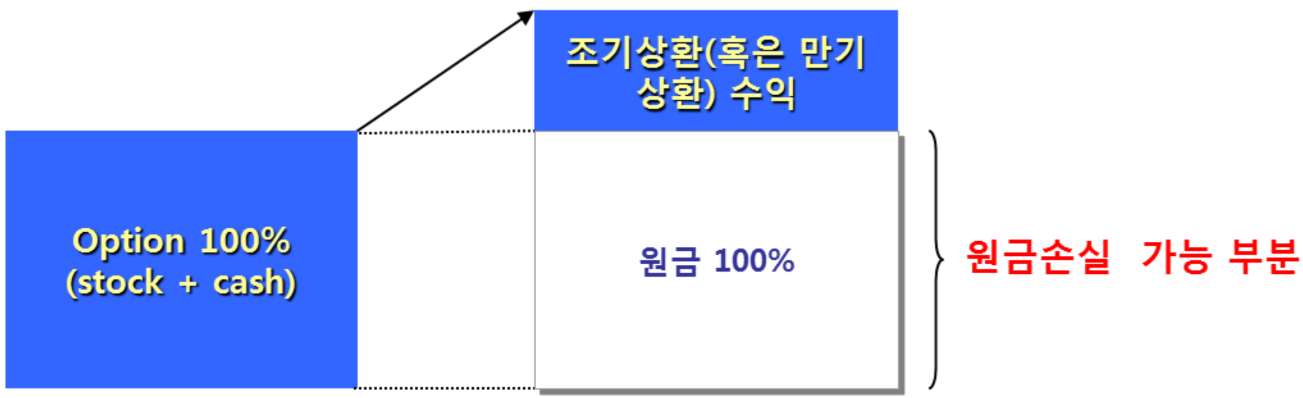
  ▣ 대표상품: 조기상환형 ELS, 운용방식: 주식현물 동적매매 (조기상환옵션 델타 비율만큼 헤지)

파생결합증권의 운용원리

▣ 원금보장형 상품의 운용구조 : 채권부분 + 워런트 부분(Option)



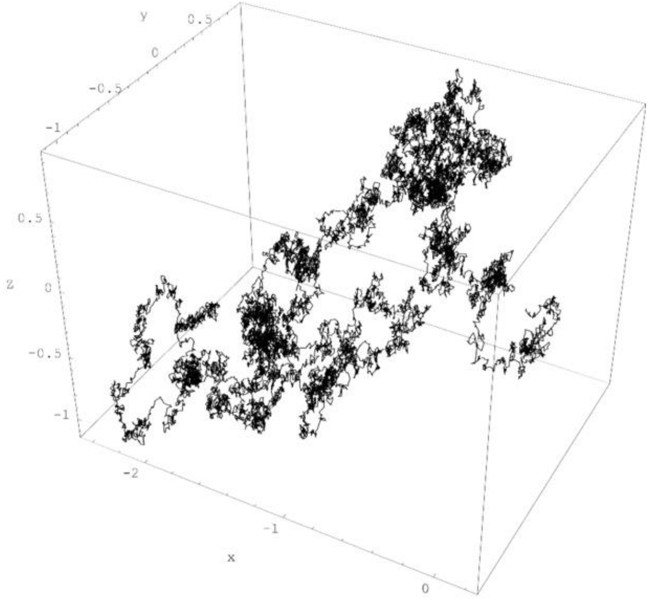
▣ 원금 비보장형 상품의 운용구조 : 옵션부분 (Dynamic Hedging)



금융공학을 위한
금융수치해석

브라운 운동(Brownian Motion)

- **로버트 브라운**(식물학자)
  - 꽃가루에서 나온 작은 입자가 수면위를 끊임없이 돌아다니는 것을 발견한것이 시초(1827).



금융의 확률적 방법론

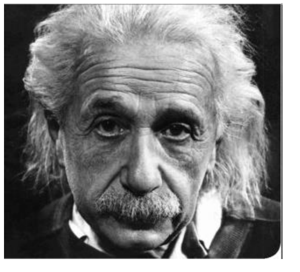
- **루이 바쉘리에**(1870 – 1946)
  - 금융공학과 금융수학의 아버지
  - 금융시장에 수리적 모형을 최초로 적용함
  - 주가는 브라운 운동으로 전개됨

브라운 운동 모델링

- **Thorvald N. Thiele** (1880), 브라운 운동을 설명하는 수리적 모형을 처음 제안
  - 덴마크 천문학자
  - 보험회사 설립

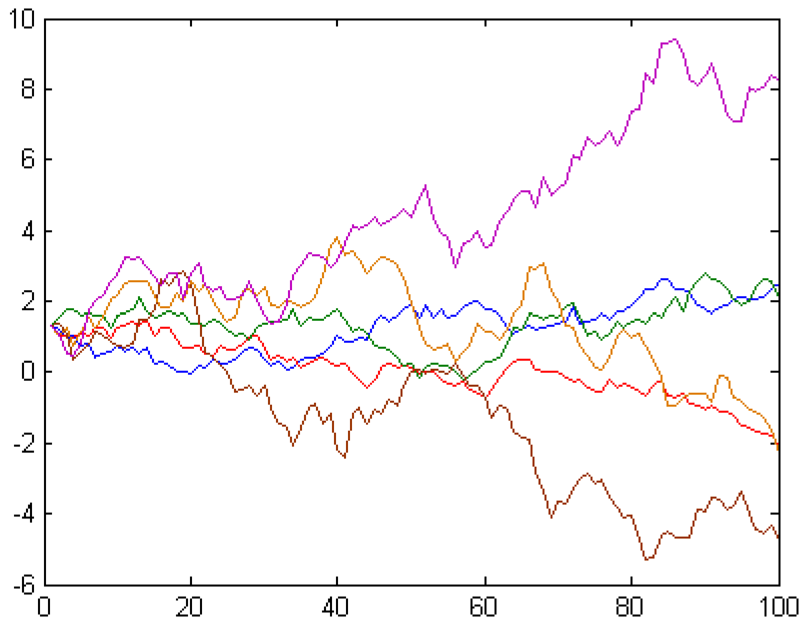
- **루이 바쉘리에**(1900) : 앞서 설명한 브라운운동이 « La théorie de la spéculation » 라는 제목의 학위논문에 기술됨

- **알버트 아인쉬타인**(1905) : 브라운 운동과 예측을 설명하는 통계이론



금융에서 왜 브라운 운동을 사용하는가?

- 경로가 주식시장의 지수를 닮았음
- 문제점 : 브라운 운동은 음수(-)가 될수 있음



수리금융에서의 확률 미적분

- **기요시 이토**(Kiyoshi Itô ,1940s) 확률 미적분 개발
  - 이토적분(Itô integral) : $\int_0^t H(s)\, dW(s)$
    여기서, dW는 확률미분항
  - 이토명제(Itô's lemma): 확률 함수의 미분

- **로버트 머턴**(Robert Merton, 1969) 금융상품의 가격을 설명하기 위해 확률미적분 도입

- $S \sim e^{W(t)} > 0$: 기초자산 가치는 항상 양(+)이어야 함

확률 미적분을 이용한 옵션가격결정

- Robert Merton, Fisher Black & Myron Scholes 는 옵션 가격결정모형에 기념비적인 논문 발표(1973)
  - 콜옵션과 풋옵션의 공정가 계산을 위한 해석해를 개발함
  - 파생상품 성장에 획기적인 기여를 함
  - 머튼과 숄즈는 1997에 노벨경제학상 수상 (Fisher Black은 1995년에 사망)

확률적분(Stochastic integral)

- 정의 : $$\int_a^b g(W_t)\cdot dW_t = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=0}^{N} g(W_t)\cdot\left(W_{t+1}-W_t\right)$$

- 유용한 특징: 확률적분의 평균은 "0"

- <u>공식유도</u>

$$\mathrm{E}\left[\lim_{N\to\infty}\sum_{i=0}^{N} g(W_t)\cdot\left(W_{t+1}-W_t\right)\right] = \lim_{N\to\infty}\mathrm{E}\left[\sum_{i=0}^{N} g(W_t)\right]\cdot\mathrm{E}\left[\left(W_{t+1}-W_t\right)\right]$$

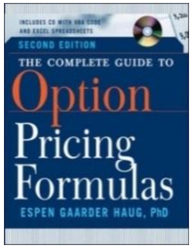
독립증분

$$= \lim_{N\to\infty}\mathrm{E}\left[\sum_{i=0}^{N} g(W_t)\right]\cdot 0 = 0$$

$N(0,1)$의 평균=0

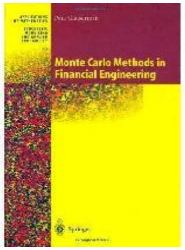
옵션가격결정방법(심화학습)

가격결정식(Closed Form) : 가격 결정식이 공식 형태로 표현된 것



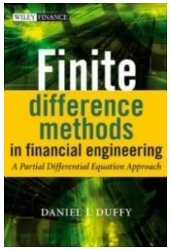
- 장점 : 가격 계산이 빠르고 정확한 민감도를 구할 수 있음. 프로그래밍 구현이 쉬움
- 단점 : 단순화된 가정 하에서 모형이 실행되며, 적용할 수 있는 파생상품이 한정적

몬테카를로 시뮬레이션 : 난수를 발생시켜 파생상품의 기대 값을 구하는 방법



- 장점 : 다양한 제약조건이 있는 상품의 가격결정에 유리.기초자산이 3개이상인 경우도 가능
- 단점 : 가격계산의 속도가 느리고, 정확한 민감도 계산 어려움

유한차분법(FDM) : 편미분 방정식(PDE)을 수치해석으로 푸는 방법



- 장점 : Greek수치의 정확성이 높으며, 계산 속도가 빠름
- 단점 : 프로그래밍 구현이 어려움. Multi asset에 대한 제약(기초자산 3개인 경우 현실적으로 계산 어려움)

옵션가격결정방법 : 몬테카를로 시뮬레이션

몬테카를로 시뮬레이션

► **Monte Carlo Simulation**

☞ 난수를 사용하여 생성한 주가 경로에 따라 ELS의 상품구조에서 발생하는 현금흐름의 현가의 평균으로 Pricing

☞ 대부분의 문제에 적용 가능한 유연한 방법

☞ FDM과 결합하여 위험분석 및 헤지 시뮬레이션 가능

► **기본모형**

☞ **2 Stock 주가 Path 생성의 예**

$$S1_{t+1} = S1_t \exp((r - d_1 - \frac{\sigma_1^2}{2})dt + \sigma_1 \varepsilon_1 \sqrt{dt})$$

$$S2_{t+1} = S2_t \exp((r - d_2 - \frac{\sigma_2^2}{2})dt + \sigma_2 (\rho \varepsilon_1 + \sqrt{1-\rho} \varepsilon_2)\sqrt{dt})$$

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \sim N(0,1)$$

☞ 주가프로세스 가정 → 주가함수식 구함 → 난수 생성하여 주가시나리오 생성 → 생성된 각각의 주가 시나리오로부터 의무조기상환의 발생여부를 확인할 수 있으므로 현금흐름의 양과 시점을 구함.
만기상환의 경우, 만기시 발생하는 현금흐름의 양을 구함 → 각각의 현금흐름을 현재가치로 할인하고 이 할인된 값들을 평균하여 ELS의 가격을 산정

옵션가격결정방법 : 유한차분법(FDM)

유한차분법(FDM)

► **Finite Difference Method(FDM)**

☞ Black-Sholes 편미분 방정식을 수치해석의 기법인 FDM(유한차분법)을 이용하여 계산
☞ Monte Carlo Simulation에 비하여 안정적인 민감도 산출가능
☞ MC와 결합하여 위험분석 및 헤지 시뮬레이션 수행가능
☞ 주가와 잔존만기를 나누는 격자의 간격에 따라 가격이 달라질 수 있음

► **기본적인 모형**

☞ 두개의 기초자산(포스코, 하이닉스)으로 이루어진 ELS의 가격은 아래와 같은 2 Stock Black-Scholes 편미분 방정식을 따른다고 가정

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\sigma_1^2}{2}s_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2}+\frac{\sigma_2^2}{2}s_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial s_2^2}+\rho\sigma_1\sigma_2 S_1\frac{\partial^2 u}{\partial s_1\partial s_2}+(r-d_1)s_1\frac{\partial u}{\partial s_1}+(r-d_2)s_2\frac{\partial u}{\partial s_2}-ru=0$$

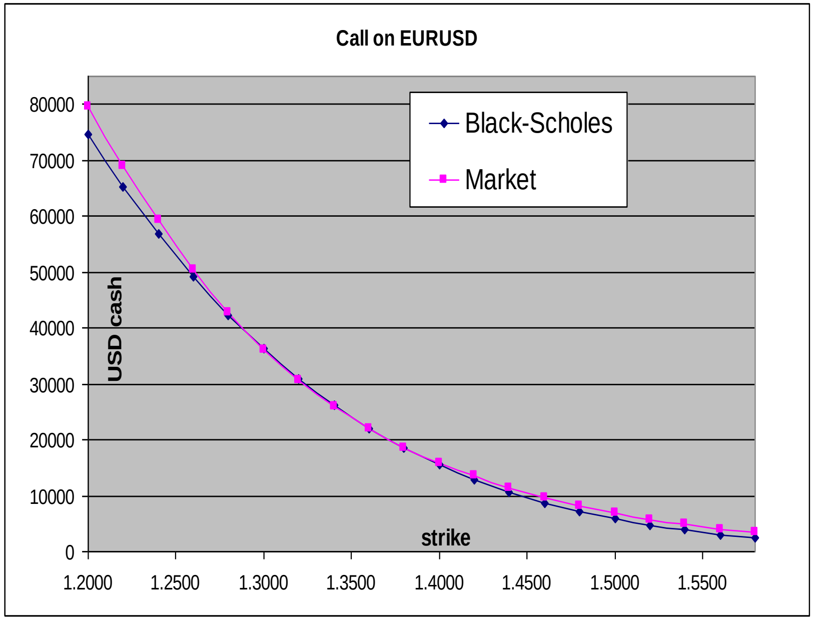
u : 파생상품의 가격
s_1, s_2 : 포스코의 주가와 하이닉스의 주가
σ_1, σ_2 : 포스코의 수익률의 변동성과 하이닉스의 수익률의 변동성
d_1, d_2 : 포스코의 연속 배당률과 하이닉스의 연속 배당률
ρ : 포스코와 하이닉스의 상관계수
r : 무위험 이자율

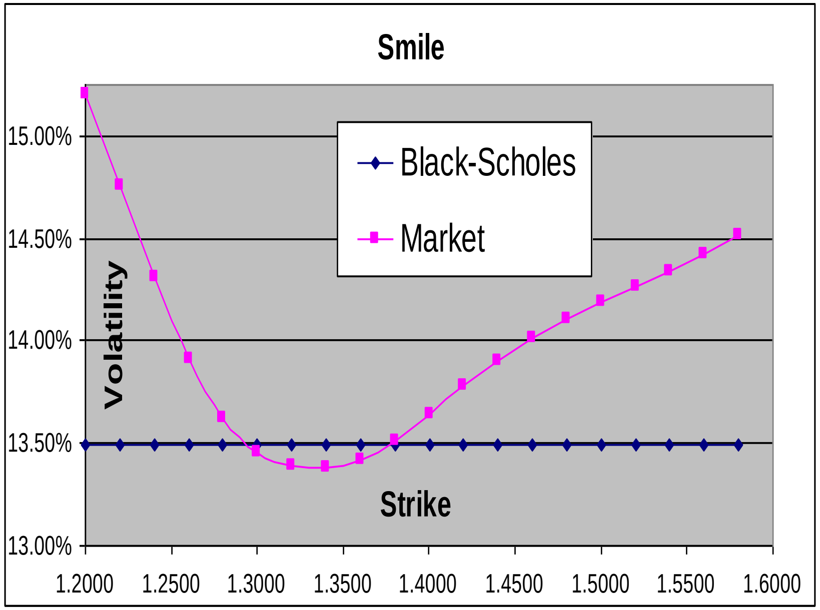
☞ 위 식의 파라미터에 알맞은 값들을 대입하고 Log변환을 한 식을 FDM의 일종인 OSM(Operator Splitting Method)를 이용하여 만기에서의 가격과 경계조건을 이용하여 필요한 시점의 가격과 민감도를 계산함

변동성 스마일의 이해

블랙숄즈 vs 실제시장

- 블랙숄즈 가격 < 시장가격
- 내재변동성 계산을 위한 블랙숄즈 공식이용(시장가격)
- 역산 → “내재변동성”
- 모든 행사가격에 대해 계산
- 블랙숄즈 공식은 모든 행사가격에 대해 상수변동성을 가정함
- 실제로 ☺스마일과 같은 모양의 계산값이 관측 가능함





변동성의 이해 : 확률변동성 모형

Heston(1993) stochastic Volatility Model

- 대표적인 stochastic volatility 모형으로 변동성을 동태적인 확률방정식으로 표현
- 시장의 실증현상을 현실적으로 반영하기 위해 보완적 방법론 적용이 필수

모형의 특징	구현상의 어려움
• Leverage effect capture • Mean reverting 반영 • Heavy tail, High peaks(leptokurtic) • Closed form solution	• Numerical Complexity • 옵션가격 적분 계산에서 수렴성 (singularity, complex integral) • Calibration에서 비선형 최적화 문제

► NICE Approach

- **정확도를 위한 적분법 : Adapted Quadrature, Modified FFT 이용**
- **함수구조의 안정성을 위한 Little Heston trap(2006) 적용**
- **파라미터 추정에 있어 Advanced Optimization 적용:**
  - Trust-region-reflective, Levenberg-Marquardt Algorithm (Local minimization algorithm) Simulated Annealing (global minimization algorithm) 적용

변동성의 이해 : 확률변동성 모형

- **Heston(1993) stochastic volatility 모델**

Dynamics of underlying asset

$$\boxed{\begin{aligned} dS_t &= (r-q)S_t dt + \sqrt{v_t}S_t dW_t^1 \\ dv_t &= \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}dW_t^2 \\ E[dW_t^1 dW_t^2] &= \rho dt \end{aligned}}$$

S_t : asset price
v_t : variance
r : risk free rate
q : dividend yield rate
W_t : Brownian process

Parameter Set

κ : variance의 mean reversion speed
θ : variance의 mean reversion level
σ : variance의 volatility
ρ : Brownian process W_t^1, W_t^2의 correlation
v_0 : variance의 초기값

유러피언 콜 옵션 가격(risk-neutral measure)

$$\frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \rho\sigma vS\frac{\partial^2 C}{\partial S\partial v} + \frac{1}{2}\sigma^2 v\frac{\partial^2 C}{\partial v^2} + (r-q)S\frac{\partial C}{\partial S} + \kappa(\theta - \mathrm{v})\frac{\partial C}{\partial v} - rC + \frac{\partial C}{\partial t} = 0$$

경계조건

$$\begin{cases} C(S,v,T) = \mathrm{Max}(0, S-K), \\ C(0,v,t) = 0, \\ \dfrac{\partial C}{\partial S}(\infty, v, t) = 1, \\ C(S,\infty,t) = Se^{-q(T-t)}, \\ (r-q)S\dfrac{\partial C}{\partial S}(S,0,t) + \kappa\theta\dfrac{\partial C}{\partial v}(S,0,t) - rC(S,0,t) + \dfrac{\partial C}{\partial t}(S,0,t) = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{C(S,v,t) = Se^{-q(T-t)}P_1(S,v,T-t) - Ke^{-r(T-t)}P_2(S,v,T-t)}$$

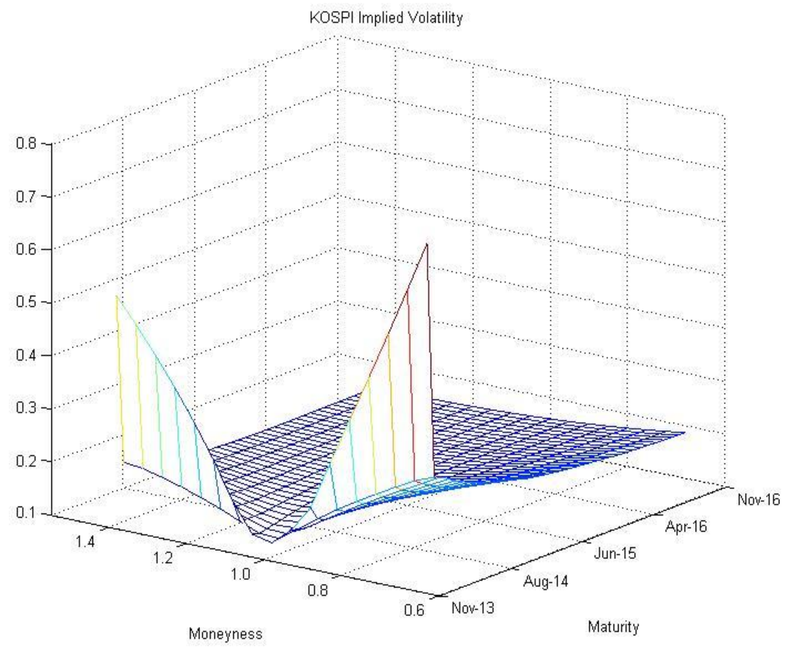
$$P_1(S,v,t;\ln K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}\left[\frac{e^{-iu\ln[K]}\phi(S,v,t;u-i)}{iu\phi(S,v,t;\text{-}i)}\right]du, \quad P_2(S,v,t;\ln K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}\left[\frac{e^{-iu\ln[K]}\phi(S,v,t;u)}{iu}\right]du$$

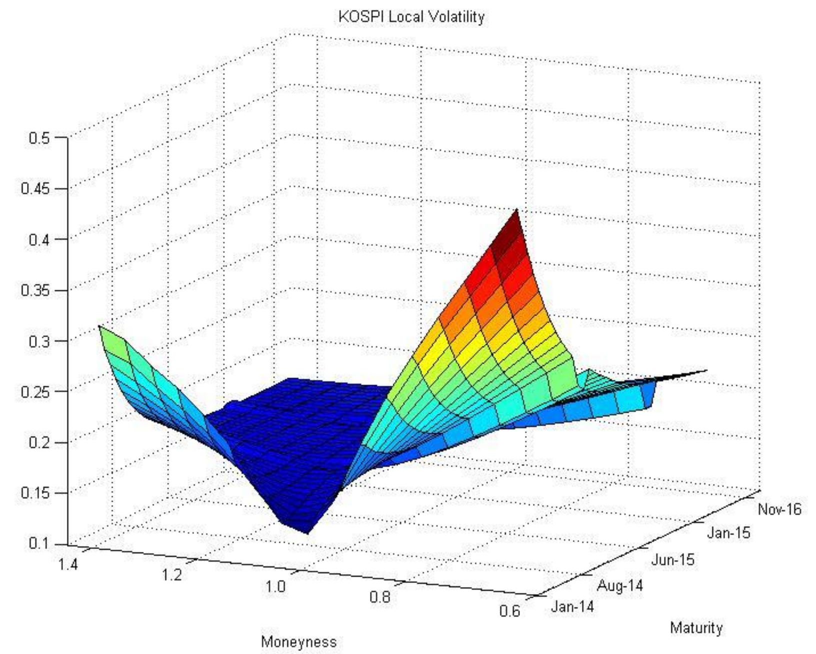
$$\phi(S,v,t;u) = \exp\left(iu\left(\ln S + (r-q)t\right) + \frac{\theta\kappa}{\sigma^2}\left((\kappa - \rho\sigma iu + d)t - 2\ln\left(\frac{1-ge^{dt}}{1-g}\right)\right) + \frac{v}{\sigma^2}(\kappa - \rho\sigma iu + d)\left(\frac{1-e^{dt}}{1-ge^{dt}}\right)\right), \quad d = \sqrt{(\rho\sigma ui - \kappa)^2 + \sigma^2(iu + u^2)}, \quad g = (\kappa - \rho\sigma iu + d)/(\kappa - \rho\sigma iu - d)$$

변동성의 이해 : 확률변동성 모형

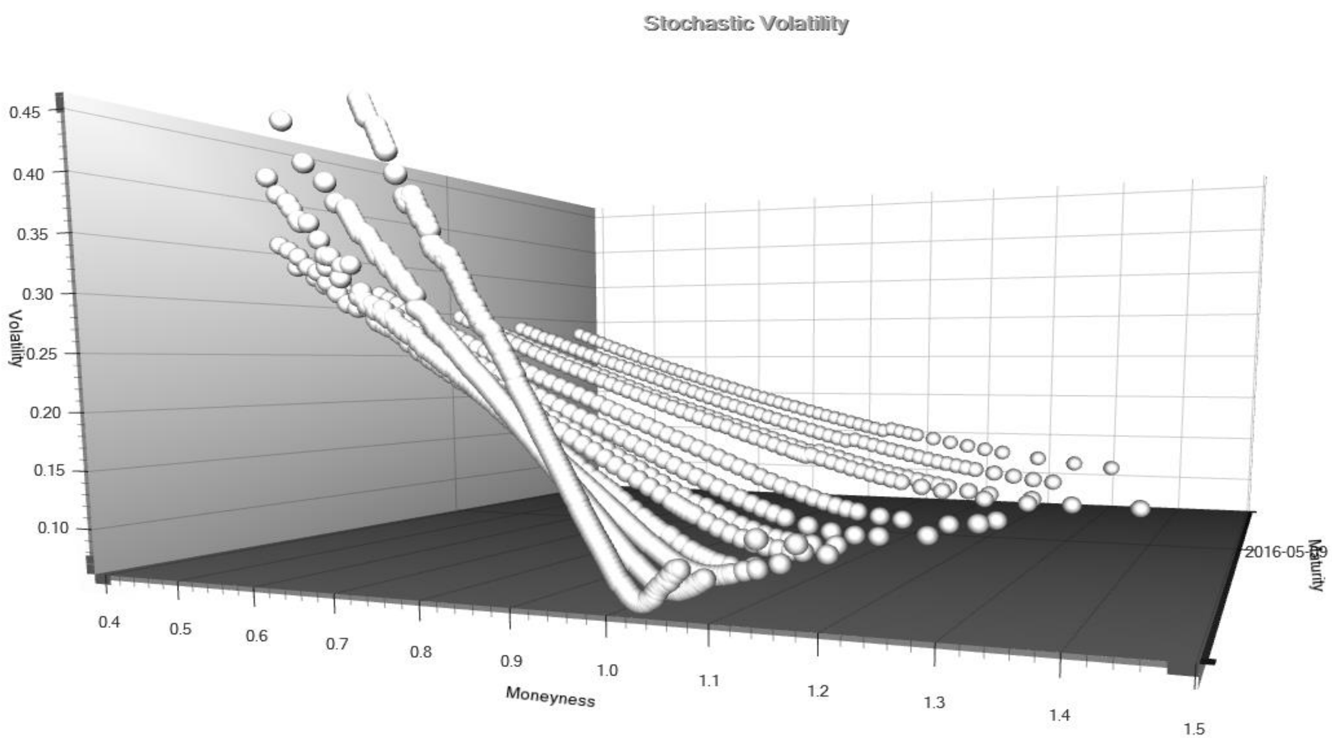
- **Volatility Surface – KOSPI 200**

Implied Volatility **Local Volatility**



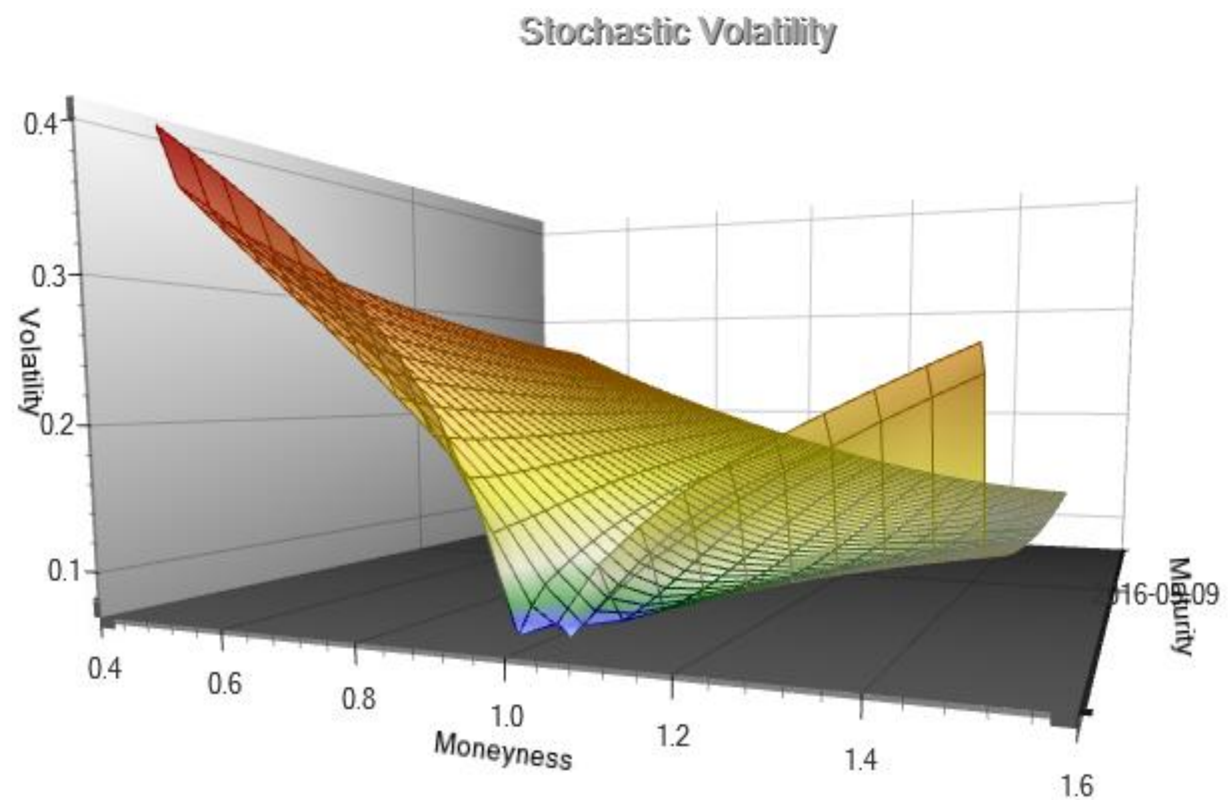


실제 변동성 곡면(S&P500 Market vol.)



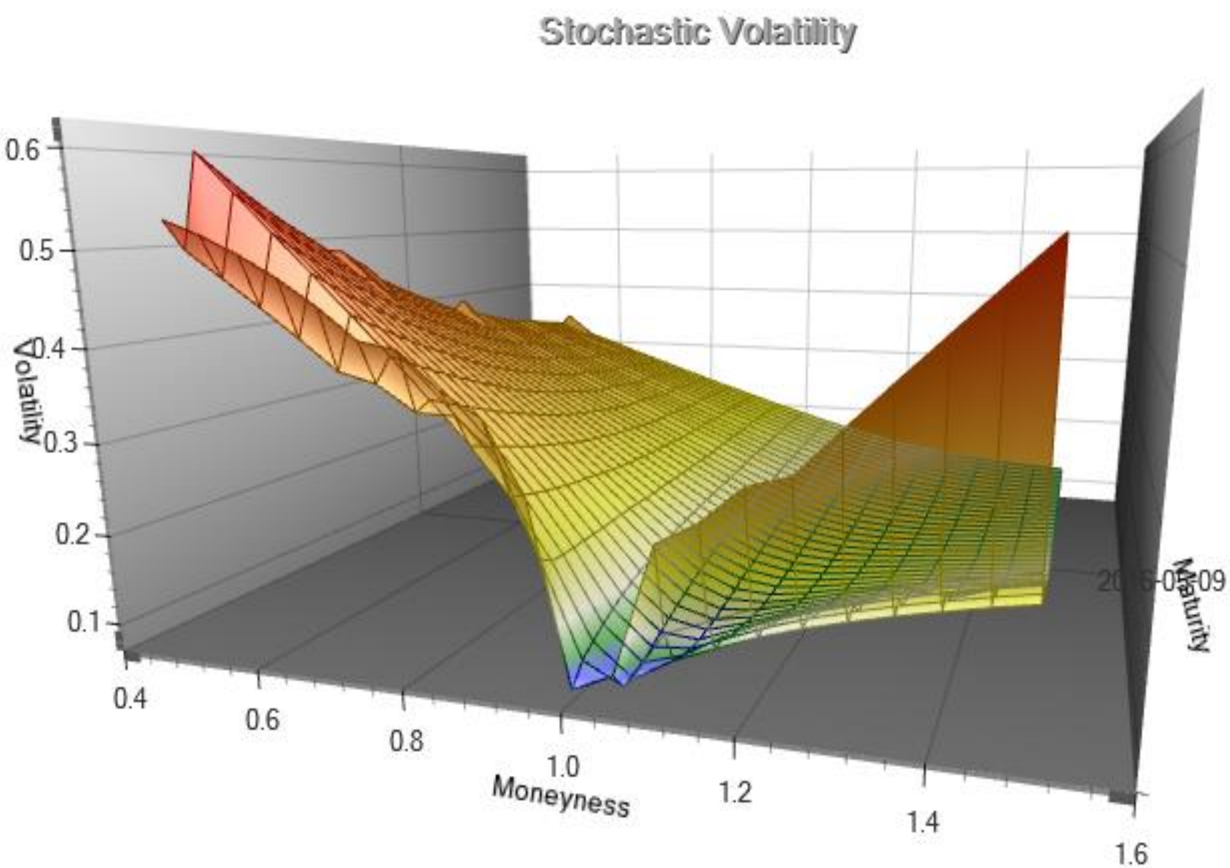
출처 : NICE V&I 솔루션 (변동성 정보제공 시스템)

실제 변동성 곡면(S&P500 Implid vol.)



출처 : NICE V&I 솔루션 (변동성 정보제공 시스템)

실제 변동성 곡면(S&P500 Local vol.)



출처 : NICE V&I 솔루션 (변동성 정보제공 시스템)

금융공학 실무사례: 주식파생상품 평가

주식파생상품 : 일별 평가 프로세스

- 자산평가회사의 주식파생상품의 일별 평가 프로세스를 도식화 한 것임

Step 1

발행정보 확인 및 DB 입력

1. **발행정보의 입수**
   - 신규발행채권 발행정보 전수검사
   - koscom Data
   - 한국예탁결제원 Data
   - 발행사 발행 담당 유선문의
   - 유가증권신고서
   - Term Sheet
   - 발행정보 변경종목 확인
2. **평가 관련정보의 입수**
   - 신용등급정보
   - 조기/만기 행사 정보
   - 환매/ Market Price 등록

Step 2

투입변수 수집

1. **투입변수 수집**
   - NICE P&I 통합시스템
   - Bloomberg
   - Reuters
   - Check
2. **투입변수 추정**
   - Yield Curve 산출
   - 변동성 추정
   - 상관계수 추정
   - Convenience Yield 추정
   - Quanto 조정

Step 3

Pricing

1. **모델가격 산정**
   - Closed Form
   - Monte Carlo Simulation
2. **최종가격 선정**
   - 프리미엄 상각
   - Market Price 반영
3. **기타 결과물 산출**
   - Greeks 산출
   - VaR 값 산출
   - 조기/만기상환 확률 산출
   - 옵션 분리가격 산출

Step 4

평가검증 및 평가 Data 전송

1. **3단계 검수 실시**
   - 평가담당자
   - 평가팀장
   - 평가실장
2. **평가데이터 전송**
   - 전송시간 자동체크
   - 전송 중 오류 자동체크
   - 최종 전송완료 시각 체크

주식파생상품 : 투입변수 산정(종가, 배당률)

- ELS 기초자산의 종가 및 배당률은 Check, Bloomberg, Reuters를 통해서 다운받아 사용 및 관리
- 해외 기초자산의 경우 장마감 시간별 업데이트 후 가격 산정

종가, 배당률
$S(0)$

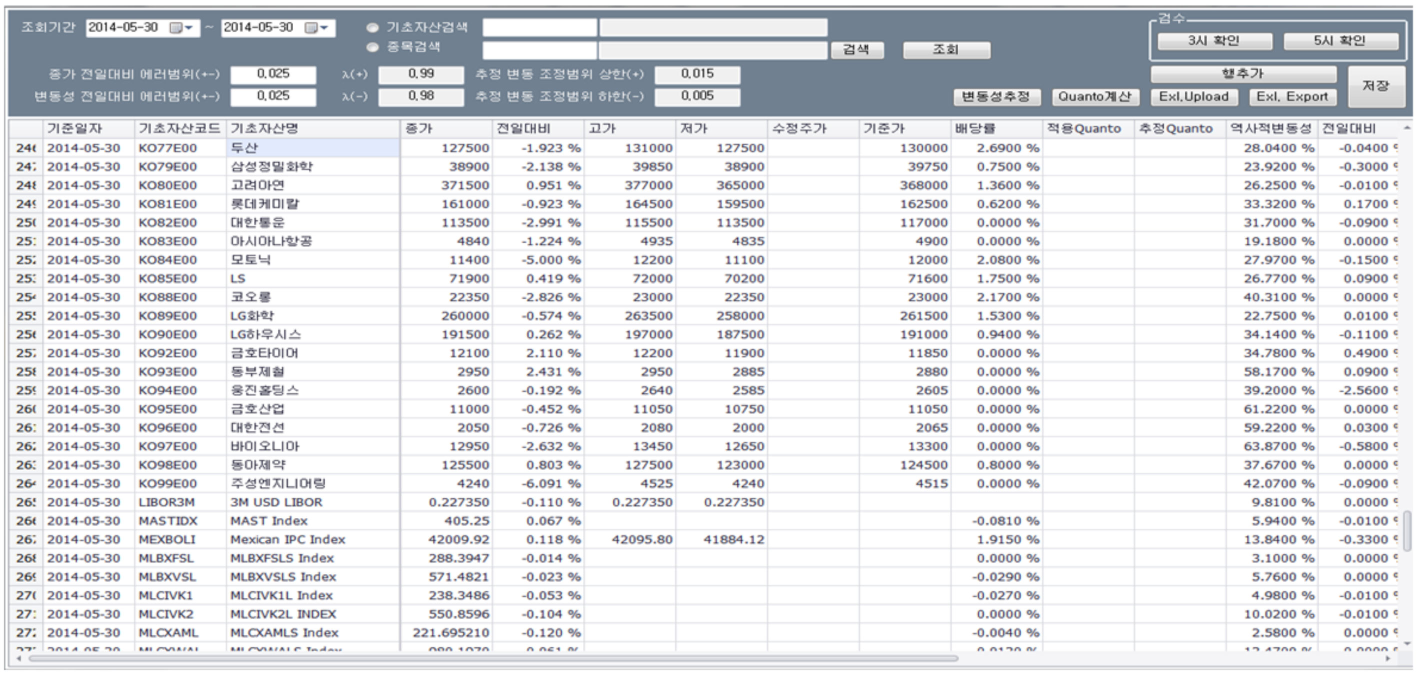
이자율
r

상관계수
ρ

변동성
σ

Quanto 조정
$\rho_{s,FX}\sigma_s\sigma_{FX}$

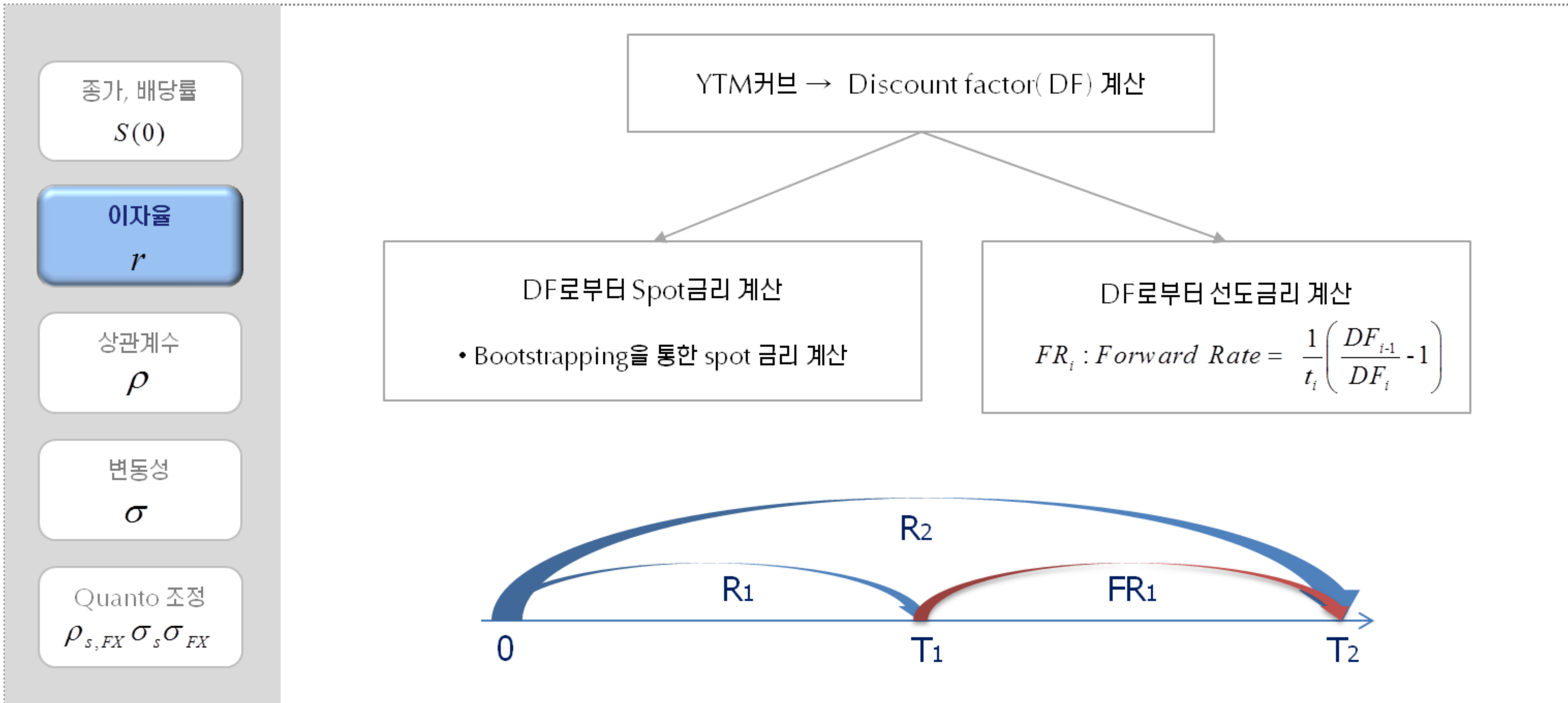
- **지수정보 관리 화면**
  - 기준지수 관찰이 관찰일 평균 지수, 바스켓 평균 지수, 장중 지수 등 다양한 조건에 맞도록 설계



	기준일자	기초자산코드	기초자산명	종가	전일대비	고가	저가	수정주가	기준가	배당률	적용Quanto	추정Quanto	역사적변동성	전일대비
246	2014-05-30	KO77E00	두산	127500	-1.923 %	131000	127500		130000	2.6900 %			28.0400 %	-0.0400
247	2014-05-30	KO79E00	삼성정밀화학	38900	-2.138 %	39850	38900		39750	0.7500 %			23.9200 %	-0.3000
248	2014-05-30	KO80E00	고려아연	371500	0.951 %	377000	365000		368000	1.3600 %			26.2500 %	-0.0100
249	2014-05-30	KO81E00	롯데케미칼	161000	-0.923 %	164500	159500		162500	0.6200 %			33.3200 %	0.1700
250	2014-05-30	KO82E00	대한통운	113500	-2.991 %	115500	113500		117000	0.0000 %			31.7000 %	-0.0900
251	2014-05-30	KO83E00	아시아나항공	4840	-1.224 %	4935	4835		4900	0.0000 %			19.1800 %	0.0000
252	2014-05-30	KO84E00	모토닉	11400	-5.000 %	12200	11100		12000	2.0800 %			27.9700 %	-0.1500
253	2014-05-30	KO85E00	LS	71900	0.419 %	72000	70200		71600	1.7500 %			26.7700 %	0.0900
254	2014-05-30	KO88E00	코오롱	22350	-2.826 %	23000	22350		23000	2.1700 %			40.3100 %	0.0000
255	2014-05-30	KO89E00	LG화학	260000	-0.574 %	263500	258000		261500	1.5300 %			22.7500 %	0.0100
256	2014-05-30	KO90E00	LG하우시스	191500	0.262 %	197000	187500		191000	0.9400 %			34.1400 %	-0.1100
257	2014-05-30	KO92E00	금호타이어	12100	2.110 %	12200	11900		11850	0.0000 %			34.7800 %	0.4900
258	2014-05-30	KO93E00	동부제철	2950	2.431 %	2950	2885		2880	0.0000 %			58.1700 %	0.0900
259	2014-05-30	KO94E00	웅진홀딩스	2600	-0.192 %	2640	2585		2605	0.0000 %			39.2000 %	-2.5600
260	2014-05-30	KO95E00	금호산업	11000	-0.452 %	11050	10750		11050	0.0000 %			61.2200 %	0.0000
261	2014-05-30	KO96E00	대한전선	2050	-0.726 %	2080	2000		2065	0.0000 %			59.2200 %	0.0300
262	2014-05-30	KO97E00	바이오니아	12950	-2.632 %	13450	12650		13300	0.0000 %			63.8700 %	-0.5800
263	2014-05-30	KO98E00	동아제약	125500	0.803 %	127500	123000		124500	0.8000 %			37.6700 %	0.0000
264	2014-05-30	KO99E00	주성엔지니어링	4240	-6.091 %	4525	4240		4515	0.0000 %			42.0700 %	-0.0900
265	2014-05-30	LIBOR3M	3M USD LIBOR	0.227350	-0.110 %	0.227350	0.227350						9.8100 %	0.0000
266	2014-05-30	MASTIDX	MAST Index	405.25	0.067 %					-0.0810 %			5.9400 %	-0.0100
267	2014-05-30	MEXBOLI	Mexican IPC Index	42009.92	0.118 %	42095.80	41884.12			1.9150 %			13.8400 %	-0.3300
268	2014-05-30	MLBXFSL	MLBXFSLS Index	288.3947	-0.014 %					0.0000 %			3.1000 %	0.0000
269	2014-05-30	MLBXVSL	MLBXVSLS Index	571.4821	-0.023 %					-0.0290 %			5.7600 %	0.0000
270	2014-05-30	MLCIVK1	MLCIVK1L Index	238.3486	-0.053 %					-0.0270 %			4.9800 %	-0.0100
271	2014-05-30	MLCIVK2	MLCIVK2L INDEX	550.8596	-0.104 %					0.0000 %			10.0200 %	-0.0100
272	2014-05-30	MLCXAML	MLCXAMLS Index	221.695210	-0.120 %					-0.0040 %			2.5800 %	0.0000

주식파생상품 : 투입변수 산정(이자율)

- 주가지수 생성 시 해당 무위험 YTM 커브로부터 미래 시점 daily기준 선도금리를 산정하여 시뮬레이션 평가 시 적용
- 미래 예상 현금흐름은 발행사 YTM 커브로부터 spot 커브를 산출 후 해당 현금흐름을 잔존 기간에 맞는 spot금리로 할인



주식파생상품 : 투입변수 산정(상관계수)

- **EWMA 방법을 통한 파라미터 추정 및 상관계수 산정**

종가, 배당률
$S(0)$

이자율
r

상관계수
ρ

변동성
σ

Quanto 조정
$\rho_{s,FX}\sigma_s\sigma_{FX}$

- **상관관계 업로드/조회 화면**
  - EWMA 방법을 통한 파라미터 추정 및 상관계수 산정

조회기간 2014-05-30 ~ 2014-05-30
그룹선택 (묶크)워런트 기타
λ조정 0.99
종목코드
상관계수 조정범위 상한 0.02
기초자산
상관계수 조정범위 하한 0.02
검색 검색초기화 초기값 Exl. Export
전체조회 조회 계산 저장 삭제

	AFXL...	DJEUBNX
	SPDR...	DJ EURO ST...
SPDR FUND UF	1	0.459
ꞦO STOXX Banks	0.459	1

	일자	기초자산1	기초자산명1	기초자산2	기초자산명2	적용 상관계수	전일대비	추정 상관계수	표준편차1	표준편차2	공분산
79	20140530	KG12E00	London PM ...	KG13SVR	London Silver	0.60039	0.00199	0.60039	0.01101	0.01554	0.000102659...
80	20140530	KG12E00	London PM ...	KI12E00	KOSPI200	-0.02120	0.00822	-0.02120	0.01101	0.00779	-0.00000181...
81	20140530	KG12E00	London PM ...	NI12E00	NIKKEI 225	-0.16281	0.00174	-0.16281	0.01101	0.01487	-0.00002665...
82	20140530	KG12E00	London PM ...	RUSDEPE	러시아 RDX ...	-0.02939	-0.00421	-0.02973	0.01101	0.01734	-0.00000567...
83	20140530	KG12E00	London PM ...	SP50E00	S&P500	-0.08522	-0.00435	-0.08522	0.01101	0.00692	-0.00000649...
84	20140530	KG12E00	London PM ...	WT00CL1	원유(뉴욕)	0.05698	-0.00521	0.05698	0.01101	0.01045	0.000006552...
85	20140530	KG12E00	London PM ...	WTBRENT	브렌트유 최...	0.09246	-0.00117	0.09246	0.01101	0.00909	0.000009247...
86	20140530	KG13SVR	London Silver	KI12E00	KOSPI200	0.01310	0.01203	0.01310	0.01554	0.00779	0.000001586...
87	20140530	KG13SVR	London Silver	SP50E00	S&P500	-0.10171	-0.00651	-0.10171	0.01554	0.00692	-0.00001093...
88	20140530	KG13SVR	London Silver	WT00CL1	원유(뉴욕)	0.10603	-0.00830	0.10603	0.01554	0.01045	0.000017210...
89	20140530	KG13SVR	London Silver	WTBRENT	브렌트유 최...	0.09506	-0.00193	0.09506	0.01554	0.00909	0.000013419...
90	20140530	KI12E00	KOSPI200	KO01E00	삼성전자	0.72309	0.00213	0.72309	0.00779	0.01432	0.000080715...
91	20140530	KI12E00	KOSPI200	KO02E00	KT	0.25179	0.00767	0.25179	0.00779	0.01405	0.000027576...
92	20140530	KI12E00	KOSPI200	KO05E00	하나금융지주	0.58738	-0.00168	0.58738	0.00779	0.01507	0.000068977...
93	20140530	KI12E00	KOSPI200	KO07E00	LG전자	0.43699	0.00828	0.43699	0.00779	0.01445	0.000049206...
94	20140530	KI12E00	KOSPI200	KO09E00	POSCO	0.46335	0.00920	0.46335	0.00779	0.01184	0.000042756...
95	20140530	KI12E00	KOSPI200	KO103E0	LG 이노텍	0.36832	0.01205	0.36832	0.00779	0.02124	0.000060958...
96	20140530	KI12E00	KOSPI200	KO106E0	엔씨소프트	0.20166	-0.01178	0.20166	0.00779	0.02461	0.000038669...
97	20140530	KI12E00	KOSPI200	KO11E00	현대차	0.58881	0.00783	0.58881	0.00779	0.01655	0.000075938...
98	20140530	KI12E00	KOSPI200	KO121E0	한진해운	0.20010	0.00770	0.20010	0.00779	0.02363	0.000036841...
99	20140530	KI12E00	KOSPI200	KO13E00	SK텔레콤	0.23448	-0.00993	0.23448	0.00779	0.01582	0.000028903...
100	20140530	KI12E00	KOSPI200	KO143E0	현대백화점	0.31989	0.00087	0.31989	0.00779	0.01329	0.000033131...
101	20140530	KI12E00	KOSPI200	KO14E00	한국전력	0.27063	-0.00229	0.27063	0.00779	0.01615	0.000034065...
102	20140530	KI12E00	KOSPI200	KO156E0	금호석유	0.50998	0.00833	0.50998	0.00779	0.01507	0.000059903...
103	20140530	KI12E00	KOSPI200	KO15E00	삼성SDI	0.42004	0.00639	0.42004	0.00779	0.01841	0.000060272...
104	20140530	KI12E00	KOSPI200	KO168E0	LG상사	0.42268	0.00831	0.42268	0.00779	0.01804	0.000059423...
105	20140530	KI12E00	KOSPI200	KO170E0	LG유플러스	0.07285	0.00656	0.07285	0.00779	0.02004	0.000011888

주식파생상품 : 투입변수 산정(변동성)

- **지수인 경우 Market Implied volatility surface 활용**

종가, 배당률
$S(0)$

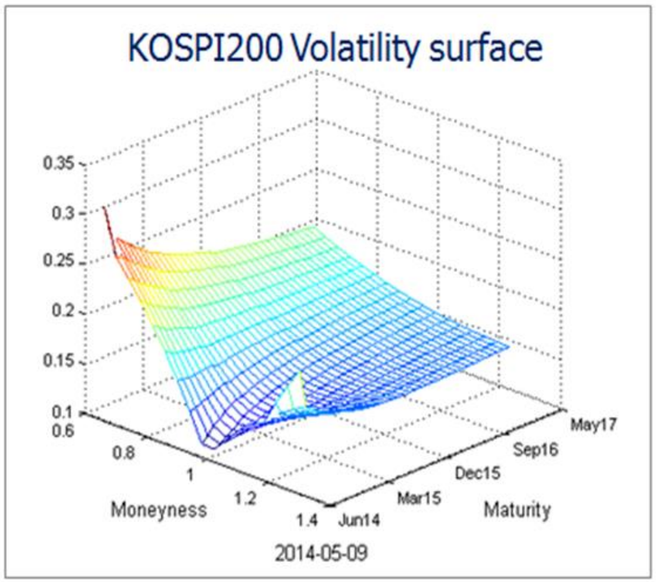
이자율
r

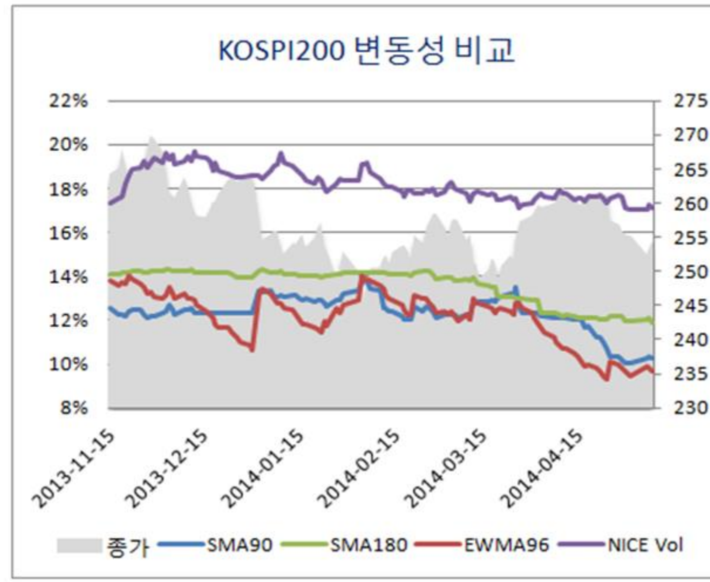
상관계수
ρ

변동성
σ

Quanto 조정
$\rho_{S,FX}\sigma_S\sigma_{FX}$

- 5대 지수(KOSPI200, HSCEI, S&P500, Eurostoxx50, Nikkei225)
  - 장내/장외에서 거래되는 옵션가격으로부터 시장 내재변동성 서피스를 추정
  - 변동성 서피스 전체를 적용하는 방법론은 연구 중이며 현재는 서피스의 평균값을 적용
  - 이 때, 서피스의 도메인은 moneyness[0.6 ~1.4], maturity[최근월 ~ 3년]이며 Call/Put 옵션의 OTM 구간 사용





주식파생상품 : 투입변수 산정(Quanto조정)

- **해외 기초자산의 경우 Quanto 조정**

종가, 배당률 $S(0)$

이자율 r

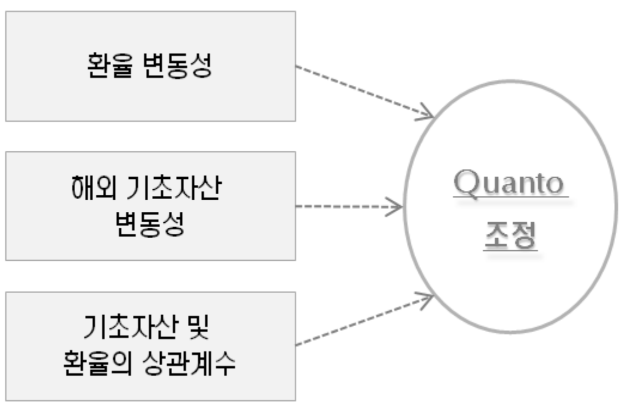
상관계수 ρ

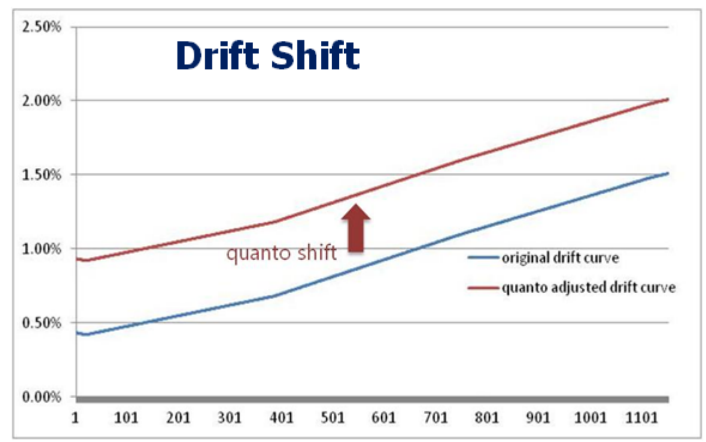
변동성 σ

Quanto 조정 $\rho_{s,FX}\sigma_s\sigma_{FX}$

- Quanto 조정 방식
  - 기초자산 종가가 해외 통화로 측정된 변수에 의하여 계산되지만 투자수익은 원화로 지급될 경우 적용
  - 옵션의 결제통화와 무관한 환율을 기초자산으로 한 상품의 경우 적용
  - 해당 기초자산 변동성, 환율의 변동성 및 이 두가지 상관계수의 곱으로 Quanto 조정값 산출
  - Quanto 조정은 해당 해외 기초자산의 주가생성 식에 Drift 부분에 영향을 미침

$$quanto\ adjustment = \rho_{fx,asset} \times \sigma_{fx} \times \sigma_{asset}$$





주식파생상품 : 가격산정(Black Scholes)

- **Black-scholes Class 방법 적용**

Pricing

* Black-scholes Class

Greeks

- 기초자산이 1건인 Call, Put 옵션 ELS 상품을 평가 시 Black-Scholes 옵션가격 결정식을 사용

$$Call = S_0\ N(d_1) - K\ e^{-rT} N(d_2)$$

$$Put = K\ e^{-rT}\ N(-d_2) - S_0\ N(-d_1)$$

where $$d_1 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r + \sigma^2 / 2)T}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r - \sigma^2 / 2)T}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

- 기초자산 1건을 편입한 European 이색 옵션(Barrier, Digital)의 경우는 Black 계열 옵션가격 결정식을 적용
  - Call Up and Out Option
  - Call Up and In Option
  - Put Down and Out Option
  - Put Down and In Option
  - Digital Option

주식파생상품 : 가격산정(Monte Carlo Simulation)

- **경로의존형 ELS 상품 평가 시, Monte Carlo Simulation 방법 적용**

Pricing

* Monte Carlo Simulation

Dynamics

Greeks

- **주가확률 과정 모형**
  : 파생상품 가격결정에 있어서 가중 중요한 것 중의 하나는 기초자산의 움직임을 현실에 맞게 모형화하는 것
- **미래주가생성** : GBM (Geometric Brownian Motion) 프로세스
- Lognormal **분포와** Ito's Lemma**를 적용한 이산형 주가 시리즈 생성**

주가 프로세스 :

$$dS_1(t) = r_1 S_1(t)dt + \sigma_1 S_1(t)dZ_1^Q$$

$$dS_2(t) = r_2 S_2(t)dt + \sigma_2 S_2(t)dZ_2^Q$$

$$E[dZ_1 \cdot dZ_2] = \rho_{1,2}dt$$

주식파생상품 : 가격산정(Monte Carlo Simulation)

- 기초자산이 2개 이상인 경우 Cholesky Decomposition을 적용하여 자산간의 상관관계가 고려된 난수 생성

Pricing

* Monte Carlo Simulation

Dynamics

Cholesky Decomposition

Greeks

- 기초자산이 2개로서 상관계수 행렬 R이 주어질 경우, R은 아래와 같이 분해 할 수 있음

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{11}a_{12} \\ a_{11}a_{12} & a_{12}^2 + a_{22}^2 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = 1 \qquad a_{12} = \rho \qquad a_{22} = \sqrt{1-\rho^2}$$

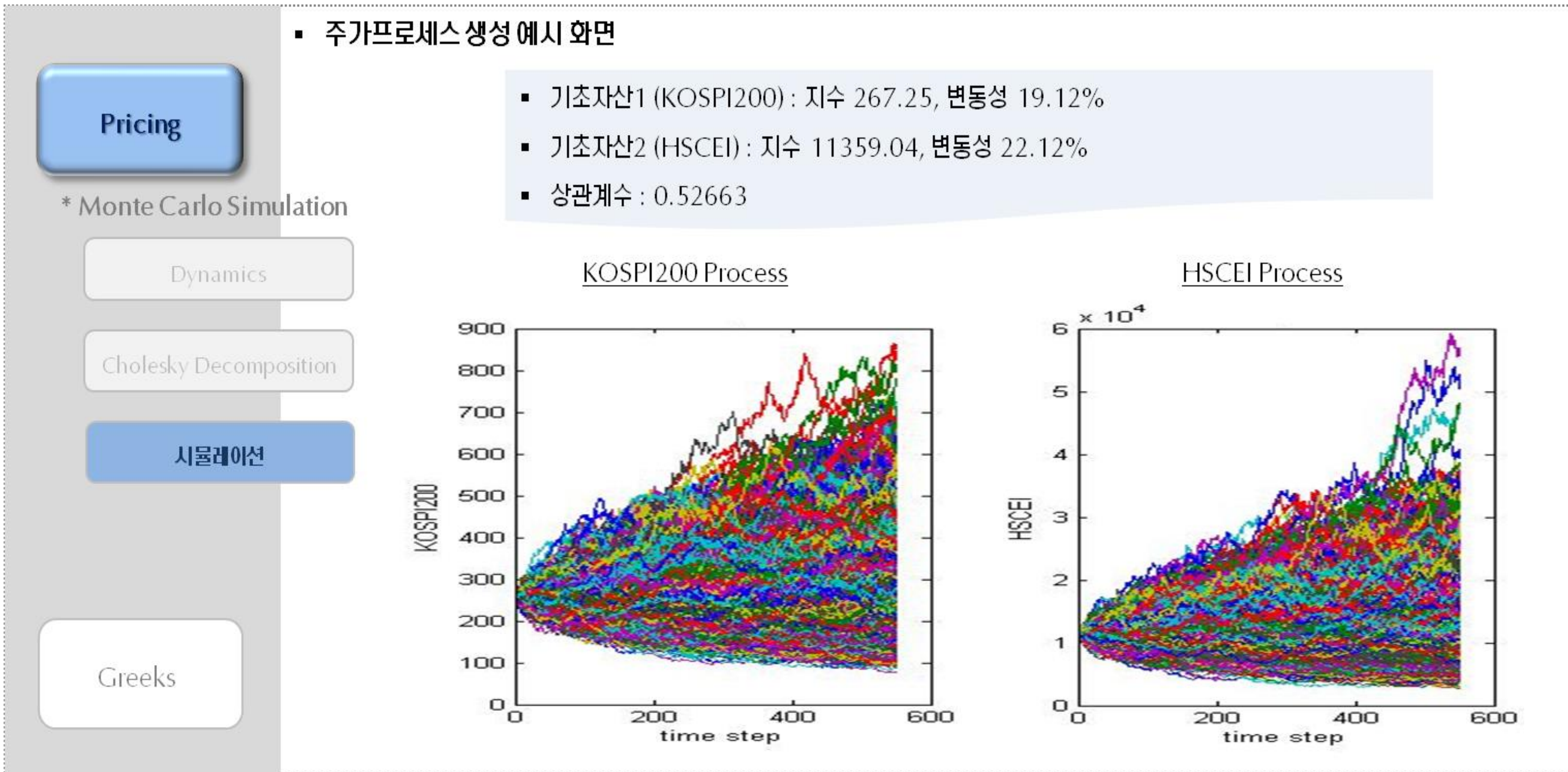
- 두 개의 자산 A, B에 적용될 상관관계가 고려된 난수 $\varepsilon_A, \varepsilon_B$ 은 다음과 같이 얻어짐

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_A \\ \varepsilon_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_A \\ \eta_B \end{bmatrix}$$

여기서 , $\begin{bmatrix} \eta_A \\ \eta_B \end{bmatrix}$는 상관관계를 고려하지 않은 난수

주식파생상품 : 가격산정(Monte Carlo Simulation)

- 주가프로세스 생성



주식파생상품 : 가격산정(Monte Carlo Simulation)

- 50,000번 이상의 지수 시리즈를 생성 후 중도상환 또는 만기상환 조건에 따라 상환금액 결정

Pricing

* Monte Carlo Simulation

Dynamics

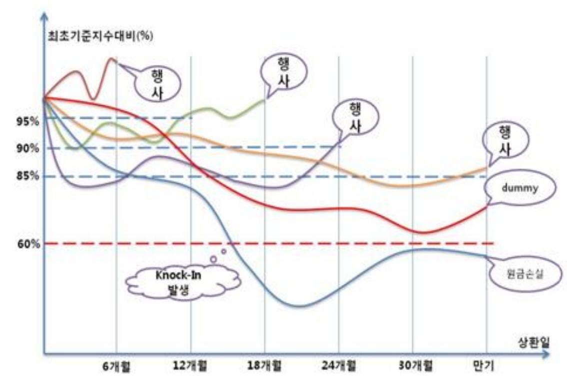
Cholesky Decomposition

시뮬레이션

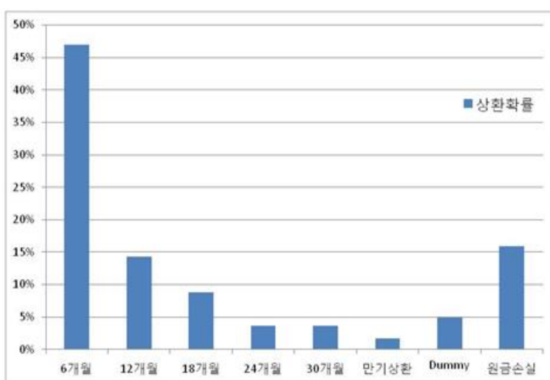
결과 Table

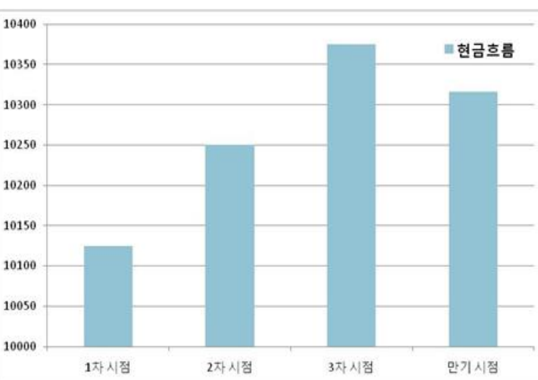
Greeks

- 시뮬레이션 평가 결과



	Payoff	할인계수	회수	확률	평가가격
6개월	10,375	0.9982	23,482	47%	4,863.63
12개월	10,750	0.9840	7,165	14%	1,515.87
18개월	11,125	0.9699	4,407	9%	951.16
24개월	11,500	0.9552	1,829	4%	401.76
30개월	11,875	0.9395	1,835	4%	409.45
만기상환	12,250	0.9230	861	2%	194.76
Dummy	12,250	0.9230	2,447	5%	553.48
원금손실	5,564	0.9230	7,972	16%	818.84
최종결과			50,000	100%	9,708.95





주식파생상품 : 가격산정(Greeks)

- **ELS의 민감도 값 산출**

Pricing

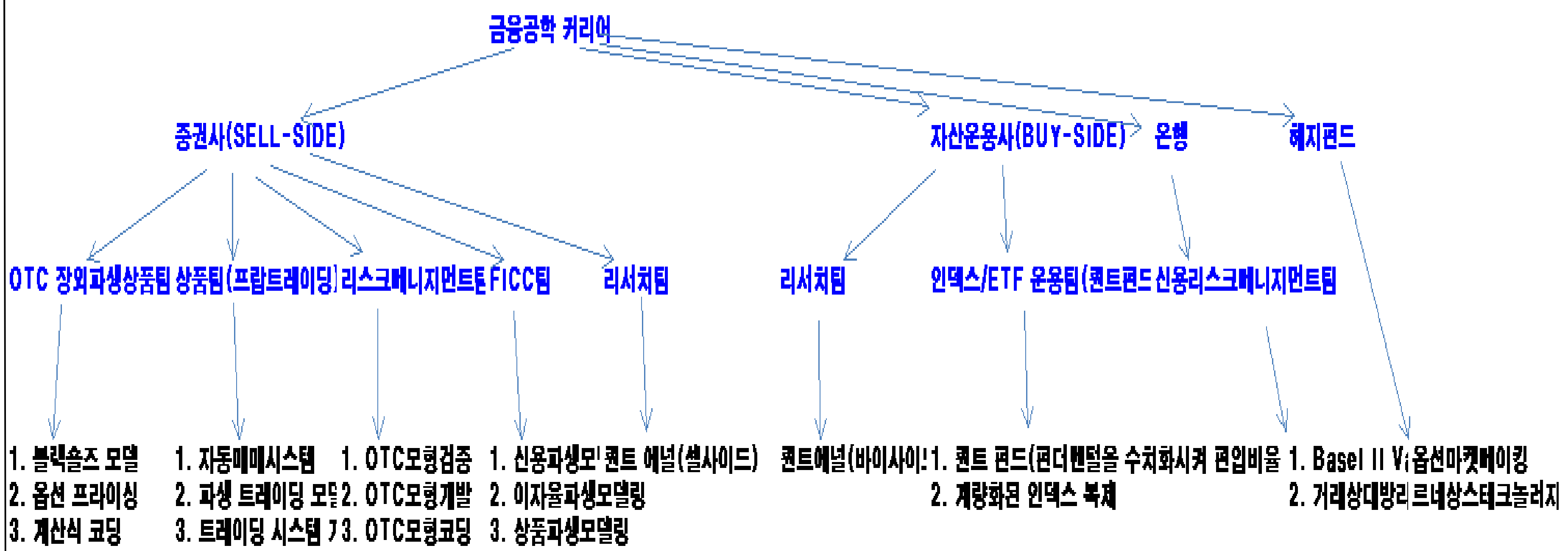
Greeks

- 상품 특성에 따라서 델타, 감마, 베가 등의 민감도 값 제공
- Closed Form 상품의 경우 민감도 계산 공식 사용
- 경로의존형 ELS 상품의 경우 시뮬레이션을 통한 민감도 값 산출

계산방식	민감도	산출식
Closed Form (Vanilla Call, Put)	델타	$Delta_{call} = \frac{\partial c}{\partial S} = e^{-qT} N(d_1),\ Delta_{put} = \frac{\partial p}{\partial S} = e^{-qT}[N(d_1) - 1]$
	감마	$Gamma_{call,\ put} = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial S^2} = \frac{n(d_1)e^{-qT}}{S\sigma\sqrt{T}}$
	베가	$Vega_{call,\ put} = \frac{\partial c}{\partial \sigma} = \frac{\partial p}{\partial \sigma} = Se^{-qT} n(d_1)\sqrt{T}$
Simulation	델타	$Delta = \frac{P(S + dS) - P(S)}{dS}$
	감마	$Gamma = \frac{P(S + dS) + P(S - dS) - 2P(S)}{dS^2}$
	베가	$Vega = \frac{P(\sigma + d\sigma) + P(\sigma)}{d\sigma}$

금융투자전문가가 되는 길

금융공학관련 주요업무 분야

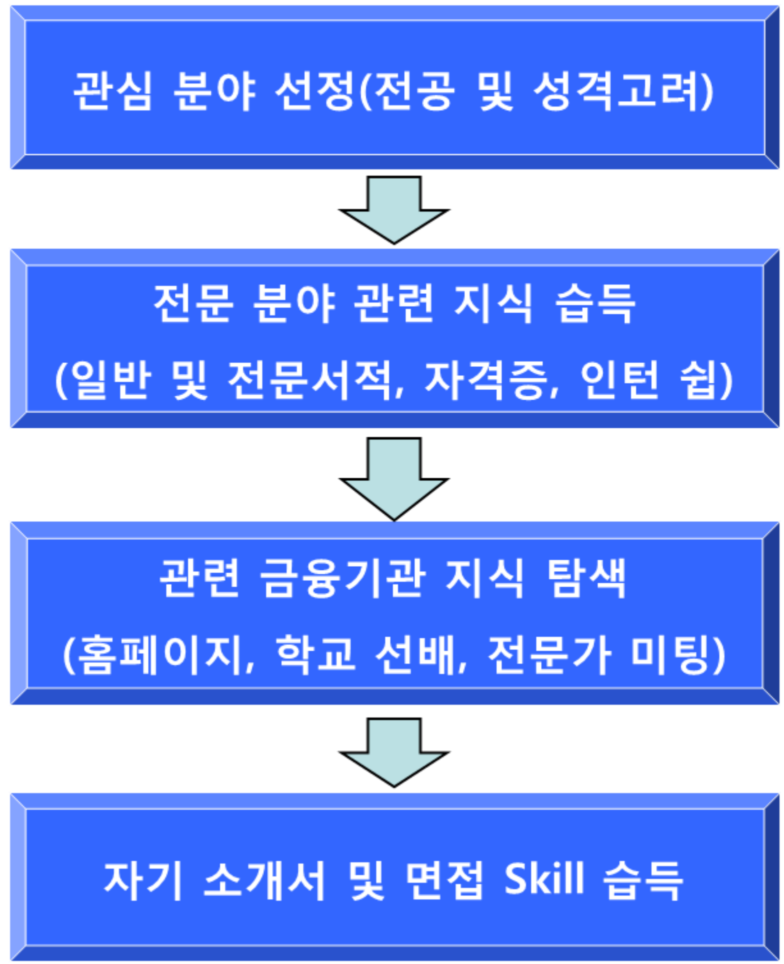


➢ **보험, 카드, 규제, 평가, 컨설팅 회사, 금융공기관(Regulation, Pricing, Consulting Firm)**

- 상기 분야 외에도 감독기관(금융감독원, 한국은행), 채권평가회사, 컨설팅회사, 보험 및 카드회사 등 다양함

관심분야에 따른 금융직무선택

- ❑ 애널리스트(Analyst)
- ❑ 옵션 딜러(Options Dealer)
- ❑ 리스크 매니저(Risk Manager)
- ❑ 자산관리 전문가(Private Banker)
- ❑ 장외파생상품 마케터(OTC Marketer)
- ❑ 금융공학 퀀트(Quant)



금융공학분야 인력현황

금융투자회사 : Equity Derivatives → FICC / DLS Quant 수요확대

헤지펀드 관련 Quant, OTC 인가사 : Front Quant/ Risk Quant(모델검증, 모델탑재)

은행 : Interest rate, FX → Equity Derivatives 수요확대

이자율옵션 / 구조화채권 / 실물 및 FX관련 Quant

감독기관 (금감원 • 협회) : 장외파생상품 감독 및 규제(미국, 영국 → 한국)

파생상품 모니터링 / 파생상품 평가 / 파생상품 규제정책

평가회사 • 컨설팅회사 : 채권평가사 • 컨설팅 → Front or Risk Quant 이동

파생상품(신용, 이자율, 주식 등) 가치평가 로직개발 / 컨설팅 업무

퀀트 전문가의 길 : 당신만의 길을 찾아라!

전문 분야 선정(전공 및 성격 고려)

↓

전문 분야 관련 지식 습득
(전문서적, 자격증, 인턴 쉽)

↓

관련 금융기관 지식 탐색
(학교 선배 및 전문가 미팅)

↓

자기 소개서 및 면접 Skill 습득

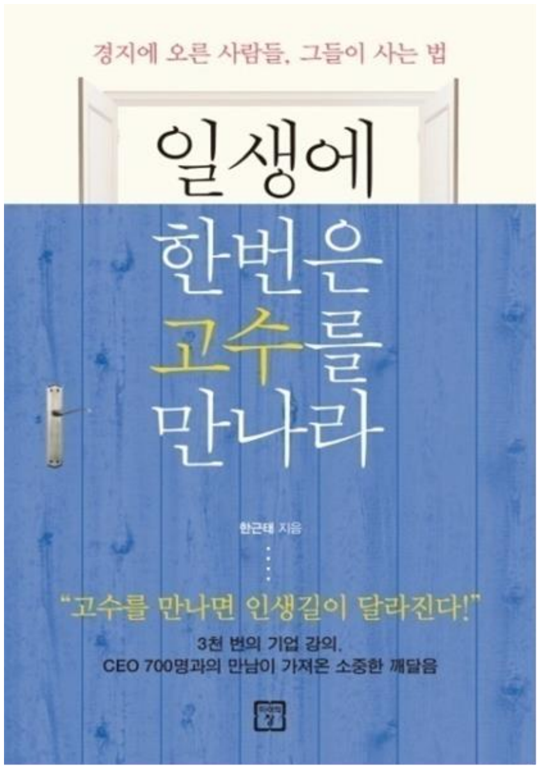
전문 지식

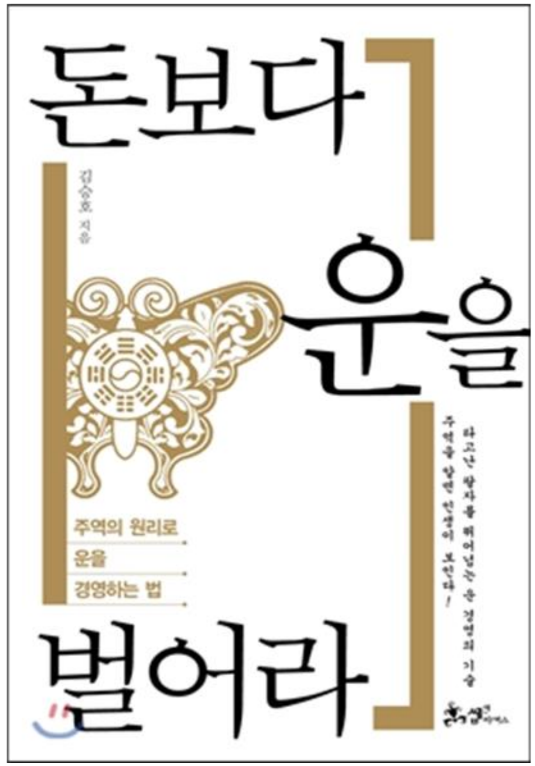
네트워크(인맥, 자기PR)

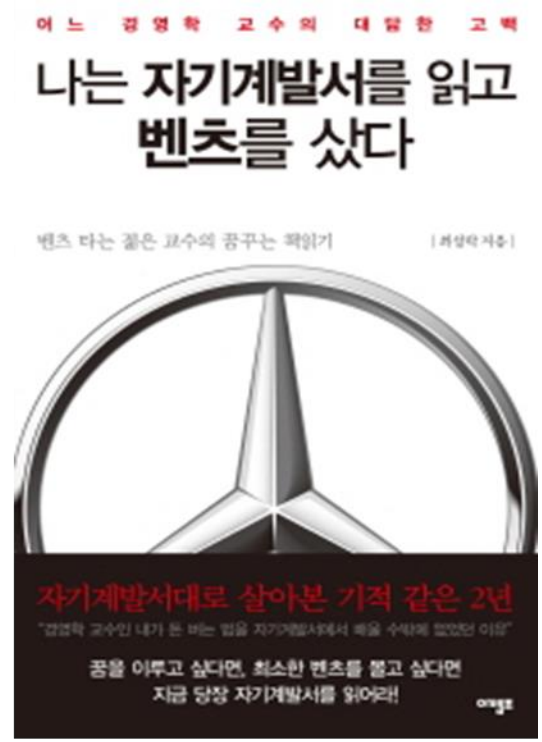
차별화 포인트

커뮤니케이션 능력
(화술, 자신감)

일생에 한번은 고수를 만나라(운과 실력)







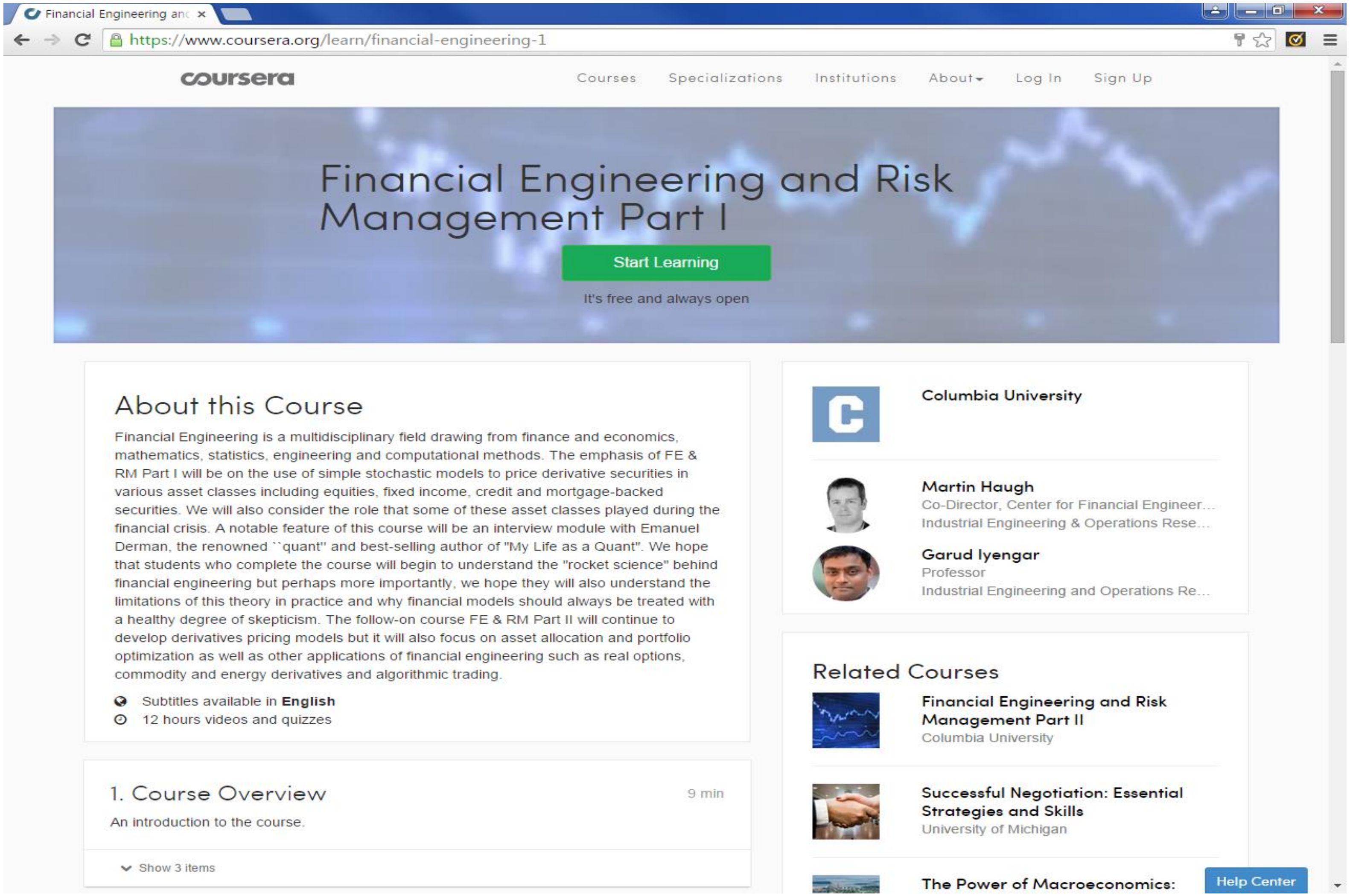
맺으며 : 도덕경 63장

'천하의 어려운 일은 반드시 쉬운 일에서 생기고 천하의 큰 일은 언제나 사소한 일에서 시작된다'

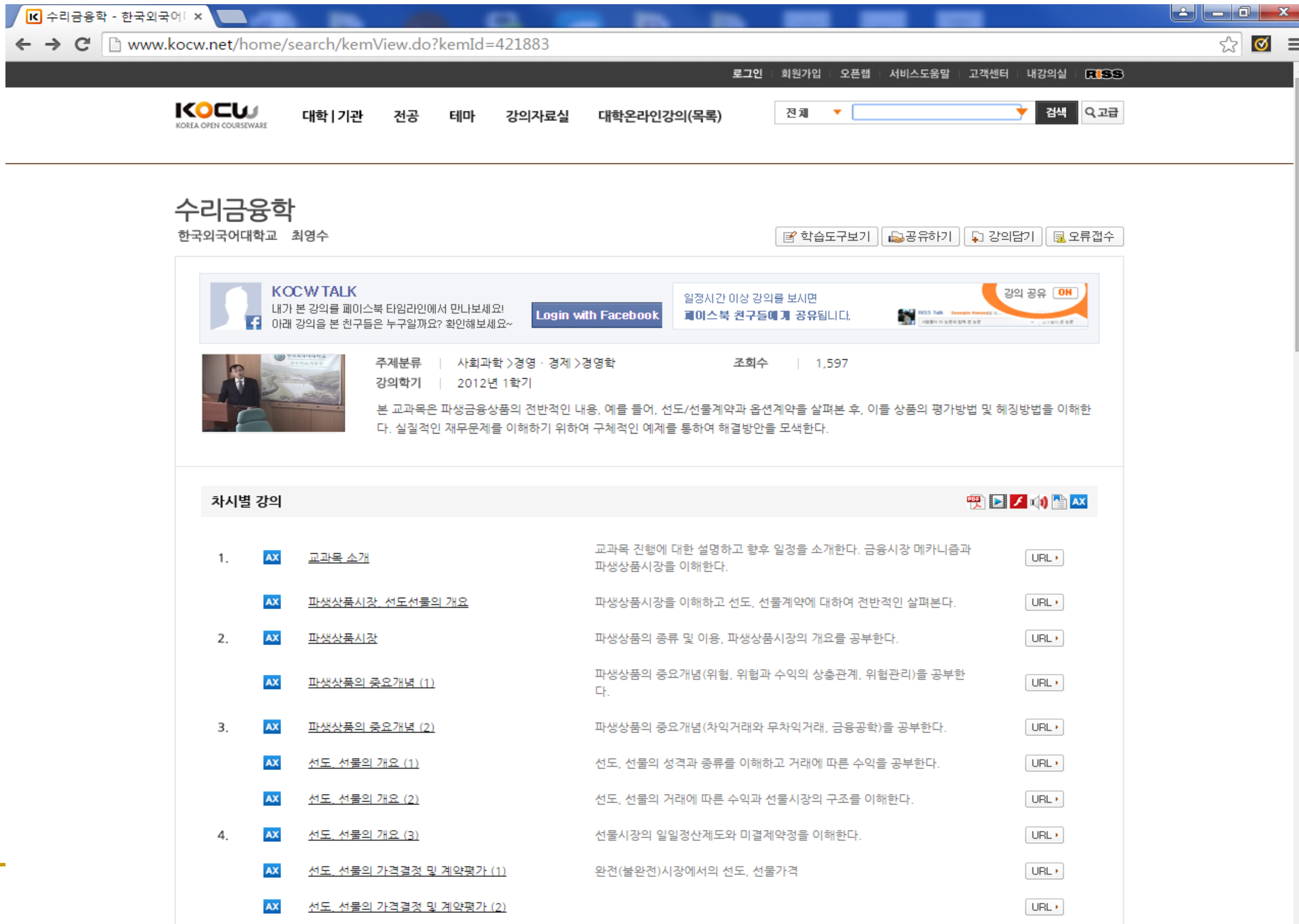
(故曰 天下之難事必作於易 天下之大事必作於細)

'어려운 것을 도모하려면 쉬운 것부터 하고 큰 것은 사소한 것에서부터 시작한다' (故曰 圖難於其易也 爲大於其細也)

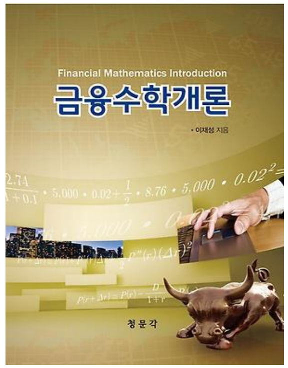
[금융공학 학습자료1] COUSERA www.cousera.org

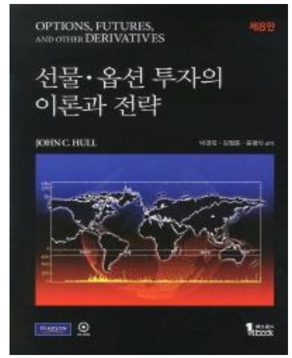


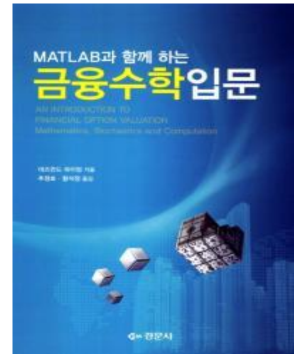
[금융공학 학습자료2] WWW.KOCW.NET

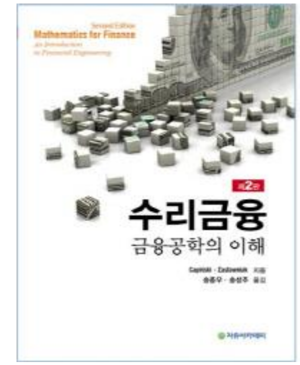


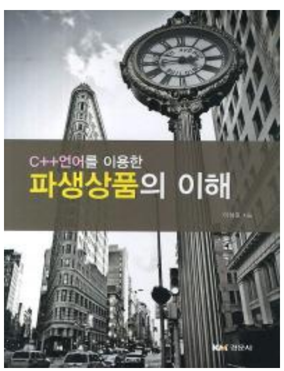
[금융공학 학습자료3] 금융공학 국내 추천서적

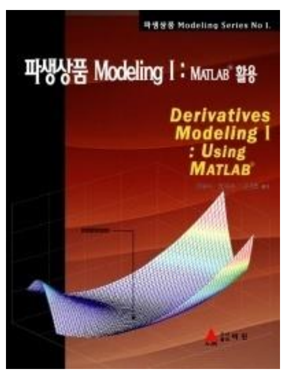


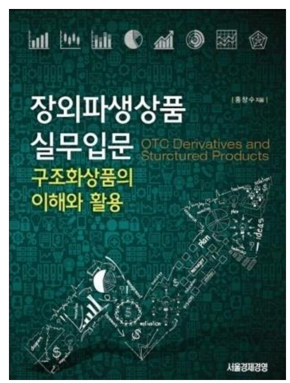


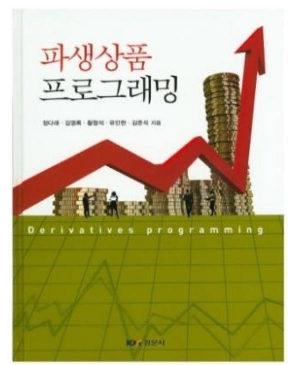


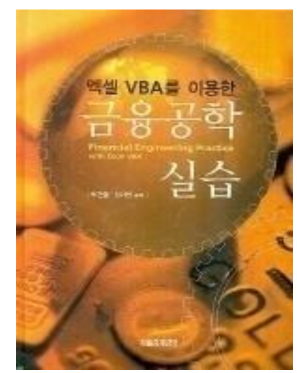












[금융공학 학습자료4] 금융공학 해외 추천서적