파생금융상품 수학의 입문

Salih N. Neftci

경북대학교 대학원 경영학과 재무전공

An Introduction to
the Mathmatics of Financial Derivatives

by Salih N. Neftci

홍 창 수 책임편집

http :// www.kebi.com/ ~gauss

gauss @kebi.com

< 작 성 자 >

갈대은, 김동희, 김정우, 조홍래, 홍창수

목　차

제 1 장 파생금융상품

1. 서 론

이 책에서는 파생금융상품의 가격결정에 이용되는 계량적 방법들을 소개하고 있다. 즉, 파생금융상품 가격결정의 배경을 이루고 있는 수학적 이론에 관하여 설명하고 있다. 그러면서도 이 책은, 현재 금융시장에서 실제로 이용하고 있는 수학적 개념들에 관하여 알기 쉽고 경험적인 방법으로 개괄하고 있다.

그와 같은 내용을 다루기 위해서는 먼저 자산가격결정의 원리에 관한 논의가 필요할 것이다. 이 책은 여러 부분에서, 공식적으로 이용되고 있는 자산가격결정방법에 관한 이해를 도울 수 있도록 풍부한 예제를 제시하고 있다. 따라서, 먼저 앞으로 논의의 대상이 될 여러 가지 증권유형에 관하여 짧게나마 짚고 넘어가야 할 필요가 있다. 본 장에서는 이와 같은 증권들에 대하여 간략하게 논의하고 있다. 파생상품론에 관하여 좀 더 심도있는 지식을 필요로 하는 독자들은 이 분야에 관한 다른 책들을 참고하면 된다. Hull(1993)의 책은 파생상품 분야에서 훌륭한 교과서라 할 수 있다[1]. Jarrow와 Turnbull(1996)의 책에서는 Hull과는 다른 접근법을 시도하고 있다[2]. 좀 더 고급과정의 내용을 담은 책으로는 Ingersoll(1987)과 Duffie(1996)의 책을 꼽을 수 있으며, 이들은 기초이론에 많은 비중을 두고 있다[3]. Das(1994)의 책은 파생상품거래와 연관된 실제적인 문제들에 관하여 잘 정리하고 있다[4].

본 장에서는, 먼저 두 가지 기본적인 파생금융상품, 즉 옵션(options)과 선도, 선물(forwards or futures)에 관한 내용을 다루게 된다. 그 다음엔, 이들 보다 더 복잡한 형태를 지니는 스왑(swaps)에 대하여 소개할 것이다. 마지막으로, 스왑을 여러 개의 기본적인 선물 및 옵션으로 분해하여 이해할 수 있음을 설명할 것이다. 스왑을 기본 요인들로 분해하는 것은 매우 실제적인 작업이다. 즉, 선물 및 옵션의 가격을 적절히 평가할 수 있다면, 그것으로 어떤 형태의 스왑이라도 구성할 수 있

---

1) John Hull, *Options, Futures and Other Derivative Securities*, Prentice Hall, 1993(4th ed. in 2000).

2) R. J. Jarrow, and S. Turnbull, *Derivative Securities*, South Western, Cincinnati, 1996.

3) J. Ingersoll, *Theory of Financial Decision Making*, Rosman and Littlefield, 1987.
Darrell Duffie, *Dynamic Asset Pricing*, 2nd. ed., Princeton University Press, 1996.

4) Satyajit Das, *Swap and Derivative Financing*, Revised Ed. Probus, 1994.

으며, 또한 그것의 가격을 결정할 수 있다는 것이다. 본 장에서는 이 책 전반에 걸쳐 사용되는 공식적인 기호에 관해서도 언급하고 있다.

2. 정 의

전문가들은 "파생상품이란 주식, 채권, 통화(currencies) 및 상품(commodities)과 같은 현물시장상품으로부터 파생된 가치를 지니는 금융계약"으로 정의하고 있다[5]. 반면에, 학자들은 그 보다 더 엄밀한 의미를 부여하여, 파생상품을 다음과 같이 정의하고 있다.

정 의 : 어떤 금융계약의 가치가, 만기일 T에, 현물기초자산의 T 시점에서의 시장가격에 의하여 정확하게(exactly) 결정된다면, 이것을 ***파생증권***(*derivative security*) 또는 ***조건부 청구권***(*contingent claim*)이라고 한다[6].

즉, 파생상품계약의 만기시점을 T로 표시할 때, 만기시점에서 파생자산의 가격 $F(T)$는 기초자산의 가치 S_T에 의하여 완전하게(completely) 결정된다. 만기가 지나면 그 파생증권은 소멸하게 된다. 파생자산이 이렇게 단순한 특성을 가진 다는 사실은 이들의 가치평가시에 상당히 중요한 역할을 하게 된다.

이후로 $F(t)$와 $F(S_t, t)$는, t 시점에서 기초자산 S_t에 대하여 발행된 파생상품의 가격을 나타내는 기호로 혼용하게 될 것이다. 때때로 파생금융자산에서 어떤 현금흐름(payout) d_t가 발생한다고 가정할 수도 있다. 또, 어떤 경우에는 이 현금흐름이 0이 될 수도 있다. T는 항상 만기일을 나타내는 것으로 보면 된다.

3. 파생상품의 유형

파생증권들은 일반적으로 다음과 같이 세 개의 그룹으로 분류할 수 있다.

① 선물 및 선도 (Futures and forwards)

---

5) "Derivative securities are financial contracts that 'derive' their value from the *cash market* instruments such as stocks, bonds, currencies and commodities." (Klein and Lederman(1994), pp. 2-3 참조)

6) "A financial contract is a *derivative security*, or a *contingent claim* if ist value at expiration date T is determined exactly by the market price of the underlying cash instrument at time T." (Ingersoll, 1987)

② 옵션 (Options)

③ 스왑 (Swaps)

선도와 옵션은 기본적인 뼈대(*basic building blocks*)로 생각할 수 있다. 스왑이나 다른 복잡한 형태의 파생상품들은, 결국에는 기본이 되는 선도 및 옵션 등으로 분해될 수 있기 때문에, 일종의 혼성증권(hybrid securities)으로 보면 된다.

여기에서, S_t를 어떤 현물상품에 대한 가격이라 하고, 이것을 기초증권(*underlying security*)이라 부르기로 하자.

이들 기초자산은 다섯 가지의 주요 그룹으로 분류할 수 있다.

① 주식 (Stocks) : 재화(goods)나 서비스(services)를 생산함으로써 발생하는 실제 수익("real" returns)에 대한 청구권을 의미한다.

② 통화 (Currencies) : 정부 또는 은행의 부채(liabilities)로서, 실물자산에 대한 직접적인 청구권을 의미하지는 않는다.

③ 금리 (Interest rates) : 금리자체는 실제 자산이 아니라 명목자산이다. *명목자산*(*notional* asset)은 미래에 금리가 움직일 방향에 대하여 포지션을 취할 수 있도록 고안된 일종의 장치라 볼 수 있다.

이와 같은 종류의 상품으로는, 미재무성에서 발행하는 장기채권(bonds), 중기채권(notes), 단기채권(bills) 등에 대한 파생상품이 있으며, 이것들은 정부의 차입수단(debt instruments)이 된다[7]. 이들 상품들은, 정부가 정해진 날짜에 특정 금액을 지급하기로 하는 일종의 약속이라 볼 수 있다. 이들 장기채권, 중기채권, 단기채권에 대한 파생상품포지션을 보유하게 되면, 다양한 방향으로 움직이는 금리에 대하여 포지션을 취한 것과 같아진다. 그러나, 이와 같은 파생상품들은 대부분의 경우 *명목자산*(*notionals*)이 아니라 실질자산이며, 기초자산을 실제로 인도하게 될 수도 있다[8]. 금리파생상품의 경우, 당사자가 금리자체를 인도할 수는 없다는 것을 주의하여야 한다. 이들은 현금결제(cash settlement)로 거래를 종료하게 된다.

④ 지수 (Indexes) : S&P 500과 FT-SE 100은 대표적인 주가지수(stock index)라고 할 수 있다. CRB 상품지수(commodity index)는 상품가격으로 구성된 지수이다. 이것들 역시, 실물자산은 아니다. 그러나, 명목금액에 대하여 파생상품계

---

7) 역자주 : 이후로 미재무성장기채는 T-bonds, 중기채는 T-notes, 단기채는 T-bills로 표기할 것이다.

8) 파리(Paris)에서는 명목적인 프랑스 정부채권("notional" French government bonds)에 대하여 상당한 금 액의 파생상품이 거래되고 있다.

약이 성립될 수 있고, 기초지수의 움직이는 방향에 대하여 포지션을 취할 수도 있다.

⑤ 상품 (Commodities) : 주요 상품으로는 다음과 같은 종류를 들 수 있다.

- 분말류 (Soft commodities) : 코코아, 커피, 설탕(sugar)
- 곡물(Grains) 및 종자용 씨앗(oilseeds) : 보리(barley), 옥수수(corn), 면화(cotton), 귀리(oats), 야자유(palm oil), 감자(potato), 대두(soybean), 가을밀(winter wheat), 봄밀(spring wheat) 등
- 금속류 (Metals) : 구리(copper), 니켈(nickel), 주석(tin)
- 귀금속류 (Precious metals) : 금, 플라티늄(platinum), 은
- 가축류 (Livestock) : 생우(cattle), 생돈(hogs), 돼지고기(pork bellies) 등
- 에너지류 (Energy) : 원유(crude oil), 연료용 기름(fuel oil) 등

이와 같은 기초상품군은 금융자산(financial assets)이라 하지 않고, 상품(goods)으로 보아야 한다. 즉, 이들 상품들은 대부분의 경우 물리적인(physically) 매입 및 저장활동을 수반하게 된다.

3.1 현물매입보유시장

일부 파생상품은 *현물매입보유시장*(*cash-and-carry markets*)의 상품에 대해서도 거래가 이루어 진다. 금, 은, 통화(currencies), T-bonds 등은 현물매입보유시장의 상품으로 분류할 수 있다.

이러한 종류의 시장에서는, 무위험이자율로 *차입*(*borrow*)(실질적으로 보유하고 있는 유형의 기초자산을 담보로 하여)한 후, 해당 상품을 *매입*(*buy*) 및 *저장*(*store*)하고, 특정 파생상품계약의 만기일까지 그 상품을 *보험*(*insure*)처리 하게 된다. 따라서, 이와 같은 상품에 대하여 선도 또는 선물계약을 취하면 전자와 동일한 효과를 얻을 수 있다.

예를 들어, 무위험이자율로 차입하여, T-bonds를 매입하고, 이것을 T-bonds 선물계약의 만기일까지 보유할 수도 있다. 이것은 선물계약을 매입한 후, 만기일에 기초자산을 인수하는 것과 동일하다. 통화 및, 금, 은, 오일 등에 대해서도 이와 유사한 예를 설정할 수 있다[9].

순수 현물매입보유시장(pure cash-and-carry)은 이상에서 설명한 것 이외에

9) 그러나, 원유의 경우에는, 저장과정에서 많은 비용이 들 수 있다. 환경(environment) 및 다른 요인들에 의 하여 원유를 저장하는 것이 매우 어려울 수 있기 때문이다.

또 다른 특징을 가지고 있다. 그것은, 미래에 발생하게될 기초자산에 대한 수요 및 공급에 관한 정보는 현물가격과 선물(선도)가격 간의 스프레드(spread)에 영향을 미치지 않는 다는 것이다. 따라서, 이와 같은 스프레드는 주로 무위험이자율, 저장 비용 및 보험비용 등에 의존하게 된다. 미래에 발생하게될 기초자산에 대한 수요 및 공급과 관련된 어떠한 정보에도 현물가격과 선물가격은 같은 크기로 변하게 될 것이다.

3. 2 가격발견시장

두 번째 유형의 기초자산으로는 *가격발견시장*(*price discovery*)에 속한 자산들을 꼽을 수 있다. 이러한 시장에서는 특정한 미래의 만기일이 도래할 때 까지 물리적으로 현물기초자산을 매입하거나 저장할 수 없다. 이 시장에 속한 상품들의 경우, *소멸성이 강하기 때문에*(*perishable*) 저장해 둘 수 없다거나, 파생상품이 거래되는 시점에 그에 상응하는 현물시장이 존재하지 않을 수도 있다. 한 예로 봄밀에 대한 계약을 들 수 있다. 봄밀에 대한 선물계약이 거래소에서 체결될 때, 그에 상응하는 현물시장은 아직 존재할 수가 없는 것이다.

무위험이자율로 차입한 후, 현물을 매입하고, 그것을 특정 만기일까지 저장해 두는 전략은 가격발견시장에는 적용될 수 없다. 이 시장에서는 기초상품에 대한 미래의 공급 및 수요에 관한 어떤 정보도 현물가격에 영향을 미칠 수 없기 때문이다. 그러나, 선물시장에서는 그와 같은 정보가 어떤 *영향력을 지니며*(*discovered*), 기호로도 나타낼 수 있다.

3. 3 만기일

파생자산의 가격 $F(t)$와 S_t 간의 관계는 만기일 T가 되어야 정확히(또는 결정적으로) 알 수 있다. 선도 또는 선물의 경우, 당연히

$$F(T) = S_T \quad (1)$$

가 성립할 것이라 생각할 수 있다. 즉, 만기일에는 선물가격의 가치가 해당 현물의 가치와 동일하여야 한다는 것이다.

예를 들어, 100 트로이온스[10]의 금을 인도하기로 하는 선물계약(이 계약은 거래소에서 거래되는 것임)의 가치는 이 계약의 *만기일*(*expiration date*)에 금 100

트로이온스의 실제시장가치와 다를 수 없다. 이들은 T 시점에서 동일한 값을 가진다. 따라서, 금선물의 경우 만기에 (1)식이 성립한다고 말할 수 있다.

다른 시점, 즉 $t \leq T$ 인 경우에는, $F(t)$가 S_t와 다를 수 있다. 그러나, 이 때에도 물론, S_t와 $F(t)$를 서로 연결시켜 주는 어떤 *함수(function)*를 결정할 수 있다.

4. 선도와 선물

선물과 선도는 손익선이 직선으로 나타나기 때문에 선형상품(linear instruments)이라 한다. 본 절에서는, 선도의 경우를 설명하고, 마지막에 선물과 선도의 차이점에 대하여 짧게 언급할 것이다.

정　　의 : 선도계약은 정해진 날에 약정한 *선도가격(forward price)*으로 기초자산을 매입(매도)하기로 하는 일종의 의무(obligation)이다.

만기일과 선도가격은 계약이 성립할 때 결정되어 진다. 선도계약을 매입한 경우, 이 계약을 보유하고 있는 쪽을 기초자산에 대한 *매입포지션을 보유(long)*한 것으로 본다. 만약 만기에 현물가격이 선도가격보다 더 높다면, 매입포지션으로부터 이익이 발생할 것이지만, 그렇지 않을 경우에는 손실이 발생하게 된다.

[그림 1]에는 단순매입포지션에 대한 손익선이 나타나 있다.

[그림 1] p. 4.

이 계약은 t 시점에 $F(t)$의 가격으로 매입되었다. 만기는 $t+1$ 시점에 도래한다고 가정하자. 그림에서 우상향하는 직선은 만기일에 매입자의 손익을 나타내고 있다. 이 직선의 기울기는 1 이다.

---

10) 역자주 : troy ounces ; 금형(金衡; troy)이라는 것은 금 • 은 • 보석의 무게를 다는 형량(衡量)으로서, 12 온스가 1파운드 임.

만약, S_{t+1}이 $F(t)$를 초과한다면, 이 매입포지션에서는 이익이 발생하게 된다[11]. 손익을 나타내는 직선의 기울기가 1이므로, AB는 BC와 동일하다. 따라서, $t+1$ 시점에서의 손익은 가로축으로부터 직선이 얼마나 떨어져 있는 가를 살펴보면 바로 알 수 있다.

[그림 2]는 매입의 경우와 비슷한 상황에서 매도포지션(short position)의 손익을 도시하고 있다.

[그림 2] p. 5.

이와 같은 손익선은 파생상품의 원리를 이해하는데 매우 유용한 도구가 될 수 있다. 그러나, 이 책에서는 이들에 관하여 짧게 언급하고 있을 뿐이다. 관심있는 독자들은 Hull(1993)을 참조하기 바란다.

4.1 선 물

선물계약과 선도계약은 서로 유사한 점을 가지고 있다. 아래에서는 이들 두 상품간의 주요한 차이점을 간략히 서술하고 있다.

선물은 공식적인 ***거래소***(*exchanges*)에서 거래된다. 거래소에서는 표준적인 계약을 설계하고, 특정 만기일을 설정해 두고 있다. 선도는 "고객주문형(custommade)"상품이며, ***장외시장***(*over-the -counter*)에서 거래된다.

선물거래는 거래청산소(exchange clearing houses)를 통하여 청산되며, 채무불이행위험(default risk)을 줄이기 위하여 복잡한 형태의 시스템을 설계해 두고 있다.

마지막으로, 선물은 ***일일정산***(*marked to market*)된다. 즉, 선물계약은 매일 결제됨과 동시에 새로운 계약이 성립되는 것으로 볼 수 있다. 일일정산에 따른 그날 동안의 손익은 계약보유자의 계정에 기록되게 된다.

---

11) 이 계약의 만기는 t+1 시점에 도래하기 때문에, S_{t+1}은 $F(t+1)$과 동일하다는 것에 주의할 것.

5. 옵 션

옵션은 자산가격결정에 있어서 기본축이 되는 두 번째 요소이다. 이후의 장에서 확률미적분(stochastic calculus)의 개념을 소개할 때, 표준 콜옵션의 가격결정 모형을 그 주된 예로서 자주 사용하게 될 것이다.

선도 및 선물계약에서 계약보유자는 만기에 기초자산을 인도 또는 인수할 *의무*(*obligate*)를 가진다. 그러나, 옵션계약에서 계약보유자는 기초자산을 매입 또는 매도할 *권리*(*right*)는 가지지만 그렇게 해야할 의무는 없다.

옵션에는 두 가지 종류가 있다.

정 의 : 증권 S_t에 대하여 발행된 유럽형 콜옵션은 미리 정해진 *행사가격*(*strike price*) K로 그 증권을 매입할 수 있는 *권리*(*right*)이다. 이러한 권리는 옵션의 *만기일*(*expiration date*) T시점에서 행사될 수 있다. *프리미엄*(*premium*) C_t를 지급하면 이 콜옵션을 매입할 수 있다.

유럽형 풋옵션도 원리는 이와 비슷하지만, 풋옵션의 경우 계약보유자가 만기일에 특정 가격으로 자산을 *매도*(*sell*)할 수 있는 권리를 가진다는 점에서 약간의 차이가 있다. 미국형 옵션(American options)은 유럽형 옵션과는 달리, 발행시점과 만기 사이의 기간에 어느 때든지 행사될 수 있다.

거래자들과 투자자들이 콜옵션의 무재정가격(arbitrage-free price) C_t를 구하고자 하는데는 몇 가지 이유가 있다. 시점 t에 처음으로 옵션이 *발행*되기(*written*) 전에는 C_t의 가격을 알 수 없다. 따라서, 거래자는 옵션이 발행될 때 이것의 가격이 얼마가 될 것인지에 관한 추측을 하게 된다. 거래소에서 거래되는 옵션이라면, 거래가 시작됨과 동시에 이 옵션의 시장가격이 표시될 것이다. 장외에서 거래되는 옵션이라 하더라도, 활발한 거래가 일어날 수 있고, 가격이 형성될 수 있다.

그러나, 옵션은 거래가 드물게 발생할 수도 있다. 따라서, 이러한 위험을 평가하기 위하여 거래자는 매일의 C_t를 알고자 할 것이다. 또, 다른 거래자의 경우에는 시장이 콜옵션의 가격을 적절히 평가하지 못하고 있을때, 실제로 얼마 만큼 가격이 왜곡되어 있는가를 알고 싶어할 것이다. 이와 같은 경우에도, C_t의 무재정가격을 결정하여야 한다.

5. 1. 기 호

콜옵션의 가격을 결정하는 가장 바람직한 방법은, C_t의 ***폐쇄형 공식*** (*closed-form formula*)을 구하는 것이다. 그와 같은 식은 C_t를 기초자산가격 및 그와 관련된 모수들의 함수로 표현한다.

C_t를 나타내는 식에 관하여, t 시점에서 알 수 있는 것은, 오로지 만기 T시점에서 옵션의 가치가 종결된다는 사실이다. 실제로,

- 커미션 및 수수료가 없고
- S_t와 C_t에 대한 호가스프레드(bid-ask spread)가 0 이라면,

만기일에 C_T가 가질 수 있는 값은 단지 두 가지 뿐이다.

옵션이 ***외가격***(*out-of-money*)으로 종결된다면, 다시 말해서 만기에 기초자산가격이

$$S_T < K \tag{2}$$

처럼 된다면, 옵션의 가치는 0이 된다. 이러한 경우, 옵션을 행사하는 대신 시장에서 기초자산을 S_T의 가격으로 매입할 수 있으며, 그 값은 행사가격 K 보다 적게 된다. 따라서, 옵션을 보유하고 있는 그 누구도, K의 가격으로 기초자산을 매입할 수 있는 권리를 행사하지 않을 것이다. 따라서,

식 (3)과 같은 결과를 얻게 된다.

$$S_T < K \Rightarrow C_T = 0 \tag{3}$$

반대로, 옵션이 ***내가격***(*in-the-money*)으로 종결된다면, 즉 T 시점에서

$$S_T > K \tag{4}$$

가 된다면, 옵션은 어느 정도의 가치를 가지게 되고, 따라서 옵션보유자가 자신이 보유하고 있는 옵션을 행사할 것은 분명하다. 옵션을 행사하게 되면, K의 가격으로 기초증권을 매입하여, 그것을 다시 더 높은 가격 S_T로 매도할 수 있다. 수수료(commissions)나 호가스프레드(bid-ask spreads)가 없기 때문에, 순이익은 $S_T - K$ 가 될 것이다. 이것을 이미 알고 있는 시장참가자들은 옵션의 가치를 $S_T - K$로 볼 것이며, 따라서

$$S_T > K \Rightarrow C_T = S_T - K \tag{5}$$

가 된다. 위에서 언급한 두 가지 경우를 하나의 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$C_T = \max[S_T - K, 0] \qquad (6)$$

이 식이 의미하는 바는, 괄호안의 두 값 가운데 큰 값을 C_T가 가지게 된다는 것을 의미한다. 이후로는 이 표기법을 자주 이용하게 될 것이다. 식 (6)은 S_T와 C_T 간의 관계를 나타내는 것으로, 그래프로도 쉽게 표현할 수 있다. [그림 3]은 이러한 관계를 나타내고 있다. $S_T \leq K$인 경우 C_T의 값은 0이라는 사실에 주의하여야 한다. $K < S_T$인 S_T의 경우에는 C_T가 S_T와 같은 비율로 증가한다. 이 영역에서, 식 (6)의 그래프는 기울기 1을 가지는 직선으로 나타난다. 따라서, 옵션은 비선형성을 가지는 상품(nonlinear instruments)이라 할 수 있다. [그림 4]에서는 만기 이전의 여러 시점에서 콜옵션의 가치를 도시하고 있다. $t < T$인 시점에서의 함수값은 연속적인 부드러운 곡선으로 나타낼 수 있다. 단지 만기시에, 옵션의 가치는 행사가격에서 꺽여진 비선형 함수가 된다.

[그림 3] [그림 4]

6. 스　　왑

스왑은 더욱 복잡한 형태의 상품이다. 그러면서도, 가장 일반적인 파생상품유형에 속한다. 우리가 스왑에 관심을 가지는 것은 단지 그러한 이유 때문만은 아니다. 스왑을 선도와 옵션으로 *분해*(*decompose*)하는 것은 스왑의 가격을 결정하는 기본적 방법이다. 이것은 또한, 선도 및 옵션이 기본적인 뼈대를 형성하는 상품이라는 것을 의미하며, 뒤에서 이들에 관하여 자세하게 다루어야 할 이유가 된다.

일반적인 스왑의 정의는 다음과 같다.

정　　의 : 스왑이란 다양한 종류의 통화, 금리, 그 외 다른 금융자산으로 표현되는 현금흐름을 동시에 매도하고 매입하는 계약이다.

스왑에 대하여 언급하는 것도 사실상 이 책의 범위를 넘어서는 일이다. 앞에서도 언급했지만, 우리의 관심은 파생자산가격결정의 배경이 되는 수학적 지식을 경험적인 방법으로 설명하는 것이지, 파생상품자체에 관하여 논하고자 하는 것은 아니다. 따라서, 앞으로의 논의는 각 장의 요점을 설명해주는 예제에 국한시킬 것

이다.

6. 1. 단순한 형태의 금리스왑

스왑을 각각의 구성요소로 분해하는 것은 일종의 금융공학(financial engineering)이며, 또한, 파생자산의 가격을 결정하는 문제에 해당한다. 그와 같이 스왑을 분해하게 되면, 단순한 형태의 선도 및 옵션이 어떤 역할을 하는지 설명할 수 있다. 여기에서는, 금리스왑에 대해서만 자세히 설명하고자 한다. 더욱 복잡한 형태의 스왑구조에 대하여 알고 싶은 독자는 Das(1994)를 참조하면 된다[12].

간단하게 설명하자면, 두 ***당사자***(*counterparties*) *A*와 *B* 간의 금리스왑은 다음과 같은 절차에 의하여 만들어 질 수 있다 :

① 당사자 *A*는 100만$의 변동금리대출(floating-rate loan)을 필요로 한다. 당사자 *B*는 100만$의 고정금리대출(fixed-rate loan)이 필요하다. 그러나, 시장의 상황(market conditions)이라든가 다른 여러 은행과의 관계 등으로 인하여, *B*는 변동금리로 차입할 때 비교우위(comparative advantage)를 가진다[13].

② *A*와 *B*는 일단 자신이 가지는 비교우위를 이용하기로 한다. 따라서, 이들은 각각 자신들이 비교우위를 가지는 시장에서 자금을 차입하였고, 서로 금리지급액을 교환하기로 하였다.

③ 당사자 *A*는 100만$를 고정금리로 차입한다. 그 후, *A*는 당사자 *B*로부터 특정 금리를 수취하여 차입액에 대한 이자를 상환한다.

④ 당사자 *B*는 100만$를 변동금리로 차입한다. 그 후, *B*는 당사자 *A*로부터 특정 금리를 수취하여 차입액에 대한 이자를 상환한다[14].

⑤ 초기의 원금은 각각 100만$씩으로 동일하다. 따라서, 원금은 서로 교환할 필요가 없다. 이들을 ***명목원금***(*notional principals*)이라 부른다. 이자의 지급도 동일한 통화로 이루어 진다. 따라서, 당사자들은 두 가지 금리의 ***차액***(*differentials*)만을 교환하면 된다. 이와 같은 절차를 거침으로써 금리스왑이 성립된다.

이와 같은 아주 기본적인 형태의 금리스왑은 단지 이자차액을 지급하는 것으로 계약이 구성된다. 각각의 거래당사자들은 자신이 비교우위를 가지는 부문에서

---

12) 스왑의 실제 적용에 관한 다른 최근의 책으로는 Dattatreya *et al*. (1994)와 Kapner and Marshall(1992) 등이 있다.
13) 즉, *A*는 고정금리차입시 비교우위를 가진다고 볼 수 있다.
14) 예를 들어, 6개월 Libor+2 같은 경우.

자금을 차입하고, 이에 해당하는 이자액을 서로 교환한다. 각각의 거래당사자들은 결과적으로 자금조달비용을 낮추는 셈이 되고, *스왑딜러*(*swap dealer*)는 수수료 수입을 얻게 된다.

단순한 스왑계약은 이보다 더욱 단순한 선도 또는 옵션계약의 배스킷(basket)으로 언제든지 분해가능하다. 이와 같은 배스킷은 스왑을 복제(replicate)하는 결과를 얻는다. 이렇게 분해하면, 각각의 선도 및 옵션을 따로따로 평가할 수 있고, 그 값들을 이용하여 원래의 스왑이 가지는 가치를 평가할 수 있다. 기본적인 뼈대가 되는 선도계약으로 스왑을 분해할 수 있으면, 해당 스왑의 가치를 적절히 평가할 수 있다.

7. 결 론

본 장에서는, 몇 가지 기본적인 파생상품을 살펴보았다. 이 장에서 우리가 의도한 바는 두 가지이다. 첫째는, 기본적인 파생증권들을 간단히 설명함으로써, 예제에서 다루기 수월하도록 하자는 것이다. 둘째는, 파생자산가격결정시 사용되는 기호들을 살펴봄으로써, 옵션 및 선도와 같은 기본적 상품에 대한 가격결정공식을 처음으로 다루어 보고, 다음으로 그 보다 더욱 복잡한 상품들을 선도와 옵션의 배스킷으로 분해할 수 있도록 하는 것이다. 이와 같이, 단순구조상품에 대한 가격결정식은 보다 복잡한 구조의 상품을 평가하는데 이용될 수 있다.

8. 참고문헌

Hull(1993)의 책은 파생상품에 관한 훌륭한 교과서이며, 여러 모로 독특한 면을 가지고 있다. 많은 전문가들이 이 책을 매뉴얼로 이용하고 있으며, 대학원 신입생들에게는 좋은 교과서가 될 것이다. 이 책은 파생상품을 실제적이면서도 아주 조심스럽게 다루고 있다. Jarrow와 Turnbull(1996)의 책 또한 파생상품에 관한 교과서로서 손색이 없는 책이다. Duffie(1996)의 책은 동적자산가격결정이론(dynamic asset pricing theory)에 관한 좋은 지침서이다. 그러나, 이 책은 시장에서 실제로 거래되고 있는 상품들을 다루고 있지는 않다. 수학적 지식이 풍부한 전문가들이 보기에 알맞는 책이다. Das(1995)의 책은 파생상품의 실제적인 면에 중점을 두고 있다.

2장 재정거래 이론의 기초

1. 서론

오늘날 모든 파생자산의 가격결정에는 재정거래의 개념을 이용한다. 재정거래 가격결정법(arbitrage pricing methods)에서는 더욱 직접적이다. 자산가격은 재정거래 기회를 제거하는 조건에서 얻어진다. 균형가격결정법에서 재정거래 기회가 없다는 것은 일반적인 평균조건의 일부분이다. 재정거리는 서로 다른 자산에 포지션을 동시에 취함으로써 T-bill보다 높은 무위험 이익을 얻어내는 것을 의미한다. 만약 그러한 이익이 존재하면, 재정거래 기회가 있다고 말한다. 재정거래 기회는 두가지 다른 방식으로 나타날 수 있다. 첫 번째는 순현금흐름 없이 일련의 투자로 양의 이익을 얻어내는 것이다. 예를 들면, 주식을 매도하고 同주식의 콜옵션을 매도한다. 이 포트폴리오에서 기초주식에 대한 매도 포지션으로 콜옵션에 대해 매입 포지션을 취한다. 이것이 적절하게 이루어지면, 매도와 매입포지션에서의 예기치 못한 움직임은 제거될 것이며 포트폴리오는 무위험이 될 것이다. commission과 fee가 공제되면, 이러한 투자 기회는 어떠한 초과 이익도 내지 못할 것이다. 그렇지 않다면, 첫 번째 재정거래 기회가 있다고 말한다. 두 번째 재정거래 기회에서 어떤 포트폴리오는 현재는 음의 현금흐름이지만 미래에는 음이 아닌 이익을 생성할 것을 확정한다.

2. 기호(Notation)

2.1 자산가격(Asset Prices)

지수 t는 시간을 나타낸다. 옵션, 선물, 선도, 주식과 같은 증권은 S_t로 표시된 자산가격의 벡터로 나타낸다. 이는 금융시장에서의 모든 증권을 하나의 symbol로 표현한다.

$$S_t = \begin{pmatrix} S_1(t) \\ \vdots \\ S_N(t) \end{pmatrix}$$

여기에서 $S_1(t)$ 는 무위험 대출 또는 차입이다. $S_2(t)$ 는 특정 주식을 표시한다. $S_3(t)$ 는 이 주식에 기초한 콜옵션이다. $S_4(t)$ 는 대응된 풋옵션을 나타낸다. 이산시간에서 증권가격은 $S_0, S_1, \cdots, S_t, S_{t+1}, \cdots$로 표현된다. 그러나 연속시간에서 t는 zero와 무한대 사이의 어떤 특정한 값을 가정한다. 즉,

$t \in [0, \infty)$

일반적으로, 0는 시작점을 나타내고, t는 현재를 나타낸다. 만약

$t < s$ 이면

s는 미래를 나타낸다.

2.2 States of the World

벡터 W는 모든 가능한 상황(states of the world)를 나타낸다.

$$W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k \end{pmatrix}$$

여기에서 각 w_i는 일어날 수 있는 특정 결과를 나타낸다. 이러한 상황(states)은 상호 배타적이며 적어도 하나는 반드시 발생한다. 일반적으로 금융자산은 다른 상황 w_i에서 다른 가치와 다른 손익을 가질 것이다. 이 개념을 시각화하는 것은 어렵다. 거래자의 시각에서 단지 관심있는 시간은 "다음" 순간이다. 분명히 증권 각격은 변한다 하지만 어떻게 변하는지 알지 못한다. 그러나 매우 작은 시간간격에서 증권 가격은 업틱(uptick)[15] 또는 다운틱(downtick)하거나 전혀 움직이지 않을 수도 있다. 그러므로 전체 세가지 가능한 상황이 있다.

2.3 Returns and Payoffs

서로 다른 상황에서 증권의 손익이 서로 다르기 때문에 w_i는 중요하다. 기호 d_{ij}는 한단위의 증권 i의 j 상황에서 지불되는 계정의 단위수라고 정의한다. 이러한 손익(payoffs)은 두가지 요소를 가질 것이다.

첫 번째 요소는 자본이득 또는 손실이다. 자산 가치는 증가하거나 감소한다. 자

15) 역자주 : 업틱(uptick)이란 가격이 최소가격 변동폭만큼 증가하는 것을 말한다.

산을 "매입"한 투자자에게 가치의 증가는 자본이득을 가져오고 가치의 감소는 자본손실을 가져온다. 자산을 "매도"한 투자자는 자본이득과 손실이 반대가 될 것이다.

d_{ij} 의 두 번째 요소는 배당 또는 쿠폰이자지급과 같은 배당(payout)이다. 어떤 자산은 이러한 payouts를 가지지 않는다.

다양한 상황에서의 서로 다른 여러 자산의 존재는 여라 가능한 d_{ij} 가 존재하게 한다. 행렬이 이러한 배열을 표현하는데 사용된다.

따라서, N 개의 자산에 대해서 손익 d_{ij} 는 행렬 D 로 표현된다.

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{N1} & \cdots & d_{NK} \end{pmatrix}$$

이러한 행렬을 시각화할 수 있는 두가지 다른 방법이 있다. 행렬 D 에서 각 행을 서로 다른 상황에서의 주어진 증권의 손익을 나타낸다고 볼 수 있다. 또는 반대로, 행렬 D 를 열로 볼 수 있다. 즉, D 의 각 열은 주어진 상황에서의 서로 다른 자산의 손익을 나타낸다고 볼 수 있다.

모든 자산의 현재 가격이 음이 아니라면 D 의 i 번째 행을 S_i 로 나누어서 다른 상황에서의 전체 수익(returns)을 얻는다.

2.4 Protfolio

포트폴리오는 자산의 특정 조합이다. 포트폴리오를 형성하기 위해 각 자산에 대한 포지션을 알 필요가 있다. 기호 θ_i 는 i 번째 자산에 대한 순투자(commitment)을 나타낸다. $\{\theta_i, i = 1, \cdots, N\}$는 포트폴리오를 명기한다.

양의 θ_i 는 그 자산에 대한 매입포지션을 나타내고, 반면 음의 θ_i 는 매도포지션을 의미한다. 만약 자산이 그 포트폴리옹 포함되지 않는다면 대응되는 θ_i 는 zero이다.

만약 포트폴리오가 모든 상황에서 같은 손익을 보인다면 그 가치는 정확하게 알 수 있고 포트폴리오는 무위험이다.

3. A Basic Example of Asset Pricing

읽을거리 1

금융수학

최형인, 구혜진(서울대학교)

1. 차익거래가격 결정이론 (Arbitrage Pricing Theory)

금융수학을 소개하기에 앞서 다음과 같은 퀴즈를 생각해 보자.
퀴즈 : 지금 어느 회사의 주식 값이 10,000원이라고 해보자. 그런데, 한달 후에는 주가가 16,000원이 되거나 또는 8,000원이 되는 두 가지 가능성밖에 없다고 하고 그 확률이 반반씩이라고 하자. 한달 후에12,000원으로 이 회사의 주식을 살 수 있는 권리의 가치를 얼마로 계산하는 것이 타당한가?
이 상황은 물론 현실에 비해 지나치게 단순화되어 있지만, 차익거래 가격결정 이론을 이해하는 좋은 모델로 생각해 볼만하다. 그리고 이론적 설명을 위하여 거래비용은 없고 이자율도 0%이고 또 얼마든지 주식을 사거나 팔 수 있고(대주), 은행에서 돈도 얼마든지 빌릴 수 있다고 하자. 우선 한달 후 주가가16,000원이 되면 4,000원의 이익을 볼 수 있고 만약주가가 8,000원이 되었다면 권리를 행사하지 않으면 되니까 손해를 볼 위험이 없게 된다. 따라서 이익을 볼 가능성은 있고, 손해를 볼 가능성이 없는 이 권리를 무상으로 받을 수 있다면 누구나 이 권리를 갖고 싶어할 것이기 때문에 이 권리는 확실히 어떤 경제적 가치(economic value)를 가지고 있다. 이러한 권리를 옵션이라 부르는데, 아래에서는 옵션을 현재 사는 사람과 파는 사람 양측에 부당한 이익이나 손해를 입히지 않는 공정한 가격이 무엇인지를 결정하는 방법을 설명하고 있다. 이러한 공정한 방법을 차익거래가격 결정이론이라 부른다. 먼저, 주가가 16,000원으로 올랐을 경우를 가정하자. 이때는16,000원 짜리 주식을 12,000원에 사서 곧바로 팔면 4,000원의 이익을 볼 수 있다. 반대로 주가가 8,000원으로 떨어졌을 경우에는 이 옵션을 행사하지 않으면 되므로 적어도 손해는 보지 않는다 .각 경우가 발생한 확률이 0.5이므로 이익의 기대치는 4,000×0.5 = 2,000원 이다. 만약 이 옵션이 2,000원으로 거래된다고 하자. 그런데 당신이 2,000원을 주고 지금 이 옵션을 산다면 당신은 바보 같은 짓을 한 것이 된다. 왜냐하면, 당신이 2,000원으로 이 옵션을사는 대신에 이를 2,000원에 팔고, 3,000원을 더 빌려서 5,000원으로 주식 1over 2주를 사면 어떻게 될까를 따져보자.

만약 한달 후 주가가 오른다면, 당신의 주식의 가치는 $\frac{1}{2} \times 16,000 = 8,000$원이 된다. 이를 팔아 은행에서 빌린 돈 3,000원을 갚으면5,000원이 남는다. 여기서 당신이 판 옵션은 이제 그 가치가 4,000원이 되었으므로 옵션의 소유자에게 4,000원을 부담하고 나면 순이익 1,000원이 남게 된다. 만약 주가가 떨어지는 경우 당신이 판 옵션은 그 가치가 0이 되므로, 당신은 은행에서 빌린 돈 3,000원만 갚으면 된다. 그런데 당신이 소유한 주식의 가치는 $\frac{1}{2} \times 8,000 = 4,000$원 이므로 이 경우에도 1,000원의 이익이 남게 된다. 따라서 2,000원으로 이 권리가 거래되면 이 권리를 판 사람은 어느 경우에도 1,000원의 무위험이익(riskless profit)을 보게 되고, 이러한 논증방식은 이 권리를 사는 사람입장에서도 똑같이 적용된다. 따라서 이 옵션은 1,000원으로 거래되는 것이 마땅하다. 위와 같이 모든 경우에 사는 사람 또는 파는 사람 누구에게도 무위험 이익이 발생하지 않는 가격을 정하는 방법이 Arbitrage Pricing Theory이다.

위의 논증 방식을 수학적으로 정리해보자. 우선 현재의 주가를 S_0, 한달 후의 주가를 S_1이라 하면 $S_0 = 10,000$이고 S_1은 값을 각기 16,000 또는 8,000으로 갖는 확률변수(random variable)이다. 즉 사건 공간을 $\Omega = \{w_1, w_2\}$ 이라 하면, S_1은 $S_1(w_1) = 16,000$, $S_1(w_2) = 8,000$이 되고 그 확률을 P라 하면 $P(w_1) = 0.5$, $P(w_2) = 0.5$이다. 옵션의 가치 또한 확률 변수 X로 표시할 수 있는데 $X = (S_1 - K)^+$ 이 되며, 여기서 K = 12,000이다. 여기서 $X(w_1) = 4,000 \backslash X(w_2) = 0$ 이 된다. 확률 변수X의 주어진 확률 P에 대한 기대값은 $E_P[X] = (16,000 - 12,000) \times 0.5 = 2,000$원인데 이것이 이 옵션의 가격이 아닌 것은 위에서 밝혔다. 실제로 새로운 확률 Q를 도입하여 S_1이 Q에 대해 Martingale이 되게 하는 확률을 찾으면 $Q(w_1) = 0.25$,

$Q(w_2) = 0.75$가 되는데 (즉, 16,000×0.25 + 8,000×0.75 =10,000), 이 확률 Q를위험중립측도(Risk neutral probability measure)또는Martingale measure라 부른다. X의 Q에 대한 기대값은 $E_Q[X] = 4,000 \times 0.25 = 1,000$원이 되며, 이렇게 가격을 결정하는 것을 위험중립가격결정원리(Risk neutral valuation principle) 이라 한다.

2. 연속모델의 위험중립가격결정원리(Risk neutral valuation principle)

위의 예는 위험중립가격결정 이론을 잘 설명하고 있지만 실제 상황에 적용하기에는 너무 단순하다. 이제 실제의 상황에 가까운 모델을 생각해 보자. 주가의 변동은 물론 간단히 모델 할 수는 없지만 미국의 경우 오랜 통계테스트를 거쳐 주가 S_t는 다음의 확률미분방정식(stochastic differential equation) $dS_t = \mu S_{tdt} + \sigma S_{tdB_t}$ 으로 근사 될 수 있다고 알려져 있다. 여기서 단기간에는 와 mu sigma 는 상수로 가정할 수 있다. 그리고 여기서 이자율을 상수 r이라 하자. 확률론의 유명한 정리인 Girsanov 정리를 사용하면 위의 확률 미분방정식의 drift 항을 바꿀 수 있다. 즉 새로운 측도(measure) Q를 도입하면 위의 확률 방정식은 $dS_t = rS_{tdt} + \sigma S_{td}\widetilde{W}_t$로 바뀌게 된다. 여기서 $\widetilde{W}_t$는 Q에 대한 브라운운동(Brownian motion)이다. 시간T에서의 콜옵션 X는 $X = (S_{T-\backslash K})^+$ 로 표시되는데, 여기서 K는 행사가격, 즉 위의 퀴즈의 경우 12,000에 해당한다. 위와 같은 Arbitrage Pricing Theory를 적용하면 시간t=0에서의 콜옵션 가격은 $e^{-rT}E_Q[X]$ 로 표시되게 된다.

3. Black-Scholes 공식

일반적으로 시간 t에서 주가 S_t가 x일 때 콜옵션의 가격을 C(t, x)라 하면 $C(t,x) = e^{-r(T-t)}E_Q[X|S_t = x]$ 로 표시되는데 $C(t,x)$는 편미분방정식 $\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0$을 만족하는데, 이편미분방정식이 바로 유명한 Black-Scholes 편미분방정식이다.

이방정식은 시간이 거꾸로 흐르는 포물형 방정식이지만 콜옵션의초기값 $C(T,S) = (S-K)^+$이 시간 t=T에서 주어지므로, 실제로는 정상적인(well-posed) 포물형 방정식이다. 콜옵션의 가격은 이 포물형 방정식의 초기치 문제를 풀든가 아니면 위의 $C(t,x) = e^{-r(T-t)}E_Q[X|S_t = x]$의 식으로 부터 구할 수 있는데 그 결과는 다음과 같다.

$$C(t,S) = SN(d_1) - Ke^{r(T-t)}N(d_2).$$

여기서, $N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{x^2}{2dx}}$

$$d_1 = \frac{\log S/K + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

위의 모델을 Black-Scholes모델이라 하고 위의 가격결정공식을 Black-Scholes 공식이라 부르는데 Scholes와 Merton은 이 공로로 1997년 노벨 경제학상을 수상하였다.(Black은 작고하였음) 위의 모델은 실제로 옵션 거래에 많이 사용되고 있으며, 파생금융 상품 거래의 기본이 되고 있다. 그러나 많은 모델이 그러한 것처럼 실제로는 현실과 맞지 않는 가정을 많이 가지고 있다. 우선 거래비용이 없다는 것이 매우 비현실적인 가정이고, 또 얼마든지 돈을 빌릴 수 있다는 가정도 현실에서는 맞지 않고, 또 무한정으로 주식을 사거나(long position), 대주(short sale) 할 수 있다는 가정도 현실적이지 않다. 또한 여기서는 언급하지 않았지만, 연속적으로 동적 헤지(dynamic hedging)를 해야한다는 것도 비현실적이다. 또한 공식 자체에서도 volatility sigma`의 결정이 가장 중요한데 이것을 어떻게 산정 하느냐에 따라 그 값이 많이 달라지게 된다.

4. 수학의 역할

위의 Black-Scholes 모델을 현실에 더 근접하게바꾸게 되면 당장 고도의 수학적 문제가 나타나게 된다. 예를 들어 거래세 문제를 보자. 이 거래세를가장 간단히 모델하면 거래세가 거래액에 비례하는 것인데(즉 한국의 주식 시장에서는 사고 파는 거래세가 거래액의 1.5%, 선물은 이보다 낮음.) 이 거래세비율을 k라 하고 이것을 모델에포함시켜컨트롤 이론을사용하면다음과같은 Hamilton-Jacobi-Bellman 식 $\min\left(-\left(\frac{\partial V}{\partial y} - (1+k)S\frac{\partial V}{\partial B}\right),\right.$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial y} - (1-k)S\frac{\partial V}{\partial B}, -\left(\frac{\partial V}{\partial S} + rB\frac{\partial V}{\partial B} + \mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\right) = 0$$

을 얻을 수 있다. 이 편미분방정식의 해는 Fields메달수상자인 P.L. Lions와 M. Crandall의 viscosity solution 기법으로 표현되는데 이러한 분석은 옵션가격결정문제인 동시에 깊은 이론과 고도의 방법론을 필요로 하는 중요한 수학문제인 것이다. 이외에도 무수히 많은 금융의 문제는 본질적으로 수학의 문제이며 미국, 영국 등 선진국에서는 고도로 발전된 수학에 기초한 금융수학이 확립되어 활발한 연구가 진행 중이다. 특히 새로운 금융상품의 개발이나 과거자료의 모델화에서 수학적 방법에 크게 의존하고 있으며, 점점 더 많은 수학자가 금융시장으로 진출하여 활발한 연구를 하고 있다. 얼마 전 SK증권과 미국 J.P.Morgan사와의 금융계약에 대한 분쟁은 우리나라 금융산업의 수준을 단적으로 보여주는데, SK 증권은 계약된 파생금융상품의 구조와 초기 가격설정에 대한 초보적 이해도 없었다고 보여진다. 국제통화기금(IMF) 체제하에서 한국경제는 일본류의 실물위주에서 미국·영국과 같은 금융중심 체제로 급속도로 전환하고 있다. 금융분야에는 정책, 회계, 기업금융 등 무수히 많은 분야가 있지만, 그 중에서 파생금융 상품 분야와 Risk관리 분야는 고도의 수학을 필요로 하는 급성장하는 분야이다. 파생 금융 상품은 잘못 다루면 매우 위험이 큰 분야이지만 적절한 수학이 동원되어 Risk 관리에 충실하다면 낮은 위험으로 큰 이익을 볼 수 있다는 면에서 국제적으로 많은 관심을 끌고 있으며, 실제로 국제적 금융사는 파생 금융 상품에 대한의존도가 점점 높아지고 있는 실정이다. 파생 금융 상품은 그 본질상 고도의수학적 기법 위에서 거래가 이루어지기 때문에 수학적으로 능력이 부족한 회사나 개인은 거래관계에 있어 대단히 불리한 위치에 놓이게 되는 법이다. 우리나라에서는 이 분야의 전문가가 많지 않고 특히 수학자의 참여가 거의 없어 국제경쟁에서 크게 열세를 면하지 못하고 있는 실정이다. 실제로 우리의 금융산업 특히 파생금융상품분야는 우리의 산업 전 분야에서의 국제적 수준에 비교해 볼 때 가장 낙후된 분야라 할 수 있는데, 앞으로 이를 통해 엄청난 양의 국부가 유출될 심각한 위기에 처해 있다. 그러나 이러한 시대적 상황은 역설적으로 유능한 수학자들에게는 우리 사회를 위하여 크게 이바지 할 수 있는 기회를 제공하고 있다고 하겠다. 또한 반대로 좋은 금융수학 연구는 고도의 확률론, 편미분방정식등 순수수학의 Hard Analysis가 많이 필요한 분야이며, 실제의 계산에서는 수치해석, stochastic programming 등 응용수학의 많은 분야의 방법론을 절실히 필요로 하기 때문에 순수 및 응용수학 연구의 기름진 토양을 제공하고 있다.

제 3 장

결정론적 환경과 확률적 환경하에서의 미적분

1. Instroduction

▷ 파생자산을 다루는 수학은 시간이 연속적으로 지나간다고 가정한다. 따라서 예측할수 없는 정보는 연속적으로 나타나며 의사결정자들은 확률적으로 순간적인 변화에 직면하게 된다. 이러한 극소한 시간구간에 있는 확률변수를 다루기 위해 확률적 미적분이 필요하다.

1.1 Information Flow

금융시장에서 정보의 흐름은 standard 보다 확률적 미적분에 더 가깝다.

1.2 Modeling Random Behavior

▷새로운 미적분을 전개하는 이유

· 확률적 미적분의 장점은 복잡한 확률변수가 연속시간에서 매우 간단한 구조를 가진다는 것이다.
· 이항구조는 Δ로 표시되는 큰 구간이 필요하지 않고 극소한 구간 dt동안 실제로 좋은 근사값 을 가진다.
· 확률적 미적분의 주요 도구는 Ito Integral로써 이것은 Deterministic 미적분에서 Riemann Integral 보다 금융시장에서 더욱 유용하다.

▷확률적 미적분은 다르지만 이것을 일반적인 미적분에서 전개하는 이유

· 다른 변수에서 임의의 변화에 대한 한 변수의 반응을 계산한다. - 미분

· **임의의** (**확률적**) **증분의 합을 계산한다**. - **확률적 적분**
· **더 간단한 함수를 사용하여 임의의 함수에 가까워지게 한다**. - (**확률적**)Taylor Series Expansion(**테일러 급수**)
· **연속시간 확률변수의 동적인 행동을 모델화** - Stochatic differential equation

2. Some Tools of Standard Calculus

3. Function

3.1 Random Functions

▷ $y = f(x), \quad x \in A$

$w \in W$: **현상**(The state of the world)

함수 f**는** $x \in R$ **과** $w \in W$**에 의존한다**.

▷ $f: R \times W \to R$

또는 $y = f(x, w), \quad x \in R, w \in W$

x**가 시간을 나타낼 때**, $f(x, w_1), f(x, w_2)$**는 다른 현상에 의존한 다른 궤도** (tranjectories)**를 나타낸다**.

▷ w**가 기초적인** randomness **를 나타낸다면 함수** $f(x, w)$**는** random function **또는** stochatic process**라 한다**.

▷ Stochastic process**의** ramdomness**는 시간에서 특별한 점에서의 특이한 값보다는 궤도에 의 해 나타난다**.

3.2 Examples of Functions

3.2.1 **지수 함수**

▷ $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$

$n \to \infty$ -> e

∴ **지수함수** $f(x) = e^x$: **일반적으로 연속시간에서 자산가격을 할인하는데 사용**

▷ $\frac{dy}{dx} = e^{f(x)} \frac{df(x)}{dx}$

3.2.2 Logarithmic function

▷ $y = e^x$

-> $\log_e(y) = x$

3.2.3 Function of Bounded Variation

$0 = t_0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_n = T$

$f: [0, T] \to R$

$\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$

$V_0 = \max \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| < \infty$

V_0 : $f(\cdot)$**에서 모든 가능한 변동의 최대값**

유한하다

$[0, T]$**에서** f**의 총변동**

-> **한계변동함수는 과도하게 비정규적이지 않다.**

3.2.4 Example

▷ **연속시간에서 자산가격은 예측할수 없는 부분을 가진다.**

아무리 시간구간을 잘 잘라도 부분적으로 예측할 수 없을 것이다.

→ **자산가격의 궤도는 매우 불규칙하다.**

▷ **자산가격을 나타내는 연속시간 과정은 제한되지 않은 변동을 가지는 궤도를 그린다.**

4. Convergence and Limit

▷ Q1: deterministic 변수대신 확률적 변수가 있다면 x_n의 수렴을 다룰수 있는가?

▷ Q2: 근사의 다른 측정을 정의 할수 있기 때문에 다른 방법으로 수렴을 정의할수 있다. 이 정의들은 모두 동일한가?

4.1 Derivatives

· 미분계수는 함수의 smoothness를 다른는 방법이다.
변수의 변화율을 정의한다.
-> 자산가격의 궤도가 매우 불규칙적이라면 시간에 관한 미분계수는 존재하지 않는다.

· 한변수가 다른 변수의 변화에 어떻게 반응하는가 나타낸 것이다.
-> 기초자산의 가격변화가 주어질 때, 옵션의 시장가격이 어떻게 움직여지는가?
-> chain rule 사용

· 미분은 변화율이다.
-> $y = f(x)$

$$f_x = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta}$$

4.1.1 예: 지수함수

▷ $f(x) = A e^{rx}$

$$f_x = \frac{df(x)}{dx} = r[A e^{rx}] = rf(x)$$

$$\frac{f_x}{f(x)} = r$$: 퍼센트 변화율

4.1.2 근사 미분

▷ $f(x+\Delta) \simeq f(x) + f_x \cdot \Delta$

-> 불규칙한 함수에서는 이러한 근사가 잘 맞지 않는다.

4.1.3 높은 변동

▷ 함수가 연속이나, 작은 구간에서 극도의 변동을 가질때는 예측하기가 어려우며 미분계수의 정의도 얻지 못한다.

-> 미분 불능

4.2 Chain Rule

▷chain 효과 : 시간이 자나고 새로운 사건이 일어나고 기초자산의 가격이 변하고 이것은 파생 자산의 가격에 영향을 끼친다.

▷Definition

$$\frac{dy}{dt} = \frac{df(g(t))}{d(g(t))}\frac{dg(t)}{dt}$$

-> chain rule은 두 미분의 곱이다.

-> $g(t)$에 대한 $f(g(t))$의 미분

t에 관한 $g(t)$의 미분

▷ $f(t)$는 x에 관한 함수이고 x는 deterministic변수이다.

x_i에 대한 randomness가 없다.

▷ 만약 x_i가 random이라면 어떠하겠는가?

① chain rule을 사용할 수 있는가?

② 확률적 환경에서 chain rulw 의 변화는 어떠한가?

-> chain rule은 연속적인 확률 환경하에서는 사용될수 없다.

4.3 Integral

4.3.1 Riemann 적분

▷definition

$\max_i |t_i - t_{i-1}| \to 0$

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{t_i - t_{i+1}}{2}\right)(t_i - t_{i-1}) \to \int_0^T f(x)dx$$

4.3.2 Stieltjes Integral

▷ $df(x) = f(x+dx) - f(x)$

$df(x) \cong f_x(x)\,dx$

▷ $h(x) = g(x)f_x(x)$

-> $\int_{x_0}^{x_n} h(x)df(x)$

$df(x) = f_x(x)\,dx$

--> $\int_0^T g(s)df(s) \cong \sum_{i=1}^{n} g\left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2}\right)(f(t_i) - f(t_{i-1}))$ -Stieltjes integral

▷ $\max_i |t_i - t_{i-1}| \to 0$일 때, Riemann-Stieltjes integral 이라 한다.

-> x보다는 $f(x)$의 증분에 관한 적분일 때 유용하다.

-> 파생상품 가격은 기초자산의 가격에 의존하고 기초자산가격은 차례로 시간에 의존한다.

▷ 1. deterministic 함수에서의 적분이 확률적 환경에서도 동일한 정의가 적용되는가?

2. 확률적 환경에서 적분을 추정하기 위해 동일한 rectangle을 사용할수 있는가?

3. rectangle의 선택이 달라지지 않는가?

-> 확률적 환경하에서의 적분은 새로운 정의가 필요하다.

4.3 예제

4.4. 부분적분

▷일반적인 미적분에서 부분 적분을 사용했는데 이것은 비록 그 형태는 다르지만 확률적인 미적분에서도 유동하게 사용된다.

▷ $\int_0^T f_t(t)h(t)dt = [f(T)h(T) - f(0)h(0)] - \int_0^T h_i(t)f(t)dt$

5. partial Derivatives

▷ 콜옵션을 예로 든다.

만기까지의 시간은 콜옵션의 가격에 두가지 방향으로 영향을 끼친다.

-> 시간이 흐름에 따라 만기일은 다가오고 옵션의 잔존일은 짧아지며. 프리미엄도 낮아진다.

또한 기초자산의 가격은 변한다.

$C_t = F(S_t, t)$

$\frac{\partial F(S_t, t)}{\partial S_t} = F_s$: 시간이 고정되었을 때 기초자산 가격의 변화에 따른 효과

$\frac{\partial F(S_t, t)}{\partial t} = F_t$기초자산이 고정되었을 때, 시간의 변화에 따른 효과

5.1 예

5.2 전미분(Total Differentials)

▷시간 t에서의 콜옵션의 가격의 작은 변화를 관찰한다.

모든 변화는 dC_t로 둔다.

▷ **기초자산가격의 변화에 따라 얼마나 많이 변동하는가?**

▷ **시간이 지남에 따라 만기에 점점 가까워지는 결과 얼마나 많이 변동하는가?**

-> $df = [\frac{\partial f(S_t, t)}{\partial S_t}]dS_t + [\frac{\partial f(S_t, t)}{\partial t}]dt$

5.3 Taylor series expansion

▷ Definition

$$f(x) = f(x_0) + f_x(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f_{xx}(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} f_{xxx}(x_0)(x - x_0)^3 + \cdots$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} f^i(x_0)(x - x_0)^i$$

5.3.1

5.3.2 예: 듀레이션과 볼록성

▷ $B_t = 100e^{-r(T-t)}$ $r > 0, \ t \in [0, T]$

r: **만기수익률**

B_t : **시간** T**에서 만기가 되는 무이표 채권의 가치**

-> 1**차** Taylor series expansion

$$y_t \cong 100e^{-r(T-t_0)} + r100e^{-r(T-t_0)}(t - t_0), \quad t \in [0, T]$$

: **지수함수의 적절한 근사가 되지 않는다**. [**그림** 12]

-> 2**차** Taylor series expansion

$$B_t \cong 100e^{-r(T-t_0)} + r100e^{-r(T-t_0)}(t - t_0) + \frac{1}{2} r^2 100e^{-r(T-t_0)}(t - t_0)^2, \quad t \in [0, T]$$

: **지수함수와 가까운 곡선을 얻는다**. [**그림** 13]

-> **만기일이 가까워짐에 따라 할인 채권의 가치는 어떻게 변하는가를 보**

여준다.

- >

$$B_t \cong 100e^{-r_0(T-t)}[1-(T-t)(r-r_0)+\frac{1}{2}(T-t)^2(r-r_0)^2], \quad t\in[0,T], r>0$$

$$\frac{dB_t}{B_t} \cong -(T-t)(r-r_0)+\frac{1}{2}(T-t)^2(r-r_0)^2], \quad t\in[0,T], r>0$$

-> **첫 번째** term : **수정 듀레이션**

두번째 term : **볼록성**

5.4 Ordinary Differential Equations

: **일반적인 미적분에서 사용된다.**

▷ $dB_t = -r_t B_t dt \qquad B_0, r_1 > 0$

-> B_t**는** t**와 함께 다양하게 변하는 양이다. 즉** B_t**의 변화는** t**와** B_t**의 함수이다.**

▷ B_t**의 퍼센트 변동은** d_t **를** r_t**배한 비율이다.**

-> $\frac{dB_t}{B_t} = -r_t dt$

$$\int_0^t \frac{dB_u}{B_u} = \int_0^t - r_u du$$

$$\ln B_t - \ln B_0 = -\int_0^t r_u du$$

$$B_t = B_0 e^{-\int_0^t r_t dt} \quad (let\ B_o = 1)$$

$$\therefore B_t = e^{-\int_0^t r_u du}$$

예)

1. **단순한 방정식** :

$3x+1=x$ 의 알지 못하는 x의 해는 $-\frac{1}{2}$이다.

2. matrix 방정식 :

$Ax-b=0$ 의 알지 못하는 벡터의 해는 $A^{-1}b$이다.

3. ODE :

$\frac{dx_t}{dt}=ax_t+b$의 알지못하는 함수 x_t

$x_t=f(t)$

-> $dB_t=-r_tB_tdt$ 의 해

--> $B_t=e^{-\int_0^t r_u du}$.: 무이표 채권의 가격 함수

-> 적절한 미분방정식의 해로써 특성지워질수 있는 고정수익 증권의 가격결정함수를 나타낸 다.

4. 적분 방정식 :

$\int_0^t (ax_s+b)ds=x_t$

제 4 장 파생상품의 가격결정

1. Introduction

파생상품의 가격을 결정할 때 자산평가의 일반적 이론과 분리하는 측면이 있다. 간단한 가정하에 그것들은 몇몇 기본적인 증권의 함수로서 파생상품의 무재정가격이라고 표현할수 있다. 또한, 다른 금융시장이나 경제의 실제측면에서의 연계를 고려하지 않고 자산가격결정에 사용될수 있는 공식을 얻을수 있다.

이장에서는 그런 공식을 얻는 구체적 방법이 소개된다. 한가지 방법은 2장에서 논의 한 바 있다. 재정거래의 개념은 금융자산이 적절히 할인된 마팅게일로서 행동한다는 전제하에서 확률 측정치를 정하는데 사용될수 있다. 마팅게일 계산법은 유용하며, 내재된 기대치를 평가함으로서 무재정 가격을 쉽게 계산할수 있게한다.

이런 파생상품 가격결정 접근법을 이른바 등가 마팅게일 측정법(Method of equivalent martingale measures)이라 부른다.

두 번째 가격결정방법은 사소 더 직접적인 접근법을 취하는 재정거래를 이용한다. 첫째로 무위험 포트폴리오을 구성하고 편미분 방정식(Partial Differential Equation(이하 PDE))을 얻는다. 이 PDE는 재정거래 기회의 부족에서 유도된다. 또한, PDE는 분석적으로도 풀릴수 있으며 수치적으로도 계산될수 있다. 두가지 경우에서 파생상품의 가격결정에 관계된 문제는 기초자산의 가격 S_t에 파생상품의 가격관 관련된 $F(S_t, t)$의 함수를 찾는 것이다. 폐쇄형 공식이 가격을 결정한는데 불가능하다면 $F(S_t, t)$의 동적모형을 기술하기 위해 수치적 방법(numerical method)을 찾을수 있다. 이장은 선형·비선형 파생상품에 대해 가격결정함수 $F(S_t, t)$를 결정하는 예를 제시한다. 또한. 이러한 개념이 설명되며 편미분방정식(PDE)의 예가 주어져 있다. 이런 논의는 우리가 나중에 학습할 확률적 미적분의 기초도구로 사용될 것이다.

2. 가격결정함수(Pricing Fuctions)

파생상품의 가격을 결정하는 문제에 있어 알려지지 않은 것은 기초자산의 가격 S_t와 시간 t인, 함수 $F(S_t, t)$를 모른다는 것이다. 이상적으로, 재무분석가는 $F(S_t, t)$에 대한 폐쇄형 공식을 얻기 위해 노력할 것이다. Black-Sholes(이하 B-S)공식은 기초자산에 관한 콜옵션의 가격이 주어지며 아마도 다른 관계된 모수가 잘 알려진 경우이다. 폐쇄형공식이 존재하지 않을 경우에 분석가는 $F(S_t, t)$의 역학을 지배하는 등식을 얻으려 할 것이다. 이절에서 우리는 그러한 $F(S_t, t)$를 결정하는 예를 보여줄 것이다. 이런 논의는 새로운 수학적 도구와 그 개념을 소개할 목적이며, 그것은 파생상품 가격결정에 일반적으로 이용되는 것이다.

2.1 선도(Forwards)

현금매입보유상품의 부류를 고려해 보자. 우리는 S_t가 기초자산인 가격결정함

수 $F(S_t, t)$를 선도계약에 대해 어떻게 도출할수 있는가를 보여주려 한다. 특히, 다음과 같은 규정을 가진 선도계약을 고려한다.

● 미래의 어떤시간 T

$$t < T \tag{1}$$

F달러는 금 한 단위를 수취하는데 지불될 것이다.

● 계약은 t시점에서 이루어지지만 T시점이 되어 지급이 이루어진다.

따라서, 그것은 양 당사자(금을 인도하는 사람과 금을 인도받은 사람)에 대해 의무가 부여되는 계약이다. 어떻게 기초 모수에 관하여 t시점에서 계약의 공정한 시간가치를 부여하는 $F(S_t, t)$함수를 결정할 수 있는가? 여기서 재정거래의 개념을 사용할 수 있다. 어떤 사람이 연속복리 이자율 r_t로 빌려온 자금을 이용하여 S_t의 가격으로 t시점에 실제 상품 한단 위를 산다고 가정하면, 우선 계약기간동안 이자율(r_t)은 고정된다. 그리고, 보유비용 및 보험료가 C라고 하면, T-t 기간동안 이 상품을 보유하는 총비용은 다음과 같다.

$$e^{r_t(T-t)}S_t + (T-t)c$$

T시점에 은행에 돌려줄 원금과 이자　　　T시점에 지불된 총저장비용과 보험료

이것은 T시점에서 실제 금 한 단위를 확보하는 한가지 방법이다. 즉, 필요한 기금을 차입해서 기초상품을 매입하고 그것을 T시점까지 저장한다는 것을 말한다. 선도계약은 T시점에 금 한 단위를 확보하는 또 다른 방법이다. 누군가 T시점(모든 지불이 만기에 이루어진다는 가정하)에 금 한 단위의 인도를 위해 현재 계약을 한다. 따라서, 두 가지 거래결과는 동일하다. 이것은 둘 다 똑같은 비용이 든다는 것을 의미한다. 그렇지 않다면 재정거래기회가 존재한다는 것이다. 민첩한 투자가는 두 개의 분리된 계약 - 동시에 더 싼 금을 매입하고, 더 비싼 금을 매도하는 - 을 맺을 것이다. 수학적으로 이러한 등식이 성립한다.

$$F(S_t t) = e^{r_t(T-t)} + (T-t)c \quad (3)$$

따라서, 우리는 어떤 재정거래 기회의 탐색가능성을 이용하고 S_t, t 와 다른 모수의 함수로서 선도계약 $F(S_t, t)$ 의 가격을 나타내는 등식을 얻게된다. 사실상, 우리는 t시점에서 선도계약의 가치가 주어지는 $F(S_t, t)$ 함수를 결정하게 된다. $F(S_t, t)$ 함수에서의 논쟁거리는 S_t, t 가 변수(variables)라는 점이다. 이것은 계약 만기가 될 때까지 변화할수 있다는 것이다. 다른한편으로 c, r_t, T 는 거래기간(T-t)동안 고정된 상수로 간주 할수 있다. (3)식에서의 함수 $F(S_t, t)$ 는 S_t 에 있어 선형이라는 것을 명심하라. 따라서, 선도계약은 선형상품이라 불린다. 나중에 콜옵션에 대한 가격결정함수 $F(S_t, t)$ 를 제공하는 B-S 공식을 도출할 것 이다. 이러한 B-S공식은 S_t에 있어 비선형이 된다. 옵션과 같은 특징을 가지는 상품을 비선형 상품이라 부른다.

2.1.1 경계조건(Boundary Conditions)

“만기일이 가까워 졌다”라는 개념을 공식적으로 표현하려 한다. 극한의 개념을 이용하여

$$t \to T \quad (4)$$

즉, $$\lim_{t \mapsto T} e^{r_t(T-t)} = 1 \quad (5)$$

여기서 한가지 문제는 r_t의 존재이다. 실제로는 이것이 확률변수(random variable)이어서 마치 표준극한의 개념이 타당할수 있다. 이것을 무시하고 (3)식의 좌변에 극한을 적용하면,

$$S_t = F(S_T, T)$$

이 식에 따라, 만기에서 기초자산 가격과 선도계약의 가격이 일치하게 된다.

2.2 옵션(option)

비선형자산에 대한 가격결정함수 $F(S_t, t)$를 결정하는 것은 선도계약의 경우만큼이나 쉽지않다. 이것은 후반부에서 설명될 것이다. 여기서는 $F(S_t, t)$가 비선형상품의 경우에서 만족하는 중요 특징만을 소개한다.

C_t : 주식 S_t의 콜 옵션의 가격
r : 무위험 이자율(risk-free rate)
k : 행사가격(strike price)
T : 만기일($t < T$)

그러면 콜옵션의 가격은 다음과 같이 표현된다.

$$C_t = F(S_t, t) \tag{7}$$

옵션에 대한 가격결정함수 $F(S_t, t)$는 기본적 특징을 가질 것이다. 조건을 단순화 시킨하에 S_t는 옵션의 가격에 영향을 미치는 확률의 원천이 된다. 따라서, S_t에서 예측할수 없는 움직임이 C_t에 대해 동시에 반대 포지션을 취함으로서 상쇄될수 있다. 이 특징이 어떻게 더 명확히 될 수 있는지 보기위해 <그림 1>을 고려해 보자. 이 그림의 아래쪽은 S_t에서의 매도포지션에 대한 손익선을 보여준다. 기초자산 한 단위를 빌려와서, S_t의 가격에서 팔렸다. <그림 1>의 위쪽그림은 S_t에 대해 발행된 콜옵션의 가격 $F(S_t, t)$가 어떻게 도출됐으며 그래프화됐는지는 나중에 증명될 B-S공식에서 살펴보기로 한다. 기초자산의 가격이 S_t에 있다고 가정하자. 그것은 $F(S_t, t)$곡선에 대해 A점에 있는 것이다. 만일 주가가 dS_t만큼 증가한다면, 매도포지션은 정확히 dS_t만큼 손실이 발생할 것이다. 그러나, 콜옵션

포지션은 이익이 발생한다. 하지만, 임계점을 보라. <그림 1>에 의하여 S_t가 가 dS_t만큼 증가했을 때 콜옵션의 가격은 단지 dC_t만큼 증가할 것이다. 그리고 dC_t의 변화를 곡선의 기울기가 dS_t보다 작기 때문에 더 작게 된다.

$$dC_t < dS_{t'} \qquad (8)$$

따라서, 우리가 콜옵션을 보유하고 주식을 매도한다면, 가격증가는 순손실을 이끌 dS_t와 동일하게 된다. 그러나, 이런 이유는 손실이 제거될 수 있는 포지션의 조정으로 제안된다. A점에서 $F(S_t, t)$에 대한 접선의 기울기를 고려해보자. 이 기울기는 다음과 같이 표현된다.

$$F_s = \frac{\partial F(S_t, t)}{\partial S_t} \qquad (9)$$

그러면, S_t가 dS_t만큼 증가함에 따라, 매도포지션에 대한 총손실은 $F_s dS_t$가 될 것이다. 그러나, <그림 1>에 따라 이 총액은 dC_t에 매우 근접하게 된다. 그것은 ∂C_t로 지시된다. 만일 dS_t가 아주작은 증감의 변화분이라면, ∂C_t는 실제변화인 dC_t의 매우 좋은 근사값이 될 것이다. 결과적으로 옵션포지션에서의 이득은 매도포지션의 손실과 상쇄될 것이다. 따라서, $F(S_t, t)$와 S_t에서의 증감의 움직임은 아래의 방정식과 관련되어 있다.

$$d[F_s S_t] + d[F(S_t, t)] = g(t)$$

$g(t)$: 완전히 예측가능한 시간 함수

그러면 미분을 계산하는법을 알 수 있다면, 위의 등식은 $F(S_t, t)$에 대한 폐쇄형공식을 발견하는데 사용될수 있다. 그런 폐쇄형공식이 존재하지 않으면 수치적 방법이 사용될수 있다. 다음 정의는 이절에서 논의한 개념의 일부를 정형화한것이다.

정의 : 기초자산의 F_s단위에 반대 포지션을 취함으로 해서 C_t에서의 변화를 상쇄시키는 것을 델타 헷징(delta hedging)이라 한다. 이런 포트폴리오(portfolio)를 델타 뉴트럴(delta neutral), 모수 F_s를 델타(delta)라 한다.

dS_t가 클 때 근사값이 $\partial C_t \cong dC_t$ 가 만족하지 않음을 실현시키는 것이 중요하다. 극도의 움직임을 가지고 있을 때 헷지(hedge)는 유효하지 않게된다. 이것이 <그림2>에 나타나 있다. 만일 S_t에서의 변화가 dS_t와 같다면, 대응하는 dC_t는 손실 $-F_s dS_t$를 훨씬 초과하게 된다. 명백히, 연속시간(continuous time)이라는 가정은 자산가격결정에 있어 기본적 역할을 한다. 사실상, 기초자산에 있어 매도포지션을 극소하게 조정함으로써 옵션포지션에서의 움직임을 복제할수 있다. 포트폴리오에서 그러한 극소한 조정능력은 연속시간이라는 가정에 따라 정해진다. 앞서 살펴본것처럼, 큰 증분을 가진 그러한 근사값은 곧 나쁜값이라는 것이 알려질것이다.

3. Application : 다른 가격결정 방법

이전에 논의 하였던 편미분 방정식(partial differential equations (PDE))를 사용하는 가격결정방법을 고려해보자.

(1) 분석가는 실시간에 파생상품 $F(S_t, t)$의 현재 가격과 기초자산의 가격 S_t을 안다고 가정한다. 분석가는 기초자산의 가격변화량인 dS_t가 주어질 때, 파생의 가격변화량인 $dF(S_t, t)$를 계산하려고 한다.

(2) 3장에서 소개했던 개념이 이곳에서 유용하게 사용될수 있다. 미분의 개념은 함수에서 작은 변화분을 근사시킬수 있는 유용한 도구이다. 이러한 특별한 경우에 우리는 S_t, t에 의존하는 함수 $F(\cdot)$를 가진다. 따라서, 우리가 만일 표준적인 미적분을 사용하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$dF(S_t, t) = F_s dS_t + F_t d_t, \tag{11}$$

단, F_i는 편미분, $F_s = \dfrac{\partial F}{\partial S_t}$, $F_t = \dfrac{\partial F}{\partial t}$. (12)

$dF(S_{t,}t)$는 총변화를 나타냄.

(3). 등식(11)은 파생상품의 가격결정요소의 변화측면에서 파생상품가격변화가 주어진 $F(\cdot)$의 전미분이라 부를수 있다. 따라서, 분석가는 첫째로 dS_t의 평가치를 얻은 다음, $dF(S_{t,}t)$를 평가하기 위해 전미분의 등식을 사용할 수 있다.

등식(11)은 일단 Fs의 편미분이 사용될 수 있고, Ft는 수학적으로 계산된다. 다른한편, 알려진 $F(S_t, t)$의 함수형태가 요구된다. 그러나, 기초변수가 연속확률과정이라면 간단한 방식으로 해결할수 있는가? 이질문에 대한 해답은 'NO'이다. 그러나 새로운 확률 미적분으로 가능하다.

(4). 일단 등식(11)이 결정되어지면 다음과 같은 방식으로 파생자산 가치평가를 위한 프로그램을 완수 할 수 있다. 델타헷징과 무위험포트폴리오를 사용하여, $dF(S_{t,}t)$, dSt와 d_t사이 추가적 관계를 획득할 수 있다. 이러한 추가적 관계가 등식(11)로부터 전미분을 제거하는데 사용될 수 있다.

(5). 서로의 $F(\cdot)$ 편미분방정식을 통해 상관관계를 얻을 수 있다. 그런 방정식을 편미분방정식이라 불리며 만일 충분한 경계조건과 폐쇄형공식이 존재한다면 $F(S_t, t)$에 대해 풀릴 수 있다. 따라서 알지 못하는 함수 있는 경우 문제점이 발생한다. 이러한 논리가 편미분방정식과 그것의 해결책이 연구될만한 분야라 할수 있다.

4. 문제점.

사실상 금융시장의 자료는 결정적이지 않기에 모든 변수를 고려할 때 t는 램덤하게 될 것이다. 시간이 연속적이어서 시간경과에 따라 무수히 많은 확률변수(random variable)을 관찰하게 된다. 따라서, $F(S_t, t)$, S_t와 무위험 이자율 r_t 는 모두 연속확률과정(continuous time stochastic process)이다. 그러면 똑같은 논리를 사용하여 다음과 같은 표준적이 미적분이 도출된다.

$$dF(t) = F_s dS_t + F_r dr_t + F_t dt \quad \text{과연 가능한가?} \qquad (18)$$

이 질문에 대한 해답은 'NO'이다. 고려중인 변수가 확률과정일 때, 새로운 미적분과 다른 공식이 필요하다.

4.1 이토정리 맛보기(A First look at Ito's Lemma)

표준 미적분으로, 고려중인 변수가 결정되었다. 따라서, 다음과 같은 관계를 얻기 위해 전미분이 사용되었다.

$$dF(t) = F_s dS_t + F_r dr_t + F_t dt \qquad (19)$$

$F(\cdot)$에서 변화분은 등식(19)의 오른쪽 관계에 의해 주어진다. 그러나, 미적분의 규칙에 따라, 이 방정식은 극소한 간격동안만 유효하다. 유한한 시간의 간격에서 방정식(19)는 단지 근사값으로 유효할 것이다. 단변량 테일러 시리즈 확장(univariate Taylor series expansion)을 다시 고려해보자. $f(x)$를 $x \in R$의 무한하게 미분할 수 있는 함수라 하자. $x_0 \in R$ 근처의 $f(x)$ 테일러 시리즈 확장을 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f_x(x - x_0) + \frac{1}{2!} f_{xx}(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} f_{xxx}(x - x_0)^3 + \cdots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} f^i(x_0)(x - x_0)^i \end{aligned} \qquad (20)$$

이것을 $df(x) \simeq f(x) - f(x_0)$, $dx \simeq (x - x_0)$로 간주하고 고차항을 무시하여, 테일러 급수에 대입시키면 아래와 같다.

$$dF(t) = F_s dS_t + F_r dr_t + F_t dt$$

만약, $(dS_t)^2$, $(dr_t)^2$과 더높은 차수는 다변량 테일러확장으로부터 제외되기에 충분히 작다. 그러한 근사값 때문에, 편미분 $dS_{t,} dt, dr_t$의 더 높은 검정력은 등식

(23)식의 오른편에 나타나지 않는다. 이제 dt는 t에서의 결정된 변화분이다. 따라서 $(dt)^2$, $(dt)^3$이 dt에 관해 작다는 것이 일정한 상태를 지닌다. 그러나, 같은 논리가 $(dS_t)^2$, $(dr_t)^2$에 대해 사용 될 수 없다.

무엇보다도, $(dS_t)^2$, $(dr_t)^2$는 작은 간격에 대해 랜덤하다. 따라서, 그것은 dt 동안 영이아닌 분산을 가진다. 이것이 문제이다. 우리는 dt동안 영이아닌 분산을 가진 연속확률과정을 사용할수 있다. 그래서 $(dS_t)^2$, $(dr_t)^2$의 평균값에 대한 양의 수를 사용한다. 그러나 이러한 조건하에서 그것은 dt에 관해 “작은” $(dS_t)^2$, $(dr_t)^2$에 일치하지 않을 수 있으며 0으로 같게 될 수 있다. 표준미적분의 경우와 같이 만일 문제에 있어 변수가 결정적이라면 취해질 수 있는 단계라 할수 있겠다. 따라서, 연속적인 확률흐름을 가진 확률적환경에서 우리는 다음과 같은 전미분을 기술 할수 있다.

$$\begin{aligned} dF(t) &= F(t) - F(t_0) \\ &= F_s dS_t + F_r dr_t + F_t dt + \frac{1}{2} F_{ss} ds^2 + \frac{1}{2} F_{rr} dr_t^2 + F_{sr} dS_t dr_t \end{aligned} \quad (24)$$

이것은 왜 확률적 미적분(stochastic calculus) 공부가 필요한 예이다. 또한, 그런 환경속에서 미분이 의미하는 것을 이해하고, 체인룰(chain rule)을 이해하는 것을 알려한다. 위의 예의 결론적인 수식이 결정적 미적분에서 얻어진것과 다르다는 것을 보여준다.
만일 미분의 개념이 변화되는 것이 필요하다면 적분의 개념은 재형성되는 것이 필요하다. 실제로, 그런 확률적환경하에서 우리는 새로운 적분의 정의를 사용함으로서 미분을 정의하였다. 다시말해 연속확률의 환경하에서 미분(도함수)의 정형적 정의는 존재하지 않는다.

4.2 결론

재정이론을 이용하여 미지의 함수 $F(S_t, t)$를 각각의 편미분(partial derivative)으로 묶어 식을 결정한 다음, 이 방정식(partial differential equation을 풀어 F(·)를 구한다. 그리고 경계조건(boundary condition)을 이용해 이 함수의 모수(parameter)를 결정한다.

에피소드 1 블랙-숄즈 옵션가격결정모형의 탄생

강석규

1997년의 노벨 경제학상은 스탠포드대의 마이런 숄즈(Myron S. Scholes) 교수와 하바드대의 로버트 머튼 (Robert C. Merton) 교수에게 돌아갔습니다. 이 두 분은 최근 수십억불대의 손실을 기록한 Long-Term Capital Management의 파트너들이기도 합니다. 숄즈 교수는 1995년에 사망한 피셔 블랙 (Fischer Black)과 함께 블랙-숄즈 공식을 개발하였고 머튼 교수는 이를 일반화하고 확장하는데 많은 기여를 하였습니다. 1987년에 미국 주식시장이 붕괴되었을 때, 유력한 비즈니스 전문지 Forbes가 주식시장의 붕괴 원인이 전적으로 블랙-숄즈 공식의 탓이라고 지적하였을 정도로 블랙-숄즈 공식이 세상에 미친 영향은 큽니다.

블랙과 숄즈가 이 역사적인 공식을 처음 구상하게 된 시기는 1969년이며, 당시 블랙의 나이는 31세, 숄즈의 나이는 28세였습니다. 블랙은 하바드대에서 응용수학분야 박사학위를 받은 수리 물리학자였으나 물리학 연구를 그만두고 Arthur D. Little 경영 컨설팅 회사에서 일하고 있었으며, 숄즈는 시카고대에서 재무금융분야 박사학위를 받고 MIT에서 조교수로 일하고 있던 경제학자였습니다. 블랙도 곧 MIT 교수로 재직하게 되는데, 신주인수권(warrants)을 연구하고 있던 블랙이 자연스럽게 먼저 옵션의 가치결정에 눈을 돌리게 되었고 나중에 숄즈가 연구에 합류하게 되었다고 알려져 있습니다 (블랙은 1983년에 학계를 떠나 골드만 삭스에서 일하게 됩니다). 재미있는 것은 이 당시 머튼 또한 사뮤엘슨(Paul Samuelson) 밑에서 공부하고 있던 대학원생으로서 블랙, 숄즈와 같은 과에서 독립적으로 옵션을 연구하였고 거의 같은 시기에 서로 다른 저널에 옵션에 대한 논문을 게재하게 됩니다. 어쨌든 블랙, 숄즈가 그들의 연구 논문 초안을 처음 학계에 발표하고자 한 것이 1970년의 일인데, 학계는 이들의 연구 결과에 그다지 관심을 보이지 않아 두군데 저널들로부터 논문 게재를 거절 당하게 됩니다. 우여곡절 끝에 "The Pricing of Options and Corporate Liabilities"라는 제목으로 블랙-숄즈의 논문이 시카고대

의 Journal of Political Economy에 게재된 것이 1973년의 일이고, 이 때가 역사상 처음으로 거래소를 통한 주식옵션의 거래를 가능하게끔 한 시카고 옵션거래소(Chicago Board Options Exchange)가 문을 연지 한달 뒤입니다. 블랙-숄즈의 논문이 세상에 빛을 본 이후에도 그 가치를 먼저 인정한 것은 학계가 아닌 업계였는데, 논문 발표후 6개월이 채 안 되어 Texas Instruments사가 블랙-숄즈 공식을 담은 자사의 새 계산기를 선전하기 위해 Wall Street Journal에 반 페이지짜리 광고를 내기에 이릅니다. 블랙-숄즈 공식은 외형상으로는 단순한 형태를 띄고 있음에도 불구하고 하루 아침에 만들어진 것이 아니라고들 말합니다. 1877년 카스텔리(Charles Castelli)가 Theory of Options in Stocks and Shares라는 저서를 쓴 것만 봐도 주식옵션이라는 것이 존재한 지 거의 100년이 지나서야 블랙-숄즈 공식과 같은 쓸만한 옵션 가치결정방법이 나온 셈이니 얼마나 많은 사람들이 옵션의 가치 결정을 두고 연구해 왔을지는 쉽게 짐작할 수 있습니다. 즉, 1900년 바셸리에(Louis Bachelier)가 그의 소르본대 수학박사 학위 논문 Therie de la Speculation을 통해 최초로 주가가 브라운 운동을 한다고 가정한 이론적인 옵션가치 결정방법을 제시한 이래 1962년 보네스(A. James Boness)가 그의 시카고대 박사 학위 논문 A Theory and Measurement of Stock Option Value에서 자금의 시간가치 개념을 포함함으로써 이전의 연구 결과들에 비해 이론적으로 크게 발전된 옵션 가격결정 모형을 선보이기까지 많은 노력들이 있었습니다.

제5장 확률이론의 개념과 기본적 확률모형

1. 서론

▶ 이 장에서는 확률이론의 기본적 개념에 대해 살펴본다.

▶ 이 장의 목적은 첫째 마팅게일과 마팅게일에 관련된 도구(tools)를 논의하기 위한 기초를 준비하는것이고, 둘째 파생자산의 가치평가에 있어 중요한 역할을 하는 이항과정(binomial process)을 소개하는 것이다.

2. 확률

▶ 확률변수를 활용하기 위해서 먼저 확률공간(probability space)을 정의해야 한다.

▶ 확률모형을 정형적으로 정의하기 위해 기본적 상황(state of the world)의 집합이 필요하다. 특정한 상황은 기호 ω로 표시된다. 기호 Ω는 모든 가능한 상황을 나타낸다. 실험의 결과는 ω의 선택에 의 해 결정된다. 사상(event)의 직관적 개념은 원소 ω의 집합에 대응한다. 모든 가능한 사상의 집합은 기호 $\Im$로 나타낸다. 각 사상 A에 대해서 $(A \in \Im)$, 확률 $P(A)$를 할당한다.

▶ $P(A) \geq 0, \quad \text{any} \quad A \in \Im$ 각 사상의 확률은 0이거나 양의 값을 가진다.

$$\int_{A \in \Im} dP(A) = 1$$ 확률의 합은 1이다.

▶ 여기에서 $dP(A)$는 측정된 이론적 기호이며 사상 A와 관련된 증분확률로 여겨진다.

▶ $\{\Omega, \Im, P\}$가 확률공간이다. Ω에서 하나의 ω가 임의로(randomly) 선

택된다.

$P(A)$, $A \in \Im$는 선택된 ω가 집합 A를 소유할 확률을 의미한다.

2.1 예제

▶ Ω : USDA가 공개할 모든 가능한 보고서

ω : USDA가 발표한 특정한 보고서

사상(event) : 보고서에 있는 내용에 따라 긍정적이거나 부정적이라 할 수 있다.

▶ 따라서 "긍정적인 보고서"의 확률을 알고자 한다면, P(수확 보고서= 긍정적).

2.2 확률변수(random variable)

▶ 확률변수 X는 집합 $\Im$에서 정의된 일종의 함수이다.

사상 $A \in \Im$가 주어지면 확률변수는 특정한 수치로 가정한 것이다.

따라서 $X : \Im \rightarrow B$

여기에서 B는 실수 R의 모든 가능한 부분집합으로 만들어진 집합이다.

▶ 확률변수 X에 관련된 확률에 대한 수리적 모형은 분포함수 $G(x)$로 주어진다.

$G(x) = P(X \leq x)$, $G(\cdot)$는 x의 함수이다.

$G(x)$가 곡선이고 미분가능하면 X의 밀도함수를 정의할 수 있다.

$$g(x) = \frac{dG(x)}{dx}$$

▶ 어떤 기술적 조건(technical condition)하에서 분포함수 $G(x)$가 항상 존재한다는 것을 보여 줄 수 있다. 그러나 $G(x)$를 간단한 공식으로 쓸 수 있는가하는 것은 별개의 문제이다. 이것이 가능한 몇 개의 "잘 알려진" 모형이 있다. 파생상품의 가격결정에 자주 사용되는 세 개의 기본적 확률모형에 대해 살펴본다.

3. 적률(moments)

3.1 평균과 분산(First Two Moments)

▶ 밀도함수가 $f(x)$인 확률변수 X의 기대값 $E[X]$은 1차 적률이다.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

▶ 분산 $E[X - E[X]]^2$은 평균에 관한 2차 적률이다.

▶ 확률변수의 1차 적률은 분포의 무게중심이고 2차 적률은 분포의 퍼짐에 대한 정보를 제공한다. 2차 적률의 근은 표준편차이다. 표준편차는 평균으로부터 관측치들의 평균편차의 측도이다. 재무시장에서 가격변화의 표준편차는 변동성(volatility)라 한다.

3.2 고차적률(Higher-Order Moments)

▶ 분포가 비대칭일 경우, 분포의 왜도를 표시하는 다른 모수가 필요한데 3차 적률은 이러한 비대칭에 대한 좋은 정보를 제공한다.

▶ 재무시장에서 더욱 중요한 개념은 두터운 꼬리(heavy tails) 현상이다. 이러한 두터운 꼬리를 가진 분포를 설명하는 모수가 필요한데 4차 적률이 이러한 목적으로 사용된다.

3.2.1 두터운 꼬리(heavy tails)

▷ Heavy tails의 의미는 무엇인가?

① 정규분포에서보다 두터운 꼬리를 가진 분포라는 것은 극단의 관측치에서 상대적으로 높은 확률을 가진 다는 것을 의미한다.

② 두터운 꼬리의 분포에서 “보통”에서 극단의 관측치로의 변화가 정규분포보다 더욱 급격하다. 분포의 중간꼬리 부분이 정규분포보다 얇다.

4. 조건부 기대값

▶ 확률변수의 기대값을 취한다는 것은 “예측”의 개념과 동일하다. 확률변수를 예측하기 위해 기호 I_t로 표시된 정보를 이용한다. 이러한 정보를 이용하여 계산된 기대값을 조건부 기대값이라 한다.

▶ **일반적으로 의사결정자에 의해 사용된 정보는 시간의 경과에 따라 증가한다. 만약 의사결정자가 과거의 자료를 “상실”하지 않는다면 정보의 집합은 시간의 경과에 따라 반드시 증가한다.**

$I_{t_0} \subseteq I_{t_1} \subseteq \cdots \subseteq I_{t_k} \subseteq I_{t_{k+1}} \subseteq \cdots, \quad \text{where } t_{i,} \ i = 0, 1, \cdots$ **는 정보가 유용하게 되는 시간이다.**

▶ **수학적 분석에서, 정보의 집합은** *sigma fields***의 증가수열이라 한다. 그러한 정보의 집합이 연속적으로 유용하게 되면, 위 식을 만족하는** I_t**를** *filtration***이라 한다.**

4.1 조건부 확률

▶ **먼저 확률밀도함수를 더욱 논의할 필요가 있다. 만약** X **가 밀도함수** $f(x)$**를 가지는 확률변수라 하고,** x_0**가 이 확률변수의 가능한 값 중 하나라면, 작은**(small) dx**에 대해**

$$P(|x - x_{01}| \leq \frac{dx}{2}) \approx f(x_{0)} dx$$ **를 만족한다.**

▶ **위의 확률이 정보의 집합** I_t**에 근거한다면,** $f(x)$**를 조건부 밀도함수** (conditional density)**라고 한다.**

정보 I_t**에 의존하면** $f(x \mid I_t)$**로 표시한다.**

4.1.1 **조건부 기대값** (conditional expectation operator)

▷ **조건부 기대값을 정의하는 두 번째 단계는 “평균하는**(averaging)” **기호이다. 사실 모든 예측은 가능한 미래값의 평균이다. 확률변수가 미래에 가질 수 있는 값들이 이 값에 해당하는 확률에 의해 가중되어 지고, 평균** (average)**이 얻어진다.**

▷ u **시점에서 이용 가능한 모든 정보가 주어졌을 때 확률변수** S_t**의 조건부 기대값**(**예측치**)**은**

$$E[S_t \mid I_u] = \int_{-\infty}^{\infty} S_t f(S_t \mid I_u) dS_t, \quad u < t$$

▷ 주어진 t 시점에 대하여 S_t가 발생하는 모든 가능한 값들의 합은 대응되는 확률 $[f(S_t \mid I_u)dS_t]$ 에 의해 가중되어 합하여진다. 평균화하는데에 I_u에 대한 조건부 확률이 사용되어진다. 즉, 어떤 정보라도 예측에 있어 사용되어진다.(incorporated)

4.2 조건부 기대값의 속성(properties)

▶ $E[\cdot \mid I_t] = E_t$ 라 정의하자.

① $E_u[S_t + F(t)] = E_u[S_t] + E_u[F(t)], \quad u < t$ 각 확률변수의 기대값(예측치)을 구한 후 이를 더하면 전체의 기대값이 된다.

② $E_u[E_{t+T}(S_{t+T+u})] = E_t[S_{t+T+u}]$ 정보집합 I_{t+T}가 시점 t에서 유용하지 않기 때문에, 조건부 기대값 $E_{t+T}[S_{t+T+u}]$는 알려져 있지 않다. 즉, $E_{t+T}[S_{t+T+u}]$는 그 자체가 확률변수이다. 기대값의 기대값은 현재 시점(t 시점)의 S_{t+T+u}의 기대값과 동일하다.

5. 중요한 모형들

5.1 금융시장에서의 이항분포

▶ 가격 $F(t)$는 시간에 따라 연속적으로 변화지만 거래자는 제한된 범위를 가정하고 매 Δ 시점마다 기장가격을 점검한다.

▶ t시점에서 두가지 가능성이 있다.

① 가격이 증가한다. $\Delta F(t) = + a\sqrt{\Delta}, \quad a > 0$

② 가격이 하락한다. $\Delta F(t) = - a\sqrt{\Delta}, \quad a > 0$

여기에서 $\Delta F(t)$는 “작은” 시간간격 Δ동안의 관측가격의 변화를 나타낸다.

▶ t, Δ 가 고정되면 $\Delta F(t)$는 이항확률변수(binomial random variable)이 된다. 특히 $\Delta F(t)$는 단지 두 개의 가능한 확률값만을 가진다.

$$P(\Delta F(t) = + a\sqrt{\Delta}) = p,$$

$$P(\Delta F(t) = - a\sqrt{\Delta}) = 1 - p,$$

▶ $\Delta F(t)$가 각각에 대해서 독립이라면, 증분 $\Delta F(t)$의 수열은 이항확률과정(binomial stochastic process)또는 간단히 이항과정(binomial process)이라 한다. 확률과정(stochastic process)은 시간으로 표시된 확률변수(random variable)의 수열이다.

▶ 위의 가정은 실제시장에서는 다소 부자연스럽다. 즉, 특정상황에서 가격변화는 위의 제한된 상승 또는 하락폭을 벗어나고 어떤 때에는 변화하지 않는 경우도 있기 때문이다.

5.2 제한속성(**limiting properties**)

▶ 이항과정 $\Delta F(t)$에 관한 논의에서 중요한 요소는 각 $\Delta F(t)$의 두 가능한 값은 모수 Δ에 대해 의존적이다. 이러한 의존이 이항과정의 제한행동(limiting behavior)의 논의를 유발한다.

▶ $\Delta F(t)$의 전형적인 궤도(path)는 어떤 모습인가?

상승 또는 하락의 확률이 정확히 1/2이라면, $\{\Delta F(t),\ t = t_0, t_{0+\Delta}, \cdots\}$는 $+a\sqrt{\Delta}$와 $-a\sqrt{\Delta}$사이에서 변동되는 극단적인 이상한 궤도로 수렴될 것이다.

▶ $\Delta F(t)$는 가격과정(price process)에서 증분이었다. $F(t)$자체의 궤도는 어떤 모습인가?

$F(t)$가 t시점에서의 파생상품의 가격을 나타낸다면, $F(t)$는 t_0 이후의 모든 상승 또는 하락의 합과 동일하다.

$$F(t) = F(t_0) + \int_{t_0}^{t} dF(s) \qquad \text{as} \quad \Delta \to 0$$

즉, 최초의 가격 $F(t_0)$에서 시작하여 그 이후의 연속되는 무한히 작은(infinitesimal) 변화를 단순히 더해 줌으로써 t 시점에서의 가격을 구해낸다.

▶ 극한에서 $dF(t)$의 무한한 변화는 여전히 별나다. $F(t)$의 궤도(trajectories)는 제한변동(bounded variation)인가?

이 질문은 중요하다. $F(t)$가 제한변동이 아니라면 Riemann-Stieltjes

법은 사용될 수 없으며, 또 다른 적분의 정의가 필요하다.

▶ 위의 식은 표준 미적분에서의 결정변수에 대한 것이 아니라 확률과정(random process)에 대한 것이므로 적분 그 자체가 확률변수이다.

5.3 적률(moments)

▶ t 를 고정하자. $\Delta F(t)$의 평균과 분산은 다음과 같다.

$$E[\Delta F(t)] = p(a\sqrt{\Delta}) + (1-p)(-a\sqrt{\Delta})$$

$$Var[\Delta F(t)] = p(a\sqrt{\Delta})^2 + (1-p)(-a\sqrt{\Delta})^2 - [E\Delta F(t)]^2$$

만약 $p = \frac{1}{2}$ 이면 평균은 0 이고, 분산은 $a^2\Delta$이다.

▶ 이항과정은 Δ에 비례한다.

- Δ가 0에 근접함에 따라 Δ에 비례하는 분산은 같은 속도로 0로 향한다. 즉, Δ를 작지만 무시하지 못할 양(quantity)으로 생각하면 분산 또한 무시할 수 없다.

- 그러나 $\Delta F(t)$가 $+a\Delta$와 $-a\Delta$사이에서 변동한다면 분산은 Δ^2에 비례할 것이다. $\Delta \to 0$에 따라 분산은 더 빨리 0를 향해 간다.

▶ 직관적으로 말해서, Δ^2에 비례하는 분산을 가진 확률변수는 무한히 적은 시간간격에서는 거의 상수가 될 것이다.

▶ 위의 사실로 이항확률변수의 고차적률($\sqrt{\Delta}$에 비례하는 값을 가지는)은 무시할 수 있다.

5.4 정규분포

$$F(0+\Delta) = \begin{cases} F(0) + a\sqrt{\Delta} & \text{with} \quad p \\ F(0) - a\sqrt{\Delta} & \text{with} \quad 1-p \end{cases}$$

$$F(2\Delta) = \begin{cases} F(0) + a\sqrt{\Delta} + a\sqrt{\Delta} & \text{with} \quad p^2 \\ F(0) - a\sqrt{\Delta} + a\sqrt{\Delta} & \text{with} \quad 2p(1-p) \\ F(0) - a\sqrt{\Delta} - a\sqrt{\Delta} & \text{with} \quad (1-p)^2 \end{cases}$$

$$F(5\Delta) = \begin{cases} F(0) + a\sqrt{\Delta} + a\sqrt{\Delta} + a\sqrt{\Delta} + a\sqrt{\Delta} + a\sqrt{\Delta} & \text{with} \quad p^5 \\ \qquad \vdots & \qquad \vdots \\ F(0) - a\sqrt{\Delta} - a\sqrt{\Delta} - a\sqrt{\Delta} - a\sqrt{\Delta} - a\sqrt{\Delta} & \text{with} \quad (1-p)^5 \end{cases}$$

▶ $n \to \infty$에 따라, $F(n\Delta)$는 무한히 많은 경우가 있다. $\Delta \to 0$일 경우도 비슷한 결과를 가져온다.

(Δn이 상수라면)

▶ $n \to \infty$이고 Δ가 고정되어 있다면 확률변수 $F(n\Delta)$의 분포는 어떻게 될 것인가?

$\Delta \to 0$이고 $n\Delta$가 고정되어 있다면 $F(n\Delta)$의 분포는 어떻게 될 것인가?

- 원래 $F(t)$는 이항이었지만 가능한 결과의 수가 늘어나서 다항이 되었다. 따라서 확률분포도 변하였다.

▶ $n \to \infty$에 따라 분포의 모양은 어떻게 변화는가? 극한에서는 어떤 모습을 가진는가?

- 이런 질문들은 "확률변수의 수렴"이라는 영역에 해당한다. 이러한 주제에 접근하는 두가지 방법이 있는데 하나는 중심극한정리(central limit theorem)이고 두 번째는 약수렴(weak convergence)이다.

▶ 중심극한정리에 의하면 $n\Delta \to \infty$이면 $F(n\Delta)$의 분포는 정규분포에 근접한다. 고정된 Δ와 "큰(large)" n, $F(n\Delta)$의 분포는 평균 0, 분산 $a^2 n\Delta$인 정규분포에 근접할 수 있다.

▶ 근접한 밀도함수(density ft)은

$$g(F(n\Delta) = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2 n\Delta}} e^{-\frac{1}{2a^2 n\Delta}x^2}$$

대응되는 분포함수는 closed-form으로 표현되지 않으므로 단지, 적분으로 나타낼 수 있다.

▶ 실제적인 자산의 가치평가에 있어서 분포에서의 수렴의 의미를 이해하는 것이 중요하다. n으로 표시되는 확률변수의 수열을 관찰한다. n이 증가함에 따라 n번째 확률변수의 분포함수는 정규분포와 유사하게 된다. 확률변수의 전체 수열의 분포가 수렴하는 것을 나타내는 것이 약수렴(weak convergence)의 개념이다.

5.5 포아송분포

▶ 연속시간 확률과정을 다루는데 두가지 기본요소가 있다.

▶ 첫째는 Brownian Motion 또는 Wiener process로 알려진 정규분포와 동일한 연속시간이다. 정규분포에 서의 연속시간 개념은 자산 가격결정에 유용하다. 그러나 금융시장에서의 자산가격의 궤도를 설명하기에는 불충분하다. “Jump”를 설명할 또 다른 모형이 필요하다.

▶ 어떻게 “jumps”의 현상을 설명할 수 있는가?

▶ 포아송분포가 두 번째 요소이다. 포아송분포를 하는 확률과정은 예측할 수 없는 발생시점 $t_i,\ i=1,2,\cdots$에서의 jumps로 구성된다. jumps 시점은 각각에 대해 독립이며, 각 jump는 같은 크기를 가진다고 생각된다. 나아가서 작은 시간간격 $\varDelta$에서 한 jump 이상이 관측될 확률은 무시할 수 있다.(거의 0이다.) t시점까지의 관측된 전체 jump의 수는 포아송 계수과정(poisson counting process)이라고 하며 N_t로 표시한다.

▶ 포아송과정에서 작은 시간간격 $\varDelta$에서의 jump의 확률은

$P(\varDelta N_t=1)\cong\lambda\varDelta$ 여기에서 λ는 intensity라는 양(+)의 상수이다.

▶ 정규분포와의 차이점 : 정규분포를 따르는 확률변수에서는 정확하게 0의 값을 가지는 확률은 0(nil)이었다. 하지만 포아송분포에서는 $\varDelta$가 “작으면” 확률은 거의 $P(\varDelta N_t=0)\cong 1-\lambda\varDelta$ 이다.

▶ 따라서 작은 간격에서 jump가 일어나지 않을 “높은”확률이 있다. 즉, 포아송과정의 궤도(trajectories)는 우연한 jump에 의해 이어지는 연속적인 궤도(path)로 구성되어 진다.

▶유한의 간격 $\varDelta$에서 n번의 jump가 있을 확률은 $P(\varDelta N_t=n)=\dfrac{e^{-\lambda\varDelta}(\lambda\varDelta)^n}{n!}$ 이다.

6. 확률변수의 수렴

6.1 수렴의 형태와 용도

정의 $X_0, X_1, \cdots, X_n, \cdots$은 확률변수의 수열이다.

만약 $\lim_{n\to\infty} E[X_n - X]^2 = 0$이면

X_n의 평균제곱(mean square)에서 X에 수렴한다.

▶ 이 정의에 의해 $X_n = X + \varepsilon_n$으로 정의된 확률추정오차(ramdom approximation error) ε_n은 n이 무한대로 갈수록 더욱 작은 분산을 가진다.

▶ 유한한 n에 대해서, ε_n의 분산은 작지만 반드시 0은 아니다.

6.1.1 평균제곱수렴(MSC:mean square convergence)의 relevance

▷ 평균제곱수렴은 Ito Integral이 특정 합(sum)의 평균제곱극한으로 정의되기 때문에 중요하다. 특히 수렴의 다른 정의를 사용하면 이 극한은 존재하지 않는다.

정의 만약 $P(|\lim_{n\to\infty} X_n - X| > \delta) = 0$, (임의의 $\delta > 0$) 이라면

확률변수 X_n은 X에 거의 확실하게(almost surely) 수렴한다.

6.1.2 예제

▷ S_t는 동일한 시간간격에서 관측된 자산가격이다.

$$t_0 < t_0 + \Delta < t_0 + 2\Delta < \cdots < t_0 + n\Delta = T$$

$$X_n = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} S_{t_0 + i\Delta}[S_{t_0 + (i+1)\Delta} - S_{t_0 + i\Delta}] & (1) \\ \int_{t_0}^{T} S_t \, dS_t & (2) \end{cases}$$

위의 식(2)에서의 X_n는 확률과정을 포함한다. 그러므로 (1)의 극한을 취함에 있어 새로운 형태의 수렴에 대한 표준이 사용되어야 한다.

▷ 어떤 (확률:random) 수렴표준이 사용되어야 하는가?

6.2 약수렴(weak convergence)

정의 X_n을 확률분포 P_n을 가지는 확률변수라 하자.

만약 $E^{P_n}f(X_n) \to E^P f(X)$ ($f(\cdot)$는 제한되고, 연속적인 실수의 함수이다.) 이면 X_n이 X에 약수렴한다고 하고 $\lim_{n\to\infty} P_n = P$이다. (단, P는 X의 확률분포이다.)

6.2.2 예제

▷ $n\to\infty$일수록 $S_n(t)$는 더욱 정규분포과정처럼 움직인다.

n이 증가할수록 극한의 가우시안과정은 $S_n(t)$보다 더욱 사용하기 편리하다. 또한 n이 증가할수록 $S_n(t)$가 변화할 수 있는 경우의 수가 더욱 증가한다.

7. 결론

▶ 이 장에서 확률이론의 기본적 개념에 대해 살펴보았다.

▶ 중요한 점

① 정규분포인 확률변수와 포아송과정은 두가지 기본적 요소이다.

② 이항과정에 대해 논의했다. 예제들은 확률과정(stochastic process)에서 수렴의 중요한 개념을 소개하는데에 사용되었다.

chapter 6. Martingales과 Martingale 설명

1. Introduction

$$E[S_{t+\Delta} - S_t] = 0$$

2. Definition

☺ martingale **이론은 추세 방향에 따라 관찰되는 시계열을 분류하는 것이다.**

만약 궤도가 판별 가능한 추세나 주기가 없다면 통계적 과정은 martingale**처럼 나타난다.**

☺ submartingale : **평균적으로 과정이 증가하는 것**

☺ supermartingale : **평균적으로 과정이 감소하는 것**

2.1. Notation

☺ t : **시간**

연속이고 연속 시간 확률 과정을 다룬다.

☺ $\{S_t, t \in [0, \infty]\}$: **관찰된 과정**

☺ $\{I_t, t \in [0, \infty]\}$: filtration (**여과**)

시간이 흐름에 따라 의사 결정자가 연속적으로 사용할 수 있는 정보세트의 집합

☺ S_t : **일정한 구간** $[0\ T]$**에서의 임의의 가격 과정**

☺ S_{t_i} : **특정한 시간** t_i**에서 가격 과정의 가치**

☺ $\{t_i\}$: **연속시간 구간** $[0, T]$**의 다양한 시간 간격**

☺ **만약** S_t**의 값이 각각의** $t \geq 0$**에서 정보 세트** I_t**에 포함되어 있다면** $\{S_t, t \in [0, \infty]\}$ **는** $\{I_t, t \in [0, \infty]\}$ **에 적응되어 있다고 한다.**

2.2. 연속-시간 martingales

☺ **다른 정보 세트를 이용하여** $\{S_t\}$ process**의 다른 예측을 할 수 있다.**

=> $E_t[S_T] = E[S_T | I_t], \quad t < T$

; **시간** t **에서 정보세트를 사용하여** S_t**의 미래 가격** S_T**를 예측한다.**

☺ Definition

process $\{S_t, t \in [0, \infty]\}$는 정보 세트의 집합 I_t와 확률 P에 관한 martingale 이다. 모든 $t>0$일 때, 1. 주어진 I_t에서 S_t 는 알려져있다. 2. 조건부가 아닌 예측은 유한하다. $E\|S_t\|<\infty$ 3. 만일 $E_t[S_T] = S_t, \quad t<T$ 이면 확률은 1이다. 즉, 관찰되지 않은 미래 가치들의 최고의 예측은 S_t의 마지막 관찰 값이다.

☺ martingale의 성질

1. martingale은 확률 변수이며 그의 미래 변동성은 주어진 현재 정보 세트에서 완전히 예측되지 않는다.

2. martingale에서 미래의 이동 방향의 예측은 불가능하다. => martingale인 과정의 특징

3. 만일 과정의 궤도가 장·단기적인 추세를 나타낸다면 과정은 martingale이 아니다.

4. martingale은 항상 정보 세트와 확률 측정치에 대하여 정의되어 있다.

5. 만일 정보의 내용이나 확률이 변한다면 그러한 상황하에서의 과정은 martingale이 되지 않을 수도 있다. 즉 반대의 겨우 martingale이 아닌 과정 X_t가 주어질 때, 적절한 확률측정치 P 로 수정하고 martingale로 X_t를 전환할수도있다.

3. 자산 가격 결정에서 martingale의 사용

☺ 만일 미래 이동을 주어진 정보세트에서 완전히 예측할 수 없다면 S_t과정은 martingale이다.

☺ 그러나 주식과 채권의 가격은 완전하게 예측할 수 없는 것은 아니다.

예를 들어 할인채권의 가격은 시간에 따라 증가한다고 예측되어 진다. (주식

도 마찬가지)

평균적으로 증가한다고 기대된다면

시간 T에서 만기인 할인채권의 가격을 B_t로 나타내면

$B_t < [E_t[B_u]] \quad t < u < T$

=> 할인채권의 가격은 martingale이 아니다.

위험 주식 S_t가 양의 기대수익을 가진다면

$E_t[S_{t+\Delta} - S_t] \cong \mu\Delta$

μ : 기대수익율의 양의 비율

☺ supermartingale

옵션을 예로 들어 설명하면 옵션은 시간 가치를 가지고 있고 시간이 경과함에 따라 유럽형 옵션의 가격은 떨어진다. (다른 상황은 변함이 없을 때) 이러한 과정을 supermartingale이라 한다.

☺ 일반적으로 자산의 가격은 martingale 이 아니라 sub 또는 supermartingale 이다. 그런데도 martingale에 관심을 가지는 이유는 무엇인가?

=> 대부분의 금융 자산들은 martingale이 아니지만 이들을 martingale로 전환할 수 있기 때문이다.

☺ submartingale을 martingale로 전환하는 방법 (chapter 7)

1. 기대되는 추세를 $e^{-rt}B_t$ 또는 $e^{-rt}S_t$ 에서 뺀다. 그러면 이것은 완전하게 예측할 수 없는 추세 주위에 편차를 만들게 되며 변환된 변수들은 martingale이 된다.

일반적인 조건 아래에서 임의의 연속시간 과정은 martingale과 증가(감소)과정으로 분해 된다. 이때 증가(감소) 과정을 제거하는 것을 Doob-Meyer분해라 한다.

2. submartingale은 직접 변환시키는 대신 확률 분포를 변환한다.

=> equivalent martingale measure (chapter 14)

4. 통계적 모델링에서 martingale과의 관련성

☺ 재정거래 가능성이 없는 시장균형상태에서 합성확률분포 $\tilde{P}$ 를 얻고 모든 적절하게 할인된 자산 가격 S_t는 martingale이 된다.

$$E^{\tilde{P}}[e^{-ru}S_{t+u}|I_t] = S_t, \quad u>0$$

=>martingale 은 실용적인 자산가격 결정에 기초적인 역할을 한다.

☺ martingale 이론은 매우 유용하며 연속 시간에서 통계적 변수에 대해 풍부한 환경을 제공한다.

☺ $E^{\tilde{P}}[X_{t+\Delta}|I_t] = X_t$

에서 martingale 은 연속 시간에서 어떤 궤도를 그리는가?

=> martingale 은 매우 불규칙한 궤도를 그린다.

불규칙한 궤도는 두가지 형태를 가진다.

1. 연속적 -> 연속적인 martingale

2. jump -> 오른쪽 연속 martingale

ex) 참고 pp107 108

figure 1 - 연속적인 martingale

figure 2 - 오른쪽 연속 martingale

=> t_0, t_1, t_2에서 jump할때, martingale은 오른쪽으로 연속이다.

☺ continuous square integrable martingale ≈ Brownian Motion

* process 가 유한한 분산을 가진다. => $E[X_t^2]<\infty$

* 수정된 시각에서 Brownian Motion으로 움직이는 모든 martingale을 나타낸다.

* 이것은 Brownian Motion과 유사하다.

변화를 예측하지 못하는 것과 점프가 없는 것은 연속 시간에서 Brownian Motion의 성질이다.

이것이 자산가격결정에 적절하다면 가격과정의 작은 증분을 정규화로 가정하는 것이 좋다.

4.1 예제

☺ 작은 구간에서 독립 포아송과정을 사용하여 martingale 을 구성한다.

☺ 어떤 재무시장이 '좋은' 혹은 ' 나쁜' 뉴스에 영향을 받는다.

N_t^G : 시간 t까지 좋은 뉴스인 경우의 총수

N_t^B : 시간 t까지 나쁜 뉴스인 경우의 총수

과거의 데이터와는 관련이 없으며 두 사건은 독립이다.

1. 두 사건이 일어날 확률이 동일할 경우

=> $M_t = N_t^G - N_t^B$

에서 M_t 는 martingale이다.

2. 좋은 뉴스가 발생할 확률이 나쁜 뉴스가 일어날 확률보다 높을 경우

=> M_t 는 submartingale이다. .

☺ 따라서 기초 확률이나 정보세트의 변화는 과정의 martingale의 성질을 변화시킨다.

5. martingale궤도의 성질

☺ $\{X_t\}$: continuous square integrable martingale의 궤도를 나타낸다.

☺ variation (변동) V^1 : $V^1 = \sum_{i=1}^{n} |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}|$

하부 구간 $t_i - t_{i-1}$에서 관찰된 X_t의 변화량의 절대값의 합

☺ 이차 변동 V^2 : $V^2 = \sum_{i=1}^{n} |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}|^2$

변화의 제곱의 합

☺ 변동과 이차변동은 시간에 따라 얼마나 변화하는가를 나타내는 다른 측정치이다.

☺ V^1과 V^2의 성질

Q) X_{t_i}가 $X_{t_{i-1}}$에 다가감에 따라 V^1은 0으로 가는가?

☺ 궤도의 3가지 성질

1. 변동 V^1은 확률적 센스에서 무한대로 수렴할 것이며, 연속 martingale 은 매우 불규칙적 일 것이다.

2. 2차 변동 V^2는 잘 정의된 확률 변수로 수렴할 것이다.
-> 궤도의 불규칙 정도에 상관없이 martingale은 square integrable 이고 작은 하부기간 동안의 증분의 제곱합은 수렴한다.
왜냐하면 작은 수의 제곱은 더욱 작아지기 때문이다.

3. 모든 고차 변동은 확률적 센스에 의해서 제거될 것이다.
-> 이러한 고차 변동들은 많은 정보를 가지고 있지 않다.

=> 1. V^1은 continuous square integrable martingale 의 미적분에 사용하기에 유용한 양은 아니다. 하지만 V^2은 유용하게 사용된다.
2. 만약 기초 과정이 연속 martingale이라면 고차 변동은 무시할 수있다.

6. martingales의 예

1. Brownian Motion

☺ X_t가 연속과정이고 그의 증분이 정규분포라고 가정할 때, 이러한 과정을 Brownian Motion이라 한다.

$$\Delta X_t \quad N(\mu\Delta, \sigma^2\Delta)$$

$$X_{t+T} = X_0 + \int_0^{t+T} dX_u$$

$$E_t[X_{t+T}] = X_t + \mu T$$

=> X_t는 이 정규분포에 대해서 또, 현재와 과거의 X_t의 정보에 대해서 martingale이 아니다.

☺ deterministic 함수를 제거함으로써 X_t를 martingale 로 전환할 수 있다.

$$Z_t = X_t - \mu t$$

$$\begin{aligned} E[Z_{t+T}] &= X_t - \mu t \\ &= Z_t \end{aligned}$$

=> Z_t는 martingale 이다.

2. 제곱 과정

☺ 작은 구간 Δ동안 관련이 없는 증분을 가진 과정 S_t라 할 때,

$$\Delta S_t \quad N(0, \sigma^2\Delta)$$

$$Z_t = S_t^2$$

$$E[\Delta Z_t] = \sigma^2\Delta$$

=> Z_t는 martingale 이 아니다.

☺ Z_t에서 평균변화를 제거한다면 martingale을 얻을 수 있다.

$$E_t[Z_{t+T} - \sigma^2(T+t)] = Z_t - \sigma^2 t$$

3. 지수 process

☺ $\Delta X_t \quad N(\mu\Delta, \sigma^2\Delta)$

$S_t = e^{\{\alpha X_t - \frac{\alpha^2}{2}t\}}$, α:실수 , X_t의 평균= 0

Q1) 이 변환은 martingale 인가?

Q2) S_t가 martingale이 되기 위하여 왜 시간 함수 $g(t) = \frac{\alpha^2}{2}t$를 제거해야 하는가?

Q3) X_t의 증분은 예측이 불가능하지는 않는가?

4. 오른쪽 연속 martingales

☺ N_t : 포아송 계산 과정

계산과정이고 점프의 수는 시간이 지남에 따라 성장하기 때문에 시간에 따라 증가한다.

$N_t^* = N_t - \lambda t$: martingale

분산은 유한하며 제곱 integrable이다.

=> 다양한 연속시간 process를 적절한 평균을 제거함으로써 martingales로 변환하는 것이 가능하다는 것을 알수 있다.

7. martingale 설명

- Doob - Meyer decomposition 과 특수한 경우의 형식화

☺ 예제

* 실용성 - 연속 시간 구간을 구분함으로써 금융시장의 증권 가격 결정에 유용한 방법이 된다.

* Ito 적분의 복잡성을 이해할 수 있다.

* 확률 공간에 대한 이해와 자산 가격과 결합한 다양한 궤도의 확률을 정하는 방법

7.1 예제

1. 확률 공간

☺ 주어진 조건하에서 기초 확률공간을 어떻게 구성할 것인가?

=> 가격변화수열의 확률 즉 다양한 궤도와 결합 확률에 관심을 가진다.

; 가격변화의 표본path 혹은 궤도

☺ 확률공간 : 모든 가능한 path혹은 궤도로 만들어진 세트

2. 다양한 궤도와 결합한 확률

7.2 Doob-Meyer 분해

☺ Doob - Meyer 분해

시간 t_i에서 특정 자산의 하락 확률보다 상승 확률이 클 경우

-> $\{S_{t_k}\}$: submartingale

이 submartingale을 두 개의 부분으로 분해할 수 있다.

-> $S_{t_k} = -(1-2p)(k+1) + Z_k$

에서 우변의 첫 번째 term은 증가하는 deterministic 변수이며 두 번째 term은 martingale이다. 이러한 분해를 Doob - Meyer decomposition 라 한다.

=> 연속 구간의 유한한 수의 점에서 관찰된 process에서 행해진다. (즉 연속

구간에서 이산인 경우)

☺ 연속적으로 관찰되는 process에서도 분해가 가능한가?

Theorem

만일 X_t, $0 \le t \le \infty$가 $\{I_t\}$집합에 관하여 오른쪽 연속 submartingale 이고 만약 모든 t에 대하여 $E[X_t] < \infty$ 라면 X_t는

$$X_t = M_t + A_t$$

로 분해되며

이 때, M_t : 오른쪽 연속 martingale

A_t: I_t에 관한 증가과정 측정치

이다.

△ 연속적으로 관찰된 자산 가격이 동시에 때때로 jump 와 상승 추세를 보이더라도 시간 t 에서 관찰된 process를 제거함으로써 martingale로 변환할 수 있다.

△ 원래의 연속 시간 process가 jump가 아니라 연속이라면 결과의 martingale도 연속이다.

☺ Doob Decomposition의 이용

8. 확률적 적분

☺ $H_{t_{i-1}}$: $I_{t_{i-1}}$에 적응된 확률변수

Z_t : I_t와 확률 측정치 P에 관한 martingale

$$M_{t_k} = M_{t_0} + \sum_{i=1}^{k} H_{t_{i-1}}[Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}}]$$

☺ dZ_u가 시간 t에서 주어진 정보로 평균 0인 극소한 확률적 증분을 나타낼 때,

$$M_t = M_0 + \int_0^1 H_u dZ_u$$

로 표현할 수 있는가?

☺ Riemann-Stieltjes 근사 방법은 위의 식에서 확률적 적분을 정의할수 있는가?

8.1 재무에의 적용 : 거래이익

☺ 확률적 적분은 재무이론에 적용된다.

9. 결론

☺ S_t : 시간 t에서 관찰된 자산의 가격

☺ 극소의 기간동안 거래자가 S_t에서 새로운 예측이 되지않는 정보를 얻었다면

$$dS_t = \sigma_t d W_t$$

☺ 더 오랜 기간에 이러한 예측되지 않는 정보를 누적하면, T구간 후에 자산가격은

$$S_{t+T} = S_t + \int_t^{t+T} \sigma_u d W_u$$

☺ $E_t[\int_t^{t+T} \sigma_u d W_u] = 0$: S_t는 martingale이다.

읽을거리 2 '자연과학 법칙성' 금융흐름 분석에 유용

물리학의 이론은 금융 흐름을 분석하는 금융모델로 곧잘 쓰인다. 담배연기처럼 어떻게 퍼져나갈지 예측할 수 없는 입자의 자유운동을 설명하는 물리학의 `브라운 운동'은 대표적인 예이다. 73년 경제학자 피셔 블랙과 미론 숄즈는 주가가 이와 비슷하게 자유운동을 한다는 가정을 한 뒤 미래에 실현될 파생상품의 현재 가치를 계산해내는 독특한 블랙-숄즈 공식을 개발해 파생상품 거래를 활성화하는 계기를 마련했다. 97년 숄즈와 이 공식을 보완한 멀톤은 노벨경제학상을 받았다.

불꽃이 종이를 태우는 경로나 물체에 열이 퍼지는 경로가 예측할 수 없는 패턴을 보인다는 열역학 이론도 금융에 자주 응용된다. 유체역학도 마찬가지다. 채권의 유통속도가 줄거나 커지는 흐름의 유형을 강의 폭과 깊이의 차이에 따라 달라지는 강물의 흐름에서 찾으려는 것이다. 이 이론으로 보면 강물의 온도는 강의 지점마다 다른데, 이는 금융상품의 가치가 시간에 따라 달라지는 것과 유사하다. 이밖에도 파동의 시작이 향후 어떻게 진전하는가를 보여주는 패턴을 금융 흐름과 비교한 파동이론을 비롯해, 혼돈이론·인공지능이론 등도 금융공학의 분석기술로 등장하고 있다. 이강파이낸셜 서비스의 류재준 이사(재무관리 박사)는 “금융상품의 가치를 변화시키는 변수과 조건들이 갈수록 많아지면서 현대금융은 본질적으로 예측할 수 없게 됐다”며 “다만 수학과 자연과학의 법칙들은 이런 금융의 불확실성이 던지는 불안감을 줄이고 투자자를 안심시키는 하나의 약속과 표준이 되고 있다”고 말했다. <오철우 기자> 한겨레신문 [문화생활] 1999. 3. 29

Chapter 7. 확률적 상황하에서의 미분
(Differential in Stochastic Environments)

1. Introduction

$f(x)$의 x에 대한 미분은 x의 미소한 변화량에 반응하는 $f(x)$의 비율을 나타낸다.

$$df(x) = f_x dx$$

단, f_x는 x에 관한 미분

확률적 상황에서도 비슷한 개념이 요구되는데, 예를 들어 기초자산 S_t의 가격 변동(변화)량이 주어질 때 콜 옵션의 가격은 S_t에 대해서 어떻게 반응할 것인가? 하는 것들이다.

결정적상황에서는 이 질문에 대해 미분의 일반적인 법칙들을 사용할 수 있지만, 재무자산의 가격결정에 있어서는 확률적 변수(stochastic variable)을 다루어야 하고, 위험의 개념이 중심적인 역할을 하므로 기초변수들은 연속확률과정(continuous-time stochastic process)을 따르게 된다.

(1) 이 때에도 결정적 환경에서와 같이 일반적인 공식들을 사용할 수 있을까? 미분의 개념은 결정적인 변수들인 경우 다른 변수들에 대한 한 변수의 변화의 효과를 모델링하는 상미분의 개념과 연결된다. 그렇다면

(2) 재무자산의 가격의 dynamics(움직임, 변화)을 모델링하는 데도 사용 가능할까?

(3) 파생자산의 움직임들은 randomness가 필수적인데 어떻게 새로운 미분을 정의할 수 있을까? 단순히 random 오차항들을 상미분방정식에 접착시켜 파생상품의 가격결정에 이용할 수 있을까? 또는 확률미분방정식(stochastic differential equations:SDEs)을 정의하는데 어려움이 없을까?

7장에서는 SDE를 이용한 stochastic 환경하에서 미분을 다룬다.

그러기 위해서는 SDE를 구하여 결정적인 상황에서처럼 직접 미분공식들을 가져오기 어려움을 보이고, 연속시간과정에서 S_t의 움직임들은 SDE에 의해 표현된 dynamic을 이용함으로써 근사될 수 있음을 보여야 한다.

$$dS_t = a(S_t, t)dt + b(S_t, t)dW_t$$

단, dW_t : 미세한 구간 dt동안 발생하는 예측불가능한 사건들을 표현하는 혁신적인 용어

$a(S_t, t)$: drift coefficient

$b(S_t, t)$: diffusion coefficient

W_t는 이 모형 시스템을 도출하고, 기초자산의 randomness의 원천이며, 불규칙적인 process를 가진다. 또한 deterministic calculus 의미에서 미분이 존재하지 않는다. 따라서 다른 방법으로 dS_t, dW_t를 정의해야 한다.

2. Motivation(결정적인 상황과 확률적인 상황에서의 미분에 대한 비교)

먼저, 기초주가를 S_t라 하고, 파생상품의 가격을 $F(S_t, t)$라 하면, stockbroker들은 주식가격의 미래(다음)상태의 변화인 dS_t를 알고 싶어한다. 그리고 dS_t에 대한 dF_t를 알고 싶어하는데, 어떻게 dS_t로부터 dF_t를 계산할 수 있을까?

여기에서 관심이 되는 것은 기초자산이 어떻게 변하는가가 아니라 금융 파생상품이 기초자산에 대해 어떻게 반응하는가 하는 것이다.

결정적 상황하에서의 “Chain Rule"을 이용하여 구할 수 있지만, 확률적 상황에서도 ”Chain Rule"이 적용가능할까?

$$dF_t = \frac{\partial F}{\partial S} dS_t$$

3장에서 일반적인 미분은 극한의 작용으로 정의하였다.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f_x$$

단, $f_x < \infty$

여기에서 x가 단순히 결정적인 시간축이라면 x의 변화량에 대한 $f(x)$의 비로 미분이 정의되지만, x가 연속시간축을 움직이는 확률변수라면, 새로운 미분의 개념이 정의되어야 한다.

$f(x)$가 random process인 x의 함수라고 가정하면, 테일러 급수를 이용하여 이미 알고 있는 값 x_0의 주위로 $f(x)$를 확장하면

$$f(x) = f(x_0) + f_x(x_0)[x - x_0] + \frac{1}{2} f_{xx}(x_0)[x - x_0]^2 + \frac{1}{3!} f_{xxx}(x_0)[x - x_0]^3 + R(x, x_0)$$

단, $R(x, x_0)$는 나머지항(4차 이상의 편미분, 순열, 그리고 $(x - x_0)^4$)

여기에서 $\triangle x = x - x_0$로 두고, $R(x, x_0)$의 값들은 매우 작으므로 무시하면, 위 시기은 다음과 같이 재표현된다.

$$f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) \cong f_x(\triangle x) + \frac{1}{2} f_{xx}(\triangle x)^2 + \frac{1}{3!} f_{xxx}(\triangle x)^3$$

단, $\triangle x$: 확률변수 x에 대한 미세한 변화

그러나, 우리의 목적은 $f(x)$에 대한 x의 변화에 대한 효과를 측정하는 것이므로, $\triangle x$는 무시될 수 있을 정도로 작은 변화량은 아니다.

$\frac{1}{2} f_{xx}(TRIANGLEx)^2$를 보면, x가 결정적 변수라면 $(\triangle x)^2$는 $\triangle x$가 작아질수록, $\triangle x$보다 $(\triangle x)^2$이 훨씬 빨리 작아지므로 무시될 수 있으나, 현재의 경우는 x가 확률변수이기 때문에 $\triangle x$도 확률변수가 된다.

$\triangle x$가 평균이 0이라고 가정하면, $E[\triangle x]^2 > 0$이 되어 $\triangle x$는 random이다. 이 이유로 테일러 급수에서 두 번째 항는 포함되어야 한다. 그리고 3차이상의 항은 무시해도 별 오차가 없기 때문에 결과적으로

$$f(x_0+\triangle x)-f(x_0) \sim f_x \triangle x + \frac{1}{2} f_{xx} E(\triangle x)^2$$

단, $(\triangle x)^2$은 기대값으로 대체

또 다른 가능한 방법은 $(\triangle x)^2$대신에 $(\triangle x)^2$의 평균제곱극한(mean square limit)를 대체하여 사용할 수 있다. 이 방법은 $h \rightarrow 0$에 따라 $\sigma^2 h$가 평균제곱의 의미에서 $(\triangle x)^2$에 충분히 가까이 간다는 것을 이용한다.

· x가 random이면

$$f(x_0+\triangle x)-f(x_0) \sim f_x \triangle x + \frac{1}{2} f_{xx} E[(\triangle x)^2]$$

또는,

$$f(x_0+\triangle x)-f(x_0) \sim f_x \triangle x + \frac{1}{2} f_{xx} [x^*]$$

단, x^*는 $(\triangle x)^2$의 평균제곱극한이다.

· x가 결정적이라면, $(\triangle x)^2$는 거의 무시되므로

$$f(x_0+\triangle x)-f(x_0) \sim f_x \triangle x$$

가 된다.

결정적인 경우에 $\triangle x$로 양변을 나누어주면, $\frac{(x_0+\triangle x)-F(x_0)}{\triangle x} \sim f_x$이 되지만, 확률적 $\triangle x$에 대해서는 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x} = f_x + \lim_{\triangle x \rightarrow 0} \frac{1}{2} f_{xx} \frac{(\triangle x)^2}{\triangle x}$인데, 여기에서는 $\triangle x \rightarrow 0$이게 할 수 있는가는 명백하지 않다.

3. A Framework for Discussing Differentiation

확률적 계산에서 미분의 개념는 확률적 수렴의 형태를 사용해야 한다. 그런데, 확률적 상황에서의 미분의 구조(framework)는 SDE이다.

$$dS(t) = a(S(t), t)dt + b(S(t), t)dW_t$$

이 방법을 이해하기 위해서, 미분이 확률적 상황하에서 진행된다면, SDE는 어려움 없이 구해질 것이다.

우선 시간구간(time interval)은 $t \in [0, T]$이고, 이 구간을 n등분하면

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < \cdots < t_n = T$$

이 된다. 그리고 한 구간의 차이를 $h = t_k - t_{k-1}$라 하면, $t_k = kh$이 된다. 또한

$$S_k = S(kh),$$

$$\triangle S_k = S(kh) - S((k-1)h)$$

이고, $\triangle S_k$는 h기간동안 주가(S_t)의 변화를 나타낸다.

여기에서 특정한 k에 대한 기대값이 존재한다면, $\triangle W_k$를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\triangle W_k = [S_k - S_{k-1}] - E_{k-1}[S_k - S_{k-1}]$$

$E_{k-1}[\cdot]$는 구간 $k-1$에서 이용할 수 있는 모든 정보가 이용된 기대값이다. 그래서 $S_k - S_{k-1}$은 실제의 주가를 나타내고, $E_{k-1}[S_k - S_{k-1}]$은 $k-1$시점의 정보 I_{k-1}을 이용한 조건부 기대값이다.

※ $\triangle W_k$ (Innovation)의 성질

① $\triangle W_k$는 $(k-1)$시점에서는 알 수 없는 값인데, I_k에서는 특정이 가능하다. 즉 정보 집합 I_k가 주어진다면 $\triangle W_k$의 정확한 값을 알수 있다.

② $k-1$시점(I_{k-1})에서는 $E_{k-1}[\triangle W_k] = 0$, 즉 예측 불가능하고, I_k가 주어진다면 $E_k[\triangle W_k] = \triangle W_k$가 된다.

③ $\triangle W_k$는 마팅게일 과정에서의 변화를 나타내고, 마팅게일 차분(martingale difference)이라 부른다.

$$W_k = \triangle W_1 + \cdots + \triangle W_k = \sum_{i=1}^{k} \triangle W_i$$

단, 시작점인 W_0은 0이다.

위의 성질로부터 $\triangle W_k$는 마팅게일임을 알 수 있고 아래와 같은 결과가 된다.

$$
\begin{aligned}
E_{k-1} W_k &= E_{k-1}[\triangle W_1 + \cdots + \triangle W_k] \\
&= \triangle W_1 + \cdots + \triangle W_{k-1} \qquad \because \quad E_{k-1}(\triangle W_k) = 0 \\
&= W_{k-1}
\end{aligned}
$$

결국, 공정하게 받아들일 수 있는 가정하에서 $\triangle W_k^2$와 dW_t^2는 테일러 급수에서 무시될 수 없다는 것임을 알 수 있다.

4. The "Size" of incremental Errors

$\triangle W_k$는 예측할 수 없는 변화로 표현되는데, $(\triangle W_k)^2$은 이것의 제곱이다. 결정적 상황이라면,

$\triangle W_k$만 다루겠지만, 확률적 상황에서는 테일러 급수에서 둘째항인 $(\triangle W_k)^2$까지 다루어져야 한다. 이를 다루는 방법에는 ① Stochastic process를 이용하는 방법이고 ② Merton이 제시한 방법이다.

Merton이 제시한 방법은 $\triangle W_k$의 분산을 V_k로 나타내면

$$V_k = E_0[\triangle W_k{}^2]$$

이 되고, 누적 오차의 분산은

$$V = E_0[\sum_{k=1}^{n} W_k]^2 = \sum_{k=1}^{n} V_k$$

로 정의된다. 단, $\triangle W_k$는 k에 대해 무산관되어 있고, 이들의 Cross Product는 0이다. (즉, 다른 $\triangle W_k$의 곧분산은 0이다.)

가정 1 : $V > A_1 > 0$

단, A_1은 n에 대해 독립이다.

이 가정은 주가에 대해 아주 빈번한 관측을 하여도 모든 위험은 제거되지 않는다는 것을 의미한다.

가정 2 : $V < A_2 < \infty$

단, A_2은 n에 대해 독립이다.

이 가정은 시간축을 보다 작게 나누므로 해서 거래는 더욱 빈번하게 일어나지

만, 이로 인해 주가(system)는 완전히 불안전한 상태가 되지 않음을 의미한다. 즉 위험은 무한하지 않다는 것을 뜻한다.

그래서 가장 변하기 쉬운 구간의 자산가격의 분산은 $V_{\max} = \max[V_k, k = 1, \cdots, n]$가 된다.

가정 3 : $$\frac{V_k}{V_{\max}} > A_3, \quad 0 < A_3 < 1$$

단, A_3은 n에 대해 독립이다.

이 가정은 금융시장의 불확실성이 특정기간에 집중되어 있지 않다는 것을 의미한다.

Propostion : 위의 3개의 가정아래에서 $\triangle W_k$의 분산은 h에 비례한다.

$$E[\triangle W_k]^2 = \sigma_k^2 h$$

단, σ_k는 h에 의존하지 않지만, $k-1$에 의존하는 유한한 상수이다.

Proof)

가정 3에서 $\frac{V_k}{V_{\max}} > A_3$는 $V_k = A_3 V_{\max}$가 되는데, 양변에 n을 곱해주면, $\sum_{k=1}^{n} V_k > A_3 V_{\max}$가 된다. 가정 2에서 $A_2 > \sum_{k=1}^{n} V_k > nA_3 V_{\max}$가 성립하므로

$$\because \quad V_{\max} < \frac{1}{n}\frac{A_2}{A_3} \qquad (*)$$

또한 $n = \frac{T}{h}$이므로, $\frac{1}{n}\frac{A_2}{A_3} > V_{\max} > V_k$로부터 $\frac{h}{T}\frac{A_2}{A_3} > V_k$이 되고 가정1로부터 $\sum_{k=1}^{n} V_k > A_1$을 알 수 있다. 따라서 $nV_{\max} > \sum_{k=1}^{n} V_k > A_1$이 성립한다.

가정3 $V_k > A_3 V_{\max}$을 사용하여 바로 위식을 n으로 나누어주면, $V_{\max} > \frac{A_1}{n} = \frac{A_1}{T}h$가 성립하는데, 이것과 가정 3을 이용하면,

$V_k > A_3 V_{max} > \frac{A_3 A_1}{T} h$가 성립한다.

$$\therefore \quad V_k > \frac{A_1 A_3}{T} h \qquad (**)$$

따라서 (*)와 (**)에 의해서 $\frac{h}{T}\frac{A_2}{A_3} > V_k > \frac{A_1 A_3}{T} h$이 성립한다. 이 의미는 V_k는 h와 선형함수 관계에 있는 upper bound와 lower bound를 가진다.

결론적으로 중간값 정리에 의해서 다음이 성립한다.

$$V_k = E[\triangle W_k] = \sigma_k^2 h$$

단, σ_k^2는 k에 의존하는 상수이다.

5. One Implication

$Var[\sigma_k \triangle W_k^2] = \sigma_k^2 Var \triangle [W_k^2] = \sigma_k^2 h$가 되므로, $Var[\triangle W_k^2] = h$임을 알 수 있다. 그래서

$$\triangle W_k^2 \cong h$$

가 된다.

확률변수의 Limit를 가진다고 생각하고, $\triangle W_k$에 대해 일반적인 미분으로 표현하면,

$$\lim_{h \to 0} \frac{| W_{(k-1)h+h} - W_{(k-1)h} |}{h}$$

이 된다.

이것은 시간에 대한 W_t의 미분으로 생각할 수 있다. $h \to 0$에 따라

$$\lim_{h \to 0} \frac{| W_{(k-1)h+h} - W_{(k-1)h} |}{h} \to 0$$

가 되어 미분이 잘 정의되지 않는다. 즉 $\triangle W_k^2 \cong h$이기 때문에 $f(h) = \frac{h^{1/2}}{h}$의 형태가 되어, 그림에서 보는 바와 같이 h가 0에 까까워짐에 따라 ∞의 값이 된다.

6. Putting the Results Together

$S_k - S_{k-1} = E_{k-1}[S_k - S_{k-1}] + \sigma_k \triangle W_k$dptjj , $\lim_{h \to 0} \frac{| W_{(k-1)h+h} - W_{(k-1)h} |}{h}$

는 I_{k-1}로서는 예측이 불가능한 innovation항이고, $\mathrm{Var}[\triangle W_k] = h$이다.

$E_{k-1}[S_k - S_{k-1}]$은 정보 집합 I_{k-1}의 조건부 기대값 또는 자산가격의 변화에 대한 예측이다. 그래서 이 변화량은 정보 집합 I_{k-1}가 시간구간 h에 의존하므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E_{k-1}[S_k - S_{k-1}] = A(I_{k-1}, h)$$

즉, $A(\cdot)$는 함수의 형태이다. 이 함수를 테일러 급수의 확장을 이용하여 확장하면,

$$A(I_{k-1}, h) = A(I_{k-1}, 0) + a(I_{k-1},)h + R(I_{k-1}, h)$$

가 되는데, $A(\cdot)$가 h에 대해서 smooth한 함수이므로 $R(I_{k-1}, h)$는 0에 근접하게 되고, $A(I_{k-1}, 0)$은 시간의 변화가 없으므로, 기초주가도 변화지 않는다.

따라서 테일러 급수에서 첫 번째항만 남아서

$$E_{k-1}[S_k - S_{k-1}] \cong a(I_{k-1}, kh)h$$

가 성립한다. 따라서 $S_k - S_{k-1} = E_{k-1}[S_k S_{k-1}] + \sigma_k \triangle W_k$은

$$S_k - S_{k-1} = a(I_{k-1}, kh)h + \sigma_k [W_{kh} - W_{(k-1)h}]$$

가 성립한다. $h \to 0$에 따라 SDE는 다음과 같게 된다.

$$dS(t) = a(I_t, t)dt + \sigma_t dW(t)$$

이 SDE는 dirft $a(I_t, t)$와 diffusion σ_t의 요소를 가진다고 말할 수 있다.

6.1 Stochastic Differentials

여러 가지 관점에서 random 증감에 대해서 언급하였는데, dS_t, dW_t와 같은 증감의 변화에 대한 정형적인 정의가 요구되고 이를 위한 것이 Ito integral이다. Ito integral만이 SDE를 정형화할 수 있다.

제 8 장 금융시장에서의 위너과정과 이상사건

(The Wiener Process and Rare Events in Financial Markets)

1. 서 론

일반적으로 거래일의 매순간에 세가지의 가능성이 있다. 한단위만큼 가격이 오를 수도 있고, 내릴 수도 있고, 변하지 않을 수도 있다. 사실, 유동자산(liquid instruments)의 가격은 급격하게 변하지는 않는다. 그러므로 "이상(rare)"사건을 무시한다면 연속시간에서의 금융자산의 가격결정은 현실적으로 위의 세가지 상황에 따라서만 진행한다고 할 수 있다. 그러나 불행히도 대부분의 금융자산과 파생상품 시장은 때때로 "극단의(extreme)" 움직임을 보이며 이런 시점에서 정확한 가격결정을 할 필요가 있는 것이다.

"극단(extreme)"이거나 "이상(rare)"사건은 어떤 경우에 발생하는가? 금융시장에서의 동요(turbulence)는 "이상사건(rare events)과 같은가?-(Is turbulence in financial markets the same as "rare events"?) 이번 장에서는 이상사건(rare events)의 확률구조에 대해 살펴보고 그것을 위너과정의 행동과 대조해 보고자 한다. 특히 위너과정으로 특징(characterization)지울 수 있는 사건에 대해 살펴보고 이를 통해 자연스럽게 이상사건을 설명할 수 있게 한다.

"이상사건(rare events)"은 관찰된 가격 과정의 비연속성과 관련되어 있으며 이는 동요(turbulence)와는 다르다. 증가분산과 변동성(volatility)은 연속시간 확률과정으로 간주할 수 있다.

이상사건을 구별하는 것은 이상사건의 크기와 확률이 관측구간에서 변하는가 그렇지 않은가에 있다. 특히 관측구간 h가 점점 작아지면, 정상사건(normal events)의 크기(size) 또한 점점 작아진다. 이는 결국 사건을 "정상적(ordinary)"으로 만든다. 큰 가격변화가 한 달 안에 여럿 발견될 수 있다. 한 주에서는 더 적을 것이고 몇 분의 간격에서는 더욱 적을 것이다. "정상적(ordinary)"인 시간(moment)에서의 사건은 거의 고려할 필요가 없다. 이것이 바로 "정상(normal)"사

건의 특징이다. 이들(normal events)은 h가 0에 가까이감(관측구간이 매우 짧아짐)에 따라 중요성이 감소된다.

반면에 정상적이기 때문에 아주 작은 구간으로 나눌지라도 그 발생확률은 zero가 되지는 않는다.

이상사건은 다르다. 정의에 의하면 그것은 가끔 발생한다. 즉, 연속시간에서 $h \rightarrow 0$일 때 발생확률은 zero에 가까이 간다. 그러나 그것의 크기(size)는 줄어들지 않는다. 1987년의 market crash는 아주 "진귀한(rare)"사건이었다. 특정한 날, 아주 짧은 순간동안에 그러한 crash가 관측될 확률은 무시할 수 있다. 그러나 그러한 crash가 발생하면 관측구간이 10분이든 전체의 거래일이든 크기는 크게 다르지 않다.

앞 장에서 한가지 중요한 결과를 설명하였다. 매우 평범한 가정 하에서 자산가격의 $\sigma_t \Delta W_t$(the surprised component)의 분산은 $E[\sigma_t \Delta W_t]^2 = \sigma^2 h$이다. 즉, 자산가격에서 비예측 변화는 기대크기 $\sigma_t \sqrt{h}$를 가질 것이다.

그러나 "표준편차(standard deviation)"을 얻는 방법(→ 가능한 크기에 대응되는 확률을 곱하여 얻는다)을 기억해야 한다. 이는 두 가지 요소(사건의 확률, 크기)의 곱으로 얻어진다. h에 비례하는 분산은 만약 크기가 (h에 대해) 독립이라면 h에 의존하는 확률에 의해 구할 수 있고, 크기가 (h에 대해) 비독립이라면 h에 독립인 확률에 의해 구할 수 있다. 위에서 전자는 이상사건(rare events)에 관한 것이고 후자는 정상사건(normal events)에 관한 것이다.

1.1 Relevance of the Discussion

이 장은 이상사건과 정상사건의 차이에 집중한다. 독자들은 기술적인 면에서 이러한 차이가 매우 중요하다는 것을 쉽게 알 수 있을 것이다. - 특히, 이상사건의 존재가 자산가격의 불연속궤도(discontinuous paths)를 의미한다면. 그러나 그런 불연속의 실제적인(practical) 적용이 있는가? 이상사건이 존재한다면 금융자산 가

격결정은 다르게 진행되는가?

이러한 질문에 대한 답은 일반적으로 확실하다. 자산가격이 jump 불연속을 보이면 다른 식(formulas)을 사용해야 한다. 이는 당연히 금융자산의 가격결정에도 영향을 미칠 것이다.

예를 들면 위험관리에서의 최근의 이슈에 대해 알아보자. 첫 번째는 자본요구(capital requirements)이다. 시장에서 반대의 행동에 의한 손실을 커버하기 위해 금융기구가 비축해야할 자본은 얼마나 되어야 하는가?

그 답은 위험에 대해 그 “가치(value)"가 얼마나 큰가에 달려있다. value-at-risk measures의 계산을 위한 여러 방법이 있다. 그러나 그것들 모두는 기초자산의 가격이 극단의 방향으로 움직일 때 포트폴리오 가치의 변화를 측정하고자 한다.

분명히 위의 시도에서 jump 불연속적인 가격을 유발하는 이상사건이 존재하는지를 아는 것은 매우 중요하다. 만약 jump가 발생하지 않는다면 value-at-risk 계산은 정규분포를 사용하여 진행할 수 있다. 가격변화는 정규분포 이상과정의 결과로서 모델화될 수 있으며 적절한 조건하에서 value-at-risk는 정규분포를 따를 것이다. 즉 그것은(value-at-risk) 어떤 극단의 가격 변동하에서 잃을 수 있는 양에 확률을 곱함으로서 분명히 구할 수 있다.

2. 일반적 두 모델

연속시간 자산가격의 모델링에는 두가지 기본적 모델이 있다. 하나는 위너과정 즉 브라우니언 동작이다. 이는 연속확률과정이고 시장이 "정상(ordinary)“사건으로 구성될 때 사용될 수 있다. 두 번째는 포아송 과정이다. 이는 이상사건에 의해 발생하는 체계적(systematic, 주기적) jumps를 모델링하는 데 사용된다. 포아송과정은 불연속이다.

위의 두 모델을 적절히 조합함으로써 특정한 상황에서 적합한 모델을 생성할 수 있다.

이상사건과 정상사건을 논의하기에 앞서 이 절은 위의 두 모델에 대해 다시 살펴보고자 한다.

3. 이산간격에서의 SDE 재론 (SDE in Discrete Intervals, Again)

정상사건과 이상사건의 심도있는 분석은 유한의 간격(finite interval)에서 확률미분방정식을 고려함으로써 행해질 수 있다.

동일한 크기 h의 이산간격에서의 SDE를 다시 생각해보자.

$$S_k - S_{k-1} = a(S_{k-1}, k)h + \sigma(S_{k-1}, k)\Delta W_k \ , \qquad k = 1, 2, \cdots, n,$$

여기에서 $a(S_{k-1}, k)h$는 다음간격에서 증분 $S_k - S_{k-1}$이 평균적으로 얼마나 변할 것으로 기대하는지를 결정하는 drift 요소(component)이다. ΔW_k는 자산가격의 “surprise"요소를 결정하는 innovation항이다. 어떤 가정하에서는 innovation항의 분산이 h에 비례하는 것으로 나타났다. $\sigma(S_{k-1}, k)^2$은 비율(proportionality)의 요인(factor)이었다. 정상사건과 이상사건을 더욱 자세히 공부하기 위해 가정을 더욱 간단히 한다.

가정 4 : ΔW_k는 가능한 값을 유한개 가지는 것으로 간주할 수 있다. ΔW_k의 가능한 결과와 대응되는 확률은 $$\sigma_k \Delta W_k = \begin{cases} w_1 & \text{with probability } p_1 \\ w_2 & \text{with probability } p_2 \\ \vdots & \\ w_m & \text{with probability } p_m \end{cases}$$

어떤 사건이 일어날지에 대하여는 분명하지 않지만 가능한 사건의 집합은 모든 경우에 대해 알려져있다. 전형적인 w_i은 innovation항 $\sigma_k \Delta W_k$의 가능한 결과를 나타내고 p_i는 관련된 확률을 나타낸다. 모수 m은 전체 가능한 결과의 수이고 정수이다.

두 종류의 w_i가 있다. 처음의 세 개는 “정상(normal)"결과를 나타낸다. 예를 들면 w_1은 상승, w_2는 하락, 그리고 w_3은 자산가격의 ”변동없음“을 나타낸다. 실제에서 이들은 금융시장에서의 일반적 전개이다.

나머지 가능성 $w_4, w_5, \ldots$는 드물게 일어나는 특별한 사건의 여러 유형을 보여준다. 예를 들면 기초증권이 곡물선물에 기초한 파생상품이라면 w_4는 큰 가뭄의

영향을 나타내고 w_5는 예상치못한 긍정적 곡물 예상을 효과를 보여주는 것 등이다. 분명히 그러한 가능성이 극단의 가격변화나 희귀한 경우라면 그것은 분명 한 단위이상으로 가격을 변화시킬 것이다. 그렇지 않다면 가격변화는 정상사건 w_1, w_2, w_3에 의해 발생할 것이다.

이러한 관점은 다음 절에서 이상사건의 확률적 구조를 결정하는 데에서도 사용될 것이다.

4. 이상사건과 정상사건의 특징

앞 장의 가정 1-3하에서 중요한 결과가 증명되었다. 즉 $\sigma_k \varDelta W_k$의 분산은 관측간격 h에 비례한다.

$$E[\sigma_t \varDelta W_t]^2 = \sigma^2 h$$

여기에서 σ_k는 정보집합 I_{k-1}이 주어질 때 알 수 있는 모수이다.

이 결과는 가정 4를 이용하면 더 개발될 수 있다. 독자가 기호(notation)에 잘 적응하기 어렵더라도 사실 이상사건과 정상사건의 매우 분명한 특징은 이런 식으로 주어질 수 있다. 그러나 이상사건과 정상사건의 유용한 특징을 결국 얻는다면 그것은 작은 대가에 불과하다.

가정 4에 의하면 $\varDelta W_k$는 유한개의 값을 가진다고 간주할 수 있다. w_i와 대응확률 p_i에서 분산은

$$Var[\sigma_k \varDelta W_k] = \sum_{i=1}^{m} p_i w_i^2 \text{이다.}$$

앞 장의 중요한 proposition을 이용하면

$$\sum_{i=1}^{m} p_i w_i^2 = \sigma_k^2 h,$$

위에서 모수 m은 가능한 상황의 수이다. 위 식의 좌변은 단순히 평균으로부터의 제곱편차의 가중평균이며 이 경우 zero이다. “가중(weights)"은 가능한 결과에 관련된 확률이다.

위의 식의 좌변은 m개의 유한하고 음이 아닌 수의 합이다. 만약 합이 h에 비례하고 각 요소가 양(또는 zero)이라면 합에서의 각 항은 h에 비례하거나 zero이

어야 한다. 다시 말하면 각 $p_i w_i^2$은

$$p_i w_i^2 = c_i h$$

여기에서 $c_i > 0$는 어떤 비율요소(factor of proportionality)이다.

위의 식은 $p_i w_i^2$의 모든 항은 h의 선형함수이다. 또한 곱이 h에 비례하는, h의 두 함수 p_i, w_i를 나타낼 수 있다. 즉,

$$p_i = p_i(h), \qquad w_i = w_i(h)$$

따라서 $p_i(h) w_i(h)^2 = c_i h$

Merton(1990)에 따라 함수 $p_i(h), w_i(h)$의 특정한 지수 형식을 가정한다. :

$$w_i(h) = \overline{w}_i h^{r_i} \qquad p_i(h) = \overline{p}_i h^{q_i} \tag{22), (23}$$

여기에서 r_i와 q_i는 음이 아닌 상수이다. $\overline{w}_i$와 $\overline{p}_i$는 관측간격의 크기 h에 대해서는 독립이며 i또는 k에는 비독립인 상수이다.

그림 3은 h^{r_i}의 선택을 보여준다. 세 가지 예가 있다.: $r_i = 1$인 경우(논의의 대상이 아니다.), $r_i = 5$인 경우, $r_i = 1/3$인 경우이다. 특히 $h^{r_i} > h$이다.

식(22),(23)에 의하면 사건의 크기와 확률은 간격의 크기 h에 비독립적이다. r_i와 q_i가 zero일 때를 제외하면, h가 커짐에 따라 관측된 가격변화의 (absolute, 절대)량과 그것의 확률은 더욱 커진다.

이상사건과 정상사건을 특징짓기 위해 모수 r_i와 q_i를 사용한다.

두 모수 모두 음이 아니다. r_i는 관측 간격이 작아짐에 따라 사건의 크기가 얼마나 빨리 zero에 가는가를 알려준다. q_i는 관측간격이 감소함에 따라 확률이 얼마나 빨리 zero에 가는가를 알려준다. 또한 r_i와 q_i 모두가 동시에 사라질 수는 없지만 둘 중 하나는 사라질 수도 있다.

이제 모수 r_i, q_i의 한계가 어떻게 이상사건과 정상사건을 구별할 수 있는가를 분명하게 보여준다.

식(18)에서 ΔW_k의 분산은 다음 식으로 구해진다.

$$p_i w_i^2 = \overline{w}_i^{\,2} \, \overline{p}_i h^{2r_i} h^{q_i}$$

그러나 각 $p_i w_i^2$는 h에 비례한다.

$$p_i w_i^2 = c_i h$$

그러므로,

$$\overline{w}_i^{\,2}\ \overline{p}_i h^{(q_i + 2r_i)} = c_i h$$

그러나 이것은 다음을 의미한다.

$$q_i + 2r_i = 1$$

그리고

$$c_i = \overline{w}_i^{\,2}\ \overline{p}_i$$

따라서 모수 r_i, q_i는 다음의 한계를 만족해야한다.

$$0 \le r_i \le \frac{1}{2}$$

그리고

$$0 \le q_i \le 1$$

사실 위에서 관심있는 두 가지 경우가 있다. 즉,

$$r_i = 1/2, \quad q_i = 0$$

그리고

$$r_i = 0, \quad q_i = 1$$

첫 번째 경우가 정상(normal)사건을 유도하며 두 번째가 이상(rare)사건을 유도하는 경우이다. 이것을 차례로 논의한다.

5. 이상사건의 모델

이상사건이 존재한다면 자산가격을 나타내기 위해 어떤 모델을 사용할 수 있는가?

무엇이 필요한지를 생각하라. 관측변화를 두 가지 요소로 분해하는 방정식으로 자산가격을 나타내고자 하는 것이 여기에서의 접근법이다. : 그 시점에서의 정보가 주어지면 예측 가능한 것과 예측 불가능한 것으로 나눈다. 길이 h의 작은 간격에서

$$S_k - S_{k-1} = a(S_{k-1}, k)h + \sigma(S_{k-1}, k)\Delta W_k, \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

h가 작아짐에 따라 무한히 작은 간격에서 유용한 연속시간의 자산가격변화를 알 수 있다.

$$dS_t = a(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t$$

다음 장에서 SDEs를 더욱 자세히 공부하고 미분 dS_t와 dW_t가 무엇을 의미하는지를 보일 것이다.

이상사건을 다루기 위해 다른 표현을 쓸 필요는 없다. 이것은 기대하지 않게 일어나며 그 분산은 시간간격 h에 비례한다. 사실 위너과정의 경우에서와 다른 점은 표본궤도(sample paths)의 연속성에서 발생한다는 것이다. 그러므로 같은 SDE표현이 단순한 변경(modification)으로 사용될 수 있다.

필요한 것은 random, 예측 불가능한 오차 dW_t에 대한 새로운 모형이다.

이상사건의 경우 사건의 크기인 요인을 정의하는 것은 h일지라도 무한히 작지는 않다. 반면에 $h \to 0$에 따라 그 확률은 무시할 수 있다. 따라서 새로운 innovation항은 가끔 일어나는 자산가격의 (random) jumps를 나타낼 수 있어야 한다. 나아가 모형은 그런 jump의 발생가능성에 대한 어떠한 잠재된 변동성도 알아낼 수 있을 정도로 유동적이어야 한다.

더욱 특정화할 수 있다. 첫째 오차항을 둘로 분리하라. 앞의 논의에서 자산가격의 변화는 연속적으로 발생하는 정상사건과 가끔 발생하는 jump의 혼합이 될 것이다. 첫 번째 요인을 ΔW_k로 표시하고 두 번째 요인을 ΔN_k로 나타낸다. 이를 더욱 자세히 하면 사건이 크기 1의 자산가격에서 jump라고 가정하면, 어떤 순간 $k-1$에서

$$N_k - N_{k-1} = \begin{cases} 1 & \text{with probability } \lambda h \\ 0 & \text{with probability } 1-\lambda h \end{cases}$$

여기에서 λ는 $k-1$시점의 정보집합에 대해 비독립적이지 않다.(독립이다)

$$\Delta N_k = N_k - N_{k-1}\text{라 두자}$$

ΔN_k는 상수의 비율 λ를 가지고 일어나는 크기 1의 jump를 나타낸다.

N_k가 포아송 계수과정을 사용하여 모형화될 수 있다는 것은 분명하다. 사실 포아송과정은 다음의 특성을 가진다.

1. 작은 구간 h에 대하여 적어도 하나의 사건이 1에 가까운 확률을 가지고 일어날 수 있다.

2. t시점까지의 정보는 다음 순간 h에서의 사건의 발생(또는 비발생)을 예측하는 데에 도움이 되지 않는다.

3. 사건은 상수의 비율 λ로 발생한다.

사실, 포아송과정은 위의 모든 조건을 동시에 만족하는 유일한 과정이며 jump 불연속을 모델링하는데에 가장 좋은 것같다. 그러나 두 가지 변경이 필요하다.

첫째, 특정 자산가격의 jump의 발생비율(rate)은 시간의 경과에 따라 변화한다. 포아송과정은 상수의 발생 비율을 가지고 그러한 행동을 조절할 수 없다. 어떠한 조정(adjustment)이 필요하다.

둘째, N_t의 증분은 양의 평균을 가진다. SDE접근법은 단지 zero mean을 가지는 innovation항을 다룬다. 또 다른 변경은 dN_t의 평균을 제거할 필요가 있다.

조절된 변수를 고려하자. $J_t = (N_t - \lambda t)$

증분 ΔJ_k는 zero mean을 가지고 예측불가능일 것이다. 나아가 J_t를 (시간에 의존적인)상수 즉 $\sigma_2(S_{k-1}, k)$로 곱하면 jumps의 크기는 시간의존적(time-dependent)이 될 것이다. 그러므로 $\sigma_2(S_{k-1}, k)\Delta J_k$는 자산가격에서 예기치 않는 jumps를 나타내기에 적당하다.

이는 금융자산시장이 산발적인 이상사건에 영향을 받으면 확률미분방정식은 다음과 같다는 것을 의미한다.

$$S_k - S_{k-1} = a(S_{k-1}, k)h + \sigma_1(S_{k-1}, k)\Delta W_k + \sigma_2(S_{k-1}, k)\Delta J_k, \quad k = 1, 1, \cdots, n$$

위의 확률 미분방정식은 정상사건과 이상사건을 동시에 다룰 수 있다.

결론적으로 jump 요소 $dJ(t)$와 위너요소 $dW(t)$는 매시점 t에서 통계적으로 독립적이어야 한다는 것에 주목하라. h가 작아짐에 따라 정상사건의 크기는 작아져야 하며 반면에 이상사건의 크기는 동일해야 한다. 이런 조건하에서 두 사건은 서로 관련되어 있을 수 없다. 그것들의 순간적인 상관은 zero이어야 한다.

6. 중요한 적률

7. 결 론

다음의 두 장에서는 확률미분방정식의 개념에 대해 정형화한다. 이 장과 앞장에서

는 SDEs를 위한 기초를 놓았다. 자산가격의 dynamics는 항상 확률미분방정식에 의해 얻어진다는 것을 보였다.

$$dS_t = a(S_t, t)dt + [\sigma_1(S_t, t)dW_t + \sigma_2(S_t, t)dJ(t)]$$

여기에서 우변의 첫항은 S_t의 기대변화(expected change)이고 중괄호 안의 두 번째 항은 t시점까지의 정보가 주어졌을 때 예측 불가능한 surprise component이다. 확률미분은 정형적으로 정의되지 않으며 앞으로의 논의는 “작은(small)" 증분 ΔS_k와 ΔW_k를 사용한다.

SDEs의 예측 불가능한 요인들은 두 부분으로 구성된다. dW_t는 규칙적으로 발생하는 미세한 크기의 사건을 나타내며 $dJ(t)$는 “크고(large)" 드물게(rarely) 일어나는 사건을 나타낸다.

작은 간격에서 확률변수 dW_t는 1차 및 2차적률에 의해 완전히 알 수 있다. 고차적률은 추가적인 정보를 제공하지 않는다. 그러므로 정규성을 가정하고 W_t이 위너과정을 따르도록 한 것은 사건에 대한 좋은 추정이 되게 한다.

이상사건은 정규분포에 의해 설명될 수 없다. 이상사건의 금융시장에 대한 영향을 고려한다면 비기대 요소(unexpected components)는 dJ_t과정에 의해 보충되어야 한다. 포아송과정이 dJ_t의 특성을 꽤 잘 표현한다.

시장참여자가 모수 $\sigma_1(S_t, t)$와 $\sigma_2(S_t, t)$를 자유로이 선택할 수 있다면 위너과정과 포아송과정의 조합은 금융시장에 영향을 미치는 모든 종류의 변동(disturbances)을 표현할 수 있다.

제 9 장 확률적 환경에서의 적분 (Ito적분)

- Integration in Stochastic Environments (The Ito Integral) -

1. 서 론

미분과 적분 operations에 대한 실제적인 관심은 미분방정식(differential equations)을 구하는 것이다. 미분방정식은 물리적 현상의 dynamics를 표현하는 데에 사용된다. 단순한 선형 미분방정식은 아래의 식과 같다.

$$\frac{dX_t}{dt} = AX_t + By_t, \qquad t \geq 0$$

여기에서 $\frac{dX_t}{dt}$는 t에 대한 X_t의 미분이며 y_t는 외생의(exogenous) 변수이다. A와 B는 모수이다.[16] 상미분방정식은 실제적인 모델링에 필요한 도구이다. 예를 들면, 엔지니어가 어떤 변수 y_t가 있다고 하면 과거"의 X_t와 작용하여서 미래의 X_t의 변화량을 결정한다. 이러한 관계는 미분방정식에 의해 추정되며 여러 가지 경우에 사용될 수 있다.[17]

다음의 주제는 상미분방정식을 구하는데 사용된다. 첫째, 미분의 개념이 정의된다. X_t로 표기된 대부분의 함수의 미분이 존재하는 것으로 나타났다. 일단 미분이 존재하면 주제는 dX_t/dt를 테일러 시리즈 expansions을 통해 추정하는 것으로 진행된다. 관련된 이론의 한계점들을 고려한 후에 이분방정식을 얻는다.

주제의 마지막에는 미적분의 기본적 정리는 적분과 미분의 개념사이에 밀접한 연관성이 있음을 증명하고 있다. 사실, 적분은 증분의 합을 나타내며 반면에 미분은 변화율을 나타낸다. 만약 변수 X_t에 변화율 dX_t를 추가하면 그 변수의 가장

---

16 만약 $B = 0$이면 방정식은 동질적이라고 한다. y_t가 t에 대해 독립이면 system은 자발적이게 된다. 그렇지 않다면 자발적이지 않다.

17 예를 들면, 엔지니어가 X_t의 미래 궤도에 대한 생각을 가지고 있다면 문제는 X_t가 이러한 궤도를 따르도록 하는 적당한 $\{y_t\}$를 구하는 것이다.

최근의 값은 다음과 같이 얻어질 것으로 기대된다.(시초값은 $X_0 = 0$이다.)

$$\int_0^t dX_t = X_t$$

이는 모든 미분방정식에서 대응되는 적분방정식을 유도해 낼 수 있다는 것을 보여준다.

확률적 미적분에서 같은 주제의 적용은 불가능하다. 예측치 못한 “news"가 연속적으로 도착한다면, 그리고 어떤 현상의 dynamics를 나타내는 방정식이 그러한 잡음의 함수이면 미분의 의미있는 개념은 정의될 수 없다.

그러나 어떤 조건하에서 적분을 성공적으로 구할 수 있다. 이는 상미분방정식을 다음의 확률미분방정식으로 대체하도록 한다.

$$dX_t = a_t dt + \sigma_t dW_t, \qquad t \in [0, \infty),$$

여기에서 dX_t / dt와 같은 미분을 쓰는 대신에 미분 dX_t, dt, dW_t의 항으로 미래의 움직임을 표현하고 있다. 이러한 미분은 새로운 적분의 개념을 사용함으로써 정의되어진다. 예를 들면 h가 작아질수록 증분

$$X_{t+h} - X_t = \int_t^{t+h} dX_u \text{ 은}$$

dX_t의 이미를 부여하는데 사용된다. 사실 이전의 여러 관점에서 실제적으로 세밀하게 dS_t또는 dW_t에 대해 논의하지 않고 이러한 미분을 사용해 왔다. Ito적분의 정의도 그러할 것이다.

어떤 자산 가격 S_t의 dynamic한 행동을 표현하는 SDE를 고려하자:

$$dS_t = a(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t, \qquad t \in [0, \infty). \tag{5}$$

양변에 적분을 취하면 이 방정식은 다음과 같이 된다.

$$\int_0^t dS_u = \int_0^t a(S_u, u)du + \int_0^t \sigma(S_u, u)dW_u, \tag{6}$$

여기에서 우변의 마지막 항은 위너과정 W_t의 증분에 대한 적분이다.

위의 식의 우변의 적분을 즉각적으로 설명할 수는 없다. 5장과 7장에서 논의되었듯이 W_t의 증분은 작은 구간 h에 대해 “매우” 유별나다. W_t의 변화율은 평균적으로 $h^{-1/2}$이었다. 그리고 이는 h가 작아짐에 따라 더욱 크게 되었다.[18] 이러

18 평균변화율은 h로 나누어진 $W_{t+h} - W_t$의 표준편차를 의미한다. 6장에서 일

한 증분이 매우 별나다면 그것의 합은 무한이지 않는가?

이 장은 어떻게 이렇게 어려운 문제가 해결되는지를 보여줄 것이다.

1.1 Ito 적분과 SDEs

Ito적분의 정형적 정의는 확률미분방정식의 개념을 더욱 자세하게 할 것이다. 일단 다음의 적분

$$\int_0^t \sigma(S_u, u)\, dW_u \text{이}$$

어떤 정밀한 방법으로 정의된다면 식(5)의 SDE의 양변을 적분할 수 있다.:

$$S_{t+h} - S_t = \int_t^{t+h} a(S_u, u)\,du + \int_t^{t+h} \sigma(S_u, u)\,dW_u,$$

여기에서 h는 유한한 시간구간이다.

이것으로부터 7장과 8장에서 여러번 사용되었던 유한미분추정(finite differencee approximation)을 구할 수 있다. h가 작다면, 특히 smooth함수 S_u와 u라면 $a(S_u, u)$와 $\sigma(S_u, u)$는 시점 $u \in [0, \infty)$에서 많이 변하지는 않을 것이다. 이 방정식을 다시 표현하면,:

$$S_{t+h} - S_t \cong a(S_t, t)\int_t^{t+h} du + \sigma(S_t, t)\int_t^{t+h} dW_u.$$

바로 적분을 취함으로써 유한미분추정을 구할 수 있다.:

$$S_{t+h} - S_t \cong a(S_t, t)h + \sigma(S_t, t)[W_{t+h} - W_t].$$

다시 쓰면:

$$\Delta S_t \cong a(S_t, t)h + \sigma(S_t, t)\Delta W_t$$

이것이 앞의 장에서 종종 사용한 유한구간에서의 SDE 표현이다. 이 표현은 최소한 두가지 이유에서 추정(approximation)이다. 첫째, $E_t[S_{t+h} - S_t]$는 h에 대한 1차 테일러시리즈 추정과 동일하다.:

$$E_t[S_{t+h} - S_t] = a(S_t, t)h.$$

둘째, $a(S_u, u)$, $\sigma(S_u, u)$, $u \in [t, t+h]$는 시점 $u = t$일 때의 각각의 값에 의해

반적인 가정하의 예측불가능한 사건의 표준편차는 $h^{1/2}$에 비례하는 것으로 나타났다.

추정되었다. 이러한 추정들 모두는 $a(S_u, u)$와 $\sigma(S_u, u)$에서의 어떤 smoothness 조건을 만족해야 한다. 이 모두는 아래의 식

$dS_t = a(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t$ 은

적분방정식

$$\int_t^{t+h} dS_u = \int_t^{t+h} a(S_u, u)du + \int_t^{t+h} \sigma(S_u, u)dW_u$$ 을 의미한다.

우변의 두 번째 적분은 Ito sense로 정의되고 $h \to 0$에 따라

$$\int_t^{t+h} \sigma(S_u, u)dW_u \simeq \sigma(S_t, t)dW_t \qquad (14)$$

즉, SDEs의 diffusion항은 사실 무한히 작은 시간간격에서 추정된 Ito 적분이다.

이러한 추정이 의미있으려면 W_t에 대한 적분이 먼저 정형적으로 정의되어야 하고 두 번째는 시간의 경과에 따른 $a(S_t, t)$와 $\sigma(S_t, t)$의 움직임에 대한 조건을 부여하여야 한다. 특히 이러한 I_t-measurable 모수가 지나치게 변화하지 않아야 한다.

1.2 Ito 적분의 실제적인 적용

실제에서 Ito적분은 확률미분방정식보다 적게 사용된다. Practitioner는 파생자산가격을 계산하는데에 Ito 적분의 거의 전혀 사용하지 않는다. 다음에 논의되겠지만 무재정거래가격은 편미분방정식 또는 마팅게일 변형을 사용함으로써 계산되어진다. 두 경우 모두 Ito적분을 직접적으로 계산할 필요는 없다.

그러므로 이런 점에서 거래자의 관점의 실제적인 적용을 살펴보는 일은 어렵다. Ito적분을 정의하는 것은 단순히 이론적인 연습이며 실제적인 적용은 없는 것처럼 보인다. practitioner는 Ito적분의 존재를 기꺼이 받아들인고 여전히 SDEs를 직접적으로 사용하려할 것이다.

독자는 이점에 주의하여야 한다. Ito적분의 정의를 이해하는 것은 적어도 두가지 이유에서 중요하다. 첫째, 이미 언급하였듯이 확률미분방정식은 단지 Ito적분에 의해서만 정의되어진다. SEDs의 진정한 의미를 이해하기 위해서 Ito적분의 이해가 선행되어야 한다. 그렇지 않다면, SEDs를 실제 문제에 적용하는데 있어 오차가 발생할 것이다.

왜 Ito 적분이 적합한가에 대한 두 번째 이유는 다음과 같다. 만약 SEDs가 무한히 작은 구간에서 정의되어진다면 유한의 구간에서의 그것의 활용은 어떤 추정(approximation)이 요구된다. 사실 (14)에서 보여진 추정은 h가 "작지"않다면 유효하지 않다.

그렇다면 Ito적분의 정의를 사용하여 새로운 추정이 정의되어질 것이다.

이러한 점이 금융파생자산의 가격결정의 관점에서 매우 중요하다. 왜냐하면 실제에서는 항상 유한의 구간에서 계산을 하기 때문이다. 예를 들면 "1일 (one day)"은 분명히 무한히 작은 구간이 아니며 그러한 구간에서의 SDEs의 활용은 추정을 요구한다. 이러한 추정의 정밀한 형식Ito적분의 정의를 고려함으로써 구할 수 있다.

요약하면 유한의 간격에서의 확률미분방정식

$$\Delta S_k = a_k h + \sigma_k \Delta W_k \quad k = 1, 2, \cdots, n,$$ 을

확률미분방정식

$$dS_t = a(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t, \quad t \in [0, \infty)$$ 로

변형하는 능력은 $\int_t^{t+h} \sigma(S_u, u)dW_u$ 를 정의함으로써 dW_t를 설명하는 능력과 같다. 이는 확률 적분을 수행함으로써만 구해질 수 있다.

2. Ito 적분

Ito 적분은 시간의 경과에 따른 확률(random) 증분의 합을 정의하는 하나의 방법이다. 이 때 확률 증분은 셀 수 없이 많고 예측 불가능하다. 이러한 적분은 Riemann-Stieltjes 적분의 방법으로 구해질 수 없다. 왜 그런지를 아는 것은 유용하다.

이미 보았듯이 위너과정에서 증분 dW_t는 아무리 짧은 미래에서도 예측불가능한 확률변수를 나타낸다. 시점 t에서의 위너과정의 값 W_t은 독립된 증분의 무수히 많은 합이다.:

$$W_t = \int_0^t dW_u \tag{17}$$

(0 시점에서 위너과정이 zero의 값을 가진다는 것을 기억하라. 그러므로 $W_0 = 0$이다.) 이는 매우 간단한 확률적분(stochastic integral)이다.

더욱 적합한 확률적분은 SDE의 innovation term을 적분함으로써 구할 수 있다.:

$$\int_0^t \sigma(S_u, u)\, dW_u \tag{18}$$

(17)과 (18)의 적분은 매우 특이한 확률변수의 summations이다. 왜냐하면 $\varepsilon>0$인 경우 dW_t와 $dW_{t+\varepsilon}$이 여전히 비상관이기 때문이다. 문제는 이러한 특이한 항(erratic terms)의 합이 유의하게 정의되느냐 하는 것이다. 결국, 매우 많은 (수없이 많은) 특이한 원소들의 합은 유한하지 않다(unbound)는 것이다.

표준 미적분의 적분을 정의하는 방법을 재론하자.

2.1 Riemann-Stieltjes 적분

x_t가 시간에 대한 결정적 변수일 때 비확률 함수 $F(x_t)$를 가정하자. 이 때 $F(\cdot)$는 연속이며 미분가능하고 도함수는

$$\frac{dF(x_t)}{dx_t} = f(x_t)\text{이다.}$$

도함수 $f(\cdot)$가 존재하는 경우 Reimann-Stieltjes 적분은 두가지 방법으로 표현된다.:

$$\int_0^T f(x_t)\,dx_t = \int_0^T dF(x_t)$$

좌변은 t가 0에서 T까지 변동할 때 x_t*에 관한* 적분이다. 즉, 각 x_t에서의 $f(\cdot)$의 값이 무한히 작은 증분 dx_t와 곱해진다. 이러한(무한히 많은) 값들은 적분을 구하는데 포함된다. 이 기호는 일반적으로 Riemann 적분의 경우 적합하다.

우변의 경우, $F(\cdot)$*에 관한* 적분이다. $F(\cdot)$의 증분은 적분을 구하는데 포함된다. 후자의 기호를 더욱 복잡하게 할 수 있다. 예를 들면, 적분

$$\int_0^T g(x_t)\,dF(x_t) \tag{21}$$

의 계산에 관심이 있다. 이는 $F(\cdot)$에 관한 함수 $g(x_t)$의 적분이다.

비슷한 수식이 확률변수의 기대값을 구할 때에도 나타난다. 예를 들면 $F(\cdot)$는 확률변수 x_t의 분포함수를 나타내고 고정된 t에 대한 $g(x_t)$의 기대값을 계산한다

고 하자.:[19]

$$E[g(x_t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x_t)\,dF(x_t) \tag{22}$$

경험적으로, 이 적분에서 x_t는 음(-)의 무한대에서 양(-)의 무한대로 변동하고 $g(\cdot)$에 대응값은 증분 $dF(\cdot)$을 이용하여 평균된다. 이 경우 $dF(\cdot)$는 $g(\cdot)$의 확률을 나타낸다.

(21)과 (22)의 적분의 중요한 차이에 대해 주목하라. 첫 번째 경우 0에서 T로 움직이는 것은 t이다. 특정 시점 t에서 x_t의 값은 명시되어 있지 않다. 즉 확률변수가 될 수 있다. 이는 적분 그 자체가 확률변수가 되게 한다.

(22)의 적분은 매우 다르다. t가 상수이면 음(-)의 무한대에서 양(-)의 무한대로 변동하는 것은 x_t이다. 적분은 확률변수가 아니다.

확률변수가 없는 경우, Riemann-Stieltjes 적분은 어떤 무한한 합의 극한으로 정의되었다. 적분은 이 극한이 잘 정의되어 있는 한 존재한다. Ito 적분과의 차이점을 강조하기 위해서 Riemann-Stieltjes 방법론을 재론한다.

$$\int_0^T g(x_t)\,dF(x_t)$$

를 계산하고자 한다.

Riemann-Stieltjes 방법론을 이용한 정형적인 계산은 구간 $[0, T]$을 n개의 작은 구간으로 나누는 방법에 기초한다.

$$t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T$$

이 때, 유한한 Riemann Sum V_n은 다음과 같이 정의된다.

$$V_n = \sum_{i=0}^{n-1} g(x_{t_{i+1}})[F(x_{t_{i+1}}) - F(x_{t_i})]$$

이 등식의 우변은 $g(x_{t_{i+1}})[F(x_{t_{i+1}}) - F(x_{t_i})]$의 합이다. 첫째 항은 $x_{t_{i+1}}$에서의 $g(\cdot)$를 나타낸다. 둘째 항은 증분 $dF(x_t)$와 유사하다. 그림 1에서 기하학적으로 표현된다. 각 원소 $g(x_{t_{i+1}})[F(x_{t_{i+1}}) - F(x_{t_i})]$는 밑이 $[F(x_{t_{i+1}}) - F(x_{t_i})]$이고 높이가 $g(x_{t_{i+1}})$인 직사각형이다.

---

19 함수 $g(\cdot)$가 x_t의 제곱 또는 세제곱이면, 이 적분은 단순히 2차 또는 3차 적률이 될 것이다.

V_n은 모든 직사각형의 합이다. 만약 연속인 t_i, $i = 0, \cdots, n$의 간격이 매우 짧다면 - 즉, $[0, T]$의 세밀한 부분이라면 - 그 추정(approximation)은 매우 잘 적용될 것이다. 다시말해서, 만약 함수 $g(\cdot)$가 적분가능하면, 극한

$$\lim_{\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} g(x_{t_{i+1}})[F(x_{t_{i+1}}) - F(x_{t_i})] = \int_0^T g(x_t) dF(x_t)$$

이 존재하고 이를 Riemann-Stieltjes 적분이라 한다. 독자는 이 등식을 정의(definition)로 받아들여야 한다. 적분은 우변의 합의 극한으로 정의된다.[20] Sum V_n은 Riemann Sum이다.

2.2 확률적분과 Riemann Sums

그러므로, Riemann-Stieltjes 적분은 "작은" 밑과 다양한 높이로 이루어진 직사각형을 사용하여 추정될 수 있다. 확률적분의 경우도 비슷하게 적용될 수 있는가?

동일한 길이 h의 유한 구간의 SDE를 고려하여 위의 문제를 더욱 자세히 살펴보자.:

$$S_k - S_{k-1} = a(S_{k-1}, k)h + \sigma(S_{k-1}, k)\Delta W_k, \quad k = 1, 2, \cdots, n \qquad (27)$$

(27)식의 좌변의 증분 ΔS_k를 더한다고 가정하자.:

$$\sum_{k=1}^{n-1} [S_k - S_{k-1}] = \sum_{k=1}^{n-1} [aS_{k-1}, k)h] + \sum_{k=1}^{n-1} \sigma(S_{k-1}, k)[\Delta W_k] \qquad (28)$$

Riemann-Stieltjes 접근과 유사한 방법을 사용할 수 있는가? 그리고 확률변수 S_t에 관한 적분을 다음의 (어떤 종류의) 극한처럼 정의할 수 있는가?

$$\int_0^T dS_u = \lim_{n \to \infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n} [aS_{k-1}, k)h] + \sum_{k=1}^{n} \sigma(S_{k-1}, k)[\Delta W_k] \right\} \qquad (29)$$

여기에서 $T = nh$로 가정한다.

(29)식 우변의 첫째 항은 일단 k시점의 정보가 유용하다면 어떤 확률 항도 포함하지 않는다. 더욱 중요한 것은 적분은 h 시점의 증분에 관한 것이다. 정의에 의하면, 시간은 smooth 함수이고 "유한한 변동"을 가진다. 즉, Riemann-Stieltjes를 사용한 동일한 procedure가 다음의 적분을 정의하는 데

20 즉, 극한이 수렴한다면

에도 적용될 수 있다.

$$\int_0^T a(S_u, u)du = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [a(S_{k-1}, k)h]$$

그러나, (28)식 우변의 두 번째 항은 I_{k-1}이 밝혀지더라도 확률변수를 포함하고 있다. 사실 시점 $k-1$에서 다음의 항

$[W_k - W_{k-1}]$은 확률변수이고 합

$$\sum_{k=1}^{n} \sigma(S_{k-1}, k)[W_k - W_{k-1}] \quad (33)$$

는 *확률변수*에 관한 적분이다.

여러 질문이 있을 수 있다.

▷ 어떤 극한의 개념이 사용되는가? random인 (33)식의 합은 극한에서 확률변수에 수렴해야 하기 때문에 이 질문은 적합하다. Riemann-Stieltjes 방법론에 의해 사용되는 극한의 결정적인(deterministic) 개념은 여기에서는 사용될 수 없다.

▷ 그러한 극한이 어떤 조건하에서 수렴하는가?(즉, (33)식의 합이 진정한 의미가 있는 극한을 가지는가?)

▷ 극한 확률변수의 특성은 무엇인가?

SDE의 오차항에 의해 결정되는 특정한 적분에 우리의 관심을 집중하자. 어떤 조건하에서 확률적분을 확률 합(random sum)의 평균제곱의 극한으로 정의하는 것이 가능하다.:

$$\sum_{k=1}^{n} \sigma(S_{k-1}, k)[W_k - W_{k-1}]$$

이 적분은 확률변수이다.

평균제곱수렴의 활용은 합(sum)과 Ito 적분이라 하는 확률변수와의 차이가 zero로 가는 분산을 가진다는 것을 의미한다. 이 때 n은 무한대로 증가한다. 즉,:

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\sum_{k=1}^{n} \sigma(S-k-1, k)[W_k - W_{k-1}] - \int_0^T \sigma(S_u, u)dW_u\right]^2 = 0$$

2.3 정의 : Ito 적분

확률미분방정식의 문맥안에서 Ito 적분의 정의를 전개하고자 한다.

정의 : 확률미분방정식

$$S_k - S_{k-1} = a(S_{k-1}, k)h + \sigma(S_{k-1}, k)[W_k - W_{k-1}], \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

의 유한의 구간 추정을 생각하자. 여기에서 $[W_k - W_{k-1}]$은 평균 zero이고 분산 h인 표준 위너과정이다.

1. $\sigma(S_t, t)$가 미래의 독립이라는 의미에서 non-anticipatve이라고 하자.
2. 확률변수 $\sigma(S_t, t)$가 “non-explosive"라고 하자.:

$$E\left[\int_0^T \sigma(S_t, t)^2 dt\right] < \infty$$

이 때 Ito 적분

$$\int_0^T \sigma(S_t, t) dW_t$$

은 평균제곱극한

$$\sum_{k=1}^n \sigma(S_{k-1}, k)[W_k - W_{k-1}] \to \int_0^T \sigma(S_t, t) dW_t \quad \text{as} \quad n \to \infty \,(h \to 0)$$

이다.

이 정의에 의하면, 구간의 수가 무한개가 되고 각 구간의 길이는 무한히 작아지게 되면 유한의 합은 Ito 적분에 의해 표현된 확률변수에 근접하게 될 것이다. 분명히, 극한의 확률변수가 존재할 때에만 정의가 의미가 있다. $\sigma(S_{k-1}, k)$가 nonanticipating라는 가정은 그러한 극한의 존재를 위한 기본적인 조건이다.

요약하면, 결정적인 적분과 확률적인 적분의 가장 주요한 세가지 차이가 있다. 첫째, 확률적분에서 사용된 극한의 개념이 다르다. 둘째, Ito 적분은 단지 nonanticipative 함수에 의해서만 정의된다. 셋째, 표준미적분에서의 적분이 함수가 따르는 실제의 “궤도”에 따라 정의되는데 반해, 확률적분은 확률적 동일성 내에서 정의되다. 위의 세가지 원인으로 인해 확률 미적분의 법칙들이 표준 미적분과 다르다.

다음의 예는 Ito 적분의 정의에 있어 평균제곱수렴의 활용을 살펴본 것이다. 두번째 예제에서 왜 Ito 적분이 "pathwise“로 정의될 수 없는가에 대해 보일 것이

다.

3. Ito 적분의 특성

확률미분방정식 $dS_t = a(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t$ 를 구간 $[0, T]$에 대해 적분하면

$$\int_0^T dS_t = \int_0^T a(S_t, t)dt + \int_0^T \sigma(S_t, t)dW_t$$ 가 되며,

우변의 두 번째 적분은 Ito의 의미로 정의된다. 이 적분의 특성은 무엇인가?

3.1 Ito 적분은 마팅게일이다.

Ito 적분이 마팅게일임이 증명된다. 이 특성은 금융이론에서 자산가격의 innovation terms를 모델링하는데에 유용하다. 또한 자산 가격의 실제적인 계산에서도 중요하다.

자산 가격의 변동을 나타내는 모형은 예기치 못한 정보를 나타내는 innovation term을 포함한다. 결과적으로,

$$\int_t^{t+\Delta} \sigma_u dW_u$$ 의 적분은

길이 Δ의 구간 동안 자산가격에 영향을 미치는 예측치 못한 변동(disturbances)의 합이다. t시점에서의 정보집합이 주어졌을 때각 증분이 예측불가능하면, 증분의 합 또한 예측불가능하다. 즉 위의 식은 마팅게일 difference 하다.:

$$E_t\left[\int_t^{t+\Delta} \sigma_u dW_u\right] = 0$$

이 때, 적분

$$\int_0^t \sigma_u dW_u$$

은 마팅게일이 된다.:

$$E_s\left[\int_0^t \sigma_u dW_u\right] = \int_0^s \sigma_u dW_u, \quad 0 < s < t,$$

그러므로, 자산가격의 변동(dynamics)을 나타내는 방정식에서 예측불가능한 innovation terms의 존재는 Ito 적분의 마팅게일 특성과 동시에 발생한다.

이러한 마팅게일 특성을 확정하는 조건은 정보집합 I_t가 주어질 때 σ_t가

nonanticipative라는 것이다.

관심있는 두가지 경우를 살펴보자.

3.1.1 경우 1

변동성(volatility) 모수 $\sigma(S_t, t)$가 자산가격 S_t에 대해 독립인 상수라고 하면, t시점에서:

$$\sigma(S_t, t) = \sigma$$

이 때 Ito 적분은 Riemann 적분과 동일하게 될 것이고 다음과 같이 주어질 것이다.

$$\int_t^{t+\Delta} \sigma dW_u = \sigma[W_{t+\Delta} - W_t]$$

적분에 대한 예측(forecast)은 다음과 같다.

$$E\left\{\int_0^{t+\Delta} \sigma dW_u \mid \int_0^t \sigma dW_u\right\} = \int_0^t \sigma dW_u = \sigma(W_t - W_0) \quad (\text{여기에서 } \Delta>0\text{이다})$$

위의 경우는 위너과정의 증분의 평균이 zero이고 비상관(uncorrelated)되어 있기 때문이다.:

$$E[\sigma(W_{t+\Delta} - W_0) \mid (W_t - W - 0)] = E[\sigma(W_{t+\Delta} - W_t) + \sigma(W_t - W_0) \mid (W_t - W_0)] = \sigma(W_t - W_0)$$

즉, Ito 적분은 마팅게일 특성을 가지고 있다.[21]

따라서, σ가 상수라면, Riemann과 Ito 적분은 동일하게 될 것이며 모두 마팅게일이 될 것이다.

3.1.2 경우 2

반면에, W_t에 의존하는 S_t에 σ가 의존한다면, Ito 적분은 Riemann 적분과 달라지며 마팅게일이다. 반면에 Riemann 적분은 하나가 아니다.

예를 들면, 아래의 diffusion term을 가지는 기초자산의 가격이 기하분포를 따른다면

$$\sigma(S_t, t) = \sigma(S_t)$$

Ito 적분은 Riemann 적분과 다를 것이며, Ito 적분을 추정하기 위해 Riemann 적분을 사용한다는 것은 자기모순(selfcontradiction)이다.

---

21 $W_0 = 0$임을 기억하라.

3.2 Pathwise 적분

확률 미적분에서, 때때로 확률 적분은 pathwise로 정의될 수 없다는 말을 듣는다. 이는 무엇을 의미하는가?

기간 $[0, T]$에서 길이 Δ의 이산구간에서 측정된 이항과정 $S_{t_{i+1}} - S_{t_j}$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 을 생각하자.:

$$S_{t_{i+1}} - S_{t_j} = \begin{cases} \sqrt{\Delta} & \text{with probability } p \\ -\sqrt{\Delta} & \text{with probability } 1-p \end{cases}$$

여기에서 항상 $T = n\Delta$이다.

이 과정(process)의 전형적인 궤도($path$)는 $+\sqrt{\Delta}$와 $-\sqrt{\Delta}$를 따르는 수열이 될 것이다. 구체적인 예를 들면,

$\{\sqrt{\Delta}, \sqrt{\Delta}, -\sqrt{\Delta}, \sqrt{\Delta}, \cdots\}$가 될 것이다.

재무분석가가 다음과 같은 유한의 합

$$V_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(S_{t_{i+1}})[S_{t_{i+1}} - S_{t_i}]$$을 이용하여

다음의 적분

$$\int_0^T f(S_t) dS_t$$

을 추정할려고 한다고 하자.

S_t의 특별한 궤도(path)를 사용하여 V_n이 계산되었다고 가정하자. 예를 들면, $+\sqrt{\Delta}$와 $-\sqrt{\Delta}$가 교대로 궤도를 이룬다고 생각하자.:

$$\{\sqrt{\Delta}, -\sqrt{\Delta}, \sqrt{\Delta}, -\sqrt{\Delta}, \cdots, \sqrt{\Delta}\}$$

V_n에 있는 $S_{t_{i+1}} - S_{t_j}$를 관측치로 교체하면

$$V_n = [f(-\sqrt{\Delta})(-\sqrt{\Delta}) + f(\sqrt{\Delta})(\sqrt{\Delta}) + f(-\sqrt{\Delta})(-\sqrt{\Delta}) + \cdots + f(\sqrt{\Delta})(\sqrt{\Delta})]$$

분명히 V_n의 값은 S_t의 특정한(particular) 궤도에 의존한다. 만약 V_n이 수렴한다면 이를 pathwise 적분이라고 한다.

그러나 pathwise 적분이 확률적 환경에서 수렴한다는 보장은 없다. 간단한 예를 들어보자.

V_n의 함수 $f(\cdot)$가 다음과 같이 주어진다고 하자.

$$f(S_{t_{i+1}}) = sign(S_{t_{i+1}} - S_{t_i})$$

다시말하면, $f(\cdot)$가 $S_{t_{i+1}} - S_{t_j}$의 sign에 의존하는 양(+) 또는 음(-)의 값이다.

이는 V_n의 모든 원소가 양(+)임을 의미하고 그래서

$$V_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\Delta} = n\sqrt{\Delta}$$이다.

$T = n\Delta$를 이용하면

$$V_n = \frac{T}{\sqrt{\Delta}}.$$

분명히 $\Delta \to 0$임에 따라 V_n은 무한대로 간다.

만약 위의 궤도가 발생할 확률이 존재한다면 pathwise sum V_n은 확률적 의미에서 수렴할 수 없다.

이 예는 두가지 이유에서 중요하다.

첫째, pathwise 적분의 의미를 이해할 수 있다. pathwise 적분을 계산하는데 있어 $\Delta S_{t_{i+1}}$와 관련된 확률을 사용하지 않았다. 적분은 과정의 실제값을 이용하여 계산되었다. 반면에 Ito 적분은 평균제곱수렴을 이용하여 계산되고, 확률적 동일성 하에서 결정된다.

둘째, $f(\cdot)$를 nonanticipative 함수로 사용하는 것이 중요하다. 사실 $f(\cdot)$는 "미래 예측 가능"했기 때문에 $S_{t_{i+1}} - S_{t_j}$의 sign을 예측했다. 즉 합에 있는 모든 원소를 양(+)으로 하였고 n이 증가함에 따라 V_n에 수렴하게 하였다.

4. Ito 적분의 다른 특성

Ito 적분은 또 다른 특성을 가지고 있다.

4.1 존재(Existence)

아래의 질문이 있을 수 있다.:식(6)에 의해 주어진 $\{S_t\}$의 일반적 임의함수 $f(S_t, t)$의 Ito 적분

$$\int_0^t f(S_u, u)\, dS_u$$

은 존재하는가?

함수 $f(\cdot)$가 연속이고 nonanticipating이라면 이것의 적분이 존재한다. 다른 말로 하면, 유한의 합

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(S_{t_i}, t_i)[S_{t_{i+1}} - S_{t_i}]$$

의 평균제곱이 "어떤" 확률변수에 수렴한다면 이를 Ito 적분이라 한다.[22]

4.2 상관특성(correlation Properties)

Ito 적분이 확률변수(자세히 말하자면 확률과정)라는 것을 잊어서는 않된다. 그러므로, 여러 가지 적률이 존재한다.

마팅게일 특성은 위너과정

$$E\left[\int_0^T f(W_t, t)\, dW_t\right] = 0,\ (\text{여기에서 } W_t\text{는 위너과정이다.})$$

에 대한 nananticipating $f(\cdot)$ 적분의 1차 적률로 주어진다. 2차 적률은 다음의 분산과 공분산으로 주어진다.

$$E\left[\int_0^t f(W_u, u)\, dW_u \int_0^t g(W_u, u)\, dW_u\right] = \int_0^t E[f(W_u, u)g(W_u, u)]\, du \text{와}$$

$$E\left[\int_0^t f(W_u, u)\, dW_u\right]^2 = E\left[\int_0^t f(W_u, u)^2 du\right]$$

이미 논의된 등식 $dW_t^2 = dt$의 계속적인 사용에 대해 주목하자.

4.3 첨가(addition)

Ito 적분은 Riemann-Stieltjes 적분과 동일한 특성들을 지니고 있다.

특히, 식 (6)에서의 두 (임의) 함수 S_t의 합의 적분은 그것의 적분의 합과 동일하다. 즉,

---

22 비록 존재하더라도 그러한 극한을 명백하게 결정할 수는 없다.

$$\int_0^T [f(S_t, t) + g(S_t, t)]dS_t = \int_0^T f(S_t, t)dS_t + \int_0^T g(S_t, t)dS_t$$

5. Jump Process의 적분

복잡한 확률적분의 정의는 연속시간 마팅게일과 위너과정 모두에 매우 비정상적이었다. 따라서 계속적인(pathwise) 적분의 정의가 불가능하다.

어떤 jump process에 대한 확률적분이라면 위와 같은 문제가 발생하는가? 말하자면 포아송과정을 다루는 데에도 Riemann-Stieltjes 적분을 사용하는가?

놀랍게도, 이 질문에 대한 답은 어떤 조건하에서는 확정적이다.

process M_t가 단지 유한 개의 jumps만을 나타내고 위너과정적 요소를 가지지 않는 마팅게일이라고 하자. M_t의 궤도는 산발적인 jumps를 보일것이며 그렇지 않은 경우는 매우 매끄럽게(smooth) 될 것이다. 이 때, V_n을

$$V_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(M_{t_i})[M_{t_{i+1}} - M_{t_i}]$$ 로 정의한다.

이러한 V_n은 수렴할 것이고 과정 M_t의 변동은 반드시 유한하게 될 것이다. 이런 조건 아래에서 V_n이 pathwise에 수렴한다고 한다.

6. 결 론

이 장은 Ito적분의 정의를 다루었다.

실행자의 관점에서 기억해야 할 두가지 중요한 점이 있다. 첫째, 확률미분방정식의 오차항은 Ito 적분의 의미로 정의된다. 수치적 계산은 이 정의에 의한 조건집합을 만족하여야 한다. 둘째, 일반적으로 자산의 가격결정에 사용된는 확률미분방정식은 Ito 적분의 의미로 정의된다.

무엇보다도 Ito 적분은 어떤 임의 합(random sums)의 평균제곱극한이다.

이러한 임의 합은 결과적인 적분이 마팅게일이 되도록 조심스럽게 합쳐져야 한다.

여러 예들을 논의했고 결정적인 경우와는 달리 확률환경에서 적분의 법칙들(rules)이 일반적으로 매우 다르다는 것을 보였다. 이는 평균제곱수렴을 사용한 결과이다.

다행히, Ito 적분을 평가하는데 있어 평균제곱극한의 계산을 위한 직접적 방법들은 거의 사용되지 않는다. 그러나, Ito 적분은 Ito's lemma를 사용하여 더욱 직접적인 방법으로 구해질 수 있다. 이는 다음 장에서 논의될 것이며 Ito 적분의 계산을 위한 다른 예들을 더욱 보일 것이다.

Chapter 10. 이토의 따름정리 (Ito's Lemma)

1. Introduction

확률적 상황하에서는 미분의 공식적인 개념이 존재하지 않고, 자산의 가격은 예측불가능할 뿐만 아니라, 연속시간에서는 "too erratic"하다. 그래서 확률적 미분이 필요한데, Ito의 법칙은 확률적인 미분을 쉽게 다룰수 있는 분석적인 공식을 제공하고, 계산을 명백한 계산을 할 수 있게 해준다. 이 장에서는 Ito의 법칙을 다룬다.

2. Type of Derivatives

파생상품의 가격의 함수인 $F(S_t, t)$는 두 변수 S_t와 t에 의존하는 함수인데, 이와 동시에 S_t는 시간 t에 의존하므로, S_t자체가 Random Process이다.

이 함수에서 모든 변수가 결정적이라면, 세 종류의 미분방법이 있다.

① partial derivatives(편미분)

$F(S_t, t)$의 편미분은 $F_s = \dfrac{\partial F(S_t, t)}{\partial S_t}$, $F_t = \dfrac{\partial F(S_t, t)}{\partial t}$로 정의되는데, F_s는

S_t의 변화에 대해 $F(S_t, t)$의 반응을 측정하는 것이다.

② tatal derivative

$dF_t = F_s dS_t + F_t dt$로 정의되는데, 이는 시간 t와 기초자산인 S_t의 변화에 대해서 $F(S_t, t)$의 전체반응을 계산하는 것이다.

③ chain rule

$\frac{dF(S_t, t)}{dt} = F_s \frac{dS_t}{dt} + F_t$로 정의되는데, 이것은 t의 변화는 S_t의 변화에 영향을 미치고, S_t의 변화는 $F(S_t, t)$의 변화에 영향을 미치는 경우에, t에 대한 $F(S_t, t)$의 반응을 알고자 할 때 사용된다.

2.1 example

Ito's Lemma

▲ 확률적 상황에서의 chain rule이 Ito's Lemma이다.

▲ 시간의 경과(passing time)는 $F(S_t, t)$에 두가지 방법으로 영향을 미치는 데 ① t(시간)변수가 직접 $F(S_t, t)$에 영향을 미치는 것이고, ② 시간이 경과함에 따라 W_t에 대한 새로운 정보를 얻고, 새로운 증분인 dS_t를 관찰할 수 있는데, 이는 $F(S_t, t)$를 변하게 한다. ②번이 chain rule의 stochastic equivalent

▲ S_t : random process이고,

$[0, T]$: time interval ⇒ n개의 같은 크기로 분할(partition)을 하면, 한 구간의 크기는 h가 된다. 그러면

$\triangle S_k = a_k h + \sigma \triangle W_k, \quad k = 1, 2, \cdots$

는 h가 0에 가까이 감에 따라 조변과 우변은 평균제곱 equivalence이다. Ito's

Lemma를 계산하기 위해서는 이를 이용한다.

▲ Ito's Lemma를 구하기 위해서 먼저 다음의 Taylor series를

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + R$$

$F(S_t, t)$에 적용하려면, 비록 $F(\cdot)$가 S_t에 대한 smooth한 함수지만, 두 가지의 문제점이 생긴다.

① 위의 테일러 급수는 한 개의 변수 x에 대해서 유효하다. 그러나 $F(S_t, t)$는 변수가 2개이다.

② 또한 deterministic일 때 유효하지만 S_t는 random process이다.

그래서 univariate Taylor series formula를 two variable로 확장시켜야 한다.

▲ 테일러 급수 공식을 확률적 상황에 적용시킬 때 주의할 점은

① 테일러 급수의 일부항들은 확률적 상황에서도 미분이 가능한 편미분이다

② dS_t와 같은 미분을 가진다.

▲ 테일러 급수가 아니라 등식의 해석의 관점에서 테일러 급수의 공식은 그대로 남아있지만 같음의 표시의 의미가 변한다. 즉 등식(같은)은 mean square convergence에서 해석되어져야 한다.

▲ $F(S_t, t)$에 테일러 공식을 적용시키면,

$\triangle S_k = a_k h + \sigma_k \triangle W_k$

k : fixed

I_{k-1}, S_{k-1} : 주어진 정보(a known number)라 할 때,

Taylor의 공식을 $(S_{k-1}, k-1)$의 주위에서 확장을 시키면,

$$F(S_k, k) = F(S_{k-1}, k-1) + F_s[S_k - S_{k-1}] + F_t[h] + \frac{1}{F_{ss}}[S_k - S_{k-1}]^2$$
$$+ \frac{1}{F_{tt}}[h]^2 + F_{st}[h(S_k - S_{k-1})] + R$$

단, R : 나머지, F_s, F_{ss}, F_t, F_{tt}, F_{st} : 편미분

위 식에서 $kh-(k-1)h=h$로 사용하고, $F(S_k,k)-F(S_{k-1},k-1)=\triangle F(k)$로 바꾸어주고, $S_k-S_{k-1}=\triangle S_k$로 바꾸어 주면,

$$\Rightarrow \quad \triangle F(k)=F_s\triangle S_k+F_t[h]+\frac{1}{2}F_{ss}[\triangle S_k]^2+\frac{1}{2}F_{tt}[h]^2+F_{st}[h\triangle S_k]+R$$

가 되고, 유한차분근사(finite difference approximation)인 $\triangle S_k=a_kh+\sigma_k\triangle W_k$를 대체시키면,

$$\Rightarrow \quad \triangle F(k)= F_s[a_kh+\sigma\triangle W_k]+F_t[h]+\frac{1}{2}F_{ss}[a_kh+\sigma\triangle W_k]^2+ \frac{1}{2}F_{tt}[h]^2+F_{st}(h)[a_kh+\sigma\triangle W_k]+R$$

가 된다. 단 $\triangle F(k)$는 k와 S_k의 변화에 따른 $F(S_k,k)$의 전체의 변화인데, 이는 짧은 기간에 대한 파생상품의 가격변화이다.

여기에서 First order의 효과는 $F_h(h)$로 표현된 시간의 효과와 기초주식의 가격변화의 효과인 $F_s[a_kh+\sigma_k\triangle W_k]$이다. 이 효과는 예측가능과 예측불가능 성분을 가진다.

second oder효과는 제곱항과 cross항으로 표현되고, higher-oder 항은 나머지로 그룹지어 졌다. 확률적 상황하에서 chain rule을 얻기 위해서 무시할 수 있는 항과 무시할 수 없는 항을 분류하여 무시할 수 있는 항은 제외한다. 그러면 우변에서 무시할 수 있는 항들을 drop시키면 chain rule을 얻을 수 있다.

3.1 The Notion of "Size" in Stochastic Calculus

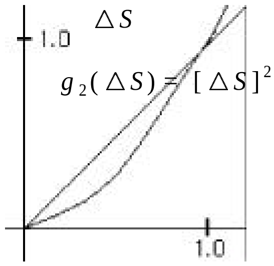
일반적인 계산에서 어떤 함수 $f(S)$를 S_0에 주위에서 테일러 급수의 확장을 이용하면

$$\triangle f=f_0(S_0)\triangle S+\frac{1}{2!}f_{ss}(S_0)(\triangle S)^2+\frac{1}{3!}f_{sss}(\triangle S)^3+R$$

인데, $\triangle S$가 작아짐에 따라 $f_s(S_{0)}(\triangle S)$를 제외하고, 나머지는 무시된다. 왜냐하면 $\triangle S$가 작아지면 $(\triangle S)^2$는 더욱 빨리 작아진다.

즉,

$g_1(\triangle S) = \triangle S$



$[\triangle S]^2$

에서 우측을 그림을 보면 알 수 있다.

그러나 확률적 상황에서는 그렇지 않다. 확률적 상황에서는 시간 t는 결정적이기 때문에, 위의 상황이 적용되어 2차항 이후는 무시되지만, 이 같은 이론적 근거는 dSt^2와 같이 확률적 미분에 대해서는 적용 불가능하다.

9장에서 논의했듯이, 확률적 제곱의 의미에서 $dW_t^2 = dt$가 되기 때문에 dS_t^2은 dt와 비슷한 크기를 가지므로 무시될 수 없는 것으로 간주할 수 있다.

<Convention> W_t의 증감에 의존하는 $g(\triangle W_k, h)$가 주어질 때, 증분에 대해서 $\frac{g(\triangle W_k, h)}{h}$의 비율을 고려하자. 그러면 이 비율이 $h \to 0$에 감에 따라 소멸된다면, 조그만 구간에서 $g(\triangle W_k, h)$가 무시된다고 고려한다.

3.2 First-Order Terms

3.3. Second-Order Terms

3.4. Terms Involving Cross Products

3.5. Terms in the Reminder

4. The Ito Formula

식 (24)에서 $h \to 0$에 따라 무시될 수 있는 항을 제외시키면 다음의 결과를 얻을 수 있다.

Ito Lemma : $F(S_t, t)$는 t와 random process S_t는 $dS_t = a_t dt + \sigma_t dW_t, \quad t \geq 0$, with a_t : drift, σ_t : diffusion 이라고 가정하자. 그러면

$dF_t = \frac{\partial F}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2}\sigma_t^2 dt$, 이고, 이를 dS_t의 SDE로 대체하면

$dF_t = \left[\frac{\partial F}{\partial S_t} a_t + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2}\sigma_t^2\right] dt + \frac{\partial F}{\partial S_t}\sigma_t dW_t$이 된다. 단 이 등식은 평균제곱의 의미에서 성립한다.

따라서 Ito's Formula는 S_t에 대한 SDE를 가져오기 위한 도구로 볼 수 있고, $F(S_t, t)$에 대한 SDE를 결정한다. 즉 식 (37)은 $F(S_t, t)$의 SDE이다.

5. Uses of Ito's Lemma

Ito's lemma는

① 확률변수의 함수에 대한 확률적 미분의 도구를 제공한다.

$F(S_t, t)$: 옵션의 가격이고, S_t : 기초자산의 가격이라고 하면, 옵션가격의 변화를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$dF(S_t, t) = F_s dS_t + F_t dt + \frac{1}{2} F_{ss}\sigma_t^2 dt$$

이 식은 $F(S_t, t)$의 편미분을 대체시키면, 확률적 미분인 $dF(S_t, t)$을 얻을 수 있다.

② Ito's Lemma는 Ito 적분을 계산하는데 유용하다.

5.1 Ito's Formula as a Chain Rule

5.1.1 Example 1

다음과 같이 주어진 Standard한 Wiener process W_t을 생각해 보자.

$$F(W_t, t) = W_t^2.$$

이 함수에서 drift parameter는 0이고, diffusion parameter는 1이다. 이 함수에 Ito formula를 적용시키면 $dF_t = \frac{1}{2}[2dt] + 2W_t dW_t$이다.

그래서 $a(I_t, t) = 1$, $\sigma(I_t, t) = 2W_t$가 된다.

5.1.2 Example 2

5.2 Ito's Formula as an Integration Tool

$\int_0^t W_s dW_s$를 구하려고 한다면 9장에서는 이 적분을 어떤 근사합의 평균 제곱극한을 가져옴으로써 직접 구할 수 있었으나, 여기에서는 Ito's Lemma을 이용하여 구하면 된다.

$F(W_t, t) = \frac{1}{2}W_t^2$을 정의하고, Ito 공식에 적용하면, SDE는 다음과 같다.

$$dF_t = 0 + W_t dW_t + \frac{1}{2}dt$$

여기에서 양변에 적분을 취해 주면 아래와 같다.

$$F(W_t, t) = \int_0^t W_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t ds$$

$F(W_t, t)$를 정의에 따라 대체하고, 적분을 정리하면,

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t$$

가 된다.

▲ Ito 공식을 이용하여 Ito 적분을 계산하는 방법

① 함수 $F(W_t, t)$의 형태를 추측한다.

② Ito 공식을 이용하여 $F(W_t, t)$의 대한 SDE를 얻는다.

③ 얻어진 SDE의 양변에 적분을 취하면, 원래의 적분보다 쉽게 계산되는 적분방적식을 얻을 수 있다.

④ **원하는 결과에 맞게 적분방정식**(integral equation)**을 재정열한다**.

5.2.1 Another Example

6. Integral Form of Ito's Lemma

Stochastic differential**은 조그만 시간구간에 대해** Ito**적분을 단순히 빠른 계산이다**. **그래서** Ito **공식을 적분공식으로 표현하면**, **다음을 얻을 수 있다**.

$$F(S_t, t) = F(S_0, 0) + \int_0^t \left[F_u + \frac{1}{2}F_{ss}\sigma_u^2\right]du + \int_0^t F_s dS_u$$

$\int_0^t dF_u = F(S_t, t) - F(S_0, 0)$**이고**, **위의 식을 다시 정리하면**

$$-\int_0^t F_s dS_u = -[F(S_t, t) - F(S_0, 0)] + \int_0^t \left[F_u + \frac{1}{2}F_{ss}\sigma_u^2\right]du$$

가 된다.

7. Ito's formula in More Complex Setting

Ito**공식은 기초자산** S_t**에 대한** SDE**가 주어질 때** Ito **공식은 함수** $F(S_t, t)$**에 대한**

SDE**를 얻는 방법이다**. **보다 일반화하여** ① **위에서는 확률변수가** S_t**뿐이었는데**, **여러 개의 확률변수**(multivariate case)**를 가질때의** Ito**공식을 생각해볼 수 있다**. ② **금융시장에서는** "rare event"**에 의해서 영향을 받는데**, **이를 단순히** Wiener Process**의 오차항으로 고려하는 것은 부적절하므로**, **자산가격을 도출하는** SDE**에** jump process**를 포함하여** $F(S_t, t)$**의** SDE**를 생각해 보자**.

7.1 Multivariate Case

S_t**가** 2×1 **확률** process**라고 가정하면**, SDE**는 다음과 같다**.

$$\begin{pmatrix} dS_1(t) \\ dS_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma_{11}(t)\, \sigma_{12}(t) \\ \sigma_{21}(t)\, \sigma_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \end{pmatrix}$$

여기에서 $a_i(t)$ $: drift$, $\sigma_{ij}(t) : diffusion$**이다.** $W_1(t)$, $W_2(t)$**는 독립적인** Wiener process(**즉,** $E[\triangle W_1(t) \triangle W_2(t)] = 0$)**이다.** bivariate **구조에서** $S_1(t)$, $S_2(t)$ **는 같은** Wiener components**에 의해서 영향을 받는 두 개의** stochastic process**이다. 또한** $S_1(t)$, $S_2(t)$ **는 오차 요소를 가지기 때문에 특별한 경우(** $\sigma_{12}(t) = 0$, $\sigma_{21}(t) = 0$ **)를 제외하고 일반적으로 상관되어 있다. 그러면 확률변수가** 2**개인 경우의** SDE**는 다음과 같다.**

$$dF_t = F_t dt + F_{S_1} dS_1 + F_{S_2} dS_2 + \frac{1}{2}\left[F_{S_1 S_1} dS_1^{\,2} + F_{S_1 S_2} dS_2^{\,2} + 2F_{S_1 S_2} dS_1 dS_2\right],$$

단,

$$dS_1(t)^2 = \left[\sigma_{11}^2(t) + \sigma_{12}^2(t)\right]$$
$$dS_2(t)^2 = \left[\sigma_{21}^2(t) + \sigma_{22}^2(t)\right]$$
$$dS_1(t)\, dS_2(t) = \left[\sigma_{11}(t)\sigma_{12(t)} + \sigma_{22}(t)\sigma_{21}(t)\right]$$

7.1.1 An Example from Financial Derivatives

7.1.2 Wealth

7.2 Ito's Formula and Jumps

▲ “Rare event" **즉,** Jump**가 있는 경우를 고려해보면,** S_t**에 대한** SDE**는 아래와 같다.** $dS_t = a_t dt + \sigma_t dW_t + dJ_t$

dW_t : standard Wiener process

dJ_t : **가능한 예측할 수 없는** Jump**이다.**

finite interval h**에 대해서,** $\triangle J_t$**는 예측불가능한** innovation**항의 한 부분이기 때문에** $E[\triangle J_t] = 0$(zero mean)**의 가정이 필요하다.**

▲ **점프들 사이에서는 점프시간에서,** τ_i, $j = 1, 2, \cdots$, **이산적 확률적인 양(크기)를 가진 상수이다.**

점프의 구조에 대한 가정

① k**개의 가능한 점프의 형태의 각각의 크기는** $a_i(i = 1, ,2, \cdots)$, **이는 이산적**

이고, 확률적인 양을 가진다.

② jumps는 마지막에 관찰된 S_t에 의존하는 λ_i 비율로 발생한다.

③ 일단 점프가 한 번 발생한다면 그 점프의 형태는 램덤하고 독립적으로 선택된다.

④ a_i 크기의 점프가 발생할 확률은 p_i이다.

그래서 finite지만 small한 h동안에 증분 $\triangle J_t$(증분)은 다음과 같이 표현된다.

$$\triangle J_t = \triangle N_t - \left[\lambda_t h\left(\sum_i^k a_i p_i\right)\right]$$

단, N_t는 t시간까지의 모든 점프의 합을 표현하는 process이다.

▲ $\triangle N_t$는 h동안에 점프가 일어나면, 점프의 값(value)는 a_i가 될 것이다. $\sum_{i=0}^k a_i p_i$항은 기대된 점프의 크기는 나타내고, $\lambda_t h$는 점프가 발생할 확률을 나타낸다.

이런 조건하에서 $\triangle N_t$는 분리된 두 개의 drifts를 합한 것으로 a_t로 표현할 수 있으며, 각각은 Wiener 연속 성분과, S_t에서의 순수한 점프에 속한다. 그래서

$$a_i = \alpha_i + \lambda_t \sum_{i=1}^k (a_i p_i)$$

로 표현된다.

점프 process는 두 개의 randomness를 가지는데, 점프의 발생자체가 random이고, 일단 점프가 발생하면, 점프의 크기도 random이다. 이 같은 구조에서 두 개의 randomness는 서로 독립이라고 가정하면, Ito formula는 다음과 같이 주어진다.

$$dF(S_t, t) = \left[F_t + \lambda_t \sum_{i=1}^k (F(S_t + a_i, t) - F(S_t, t))p_i + \frac{1}{2} F_{ss}\sigma^2\right]dt + F_s dS_t + dJ_F$$

단, dJ_F 는

$$dJ_f = [F(S_t, t) - F(S_t^-, t)] - \lambda_t\left[\sum_{i=1}^k (F(S_i + a_i, t) - F(S_t, t))p_i\right]dt + F_s dS_t + dJ_F$$

이고,

S_t^- 는 다음과 같이 정의된다.

$$S_t^- = \lim_{s \to t} S_s, \qquad s < t$$

8. Conclusions

chapter 11. The Dynamics of Derivative Prices
- stochastic Differential Equations

1. Introduction

1.1 Conditions on a_t and σ_t

▷ $S_t = a(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t$는 S_t와 t에 의존한다. 그러므로 이 매개변수들은 그 자신이 확률변수들이다. 시간 t에서 주어진 정보를 가지고 시장 참가자들에 의해 관찰된어진다. 유용한 정보의 조건은 그들이 상수가 된다는 것이다. 이것은 이 매개변수들이 I_t에 적응되어 있다는 중요한 가정의 결과이다

.

▷ $a(S_t, t)$와 $\sigma(S_t, t)$매개변수는 조건을 만족한다는 가정이 있다.

$$P\left(\int_0^t |a(S_u, u)| < \infty\right) = 1$$

$$P\left(\int_0^t \sigma(S_u, u)^2 du < \infty\right) = 1$$

-> 이 조건들은 동일한 의미를 가진다. 그들은 drift 와 diffusion 매개변수들이 시간에 따라 '너무 많이' 변하지 않을 것을 요구한다.

-> 이 조건에서의 적분은 시간에 관하여 주어져 있다. 이 조건들은 drift 와 diffusion 매개변수들이 확률 1을 가진 제한변동함수(bounded variation function) 라는 것을 내포하고있다.

2. A geometric Description of Paths Implied by SDEs

▷ [figure 1] :

작지만 길이 h인 이산 구간을 고려하자. S_t의 움직임은 두 부분으로 분해된다.

-> 1) 구간동안 기대되는 path

2) 각 $t_k = kh$에서 예상되는 변화에 수직인 두 번째 움직임-> 음이 될 수도 있고 양이 될 수도 있다.

-> 시간에 따른 S_t의 실제적인 움직임은 이 두 부분의 합에 의해 결정되고 heavy line에 의해 표시되어진다.

3. solution of SDEs

▷ SDE는 방정식에 의해 정의되어 있다. 이것이 이 방정식이 알지 못하는 것을 포함하고 있다는 것이다. 이 알지 못하는 것이 확률적 과정 S_t이다.

3.1 해는 무엇을 뜻하는가?

▷ 이산 구간에서의 유한 차분 근사

$$S_k - S_{k-1} = a(S_{k-1}, k)h + \sigma(S_{k-1}, k)\Delta W_k \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

-> 이 방정식의 해는 random process S_t이다. 이 방정식을 만족하는 S_k의 함수를 분포와 적률을 알고자 한다. 그의 궤도가 모든 k에 대하여 방정식을 만족시키는 임의의 수의 수열을 찾는 것은 주어진 $a(\cdot), \sigma(\cdot)$에서는 명확하지 않다.

▷ h가 0으로 다가갈 때 해를 찾는 것이 중요하다.

만일 연속시간 process S_t가

$$\int_0^t dS_u = \int_0^t a(S_u, u)du + \int_0^t \sigma(S_u, u)dW_u$$를 만족한다면

S_t는 $dS_t = a(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t$를 만족하는 해가 된다.

▷ SDE의 해는 random process이기 때문에 이 해의 본질은 ODE와 비교했을 때, 매우 다를 수 있다. 확률적 미적분에서는 두가지 종류의 해가 있다.

3.2 두가지 종류의 해

▷ strong solution

: W_t가 외부적으로 주어진 것이고 S_t가 결정되어질 때

ODE의 해와 같다.

dW_t가 주어질 때, SDE을 만족하는 S_t를 계산할 수있다. S_t의 strong solution을 얻기 위하여 I_t를 알아야한다. 이것은 strong solution이 I_t에 적응되어 있다는 것을 의미한다.

▷ weak solution

: SDE에 특유한다.

$\widetilde{S}_t$과정은

$\widetilde{S}_t = f(t, \widetilde{W}_t)$

-> $\widetilde{W}_t$: Wiener process 이고 이 분포는 S_t와 동일하게 결정된다.

▷만일 둘다 평균 0, 분산 dt를 가진 Wiener process를 따른다면 dW_t와 $d\widetilde{W}_t$의 차이점은 무엇인가?

-> 차이점은 dW_t와 $d\widetilde{W}_t$로 정의된 정보세트의 수열이다.

비록 기초밀도가 같지만, 만일 그들의 다른 정보세트를 측정할 수 있다면 두 random process는 매우 다른 현실의 현상을 표현할 수 있다.

▷ $\widetilde{S}_t$는 정보세트 I_t를 생성하는 process를 계산하지 않는다.

이것은 $\widetilde{W}_t$를 따른다. $\widetilde{W}_t$는 다른 정보세트 H_t를 생성한다. $\widetilde{S}_t$는 I_t에 적응될 필요가 없다. 그러나 $\widetilde{W}_t$는 H_t에 대하여 마팅게일이다.

$d\widetilde{S}_t = a(\widetilde{S}_t, t) + \sigma(\widetilde{S}_t, t)\,d\widetilde{W}_t$

->drift와 diffusion은 SDE 와 같고 $\widetilde{W}_t$는 정보세트 H_t에 적응되어 있다.

3.3 어느 해가 선호되는가?

▷strong 과 weak solution 은 동일한 drift 와 diffusion을 가지고 있다. 그러므로 S_t와 $\tilde{S}_t$는 동일한 통계적 성질을 가진다. 동일한 평균과 분산이 주어지면 우리는 두 해를 구별할 수 없을 것이다. 그러나 두 해의 차이는 있다.

▷strong solution

: error process W_t의 지식을 내포하고 있다.

SDE에서 해를 사용하여 파생상품의 가격을 계산할 때, 우리는 정확한 process W_t를 알지 못 한다. 단지 변동성과 drift만을 알고 있다. 이러한 조건하에서 파생상품의 가격을 결정할 때 사용 된다.

3.4 strong solusion의 논의

▷ 적분방정식에 의한 process S_t의 결정

$$S_t = S_0 + \int_0^t a(S_u, u)du + \int_0^t \sigma(S_u, u)dW_u$$

▷ SDE를 직접 사용하는 것보다 대응하는 적분 방정식을 사용함으로써 해를 증명한다.

-> 이렇게 하는 이유는 확률적 환경에서의 미분이론이 없기 때문이다. 만일 SDE의 해를 위한 지원자가 있다면 미분을 할수 없고 대음하는 미분이 SDE를 만족하는지 볼수 없다.

대신에 두 개의 대체 경로가 있다.

▷ 1. ODE를 고려하자.

$$\frac{dX_t}{dt} = aX_t$$

a: 상수 X_0: given

ramdom innovation은 없고 SDE가 아니다.

$$\frac{dX_t}{X_t} = adt$$

$$[\ln X_t]' = adt$$

$$\int_0^t [\ln X_t]' dX_t = \int_0^t adt$$

$$\ln X_t - \ln X_0 = at$$

$$\ln \frac{X_t}{X_0} = at$$

$$\frac{X_t}{X_0} = e^{at}$$

$$X_t = X_0 e^{at}$$

· 이 해는 두가지 조건을 만족한다.

1) t 에 관해 X_t를 미분한다면 미분은 함수 자체를 a배하는 것과 같다.

-> $\frac{d}{dt}(X_0 e^{at}) = a[X_0 e^{at}]$

2) $t = 0$에서 계산할 때, 함수는 알려져 있다고 가정된 initial point X_0와 동일한 값으로 주어진다.

-> $(X_0 e^{a0}) = X_0$

--> 이 방법은 미분의 개념을 사용한 해를 증명한다.

▷만일 연속 확률 과정의 미분이론이 없다면 동일한 접근이 SDE의 해를 증명하는데 유용할수 없다. 즉 동일한 미분이론(deterministic case)을 가지고 확률적 환경에서 사용한다면 그 해는 잘못된 것이다.

-> $S_t = f(a, \sigma, S_0, t, W_t)$

해는 확률적 과정이 된다. 왜냐하면 이것은 확률변수 W_t 에 의존하기 때문이다.

3.5 SDE해의 증명

▷ $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t W_t$ - Black-Scholes(1973)

S_t: 배당이 지불되지 않는 증권의 가격

$$\frac{1}{S_t} dS_t = \mu dt + \sigma dW_t$$

$$\int_0^t \frac{1}{S_u} dS_u = \int_0^t \mu du + \int_0^t \sigma dW_u$$

-> $\int_0^t \mu du = \mu t$: 임의의 term 을 포함하지 않는다.

-> $\int_0^t \sigma dW_u = \sigma[W_t - W_0]$:임의의 term을 포함하지 않는다.

dW_t의 계수는 시간-불변 상수(time-invariant constant)이다.

한편 $W_0 = 0$

-> $\int_0^t \frac{1}{S_u} dS_u = \mu t + \sigma W_t$

: SDE 의 해는 이 적분 방정식을 만족시켜야한다.

▷ 예)

$$S_t = S_0^{\{(a - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\}}$$

-> strong solution , Ito's lemma

$$dS_t = \frac{\partial S_t}{\partial W_t} dW_t + \frac{\partial S_t}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S_t}{\partial W_t^2} dW_t^2$$

$$= S_0^{\{(a - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\}} \sigma dW_t + S_0^{\{(a - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\}} (a - \frac{1}{2}\sigma^2) dt + \frac{1}{2} S_0^{\{(a - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\}} \sigma^2 dW_t^2$$

$$= S_0^{\{(a - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\}} \{\sigma dW_t + (a - \frac{1}{2}\sigma^2) dt + \frac{1}{2}\sigma^2 dt\}$$

$dS_t = S_t[a dt + \sigma d W_t]$

-> ODE로 계산하면 위와 같은 식이 나오지 않으므로 잘못된 결과를 얻는다.

3.6 중요한 예제

▷ S_t: 임의의 평가 비율을 가진 자산 가격

$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d W_t$

$S_t = S_0 e^{\{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\}}$: SDE 의 strong solution을 한 cadidate

S_T: 미래의 시간 $T > t$ 에서의 가격 시간 t에서 알려져 있지 않다.

$E_t[S_T] = E[S_T | I_T]$: 조건부 기대값으로 주어진 최대의 예측

▷ 자산가격 이론에서 $S_t = e^{-r(T-t)} E_t[S_T]$가 성립하는지에 관심을 가진다.

▷ $E_t[S_T]$ 계산:

$S_T = [S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}][e^{\sigma W_T}]$

S_T에 대한 기대값은 $e^{\sigma W_T}$의 기대값에 의존한다.

-> S_T는 W_T의 비선형함수이다.

-> $E_t[e^{\sigma W_T}]$의 기대값에 접근하는 두가지 방법

1. Wiener process W_T에 대한 밀도함수를 사용하고 적분하여 직접 기대값을 구한다.

$$E_t[e^{\sigma W_T}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma W_T}[f(W_T | W_t)] d W_T$$

2. W_t의 비선형 표현을 선형으로 변환시키고 Wiener process 밀도 함수를 사용하지 않고 기대값을 구한다.

예) $Z_t = E^{\sigma W_t}$: **선형으로 치환**

$$dZ_t = \sigma e^{\sigma W_t} dW_t + \frac{1}{2}\sigma^2 e^{\sigma W_t} dt \quad : \text{Ito's lemma}$$

$$Z_t = Z_0 + \sigma \int_0^t e^{\sigma W_s} dW_s + \int_0^t \frac{1}{2}\sigma^2 e^{\sigma W_s} ds$$

$$E[Z_0] = 1$$

$$W_0 = 0$$

$$E[\int_0^t e^{\sigma W_s} dW_s] = 0$$

$$\text{->} \quad E[Z_t] = 1 + \int_0^t \frac{1}{2}\sigma^2 E[Z_s] ds$$

· **한편** $E[Z_t] = x_t$

$$x_t = 1 + \int_0^t \frac{1}{2}\sigma^2 x_s ds$$

$$\frac{dx_t}{dt} = \frac{1}{2}\sigma^2 x_i$$

$$\text{->} \quad x_t = E[Z_t] = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t} \quad (x_0 = 1)$$

· **한편** $E_t[S_T]$:

$$E_t[S_T] = [S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}] E_t[Z_T]$$

$$E_t[Z_T]$$

$$\text{->} \quad \frac{dx_t}{x_t} = \frac{1}{2}\sigma^2 x_t$$

$$[\ln x_t]' = \frac{1}{2}\sigma^2 x_t$$

$$\int_t^T [\ln x_t]' dx_t = \int_t^T \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

$$\ln x_T - \ln x_t = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)$$

$$\to x_T = x_t \cdot e^{\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}$$

$$\Rightarrow E_t[S_T] = [S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}][e^{\sigma W_t} e^{\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}]$$

$$\to S_t = S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$$

$$E_t[S_T] = [S_t e^{r(T-t)}]$$

$$S_0 = e^{-rT} E_0[S_T]$$

▷ **시간** $t = 0$**에서 자산 가격은 할인율** r**로 할인된 기대 미래 가격과 같다.**

$$\to S_t = e^{-r(T-t)} E_t[S_T]$$

▷ **오늘날의 주식 가격은 일반적인 미적분을 사용해서는 할인율** r**로 할인된 기대 미래 가치와 같아지지 않는다.**

4. SDE의 주요 모델

4.1 선형 상수 계수 SDE

▷ $dS_t = \mu dt + \sigma W_t$

W_t: **분산** t**를 가진 기본적인** Wiener process

μ, σ: **및** t**인 시간을 가지지 않는다.**

-> **시간이 경과하더라도 이들은 변하지 않는다. 그러므로 이들은 정보세트** I_t**에 의존하지 않는다.**

▷ $E_t[\Delta S_t] = \mu h$

$Var(\Delta S_t) = \sigma^2 h$

▷ S_t의 움직임은 기울기 μ를 기진 직선주위에서 변동하는 것같다. σ의 크기는 선 주위에서의 변동의 크기로 결정된다. 이 변동은 시간이 지남에 따라 점점 커지지는 않는다.

-> 이러한 모델은 자산가격의 움직임이 시간이 지남에 따라 안정적이고 추세가 선형, 변동이 크지 않고, 자산가격에 체계적인 점프가 나타나지 않을 때, 유용한 근사값이 된다.

4.2 Geometric SDE

▷ 기초자간 가격 모델에 사용되는 일반적인 SDE는 선형 상수 계수 모델이 아니다,

-> geometric process

▷ $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$ - Black-Scholes

$a(S_t, t) = \mu S_t$

$\sigma(S_t, t) = \sigma S_t$

-> drift 와 diffusion 은 시간 t에서 유용한 정보에 의존한다.

drift 와 표준편차는 S_t와 비율적으로 변한다.

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

-> 비록 자산 가격의 증분의 drift 와 diffusion부분이 변하더라도 S_t에서 퍼센트 변화의 drift 와 diffusion는 여전히 시간 불변 매개변수이다.

▷ 지수 추세를 가지고 성장한다. -> 대부분의 자산가격의 지수 추세가 더 현실적이다.

추세 주위에 임의의 변동을 가진다. 이 변동은 더 높은 가격 때문에 시간에 따라 증가한다.

-> $Var(S_k - S_{k-1}) = \sigma^2 S_{k-1}^2$

-> 분산은 S_t의 제곱의 비율로 증가한다. 따라서 어떤 경우에는 S_t의 분산이 너무 커질 수 있다.

4.3 Square root process

▷ $dS_t = \mu S_t dt + \sigma\sqrt{S_t} dW_t$

S_t : 지수 추세를 따른다.

표준편차는 $\sqrt{S_t}$의 함수로 나타난다.

이것은 S_t에 비례하여 error term의 분산을 만든다.

▷ 만일 자산 가격 변동성이 S_t가 증가할 때 매우 많이 증가하지 않는다면 이 모델은 더 적절 하다.

4.4 Mean Reverting Process - 금리 변동 모델

▷ $dS_t = \lambda(\mu - S - t)dt + \sigma S_t dW_t$

-> S_t는 μ값으로 움직여 간다.

추세를 가지고 있고 이 추세 주위의 편차는 완전히 ramdom이지는 않다.

▷[그림 5] diffusion이 S_t에 의존하지 않기 때문에 process가 음수가 될 수도 있다.

4.5 Ornstein-Uhlenbeck process

▷ $dS_t = -\mu S_t dt + \sigma dW_t$

drift는 매개변수 μ를 통해 S_t에 음의 방향으로 의존하며 diffusion은 상수 매개변수 형태이다.

-> mean reverting SDE의 특수한 경우

0주위의 자산가격의 변동을 나타낸다.

μ가 커질수록 S_t는 더 빨리 평균을 향해 움직인다.

5. 시장 변동성

▷ 가장 간단한 경우로 drift와 diffusion 이 상수인 경우와 좀 더 복잡한 경우로 mean reverting process를 살펴보았다. 좀더 일반적인 SDE로 drift 와 diffusion 매개변수를 random으로 만들 수 있다.

▷ $dS_t = \mu dt + \sigma dW_{1t}$

-> drift : 상수

diffusion : 시간에 따라 변한다.

▷ σ_t가 또다른 SDE 를 따라 변한다고 가정하면

$d\sigma_t = \lambda(\sigma_0 - \sigma_t)dt + \alpha\sigma_t dW_{2t}$ => 변동성

▷ 자산의 변동성은 σ_0의 장기평균을 가진다. 그러나 시간 t에서 실제적인 변동성은 이 장기 평균과 λ로 조정된 매개변수에서 벗어난다. dW_{2t} 증분은 자산가격 S_t로의 충격과는 독립인 변동성에서의 예측할수 없는 충격이 있다.

시장참가자들은 자산가격과 변동성을 위한 예측을 계산해야한다.

Chapter 12. 파생상품의 가격결정 [편미분 방정식]

1. 도입

파생상품의 가격결정의 2가지 중요 기법

①편미분 방정식→ 12・13장

②기초 추세를 마팅게일로의 변화 (등가 마팅게일 척도 이용)

2. 무위험 포트폴리오 구성

$F = F(S_{T,} T)$

F_T: 파생계약의 가격

S_T : 기초증권의 가격

T : 시간

dS_t를 결정하는 함수를 안다면 Ito's lemma를 이용하여 dF_t를 구할수 있다.

즉 dF_t와 dS_t는 dS_t의 innovation부분의 불확실성에 의해 변동된다.

dF_t와 dS_t가 동일하게 dS_t의 innovation부분에 영향을 받으므로 연속시간에서 무위험 포트폴리오의 구성이 가능하게 된다.

P_t가 $F(S_{t,} t)$와 S_t의 포트폴리오에 투자된다면

$P_t = Q_1 F(S_t, t) + Q_2 S_t$

Q_1, Q_2 : 매입된 파생상품과 기초증권의 양

즉 포트폴리오 가중치

여기서 Q_1, Q_2를 상수로 두면

$dP_t = Q_1 dF_t + Q_2 dS_t$

dF_t : 미소시간 간격 dt동안의 파생상품의 가격 $F(S_{t,} t)$의 총변동

기초자산 S_t의 동태적 결정모델을 가정하여 $F(S_{t,} t)$의 움직임을 예측해보자.

SDE : $dS_t = a(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dw_t$

dF_t를 알아내기 위한 Ito's lemma :

$$dF_t = F_t dt + \frac{1}{2} F_{ss} \sigma_t^2 dt + F_s dS_t$$

연립하면 파생상품가격에 대한 SDE

$$dF_t = [F_s a_t + \frac{1}{2} F_{ss} \sigma_t^2 + F_t]dt + F_s \sigma_t dw_t$$

$F(S_{t,} t)$의 함수형태를 알 수 없으므로

$F(S_{t,}t)$를 결정하기 위해 다음과 같은 단계를 거쳐야 한다.

① 시장 참가자들이 포트폴리오의 가중치 Q_1, Q_2를 선택한다.

② dP_t가 dw_t에 대해 독립이라고 두면 dP_t는 완전히 예측가능해진다.

증명 $dF_t\, dS_t$: 예측불가능 성분

Q_1, Q_2 : 시장참가자가 바라는 수준으로 선택

$dP_t = Q_1 dF_t + Q_2 dS_t$

$$dP_T = Q_1[F_t dt + F_s dS_t + \frac{1}{2}F_{ss}\sigma_t^2 dt] + Q_2 dS_t$$

$Q_1 = 1, Q_2 = -F_s$라고 두면

$$dP_T = F_t dt + \frac{1}{2}F_{ss}\sigma_t^2 dt$$

정보집합 It에 대해 임의성을 갖는항이 없으므로 dP_t는 완전히 예측가능하다.

따라서 포트폴리오 P_t는 위험이 없다.

무위험 수익률을 r이라 가정하면

기대자본이득은 $rP_t dt$가 된다.

시간당 σ의 배당금을 지급하는 경우는 $rP_t dt - \sigma dt$가 된다.

$$rP_t dt = F_t dt + \frac{1}{2}F_{ss}\sigma_t^2 dt$$

$$r[F(S_t, t) - F_s S_t] = F_t + \frac{1}{2}F_{ss}\sigma_t^2 \quad 0 \le S_t \;\; 0 \le t \le T$$

$$-rF + rF_s S_t + F_t + \frac{1}{2}F_{ss}\sigma_t^2 = 0$$

여기서 $F = F(S_{t,}t)$

만기일에 기초자산의 가격과 파생상품의 가격의 관계 :

$F(S_{T,}T) = G(S_{T,}T)$

예) 행사가격 K를 갖는 콜옵션의 만기가격

$G(S_{T,}T) = \max[S_T - k, 0]$

편미분 방정식

$$-rF + rF_s S_t + F_t + \frac{1}{2} F_{ss} \sigma_t = 0$$

경계조건

$$F(S_{T,} T) = G(S_{T,} T)$$

3. 편미분 방정식

일반적 형태의 편미분 방정식

$$a_0 F + a_1 F_s S_t + a_2 F_t + a_3 F_{ss} = 0,\ 0 \le S_t \ \ 0 \le t \le T$$

경계조건

$$F(S_{T,} T) = G(S_{T,} T)$$

$G(S_{T,} T)$: **기지함수**

파생상품에 대한 무위험 재정가격을 얻기 위해

무위험 포트폴리오를 형성하는 방법은 항상 유도된다.

3.1 **편미분 방정식은 어떤 이유로 방정식인가?**

3.2 **경계조건이란 무엇인가?**

경계조건은 방정식의 핵심적인 부분이다.

물리-초기치나 종단치

재무-계약조항을 나타냄(파생계약의 최초가 종가)

예) 인도일의 선물가격과 현물가격은 동일하다

4.편미분 방정식의 분류

①선형・비선형

선형편미분방정식 - F와 F의 편미분 간의 선형결합

②계수

편미분의 계수 - 1계,2계

③특성

타원형,포물선형,쌍곡선형

금융모형-포물선형

4.1 **보기1 : 선형 1계 편미분 방정식**

함수 $F(S_t, t)$**에 대한 편미분방정식**

$F_t + F_s = 0$, $0 \le S_t$ $0 \le t \le T$

(**의미**) - S_t**가 고정되었을 때 작은 시간 간격동안의 파생상품의 가격변동**

= t**가 고정되었을 때 기초자산 가격에 대한 파생상품의 가격변동**

위의 방정식을 만족하는 $F(S_t, t)$**를 구해본다면**

$F(S_t, t) = \alpha S_t - \alpha t + \beta$, any α, β

$\frac{dF}{dt} = -\alpha, \frac{\partial F}{\partial S_t} = \alpha$

경계치가 주어지지 않으면 $F(S_t, t)$**의 값을 확정할 수 없다.**

그림1. $F(S_t, t) = 3S_t - 3t + 4$

$-10 \le t \le 10$, $-10 \le S_t \le 10$

그림2. $F(S_t, t) = 2S_t - 2t - 4$

$-10 \le t \le 10$, $-10 \le S_t \le 10$

그림1과 그림2는 해를 확정할 수 있으나 함수 $F(S_t, t)$**에 대한 편미분방정식** : $F_t + F_s = 0$**은** $F(S_t, t)$**를 유도할 수 있는 충분한 정보가 없으므로 해를 확정할 수 없다.**

식 $F(S_t, t) = \alpha S_t - \alpha t + \beta$**에 경계조건이 첨가된다면** $F(S_t, t)$**를 유도해낼 수 있다.**

만기시점 t=s**에서의 가격이** $F(S_s, s) = 6 - 2S_s$**로 알려진 경우**

$\alpha = -2, \beta = -4$

따라서 $F(S_t, t) = -2S_t + 2t - 4$

여기서 $F(100, t) = 5 + .3t$**를 동시에 만족시키는 해를 구해낼수는 없다.**

$\rightarrow F(S_t, t)$**의 해가 평면인 경우는 편미분방정식을 풀기위해 하나의 경계조건이 필요하다.**

* $F(S_t, t)$**가 평면이면 경계조건은 직선이다.**

4.1.1 **주의**

편미분방정식 $F_t + F_s = 0$**의 해는 평면에 제한되지 않는다**.

예) $F(S_{t,} t) = e^{\alpha S_t - \alpha t}$

4.2 **보기**2 : **선형**2**계 편미분방정식**

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = .3 \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2}$$

$$-.3F_{ss} + F_{tt} = 0$$

함수 $F(S_{t,} t)$**를 아래와 같이 두면**

$$F(S_t, t) = \frac{1}{2}\alpha (S_t - S_0)^2 + \frac{.3}{2}\alpha (t - t_0)^2 + \beta(S_t - S_0)(t - t_0)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = .3\alpha \ , \ \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} = 1\alpha$$

$\alpha, \beta, s_{0,} t_0$**와 같은 값으로 구성되어 있으므로 위 편미분 방정식의 해는 유일하지 않다**.

따라서 경계조건이 필요하다.

미지수가 4**개이므로** 2**개의 경계조건이 요구된다**.

$$F(10, t) = 100 + t^2$$
$$F(S_{0,} 0) = 50 + S_0^2$$

그림3.

$$F(S_t, t) = -10 (S_t - 4)^2 - 3 (t - 2)^2$$

$$-10 \leq t \leq 10, -10 \leq S_t \leq 10$$

$$t = 10, F(S_{10}, 10) = -10 (S_{10} - 4)^2 - 192$$

$$S_t = 0, F(0, t) = -160 - 3 (t - 2)^2$$

$$\alpha = -20, \beta = 0, S_0 = 4, t_0 = 2$$

5. 주의 : 이변수, 이차방정식

2차방정식은 원,타원,포물선, 쌍곡선과 같은 그래프로 나타난다.

2차방정식의 정의 :

$A x^2 + Bxy + C y^2 + Dx + Ey + F = 0$

A,B,C,D,E,F 값이 선정에 따라 원,타원,포물선,쌍곡선과 같은 형태가 된다.

5.1 원

A=C , B=0인 경우

$A x^2 + A y^2 + Dx + Ey + F = 0$

완전제곱형태로 정의하면

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R$:원의 방정식

증명

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 = R$$

$$\frac{1}{R} = A, -\frac{2x_0}{R} = D, -\frac{2y_0}{R} = E, \frac{x_0^2 + y_0^2}{R} = F$$

R=0 :점원

A=C=0 : 직선

5.2 타원

$B^2 - 4AC < 0$인 경우

$B \neq 0$, x^2과 y^2의 계수가 상이함을 제외하면 원과 동일

$\alpha(x - x_0)^2 + \beta(y - y_0)^2 + r(x - x_0)(y - y_0) = R$: 타원의 방정식

5.2.1 예

$9x^2 + 16y^2 - 54x - 64y + 3455 = 0$

$B^2 - 4AC = -576$

$9(x - 3)^2 + 16(y - 2)^2 = 3600$

$$\frac{(x-3)^2}{400} + \frac{(y-2)^2}{225} = 1$$

5.3 **포물선**

$B^2 - 4AC = 0$ **인 경우**

예) $B = 0$ **이고** $A = 0$ **또는** $C = 0$

$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$: **포물선 방정식의 일반형**

5.4 **쌍곡선**

$B^2 - 4AC > 0$ **인 경우**

6. 편미분 방정식의 유형

$a_0 + a_1 F_t + a_2 F_s + a_3 F_{ss} + a_4 F_{tt} + a_5 F_{st} = 0$

$a_5^2 - 4a_3 a_4 < 0$ **타원형 편미분 방정식**

$a_5^2 - 4a_3 a_4 = 0$ **포물선형 편미분 방정식**

$a_5^2 - 4a_3 a_4 > 0$ **쌍곡선형 편미분 방정식**

그림 3.

$a_s = 0, a_{3,} a_4$ **는 동일부호**

$a_5^2 - 4a_3 a_4 < 0$ **타원형 편미분 방정식**

6.1 **보기** : **포물선형 편미분 방정식**

그림 4.

$F(S_t, t) = -10(S_t - 4)^2 - 3(t - 2)$

$$- \frac{1}{4} F_{ss} + \frac{5}{3} F_t = 0$$

$a_5^2 - 4a_3 a_4 = 0$

$a_4 = 0, a_5 = 0$

13장 Black-Scholes의 편미분 방정식[응용]

1. 도입

이 장의 목적

①Black-Scholes(`73)의 편미분방정식을 풀이하여 함수에 대한 기하학적 고찰을 한다.

-> 콜옵션가격에 대한 단일의 임의 요인을 갖는 편미분방정식의 기하학적인 함축적 의미를 안다.

②두 개의 요인을 도입함으로써 기존의 Black-Scholes 모형을 개선한다.

③수치적 접근법으로 편미분방정식의 closed form 해와 비교해 본다.

2. Black-Scholes의 편미분방정식

우리가 고려할 특별한 편미분방정식

$$a(S_t, t) = \mu S_t$$
$$\sigma(S_t, t) = \sigma S_t \quad t \in [0, \infty)$$

Black-Scholes의 편미분방정식

$$-rF + rF_s S_t + F_t + \frac{1}{2} F_{ss}\sigma^2 S_t^2 = 0, \quad 0 \le S_t, \ 0 \le t \le T$$

경계조건: $F(T) = \max[S_T - K, 0]$

편미분방정식의 해

$$F(S_t, t) = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2)$$

여기서

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$
$$N(d_i) = \int_{-\infty}^{d_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \quad i = 1, 2$$

2.1 Black-Scholes수식의 기하학적 고찰

K, r, σ, T 의 수치값을 구하고 $F \times s \times t$ 의 3차원 공간에 나타내어 보자.

편미분방정식의 매개변수:

$r=.065$, $k=100$, $\sigma=.80$, $T=1$

-> 무위험이자율 6.5%, $t \in [0,1]$동안의 변동율 80%

만기 1년, 행사가격 100

[그림1-2] S_t와 t값에 대한 $F(S_t, t)$값을 나타낸 그림

A=(130, .2)

B=F(130, .2)

aa' : $t = 1 \sim 0$, $S_t = 100$

bb' : $t = .6$, $S_t = 60 \sim 140$

cc' : $t = 1$, $S_t = 60 \sim 140$

-> K에서 꺾어진 형태로서 만기에서의 옵션손익형태를 나타낸다.

Black-Scholes의 수식에 의해 그림과 같은 곡면이 유도되어진다.

임의의 어떠한 사건이 발생하면 곡면이 이동되는 것이 아니라 곡면상의 궤도가 그림8과 같은 형태로 임의의 운동을 하게 된다.

위너과정의 증분은 예측불가능하고, t에 대한 주가의 변동도 임의의 운동을 하기 때문이다.

다만 시간에 따른 주가의 변동과 파생상품가격의 변동은 동일한 임의성을 가지므로 파생상품 가격 변동에 대한 주가의 변동은 정사영의 관계에 있다.

3. 자산가격결정에서의 편미분방정식

Black-Scholes의 편미분방정식의 가정

①기초자산가격은 고정

②무배당

③만기일 이전에 행사되지 않는 유럽형옵션

④무위험이자율은 상수

⑤거래비용이 없음

대부분 파생상품의 가격결정에서는 하나 혹은 그 이외의 가정이 제외된다.

예)미국형 콜옵션으로 가정하면 경계조건이 변화한다.

3.1 제2의 요인

3.1.1 상수 배당

상수 배당율 δ가 주어진 경우

무위험 포트폴리오 등식에서

$$P_t = \theta_1 F(S_t, t) + \theta_2 S_t, \quad t \in [0, T]$$

예측불가능한 성분을 제외하고 완전헷지 형태로 만들기 위해

$\theta_1 = 1 \quad \theta_2 = -F_s$ 로 두면

$$dP_t = F_t dt + \frac{1}{2} F_{ss} \sigma_t^2 dt$$

따라서 P_t는 완전히 예측가능함

*완전히 예측가능하면 자본이득은 무위험수익률과 같다.

여기서 기초자산이 예측가능한 δ의 배당수익률을 지급한다면 자본이득과 지급되는 배당금의 합은 무위험 포트폴리오의 수익률과 같아야 하므로

$$dP_t + \delta dt = rP_t dt$$

위 식과 연립하여 편미분방정식 유도

$$rF - rF_s S_t - \delta - F_t - \frac{1}{2} F_{ss} \sigma_t^2 = 0$$

따라서 상수배당금을 지급하는 경우의 편미분방정식은 Black-Scholes의 편미분방정식에서 약간 변형된 형태를 나타낸다.

3.1.2 확률적 제2의 요인

제2의 요인이 예측 불가능한 확률성분을 포함한 경우는 다소 난해해진다.

상수 배당율을 갖는 경우

$$dD_t = \delta dt$$

만약 배당금이 위너 과정을 따른다면

$$dD_t = a^* dt + \sigma^* dW_t^*$$

(dW_t^*:위너과정의 증분)

여기서 제2의 요인 D_t를 배당금이 아니라 콜옵션가격에 영향을 주는 다른요인 (예를 들면 이자율, 변동성)으로 간주하자.

편미분방정식의 유도

파생상품의 가격 $F(\cdot)$가 D_t에 직접적인 영향을 받는다고 볼 수 있으므로

$$F(t) = F(S_T, D_t, t), \quad t \in [0, T]$$

SDE를 고려하면

$$dF(t) = F_t dt + F_S ds_t + F_D dD_t + \frac{1}{2} F_{SS} (dS_t)^2 + \frac{1}{2} F_{DD} (dD_t)^2 + F_{DS} dD_t dS_t$$

미소구간에서 마지막 항을 무시하면

$$dF(t) = F_t dt + F_S DS_t + F_D dD_t + \frac{1}{2} F_{SS} \sigma_t^2 dt + \frac{1}{2} F_{DD} \sigma^{*2} dt$$

$$dP_t = \theta_1 dS(t) + \theta_2 [F_t dt + F_S DS_t + F_D dD_t + \frac{1}{2} F_{SS} \sigma_t^2 dt + \frac{1}{2} F_{DD} \sigma^{*2} dt]$$

따라서 θ_1, θ_2를 적절히 선정하여 dP_t를 확률치를 갖지 않는 증분형태로 나타낼 수 있을 까?

만약 $\theta_1 = -F_s$, $\theta_2 = 1$로 두면

-> dS_t는 소거되지만 dD_t는 여전히 수식에 남게 된다.

따라서 무위험 수익률 형태로 수식화할 수 없다.

3.1.3 예외

D_t가 S_t에 대해 지급되는 연속배당율을 나타낸다고 가정하자.

기초자산의 가격에 임의적인 모든 충격이 순간적으로 D_t에 반영될 것이다.

따라서 D_t는 확률적이며 주가 S_t에 영향을 받는 예측 불가능한 운동을 할 것이다.

$$dD_t = a_t^* dt + \sigma_t^* dW_t$$

$$dS_t = a_t dt + \sigma_t dW_t$$

기초자산과 배당금은 서로 다른 드리프트와 확산계수를 갖지만 예측불가능한 충격은 동일한 위너과정의 변동을 유발한다.

$$dS_t dD_t = \sigma_t \sigma_t^* dt$$

$$dP_t = \theta_1 (a_t dt + \sigma_t dW_t)$$
$$+ \theta_2 [F_t dt + F_S (a_t dt + \sigma_t dW_t) + F_D (a_t dt + \sigma_t dW_t) + \frac{1}{2} F_{SS} \sigma_t^2 dt + \frac{1}{2} F_{DD} \sigma_t^{*2} dt + F_{SD} \sigma_t \sigma_t^* dt]$$

dW_t와 dW_t^*이 완전상관관계를 가지므로 F_{SD}를 포함한 마지막 항이 남아

있다.

dt와 dW_t를 묶어내면

$$dP_t = \theta_1 a_t dt + \theta_2 [F_t + F_S a_t + F_D a_t^* + \frac{1}{2} F_{SS} \sigma_t^{*2} + F_{SD} \sigma_t \sigma_t^*] dt$$
$$+ [\sigma_t(\theta_1 + F_S \theta_2) + \theta_2 \sigma_t^* F_D] dW_t$$

θ_1, θ_2를

$$\theta_1 = -\frac{(F_S \sigma_t + \sigma_t^* F_D)}{\sigma_t}, \quad \theta_2 = 1$$ 이라 두면

dP_t는 확률항이 없는 형태로 변형된다.

4.이색옵션

4.1 룩백옵션

유동형 룩백콜옵션의 경우 손익은 S_T와 S_{min}의 차액 $(S_T - S_{min})$이다.

여기서 S_{min}은 옵션보유기간 중의 기초자산의 최저가

고정형 룩백콜옵션의 경우 옵션손익은 K와 S_{max}의 차액이다.

4.2 래더옵션

래더옵션은 기초자산이 경계가격에 도달시 옵션수익률이 고정되는 몇 개의 경계가격을 갖고 있다.

4.3 Knock-in옵션 [트리거 옵션]

옵션보유기간동안 현물가격이 경계가격 아래로 떨어지면 유럽형 옵션과 동일한 기능을 한다.

만약 경계가격에 도달하지 않으면 만기시 약간의 리베이트를 보상해준다.

4.4 Knock-out옵션

옵션보유기간동안 기초자산 가격이 경계가격 아래로 떨어지면 즉시 만기가 되는 유럽형 옵션이다.

만약 떨어지지 않는다면 표준형 유럽형 옵션과 동일한 기능을 한다.

4.5 그 외의 이색옵션

· 바스켓 옵션

기초자산이 여러개의 다양한 금융자산으로 이루어져 있어 기초자산이 하나일 때보다 변동성이 감소된다.

· 다중기초자산옵션

옵션의 손익이 두가지 이상의 기초자산의 가격수준에 의해 결정되는 옵션을 말한다.

무지개 콜옵션- $F(S_{1T}, S_{2T}, T) = \max[0, \max(S_{1T}, S_{2T}) - K]$

스프레드 콜옵션- $F(S_{1T}, S_{2T}, T) = \max[0, (S_{1T} - S_{2T}) - K]$

포트폴리오 콜옵션- $F(S_{1T}, S_{2T}, T) = \max[0, (\theta_1 S_{1T} + \theta_2 S_{2T}) - K]$

이중행사가격 콜옵션- $F(S_{1T}, S_{2T}, T) = \max[0, (S_{1T} - K_1), (S_{2T} - K_2)]$

· 평균가격옵션[아시아형 옵션]

옵션보유기간 동안의 기초자산가격의 평균을 계산하여 이를 만기일의 기초자산가격으로 사용하는 옵션

4.6 관련된 편미분방정식

표준 Black-Scholes와 이색옵션의 차이점

① 옵션의 만기가치가 옵션보유기간 중 발생하는 사건에 의존

-> 기초자산 가격의 최대치의 함수를 갖거나 Black-Scholes보다 훨씬 더 복잡한 경계조건을 갖는 등 다양한 형태로 나타난다.

② 파생상품의 조건에 따라 임의의 만기일이 만들어질 수 있다.

즉 만기일이 변동될 수 있다.

③ 두가지 이상의 자산을 기초자산으로 가질 수 있다.

예) knock-out옵션

S_t가 옵션의 보유기간동안 K_t에 도달하면 옵션 보유자는 리베이트 R_t금액을 돌려주고 옵션은 만기가 된다. 그렇지 않으면 표준형 유럽형 옵션이 된다.

관련된 편미분방정식을 유도하여 보자

기초자산이 옵션의 보유기간동안 경계가격 K_t이상이면 표준경우의 편미분방정식과 같다.

$$\frac{1}{2}\sigma_t^2 F_{SS} + rF_S S_t - rF + F_t = 0 \quad \text{if } S_t > K_t$$
$$F(S_T, T, K_T) = \max[S_T - K_T]$$

경계가격 K_t아래로 떨어지면

$$F(S_t, t, K_t) = R_t, \quad \text{if } S_t \le K_t$$

즉 Black-Scholes의 모형과 편미분방정식은 같으나 옵션의 조건에 따라 경계

조건은 달라진다.

5. 실제적인 편미분방정식의 해법

5.1 Closed-Form Solutions

Black-Scholes가 이용한 방법과 유사한 방법으로 파생상품 가격의 움직임을 나타낸 편미분방정식이 모든 경우에 closed form으로 해를 구할 수 있는 것은 아니라는 사실이 밝혀졌다.

일반적으로 편미분 방정식으로 풀기가 쉽지 않거나 closed form으로 표현할 수 있는 해가 아닌 경우에 그러하다.

우선 closed form과 수치해석의 차이점을 설명하면

함수 $F(S_t, t)$가 적절한 편미분

$$-rF + rF_s S_t + F_t + \frac{1}{2} F_{ss} \sigma^2 S_t^2 = 0, \quad 0 \le S_t, \ 0 \le t \le T$$

와 같은 등식을 만족시킨다면 편미분방정식은 풀려진다.

이제 편미분이 편미분방정식을 참으로 만족시키는 것과 같은 연속 곡면을 찾을 수 있다. 그러나 Black-Scholes의 경우에서와 같은 쉽고 알맞은 편미분방정식 형태로 이 표면을 나타 내는 것은 불가능하다.

다시 말해서 비록 해가 존재하더라도 이 해는 S_t와 t의 알맞은 함수로서 표현할 수 없다. 우리는 유사한 경우를 이용함으로써 토론해 볼 것이다. 그림4 에서 보여진 $F(t)$의 함수를 고려하자. 제시된 바와 같이 $F(t)$는 명백히 연속이고 부드럽다. 따라서 제시된 영역에서 $F(t)$는 시간에 관해 미분가능이다 그러나 $F(t)$는 다소 임의의 형태로 그려졌다. 그리고 이 곡선이 t에 대한 일부의 항을 포함하는 compact formlula에 의해 나타내어진다고 기대되어질 이유는 없다. 예를 들면 지수함수 $F = a_1 e^{a_2 t} + a_3$은 이 곡선으로 나타내어질 수 없다는 것이 명백하다. 사실상 일반적인 연속이고 부드러운 함수에 대해 그런 closed form은 존재하지 않을 것이다. 단순한 Black-Scholes경우의 편미분방정식의 해는 $S_t, t, F(S_t, t)$에 의해 생성되는 3차원 공간에서의 곡면이다. 그러므로 그림5,6에 관한 같은 논의가 여기서 또한 행해질 수 있다. 3차원 공간 $F \times t \times S_t$에서 부드럽고 연속인 곡선이 주어진다면, 편미분은 잘 정의되어질 것이고 어떤 편미분방정식을 만족시킬 것이다. 그러나 closed form에 의해 표현될 수는 없을 것이다. 그러므로 편미분방정

식의 해는 존재할 것이지만 closed form표현은 존재하지 않을 것이다. 사실상 그런 수식이 3차원에서 부드러운 곡면으로 나타내어지는 것으로 강제되어지는 것으로 주어진다면 이것은 종종 예외라기보다는 오히려 특정한 경우일 것이다.

5.2 수치 해석법

수치해석법은 $F(S_t,t)$에 대한 closed form을 구하지 않고 직접적으로 $F(S_t,t)$로 표현된 곡면을 계산하는 것과 같다.

이러한 편미분방정식을 수치적으로 풀기 위해 편미분방정식이 S_t와 t의 유한한 증분에 대한 해석이 타당하다고 가정하자.

1. ΔS의 격자 크기를 기초증권가격에 대한 최소 증분으로 설정한다.
2. Δt의 격자 크기도 시행착오법 사용에 충분할만큼 작게 설정한다.
3. S_t가 가질 수 있는 값의 범위를 결정한다.

$$S_{min} \leq S_t \leq S_{max}$$

4. 경계 조건을 결정한다.
5. 작지만 무한소가 아닌 ΔS_t와 Δt에 대해 수치해석법이 타당하다는 것을 전제한다면 격자점에서 $F(S_t,t)$의 값이 결정된다.

그림 6,7에서 점의 간격이 가까울수록 보다 정밀한 곡면값이 구해진다.

수치해석법을 행하기 위해 모든 편미분기호를 근사차분으로 대체함으로써 편미분방정식을 차분방정식으로 변환한다.

$$\frac{\Delta F}{\Delta t} + rS\frac{\Delta F}{\Delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\Delta^2 F}{\Delta S^2} = rF$$

후방차분

$$\frac{\Delta F}{\Delta t} \simeq \frac{F_{ij} - F_{ij-1}}{\Delta t}$$

$$rS\frac{\Delta F}{\Delta S} \simeq rS_i \frac{F_{ij} - F_{i-1j}}{\Delta t}$$

전방차분

$$rS\frac{\Delta F}{\Delta S} \simeq rS_i \frac{F_{i+1j} - F_{ij}}{\Delta S}$$

$$\frac{\Delta^2 F}{\Delta S^2} = \left[\frac{F_{i+1j} - F_{ij}}{\Delta S} - \frac{F_{ij} - F_{i-1j}}{\Delta S}\right]\frac{1}{\Delta S}$$

위 수식의 반복적인 계산에 의해 값이 결정된다.

5.2.1 경계조건

옵션에 대한 경계조건

· S_t가 매우 높은 경우

$S_t = S_{max}$라 두면

$$F(S_{max}, t) \simeq S_{max} - Ke^{-r(T-t)}$$

옵션가격이 만기시 손익에 근접

· S_t가 매우 낮은 경우

$S_t = S_{min}$라 두면

$$F(S_{min}, t) \simeq 0$$

이익을 획득할 가능성이 거의 없으므로

· t=T 일 때

$$F(S_T, T) = \max[S_T - K, 0]$$

The famous Black-Scholes formula:

$$c = SN(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2)$$

$$p = Xe^{-rT}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

where

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

S=stock price, X=strike price, T= time to maturity in years, r=risk-free rate and σ = volatility.

14. Pricing Derivative Products
- Equivalent Martingale Measures -

1. 확률의 전환

무재정거래 포트폴리오를 내재한 PDEs를 전개하는 것만이 파생자산의 가격결정을 위한 방법이 아니다. Girsanov 정리를 이용하여 기초적인 확률분포를 전환시킴으로써 가능하다.

이 장은 전환의 방법들을 제시할 것이다.
먼저, 간단한 개념과 표시형식(notation)을 다시 살펴보고 다음으로 Girsanov 정리를 이용한 간단한 예제를 보인다. 전체 정리는 다음에 보일 것이다. 그리고 이 정리를 사용한 다양한 직관적 예제를 보인다. 마지막으로 이 정리를 복잡한 예제들에 적용시켜 볼 것이다.

이 장의 목적은 기초 확률분포의 전환을 위한 개념을 분명히 하는 것이다.

1.1 "측정치(measure)"로서의 확률

$$z_t \sim N(0,1)$$

$$f(z_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z_t^2}$$

$$P\left(\bar{z} - \frac{1}{2}\Delta < z_t < \bar{z} + \frac{1}{2}\Delta\right) = \int_{\bar{z}-\frac{1}{2}\Delta}^{\bar{z}+\frac{1}{2}\Delta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z_t^2} dz_t$$

$$\int_{\bar{z}-\frac{1}{2}\Delta}^{\bar{z}+\frac{1}{2}\Delta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z_t^2} dz_t \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\bar{z}^2} \int_{\bar{z}-\frac{1}{2}\Delta}^{\bar{z}+\frac{1}{2}\Delta} dz_t$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\bar{z}^2} \Delta$$

위의 식에서의 확률은 넓이 Δ, 높이 $f(\bar{z})$인 직사각형으로 표현되는 질량 "mass"이다. 확률은 작은 구간에서의 z_t의 가능한 값과 관련한 "measure"에 상응한다. 확률은 "measure"라 불린다. 왜냐하면 그것은 재정거래 sets를 음이 아닌 실수 R^+로 mapping하기 때문이다. 무한히 작은 Δ에 대해 dz_t로 나타내며 이것의 measures는 기호 $dP(z_t)$ 또는 간단히 dP로 나타낸다.

$$dP(\bar{z}) = P(\bar{z} - \frac{1}{2}dz_t < z_t < \bar{z} - \frac{1}{2}dz_t)$$

확률변수 z_t가 중심이 $\bar{z}$이고 무한히 작은 dz_t의 구간안에 놓일 확률이라고 말할 수도 있다. 이런 확률들의 합은 모든 $\bar{z}$에 대한 $dP(\bar{z})$를 더함으로써 구할 수 있다.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dP(z_t) = 1$$

$$E[z_t] = \int_{-\infty}^{+\infty} z_t dP(z_t)$$

위의 식은 z_t의 평균값으로 볼 수 있다. 기하학적으로, 이것은 확률질량(probability mass)의 중심(center)을 결정한다.

$$E[z_t - Ez_t]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [z_t - E[z_t]]^2 dP[z_t]$$

이 또한 기하학적 의미를 가진다. 즉, 중심에 대해서 확률질량의 분산의 정도를 나타낸다.

따라서, 특정한 확률 척도 dP에 대해 논의할 때 확률변수의 밀도에 관한 shape와 location를 염두에 두어야 한다.

이러한 조건하에서 확률밀도를 두 형태로 전환할 수 있다.

- 분포의 모양은 그대로 두고 밀도를 다른 위치로 바꾸는 것이다. [그림 2]
- 분포의 모양을 바꿀 수 있다. 즉, 분포의 분산을 줄이거나 늘이는 방법이다. 이는 원래의 확률변수를 scaling함으로써 가능하다. [그림 3]

파생자산의 가격결정을 위한 현대적인 방법은 확률 척도 dP를 전환해서 확률과정 z_t의 평균을 변하게 하는 것이다. 이러한 변환은 양(+)의 risk premium을 가진 자산을 마치 무위험인 것처럼 사용하도록 한다.

다음의 두 절에서 확률변수의 평균을 변화시키는 두가지 다른 방법에 대해 논의하고자 한다.

2. 평균의 전환

시점 t를 고정시키고 z_t를 일변량 확률변수라 하자. z_t의 평균을 변화시키는 두 가지 방법이 있다. 먼저, z_t로 가능한 값들을 조정한다. 두 번째로, z_t의 가능값들은 변화시키지 않는 대신에 그에 관련한 확률을 조절한다.

두 방법 모두 원래의 평균은 변화시키는 반면 원래 확률변수의 다른 특성들은 모두 보유하고 있다. 그러나, 첫 방법이 자산의 가격결정에는 쓰이지 않지만 두 번째 방법은 매우 유용하게 쓰인다.

2.1 방법 1 : 가능 값의 조정

새로운 확률변수 $\tilde{z}_t$를 구하기위해 단순히 상수 μ를 z_t에 더한다. 즉, $\tilde{z}_t = z_t + \mu$.

예를 들면, 원래 $E[z_t] = 0$이라면 새로운 확률변수 $\tilde{z}_t$의 기대값은

$$E[\tilde{z}_t] = E[z_t] + \mu = \mu$$

2.1.1 예제 1

확률변수 Z가 다음과 같이 정의된다고 하자. 주사위가 던져지고 규칙에 의해 Z가 각각 다음의 값을 가진다.

$$Z = \begin{cases} 10 & \text{roll of 1 or 2} \\ 3 & \text{roll of 3 or 4} \\ 1 & \text{roll of 5 or 6} \end{cases}$$

특정의 숫자가 나올 확률이 $1/6$이라고 가정하면,

$$E[Z] = \frac{1}{3}[10] + \frac{1}{3}[-3] + \frac{1}{3}[-1] = 2$$

새로운 확률변수 $\tilde{Z} = Z - 1$로 정의하면,

$$E[\tilde{Z}] = \frac{1}{3}[10 - 1] + \frac{1}{3}[-3 - 1] + \frac{1}{3}[-1 - 1] = 1$$

위에서 보여지듯이 전환을 통해 Z의 값을 조정하였고, 확률은 변하지 않았다.

2.1.2 예제 2

금융에서 좀더 구체적으로 적용될 수 있는 확률변수의 평균변화에 대해 예를 들어보겠다.

triple-A-rated인 사채의 수익률이 R_t라면

$$E[R_t] = r_t + E[\text{risk premium}]$$

여기에서 r_t는 재정증권의 무위험수익률이고, $E[\cdot]$는 모든 가능한 상황에서의 기대값을 나타낸다.

α를 (상수의) 기대 위험 프리미엄이라고 하자.

$$E[R_t] = r_t + \alpha$$

이 때 R_t는 평균 $r_t + \alpha$를 가지는 확률변수이다.

R_t의 평균을 변화시키는 첫 번째 방법은 상수를 더해서 새로운 확률변수 $\tilde{R}_t = R_t + \mu$를 생성하는 것이다. 이 확률변수의 기대값은

$$E[R_t + \mu] = r_t + \mu + \alpha$$ 이다.

평균의 전환하기 위해 위의 방법을 쓸려면 위험 프리미엄 α를 알고 있어야 한다. 이런 조건하에서만 R_t에서 균형 무위험 수익률을 산출할 수 있다.

2.1.3 예제 3

S_t, $t = 1, 2, \cdots$를 배당을 지급하지 않는 어떤 금융자산의 가격이라고 하자.

S_t는 이산시간에서 관찰되어 진다.

r_t는 무위험 이자률이라 하자. 전형적인 위험자산 S_t는 무위험 이자률인 r_t보다 큰 R_t의 수익률을 가져야 한다. 따라서

$$E_t[S_{t+1}] > (1 + r_t)S_t$$ 이다.

즉, 평균적으로 위험자산은 무위험 투자의 성장률보다 크다.

$$\frac{1}{(1+r_t)} E_t[S_{t+1}] > S_t$$

여기에서 좌변은 무위험 이자율로 할인한 기대 미래가격을 나타낸다.

$\mu > 0$에 대하여,

$$\frac{1}{(1+r_t)} E_t[S_{t+1}] = S_t(1+\mu)$$

양의 상수 μ 즉 $\mu + \mu r_t$는 위험 프리미엄으로 해석될 수 있다. 식 (25)를 변형하면

$$\frac{E_t[S_{t+1}]}{S_t} = (1+r_t)(1+\mu)$$

좌변의 식 $E_t[S_{t+1}/S_t]$는 전체 기대 수익률, $E_t[1+R_t]$를 의미한다. 즉,

$$E_t[1+R_t] = (1+r_t)(1+\mu)$$

위의 식은 위험 자산의 기대 수익률은 무위험 자산의 기대수익률보다 약 μ만큼 상회하여야 한다.

$$E_t[R_t] \cong r_t + \mu$$

여기에서, r_t와 μ는 매우 작기 때문에 cross-product term은 생략되었다.

이러한 조건에서, μ는 자산을 한 기간동안 소유할 때의 위험 프리미엄이며, $\frac{1}{(1+r_t)}$는 무위험 할인률이 된다.

어떤 재무 분석가가 오늘 특정 자산의 공정한 시장가치를 얻고자 한다고 하자. 즉, 분석가는 S_t를 계산하고자 한다.

$$E_t\left[\frac{1}{(1+R_t)} S_{t+1}\right] = S_t$$

그러나 위의 계산을 위해서는 R_t의 분포를 알아야 하는데 이를 위해 위험 프리미엄 μ를 알아야 한다. 그러나 공정 시장가치 S_t를 알기 이전에 위험 프리미엄을 아는 것은 드물다. 그러므로 식 (29)를 S_t의 계산에 활용하기 어렵다.

반면에 μ를 사용하지 않도록 R_t를 변환하여 사용한다면 가능하다. 그러므로 R_t의 분포를 변환하는 다른 방법이 필요하다.

만약 다른 확률 분포 $\tilde{P}$ 를 이용하여 새로운 기대값을 계산하면

$$E_t^{\tilde{P}}\left[\frac{1}{(1+r_t)}S_{t+1}\right]=S_t$$

이는 S_t 를 계산하는데에 매우 유용하다. 즉, S_t 의 추정치를 제공한다.

이 경우에 $E_t^{\tilde{P}}[\cdot]$와 r_t 는 무엇을 의미하는가? r_t 는 무이험 이자율이 될 것이고 기대식은 위험 중립(risk-neutral) 확률로 주어질 것이다. 이러한 변환으로 R_t에서 위험 프리미엄을 제거할 수 있다.

$$R_t-\mu=r_t$$

2.2 방법 2 : 확률을 조정

확률변수의 평균을 변화시키는 두 번째 방법은 확률변수는 “intact"하게 두고, z_t 에 대한 대응되는 확률척도(probability measure)를 변환시킴으로써 가능하다. 여러 예제를 통해 이 방법을 소개한다. 마지막에는 이 방법을 연속시간 확률과정(stochasticc processes)으로 확장된 Girsanov 정리를 소개한다.

2.2.1 예제 1

앞 절에서의 첫 예제에서 Z 가 다음과 같이 정의되었다.

$$Z=\begin{cases}10 & \text{roll of 1 or 2}\\ 3 & \text{roll of 3 or 4}\\ 1 & \text{roll of 5 or 6}\end{cases}$$

앞에서 계산된 평균은

$$E[Z]=2$$

분산은

$$Var(Z)=E[Z-EZ]^2=\frac{1}{3}[10-2]^2+\frac{1}{3}[-3-2]^2+\frac{1}{3}[-1-2]^2=\frac{98}{3}$$

이 확률변수의 평균은 1이 되게하고 분산은 변하지 않게 변환한다고 가정하자.
주사위를 굴릴 때의 원래 확률을 다음과 같이 변환한다고 하자.

$$P(\text{getting 1 or 2})=\frac{1}{3}\rightarrow\tilde{P}(\text{getting 1 or 2})=\frac{122}{429}$$

$$P(\text{getting } 3 \text{ or } 4) = \frac{1}{3} \rightarrow \widetilde{P}(\text{getting } 3 \text{ or } 4) = \frac{22}{39}$$

$$P(\text{getting } 1 \text{ or } 2) = \frac{1}{3} \rightarrow \widetilde{P}(\text{getting } 5 \text{ or } 6) = \frac{5}{33}$$

새로운 확률이 $\widetilde{P}$ 로 표시된 것을 주의하라.

이런 새로운 확률하에 평균을 계산하자.

$$E^{\widetilde{P}}[Z] = \left[\frac{122}{429}\right]10] + \left[\frac{22}{39}\right]-3] + \left[\frac{5}{33}\right]-1] = 1$$

분산은

$$E^{\widetilde{P}}[Z]^2 = \frac{122}{429}[10-1]^2 + \frac{5}{33}[-1-1]^2 + \frac{22}{39}[-3-1]^2 = \frac{98}{3}$$

분산은 변하지 않았다. 확률의 변환은 첫 번째 방법과 같은 결과를 얻었다. 하지만 두 번째방법은 Z 의 값보다는 확률척도 P(Z)을 조절했다.

이러한 새로운 확률들은 실험에서의 “true” odds와 관련되어 있지 않다는 것을 강조하는 것은 가치있다. 주사위를 던지는 것과 관련한 "ture" 확률은 원래의 숫자 P 로 주어져 있다.

독자는 우리가 채택한 기호에 주목할 지도 모른다. 사실 새로운 기대수식을 $E[\cdot]$로 하는 대신 $E^{\widetilde{P}}[\cdot]$로 나타내었다. 평균을 계산하는데 사용된 확률은 P 와 같지 않으며 $E[\cdot]$를 사용하는 것은 잘못된 결론에 이를 수 있다. 분명히 이 방법이 사용될 때, 즉 기대값을 계산할 때 사용되는 확률 분포에 대한 특별한 주의가 필요하다.

3. Girsanov 정리

앞에서 논의된 예제는 매우 단순한 것이었다. 첫째, 유한의 값을 가지는 확률변수를 다루었다. 즉, 상황이 유한하였다. 둘째, 확률과정을 이용하지 않고 하나의 확률변수만을 다루었다.

Girsanov 정리는 하나의 확률척도를 더욱 복잡한 다른 “equivalent” 척도로서 변환시키는 일반적 틀을 제공한다. 이 정리는 브라운운동의 경우도 포함한다. 그러므로 상황공간이 연속적이며 전환이 연속시간 확률과정으로 확정되어 진다.

이렇게 전환된 확률은 같은 정의역에 양의 확률을 할당하기 때문에

“equivalent”이라고 불리어진다. 따라서 두 확률분포가 서로 다르다할지라도 적절한 전환으로 하나의 척도로 다른 것을 극복할 수 있다. 그러한 recoveries가 가능하기 때문에, 계산하기에 더욱 “편리한” 분포를 사용하게되며, 원한다면 원래의 분포로 되돌릴 수도 있다.

따라서, 기대값을 계산하는데에 동등한 척도로서 계산하는 것이 쉽다면 확률을 바꾸어서하는 것이 유리할 것이다. 비록 새로운 척도가 실제의 상황을 만족하지 않더라도. 결국, 목적은 여러 가지 상황에 대한 언급을 할려고 하는 것이 아니라 편리한 방법으로 quantity를 계산할려는 것이다.

일반적 방법이 다음과 같이 정리되어진다. (1) 계산할 기대값이 있다. (2) 원래의 확률척도를 전환하여 더욱 쉽게 기대값을 구한다. (3) 새로운 확률로 기대값을 계산한다. (4) 결과가 계산되어지고, 원한다면 이 확률을 원래의 분포대로 전환할 수 있다.

이러한 확률 전환을 더욱 복잡한 방법으로 논의한다. Girsanov 정리는 더욱 복잡한 특별한 경우에 사용될 것이다. 이제 일반적인 정리의 가정과 응용을 살펴보겠다.

3.1 정규분포의 확률변수

$$z_t \sim N(0, 1)$$

$$dP(z_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z_t)^2}$$

이 예제에서 비록 확률과정을 사용하지 않고 하나의 확률변수만을 사용하지만, 상황공간은 연속이다.

다음의 함수를 정의한다.

$$\xi(z_t) = e^{z_t \mu - \frac{1}{2}\mu^2}$$

$\xi(z_t)$에 $dP(z_t)$를 곱하면 새로운 확률이 나온다.

$$[dP(z_t)][\xi(z_t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z_t)^2 + \mu z_t - \frac{1}{2}\mu^2} dz_t$$

$$[d\tilde{P}(z_t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}[z_t - \mu]^2} dz_t$$

분명히 $d\tilde{P}(z_t)$**는 새로운 확률 척도이다.**

$$d\tilde{P}(z_t) = dP(z_t)\xi(z_t)$$

$d\tilde{P}(z_t)$**는 평균** μ **이고 분산이** 1**인 정규분포의 확률변수이다.**

식(45)**는 여전히 종모양이고 같은 분산을 가지는** Gaussian **곡선이다. 하지만** $P(z_t)$**와** $\tilde{P}(z_t)$**는 다른 척도이다. 그것은 다른 평균을 가지고** z**축에 대해 서로 다른 가중치를 할당한다.**

척도 $P(z_t)$**하에서 확률변수** z_t**는 평균** 0, $E^P[z_t] = 0$**이고 분산** $E^P[z_t^2] = 1$**이다. 그러나 새로운 확률 척도** $\tilde{P}[z_t]$**하에서는** z_t**의 평균은** $E^{\tilde{P}}[z_t] = \mu$**이고 분산은 변하지 않는다.**

확률척도를 새로운 확률척도로 전환하는 $\xi(z_t)$**가 존재한다는 것을 보였다.**

마지막으로 척도의 전환은,

$$d\tilde{P}(z_t) = dP(z_t)\xi(z_t)$$

$$\xi(z_t)^{-1}d\tilde{P}(z_t) = dP(z_t)$$

전환으로 z_t**의 분산은 변하지 않고,** μ**와** σ**가 주어질 때** unique**하다.**

두가지 방법을 요약할 수 있다.

▶ **방법** 1 : **평균을 차감한다.**

$$Z \sim N(\mu, 1)$$

$$\tilde{Z} = \frac{Z - \mu}{1} \sim N(0, 1)$$

▶ **방법** 2 : equivalent **척도를 이용한다.**

$$Z \sim P = N(\mu, 1)$$

확률 dP **에** $\xi(Z)$**를 곱해서 새로운 확률** $\tilde{P}$ **을 구한다.**

$$Z \sim \tilde{P} = N(0, 1)$$

다음은 정규분포의 확률변수의 수열이 주어질 때 같은 전환이 이루어지는지 알아보자.

3.2 정규분포 벡터

고정된 t에 대해서 정규의 결합분포인 확률변수 z_{1t}, z_{2t}가 주어진다.

$$f(z_{1t}, z_{2t}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Omega|}} e^{-\frac{1}{2}[(z_{1t}-\mu_1)(z_{2t}-\mu_2)]\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}(z_{1t}-\mu_1) \\ (z_{2t}-\mu_2)\end{bmatrix}}$$

여기에서 Ω는 $[z_{1t}, z_{2t}]$의 분산 공분산 행렬이다.

$$\Omega = \begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2\end{bmatrix}$$

$|\Omega|$ 는 determinant를 나타낸다.

$$|\Omega| = \sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2$$

마지막으로 μ_1, μ_2 는 각각 z_{1t}, z_{2t} 의 평균이다.

결합확률척도는 다음과 같이 정의된다.

$$dP(z_{1t}, z_{2t}) = f(z_{1t}, z_{2t})dz_{1t}dz_{2t}$$

z_{1t}, z_{2t}의 분산은 변화시키지 않고 평균을 μ_1, μ_2에서 0로 변환할려고 한다. 앞의 예제에서와 마찬가지로 함수 $\xi(z_{1t}, z_{2t})$를 곱해서 확률 $dP(z_{1t}, z_{2t})$를 전환할 수 있는가?

답은 “예”이다.

$$\xi(z_{1t}, z_{2t}) =$$

이를 이용하여 새로운 확률척도 $\hat{P}(z_{1t}, z_{2t})$를 얻을 수 있다.

$$d\hat{P}(z_{1t}, z_{2t}) = \xi(z_{1t}, z_{2t})dP(z_{1t}, z_{2t})$$

$\hat{P}(z_{1t}, z_{2t})$는 식(53)에 $\xi(z_{1t}, z_{2t})$를 곱해서 얻어진다. 이 두 식의 곱은 다음고 같다.

$$d\hat{P}(z_{1t}, z_{2t}) =$$

이는 평균 0이고 분산-공분산 행렬 Ω를 가지는 확률벡터 $[z_{1t}, z_{2t}]$에 대한 이항 정규 확률이다. 이항 벡터의 음이 아닌 평균은 기초 확률의 전환을 통해 제거될 수 있다.

이 예제는 이항확률벡터를 다룬다. 만약 k개의 정규분포 확률변수

$[z_{1t}, z_{2t}, \cdots, z_{kt}]$의 확률 수열이 있다면 정확히 같은 전환이 적용될 수 있다. 단지 대응되는 벡터와 행렬의 순서만을 변화시킨다면 가능하다.

3.2.1 Note

앞으로 논의되겠지만 독자가 이미 관찰한 규칙에 대해 강조하고자 한다.

z_t를 길이 k의 벡터, 즉 단순히 다변량 확률변수를 나타낸다고 생각하자. 확률척도 $P(z_t)$를 $\widetilde{P}(z_t)$로 변환하는데에 함수 $\xi(z_t)$가 사용되었다. 이 함수는 다음의 구조를 따른다.

$$\xi(z_t) = e^{z_t'\Omega^{-1}\mu + \frac{1}{2}\mu'\Omega^{-1}\mu}$$

scalar의 경우는

$$\xi(z_t) = e^{1\frac{z_t\mu}{\sigma^2} + \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}}$$ 이다.

이제 이 함수 형식의 근원에 대해 살펴보고자 한다. 정규분포에서 모수 μ(평균)은 단지 e의 지수로써 나타난다. 더욱이 이 지수는 제곱의 형태로 나타난다. :

$$-\frac{1}{2}\frac{(z_t - \mu)^2}{\sigma^2}$$

이 식을 다음으로 전환하기 위해

$$-\frac{1}{2}\frac{(z_t)^2}{\sigma^2}$$

다음을 더하여야 한다.

$$\frac{-z_t\mu + 1/2\mu^2}{\sigma^2}$$

이것이 $\xi(z_t)$의 함수 형식을 결정짓는다. 원래의 확률척도에 $\xi(z_t)$를 곱해서 e의 지수변환을 이룬다.

독자는 $\xi(z_t)$가 진정으로 무엇을 나타내는지 더욱 깊은 이해를 바랄 것이다. 다음 절이 이 문제를 논의한다.

3.3 Radon-Nikodym Derivative

$\sigma = 1$일 때의 함수 $\xi(z_t)$를 고려하자.

$$\xi(z_t) = e^{-\mu z_t + \frac{1}{2}\mu^2}$$

새로운 확률척도 $\tilde{P}(z_t)$를 얻기 위해 $\xi(z_t)$를 이용한다.

$$d\tilde{P}(z_t) = \xi(z_t)\, dP(z_t)$$

즉, 양변을 $dP(z_t)$로 나누면,

$$\frac{d\tilde{P}(z_t)}{dP(z_t)} = \xi(z_t)$$

이 표현은 derivative으로 간주될 수 있다. 이는 $\xi(z_t)$가 주어질 때 P에 대한 척도 $\tilde{P}$의 derivative으로 읽혀진다. 이러한 derivative는 Radon-Nikodym derivatives로 불리우며, $\xi(z_t)$는 척도 P에 대한 확률 척도 $\tilde{P}$의 밀도로 생각될 수 있다.

이에 따라 만약 P에 대한 $\tilde{P}$의 Radon-Nikodym derivative가 존재한다면, 결과로 나타난 밀도 $\xi(z_t)$를 분산구조는 변화시키지 않은채 z_t의 평균을 전환시키는데 사용할 수 있다.

분명히, 이러한 전환은 변동성의 구조는 변화시키지 않은채 자산가격의 위험프리미엄이 제거될수 있기 때문에 금융시장 실무자들에게 매우 유용하다. 예를 들면, 옵션의 경우 옵션가격 은 기초자산가격의 평균성장률에 의존하지 않는다. 반면 기초자산의 변동성은 기초적인 결정요소이다. 그러한 환경에서 원래의 확률분포를 $\xi(z_t)$를 이용하여 전환한다는 것은 매우 편리하다.

그림 4는 이러한 함수 $\xi(z_t)$의 예를 보인다.

3.4 Equivalent Measures

Radon-Nikodym derivative

$$\frac{d\tilde{P}(z_t)}{dP(z_t)} = \xi(z_t)$$가 존재하는가?

즉, 어떤 조건에서 다음의 전환을 수행할 수 있는가?

$$d\tilde{P}(z_t) = \xi(z_t)\, dP(z_t)$$

경험적으로 다음의 비율을 의미있게 사용하기 위해 분모를 0으로 하지 않는 확률질량이 필요하다.

$$\frac{d\tilde{P}(z_t)}{dP(z_t)}$$

그러나 분자, 분모는 각각 무한의 구간 dz에 할당된 확률이다. 그러므로 Radon-Nikodym derivative 가 존재하기 위해서 $\tilde{P}$는 dz에 음이아닌 확률을 할당해야 한다. 다른말로 하면,

조건 : 구간 dz_t가 주어질 때, 확률 P와 $\tilde{P}$는 다음을 만족하여야 한다.

$$\tilde{P}(dz)>0 \quad \text{if and only if} \quad P(dz)>0$$

위의 조건이 만족되면, $\xi(z_t)$가 존재하며, 항상 두 척도 $\tilde{P}$와 P 사이에서 다음의 관계로 이동할 수 있다.

$$d\tilde{P}(z_t) = \xi(z_t)dP(z_t)$$ 와

$$dP(z_t) = \xi(z_t)^{-1}d\tilde{P}(z_t)$$

이는, 모든 실제적인 목적에서, 두 척도가 동일(equivalent)하다는 것을 의미한다.

그러므로, 이 둘은 equivalent 확률척도라 불린다.

4. Statement of the Girsanov Theorem

연속시간 금융의 응용에서, 예제는 여전히 제한된다. 연속시간 금융에서 연속적인 즉 우연속인 확률과정을 다룬다. 반면에 전환은 단지 확률변수의 유한의 수열만을 포함한다. Girsanov 정리는 Radon-Nikodym derivative $\xi(z_t)$가 존재한다는 조건에서만 제공된다. 이 때 z_t는 연속 확률과정이다. 연속 금융에서 확률척도의 전환은 이 정리를 사용한다.

먼저 Girsanov 정리의 형식을 살표본다. 구간 $[0, T]$에서 정보집합 $\{I_t\}$가 주어진다. T는 유한하다.

이 구간에서 확률과정 ξ_t를 다음과 같이 정의한다.

$$\xi_t = e^{\left(\int_0^t X_u dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t X_u^2 du\right)}, \qquad t\in[0, T]$$

여기에서 X_t는 I_t-measurable 과정이다. W_t는 확률분포 P 를 가진 Wiener 과정이다. X_t에 추가조건을 부여한다. X_t는 변동이 심하지는 않다.

$$E[e^{\int_0^t X_u^2 du}] < \infty, \qquad t \in [0, T]$$

이는 X_t가 시간의 경과에 따라 "지나치게 빨리" 증가하거나 감소할 수 없음을 의미한다.

식 (77)은 Novikov 조건으로 알려져 있다.

연속시간에서 밀도 ξ_t는 매우 중요한 "새로운" 특성을 가진다. Novikov 조건이 만족된다면 ξ_t는 제곱 적분가능 마팅게일이 된다.

Ito's lemma를 사용하여, 다음의 미분을 계산하면,

$$d\xi_t = [e^{\int_0^t X_u dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t X_u^2 du}][X_t dW_t]$$

이는 다음으로 줄일 수 있다.

$$d\xi_t = \xi_t X_t dW_t$$

또한, 단순히 $t = 0$를 식 (76)에 대입하면

$$\xi_0 = 1$$

따라서, 식 (79)의 확률 적분을 취하면

$$\xi_t = 1 + \int_0^t \xi_s X_s dW_s$$

그러나 다음의 항

$$\int_0^t \xi_s X_s dW_s$$

은 Wiener 과정에 대한 확률적분이다. 또한, $\xi_s X_s$는 I_t-adapted이고 "매우 빠르게" 변화하지 않는다. 이 모든 것은 적분이 6장에서 보여졌듯이, (제곱 적분가능) 마팅게일이라는 것을 의미한다.

$$E[\int_0^t \xi_s X_s dW_s \mid I_u] = \int_0^t \xi_s X_s dW_s$$

여기에서 $u < t$ 이다.

식 (81) 때문에, ξ_t 는 (제곱 적분가능) 마팅게일이라는 것을 의미한다.

▶ Girsanov 정리

만약 (76)과 같이 정의되어진 과정 ξ_t가 정보집합 I_t에 대해 마팅게일이라면, 다음과 같이 정의되는 $\widetilde{W}_t$는

$$\widetilde{W}_t = W_t - \int_0^t X_u du, \qquad t \in [0, T]$$

I_t와 다음으로 주어지는 $\widetilde{P}_T$

$$\widetilde{P}_T(A) = E^P[1_A \xi_T]$$

에 대한 Wiener 과정이다.

여기에서 A 는 I_t의 사상이며, 1_A는 사상의 지시함수이다.

경험적으로, 이 정리는 다음을 말한다. 만약 Wiener 과정 W_t가 주어지면 이것의 확률과정에 에 ξ_t를 곱해서 확률분포 $\widetilde{P}$를 가지는 새로운 Wiener 과정 $\widetilde{W}_t$를 얻을 수 있다. 두 과정은 다음의 식으로 관련되어 있다.

$$d\widetilde{W}_t = dW_t - X_t dt$$

즉, $\widetilde{W}_t$는 W_t에서 I_t-adapted drift를 제거함으로써 얻어진다.

이러한 변환을 위한 중요한 조건은 ξ_t가 $E[\xi_T] = 1$인 마팅게일이라는 것이다.

이제 Girsanov 정리의 기호와 가정을 자세히 논의한다.

5. A Discussion of the Girsanov Theorem

이 절에서는 Girsanov 정리에 체계적으로 사용된 기호와 가정을 살펴보고 앞에서 논의된 예제에 관련시켜 본다. 또한 금융모형에서의 개념의 연관성을 살핀다.

$$\xi_t = e^{\frac{1}{\sigma^2}[\int_0^t X_u dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t X_u^2 du]}$$

여기에서 적분에서 상수의 σ^2을 분명히 factored out.

그렇지 않다면, 이 항은 X_u와 함께 쓰일 수 없다.

X_u가 상수이고 μ와 같다면:

$$X_u = \mu$$

직접적인 방법으로 지수에 적분을 취하고 $W_0 = 0$이다.

$$\xi_t = e^{\frac{1}{\sigma^2}[\mu W_t - \frac{1}{2}\mu^2 t]}$$

이는 앞에선 논의한 $\xi(z_t)$와 유사하다. 이는 다음의 중요한 점을 나타낸다.

1. Girsanov 정리에 사용된 기호 X_t는 간단한 setting에서의 μ와 같은 역할을 한다. 이는 원래의 "평균"이 얼마나 변하는 지를 측정한다.

2. 앞의 예제에서 μ는 time independent였다. 여기에서 X_t는 어떤 확률 질량에 의존한다. 그러므로 더욱 복잡한 drift 변환도 가능하다.

3. ξ_t는 마팅게일이다. $E[\xi_t] = 1$

$\widetilde{W}_t$와 W_t는 모두 표준 Wiener 과정이다. 따라서 drift항을 가지지 않는다. 하지만 둘은 서로 관련되어 있다.

$$d\widetilde{W}_t = dW_t - X_t dt$$

이는 X_t가 0이 아니라면 둘 중에서 하나는 음이 아닌 drift를 가는다는 것을 의미한다.

$\widetilde{W}_t$가 $\widetilde{P}$의 조건에서 zero drift를 가지는 반면 W_t는 P의 조건에서 zero drift를 가진다. 그러므로 확률척도를 P 에서 $\widetilde{P}$ 로 바꿀 수 있는 동적 시스템에서 $\widetilde{W}$는 예상할 수 없는 오차를 나타내는데 사용된다.

또한 $\widetilde{W}_t$가 $-X_t dt$항을 포함하기 때문에

만약 X_t가 시간-dependent 위험 프리미엄으로 이해된다면 전환은 모든 위험 자산을 무위험 이자율로 성장할 것이다.

마지막으로, 다음의 관계를 생각하자.

$$\widetilde{P}_T(A) = E^P[1_A \xi_T] = \int_A \xi_T dP$$

A 가 무한구간인 경우 이는

$$d\widetilde{P}_T = \xi_T dP$$

이는 앞에서 간단한 예제에서 보여진 확률전환과 비슷하다.

5.1 SDEs의 응용

dS_t가 주식가격의 증분변화라고 하자. 이러한 변화는 정규분포를 따르는 무한히 작은 충격에 의해 나타나며 S_t를 Wiener 과정 W_t에 의해 유도되는 확률미분방정식을 이용하여 표현할 수 있다.

$$dS_t = \mu dt + \sigma d W_t, \qquad t \in [0, \infty)$$

여기에서 $W_0 = 0$이다.

W_t는 확률분포 P를 가진다고 가정한다.

$$dP(W_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2t}(W_t)^2} d W_t$$

분명히 S_t는 만약 drift 항 μdt가 0가 아니라면 마팅게일이 될 수 없다.
다음을 다시 생각하자.

$$S_t = \mu \int_0^t ds + \sigma \int_0^t d W_s, \qquad t \in [0, \infty)$$

즉,

$$S_t = \mu t + \sigma W_t$$

$$E[S_{t+s} | S_t] = \mu(t+s) + \sigma E[W_{t+s} - W_t | S_t] + \sigma W_t = S_t + \mu s$$

여기에서

▶ S_t를 마팅게일로 변환하는 방법

▷ 방법 1 : S_t에서 적절한 평균을 뺀다.

$$\hat{\tilde{S}}_t = S_t - \mu t$$

→ S_t는 마팅게일이 된다.

▷ 방법 2 : Girsanov 정리를 이용하여 S_t의 drift가 0이 되도록 동일척도 $\hat{P}$로 변환

- $E^P[S_{t+s} | S_t] > S_t$

- $E^{\widetilde{P}}[S_{t+s} \mid S_t] = S_t$

- **위의 전환을 위해 먼저 $\xi(S_t)$가 필요**

-> p.d.f : $f_s = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 t}(S_t - \mu t)^2}$ **즉,** $S_t \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$

-> **확률척도** $dP(S_t) = f_s\, dS_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 t}(S_t - \mu t)^2} dS_t$

-> $\xi(S_t) = e^{-\frac{1}{\sigma^2}[\mu S_t - \frac{1}{2}\mu^2 t]}$

-

$$d\widetilde{P}(S_t) = \xi(S_t) dP(S_t) = e^{-\frac{1}{\sigma^2}[\mu S_t - \frac{1}{2}\mu^2 t]} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 t}(S_t - \mu t)^2} dS_t$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 t}(S_t)^2} dS_t$$

즉, $S_t \sim N(0, \sigma^2 t)$

- **이는** S_t**의 증분이 새로 유도된 항** $\widetilde{W}_t$**에 의해 표현된다.**

$dS_t = \sigma d\widetilde{W}_t$

6. Conclusion

▶ S_t**를 마팅게일과정으로 변환**

◆ S_t**의 분포를** P **에서** $\widetilde{P}$ **로 바꿈으로써 변환**

-> **이는 새로운 오차항** $\widetilde{W}$**를 사용하여 가능**

◆ **새로운 오차항** $\widetilde{W}$**는** W**와 분산이 같다.**

◆ S_t**의 평균을 변화시킨 것은 "상수를 제거"함으로써 가능한 것이 아니라,**

분포의 변화를 통해서 가능하다.

◆ 변환은 S_t 를 마팅게일로 바꾸는데 사용되었다.

chapter 15. Equivalent Martingale Measures - Applications

1. Introduction

▷ equivalent martingale measures의 방법이 어떻게 적용될수있는지 알아보자.

▷ 배당이 지급되지 않는 주식 S_t의 유럽형 콜옵션의 무재정 가격 C_t을 계산하는 방법

1. Black- Scholes 접근법
   (1) 무위험 포트폴리오 형성
   (2) $F(S_t, t)$에서의 편미분 방정식
   (3) PDE를 직접적으로 혹은 수치해석적으로 풀이

2. martingale 방법
   : S_t가 martingale 이 되는 합성확률 $\tilde{P}$를 찾는다.

$$C_t = E^{\tilde{P}}e^{-r(T-t)}[\max(S_T - K, 0)]$$

▷ 이 장의 구성

1. martingale 접근법의 단계적인 처리를 제공한다.
   Black-Scholes에 의해 주어진 가정에서 시작
   할인 자산가격을 martingale로 전환시키는 방법을 보인다.

-> equivalent martingale measure $\hat{P}$를 구한다.

2. 자산가격결정에서 두 접근법의 대응

특히 (할인)콜옵션가격을 martingale로 전환하는 것이 $F(S_t, t)$가 특별한 편미분방정식-앞에서 소개된 Black-Scholes PDE로 판명된 것-을 만족시키도록 하는 것과 동일하다는 것을 보인다.

3. PDE 와 martingale은 가까운 관계에 있다.

2. A Martingale Measure

▷ chapter 12에서 무위험 포트폴리오를 형성하고 PDE의 결과를 사용하는 방법에 대해서 언급

▷ equivalent martingale measure방법은 동일한 공식를 얻기 위해 다른 방법을 적용시킨다.

-> 이 접근법을 사용하여 Black-Scholes 공식의 단계적인 유도를 보일 것이다.

▷ 우선 몇가지 개념에 대한 정리가 필요

- 적률
- 조건부 확률

2.1 The Moment-Generating Function

▷ Y_t: 연속시간 과정(continuous-time process
or generalized Wiener process)

$Y_t \quad N(\mu t, \sigma^2 t)$, Y_0: given

▷ S_t : geometric process

$S_t = S_0 e^{Y_t}$

▷ $M(\lambda)$: moment-generating function

$M(\lambda) = E[e^{Y_t\lambda}]$, λ: 임의의 매개변수

2.1.1 calculation

▷ $E[e^{Y_t\lambda}] = \int_{\infty}^{\infty} e^{Y_t\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(Y_t - \mu t)^2}{\sigma^2 t}} dY_t$

$$E[e^{Y_t\lambda}] = \int_{\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(Y_t - \mu t)^2}{\sigma^2 t} + \lambda Y_t} dY_t$$

▷ 지수부분을 완전제곱식으로 만들기 위해

$$E[e^{Y_t\lambda}] = \int_{\infty}^{\infty} e^{(\lambda\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t\lambda^2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(Y_t - \mu t)^2}{\sigma^2 t} + \lambda Y_t - (\lambda\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t\lambda^2)} dY_t$$

$$E[e^{Y_t\lambda}] = e^{(\lambda\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t\lambda^2)} \underline{\int_{\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(Y_t - (\mu t + \sigma^2 t\lambda))^2}{\sigma^2 t}} dY_t}$$

$$= 1$$

▷ $\underline{M[\lambda] = E[e^{Y_t\lambda}] = e^{(\lambda\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t\lambda^2)}}$

▷ Y_t의 1차 적률

$$\frac{\partial M}{\partial\lambda} = (\mu t + \sigma^2 t\lambda) e^{\lambda\nu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t\lambda^2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=0} = \mu t$$

▷ Y_t의 이차적률

$$\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda^2}\Big|_{\lambda=0} = \sigma^2 t$$

2.2 conditional Expectation of Geometric Processes

▷ martingale **방법을 사용한 금융 파생상품 가격 결정에서 조건부 기대값** $E[S_t|S_u, u<t]$**에 대해 알아보자**.

▷ $\Delta Y_t = Y_t - Y_s = \int_s^t dY_u$

$Y_t = Y_s + \int_s^t dY_u$

▷ generalized Wiener process**에 의해**

$\Delta Y_t \quad N(\mu(t-s), \sigma^2(t-s))$

▷ moment-generating function

$M(\lambda) = e^{\lambda\mu(t-s) + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2(t-s)}$

▷ conditional expectatiom of a gepmatric Brownian motion

$E[\frac{S_t}{S_u}|S_u, u<t] = E[e^{\Delta Y_t}|S_u]$, S_u: nonrandom

▷ $E[e^{\Delta Y_t}]$: $E[e^{Y_t\lambda}]$-monent-generating function-**에서** $\lambda = 1$**일 때의 값이므로**

$E[e^{\Delta Y_t}] = e^{\mu(t-s) + \frac{1}{2}\sigma^2(t-s)}$

$= E[\frac{S_t}{S_u}|S_u]$

or $E[S_t|S_u, u<t] = s_u e^{\mu(t-s) + \frac{1}{2}\sigma^2(t-s)}$

-> geometric process**의 조건부 기대값**

3. Converting Asset Prices into Martingale

▷ $S_t = S_0 e^{Y_t}$, $t \in [0, \infty)$

Y_t: P**에 의해 분류되는** Wiener process

P: 자산각격 S_t에 영향을 미치는 극소한 충격 후의 true 확률 측정치 (probability measure)

▷ 그러나 이런 P를 사용하지 않고 equivalent probability인 $\tilde{P}$를 사용한다
-> 자산가격을 martingale 로 전환할수 있다.

▶ 이러한 확률 측정치를 어떻게 찾는가에 대한 예

▷ S_t의 true 분포는 Y_t의 분포에 의해 결정

-> 확률 P는 $Y_t \quad N(\mu t, \sigma^2 t)$에 의해 주어진다.

▷ 가정:

S_t: 시간 t에서의 기초자산의 가격

$S_u, u<t$: 시간 u에서 관찰된 가격

▷ 자산 S_t는 위험자산이기때문에 무위험 이자율로 할인하면 그것은 martingale이 될수 없다.

$E^P[e^{-rt}S_t|S_u,\ u<t] \neq e^{-ru}S_u$

$E^P[e^{-rt}S_t|S_u,\ u<t] > e^{-ru}S_u$ ∵ 위험 프리미엄이 존재

▷ true 확률 측정치(probability measure)를 가진 할인된 과정(discounted process) Z_t

-> $Z_t = e^{-rt}S_t$; martingale이 아니다.

▷ 이것을 martingale로 전환하기 위해 equivalent probability measure $\tilde{P}$를 찾을수 있을 것 이다.

$E^{\tilde{P}}[e^{-rt}S_t|S_u,\ u<t] = e^{-ru}S_u$

$E^{\tilde{P}}[Z_t|Z_u, u<t] = Z_u$

: Wiener process W_t with $\tilde{P}$ -> new process $\widetilde{W}_t$ with $\tilde{P}$

-> dZ_t에서 drift = 0

▶ **이러한 확률 측정치 $\tilde{P}$는 어떻게 찾을 수 있는가?**

3.1 $\tilde{P}$ 결정

▷ $E^{\tilde{P}}[e^{-rt}S_t | S_u,\ u<t] = e^{-ru}S_u$

S_t: martingale

▶ **어떻게 이러한 $\tilde{P}$를 찾을수 있는가? 그리고 그것의 형태는 어떠한가?**

▷ **새로운 확률** $\tilde{P}$ $N(\rho t, \sigma^2 t)$

ρ: **임의의** drift **매개변수** -> P**와** $\tilde{P}$**의 유일한 차이점**

두 확률 모두 같은 분산 매개변수를 가진다.

▷ $E^{\tilde{P}}[e^{-r(t-u)}S_t | S_u,\ u<t]$: **조건부 기대값**

$E^{\tilde{P}}[e^{-r(t-u)}S_t | S_u,\ u<t] = [S_u e^{-r(t-u)}]e^{\rho(t-u)+\frac{1}{2}\sigma^2(t-u)^2}$

$\rho = r - \frac{1}{2}\sigma^2$ -> $N((r-\frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t)$; true **확률과 새로운 확률은 평균에서 차이**

: **매개변수** ρ**는 변동성** σ**과 무위험 이자율** r**에 의해 고정되어있다.**

ρ **선택에 있어 중요한 점은 지수가** 1**이 되어야한다는 것이다.**

-> $-r(t-u)+\rho(t-u)+\frac{1}{2}\sigma^2(t-u) = 0$

$E^{\tilde{P}}[e^{-r(t-u)}S_t | S_u,\ u<t] = S_u$

$E^{\tilde{P}}[e^{-rt}S_t | S_u,\ u<t] = e^{-ru}S_u$

-> martingale **조건**

-> $e^{-rt}S_t$**가** $\tilde{P}$**에서** martingale **이라는 것을 내포한다.**

3.2 The Implied SDEs

▷ **두 확률 측정치를 가지고 내포된** SDE**를 비교해보자**.

▷ $dY_t = \mu dt + \sigma dW_t, \quad t \in [0, \infty)$

$$dS_t = [S_0 e^{Y_t}][\mu dt + \sigma dW_t] + [S_0 e^{y_t}]\frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

$$= [\mu S_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t]dt + \sigma S_t dW_t$$

-> true **확률** P**에서 자산가격** S_t**는**

1. drift **계수** $(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)S_t$
2. diffusion **계수** σS_t
3. W_t : Wiener process**인** SDE**를 만족한다**.

▷ P**인** SDE**와** $\widehat{P}$**인** SDE**의 차이점**:

1. drift **계수에 차이가 있다**.

$\mu \to \rho, \quad W_t \to \widetilde{W}_t$

$$dS_t = [\rho S_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t]dt + \sigma S_t d\widetilde{W}_t$$

$$\rho = r - \frac{1}{2}\sigma^2$$

$$dS_t = [(r - \frac{1}{2}\sigma^2)S_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t]dt + \sigma S_t d\widetilde{W}_t$$

$$= rS_t dt + \sigma S_t d\widetilde{W}_t$$

-> <u>S_t**를** martingale**로 만드는 확률은 원래의** SDE**의** drift **매개변수를 무위험 이자율** r**로 전환**</u> μ: **일반적으로 알려지지 않은 위험 프리미엄을 포함**

r : **무위험 이자율**

2. $\tilde{P}$는 다양한 현상의 실제 발생과는 관계가 없다.
편리한 측정치이다.

4. Application: The Black-Scholes Formula

▷ Black-Schole 공식의 조건

1. 무위험 이자율은 옵션의 수명기간동안 상수이다.
2. 기초증권은 옵션의 만기전에 배당을 지급하지 않는다.
3. 콜옵션은 유럽형이며 만기일 전에 행사되지 않는다.
4. 기초증권의 가격 S_t는 S_t에 비례한 drift와 diffusion을 가진 geometric Brownian motion이다.
5. 거래비용이 없으며 자산은 무한히 분할할수 있다.

▷ solving PDE

$$0 = -rF + F_t + rS_tF_s + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 F_{ss},\ 0 \le S_t,\ 0 \le t \le T$$

$$F(S_t, t) = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_1 - \sigma\sqrt{T-t})$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + r(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$N(d_1) = \int_{-\infty}^{d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

▶ <u>equivalent martingale measure $\tilde{P}$를 사용하여 직접적으로 Black-Scholes 공식을 유도한다.</u>

▷ $C_t = E^{\tilde{P}}[e^{-r(T-t)} C_T]$

$C_T = \max[S_T - K, 0]$: 경계조건

$C_t = E^{\tilde{P}}[e^{-r(T-t)} \max\{S_T - K, 0\}]$

▷ **단순화**

- $t=0$, **시간** 0**에서 옵션가격을 계산한다**

- **따라서 현재 정보 세트** I_t**는** I_0**이다. 조건부 기대값을 사용하는 대신에 조건부 기대값이 아닌** $E^{\tilde{P}}[\cdot]$**를 사용한다.**

▷ Black-Scholes formula**의 단계적 분해**

$$C_0 = E^{\tilde{P}}[e^{-rT}\max\{S_T - K, 0\}]$$

$$d\tilde{P} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 T}(Y_T - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T)^2} dY_t$$

$$C_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT}\max\{S_T - K, 0\} d\tilde{P}$$

$$-> C_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT}\max\{S_0 e^{Y_T} - K, 0\} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 T}(Y_T - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T)^2} dY_t$$

-> **적분 내부에** max**함수를 제거하기 위해 적분의 한계를 변화한다.**

-> $S_0 e^{Y_t} \geq K$

$Y_T \geq \ln(\frac{K}{S_0})$

$$C_0 = \int_{\ln(\frac{K}{S_0})}^{\infty} e^{-rT}\{S_0 e^{Y_T} - K\} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 T}(Y_T - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T)^2} dY_T$$

$$C_0 = \underline{s_0 \int_{\ln(\frac{K}{S_0})}^{\infty} e^{-rT} e^{Y_T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 T}(Y_T - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T)^2} dY_T} \quad ①$$

$$\underline{- K e^{-rT} \int_{\ln(\frac{K}{S_0})}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 T}(Y_T - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T)^2} dY_T}$$

②

4.1 Calculation

$$Z = \frac{Y_T - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

▷ **두 번째 부분**(②) :

$$Ke^{-rT}\int_{\ln(\frac{K}{S_0})}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 T}(Y_T - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T)^2} dY_T$$

$$= Ke^{-rT}\int_{\frac{\ln(\frac{K}{S_0}) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{T}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ$$

▷ d_2

- let $-\ln(K/S_0) = \ln(S_0/K)$
- Black-Scholes **공식의** d_2**매개변수**:

$$-\frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} = -d_2$$

- **마지막으로 정규분포는 다양한 대칭성을 가진다**.
  $f(x)$: **일반적인 정규밀도함수**

$$\int_L^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-L} f(x)dx$$

$$Ke^{-rT}\int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ = Ke^{-rT}\int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ$$

$$= Ke^{-rT}N(d_2)$$

▷ **첫 번째 부분**(①) :

$$\int_{\ln(\frac{K}{S_0})}^{\infty} e^{-rT} S_0 e^{Y_T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 T}(Y_T - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T)^2} dY_T$$

$$= e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T} e^{-rT} \int_{-d_2}^{\infty} e^{\sigma Z\sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ$$

$$= e^{-rT} e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T} S_0 \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(Z^2 - 2\sigma Z\sqrt{T})} dZ$$

$$= e^{\frac{\sigma^2 T}{2}} e^{-rT} e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T} S_0 \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(Z - \sigma\sqrt{T})^2} dZ$$

한편 $H = Z - \sigma\sqrt{T}$

$$= S_0 \int_{-\infty}^{d_2 + \sigma\sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}H^2} dH = S_0 N(d_1) \ , \ d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T}$$

5. Comparing Martingale and PDE Approaches

▷ **첫번째 접근법:**
무위험 포트폴리오를 형성되는 파생상품의 가격을 얻는다.

▷ **두 번째 접근법 :**
확률 측정치 $\tilde{P}$를 찾는 방법이다.

$e^{-rt}F(S_t, t)$: martingale

-> $e^{-rt}F(S_t, t) = e^{\tilde{P}}[e^{-rT}F(S_T, T)|I_t], \quad t < T$

$d[e^{-rt}F(S_t, t)] = 0 \quad 0 \le t$

-> Black-Scholes **공식은 이들중 한 접근법으로부터 얻어진다.**
-> **두가지 방법은 어느정도 관련되어 있다.**

▶ <u>이 두 접근법의 대응을 살펴보자</u>.

▷ 예

- Ito's lemma의 미분과 적분 형태의 적용
- Ito integeal의 martingale 성질
- Girsanov 이론의 중요한 사용

▷ PDE와 martingale 접근법 사이의 대응은 두가지 단계로 살펴보자.

- Ito's lemma의 상징적인 형태를 사용한다.
- Ito's lemma의 적분 형태를 사용한다.

5.1 Equivalence of the Two Approaches

1. $e^{-rt}S_t$가 Wiener process와 관련된 확률 측정치를 변화시킴으로써 martingale로 어떻게 전환 되는지 살펴본다.
2. 파생자산 $e^{-rt}F(S_t, t)$에서 같은 방법으로 되는지 살펴본다.

5.1.1 converting $e^{-rt}S_t$ into a Martingale

▷ SDE :

$dS_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$

$d[e^{-rt}S_t] = S_t d[e^{-rt}] + e^{-rt}dS_t$

$d[e^{-rt}S_t] = e^{-rt}[\mu_t - rS_t]dt + e^{-rt}\sigma_t dW_t$ - (90)

-> drift $\neq$ 0 -> $[\mu_t - rS_t]>0$, S_t: 위험 자산

$e^{-rt}S_t$: martingale 이 아니다.

▷ <u>Girsanov 정리을 사용하여 $e^{-rt}S_t$를 martingale 로 전환할수 있다.</u>

▷ Girsanov 정리

- I_t에 적응된 과정 X_t와 새로운 과정 $\widetilde{W}_t$:

$d\widetilde{W}_t = dX_t + dW_t$ - (92)

- $\widetilde{W}_t$와 관련된 확률 측정치

$d\widetilde{P} = \xi_t dP_t$

$\xi_t = e^{\int_0^t X_u dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t X_u^2 d_u}$

- X_t: Girsanov 정리의 절대조건를 만족시킨다.

- (90),(92)식에 의해

-> $d[e^{-rt}S_t] = e^{-rt}[\mu_t - rS_t]dt + e^{-rt}\sigma_t[d\widetilde{W}_t - dX_t]$

$d[e^{-rt}S_t] = e^{-rt}[\mu_t - rS_t]dt - e^{-rt}\sigma_t dX_t + e^{-rt}\sigma_t d\widetilde{W}_t$ - (96)

- Girsanov 정리에 따르면 만일 우리가 새로운 확률 $\widetilde{P}$아래서 SDE를 정의한다면 $\widetilde{W}_t$는 standard Wiener process이다. 게다가 만일 drift가 0이라면 $\widetilde{P}$는 martingale measure일 것이다.

- let $dX_t = [\frac{\mu_t - rS_t}{\sigma_t}]dt$

(96) -> $d[e^{-rt}S_t] = e^{-rt}\sigma_t d\widetilde{W}_t$: martingale

5.1.2 converting $e^{-rt}F(S_t, t)$ into a Martingale

▷ 파생상품의 가격결정을 하기위하여 $e^{-rt}F(S_t, t)$가 $\widetilde{P}$에서 martingale 임을 보인다.

▷ 두 가지 단계

1. $e^{-rt}F(S_t, t)$의 SDE를 얻기위하여 Ito's lemma의 미분형태를 사용한다.
2. Wiener process에 Girsanov 전환을 적용시킨다.

▷ **첫단계**

- $d[e^{-rt}F(S_t, t)] = d[e^{-rt}]F + e^{-rt}dF$

$$= e^{-rt}[-rF\,dt] + e^{-rt}[F_t dt + F_s dS_t + \frac{1}{2}F_{ss}\sigma_t^2 dt]$$

- **중요한 문제는** dS_t**를 무엇으로 대체할 것인가 하는 것이다.**(2**가지 방법**)

1) $\widetilde{W}_t$**와** $\widetilde{P}$, $e^{-rt}S_t$**는** martingale**이라는 조건 아래에서**

$$d[e^{-rt}S_t] = e^{-rt}\sigma_t d\widetilde{W}_t$$

2) **원래의** SDE**를 사용하여**

$$dS_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

- 2)**방법을 사용하여**

$d[e^{-rt}F(S_t, t)]$

$$= e^{-rt}[-rF\,dt] + e^{-rt}[F_t dt + F_s[\mu_t dt + \sigma_t dW_t] + \frac{1}{2}F_{ss}\sigma_t^2 dt]$$

$$= e^{-rt}[-rF + F_t + F_s\mu_t + \frac{1}{2}F_{ss}\sigma_t^2]dt + e^{-rt}\sigma_t F_s dW_t$$

▷ **두 번째 단계**

- Girsanov theorem**을 적용하여**

$$d\widetilde{W}_t = dW_t + dX_t$$

$d[e^{-rt}F(S_t, t)]$

$$= e^{-rt}[-rF + F_t + F_s\mu_t + \frac{1}{2}F_{ss}\sigma_t^2]dt - e^{-rt}\sigma_t F_s dX_t + e^{-rt}\sigma_t F_s d\widetilde{W}_t$$

; Girsanov **전환**

$$= e^{-rt}[-rF + F_t + F_s\mu_t + \frac{1}{2}F_{ss}\sigma_t^2 - \sigma_t F_s(\frac{\mu_t - rS_t}{\sigma_t})]dt + F_s e^{-rt}\sigma_t d\widetilde{W}_t$$

$$= e^{-rt}[-rF + F_t + \frac{1}{2}F_{ss}\sigma_t^2 + F_s rS_t]dt + e^{-rt}\sigma_t F_s d\widetilde{W}_t$$

- **한편** $-rF + F_t + \frac{1}{2}F_{ss}\sigma_t^2 + F_s rS_t = 0$ ($\therefore$ $\widetilde{W}_t, \widetilde{P}$**에서** $e^{-rt}F(S_t, t)$**가** martingale**이기 위하여** SDE**의** drift term**은** 0**이다**.)

--> $d[e^{-rt}F(S_t, t)] = e^{-rt}\sigma_t F_s d\widetilde{W}_t$

5.2 Critical Steps of the Derivation

▷ **유도과정에는 몇가지 중대한 단계가 있다**.

1. Girsanov **정리의 사용**

-> **할인된 자산가격이** martingale**이 되게 하는 새로운** Wiener process $\widetilde{W}_t$**와 새로운** $\widetilde{P}$

$\widetilde{P}$: equivalent martingale measure

2

$d[e^{-rt}F(S_t, t)]$

$$= e^{-rt}[-rF + F_t + F_s\mu_t + \frac{1}{2}F_{ss}\sigma_t^2]dt - e^{-rt}\sigma_t F_s dX_t + e^{-rt}\sigma_t F_s d\widetilde{W}_t$$

$dX_t = [\frac{\mu_t - rS_t}{\sigma_t}]dt$: $F_s\mu_t$**를 제거하고** $F_s rdt$**에 의해 대체되는 것으로 정의**

-> Girsanov **정리의 적용은** drift term μ_t**를 무위험 이자율** r**로 바꾸는 것**

3. e^{-rt}**를** martingale**로 전환하는** $\widetilde{W}, \widetilde{P}$**가** $e^{-rt}F(S_t, t)$**를** martingale**로도 전환하는가**?

: martingale **함수는 그자체가** martinglae**이 될 필요는 없다**.

-> 이 단계는 금융자산의 균형과 재정거래 가치와 관련

--> dynamic asset pricing theory 영역

-> 자산가격 사이의 재정거래 관계는 무위험 이자율로 할인된 모든 자산 가격을 martingale로 전환하는 유일한 martingale 측정치를 따른다.

-> Girsanov전환에서 동일한 두 $\widetilde{W}, \widetilde{P}$의 사용은 자산 가격결정이론의 결과이다.

만일 재정거래 기회가 존재한다면 우리는 이렇게 할수 없을 것이다.

5.3 Integral form of Ito Formula

▷ 무위험 이자율로 할인된 콜옵션의 가치

Ito's lemma 의 적분 형태를 적용하여

- $e^{-rt}F(S_t, t)$

$$= F(S_0, 0) + \underline{\int_0^t e^{-ru}[-rF + F_t + \frac{1}{2}F_{ss}\sigma_u^2 + F_s r S_u]du}$$

$$+ \int_0^t e^{-ru}\sigma_u F_s d\widetilde{W_u} \qquad ①$$

- σ_t: $E^{\widetilde{P}}[e^{\int_0^t (F_s e^{ru}\sigma_u)^2 du}] < \infty$라고 가정

-> Girsanov Theorem의 Novikov condition이고 적분 $\int_0^t e^{-ru}\sigma_u F_s d\widetilde{W_u}$가 $\widetilde{P}$에서 martingale 임을 내포한다.

-> e^{-rt}에 의해 할인된 파생자산가격 또한 martingale 이다.

▷ 첫 번째 적분형태 (①)

$\int_0^t e^{-ru}[-rF + F_t + \frac{1}{2}F_{ss}\sigma_u^2 + F_s r S_u]du$: martingale

-> 시간에 대한 적분이고 martingale 은 0이 아닌 drift 계수를 가지지 않는다.

- $rF + F_t + \frac{1}{2}F_{ss}\sigma_t^2 + F_s r S_t = 0 \quad t \geq 0, S_t \geq 0$

; Black-Scholes PDE의 기본형태

제 16장 복잡한 파생상품 구조를 위한 도구들

1. 개요

▷ 금융시장에서 거래되는 파생상품들은 블랙-숄즈가 다룬 표준형 콜옵션보다 훨씬 복잡하다. 그래서 보다 복잡한 Tools이 요구된다.

▷ 블랙-숄즈의 가정 中에 특히 2개는 파생상품 가격결정에 있어서 심각한 제한이다.

- 만기 이전에 권리가 행사될 수 있는 미국형 파생증권을 다루지 않는다.
- 무위험 이자율은 향상 상수이다.

2. 새로운 도구들

▷ 이자율 기간구조와 수익률곡선의 관계(수학적인 결과만)

▷ Stochastic process의 기대값과 PDE의 기본적인 관계를 규명

⇒ PDE의 관점에서, 또는 Matingale의 관점에서 가격결정을 할 수 있다.

▷ 새로운 개념들

- generator of stochastic process
- Kolmogorov's backward equation
- Feyman-Kac formula

▷ Stopping times : 미국식 파생상품을 다루다. 이는 권리행사일 자체가 확률변수로 간주되는 것을 말한다.

2.1 금리 파생상품

▷ Bond options : 채권에 대한 콜옵션은 행사가격 K에 가격 B_t로 옵션의 소유자에게 채권을 살 수 있는 권리를 주는 것이다.

o 가정이 2개 요구된다.

- 채권 가격 B_t는 이자율의 함수이다.
- 이자율 r_t는 상수가 아니다.

▷ Caps and Floors : 복잡한 금리파생상품인데, 캡은 금리상승위험을 헤지하기

위해서, 플로어는 금리하락 위험을 헤지하기 위해서 사용된다.

⇒ 이들은 B-S의 가정을 사용하여 다룰 수 없다. 즉 금리는 상수로 가정되지 않는다.

▷ SW options : 할인 채권과 금리캡과 비슷한 채권에 대한 옵션을 결합한 것이다.

▷ 금리파생상품의 만기 이전에 권리 행사 가능성과 확률적 금리가 파생자산 가격결정에 통합되어야 한다.

3. 이자율의 기간구조

▷ 재무성 증권만을 생각할 때 만기가 u인 무위험 이자율이 r이라면 순수할인채권의 t시점의 가격은

$$B(u,t) = 100e^{-r(u-t)}$$

로 주어진다.

▷ 이자율이 Stochastic이라면, 이 식은 변하는데, r_t가 시간 t(일시적인 개념)에서의 무위험 이자율이고, 액면가치가 100인 채권은 다음과 같다.

$$B(u,t) = 100E[e^{\int_t^u r_s ds} \mid I_t]$$

▷ 여기에서는 조건부 기대값이 사용되는데 그 이유는 r_s는 미래의 어떤 시점의 이자율을 나타내기 때문에 현재 $t(s>t)$에서는 알 수 없다. 단지 예측할 수 있을 뿐이다.

▷ 긴 만기를 가진 T-bond도 shock에 종속되어지고, 다른 조건들이 같다면 만기가 길수록 더 위험하다. 그래서 위험 프리미엄을 제거하기 위해서 equivalent matingale measure를 사용한다.

▷ (3)식에 대한 설명으로 3년 만기 T-bond에 대하여 이산 시간구조를 고려하면,

$$B(3,1) = E\left[\frac{100}{(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)} \mid I_1\right]$$

이다.

단, r_1 : 현재의 이자율

r_2 : 2년째 이자율

r_3 : 3년째 이자율

▷ (4)식에 따르면 채권의 가격은 액면가의 할인된 가치의 위험중립 확률과 같다.

▷ (3)식은 매우 중요한 implication을 가지는데, 시간은 연속적으로 변하기 때문에, 채권의 가격은 미래의 단기이자율의 전체적인 spectrum에 의존한다.

▷ 채권의 만기 수익률은 미래의 단기 이자율의 이용할 수 있는 모든 정보를 포함한다. 즉, 채권의 가격은 이자율의 기간구조에 의존한다.

<Def> 시간 t에 $u\in[t, T]$인 만기의 전체 spectrum을 가진 무이표채권이 존재한다고 가정하자. 가격은 $B(u,t)$ 이고, 수익률은 R_t^u로 주어진다. 그러면 수익률의 spectrum $\{R_t^u, u\in[t, T]\}$는 이자율의 기간구조라 한다.

▷ 만기의 수익률 R_t^u는

$$B(u,t) = 100e^{-R_t^u(u-t)}, \qquad t<u$$

를 만족하는 수로 정의하고, $B(u,t)$는 위험중립 확률하의 기대값으로 주어진다.

$$B(u, t) = 100E[e^{\int_t^u r_s ds} \mid I_t]$$

즉, 채권의 수익률을 얻기 위해서 (3)식으로부터 채권의 가격을 먼저 구하고, 식 (5)에 로그를 취하면 수익률 R_t^u를 얻을 수 있다.

$$R_t^u = \frac{\log B(u,t) - \log(100)}{t-u}$$

▷ 무수히 많은 무이표채권이 존재한다고 가정하면, 이들의 만기들은 $u = t+dt$에서 만기가 가장 긴 $u = T$까지 뻗쳐진다.

⇒ 이것이 연속수익율 곡선이 된다.

▷ $\frac{dR_t^u}{du} = g_u$는 수익률 곡선의 기울기(수익률곡선의 시간에 대한 미분)을 나타낸다. 이것은 미지의 shock과 관련이 없고, 같은 시간 t에 대해 다른 만기와 관련된 것이다.

▷ 그러나 R_t의 변화는 t에 기인하고, random shock과 관련이 있다. 시간이

변화함에 따라 수익률 곡선은 random shock에 의해 shift된다.

3.1 Relating r_s and R_t^u

▷ r_s는 시간 s에 지급해야 할 이지율을 나타내고, 시간 t에서는 $s>t$에 대한 현물이자율은 알 수 없고, 단지 기대값만 구할 수 있다.

$$e^{R_t^u(u-t)} = E\left[e^{-\int_t^u r_s ds} \mid I_t\right]$$

▷ 이 식에 log를 취하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$R_t^u = \frac{\log E\left[e^{-\int_t^u r_s ds} \mid I_t\right]}{u-t}$$

▷ 결국 선도이자율을 정의할 필요가 있는데, 이는

$$F(t,u,T) = \frac{\log B(u,t) - \log B(T,t)}{T-u}, \qquad t<u<T$$

로 정의되고, 이것은 u시점에서 시작하여 만기가 T인 부채의 선도이자율이라 할 수 있다.

▷ $T \to t$에 따라 순간적인 선도이자율 $f(t,u)$을 얻을 수 있다.

$$f(t,u) = \lim_{T_u} F(t,u,T)$$

3.1 수익률 곡선의 예제

▷ one factor model

수익률 $R(\cdot)$은 현재 관찰되는 단기이자율 r_t에 의존하는 모형이다. 함수의 형태는 다음과 같다.

$$R(r_t,u,t) = A(u,t) - C(u,t)r_t$$

함수 $A(u,t)$와 $C(u,t)$는 여러 가지 방법으로 구성될 수 있다.

▷ 단기이자율 r_t의 SDE는 다음과 같다.

$$dr = a(r_t,t)dt + \sigma(r_t,t)dW_t$$

▷ 일시적인 선도이자율도 SDE를 사용하여 모델링 할 수 있다.

$$df(t,u) = af(t,u)dt + \sigma(f,t)dW_t^u$$

▷ 선도이자율을 표현한 SDE의 dritft와 diffusion은 u에 의존한다.

4. PDE를 이용한 기대값의 특성

▷ B-S의 가정에서 기본적인 PDE는

$$0 = -Fr + F_t + rF_s S_t + \frac{1}{2} F_{ss}\sigma_t^2$$

로 주어지고, r은 상수이다.

▷ 이 PDE는 위험중립 기대값에 해당한다.

$$F(S_t, t) = E^{\tilde{P}}[e^{-r(T-t)}F(S_T, T)]$$

단, $\tilde{P}$: equivalent martingale measure

▷ 두 가지 질문

· 금리파생상품의 경우에서도 PDE을 얻을 수 있을까?, 예를 들어 어떤종류의 PDE가 채권가격을 만족시키는가?

· 금리파생상품의 PDE가 주어진다면, 식(20)과 비슷한 위험중립 기대값을 얻을 수 있는가?

▷ r_s가 stochastic이고, $\tilde{P}$가 equivalent measure라면, $B(u,t) = E_t^{\tilde{P}}[100e^{-\int_t^u r_s ds}]$와 어떤 분류의 PDE가 밀접한 관계가 있다.

※ 이러한 관계를 설명해주는 것들이, 앞에서 말한 generators for Ito diffusion, Kolmogorov's Backward equation, Feyman-Kac formula등이 있다.

4.1 위험중립 채권가격 결정

▷ 채권의 가격은

$$B(u,t) = E_t^{\tilde{P}}[100e^{-\int_t^u r_s ds}]$$

가 되고, r_t에 대한 SDE는 아래와 같다.

$$dr_t = a(r_s)dt + \sigma(r_t)dW_t$$

단, W_t : wiener process

▷ 이 표현은 계산하기가 항상 쉽지 않다. 그래서 채권가격에 대한 다른 표현이 필요한데, 채권가격으로 PDE을 얻을 수 있다면, 수치적 방법에 의해서 $B(u,t)$를 계산할 수 있다.

$$B(u,t) = E_t^{\widetilde{P}}[100 e^{-\int_t^u r_s ds} f(r_u)]$$

$f(\cdot)$는 두 번 미분가능하며, 또한 어떤 경계값이다.

5. Random Discount Factors and PDEs

5.1 Ito Difusions

▷ $dS_t = a(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t$에서 Drift와 Diffusion항들이 오직 S_t에만 의존한다면, $dS_t = a(S_t)dt + \sigma(S_t)dW_t$로 표현된다.

▷ 이와 같은 특성을 같은 Process를 시간-동질 Ito diffusion이라 한다. 이것은 instantaneous drift와 difusion항이 직접 t에 의존하지 않는다.

5.2 The Markov Property

▷ S_t가 Ito diffusion이고, $f(\cdot)$가 bounded 함수이고, I_t는 t시간까지 모든 S_t를 포함하는 정보집합이다. 다음식을 만족한다면 Markov property를 가진다고 한다.

$$E[F(S_{t+h} \mid I_t] = E[F(S_{t+h} \mid S_t], \qquad h>0, \text{for all } t$$

▷ 이것의 의미는 현재의 S_t가 S_{t+h}를 예측하는데 필요한 정보를 모두 포함하지만, 그 이전의 과거의 S_t는 아무런 도움을 주지 못한다는 것이다.

5.3 Generator of an Ito Diffusion

▷ $f(s_t)$는 이차 미분가능함수이고, s_t는 시간 t에 S_t가 도달하는 값이다. 그

러면 다음식에서 A 는 $f(S_t)$는 기대변화율을 측정하는데,

$$Af(s_t) = \lim_{\triangle \to 0} \frac{E[f(S_{t+\triangle}) \mid f(s_t)] - f(s_t)}{\triangle}$$

이는 A 는 generator of the Ito diffusion S_t라 불린다.

▷ Wiener process는 미분불가능하기 때문에 실제 A는 $f(S_t)$의 실제변화율을 다루는 대신에 기대변화율을 표현한다.

5.4 A Representation for A

▷ A 는 극한값이고 기대변화율이다. 즉 시간에 대한 미소한 변화를 뜻하는데, 이는 Ito's Lemma와 직접적인 관련이 있다.

▷ S_t는 univariate stochastic process가 다음과 같은 경우에

$$dS_t = a(S_t)dt + \sigma(S_t)dW_t, \qquad t \in [0, \infty)$$

operator A는 다음과 같이 주어진다.

$$Af = a_t \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}$$

▷ 이것과 Ito's Lemma를 비교해보면

$$df(S_t) = \left[a_t \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right] + \sigma_t \frac{\partial S}{\partial f} dW_t$$

위식과 operator A의 차이는

- Ito's Lemma에서 dW_t 항은 drift가 0인 것으로 대체되었다.
- Ito's Lemma의 나머지 부분을 dt로 나누어진 것이다.

5.4.1 Multivariate Case

▷ X_t가 k차 Ito diffusion이면, SDE는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{pmatrix} dX_{1t} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ dX_{kt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1t} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{kt} \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma_t^{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_t^{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_t^{k1} & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_t^{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_{1t} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ dW_{kt} \end{pmatrix}$$

단, a_{it}는 X_t에 의존하는 drift 계수이고, σ_t^{ij}는 X_t에 의존하는 diffusion계수이다.

▷ operator A는 다음과 같이 주어진다.

$$Af = \sum_{i=1}^{k} a_{it} \frac{\partial f}{\partial X_i} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2} (\sigma_t \sigma_t^t)^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j}$$

5.5. Kolmogorov's Backward Equation

▷ dirft a_t와 diffusion σ_t를 가진 Ito diffusion S_t에 대해서 S_t의 함수를 $f(S_t)$로 표현하면,

$$\hat{f}(S^-, t) = E(f(S_t) \mid S^-], \qquad \text{for all } t \geq 0$$

단 $\hat{f}(S^-, t)$는 예측값을 표현하고, S^-는 t시점이 되기 전 가장 최근의 관측값이다. A operator를 사용하여 $\hat{f}(S^-, t)$가 시간에 대해서 어떻게 변화는가를 특징지울 수 있다.

▷ 예측의 전개는 Komogorov's backward equation에 의해서 주어진다.

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial t} = A\hat{f}$$

▷ A의 정의는 다음과 같다.

$$A\hat{f} = a_t \frac{\partial \hat{f}}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial s^2}$$

그래서 식(39)의 같음은 PDE이다.

$$\hat{f}_t = a_t \hat{f}_s + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \hat{f}_{ss}$$

▷ 따라서 $\hat{f}(S^-, t) = E[f(S_t) \mid S^-]$와 식 (40)의 PDE는 매우 중요한 일치를 가진다. 이 일치(상응)은 두가지 다른 방법으로 언급된다.

· $\hat{f}(S^-, t)$는 식 (39)의 PDE를 만족한다.

· 또는 반대로 말할 수 있는데, 식 (39)가 주어지면, $\hat{f}(S^-, t)$가 발견되어 식 (42)를 만족한다.

▷ 이 결과는 $\hat{f}(S^-, t)$가 식 (39)의 해라는 것을 의미하는데, Kolmogorov's backward equation은 stochastic process의 기대값과 PDEs사이의 첫 번째 일

치를 준다.

$$\hat{f}(S^{-}, t) = E[f(S_t) \mid S^{-}]$$

그러나 이것은 금융시장에서 유용하게 쓰이지 않는다. 특히 $f(\cdot)$는 S_t에 의존하고, discount factor는 허락되지 않는다.

5.5.1 예제

▷ $p(S_t, S_0, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(S_t - S_0)^2}{2t}}$의 함수를 고려할 때, 이것은 제로 drift와 variance 1을 가지는 $t = 0$에 S_0에서 시간에 따라 움직이는 Wiener precess의 조건부 밀도 함수이다.

▷ 그래서 이 precess에 대한 SDE는 $dS_t = dW_t$가 되고, Kolmogorov's backward equation에 적용시키면 $\hat{f}_t = a_t \hat{f}_s + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \hat{f}_{ss}$에서

$$a_t = 0$$

과

$$\sigma_t = 1$$

이다. 따라서 Kolmogorov's backward equation은 다음과 같다.

$$\hat{f}_t = \frac{1}{2}\hat{f}_{ss}$$

▷ 조건부 density $p(S_t, S_0, t)$는 $\hat{f}$의 함수이고, S_t에 대한 일차 미분과 이차 미분을 식 (49)에 대체하면 얻어진다. 이 결과에 따르면 Wiener process의 조건부 밀도함수는 Kolmogorov's backward equation을 만족하고, 이 PDE는 S_t의 특별한 값과 초기 조건 S_0와 관련된 확률이 시간의 경과에 어떻게 전개될 것인가를 알려준다.

5.6 The Feyman-Kac Formula

▷ Kolmogorov's backward equation는 무재정거래 자산가격이 equivalent martingale measure에 대한 S_t의 어떤 조건부 함수로 주어지기 때문에 여러 가지 잠재적인 사용을 가진다. 즉, 무재정거래 자산가격의 수치적 계산방법의

관점에서 실무자에게 어떤 선택권을 준다.

▷ 식 (42)의 일반적 형태의 조건부 기대값은 다음과 같다.

$$\hat{f}(t, r_t) = E[e^{-\int_t^u q(r_s)ds} f(r_u) \mid r_t]$$

이 식이 식 (42)와 주요한 차이점은 $e^{-\int_t^u q(r_s)ds}$의 함수에 $f(r_t)$가 곱해졌다는 것이다.

위 식의 우변은 어떤 파생상품의 만기의 손익의 할인된 가치와 비슷하고, 또한 확률적 이자율을 사용한다는 것이다.

▷ 자산 가격결정의 관점에서 이 변화는 매우 중요한데, 실제로 식 (50)은

$$q(r_s) = r_s$$

와 만기의 손익으로 선택되어지는 함수 $f(\cdot)$를 가지는 공식으로 무재정 확률의 조건하에서 만기 u의 파생상품의 가격을 준다.

▷ Feyman-Kac formula는 Kolmogorov's backward equation의 확장으로 식 (50)으로 정의된 $\hat{f}$의 대한 PDE를 제공한다.

<Def> The Feyman-Kac formula.

$$\hat{f}(t, r_t) = E[e^{-\int_t^u q(r_s)ds} f(r_u) \mid r_t], \qquad \text{all } t \geq 0$$

이 주어진다면, 다음 식이 성립한다.

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial t} = A\hat{f} - q(r_t)\hat{f},$$

단, operator A는 일반적으로 다음과 같이 주어진다.

$$\hat{f}_t = a_t \frac{\hat{f}}{\partial r_t} + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial r_t^2}$$

▷ 따라서 Feyman-Kac formula는 equivalent martingale measures에 의해서 얻어진 조건부 기대값에 상응하는 PDE를 제공하고, 이 PDE는 수치적 방법에 의해서 풀린다. 그 결과 $\hat{f}(r_t, t)$를 주는데, 이것은 금융적인 응용에서 만기가 u인 금리파생상품의 무재정가격이다.

5.6.1 예제 : 채권가격의 PDE

▷ 액면가치가 100인 채권의 가격은 아래와 같고, r_s는 시간 s에서의 일시적인 이자율이다.

$$B(u,t) = E[e^{\int_t^u r_s ds} 100 \mid r_t]$$

이 기대값은 equivalent martingale measure로부터 구해진다.

r_t의 SDE는

$$dr_t = a(r_t)dt + \sigma(r_t)dW_t, \qquad t \in [o, \infty).$$

인데, 이 process는 Ito diffusion의 특성을 갖는다.

▷ Feyman-Kac 공식에 의해 $B(t,u,r_t)$는 다음 식을 만족한다.

$$\frac{\partial B}{\partial t} = AB - r_t B$$

▷ 이 식에다 operator A를 대체하면

$$B_t = a_t B_r + \frac{1}{\sigma_t^2} B_{rr} - r_t B, \qquad r \geq 0;\ 0 \leq t \leq u$$

가 되고, 할인채권가격은 경계조건 $B(u,) = 100$ 인 PDE를 만족한다.

▷ 식 (56)에 의해서 주어진 공식은 경계조건이 식(60)인 식 (59)의 PDE에 대한 해답이다. 자산가격에 대한 조건부 기대값의 재표현과 내재 PDE의 일치를 볼 수 있는데, 금융분석가들은 좋아하는 표현으로 작업한다.

6. American Securities

▷ 미국식 파생증권은 원한다면 만기전에 행사될 수 있는 함축적인 또는 명백한 옵션을 포함한다.

▷ 미국식 파생증권을 다루는 데에는 새로운 수학적 개념이 요구되는 것이 Stopping time이다.

6.1 Stopping Times

▷ Stopping times는 특별한 시간기간 t의 가치로 가정되는 특별한 형태의 확률변수이다.

▷ τ는 이른 행사일이라 하면, 정보집합 I_t가 주어지면, 옵션이 이미 행사되었는가, 아닌가를 알 수 있다. 즉 I_t가 주어진다면

$$\tau \leq t,$$

이면 옵션은 이미 행사되었음을 의미하고,

$$\tau > t$$

이면 계약의 이른 행사 조항이 아직 이용되지 않았음을 의미한다.

τ의 이같은 특성이 stopping times을 정확하게 결정하는 것이다.

<Def> A stopping time은 I_t에 측정가능한 nonnegative 확률변수로서

1. I_t가 주어지면, $\tau \leq t$인가, 아닌가를 알 수 있다.
2. $P(\tau < \infty) = 1$이다.

6.2 Use of Stopping Times

▷ 유럽식 옵션에서는 만기는 randomness가 아니지만, 미국식 옵션에서는 random이다. 옵션이 만기에 행사된다고 가정하면,

$$F(S_{t,}t)^T = E_t^{\widetilde{P}}[e^{-r(T-t)}\max\{S_T - K, 0\}]$$

이다.

▷ 만약 만기가 T인 옵션이 이른 행사가 된다면

$$F(S_t, t)^* = \sup_{\tau \in \Phi_{t,T}} E_t^{\widetilde{P}}[e^{-r(T-t)}F(S_t, t, \tau)]$$

이다. 단, $\Phi_{t,T}$는 모든 가능한 stopping 기회들의 집합이다. 즉 τ의 가능한 결과들의 집합이다.

▷ 시간 t에서 stopping time τ에 대한 가능한 값을 사용하여 τ로 index된 $F(S_t, t, \tau)$의 가능한 가격의 spectrum을 계산할 수 있다. 정확한 계산을 위해서 가격의 supremum을 골라야 한다.

7. Extending the Results to Stopping Times

7.1 Martingales

▷ M_t는 다음과 같은 연속시간 마팅게일로 가정하자.

$$E[M_{t+u} \mid I_t] = M_t \qquad u > 0$$

이 마팅게일 특성은 시간이 random하게 선택되어도 유지된다.

▷ τ_1, τ_2는 I_t에서 측정된 서로 독립인 stopping time이라고 하면

$$P(\tau_1 < \tau_2) = 1$$

을 만족한다. 그러면 마팅케일 특성도 다음과 같이 유지된다.

$$E[M_{\tau_2} \mid I_{\tau_1}] = M_{\tau_1}$$

즉, random τ를 가진, random한 옵션행사를 가진 자산의 가격도 확률 $\hat{P}$하에서 여전히 마팅게일이다.

7.2 Dynkin's Formula

▷ B_t는 다음을 만족하는 process라고 가정한다.

$$dB_t = a(B_t)dt + \sigma(B_t)dW_t$$

그리고 $f(B_t)$는 이차미분 가능한 bounded function이다.

a stopping time은 $E[\tau] < \infty$이라고 고려하면,

$$E[f(B_\tau) \mid B_0] = f(B_0) + E\left[\int_0^\tau Af(B_s)ds \mid B_0\right]$$

를 가진다. 이것이 Dynkin's formula이다.

이것은 stopping time에 의존하는 함수의 기대값을 표현하는데 편리하다. 일반적으로 operator A는 infinitesimal generator이다.

8, Conclusion

▷ stocahstic process의 어떤 기대값과 어떤 종류의 PDEs는 중요한 일치(상응)가 있다. 이러한 결과는 실제나 이론에서 중요한데, 실무자들은 보다 편리한 방법을 선택할 수 있다.