

LIBOR시장모형과 Hull-White모형 하에서 구조화스왑의 모수 추정과 가격결정에 관한 연구

박건우* · 홍창수**

〈요 약〉

본 연구는 무차익거래 조건하에서 선도 이자율의 움직임을 설명하는 LIBOR 시장모형에 내재되어 있는 선도 이자율의 변동성 기간구조, 상관관계 행렬을 시장정보를 이용하여 빠르고 정확하게 추정하게 추정하는 방법을 찾아 구조화 스왑을 가격결정하는데 있다. LIBOR 시장모형에 대한 모수추정 방법에는 여러 가지 방법들이 소개되어 있지만 한국 이자율 옵션 시장의 낮은 유동성 때문에 시장의 모든 정보가 잘 반영되어 있는 적당한 상품을 찾기 힘든 경우도 있다. 따라서 실무적으로 가장 절차가 간단하며 적합이 잘 되는 모수 추정방법으로 구조화 스왑의 가격을 결정하고자 한다.

먼저, 한국 시장정보를 이용하여 LIBOR 시장모형으로 모수추정한 모수로 스왑선 곡면이 얼마나 정확히 복원되는지 보인다. Hull-White 모형과는 다르게 전체 변동성 곡면을 고르게 복원함을 보이고, 유로피언 5 by 5 스왑선 가격을 두 가지 모형으로 계산해 보았다. 유로피언 스왑선의 가격은 5Y 이후 5Y 스왑금리(swap rate)의 분포를 알 수 있고 두 가격은 평균 8bp 차이를 보였다. 이후 LMM모형의 차원축소 방법과 Full rank 방법으로 순간 상관계수 행렬을 추정하여 비교 결과 평균 2.4394E-14로 차이가 없었다. 마지막으로 실무적으로 발행되는 상품인 스프레드 레인지 어크루얼(Spread Range Accrual)을 차원축소 방법, Full rank 방법, Hull-White 방식으로 가격결정하여 3 요인 차원축소 방법으로 7배 이상의 계산 효율성을 확인하였다.

본 연구는 구조화스왑 가격결정에 있어 LMM의 실용성과 이자율 기간구조를 효과적으로 모형화 할 수 있는 방법을 보여주고 있으며, 파생상품 시장에서의 실무 활용에 대한 시사점을 제공해주고 있다.

주제어 : LIBOR시장모형, 구조화 스왑, 선도 이자율, 모수추정, 가격결정

논문접수일 : 2024년 12월 02일 논문수정일 : 2025년 01월 27일 논문게재확정일 : 2025년 02월 03일

* 제1저자, 한국투자증권 FICC운용부 차장, E-mail: stripe2773@naver.com

** 교신저자, NICE P&I 정보사업본부 이사, E-mail: cshong@nicepni.co.kr

I. 서 론

LIBOR Market Model(LMM)은 금융공학에서 금리 파생상품의 가격을 평가하고 헤지 전략을 설계하기 위해 사용되는 확률 모델이다. 이 모델은 시장에서 관찰된 LIBOR 금리의 움직임을 기하 브라운 운동을 기반으로 모형화하며, 특정 만기 구조에 따라 여러 금리를 동시에 모델링한다. LMM은 금리스왑, 캡, 플로어, 스왑선과 같은 파생상품의 가치 평가와 리스크 관리를 위해 널리 활용된다. 아울러, LMM은 금융 시장에서의 금리 변동성과 상관관계를 정밀하게 분석하기 위해 고안되었으며, 이론적 토대와 실무 활용성이 잘 결합된 모델이다.

이자율 기간 구조의 변화를 설명하는 여러 가지 모델들의 역사를 살펴보면 그 구분점이 명확하다. 초기 모델들의 공통점은 모두 초단기 이자율(Short rate)의 움직임을 설명하고 있으며 장기 이자율이 초단기 이자율들의 가중 기대합이 된다는 기본적인 경제학적 가정을 하고 시작한다. 특히 Vasicek model(1977)이 대표적이며 가장 기초적인 균형모형에 속한다. 따라서 이런 균형모형들을 통해서 채권의 균형가격을 도출하거나 이를 통하여 차익거래를 하려는 사람들에게 적합한 모형이었다. 이들은 모두 1세대 모형으로 구분된다.

시장에서 주로 거래되는 상품이 변함에 따라 이자율에 연계한 다양한 옵션들의 가격을 계산하기 위해서는 무차익거래 모형(No-arbitrage model)이 필요하게 되었으며 이는 자산의 현재 균형을 도출하는 것이 아닌 시장에서 바로 거래 가능한 가격, 즉 차익거래가 일어나지 않는 파생상품의 현재 가격을 계산하기 위함이었다. 대표적인 모형으로 Ho and Lee model(1986), Hull and White model(1990), Black, Derman, and Toy model(1990), Black and Karasinski model(1991)들을 들 수 있다. 이 모형들은 기본적으로 옵션의 기초 자산인 채권과 스왑의 시장 가격에 맞추어 내부 변동성 모수나 추세항 모수를 추정할 수 있다. 따라서 현재 시장의 제로커브(Zero Curve)를 내생적으로 계산해낼 수 있으며 이 모형들은 모두 2세대 모형으로 분류된다. 현재 국내 대부분의 금융 회사들은 2세대 모형을 통하여 이자율 연계 파생상품이나 구조화 채권의 가격을 결정하고 있다.

그러나 1, 2세대 모형들은 모두 초단기 이자율 $r(t)$ 의 움직임만을 설명하고 있으며 이는 최종적인 결과 해석에 대하여 많은 불편함을 가지고 있다. 초단기 이자율은 아주 짧은 시간(dt)에 적용되는 현물 이자율이지만 이는 실제로 시장에서 관찰할 수 없으며 중요한 헷지 모수인 최종 상품의 델타에 대한 유도과 해석을 매우 어렵게 한다. 또한 시장에서 공시되는 대표적인 이자율 파생상품 캡(Cap)과 스왑선(Swaption)의 가격은 모두 선도 이자율을 기초자산으로 하는 아주 간단한 모형인 블랙 모형(Black's model)을 통한 내재

변동성으로 공시된다. 따라서 스왑선이나 캡, 플로어등의 변동성 구조를 반영하기에 모형모수가 충분하지 않기 때문에 정확한 적합(exact fitting)이 불가능하고 최소자승 방법을 사용한다. 이에 따라 조금 더 시장에 가깝고 해석이 가능한 모형이 필요해졌는데 그것이 바로 3세대 모형인 시장모형(Market model)이다. LIBOR 시장모형은 선도 이자율의 움직임을 그대로 설명하며 무차익거래 조건(No-arbitrage condition)을 만족한다. 대부분의 이자율 옵션이나 구조화 채권들의 수익에 기준이 되는 미래 시점의 특정 기간 동안에 적용되는 금리로 현재 시점에서의 선도금리가 된다. 따라서 캡 시장(Cap Market)과 일관성을 가지는 선도금리에 대한 해석이 직접적으로 가능하며 더불어 모형에 대한 모수추정도 가능하게 한다. 시장에서 관찰 가능한 이자율을 모형화한 LIBOR 시장모형은 전 세대의 모형들과 비교했을 때 그 활용 가능성이나 해석의 용이성, 응용면에서 더욱 뛰어나다.

LIBOR 시장모형에도 단점이 분명히 존재한다. 전 세대 모형들은 모형의 모수추정방법이 손쉬운 반면에 선도금리 모형은 선도금리 각각의 변동성과 변동성의 기간구조, 선도금리간의 상관관계를 모두 추정해야 하므로 모수 추정 절차가 복잡하며, 스왑선과 같은 대표적인 금리 파생상품에 대하여 폐쇄해(Closed form solution)가 존재하지 않아 근사식(Approximation formula)에 의해서 파생상품 가격이 결정된다. 시장과 가장 닮아있는 모형이지만 그 대신에 모형 자체의 복잡함이 모형 상용화의 걸림돌로 작용되는 것이 된다. 따라서 국내의 경우 대부분 Hull-White 모형을 2 factor로 확장한 모형까지를 사용하고 있다.

본 연구의 목표는 무차익거래 조건하에서 선도 이자율의 움직임을 설명하는 LIBOR 시장모형에 내재되어 있는 선도 이자율의 변동성 기간구조, 상관관계 행렬을 시장 정보를 이용하여 쉽고 정확하게 추정하는 방법을 찾는 것이다. LIBOR 시장모형에 대한 모수 추정방법에는 여러 가지 방법들이 소개가 되어 있지만 한국 이자율 옵션 시장의 낮은 유동성 때문에 시장의 모든 정보가 잘 반영되어 있는 적당한 상품을 찾기 힘든 경우도 있다. 따라서 연구의 핵심은 실무적으로 가장 절차가 간단하며 적합이 잘 되는 모수 추정 방법으로 구조화 스왑을 가격결정하는데 있다.

본 연구는 원화 시장의 시장정보를 이용하여 실무적으로 사용되고 있는 HW 1요인 모형과 LIBOR 시장모형으로 헤지 상품인 스왑선, 구조화 스왑 등의 가격결정 방식을 비교 연구한다. 본 연구에서는 몬테카를로 시뮬레이션 방법을 이용해 상품의 가치 평가를 수행하였다. 이를 통해 각 상품의 공정가를 도출하여 분석에 사용하였다. 본 연구는 다음과 같은 순서로 기술되었다. 제Ⅱ장에서는 이론적 배경과 분석에 사용된 모형에 대한 간단한 설명을 한다. 제Ⅲ장에서는 적용된 모수추정 방법에 대해 설명한다. 제Ⅳ장에서는 적용된 시뮬레이션 방법을 설명하였으며, 제Ⅴ장에서는 실증분석으로 분석대상 상품, 시장 데이터로 모형과

모수추정 방법을 비교하여 시사점을 도출해 내었다. 마지막으로, 제 VI장에서는 제 V 장의 분석 결과를 통해 이 연구의 결론을 지었다.

II. 이론적 배경과 분석 모형

서론에서 언급한 대로 분석 모형은 Hull White 1요인 모형, LIBOR 시장모형을 사용하였다. 2가지 대상 상품에 대하여 Hull White 1요인 모형, LIBOR 시장모형으로 각각 분석한다. 마지막 부분에서는 LIBOR의 단계적 폐지이후 LIBOR시장모형의 대체모형으로 주목받고 있는 선도시장모형(Generalised Forward Market Model, 이하 FMM)에 대해서도 살펴본다. 각 유형에 대한 구체적인 모형은 아래와 같다.

1. Hull-White 1요인 모형

1개의 가우시안 팩터(Gaussian factor)와 결정적 함수(deterministic function)의 합으로 표현되는 초단기 금리 모형을 소개하고, 이 모형으로부터 유도된 무이표채 및 캡, 플로어, 스왑선의 가치 산정을 위한 공식을 살펴본다. 가우시안 팩터는 초단기 금리 모델에서 금리 변동의 확률적 요소를 나타내는 정규 분포 기반의 요인을 말한다.

1) 금리모형

위험중립측도(Risk adjusted measure) Q하에서 초단기 금리(instantaneous short rate)의 움직임은 다음과 같다고 가정하자.

$$\begin{aligned} r(t) &= x(t) + \psi(t), \quad r(0) = r_0 \\ dx(t) &= -ax(t)dt + \sigma(t)dW(t), \quad x(0) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

임의의 시점 $s(<t)$ 에 대해 위 식을 간단한 적분식으로 나타내면 다음과 같다.

$$x(t) = x(s)e^{-a(t-s)} + \int_s^t \sigma(u)e^{-a(t-u)}dW(u) \quad (2)$$

2) 무이표채 가격

만기가 T 인 무이표채의 t 시점에서의 가격을 $P(t, T)$ 라고 하자. t 시점까지 x 에 의해

형성된 시그마 필드(σ -field)를 F_t 라고 정의했을 때, $P(t, T)$ 는 다음과 같다. 시그마 필드(σ -field)는 어떤 집합의 부분집합들로 구성된 모음으로, 공집합을 포함하고 여집합 및 가산 합집합에 대해 닫혀 있는 구조를 가진다. 이는 확률론에서 사건들의 체계를 정의하며, 금리 모형에서는 확률 공간 상의 정보 구조를 나타내는 데 사용된다. 금리 모형에서 시그마 필드는 시간이 흐름에 따라 이용 가능한 정보를 표현하고, 조건부 확률 및 기대값을 정의하는 데 활용된다.

$$P(t, T) = E\{e^{-\int_t^T r(s)ds} | F_t\} = E\{e^{-\int_t^T x(s) + \psi(s)ds} | F_t\} \quad (3)$$

F_t 에 대한 조건부 확률 변수 $\int_t^T x(u)du$ 는 평균 $M(t, T)$, 분산 $V(t, T)$ 인 정규분포를 따른다.

$$\begin{aligned} M(t, T) &= \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} x(t), \\ V(t, T) &= \text{Var}\left(\int_t^T \sigma(u) \frac{1 - e^{-a(T-u)}}{a} dW(u) | F_t\right) \\ &= \int_t^T \sigma^2(u) \left(\frac{1 - e^{-a(T-u)}}{a}\right)^2 du \end{aligned}$$

따라서 위험중립측도 Q 하에서 무이표채의 가격을 나타낸 식 (3)은 다음과 같이 정리된다.

$$P(t, T) = \exp\left\{-\int_t^T \psi(u)du - M(t, T) + \frac{1}{2} V(t, T)\right\}$$

따라서 시장에서 관측된 만기가 T 인 할인요소(discount factor) $P^M(0, T)$ 가 다음을 만족하면, 이는 초단기 금리 모델이 실제 시장에서 관측되는 기간구조를 잘 설명한다는 가정과 일맥상통한다.

$$\begin{aligned} P^M(0, T) &= \exp\left\{-\int_0^T \psi(u)du + \frac{1}{2} V(0, T)\right\} \\ &\Leftrightarrow \exp\left\{-\int_0^T \psi(u)du\right\} = P^M(0, T) \exp\left\{-\frac{1}{2} V(0, T)\right\} \end{aligned}$$

위의 관계식을 이용하면 함수 $\psi(t)$ 에 대해 다음이 성립하므로

$$\begin{aligned} \exp\left\{-\int_t^T \psi(u)du\right\} &= \frac{\exp\left\{-\int_0^T \psi(u)du\right\}}{\exp\left\{-\int_0^t \psi(u)du\right\}} \\ &= \frac{P^M(0,T)}{P^M(0,t)} \exp\left\{-\frac{1}{2}[V(0,T) - V(0,t)]\right\} \end{aligned}$$

따라서, 무이표채 가격은 다음과 같이 정리된다.

$$P(t,T) = \frac{P^M(0,T)}{P^M(0,t)} \exp\left\{-M(t,T) - \frac{1}{2}[V(t,T) - V(0,T) + V(0,t)]\right\} \quad (4)$$

2. LIBOR 시장 모형

Hull-White는 수익률 곡선을 정확히 추정할 수 있는 모수를 다 갖고 있다. 그러나 스왑션, 캡의 변동성 구조를 반영하기에 모형 모수가 충분하지 않다. LMM은 캡이 정확한 적합(exact fitting)이 된다. 그러나 스왑션은 근사식(approximation formula)을 이용한다. Hull-White는 캡을 블랙 공식을 이용해서 가격으로 바꾼 다음 그것에 대해서 Hull-White 모형에 캡, 스왑션 가격결정공식(pricing formula)에다가 최소자승을 맞추는 오차를 최소화하는 모수를 찾는다. LMM은 모형 자체가 가지고 있는 모수가 캡, 스왑션을 직접 맞출 수 있도록 정확한 적합을 목적으로 만들어졌다. 즉, 캡이나 스왑션으로부터 과거에 대한 모수를 가지고 온다.

1) LIBOR Market Model의 정의

$0 < T_1 < T_2 < \dots < T_N < T_\infty$: 기간(tenor dates)

$\delta = T_{i+1} - T_i$

$W(t) = (W_1(t), \dots, W_m(t))^T \in R^m$: Brownian motion under the measure P

$P(t, T_i)$: 만기 T_i 에 1을 지급하는 제로쿠폰 본드, $P(T_i, T_i) = 1$

정의 1. 선도 LIBOR 금리(Forward LIBOR rate)

LIBOR 금리는 현재시점 t 에 선도 기간 $[T_i, T_{i+1}]$ 에서의 대출(loan)을 계약할 때의 1년 단위 이자율로, 다음과 같이 정의된다.

$$L(t, T_i, T_{i+1}) = \frac{1}{\delta_i} \left(\frac{P(t, T_i)}{P(t, T_{i+1})} - 1 \right), \quad 0 \leq t < T_i, \quad 1 \leq i \leq n-1 \quad (5)$$

T_i 시점에서 돈을 빌리고 T_{i+1} 시점에서 돈을 갚을 때 이자율이 $L(t, T_i, T_{i+1})$ 이다. T_i 전 시점 t 시점에서 봤을 때의 금리가 확률적이고 T_i 시점에 도달하면 결정적으로 금리가 결정된다. $L(t, T_i, T_{i+1})$ 는 $P(t, T_i)$ 와 $P(t, T_{i+1})$ 두 개의 함수이다. 2개의 변수에 의존해서 $L(t, T_i, T_{i+1})$ 가 결정되니까 이것에 대한 이토 명제를 갖고 계산하면 $L(t, T_i, T_{i+1})$ 에 대한 확률과정의 계산가능하고 이렇게 만든 $L(t, T_i, T_{i+1})$ 의 확률과정은 $P(t, T_{i+1})$ 를 기준재로 하는 선도측도, $P^{(i+1)}$, 상에서 LIBOR 금리 확률과정은 $[0, T_{i+1}]$ 의 구간에서 마팅계일이 된다. 따라서 이 측도 상에서의 브라운 운동을 $W^{(i+1)}(t)$ 라고 할 때, LIBOR 금리 확률과정은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$dL(t, T_i) = L(t, T_i) \gamma(t, T_i) W^{(i+1)}(t) = L(t, T_i) \gamma(t, T_i) (dW(t) + (\lambda - \sigma_{i+1})dt), \\ 0 \leq t \leq T_i$$

$\gamma(t, T_i)$ 가 시간에 대한 함수, $\gamma(t, T_i) = \gamma(t)$ 인 경우를 LIBOR 시장모형이라고 한다.

2) 현물 Libor 측도(Spot LIBOR Measure)

위의 LIBOR 금리 확률과정의 정의는 각각의 $L(t, T_i, T_{i+1})$ 마다 서로 다른 선도측도 $P^{(i+1)}$ 을 사용하며, 이 측도와 그에 따른 브라운 운동은 그 정의 구간이 모두 다르다. 즉, $(W^{(i+1)}, P^{(i+1)})$ 는 $[0, T_i]$ 에서만 사용할 수 있다. 이러한 문제점 때문에 모든 기간에서 사용 가능한 측도를 정의할 필요가 있다.

정의 2. 현물 LIBOR 측도 P^* 는 단기금융계정(rolling-over account)을 기준재로 한다. 단기금융계정은 시간 0에 \$1로 시작하여 $(T_{i-1}, T_i]$ 구간에 보유하고 있는 전액을 B_i 에 투자하는 포트폴리오를 말한다.

특이한 점은 보통 이것을 초단기 금리에서 연속복리로 Q 측도의 기준재로 표시를 하는데, 여기서는 초단기 금리의 기준재를 쓰지 않고 채권만 갖고 만기별로 제로쿠폰 본드(P_i)들로 모델링 했다.

$B^*(t)$: 단기 금융계정의 t-시점 가치

$m(t) = \min\{m: T_m \geq t\}$: t시점 이후의 첫 번째 이자지급 일자(reset date)

$$B^*(0) = 1, \quad B^*(t) = \frac{P_{m(t)}(t)}{P_1(0)} \prod_{i=1}^{m(t)-1} (1 + \delta_i L(T_i, T_i, T_{i+1})), \quad 0 < t \leq T_n$$

$$\frac{dB^*(t)}{B^*(t)} = \mu_{m(t)} dt + \sigma_{m(t)}^T dW(t)$$

현물 LIBOR 측도 P^* 상에서 m차 브라운 운동을 $W^*(t)$ 라 하면, LIBOR 금리의 확률과정은 다음과 같은 확률미분방정식(Stochastic Differential Equation, 이하 SDE)으로 나타난다.

$$dL(t, T_i) = \sum_{j=m(t)}^i \frac{\delta_j L(t, T_i, T_{i+1}) L(t, T_j, T_{j+1})}{1 + \delta_j L(t, T_j, T_{j+1})} \gamma_i^T(t, T_i) \gamma_j(t, T_j) dt \quad (6)$$

$$+ L(t, T_i, T_{i+1}) \gamma_i^T dW^*(t), \quad 1 \leq i < n$$

현물 LIBOR 측도는 추세향이 가장 작게 만들어지고 그 다음 전체 측도들이 섞여있는 것이다.

3) LIBOR 시장모형 하의 캡 공식

본 절에서는 Schoenmakers(2005)의 결과를 정리하도록 한다. 캡 평가에 사용된 LMM 모형의 공식은 다음과 같다.

정리 1. LMM을 가정할 때 $[T_j, T_{j+1}]$ 에서의 캡릿의 t시점에서의 가격은 다음과 같다.

$$Caplet_{j, j+1, \kappa}(t) = P(t, T_{j+1}) E_{j+1}^t [(L(t, T_j, T_{j+1}) - \kappa)^+ \delta_j] \quad (7)$$

$$= P(t, T_{j+1}) (\delta_j L(t, T_j, T_{j+1}) N(d_+) - \delta_j \kappa N(d_-))$$

$$d_{\pm} = \frac{\ln\left(\frac{L_j(t)}{\kappa}\right) \pm (\sigma_j^B)^2 \frac{(T_j - t)}{2}}{\sigma_j^B \sqrt{T_j - t}}. \quad \text{선도 측도 } P^{t_{j+1}} \text{ 조건}$$

$N(\cdot)$ 은 누적정규분포이고 $(\sigma_j^B)^2 = \frac{1}{T_j - t} \int_t^{T_j} |V_j|^2(s) ds$ 이고 시장에 고시되는 캡의 변동성은

$\sigma^{Black} = \sigma_j^B / \sqrt{T_{j-1}}$ 가 된다. 이 캡릿의 공식을 이용하여 T_a 에 시작해서 T_b 에 끝나는 캡의 공식이 다음과 같이 유도가 된다.

$$Vcap(t) = \sum_{i=a+1}^{\beta} VCaplet_i(t) \quad (8)$$

이자율 캡을 구성하고 있는 캡릿의 가치는 호가된 하나의 캡 변동성을 이용해 계산된다. LMM에서는 시장에서 관찰되는 캡릿변동성의 기간구조와 모형의 변동성 기간구조를 일치시키는 방식으로 현물 변동성을 추정한다.

(1) 스왑 시장 모형 하의 스왑션 공식

캡릿 공식에서 미래의 금리가 로그노말 분포를 따른다는 가정하에 공식이 유도되었던 것처럼 스왑션에서 미래의 스왑금리가 로그노말 분포를 따른다는 가정을 한다.

유럽형 스왑션(payer)은 $[T_p, T_q]$ 에서 정의되는 금리스왑을 T_p 시점에 체결할 수 있는 권한을 주는 옵션이다. 따라서 T_p 시점에서의 스왑션의 가치는 $P_{p,q}(T_p)(Swap_{p,q;\kappa}(T_p))^+$ 가 된다. $P_{p,q}(t)$ 는 t 시점에서 $[T_p, T_q]$ 구간의 연금(Annuity)이다.

정리 2. 스왑 시장모형을 가정할 때, 스왑션의 가치는

$$\begin{aligned} Swpn_{p,q;\kappa}(t) &= P_{p,q}(t) E_{p,q}^t \left[\frac{(Swap_{p,q;\kappa}(T_p))^+}{P_{p,q}(T_p)} \right] = P_{p,q}(t) E_{p,q}^t [(S_{p,q}(T_p) - \kappa)^+] \\ &= P_{p,q}(t) (S_{p,q}(t) N(d_+) - \kappa N(d_-)) \\ d_{\pm} &= \frac{\ln\left(\frac{S_{p,q}(t)}{\kappa}\right) \pm (\sigma_{p,q}^B)^2 \frac{(T_p - t)}{2}}{\sigma_{p,q}^B \sqrt{T_p - t}}, \quad (\sigma_{p,q}^B)^2 = \frac{1}{T_p - t} \int_t^{T_p} |\sigma_{p,q}|^2(s) ds \end{aligned} \quad (9)$$

(2) LIBOR 시장모형 하의 스왑션

LMM 모형에서의 스왑금리의 확률과정은 $\sigma_{p,q}(t)$ 가 확률과정이므로, SMM에 비하여 복잡한 분포를 갖는다. 일반적으로 LMM에서 스왑션의 폐쇄해는 존재하지 않으나 상당히 정확한 근사식(approximation formula)을 구할 수 있다.

정리 3. General 스왑션 근사식

$Swpn_{p,q;\kappa}(t) \approx P_{p,q}(t) (S_{p,q}(t) N(d_+) - \kappa N(d_-))$, and

$$d_{\pm} = \frac{\ln\left(\frac{S_{p,q}(t)}{\kappa}\right) \pm (\sigma_{p,q}^B)^2 \frac{(T_p - t)}{2}}{\sigma_{p,q}^B \sqrt{T_p - t}},$$

$$\text{where } (\sigma_{p,q}^B)^2 = \sum_{l,l=p}^{q-1} \frac{v_l^{p,q}(t)v_l^{p,q}(t)L(t,T_l,T_{l+1})L(t,T_l',T_{l+1}')}{S_{p,q}^2(t)} \int_t^{T_p} \gamma_l(s)^T \gamma_l(s) ds,$$

$$\text{with } v_l^{p,q} = \frac{\delta_l P_{l+1}}{P_{p,q}} + \hat{y}_l^{p,q} \quad (10)$$

정리 3은 근사식을 이용하여 γ 와 L_l 에 의존한 함수가 되도록 표시했다. 여기서 문제가 되는 항(term)이 $\hat{y}_l^{p,q}$ 인데 일반적으로 매우 작은 양이다.(Rebonato) $\hat{y}_l^{p,q}$ 를 0으로 두면 단순 스왑션 근사식 이고 $\hat{y}_l^{p,q} = \frac{\delta_l P_{l,q}}{P_{p,q}} \frac{S_{p,q} - S_{l,q}}{1 + \delta_l L_l}$ 와 같이 주면 좀 더 정교한 근사식이 되나 계산량은 많아진다. Refined 스왑션 근사식이란 스왑 시장과 LIBOR시장이 일반적으로 기간(Tenor)이 일치하지 않는데 동일하게 정산 됐을 때 $\hat{y}_l^{p,q}=0$ 으로 본다는 의미가 된다.

3. 무위험 지표기준금리(RFR) 전환 시 대체 금리모형

LIBOR는 주요은행들이 제출한 금리를 기반으로 산출되었으나, 2012년 조작사건 이후 신뢰성에 큰 타격을 받았다. LIBOR의 단계적 폐지로 주요국들은 무위험지표금리(Risk Free Reference Rate, 이하 RFR)로의 전환을 추진하였으며, 미국의 경우 SOFR, 영국은 SONIA, 한국은 KOFR가 대체 무위험지표금리로 채택되었다. 기존의 LIBOR Market Model(LMM)은 LIBOR금리에 기반해 설계되어 금융상품 및 포트폴리오의 평가에 사용되었으나, RFR 중심의 환경에서는 기존모델로는 적합하지 않은 한계가 드러나고 있다. 이러한 배경에서, Generalised Forward Market Model(FMM)은 무위험 이자율을 기반으로 구축된 새로운 모형이다. Lyashenko and Mecurio(2019)가 제안한 FMM은 금리변동성을 보다 유연하고 정교하게 반영하여 다양한 만기별 금리를 다룰 수 있는 모델로, RFR전환 시 LMM을 대체할 수 있는 모형으로 평가받고 있다.¹⁾ FMM의 주요 특징은 무위험 이자율 중심의 구조, 시간에 따른 금리변동성 반영, 다변수 모델링과 상관관계 반영, 다른 만기의 금리를 동시에 다룰 수 있어 포트폴리오 내 금융상품의 리스크관리에 유리하다는 장점이 있다. 본 논문에서는 FMM을 연구주제로 삼고 있지 않으나, 추가적인 연구를 위해 [부록 1]에 ‘무위험 지표기준금리 전환 시 기존 모형의 확장’에 대해 설명하였다.

1) LIBOR에서 SOFR로 전환하는 경우 LIBOR시장모형이 새로운 모형으로 전환해야 하는지에 대해 논의가 진행 중이다. Lyashenko and Mecurio(2019)의 의하면, LIBOR시장모형의 확장 형태인 일반화된 선도시장모형(generalized Forward Market Model, FMM)을 통해 LIBOR시장모형은 계속 유지될 수 있고 새로운 대체금리인 RFR에 활용할 수 있다고 주장하고 있다.

4. 최신의 연구 주제와 동향

그램-샤리에 확장(Gram-Charlier expansion)은 정규 분포를 기반으로 한 확률 밀도 함수에 비정상적인 왜도(skewness)와 첨도(kurtosis)를 추가하여 실제 데이터의 특성을 더 잘 반영하려는 방법이다. 이는 헤르미트 다항식(Hermite polynomials)을 사용하여 정규 분포에서 벗어난 부분을 보정하는 방식으로 이루어진다. 이러한 확장은 옵션 가격 결정 등 금융 분야에서 자산 수익률의 비정상성을 모델링하는 데 유용하게 사용된다. 야코비 확률모형(jacobi stochastic model)은 자산의 변동성을 모델링하는 데 사용되는 확률 과정 중 하나로, 변동성이 시간에 따라 확률적으로 변화하는 특성을 포착한다. 특히, 변동성이 일정 범위 내에서 움직이며, 경계에 가까워질수록 되돌아오는 성질을 가지는 평균회귀(mean-reverting) 특성을 나타낸다. 이러한 특성으로 인해 야코비 모형은 금융 시장에서 관찰되는 변동성의 동적 특성을 모델링하는 데 적합하다. 이러한 모형들은 자산 가격의 변동성과 수익률 분포를 보다 정확하게 모델링하기 위해 개발되었으며, 옵션 가격 결정 등 다양한 금융 분야에서 활용되고 있다. 예를 들어, 그램-샤리에 확장은 옵션 가격을 근사하는 데 사용되며, 실제 데이터의 왜도와 첨도를 반영하여 정규 분포 기반의 모델보다 현실적인 가격을 도출할 수 있다. 한편, 야코비 확률모형(jacobi stochastic model)은 변동성의 동적 특성을 모델링하여 옵션 가격 결정 및 리스크 관리에 활용될 수 있다. 이와 같은 최신 모형들은 기존의 단순한 로그정규분포 기반 모형의 한계를 보완하며, 금융 시장의 복잡한 특성을 더 정확하게 반영할 수 있는 도구로 주목받고 있다.

Ⅲ. LIBOR 시장모형 모수추정

LIBOR 시장 모형의 모수추정은 선도금리의 확률과정이 T-선도측도에서 $dL(t, T_i) = L(t, T_i, T_{i+1})\gamma(t, T_i)dW^{(i+1)}(t)$ 를 따를 때, $\gamma(t, T_i)$ 의 추정이다. $\gamma(t, T_i)$ 는 $\gamma(t, T_i) = \sigma_i(t)e_i(t)$ 으로 구성되어 있고 $e_i(t)$ 는 $\rho_{ij}(t)$ 를 출레스키 분해 한 유닛벡터이다. 그러면 $\sigma_i(t)$ 와 $\rho_{ij}(t)$ 에 대한 적절한 모수화를 찾는 것부터 시작한다.

1. LIBOR 시장 모형의 모수화

1) 변동성 함수

변동성 함수는 Rebonato(1999)의 함수이다. $\sigma_i(t) = c_i g(T_i - t)$

$$g(t)=g_{a, \, b, \, g_{\infty}}(t):= \, g_{\infty}+ \, (1-g_{\infty}+ \, a \cdot t \,)e^{-b \cdot t}, \, a, \, b, \, g_{\infty} > 0 \tag{11}$$

모수가 3개인 $g(t)$ 함수 구조다.

$g(t)$ 를 어떤 함수로 선택하느냐가 중요하다. 만약, 특정한 성질을 갖도록 함수를 제한시킨다면, 그 성질을 갖는 함수들 $\{g_a: a \in A\}$ 중에서 자승오차(squared error)를 최소화시키는 것으로 선택하면 된다.

$$\min_{\alpha \in A, C > 0} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\left(\hat{\sigma}_i^B \right)^2 T_i - C^2 \int_0^{T_i} g_{\alpha}^2(t) \, dt \right)^2$$

그리고 캡릿을 정확하게 적합할 수 있게 c_i 를 시장가와 맞춰준다.

$$\left(\sigma_i^B \right)^2 T_i = c_i^2 \int_0^{T_i} g^2(t) dt, \, 1 \leq i < n$$

이렇게 나온 모수는 캡릿을 정확하게 적합하면서 시간이동 동차성(time-shift homogeneous)을 유지하려고 하는 모수다.

2) 상관관계 구조

선도 LIBOR 금리의 상관관계 구조는 몇 가지 경제학적 조건을 충족해야 한다. 즉, 이자율 사이의 만기 차이가 길어질수록 상관관계 계수는 감소해야 하며, 일정 간격으로 만기가 설정된 선도 이자율의 경우, 만기가 증가함에 따라 상관관계가 커진다. 그리고 적당한 요인(factor)의 개수가 있어야 되고 양의 정부호(positive definite)와 0, 1 사이에 있고 다음의 조건들을 자연스럽게 만족할 수 있는 Schoenmaker and Coffey(2003)이 제안한 상관관계 함수를 사용할 것이다.

$$\rho_{ij}^{(0)} = \exp \left(- \frac{|j-i|}{m-1} \left(- \ln \rho_{\infty} + \, \eta_1 \frac{i^2 + j^2 + \, ij - 3mi - 3mj + 3i + 3j + 2m^2 - m - 4}{(m-2)(m-3)} \right. \right. \tag{12}$$
$$\left. \left. - \, \eta_2 \frac{i^2 + j^2 + ij - mi - mj - 3i - 3j + 3m + 2}{(m-2)(m-3)} \right) \right), \, 1 \leq i, j \leq m$$

2. 목적함수(Objective Function)

모형 모수 $\rho_{\infty}, \, \eta_1, \, \eta_2, \, a, \, b, \, g_{\infty}$ 는 최적화 기법을 통하여 추정하고 $c_i, 1 \leq i < n$ 은 시장에서

공시된 블랙 캡릿(Caplet) $\widehat{\sigma}_i^B$ 의 변동성과 다음 식을 통하여 구한다.

$$\left(\widehat{\sigma}_i^B\right)^2=\frac{c_i^2}{T_i} \int_0^{T_i} g^2\left(T_i-s\right) d s \tag{13}$$

모수 추정을 위해 두 개의 목적함수가 필요하며, 이를 정의하기 위한 공식은 다음과 같다.

(i) 블랙 스왑선의 변동성 $\widehat{\sigma}_{p, q}^B$ (식 13)은 다음과 같이 근사된다.

$$\left(\widehat{\sigma}_{p, q}^B\right)=\sum_{i, j=p}^{q-1} \frac{w_i^{p, q} w_j^{p, q} L\left(0, T_i, T_{i+1}\right) L\left(0, T_j, T_{j+1}\right)}{S_{p, q}^2} \widehat{\sigma}_i^B \widehat{\sigma}_j^B \alpha_{i, j, p}^{\Theta}, 1 \leq p < q \leq n \quad , \tag{14}$$

$$\alpha_{i, j, p}^{\Theta}=\frac{\sqrt{T_i} \sqrt{T_j}}{T_p} \frac{\int_0^{T_p} g\left(T_i-t\right) g\left(T_j-t\right) \rho_{i-m(t), j-m(t)} d t}{\sqrt{\int_0^{T_i} g^2(s) d s} \sqrt{\int_0^{T_j} g^2(s) d s}}$$

모수의 집합은 아래와 같다.

$\Theta=\left(\rho_{\infty}, \eta_1, \eta_2, a, b, g_{\infty}\right) | 3 \eta_1 \geq \eta_2 \geq 0, 0 \leq \eta_1+\eta_2 \leq-\ln \rho_{\infty}, 0 \leq \rho_{\infty} \leq 1, a, b, g_{\infty}>0, \quad S_{p, q}$
는 $\left[T_p, T_q\right]$ 사이의 스왑 금리 이고

$$w_i^{p, q}=\frac{\delta_i P\left(T_{i+1}\right)}{P_{p, q}}+\widehat{y}_i^{p, q}, P_{p, q}=\sum_{j=p}^{q-1} \delta_j P\left(T_{j+1}\right), \delta_i=T_{i+1}-T_i \quad \text { 이며 } P\left(T_j\right) \text { 는 만기가 } T_j \text { 인}$$

제로 쿠폰 채권의 현재가격이다.

$\widehat{y}_i^{p, q}$ 는 위의 근사식을 결정하는 것으로서 다음 두 가지로 나눌 수 있다.

(a) $\widehat{y}_i^{p, q}=0$

(b) $\widehat{y}_i^{p, q}=\frac{\delta_i}{P_{p, q}\left(1+\delta_i L\left(0, T_i, T_{i+1}\right)\right)}\left(P_p-P_i-S_{p, q} \sum_{j=0}^{\left[\frac{i-p}{m}\right]-1} P_{p+m(j+1)} \sum_{r=p}^{p+m-1} \delta_{m j+r}\right)$

- m=1, 표준(equally settled) 스왑선 시장
- m=2, 반기(semi-annual) 유로 스왑선 시장
- m=4, 분기(quarterly) 미국, 영국, 일본 스왑선 시장

블랙 스왑션의 변동성에 대한 근사식을 이용하여 다음의 최소자승 목적함수를 정의한다. 다음은 $RMS(\theta)$ 는 캡과 스왑션의 옵션 가격에서 오차를 측정한다.

$$RMS(\theta) \equiv \sqrt{\frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{1 \leq p \leq q-2, q \leq n} \left[\frac{\sigma_{p,q}^B - \sigma_{p,q}^B(\theta)}{\sigma_{p,q}^B} \right]} \quad (15)$$

$\sigma_{p,q}^B(\theta)$ 는 캡릿 블랙 변동성과 스왑션의 블랙 변동성의 이론식을 통해 얻은 관계식이다.

(ii) 두 번째 목적함수를 정의하기 위해 스왑션 변동성에 대한 또 다른 근사식이 필요하다.

$$\sigma_{p,q}^{MSF}(\theta) \text{는 스왑금리와 } (\sigma_{p,q}^{MSF}(\theta))^2 = \sum_{i,j=p}^{q-1} \frac{w_i^{p,q} w_j^{p,q} L(0, T_i, T_{i+1}) L(0, T_j, T_{j+1})}{S_{p,q}^2} \hat{\sigma}_i^B \hat{\sigma}_j^B \prod_{i,j,p}^{\theta},$$

$1 \leq p < q \leq n$, Libor 금리의 관계를 이용해 유도한 관계식이다.

$$\prod_{i,j,p}^{\theta} = \frac{\int_0^{T_p} g(T_i - t) g(T_j - t) \rho_{i-m(t), j-m(t)} dt}{\sqrt{\int_0^{T_p} g^2(T_i - s) ds} \sqrt{\int_0^{T_p} g^2(T_j - s) ds}}$$

$$RMS(\theta) \equiv \sqrt{\frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{1 \leq p \leq q-2, q \leq n} \left[\frac{\sigma_{p,q}^B - \sigma_{p,q}^{MSF}(\theta)}{\sigma_{p,q}^B} \right]}$$

$RMS^{MSF}(\theta)$ 는 스왑금리와 Libor 금리에서의 에러를 측정하는 함수로 볼 수 있다.

(iii) 최소화해야 될 최종적인 목적함수

모형의 추정에서는 MSF(Market Swaption Formula)의 오차가 적정 수준 범위에 들어오도록 하면서, 캡과 스왑션의 값에서의 RMS(Root Mean Square) 오차를 최소화하도록 한다. 이를 위한 목적함수는 다음과 같이 정의된다.

$$Min_{\theta} RMS(\theta) \sqrt{RMS(\theta)^2 + RMS^{MSF}(\theta)^2} \quad (16)$$

$RMS^{MSF} \leq RMS$ 인 경우, 목적함수는 RMS^4 와 유사하며, RMS^{MSF} 가 충분히 작으므로 MSF에 대한 적합을 고려하지 않아도 된다. 반대로, $RMS^{MSF} > RMS$ 인 경우 목적함수는 $(RMS \cdot RMS^{MSF})^2$ 이 되어 RMS와 RMS^{MSF} 를 동시에 감소시킨다.

1) 주성분 분석

주성분 분석은 요인의 개수가 너무 많아서 요인을 줄이는 알고리즘이다. 하기 전에 명확히 해야할 것은 모수추정을 위해 하는 게 아니라 시뮬레이션을 위해서 하는 것이다. 주성분 분석은 가격결정을 하기 위해서 요인 개수를 줄이는 방법이다. 처음의 전체 행렬의 ρ_{ij} 를 가지고 국지적 해를 찾는 가정을 하고 ρ_{ij} 에 대한 행렬이 나온다. 그러면 나온 행렬에 대해서 주성분 분석을 시행하는 것이다. 결과값에 대한 Rank가 d이면 결과값을 다시 모수추정한다. 즉 처음에 모수추정하면 ρ_{ij} , g가 나온다. 이 나온 ρ_{ij} , g를 주성분 분석을 적용하고 다시 모수추정하는 것이다. 그래서 주성분 분석을 사용하게 되면 최적화를 두 번 시행한다.

- LMM 기본 모형의 브라운 운동(Brownian motion)은 (N-1) 차원이다. 이 모형의 factor 수를 d차원으로 줄이는 경우 주성분 분석을 사용한다. 주성분 분석은 상관계수 행렬 $\rho^{(0)} \in R^{(N-1) \times (N-1)}$ 의 rank 수를 줄여, 영향력이 큰 요인만을 남기는 과정으로 생각할 수 있다.
- i. 행렬 $\rho^{(0)}$ 의 고유값(eigenvalue)를 크기 순으로 나열하여 각각의 $\lambda_1 > \dots > \lambda_d \geq 0$ 과 대응하는 d개의 고유값(eigenvector), u_1, \dots, u_d 를 골라낸다.
- ii. $L_i(t)$ 의 변동성 $\gamma_i(t)$ 에 포함된 $e_i^{(0)} = (e_i^{(0)}(1), \dots, e_i^{(0)}(d))^T$ 를 R^d -vector로 재정의 한다.

$$e_i^{(0)}(p) = u_p(i) \sqrt{\lambda_p} \in R^d \quad \text{for} \quad i = 0, \dots, N-2, \quad p = 1, \dots, d$$

- i. $e_i(p)$ 의 정규화 벡터(normalized vector)를 $\tilde{e}_i(p)$ 라고 하자. 즉, $\tilde{e}_i = \frac{e_i}{|e_i|} \in R^d$
- ii. $PCA(\rho;d) := \tilde{\rho}^{(0)} = (\tilde{e}_{ie_j}^T, 1 \leq i, j < n$

- $\tilde{\rho}^{(0)}$ 을 고정시킨 채로, $RMS(g, \rho^{(0)} = \tilde{\rho}^{(0)})$ 를 최소화 시키는 변동성 함수 g(s)의 모수 a, g_∞ 를 다시 추정한다. 단, 다음의 제한 조건을 고려해야 한다.

$$a \geq 0, \quad g_\infty > 0$$

- 새로 정의된 g(s)와 캡릿(Caplet) 변동성을 이용하여 $\gamma_i(t)$ 의 상수 c_i 를 구한다.

$$c_p^2 = \frac{(\hat{\rho}_p^B)^2 T_p}{\int_0^{T_p} g^2(T_p - t) dt}, \quad 1 \leq p < n \tag{17}$$

IV. LIBOR시장모형 평가방법

LIBOR 시장모형 하에서 이자율 기간구조의 시물레이션은 단지 하나의 요소의 움직임만을 고려했던 전형적인 주가 시물레이션보다 훨씬 복잡한 양상을 띤다. 이자율커브의 움직임을 나타내기 위해서는 시물레이션 된 많은 이자율들을 요구한다. 이 논문에서는 이산 기간(discrete tenor) 구조하에서의 LIBOR 이자율을 시물레이션 할 것이다. 시장에서 관찰 할 수 없는 만기에 대한 이자율은 적절한 보간을 통해서 구해질 것이다. LIBOR 이자율들은 각각의 현물(spot) 측도하에서만 로그노말 분포를 따르지만 T-선도 측도하에서 시물레이션 한다면 이자율의 개수와 함께 서로 다른 만기의 각 이자율들 간의 상호관계 역시 고려해야 할 사항이다. 따라서 시물레이션은 취해지는 측도에 따라 영향을 받을 것이다. 주가의 시물레이션은 위험중립 측도하에서 행해지고 로그노말 분포를 따르게 된다. 따라서 시물레이션은 취해지는 측도에 따라 영향을 받을 것이다. 주가의 시물레이션은 위험중립 측도하에서 행해지고 로그노말 분포를 따르게 된다. 따라서 LMM에서도 그 이자율이 로그노말 분포를 따르게끔 측도를 취해주는 것이 합당하게 보이지만 반드시 그렇게 해야 되는 것은 아니다. 연속함수가 사용되는 이론적인 파생상품의 가격결정은 선택되는 측도의 종류에 무관하나 시물레이션에서는 모든 것이 이산화되기 때문에 이론적인 가격에서 약간의 편차가 날 수도 있다.

LIBOR시장모형에서 선도금리 방정식

$$\frac{dL(t, T_i)}{L(t, T_i, T_{i+1})} = \left(\sum_{j=m(t)}^i \frac{\delta L(t, T_j, T_{j+1})}{1 + \delta L(t, T_j, T_{j+1})} \gamma_i^T(t, T_i) \gamma_j(t, T_j) \right) dt + \gamma_i^T(t, T_i) dW^*(t), \quad (18)$$

$0 \leq t \leq i\delta, 1 \leq i < N_{tenor}$, 현물 측도(spot measure) 조건

LIBOR 시장 모형에서는 기준재를 T-선도 측도 또는 최종 측도 중에 무엇으로 잡아도 시물레이션이 가능하다. 여기서 추세항 항이 많으면 계산하는데 상대적으로 어려움이 있다.

이산화 방법은 Glasserman and Zhao method를 사용한다. LIBOR 시장모형에서 로그노말 선도 SDE 자체를 이산화한다면 무차익 거래 조건이 깨지게 된다. 하지만 할인측도 채권(deflated bond)을 이산화하면 무 차익거래 조건을 만족한 상태에서 이산화를 할 수 있다. 따라서 선도 금리를 이산화하여 시물레이션하는 대신에 할인측도 채권을 이산화하여 시물레이션 하여 나온 채권 값들로부터 선도 이자율을 다시 계산하게 된다. 할인측도 채권의 SDE는 마팅계일을 만족하므로 추세항 계산에 시간이 걸리지 않으며, 그로 인해 시물레이션

시간이 매우 짧아진다.

$$D_i(t)=\frac{B_i(t)}{B^*(t)}$$
$$D_i(t)=\prod_{j=i}^N(1+\delta L_j(t))$$

할인측도 채권을 정의하고 선도 LIBOR 금리와의 관계를 정했다.

할인측도 채권에 대한 SDE는 다음과 같이 정의되고 이것을 이산화시켜 시뮬레이션을 수행한다.

$$dD_i(t)=D_i\sum_{j=n}^N\frac{\delta L_j(t)}{1+\delta L_j(t)}\sigma_jdw^i \tag{19}$$

V. 실증분석

1. 분석 대상

분석에 사용한 상품은 유럽형 스왑선, 스프레드 레인지 어크루얼 스왑(Spread Range Accrual Swap)이다. 유럽형 스왑선은 표준형 상품으로, 해당 모수추정 결과가 얼마나 시장에 적합한지 알 수 있다. 아울러, 스프레드 레인지 어크루얼 스왑은 현재 실무에서 발행 및 헤지운용되는 상품으로 실무 적용 시 장단점을 확인할 수 있다. 스프레드 레인지 어크루얼 상품은 구조화 스왑(Structured Swap) 중 하나로, 금리 차이에 기반한 파생상품이다. 이 상품은 두 금리의 차이(스프레드)가 특정 범위(range) 내에 있을 경우에만 이자를 지급하는 방식으로 설계된다. 스프레드는 일반적으로 장기 금리와 단기 금리의 차이를 스프레드로 정의한다. 예를 들어, 10년 만기 이자율 스왑(CMS 10Y) 금리와 2년 만기 이자율 스왑(CMS 2Y) 금리의 차이가 스프레드가 될 수 있다. 아울러, 범위 설정은 스프레드가 미리 정해진 범위 내에 있을 때만 이자가 발생하게 된다. 예를 들어, 스프레드가 0 이상일 때(즉, 장기 금리가 단기 금리보다 높을 때) 이자를 지급하는 구조이다. 일반적으로 고수익을 목표로 하거나 특정 금리 환경에서 유리한 조건을 제공하는 파생상품으로 사용된다. 이자는 스프레드가 범위 내에 있는 기간에 비례하여 계산된다. 예를 들어, 연 3%의 고정금리를 기준으로 스프레드가 범위 내에 있는 날의 수(n)를 전체 관찰 일수(N)로 나눈 비율만큼 이자를 지급한다.

$$\text{이자} = \text{고정금리} \times (n / N)$$

관찰 기간이 360일이고 그 중 180일 동안 스프레드가 범위 내에 있었다면, 지급되는 이자는 $3\% \times (180/360) = 1.5\%$ 가 된다. 장점으로는 수익률 향상을 목적으로 스프레드가 설정된 범위 내에 포함될 경우, 투자자는 일반적인 채권보다 높은 이자 수익을 얻을 수 있다. 단점으로는 스프레드가 설정된 범위를 벗어날 경우 이자가 지급되지 않으므로, 금리 변동에 민감하며, 상품의 구조가 복잡하여 투자자가 이해하기 어려울 수 있으며, 이는 투자 결정에 어려움을 줄 수 있다. 국내에서는 CD 금리와 LIBOR 금리 등을 활용한 듀얼 레인지 어크루얼(Dual Range Accrual) 형태의 상품이 발행되었으며, 이는 두 개의 금리 스프레드가 모두 특정 범위 내에 있을 때 이자를 지급하는 구조이다.

1) 유럽형 스왑선(European swaption)

<표 1> 유럽형 스왑선(European swaption) 상품

해당 상품은 유효일로부터 5년 후 5년 스왑 금리의 분포에 대한 정보가 포함되어 있다.

Product	European swaption
Currency	KRW
Denomination	100
Swap Maturity	5Y
Option Maturity	5Y
Strike	ATM

2) 스프레드 레인지 어크루얼 스왑(Spread Range Accrual Swap)

<표 2> 스프레드 레인지 어크루얼 스왑(Spread Range Accrual Swap)

해당 상품은 KRWIRS 10Y - 2Y 스왑 금리가 0보다 큰 일자만 금리가 부리되는 구조화 스왑이다.

Product	Spread Range Accrual Swap
Currency	KRW
Maturity	5Y
Denomination	100
Structured Leg Payment	Annually
Reference rate 1	KRW 5Y Swap Rate
Reference rate 2	KRW 2Y Swap Rate
Structured Condition	Year 1 [7.08]% per annum
	Year 2~5 [6.58]% x N/M per annum
	M = number of dates in a year, N = number of dates when the condition is satisfied
Condition	0% < Reference Rate 1 - Reference Rate 2
Floating Leg Payment	Quarterly
Floating Rate	Spot CD 3M
Issuer Call	None

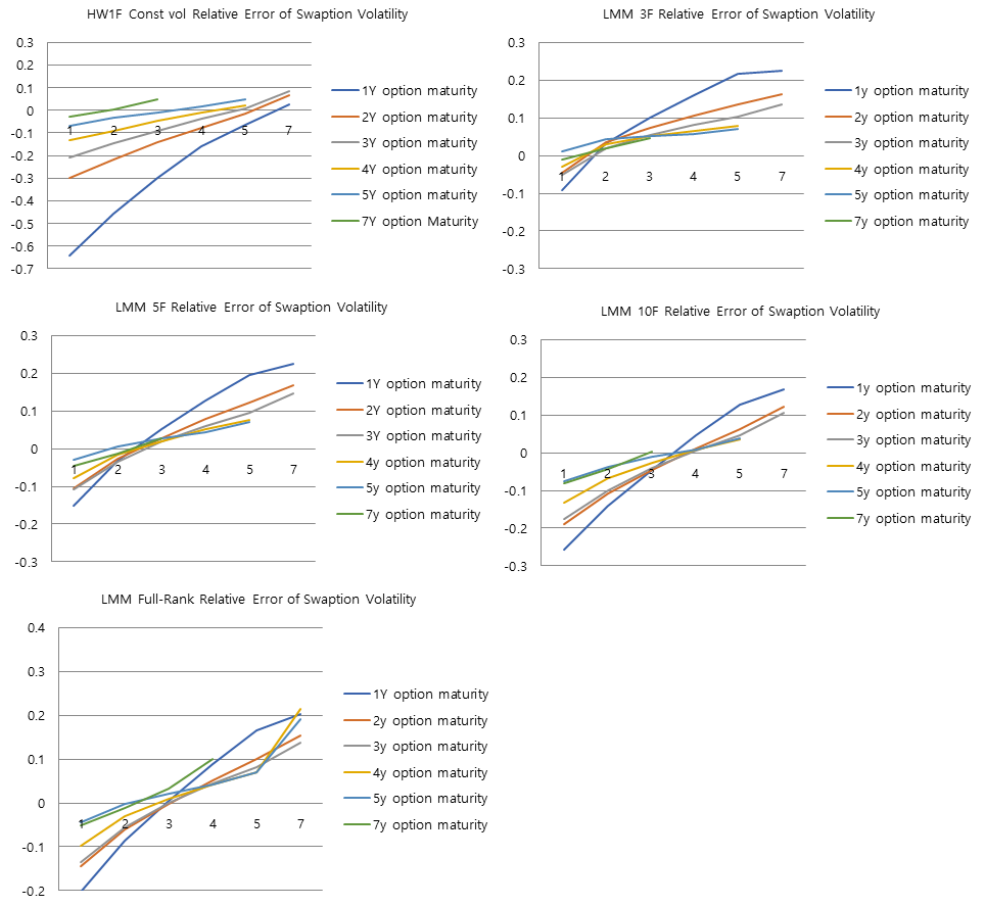
2. 시장 데이터

분석에 사용한 한국 시장의 자료는 선도 금리를 산출하기 위한 3개월 CD이자율과 스왑 이자율 자료, 스왑선 변동성 자료이다.

[그림 1]은 Hull-White 모형의 모수 추정에 필요한 자료를 반기 마다 나타냈다. 2020년 12월부터 금리의 전반적인 수준이 상승하는 모습을 보이고 있다. 스왑선 변동성 자료의 반기별 변동폭도 확인할 수 있다.

[그림 1] 2020-12-30일자 스왑선 변동성과 추정된 스왑선 변동성의 상대오차

[그림 1]은 요인이 축소되면서 시장 스왑선 변동성 행렬의 적합도를 시각화 하였다. 스왑선 변동성이 모형의 파라미터보다 많아서 완벽한 적합은 불가능하다, 하지만 HW1F 보다 LMM이 평균적으로 시장 스왑선 변동성 행렬을 더 잘 복원하는 것으로 보인다.



이와 같이 다양한 모습을 나타내는 자료 중 특정 연도의 자료만 분석에 사용될 경우 모수 추정 및 계산 결과의 편이가 발생할 수 있으므로 2020~2022년 반기별 자료 4개 시점을 대상으로 실증분석 결과를 산출함으로써 분석 결과의 일반성을 높이고자 하였다.

3. 모수추정 결과

<표 3>에서 사용된 LMM 3F, 5F, 10F는 LIBOR 시장 모형(LIBOR Market Model)의 차원 축소를 위해 각각 3개, 5개, 10개의 요인을 적용한 모형을 나타낸다. 이러한 모형은 본 연구에서 모수 추정의 계산 효율성과 실무적 유용성을 비교하기 위해 도입되었으며, 각 요인 모형은 주성분 분석(Principal Component Analysis)을 통해 고유값 분해로 정의되며, 요인 개수는 금리 간 상관관계와 변동성을 포착하기 위해 선정되었다. <표 3>은 2020년 12월에서 2022년 6월까지의 반기별 자료를 이용한 Hull-White, LIBOR 모형의 모수 추정결과이다. 추정된 모수가 국지적 해(local minimum)에 속할 수 있으므로 다양한 초기값에서 시작하더라도 동일한 해에 수렴함을 확인하였다.

<표 3> Hull-White, LIBOR 시장모형의 모수 추정 결과

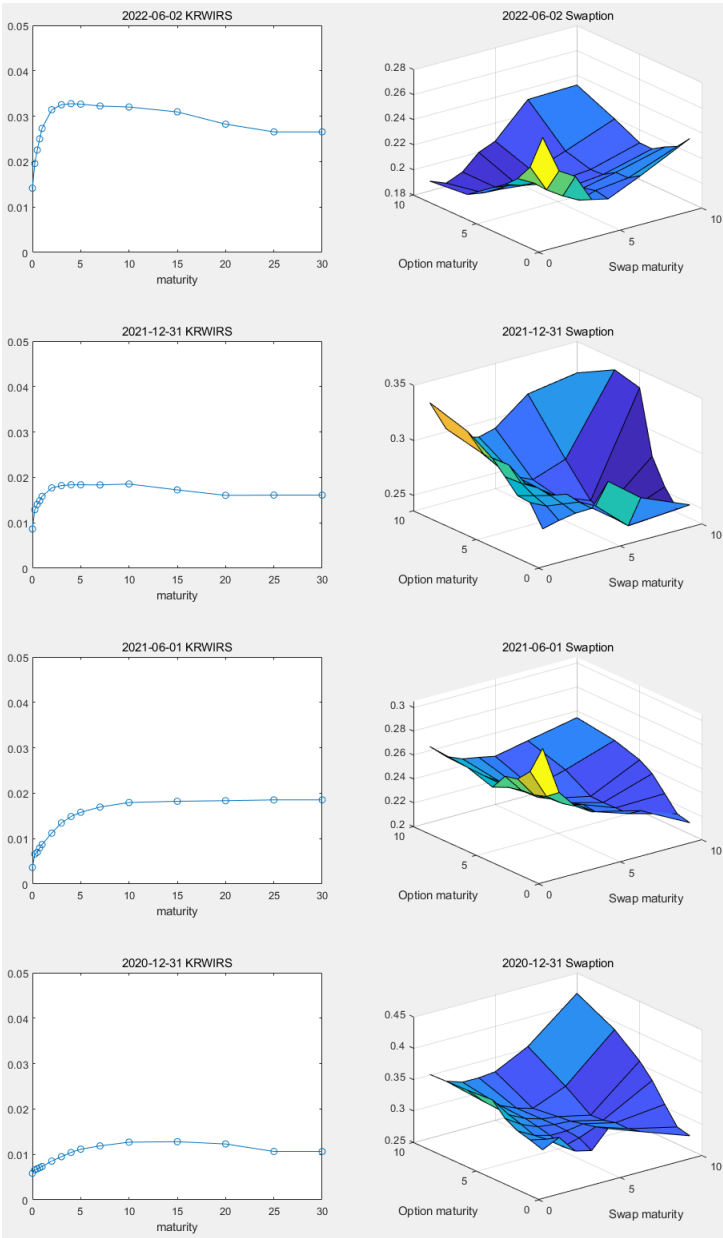
<표 3>은 2020.12 ~ 2022.06의 시장자료를 이용하여 Hull-White, LIBOR 시장모형(LMM)을 추정한 결과이다. LMM의 경우 요인의 개수를 축소시킬수록, 계산 속도의 단축이 예상된다. 요인이 축소되면서 시장 스왑선 변동성 행렬 적합도 또한 잘 지켜지는지 측정하기 위해 Hull-White, LMM 3F, 5F, 10F, Full로 정하였다.

모형	파라미터	2020-12-31	2021-06-01	2021-12-31	2022-06-02
HW 1F	a	0.05	0.05	0.05	0.05
	sigma	0.0054	0.0059	0.0063	0.0079
	g_{∞}	0.3045	0.8672	3.8869	3.9998
LMM 3F	a	0.4459	8.343E-20	0.0081	1.0002
	b	4	4	4	4
	g_{∞}	0.3045	1.0858	3.8925	4.0002
LMM 5F	a	0.4459	6.497E-19	0.0017	0.9998
	b	4	4	4	4
	g_{∞}	0.3045	1.4082	3.8965	4.0005
LMM 10F	a	0.4459	6.988E-20	8.364E-21	0.9995
	b	4	4	4	4
	g_{∞}	0.3045	1.7438	3.8994	4.0007
LMM Full	a	0.4459	0	8.364E-21	0.9994
	b	4	4	4	4

[그림 2]는 2020-12-31 일자의 시장정보로 HW1F 모형과 LMM n 요인의 주성분 분석으로 상관관계 행렬의 인자를 가장 큰 영향을 미치는 n개의 요인으로 축소하고, 시장 모형

시물레이션 방법론으로 스왑선 곡면을 복원하여, 모수추정된 모수로 구한 각 모형변동성과 시장변동성의 차이를 시장변동성으로 나눈 상대 오차를 나타낸다.

[그림 2] KRWIRS 금리 기간구조와 스왑선 변동성 행렬



<표 4> 모형별 상대오차 평균

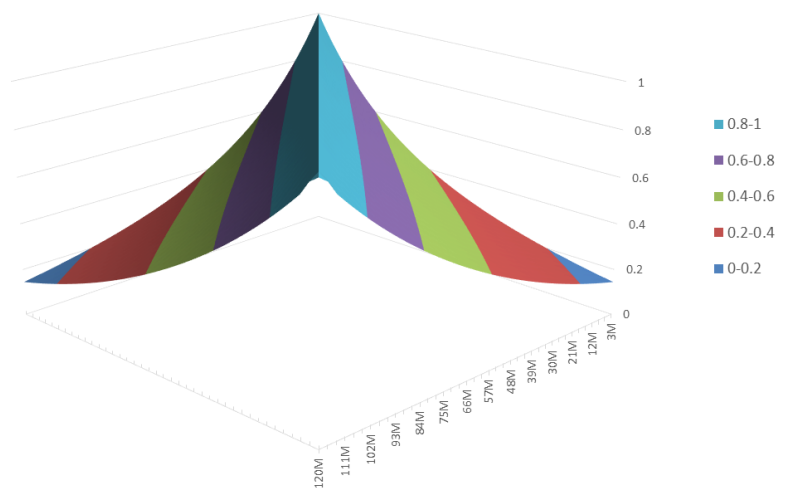
<표 4>는 2020-12-30 ~ 2022-06-02 상대오차들의 절대 평균으로 봤을 때, HW1F 보다는 LMM 모형이 시장 스왑션 행렬을 더 잘 복원하는 것으로 보이나, 절대적이지는 않았다. LMM 요인을 많이 둘수록 시장 스왑션 행렬을 더 잘 복원하는 것은 유의미한 차이를 보이지 않았다.

	HW 1F	LMM 3F	LMM 5F	LMM 10F	LMM Full
2020-12-30	-0.0955	0.0622	0.0320	-0.0255	0.0264
2021-06-01	-0.0780	0.0117	0.0186	0.0255	-0.0087
2021-12-30	-0.0323	-0.0873	-0.0629	-0.0409	-0.0198
2022-06-02	0.0260	0.0215	0.0328	0.0431	0.0535
상대 오차	0.0579	0.002	0.0051	0.0005	0.0129
절대 평균					

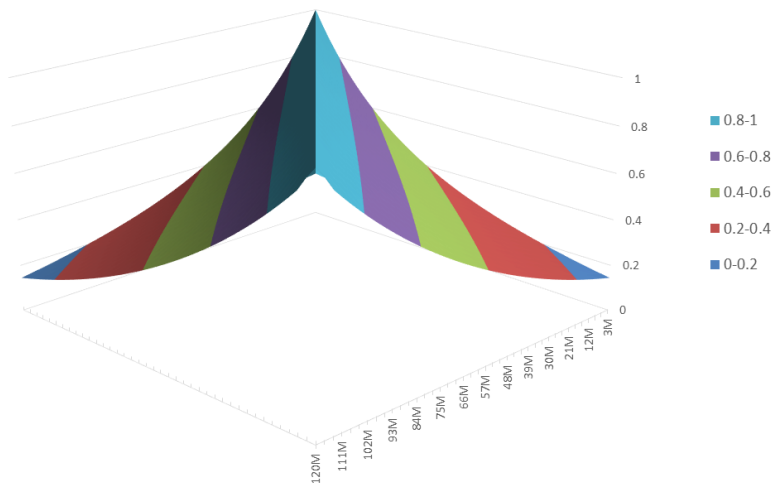
선도 이자율간의 상관관계 구조(식 (12))는 몇 가지 경제학적인 조건을 만족하여야 한다. 이자율 사이의 만기차이가 길어질수록 상관계수가 감소해야 한다는 것과 만기가 일정간격으로 있는 선도이자율은 그것들의 만기가 증가함에 따라 더 상관정도가 커진다는 점이다. 경제학적 조건이 반영된 상관관계 구조를 아래에 보이고 3 요인과 full rank의 차이를 비교시 평균 2.4394E-14로 매우 유사하였다.

[그림 3]과 [그림 4]의 왼쪽 오른쪽 모서리는 0부터 가운데 모서리까지 3M 단위로 120M(10Y) 행렬을 축을 설정하여, 해당 축에서 시점별 LIBOR 금리간의 상관계수를 계산하였다. 금리의 관측시점이 같으면 상관계수는 1이고 금리의 관측 시점 차이가 길어질수록 상관계수가 감소되는 실제 시장 특성이 반영된 것으로 보인다.

[그림 3] Full rank로 추정된 선도 이자율 상관관계 행렬



[그림 4] Full rank로 추정된 선도 이자율 상관관계 행렬



4. 평가 결과

먼저 동일한 시장정보로 HW 1요인 모형, LMM으로 모수추정하여 먼저 5 × 5, ATM strike의 스왑션을 계산했다. 두 가지 모형으로 추정된 모수가 5년 후 5년 스왑금리의 분포를 얼마나 유사하게 추정하는지 알 수 있다.

시뮬레이션 회수 : 10000

가격의 차이는 최대 15bp 이내의 수준이었다. 비록 모형은 다르지만 두 모형의 5년 후 5년 스왑 금리의 분포는 <표 5>의 차이를 보였다.

<표 5> 유럽형 스왑션 평가결과

<표 5>은 2020년 말 ~ 2022 반기까지 6개월 간격 자료를 이용하여 평가모형(HW1F, LMM)으로 계산한 유럽형 스왑션의 평가결과이다. 이때, 10,000번의 시뮬레이션으로 가격을 계산하는 과정을 1,000번 반복하여 평균가격과 표준편차를 계산하였다.

유럽형 스왑션 평가결과				
일자	HW 1F		LMM	
	평균가치	표준편차	평균가치	표준편차
2020-12-30	1.6120	0.0156	1.4919	0.0308
2021-06-01	1.5195	0.0164	1.5098	0.0284
2021-12-30	1.6014	0.0177	1.6413	0.0305
2022-06-02	1.7568	0.0201	1.8948	0.0301

스프레드 레인지 어크루얼 스왑(Spread Range Accrual Swap) 계산 시 가격에 영향을 미치는 요소는 미래시점의 5Y 스왑금리와 2Y 스왑금리의 스프레드 분포이다. 이 부분은 현재 실무적으로 G2++ 모형으로 평가하고 있지만, HW 1F의 초단기 이자율에 상관계수 0.93을 반영하여 가격을 계산해 보았다. 참고로 실무적으로 활용하는 G2++ 모형은 금리의 평균 회귀 특성과 변동성을 동시에 반영하며 금리의 움직임을 설명한다. 이는 시장 금리 곡선의 복잡한 움직임을 보다 유연하게 설명하기 위해 설계된 모델이다. 금리와 이자율의 변동을 모델링하기 위해 설계된 이중 확률 미분 방정식 기반의 모형으로, 금리 시장에서 옵션 가격 평가, 이자율 파생상품 가치 산출, 리스크 관리 등 다양한 응용에 사용되고 있다.

<표 6> 모형별 Spread Range Accrual Swap 평가결과

<표 6>은 2020년 말 ~ 2022 반기까지 6개월 간격 자료를 이용하여 평가모형(HW1F, LMM 3F ~ LMM Full)으로 계산한 구조화 스왑의 평가결과이다. 이때, 10,000번의 시뮬레이션으로 가격을 계산하는 과정을 1,000번 반복하여 평균가격과 표준편차를 계산하였다.

Spread Range Accrual Swap 평가결과										
일 자	HW 1F		LMM 3F		LMM 5F		LMM 10F		LMM Full	
	평균 가치	표준 편차	평균 가치	표준 편차	평균 가치	표준 편차	평균 가치	표준 편차	평균 가치	표준 편차
2020-12-30	15.13	0.035	15.32	0.069	15.14	0.070	15.14	0.075	15.20	0.069
2021-06-01	13.12	0.037	13.31	0.067	13.32	0.064	13.23	0.072	13.28	0.068
2021-12-30	8.54	0.040	8.23	0.064	8.23	0.066	8.23	0.070	8.31	0.064
2022-06-02	1.47	0.041	-3.85	0.066	-3.76	0.069	-3.78	0.071	-3.89	0.065

<표 7> 모형별 구조화 스왑 계산시간(초)

10,000번의 시뮬레이션으로 구조화 스왑 평가의 평균 계산 시간을 측정했다. LMM 모형의 요인이 축소될수록 가치평가 결과 <표 6>과 시장 스왑선 행렬 적합도<표 4>에서 유의미한 차이를 보이지 않았으나, 계산 시간에 있어서 단축됨이 나타났다.

구 분	HW 1F	LMM 3	LMM 5	LMM 10	LMM full-rank
평균계산시간(초) ²⁾	3	23	32	53	179

평가 결과는 일반적인 시장상황일수록 가격이 비슷하지만, 급격한 금리 인상기 같은 경우에는 가격의 차이가 있었다. 계산 속도는 3요인 LMM 모형이 Full rank에 비해 약 7배 이상 감소하며 평가 가격의 차이 또한 10bp 정도로 근소하였다. 앞서의 논의를 통해 실증분석의 시사점은 다음과 같다. 변동성 곡면의 균일한 복원은 금융기관의 리스크 관리와

2) 실증 분석 결과는 Intel(R) Core(TM) i5-9400F CPU @ 2.90GHz RAM 16GB,에서 수행한 결과이다.

모델링 정확성을 향상시키는 데 중요한 역할을 한다. 본 논문은 LIBOR 시장모형(LIBOR Market Model, LMM)을 기반으로 금융상품 평가와 헤징 효율성을 향상시키는 실질적인 방법을 제시하였다. 특히, LMM에 내재된 선도 이자율의 변동성 기간 구조와 상관관계 행렬을 효율적으로 추정함으로써 기존의 복잡한 모형을 간소화하고, 금융기관에서의 활용 가능성을 높였다. 한국 시장의 낮은 유동성 문제를 극복하기 위한 실용적 접근법을 제안함으로써, LMM의 글로벌 금융 시장뿐만 아니라 지역적 특성을 지닌 시장에서도 유용하게 활용될 수 있음을 입증하였다. 스프레드 레인지 어크루얼(Spread Range Accrual)과 같은 구조화 스왑 상품의 가격결정을 위해 개발된 차원 축소 방법론은 계산 효율성을 7배 이상 향상시키며, 이는 금융기관에서의 실무 적용 가능성을 대폭 증대시켰다. 캡 및 스왑션 상품의 시장 데이터를 분석한 결과, LMM은 Hull-White 모형에 비해 변동성 곡면에서 더 균일한 복원을 제공하며, 이를 통해 더 정교한 금융상품 평가 및 헤징에 적합한 모형으로 입증되었다. LMM과 Hull-White 모형 간의 금융상품 평가 및 헤징 정확성을 비교한 결과, LMM은 국내의 금융 환경 모두에서 뛰어난 성과를 보여주며 금융공학의 실무 적용 가능성을 보여주고 있다.

VI. 결 론

본 연구는 무차익거래 조건하에서 LIBOR 시장 모형의 선도 이자율 변동성 기간구조와 상관관계 행렬을 시장 정보를 활용하여 간단하고 정확하게 추정하는 방법을 제시하고자 했다. 한국 이자율 옵션 시장의 낮은 유동성으로 적합한 상품을 찾기 어려운 상황에서, 본 연구는 실무적으로 간단하며 적합성이 높은 모수 추정 방법을 활용해 구조화 스왑의 가격을 결정하는 데 초점을 맞추었다. 캡과 스왑션 변동성을 바탕으로 3가지 Reduced-rank 방법과 Full-rank 방법을 적용하여 모수를 추정한 뒤, 주성분 분석을 통해 Rebonato(1999)의 변동성 함수를 수정한 Modified Hull-White 방법으로 스왑션 모형 변동성을 산출하고 이를 시장 변동성과 비교하였다. 평균적으로 1% 이하의 변동성 오차를 보였으며, 주성분 분석에서 요인 개수를 늘릴수록 변동성 오차가 감소하는 경향을 확인하였다. 또한, 추정된 모수를 활용해 스프레드 레인지 어크루얼 스왑(Spread Range Accrual Swap) 가격을 산출하고 Hull-White 모형 가격과 비교하였다. 연구는 Full-rank와 Reduced-rank 방법의 비교를 중심으로 진행되었다. Full-rank 방법은 상관관계를 정확히 추정할 수 있으나, Reduced-rank 방법은 주성분 분석을 통해 데이터 단순화를 가능하게 한다. 다만, Reduced-rank 방법은 상관관계수 구조와의 오차가 크거나 시간과 비용이 과도하게 소요될 경우 적합하지 않을

수 있다. 변동성 함수 추정에서는 계단형 변동성 함수 대신 안정성과 적합성을 고려해 연속적인 모수적 변동성 함수(Parametric volatility structures)를 사용하였다. 상관관계 구조는 이자율 간 만기 차이가 커질수록 상관계수가 감소하고, 일정 간격의 만기 선도 이자율 간 상관관계가 만기 증가에 따라 커지는 경제학적 조건을 만족하도록 Schoenmaker and Coffey(2003)의 상관관계 함수를 적용하였다. 주성분 분석(3-factor)과 Full-rank 상관계수 행렬 간 차이가 $2.43694E-14$ 로 미미하여 정확성을 확인하였다. 이를 통해 LIBOR 시장 모형을 활용한 스프레드 레인지 어크루얼 스왑의 정확한 가격 산출이 가능함을 입증하였으며, 신뢰성 있는 헤지 모수 도출과 헤징 검증(Hedging Test)은 향후 연구 과제로 남겼다.

마지막으로, 본 논문의 한계와 향후 연구과제는 다음과 같다. LIBOR 호가 조작사건 이후 LIBOR 호가를 통한 금리결정의 문제점에 대한 제기 이후 세계 각국에서 RFR(Risk-Free Reference Rate)관련 계약으로의 대체(Transition)가 진행되고 있다. 미국의 경우 1일간 국공채를 담보로 한 RP시장금리인 SOFR(Secured Overnight Financing Rate) 관련 계약으로 한국의 경우 KOFR(Korea Overnight Financing Repo rate) 관련 계약이 증가하고 있다. LIBOR 산출중단으로 LIBOR시장모형 활용에 대한 부분이 문제가 될 수 있으나 LIBOR와 RFR이 순간금리(short rate)에 근거한다는 점에서 RFR와 LIBOR에 대한 연구는 유사점이 많아 비교를 통한 분석 의의가 있다. 또한, LIBOR 시장모형의 확장 형태인 RFR 관련 계약으로의 이전이 진행되고 있는 환경에서 대체 RFR 모형(예, Forward Market Model (FMM))에 대한 연구를 통해 기존 LIBOR시장모형과 비교 분석할 수 있는 추가 연구가 진행되어야 할 것으로 판단된다.

참 고 문 헌

- A. Brace, "Engineering BGM," *Chapman and Hall*, 2007.
- Lyashenko, A. and Y. Nie, "The curious case of backward short rates," *Risk Magazine*, Risk.net, 2021.
- Lyashenko, A. and F. Mercurio, "Looking Forward to Backward-Looking Rates: A Modeling Framework for Term Rates Replacing LIBOR," SSRN, 2019.
- Black, F., E. Derman, and W. Toy, "A One-factor Model of Interest Rates and its Application to Treasury Bond Options," *Financial Analysts Journal*, 46(1), (1990), 33-9.
- Black, F. and P. Karasinski, "Bond and Option Pricing When Short Rates are Lognormal," *Financial Analysts Journal*, 47(4), (1991), 52-59.
- Beveridge, C. and M. Joshi, "Interpolation schemes in the displaced-diffusion LIBOR market model and the efficient computation of prices and greeks for callable range accruals," SSRN, 2009.
- Brigo, D. and F. Mercurio, "Interest Rate Models - Theory and Practice," Springer, 2006.
- Filipovic, D., "Term-Structure Models," Springer, 1998.
- Jamshidian, F., "LIBOR and swap market models and measures," *Finance and Stochastics*, 1, (1997), 293-330.
- Longstaff, F. A. and E. S. Schwartz, "Valuing American Options By Simulation: A Simple Least-Squares Approach," *Review of Financial Studies*, 14(1), (2001), 113-147.
- Ho, T. S. Y. and S. Lee, "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims," *Journal of Finance*, 41(5), (1986), 1011-29.
- Hull, J. and A. White, "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I : Single Factor Models," *Journal of Derivatives*, 2(1), (1994).
- Hull, J. and A. White, "Pricing Interest-rate Derivative Securities," *Review of Financial Studies*, 3(4), (2001), 573-392.
- Hull, J., *Options, Futures, and Other Derivatives*, 9th, PrenticeHall, 2014.
- Schoenmakers, J., "Robust LIBOR Modeling and Pricing of Derivative Products," Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series, (2005).
- Joshi, M. S. and J. Thesis, "Bounding bermudan swaptions in a swap-rate market model," *Quantitative Finance*, 2(5), (2002), 370-377.

- Joshi, M. S., "Rapid Drift Computations in the LIBOR market model," Wilmott, May, 2003.
- Joshi, M. S., "The concepts and practice of mathematical finance," Cambridge University Press, 2003.
- Joshi, M. S., "A Simple Derivation of and Improvements to Jamshidian's and Rogers' upper Bound Methods for Bermudan Options," *Applied Mathematical Finance*, 14(3), (2007), 197-205
- Glasserman, P. and X. Zhao, "Arbitrage-free discretization of lognormal forward LIBOR and swap rate models," *Finance and Stochastics*, 4, (2000), 35-68.
- Jäckel, P., "Monte Carlo Methods in Finance," Wiley, 2002.
- Rebonato, R., "On the simultaneous calibration of multi-factor log-normal interest-rate models to Black volatilities and to the correlation matrix," *Journal of Computational Finance*, 2, (1999), 5-27.
- Björk, T., *Arbitrage Theory in Continuous Time*, 3rd edn. Oxford University Press, London, 2000.
- Vetterling, W. T. and W. H. Press, *Numerical Recipes in C - The Art of Scientific Computing*, 2nd Edition, Cambridge University Press, 2000.
- Vasicek, O., "An equilibrium characterization of the term structure," *Journal of Financial Economics*, 5, (1977), 177-188.

[부록 1] 무위험 지표기준금리 전환 시 기존 모형의 확장

새로운 무위험금리(Risk Free Rate, 이하 RFR) 기반 파생상품의 평가 및 리스크 관리에서 순간 금리 모델링이 적절한 선택으로 보인다. 이는 해당 적용 기간 동안 기본 RFR 일일 시뮬레이션 금리로 사후가중 금리(compounded setting-in-arrears)를 생성할 수 있기 때문이다. 하지만, 이는 필수적인 선택이 아니다. FMM(Forward Market Model)은 사전(Forward-Looking) 금리와 사후(Backward-Looking) 금리 모두를 단일 확률 과정을 통해 시뮬레이션할 수 있음을 아래에서 보여준다. 모든 적용 기간에 대한 이 확률과정의 Joint 모델링은 기존의 LIBOR 시장 모형을 확장한 것으로 볼 수 있다.

Lyashenko and Mecurio(2019)가 제안한 FMM은 LMM보다 더 완전한 모델로, Forward-Looking 금리의 확률과정을 보존하면서도 기간 금리의 확정(fixing) 및 지급 시점 간의 금리 변동성에 대한 추가 정보를 제공한다.

FMM의 구성은 새롭게 도입한 확장된 제로쿠폰 채권 개념을 기반으로 한다. 이 개념은 backward-looking(기간 종료 시 확정되는) 금리를 다룰 때 단순하고 자연스러우며, 매우 편리하게 작용한다. 이 확장된 제로쿠폰 채권의 정의 덕분에, 채권뿐만 아니라 선도 금리와 스왑 금리, 그리고 관련된 선도 측도 또한 만기 이후의 시점까지 모든 시간에 대해 정의되고 확장될 수 있다.

$$Y_T(t) = \begin{cases} P(t, T) & \text{for } t \leq T \\ e^{\int_t^T r(u)du} = \frac{B(t)}{B(T)} & \text{for } t > T \end{cases} \quad (1)$$

$Y_T(t)$ 를 만기 T를 갖는 확장된 제로 쿠폰 채권이라고 정의한다. $Y_T(t)$ 는 항상 양수이므로 기준재 역할을 할 수 있다. 따라서 $Y_T(t)$ 를 기준재로 확장된 선도 측도를 정의할 수 있다.

backward-looking 금리의 확정 값을 알기 위해서는 기간이 끝날 때까지 기다려야 한다. 반면 forward-looking 금리는 적용 기간이 시작될 때 확정된다. backward-looking 금리 R과 forward-looking 금리 F는 무위험 차익거래에 의해 다음과 같은 관계가 성립한다. 시간구조 $T_0 = 0, T_1, \dots, T_M$ 을 가정하고 $j = 1, \dots, M$ 이다.

$$F(T_{j-1}, T_j) = E^{T_j}[R(T_{j-1}, T_j) | F_{T_{j-1}}] \quad (2)$$

backward-looking 선도 금리와 forward-looking 선도 금리를 t 시점에서 정의하면 다음과

같다.

$$R_j(t) = E^{T_j}[R(T_{j-1}, T_j)|F_t] \tag{3}$$

$$F_j(t) = \begin{cases} R_j(t) & t \leq T_{j-1} \\ F(T_{j-1}, T_j) & t > T_{j-1} \end{cases} \tag{4}$$

따라서 $t \leq T_{j-1}$ 일 때, 두 금리는 동일한 값 $R_j(t)$ 로 표현 가능하므로 $R_j(t)$ 에 대한 Joint 변동을 모델링하고 LMM을 backward-looking 확정이 적용되는 경우로 자연스럽게 확장한다. 이 방법론의 장점은 하나의 확률 과정을 통해 forward-looking 및 backward-looking 확정을 모두 얻을 수 있다는 점이다.

$R_j(t)$ 는 T_j -선도 측도에서 마팅게일이며, 이는 $j = 1, \dots, M$ 에 대해 성립한다. Q^{T_j} -확률과정을 다음과 같이 가정한다.

$$dR_j(t) = \sigma_j(t)g'_j(t)dW_j(t), \quad g'_j(t) = \min\left(\frac{(T_j - t)^+}{T_j - T_{j-1}}, 1\right) \tag{5}$$

여기서, $j = 1, \dots, M$ 에 대해 $\sigma_j(t)$ 는 적용된 과정(adapted process)이고, $g'_i(t)$ 이자발생기간 $[T_{j-1}, T_j]$ 동안 backward-looking 금리 변동성의 변화를 모델링한 결정론적 함수이다.

FMM 모형 적용시 추가로 반영될 점은 2.3 LIBOR 시장모형 하의 캡 공식이 backward-looking 캡릿 형태로 반영되어야 한다. 또한 금리 시뮬레이션시 $R_j(t)$ 금리는 T_j 시점에 결정된다는 점이 반영되어야 한다.

[부록 2] 원화(KRW) 이자율 스왑 금리 및 스왑선 변동성 자료

<표 B.1> KRW IRS 금리

이 표는 2020~2022 기간의 만기 금리 기간구조를 나타낸다.(단위%, 출처: Bloomberg)

연도/만기	1 yr	2 yr	3 yr	4 yr	5 yr	7 yr	10 yr	12.5yr
2020.12.31	0.73	0.85	0.95	1.04	1.12	1.19	1.28	1.28
2021.06.01	0.87	1.12	1.35	1.49	1.59	1.70	1.81	1.82
2021.12.31	1.58	1.77	1.82	1.84	1.84	1.83	1.85	1.78
2022.06.02	2.73	3.14	3.25	3.27	3.26	3.21	3.19	3.13

<표 B.2> KRW 스왑선 변동성

<표 B.2>는 2020~2022 기간의 반기 원화(KRW) 스왑선 변동성 행렬을 나타낸다. 열은 스왑만기, 행은 스왑선 만기를 의미한다. (단위%, 출처: Bloomberg)

2020.12.31	1 yr	2 yr	3 yr	5 yr	7 yr	10 yr
1 yr	31.35	32.00	32.53	35.66	35.35	35.13
2 yr	32.62	31.43	31.13	32.58	32.84	33.34
3 yr	29.74	29.52	30.41	31.28	31.52	32.49
5 yr	31.92	31.29	30.85	30.17	29.66	32.74
7 yr	30.03	29.58	29.63	29.00	31.77	35.36
10 yr	27.26	27.75	30.44	35.51	38.70	41.73
2021.06.01	1 yr	2 yr	3 yr	5 yr	7 yr	10 yr
1 yr	30.53	28.10	27.00	25.35	26.05	26.35
2 yr	24.46	25.64	25.29	24.95	24.98	26.35
3 yr	24.94	24.67	24.59	24.19	24.10	24.57
5 yr	23.77	23.25	23.37	22.96	22.87	24.05
7 yr	23.08	22.35	22.36	22.32	23.62	24.62
10 yr	20.96	21.22	22.44	24.31	24.98	25.44
2020.12.31	1 yr	2 yr	3 yr	5 yr	7 yr	10 yr
1 yr	26.26	28.12	28.23	30.58	31.99	33.02
2 yr	26.62	27.42	27.83	29.58	29.49	30.25
3 yr	26.88	27.20	27.45	27.52	27.84	29.06
5 yr	28.97	25.89	25.89	25.49	26.00	29.10
7 yr	26.69	23.70	23.70	24.34	27.05	31.41
10 yr	24.84	25.44	25.44	33.38	33.97	32.12
2020.12.31	1 yr	2 yr	3 yr	5 yr	7 yr	10 yr
1 yr	29.76	26.04	24.03	21.73	22.89	24.43
2 yr	27.76	25.47	24.17	21.56	22.90	24.46
3 yr	26.35	23.34	22.54	20.05	21.21	23.11
5 yr	22.16	21.45	20.78	20.00	20.54	21.52
7 yr	21.23	20.81	20.54	19.65	19.92	20.91
10 yr	20.52	20.36	20.01	19.64	19.86	20.93

An Pricing Exotic Bermudan Swap and Calibration under LIBOR Market Model and Hull-White Model

Gunwoo Park* · Changsoo Hong**

〈Abstract〉

In this study, structured swaps were developed by using market information to quickly and accurately estimate the volatility period structure and correlation matrix of the forward interest rate, which are inherent in the LIBOR market model, which explains the movement of the forward interest rate under arbitrage conditions. is to set the price. In practice, we intend to determine the price of structured swaps using the simplest and most suitable parameter estimation method. First, we show how accurately the swaption surface is restored with parameters estimated by the LIBOR market model using Korean market information. Unlike the Hull-White model, it shows that the entire volatility surface is restored evenly, and the European 5 by 5 swaption price is calculated using two models. For the price of European swap option, the distribution of 5Y swap rate after 5Y can be seen, and the two prices almost coincided with a difference of 2bp. Afterwards, the instantaneous correlation coefficient matrix was estimated by the dimensionality reduction method of the LMM model and the full rank method. As a result of comparison, there was no difference with an average of $2.4394E-14$. Finally, the price of Spread Range Accrual, which is a practically issued product, was determined by the dimensional reduction method, the full rank method, and the Hull-White method, and the calculation efficiency was confirmed about five times by the three-factor dimension reduction method.

Keywords : LIBOR Market Model, Structured Swap, Forward Rate, Parameter Calibration, Pricing

* First Author, Korea Investment & Securities Co., Ltd. E-mail: stripe2773@naver.com

** Corresponding Author, NICE Pricing and Information Inc. E-mail: cshong@nicepni.co.kr