

확률 변동성 곡면의 구축과 활용방안에 관한 연구

안청희* · 박창래** · 홍창수***

<요 약>

본 연구는 Heston(1993)모형과 Dupire(1994)모형을 이용하여 내재변동성 곡면(implied volatility surface)과 국소변동성 곡면(local volatility surface)을 구축하는 방법에 대해 연구하였다. 오랫동안 블랙-숄즈 공식의 문제점으로 지적되어온 상수 변동성(constant volatility)을 이용한 옵션가격결정모형의 대안으로 변동성 왜도와 기간구조를 반영한 정교한 확률변동성 곡면을 구현하는 방법을 기술하고, 금융업계의 현실을 반영하여 그 활용방안을 고찰해 보았다. 변동성 곡면을 구축하는 방법으로는 Heston(1993)모형으로 장외옵션 자료(장내옵션도 활용)를 활용하여 장내옵션만으로 구축이 가능하지 않은 머니니스와 긴 만기를 갖는 유럽형 옵션의 가격을 계산하였으며, 이 유럽형 옵션 가격에서 내재변동성을 계산하였다. 또한, 추가연계증권(ELS)의 가격결정과 헤징에 사용하기 위해 위와 같은 방식으로 계산된 내재변동성을 이용하여 Dupire(1994)모형으로 국소변동성 곡면(local volatility surface)을 구현하였다. 변동성 곡면이 금융업계에서 추가연계증권(ELS)의 가격결정과 헤지운용에 활용도가 높아지고 있어, 기존의 역사적변동성으로 평가되던 상수 변동성을 변동성 곡면으로 대체할 경우 시장 내재변동성이 반영된 정교한 헤지운용 성과를 기대할 수 있을 것으로 판단된다. 아울러, 국내외 ELS발행사가 투자자의 환매요청에 따라 제시하고 있는 ELS 환매가격과 평가가격과의 괴리를 줄일 수 있어, 유가증권을 평가하는 채권평가사의 ELS시가평가 발전에 기여할 것으로 판단된다.

주제어 : 확률 변동성, 변동성 곡면, 추가연계증권(ELS), 시가평가

2014년 한국금융공학회 추계학술발표회에서 유익한 조언을 해주신 아주대학교 금융공학과 김용식교수님께 감사드립니다. 아울러 본 연구에 많은 도움을 주신 NICE P&I 김기형 대표이사님, 현영하 박사님, 권재민 과장님, 한국투자증권 투자공학부 지현준 박사님에게 감사드립니다.

* 제1저자, NICE P&I 금융공학연구소 모형팀장(E-mail: cha@nicepni.co.kr)

** 공동저자, NICE P&I 금융공학연구소 모형팀 연구원(E-mail: crpark@nicepni.co.kr)

*** 교신저자, NICE P&I 금융공학연구소 실장 (E-mail: cshong@nicepni.co.kr)

I. 서론

옵션가격결정이론의 대표적인 블랙-숄즈 모형(Black-Scholes model)은 주식 가격의 변동성이 상수라는 가정에 기반을 두고 있어 편의가 존재하고 있다. 블랙-숄즈 옵션 가격결정모형은 등분산성을 가정하게 되는데, 블랙-숄즈 옵션 가격결정모형으로 내재변동성을 추정해 보면 일정한 시점에서 내재변동성은 행사가격별로 다르게 나타난다. 즉, 변동성 스마일(volatility smile)형태를 보이게 된다. 이러한 현상은 블랙-숄즈 옵션 가격결정모형에서 변동성은 일정하다고 보는 가정을 위배하게 된다. 또한 일정시점에서 만기까지의 기간에 따라 옵션의 근월물과 원월물의 내재변동성이 차이가 나는데 이를 변동성 기간구조(volatility term structure)라고 한다. 실제 이러한 변동성 스마일과 변동성 기간구조 현상으로 인해 블랙-숄즈 옵션 모형을 현실에 적용하는데 많은 문제점을 내포하게 된다. 따라서, 이러한 문제를 해결하기 위해 주식 가격의 실증적 연구에서 밝혀진 확률변동성 개념을 도입하는 연구가 진행되어 왔다.

이와 같이 변동성스마일과 기간구조를 포착하기 위해 지속적인 연구가 진행되었는데 대표적인 연구로는 Hull and White(1987), Scott(1987), Stein and Stein(1991), Heston(1993)이 개발한 확률변동성 모형(stochastic volatility Model)과 Dupire(1994), Derman and Kani(1994), Rubinstein(1994) 등이 개발한 국소변동성모형(Local volatility model)이 있다. 확률변동성 모형은 단편 해의 옵션가격평가방식을 제공한다는 장점이 있으나, 불완전시장접근법이라는 단점이 있다. 반면, 국소변동성모형은 내재변동성이 옵션만기와 행사가격에 따라 달라지는 현상으로 변동성을 시간과 기초자산의 가격의 함수형태로 설명력을 높인 장점이 있으나, 각 행사가격 구간별로 보간(interpolation)해야 한다는 단점을 가지고 있다.

국내에서 사용되고 있는 변동성 곡면을 제공하는 대표적인 외산시스템은 Markit, SuperDerivatives, Bloomberg 단말기가 있으며, 국내에는 본고의 방법론을 토대로 개발한 NICE V&I시스템¹⁾(Volatility and Information System)이 주가지수 및 개별주식 관련 변동성을 제공하고 있는 상황이다. 이러한 변동성시스템이 각광을 받게 된 것은 일반적인 유럽형 옵션 가격계산에서 사용되는 변동성은 상수 변동성(constant volatility)을 사용해도 비교적 문제가 없었으나, 최근 금융공학의 발달로 인해 이색옵션을 가미

1) NICE V&I시스템은 유가증권 시가평가기관인 NICE P&I(주)가 개발하여 2014년 7월에 출시한 변동성 곡면 관련 정보제공 솔루션이다. 주요 특징으로는 국내 및 해외 대표 5대 지수에 대한 내재변동성곡면, 국소변동성곡면, 시장변동성 곡면이 제공되며, 계산에 사용된 장내·외 옵션에 대한 시장정보 분석, 개별주식 장외옵션에 대한 시계열 정보를 금융기관에 제공하고 있다. 본 논문의 [부록]편에 관련 주요 화면을 보여주고 있다.

한 복잡한 구조화 상품의 등장으로 헤지 및 평가변동성에 있어 정확한 변동성의 적용에 대한 문제가 대두되었기 때문이다. 예를 들어, 추가연계증권(Equity Linked Securities)의 헤지를 위해 초기에는 블랙-숄즈 기반의 상수 변동성을 사용하였으나 국내에서도 추가연계상품의 급격한 성장으로 시장변동성 모형(변동성 곡면 등을 반영한 헤지 모형)으로 점차 변화하고 있다. 이와 같이 추가연계상품의 비약적인 성장에도 불구하고 파생상품의 가격결정에 중요한 요소인 내재변동성은 대표성이 부족한 상태이다. 또한, 파생상품과 관련한 투자자 보호의 중요성이 부각되고 있는 가운데 ELS 등 장외주식 파생상품의 환매가격 산정에 내재변동성의 활용은 중요한 역할을 할 것으로 기대된다. 또한, 국제회계기준(IFRS)도입과 더불어 장외파생상품 가격 산정과 관련한 객관적이고 투명한 변동성 제시가 필요한 실정이다. 따라서, 본 연구의 목적은 장내·외 옵션 시장에서 관측되는 내재변동성을 추출하여 시장 내재변동성을 정확하게 반영한 변동성 곡면을 구축할 수 있는 방법에 대해 살펴보고자 하였다. 더하여, 시장을 설명하는 변동성 곡면을 구축하기 위해 실무적으로 접근할 수 있는 방법론을 제시하여 변동성 곡면의 품질을 개선하였다.

본 연구에서는 시장에서 관측 가능한 장내·외 옵션시장의 가격을 모두 활용하였음에도 불구하고 무재정거래조건(no arbitrage condition)을 만족하지 않거나, 거래가 활발하지 않는 머니니스와 만기의 정보 부족 문제를 극복하고자 헤스톤(Heston) 모형을 통해 안정적인 확률변동성 곡면(stochastic volatility surface)을 구축하였다. 헤스톤(Heston) 모형의 경우 유럽식 옵션에 대하여 가격결정식이 존재하고 추정하여야 할 변수의 숫자가 다른 모형에 비해 작다는 장점으로 블랙-숄즈 모형의 단점으로 대변되는 변동성 미소 및 변동성 기간구조를 설명할 수 있다는 장점이 있다. 이후의 연구에서 변동성 곡면(volatility surface)에 관한 선행연구를 살펴보면서 다시 설명하겠으나 국내에서 변동성곡면에 관한 연구가 일부 진행되었으나 자료와 방법론의 한계로 인해 실무상 적용할 수 있을 정도의 체계적 연구가 진행되지 않았다는 점에서 본 연구가 가지는 시사점은 높을 것으로 판단된다. 본 연구의 목적은 변동성 곡면의 실제적인 구축방법에 대해 살펴보고, 급격하게 성장한 추가연계상품(equity linked product)을 대상으로 그 활용방안을 논의해 보고자 하였다.

본 연구는 다음과 같이 구성되어 있다. II장에서는 확률변동성 모형에 대해 설명하며, III장에서는 본 연구에서 사용되는 자료에 대해 설명한다. IV장에서는 변동성 곡면의 구축방법에 대해 살펴보고, V장에서 변동성 곡면의 활용방법에 대해 설명한다. VI장 결론부분에서 본 연구방법이 다른 변동성 곡면 구축방법과 비교하여 시장 내재변동성과 가장 비슷한 수준의 변동성 곡면을 산출한 질적으로 개선된 방법론임을 기술하였다.

II. 확률변동성 모형: 헤스톤(Heston)모형의 활용

변동성은 기초자산의 가격이 움직이는 정도를 나타내며 변동성이 클수록 기초자산 가격이 크게 바뀌고, 변동성이 작을수록 기초자산 가격이 좁은 범위에서 움직인다. 그러므로 변동성이 큰 기초자산은 변동성이 작은 기초자산에 비해 높은 수익을 얻을 확률이 크지만 반대로 손해를 볼 확률도 높다는 의미를 갖는다. 기초자산의 가격변화에 따라 수익률이 변하므로 투자시 변동성은 수익률이 기대수익률(평균)에서 멀어지는 정도 또는 미래 불확실성, 또는 투자에 따른 위험으로 해석할 수 있다.

현재 시장에서 통용되고 있는 모형인 블랙-숄즈 모형은 많은 가정을 통해 시장에서의 현실 상황을 제약하고 있다. 즉, 주가의 수익률이 정규분포를 따르며 시장에서의 기초자산에 대한 변동성은 상수로 가정하고 있다. 그러나 실제로 블랙-숄즈 모형을 통해 동일한 기초자산의 옵션가격에서 역으로 산출된 변동성은 만기와 행사가에 따라 다른 변동성 값을 나타내고 있다. 즉, 변동성은 스마일 혹은 스큐현상을 나타내고 기간 구조를 갖는다. 이러한 시장에서의 현상을 설명하는 데에는 블랙-숄즈 모형의 한계를 보이고 있다. 이외에도 주가 하락시에는 상승시에 비해 변동성이 더 증가하고 주가 분포를 살펴보았을 때에도 주가의 수익률이 정규분포가 아니라 정규분포에 비해 꼬리부분이 두터운(fat-tail) 현상이 나타나고 Leptokurtic(분포의 형태가 다른 분포들에 비해 상대적으로 뾰족한 경우)한 현상이 나타남을 실증분석을 통해 확인할 수 있다. 이런 블랙-숄즈 모형이 설명하지 못하는 시장의 현실적인 문제를 해결하기 위해 변동성 모형이 대두되었다. 변동성 모형에는 크게는 국소변동성 모형과 확률 변동성 모형으로 구분할 수 있으며 국소 변동성 모형은 내재 변동성이 머니니스와 만기에 따라 다른 변동성 값을 갖는데 착안하여 변동성을 시간과 주가에 대한 함수로 가정하여 모형을 전개한다. 국소 변동성 모형은 시장의 모든 표준형옵션(plain vanilla option)의 가격을 맞출 수 있으나, 기초자산의 가격 변동 상황에 따라 변동성이 달라짐을 표현하지 못하므로 경로종속옵션(path dependent option)의 평가에 한계가 있다. 또한, 무재정거래조건(no arbitrage condition)을 만족하는 국소변동성 함수를 수치적으로 추정하는데 어려움이 있다.

다음으로 확률변동성 모형은 변동성을 확률 프로세스로 가정한 모형이다. 즉, 국소 변동성 모형을 일반화하였으며 시장 데이터를 반영한 모형의 모수를 추정하기 용이하다. 확률변동성 모형으로는 Heston 모형, CEV 모형(Local volatility 모형이라고도 함), SABR 모형, GARCH 모형, Stein and Stein 모형, Hull and White 모형 등이 있다. 이 논문에서는 확률 변동성 모형 중에서 헤스톤(Heston) 모형에 대해 다루도록 한다.

헤스톤(Heston) 모형은 대표적인 확률변동성 모형으로 블랙-숄츠 모형에서 주가 프로세스에 변동성 프로세스를 추가한 모형으로 블랙-숄츠 모형의 한계를 개선한 모형이다. 첫째, 주가의 수익률과 변동성이 음(-)의 상관관계를 갖는 레버리지효과(Leverage effect)를 반영한다. 레버리지효과란 자산가치가 하락하면 부채가 상대적으로 더 큰 가치로 계산되고 그로인해 자산(equity)의 가치가 떨어지고 주가의 가치(회사의 가치)가 불안해지면서 변동성도 커지는 현상으로 주가가 떨어질 때, 주가가 오를 때 보다 더 변동성이 커지는 현상을 말한다. 둘째, 변동성이 평균으로 수렴(mean reverting)하는 성질을 반영한다. 셋째, 주가 수익률의 분포가 정규분포에 비해 왼쪽 꼬리가 두텁게 나타나는 현상과 정규분포에 비해 더 뾰족한 분포를 나타내는(leptokurtic) 성질을 갖는 것을 설명한다. 넷째, 유럽형 옵션의 가격결정공식(closed form solution)이 존재한다. 이로 인해 모형의 모수를 추정하는데 다양한 합성구조를 갖는 옵션의 시장가격을 이용할 수 있어서 더 많은 자료를 활용해 시장정보를 정확히 산출할 수 있는 장점을 갖는다.

반면, 헤스톤(Heston) 모형을 통해 변동성 곡면을 구현하고자 하면 블랙-숄츠 모형을 이용해서 변동성을 산출하는 것에 비해 어려움이 있다. 유럽형 옵션의 가격이 가격결정공식으로 존재하지만 적분계산을 수치적으로 해결해야 하므로 수치 적분의 수렴성이 이슈가 되며 모수를 시장옵션 가격으로 계산하는데 비선형 최적화 문제를 해결해야 하는 어려움도 함께 내재되어 있다. 이러한 상황을 해결하기 위해 많은 연구 결과가 있으며 극소한 옵션가격(짧은 만기에서 외가격)의 정확도를 위한 Modified FFT(Carr, P. and Madan, D. 1998)를 사용하고 함수구조의 안정성을 위한 Little Heston trap(Albrecher, H., Mayer, P., Schoutens, W. & Tistaert, J. 2007) 적용하는 방법이 연구되어 있다. 또한 모수 추정시 비선형 최적화 문제를 푸는데 이때 전역최적화기법(global minimization algorithm)인 Simulated Annealing 을 이용하여 모수의 최적화 영역을 찾고, 국소최적화기법(local minimization algorithm)인 Trust-region-reflective 이나 Levenberg-Marquardt Algorithm을 이용하여 최종적인 모수를 찾을 수 있다. 확률변동성 모형의 경우 헷징하는데 어려움이 있고 이색옵션과 같은 상품의 가격 결정을 하는데도 어려움이 있다. 그러므로 현재 서술하는 방법론은 확률변동성 모형을 통한 시장 변동성을 산출한 후 Dupire의 국소변동성 모형을 이용해 변동성 곡면을 산출하여 헷징에 왜도와 만기구조를 반영한다. 이를 반영한 시장정보로 구조화 상품인 ELS의 가격결정을 가능하게 하는 전략을 구사 할 수 있도록 한다.

Ⅲ. 자료(Data)

1. 자료의 종류

앞서 언급한 대로, 변동성 곡면을 만들기 위한 시장정보를 담고 있는 원천 자료가 필요하다. 이 자료는 선물시장과 옵션시장에서 얻을 수 있으며, 각 시장을 구성하는 자료와 의미는 다음과 같다.

1.1. 선물 시장

선물 시장은 거래소의 장내선물시장과 브로커를 통해 청산소에서 거래가 이루어지는 장외선도시장이 있다. 장외선도시장의 경우 Cscreen과 같은 중개회사(vendor)가 제공하는 전자브로커 틀을 통해 거래되는 내용을 확인할 수 있다. 선물 시장은 각 지수에 대한 선물을 거래하는 시장으로, 배당정보를 담고 있는 중요한 시장이다. 블룸버그(Bloomberg) 단말기에서 배당 정보를 얻을 수 있지만, 과거 배당정보를 바탕으로 예측한 배당정보이므로 배당 정보가 확정되어 공시되기 전까지는 예측값에 불과하기 때문에 실 배당량과는 차이를 보인다. 따라서 선물가를 가지고 시장에서 역으로 배당을 추출하는 “내재배당추출” 방법을 통해 좀 더 정확한 변동성 곡면을 산출 할 수 있다. 또한 장외에서의 옵션거래는 선도거래를 동반하는 것이 일반적이므로, 이 거래의 정보를 반드시 포함한 변동성 곡면만이 실무에서 유의미한 일관성 있는 곡면이라고 말할 수 있다.

1.2. 옵션 시장

옵션 시장은 변동성 곡면의 각 격자를 구성하는 변동성을 추출할 수 있는 상품정보를 제공한다. 만기, 행사가, 옵션가격이 제공되며, 지수별 IRS(Interest rate swap) Curve를 이차율로 이용하여 블랙-숄즈 공식을 통해 변동성을 추출할 수 있다. 선물시장과 마찬가지로 장내옵션시장과 장외옵션시장으로 나뉘며, 장외 옵션 시장에는 콜·풋의 표준형 옵션(vanilla option) 뿐만 아니라, 스프레드(spread), 레이쇼(ratio), 버터플라이(butterfly), 스트래들(straddle), 리스크 리버설(risk reversal) 등의 합성구조 상품들도 존재한다. 합성구조 상품들은 표준형 옵션들의 조합으로 나타낼 수 있으며, 이들의 가격결정 또한 표준형 옵션과의 일관성을 유지하며 이루어져야 하고 콜 풋옵션에서 얻지 못하는 중장기와 극 외가격(Deep OTM)에서의 변동성 정보를 얻어낼 수 있으므로 이들의 정보 또한 변동성 곡면을 구성하는 데에 반드시 필요하다.²⁾

2. 자료의 습득

2.1. 장내시장

장내시장의 정보는 주로 거래소 홈페이지 혹은 블룸버그 단말기를 통해 얻을 수 있으며, 지수, 장내 선물가와 옵션가를 얻을 수 있다. [그림1]은 해외지수중 H지수 옵션을 상장해서 거래하는 HKEx(홍콩 증권거래소)에서 공시하는 옵션가격 리스트를 보여주고 있다. 일반적으로 장내시장의 자료들은 개장시간과 폐장시장이 존재하며, 이들 사이에서만 상품의 거래가 허용되므로, ‘종가’가 존재한다. S&P500과 Eurostoxx50의 경우 만기가 긴 상품과 다양한 행사가를 가진 상품들이 상장되어 있고 이 옵션 상품들의 거래가 활발하여, 장내시장만으로도 변동성 곡면을 만드는 데에 충분한 정보를 얻을 수 있지만, 그 외의 지수들은 이들만큼 거래가 활발하지 않으므로 장외시장의 정보가 필요하다. 5개 대표지수의 장내시장에서 거래되는 옵션은 유럽형의 콜·풋의 표준형 옵션(plain vanilla option)들로 구성되어 있다.

H-shares Index Options

Last Updated: 03/10/2014 17:15
All data delayed at least 15 minutes

Contract	Open	Bid	Ask	Last Traded	High	Low	Volume	Prev. Day Settlement Price	Net Change	Prev. Day Open Interest
C Oct-14 - 7000	-	-	-	-	-	-	0	3,327	N/A	0
P Oct-14 - 7000	2	-	2	2	2	2	2	1	+1	2
C Oct-14 - 7200	-	-	-	-	-	-	0	3,127	N/A	0
P Oct-14 - 7200	2	-	2	2	2	2	10	1	+1	0
C Oct-14 - 7400	-	-	-	-	-	-	0	2,927	N/A	0
P Oct-14 - 7400	3	-	3	2	3	2	11	1	+1	0
C Oct-14 - 7500	-	-	-	-	-	-	0	2,827	N/A	0
P Oct-14 - 7500	3	1	3	2	3	2	75	1	+1	127

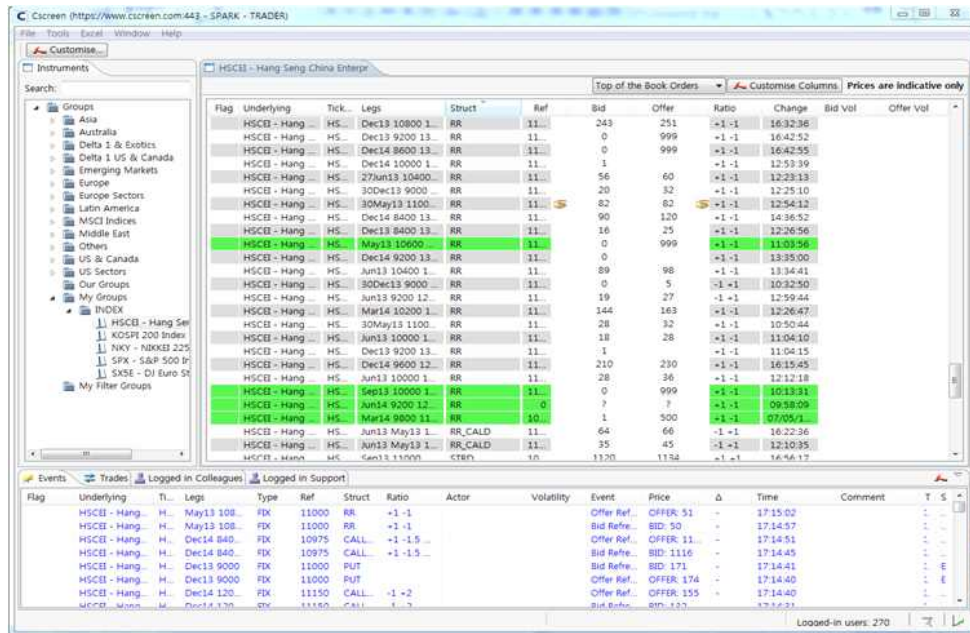
지수별 장내옵션자료는 거래소 홈페이지를 통해 습득할 수 있다. 일반적으로 15분~20분 지연자료로 제공되며, 거래소에 따라 실시간 혹은 종가 데이터가 제공된다. 그림은 H지수의 거래소 홈페이지에서 제공하는 장내옵션자료화면이다.

[그림 1] 거래소 홈페이지를 통한 장내옵션자료의 습득

- 합성구조 상품의 경우, 모수추정 이전에 상품을 구성하는 각각의 변동성을 뽑아내기에는 매우 어렵다. 따라서 위의 합성상품의 정보를 변동성 곡면에 적용시키기 위해서는 변동성을 이용한 모수추정방법 대신 가격을 이용한 모수추정방법이 필요하다. 이를 위해서는 모수추정에 필요한 상품가격식이 반드시 존재해야 하는데, 시장에 널리 알려진 확률변동성 모형 중 Heston 모형만이 유일하게 바닐라 옵션에 대한 닫힌해가 존재한다.

2.2. 장외시장

장외시장의 정보는 Cscreen, Vectalis, Brockerhub과 같은 중개사들을 통해서 제공된다. 이들은 거래가 자동으로 성립되는 트레이딩 시스템은 아니지만 주식 파생상품을 대상으로 하여 거래소 또는 청산소에 연결되어 브로커나 트레이더 간에 거래를 등록한 내용을 확인 할 수 있는 전자 브로커 툴이다. Cscreen에서 정보를 제공하는 UI 화면은 [그림2]와 같으며 Bclear-NYSE liffe's cleared service와 연결되어 있다. 일반적으로 장외시장은 24시간 거래되며 ‘증가’의 개념대신 ‘체결’정보가 존재한다.



실시간 장외거래데이터는 중개사(제3자의 경우) 혹은 브로커(시장 참여자의 경우)를 통해 취득할 수 있다. 그림은 거래 참여자가 아닌 제3자로서 장외옵션데이터를 제공받는 화면이다.

[그림 2] Cscreen을 통한 장외옵션자료의 습득

3. 자료의 정리(filtering)

장내시장과 장외시장에서 습득한 자료들을 그대로 사용하면, 왜곡된 변동성곡면을 얻을 가능성이 있다. 그 이유는 여러 가지가 있는데, 매수호가와 매도호가의 차이가 너무 심한 경우, 거래가 전혀 이루어지지 않아 이론가가 나온 경우, 일반적이지 않게

높거나 낮은 가격이 일시적으로 형성된 가격인 경우 등이 있다.³⁾ 이들의 정보는 가격만으로 봤을 때는 차익거래를 허용하는 것으로 보이지만, 실제로 거래를 통해 차익을 얻을 수는 없는 상황이므로 제외하는 것이 옳다고 여겨진다. 제외하는 기준은 여러 가지가 있는데, [그림3]에서와 같이 거래량, 미결제약정, 호가 스프레드(bid-ask spread), 머니니스(moneyness), 만기, 무재정거래조건(no arbitrage condition) 등의 조건을 통해 이루어진다.

거래소	Index	No arbitrage condition	Moneyness	Market price	기타
	Eurostoxx50	O (True)	0.5 ~ 1.5	Last Price >=0.1	Date = today
	S&P500	O (True)	0.5 ~ 1.5	Bid & Ask > 0	
	KOSPI200	O (True)	0.5 ~ 1.5		거래량
	Nikkei225	O (True)	0.5 ~ 1.5	Closing price > 0	
	HSCEI	O (True)	0.5 ~ 1.5	Last Traded price > 0	거래량

Index	거래소			OTC(Cscreen)				
	데이터 수(1일기준)	옵션종류	잔존만기	Moneyness	데이터 수(1일기준)	옵션종류	잔존만기	Moneyness
KOSPI200	120~150	Call/Put	1월-180일	0.8-1.2	100	Call Put Exotics	1월-1,080일	0.6-1.4
S&P500	800-900		1월-1,080일	0.06-2.2	X		X	X
Eurostoxx50	1,300-1,400		1월-1,620일	0.03-4.00	X		X	X
HSCEI(하지수)	450-550		1월-360일	0.6-1.5	50-70		1월-1,080일	0.5-1.5
NIKKEI225	850-880		1월-1,800일	0.5-1.5	140-150		1월-1,800일	0.5-1.5

O T C	Index	structure	Market price
	KOSPI200	CALL / CALL_CALD / CALL_FLY / CALL_RATIO / CALL_SPD PUT / PUT_CALD / PUT_FLY / PUT_RATIO PUT_SPD/RR / STRD / STRD_CALD / STRG	Bid/Offer spread
	Nikkei225		
	HSCEI		

옵션자료를 취득한 후에는 모수 추정을 위해 필요한 데이터를 걸러내는 작업이 필요하다. 그림은 NICE P&I에서 예시로 든 지수별 필터링 조건을 보여준다.

[그림 3] 옵션자료의 필터링 조건 예시

3) 그 외에 브로커가 상품정보를 잘못 입력한 경우도 다수 존재한다.

IV. 변동성 곡면 구축방법(Vol. Surface Construction)

1. 변동성 곡면의 개요

변동성 곡면은 행사가와 만기를 두 축으로 해서 만들어지는 3차원 곡면이다. 곡면의 모든 점의 자료가 전부 존재하는 것이 이상적이지만, 실제 시장에서 거래되는 상품은 일부에 불과하기 때문에 나머지 점들의 자료를 내삽(interpolation) 혹은 외삽(extrapolation)을 통해 만들어 내야만 한다. 단순히 스플라인 방법을 통해 내삽 혹은 외삽을 하여 만들어 내는 방법도 있지만, 이 방법을 적용할 경우 특정 상황의 시장에서는 외삽된 가격이 심하게 왜곡되는 경우가 많다.⁴⁾ 이것은 변동성이 다항식으로 설명되는 구조가 아닌, 복잡한 비선형방정식 형태이기 때문이다. 마찬가지로 국소 변동성 곡면을 산출할 때에도 왜곡된 정보를 나타낼 가능성이 있다.

따라서 실무에서는 무재정거래조건을 만족하며 변동성의 움직임을 잘 설명할 수 있는 특정 모형을 가정하여 부족한 정보를 채워 변동성곡면을 만들게 된다. 대표적인 모형으로는 Heston, SABR, Lognormal Mixture 모형이 있다. Heston 모형은 옵션가격의 단편 해가 존재하며 중장기 변동성곡면을 가장 잘 피팅한다는 장점이 있지만, 단기부분과 극 외가격 (Deep OTM)부분의 피팅에 단점이 존재하므로, 실무에서는 조정이 필요하다. SABR은 모수가 적기 때문에 근사식을 통해 자료의 개수가 충분한 단기부분을 잘 피팅할 수 있지만, 자료의 개수가 적은 중장기부분에서의 피팅은 부족한 단점이 있다. 또한 모든 변동성곡면이 일관된 모수를 갖지 않고, 각 만기별 모수가 따로 산출된다는 점에서 국소변동성곡면으로의 전환이 어렵다. Lognormal Mixture는 몇 가지 정규분포의 확률분포함수를 합쳐서 만든 것으로 국소변동성 곡면을 Dupire 식을 거치지 않고 직접 산출할 수 있다는 장점이 있지만, 모수가 많기 때문에⁵⁾ 실무에서 직접 사용하려면 몇 가지 모수를 고정시키고 나머지 모수만 산출하는 식의 정책적 사용이 필요하다.

위의 세 가지 모형들은 각기 장·단점이 존재하며, 원형 그대로 사용해서는 실무에서 쓸 수 있는 변동성곡면을 제대로 산출하기 어렵기 때문에 상황에 맞는 조정이 필요하다. 실무에서는 각 모형의 장점을 수용하여 합치거나, 약간의 가정을 더하여 진보된 모형을 만들어 쓰는 식으로 조정하여 쓰곤 한다. 어떤 방법이든 목표는 시장을 잘

4) 특히 블룸버그 단말기에서 제공되는 변동성곡면의 경우 외삽부분의 정보는 심하게 왜곡되는 경우가 허다하다.

5) 예를 들어 3개의 확률분포함수를 합칠 경우 그 모수는 $6 \times 3 - 1 = 17$ 개에 이른다.

설명하며, 노이즈는 제거하고, 민감도가 잘 나올 수 있는 안정적인 변동성 곡면을 만드는 것이다. 또한 산출된 변동성 곡면의 정확한 이해를 기반으로 시장 상황에 맞게 활용하는 것이 효율적인 변동성 곡면 운용의 핵심이라 할 수 있다.

2. 변동성 곡면의 구축

2.1. 배당정보 산출

배당정보 산출은 실무에서 가장 중요하게 여겨지는 이슈 중의 하나이다. 학술적 목적에서의 연구에서는 보통 무배당을 가정하고 이루어지지만, 실무에서는 이 배당정보에 따라서 손익이 크게 변동하는 일이 생긴다. 또한 연속배당을 사용할 경우, 데스크⁶⁾의 잘못된 정책으로 인해 실제 배당일에 손익이 크게 변동할 가능성이 있으므로 정확한 배당일에 이산배당을 적용하는 것이 중요하다.⁷⁾

실무에서 흔히 사용되는 배당정보의 산출방법은 3가지가 있는데, 다음과 같다.

(1) 블룸버그(Bloomberg)의 배당정보

블룸버그 단말기의 Total Return Analysis(Ticker: TRA)에 들어가면 예상배당정보와 과거배당정보를 얻을 수 있다. 과거 배당정보의 3년 평균을 이용하는 방법도 종종 이용되지만, 이 방법은 예상배당정보에 의한 예측의 범주에 들어가므로, 잘 이용되지 않는다. 따라서 예상배당정보를 매일매일 업데이트 하면서 배당량을 직접 투입변수로 모형에 넣는 방법을 이용한다.

(2) 옵션 내재배당 사용

다음의 방법은 풋-콜 패리티를 이용하여 시장에서 거래되는 옵션가격정보에서 역으로 산출한 내재배당을 사용하는 것이다. 보통 ATM주변의 몇 개의 옵션에서 추출한 내재배당을 가중평균하여 사용하는 방법이 이용되며, 블룸버그의 변동성곡면 또한 이 방법을 이용하여 산출하는 것으로 알려져 있다. 다만 이 방법을 사용할 경우, 선물시장과의 일관성이 보장되지 않기 때문에 문제가 있다. 이를 해결하기 위해 실무에서는 IRS 커브 대신에 이자율 모형을 새롭게 산출하여 선물시장과의 일관성을 맞추는 방법이 이용된다.

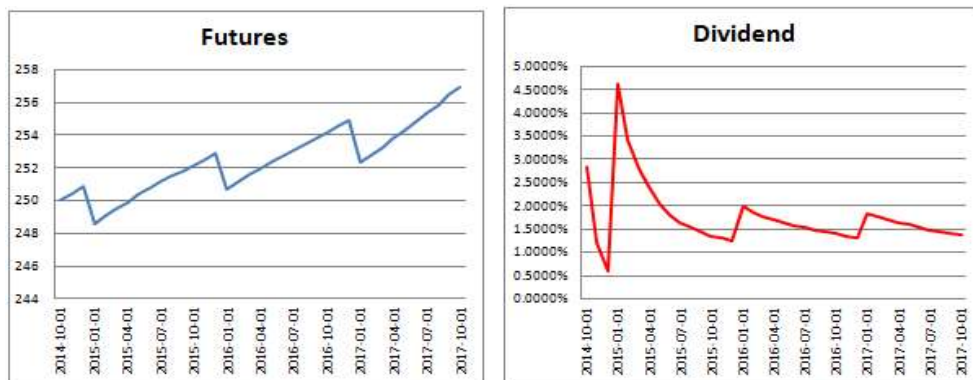
6) 증권사의 Front desk와 같이 회사의 특정 포트폴리오를 운용하는 팀을 지칭한다.

7) 일반적인 확률변동성 모형은 연속배당을 가정하고 있으므로, 이산배당을 사용하려면 모형을 수정하거나, 이산배당의 효과를 내는 연속배당 커브를 만드는 방법이 쓰인다.

(3) 선물 내재배당 사용

선물 식을 이용하여 시장에서 거래되는 선물가에서 역으로 내재배당을 추출하는 방법이다. 이를 이용하면 변동성곡면에서 산출된 옵션으로 만든 합성선물가가 정확히 선물시장의 선물가와 일치하게 된다⁸⁾. 다만, 이 방법을 사용할 경우, 식에서 음수배당이 나올 수 있는 가능성이 있다.⁹⁾

위의 세 가지 방법 중 하나로 배당을 산출하여 지수별 실제 배당월에 맞추어 선물가를 구성하고 이를 투입변수로 변동성 곡면을 만들면 선물시장과의 일관성을 지닌 변동성 곡면을 산출할 수 있다. [그림4]에서와 같이 매월의 선물가를 구성하고 배당정보를 얻는다.



그림은 KOSPI200 지수의 2014년 9월에 생성된 선물 및 배당을 보여준다. 좌측 그림은 이산배당을 반영하여 만든 선물곡선이며, 우측 그림은 생성된 선물가에서 추출된 내재배당 커브이다.

[그림 4] 변동성곡면 투입변수를 위한 선물가 생성과 내재배당 추출

2.2. 모수 추정-캘리브레이션(calibration)

모수 추정은 변동성 곡면 구축의 핵심이라고 할 수 있다. 어떤 모형은 모수가 너무 적어 시장을 잘 설명하지 못하고, 어떤 모형은 모수가 너무 많아서 추정(calibration)이 힘들다는 단점이 있다. III장 자료(data)에서 설명한 바와 같이, 모수추정(calibration)은 관련 시장의 상품 정보를 최대한 담아서 이루어지는데, 장내옵션은 물론이고 장외

8) 외사 변동성곡면 제공업체로 가장 널리 알려진 SD(Super Derivatives)의 변동성 곡면은 합성선물가가 선물시장의 선물가와 일치하지 않는 치명적인 문제가 있어, 국내증권사에서는 최근 채권시가평가사의 변동성곡면을 제공받거나 자체개발을 추진하는 추세이다.

9) 요즘 같은 저금리 시장에서는 이자율(r)이 매우 낮기 때문에 $F = Se^{(r-d)\tau}$ 에서 선물가(F)가 현물가(S)보다 높은 상황의 경우, 배당(d)가 음수가 나와야 식을 만족한다.

옵션의 합성구조를 지닌 상품과 선물상품까지 포함한다.

만약 스플라인 방법을 이용해 변동성 곡면을 만들 경우, 이러한 모수추정(calibration) 과정은 필요가 없고, 어떤 방식으로 내삽 혹은 외삽을 통해 유의미한 변동성을 산출할 것인가의 고민이 필요하다. 하지만, 전술한 바와 같이 이러한 방법은 특정 시장상황 속에서는 왜곡된 변동성 정보를 산출할 가능성이 매우 크기 때문에, 적정 모형을 가정하고 모수추정(calibration)을 통해 시장 상황과 일관성을 유지하는 변동성을 산출하는 것이 일반적이다.

Γ : 모형 모수, P_i^{market} : 옵션의 시장가, P_i^{model} : 옵션의 모형가 라고 할 때, 모수추정(calibration)은 아래의 목적함수를 만족하는 모형 모수 Γ 를 찾는 과정이다.¹⁰⁾

$$\min_{\Gamma} \sum_{i=1}^n (P_i^{\text{market}}(\Gamma) - P_i^{\text{model}}(\Gamma))^2$$

이를 찾기 위해 전역최적화 기법인 Simulated Annealing 혹은 국소최적화 기법인 Trust-Region-Reflective이나 Levenberg-Marquardt Algorithm 방법이 주로 이용된다. Simulated Annealing 방법은 전역최소값을 찾을 수 있는 장점이 있지만 시간이 오래 걸리는 단점이 있고, Trust-Region-Reflective이나 Levenberg-Marquardt Algorithm 방법은 국소최적화 방법이기 때문에 초기값(initial value)에 크게 의존한다는 단점이 있다. 실무에서는 전역최적화 기법으로 적정 모수 수준을 찾고 주기적으로 업데이트를 하며, 국소최적화 기법을 통해 매일의 모수를 산출하는 방법이 주로 쓰인다. 모수는 데스크의 정책에 따라 매일 수정할 수도 있고, 2주에 한번 혹은 한 달에 한 번 수정할 수도 있다. 또한 모수가 많은 모형을 사용할 경우, 상관관계나 장기평균과 같은 지수별 특징이 있는 모수는 고정시켜놓고 나머지 모수만을 추정하기도 한다. 이와 같이 모수 추정에 있어서 정책이 다른 것은 모수 산출에 따른 변동성곡면의 사용이 손익에 직접적으로 영향을 미치기 때문인데, 이것은 포트폴리오의 크기와 종류, 헤지 주기와 밀접한 관련이 있으므로 각 데스크마다 다르게 적용하고 있다.

2.3. 변동성 곡면의 산출

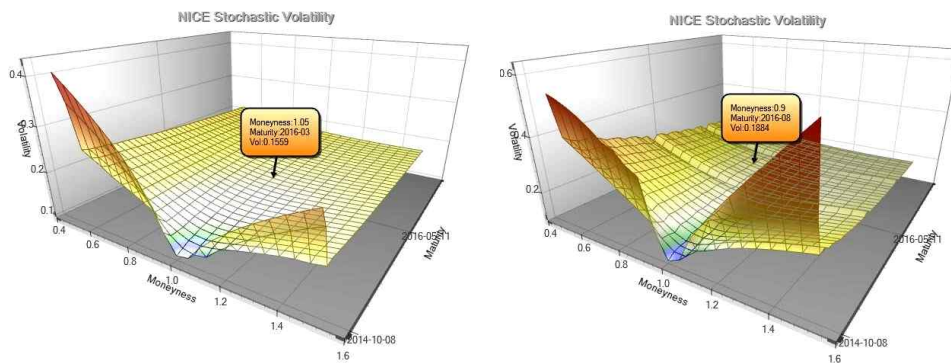
모수를 산출하고 나면 변동성 곡면의 모든 격자의 옵션가를 모형을 통해 산출할 수 있다. 이를 블랙숄츠식을 이용하여 내재변동성을 역으로 추출하여 내재변동성곡면

10) 이 과정은 옵션가 대신에 변동성을 이용하여도 가능하다. 다만 변동성을 이용할 경우 크기가 훨씬 작기 때문에 정밀한 최적화가 어렵다는 단점이 있다. 또한 옵션가가 작은 값들을 잘 피팅하기 위해서 상대오차를 사용하는 방법도 있으나, 적정 모수 산출이 쉽지 않다는 단점이 존재한다.

을 산출할 수 있다. 국소변동성 곡면은 Dupire식을 이용하여 산출하는 것이 일반적이다. Dupire 식에는 편미분 항들이 존재하는데, 이를 편미분 방정식을 직접 풀어서 산출할 수도 있지만 실무에서는 차분형태로 바꾸어 국소변동성을 산출한다. 일반적으로 Dupire식은 옵션가를 이용한 것이 널리 알려져 있지만, 실무에서는 안정성 면에서 우위를 점하는 것으로 알려진 아래의 내재변동성을 이용한 식이 주로 쓰인다.

$$\sigma_{loc}(K, T) = \sqrt{\frac{\sigma_{imp}(K, T)^2 + 2\sigma_{imp}(K, T)(T-t)\left(\frac{\partial\sigma_{imp}(K, T)}{\partial T} + (r-q)K\frac{\partial\sigma_{imp}(K, T)}{\partial K}\right)}{\left(1 + Kd_+\frac{\partial\sigma_{imp}(K, T)}{\partial K}\sqrt{T-t}\right)^2 + \sigma_{imp}(K, T)^2K^2(T-t)\left(\frac{\partial\sigma_{imp}(K, T)}{\partial K^2} - d_+\left(\frac{\partial\sigma_{imp}(K, T)}{\partial K}\right)^2\sqrt{T-t}\right)}$$

국소변동성 산출에서 가장 이슈가 되는 부분은 매끄럽고(smoothness), 왜곡이 없으며, 허수가 나오지 않는 곡면의 산출이다. 식이 루트 안에 있기 때문에 간혹 해당시점과 같이 월물간 내재변동성 차이가 심한 부분에 대해서는 시간에 대한 편미분 항이 큰 음수 값으로 산출되어 국소변동성이 허수 값으로 나오는 경우가 있다. 또한 차분식을 이용할 때에 시간간격을 조밀하게 나누지 않을 경우 본래의 내재변동성을 왜곡시키는 값이 산출될 가능성이 있다. 게다가 내재변동성 곡면의 스무딩(smoothing)을 목적으로 조정을 가했을 경우, 국소변동성의 값이 심하게 튀는 경우도 존재한다. 이를 해결하기 위해 실무에서는 Anderson(1997/1998)의 방식을 따라 유한차분법으로 정밀하게 풀거나 혹은 점프를 넣거나 하는 방식으로 매끄럽고 안정적인 국소변동성 곡면을 넣으려는 시도를 했으나, 아직까지 시장 지배적인 국소변동성 산출 이론은 존재하지 않는다.



출처 : NICE Volatility & Information System

[그림 5] KOSPI200의 내재변동성 곡면(左)과 국소변동성 곡면(右)

[그림 5]는 이상과 같이 구현한 내재변동성 곡면과 국소변동성 곡면을 보여주고 있다. 다음 장의 변동성곡면의 활용에서 살펴보겠지만, 국내에서 주가연계증권의 기초자산으로 활용되고 있는 대표적 지수는 KOSPI200, HSCFI, S&P500, Eurostoxx50, Nikkei225 이다. 이러한 대표적 지수에 대해 구현한 내재변동성 및 국소변동성을 [부록 A]에 제시하였으며, [부록 B]는 원천 데이터의 변동성 형태를 보여주기 위해 모형을 사용하지 않고 실제 시장에서 거래된 시장변동성의 산점도를 보여주고 있다.

V. 변동성 곡면의 활용

1. 주가연계증권(ELS)의 가격결정과 헤징

널리 알려진 대로 주가연계증권(ELS)은 여러 형태의 상품이 발행되고 있으나 시장에서 대표상품으로 자리매김한 조기상환 Step Down ELS는 주로 3년 만기에 6개월 조기상환형태로 발행된다. 3년의 만기를 가졌음에도 1차 및 2차에 조기상환 될 확률이 높으며 1차 및 2차에 조기상환이 되지 않을 시 만기상환 시 손실이 날 확률이 높다고 할 수 있다. 이러한 조기상환형 ELS의 헤지에서 국내 대형증권사의 경우 대부분이 중소형 증권사도 점차 변동성 곡면(volatility surface)을 활용하여 가격결정과 헤징에 이용하고 있는 상황이다. 즉, 지수형 ELS에 스마일과 만기구조가 존재함에 따라 ELS헤지트레이더가 취하고 있는 포지션의 델타헤지(delta hedge)에 큰 영향을 줄 수 있기 때문이다. 델타헤지 시 내재변동성은 실현손익에 큰 영향을 주며 델타계산 시 어떤 변동성을 사용하는 지에 따라 델타 및 감마변화, 이로 인해 발생하는 최종 실현손익(realized P&L) 변동하게 된다.

ELS의 가격결정에 변동성곡면을 반영하는 방법에는 주로 두 가지 방법을 사용하고 있다. 몬테카를로 시뮬레이션과 유한차분법(FDM)에 의한 가격결정 방법이다. 몬테카를로 시뮬레이션은 최근 ELS기초자산이 2개에서 3개로 증가하면서 다시 증권회사를 중심으로 ELS가결정방법론으로 사용되고 있으나 계산시간이 느리고 옵션민감도(greeks)의 안정성 측면에서 단점을 가지고 있다. 반면, 유한차분법(FDM)은 계산속도가 빠르고, 옵션민감도 안정성 측면에서 실무적으로 널리 사용하고 있으나 기초자산이 2개 이상인 경우 편미분방정식의 해를 찾기에 어려운 것으로 알려져 있다.

본 연구에서 역사적 변동성과 변동성 곡면(volatility surface)을 사용하여 시뮬레이션 해 본 결과 상대적으로 꼬리부분이 두터운 분포를 반영한 변동성 곡면을 사용한

ELS가격이 더 낮게 산출되었다. 국내외적으로 블랙-숄즈 모형과 다양한 변동성 모형에 대한 델타헤징의 성과에 관한 연구가 진행되었으나, 변동성 스마일과 기간구조를 모두 반영한 헤징 성과에 대한 연구는 거의 없는 편이다. 이는 변동성 곡면의 구축과 여러 형태의 시나리오를 통해 어떠한 모형이 성과면에서 우수한 모형인지를 향후에 분석해 볼 필요성이 있다고 판단된다.

2. ELS 시가평가 변동성의 활용

앞서 설명했듯이 상수 변동성(constant volatility)을 통한 ELS가격결정의 문제와 더불어 변동성 곡면의 존재는 ELS 손익 평가상의 문제로 귀결된다. 상수 변동성을 사용하여 손익을 평가할 경우 시장에서 호가되는 옵션 내재변동성의 차이를 반영하지 못하므로 트레이딩 시점에서 평가손익으로 인식되게 된다. 상수 변동성은 시장에서 호가되는 옵션 내재변동성의 왜도(skew)를 반영하지 못하므로 일반적으로 외가격 풋옵션 매수 시 평가손실, 매도시 평가 이익, 외가격 콜옵션 매수 시 평가이익, 매도시 평가 손실이 발생하는 경향이 있다. 따라서, 일반적으로 사용되고 있는 금융투자회사의 상수 변동성을 통한 ELS의 손익추정과 리스크평가는 평가상의 오류를 발생시킬 수 있다.

아울러, 변동성 곡면을 이용한 ELS의 시가평가는 투자자의 ELS환매가격 괴리에서 발생하는 문제를 해결해줄 수 있다. ELS의 시가평가에 있어 가장 중요한 변수는 내재변동성 임에 불구하고 시가평가에 사용되는 변동성을 역사적 변동성을 이용하고 있기 때문이다. 실제 ELS를 발행하는 증권회사의 경우 내재변동성을 통한 운용과 평가를 하기 때문에 채권평가사의 ELS시가평가 가격과의 오차가 발생하게 이에 따라 환매가격 괴리가 발생하고 있다. 이러한 시가평가상의 역사적변동성을 변동성곡면으로 대체하게 되면 국내외 ELS발행자가 계산하여 지급하고 있는 환매가격과의 괴리를 줄여줄 수 있으며 실제적인 공정하고 객관적인 ELS가격산정에 도움을 줄 것으로 판단된다.

VI. 결 론

본 연구는 금융업계에서 블랙-숄즈 상수 변동성(constant volatility)을 사용함으로써 발생하는 문제점에 대해 그 대안적인 방법을 찾아 시장변동성과 가장 유사한 형태의 변동성 곡면을 구축하고자 하는 동기에서 시작되었다. 주요 연구방법론으로는 Heston

(1993)모형을 이용하여 내재변동성 곡면(implied volatility surface)을 구축하고 난 뒤 Dupire(1994)모형을 이용하여 국소변동성 곡면(local volatility surface)을 구축하는 방법에 대해 학술적 및 실무적 접근법을 사용하였다. 본 연구에서 다른 변동성 곡면의 구축방법과 더불어 일반적으로 계산된 변동성 곡면이라 할지라도 변동성 곡면의 품질에 많은 차이가 발생할 수 있다는 점에 착안하여, 모형을 사용한 변동성 곡면이 시장 변동성과 비슷한 수준까지 품질을 높이기 위해 데이터를 포함한 아래와 같은 구축방법 개선에 많은 치중을 하였다. 첫째, 장내옵션만으로 구성이 불가능한 머니니스와 만기구조에 대해 장외옵션을 사용하였고, 다른 모형으로는 변동성곡면 구축에 활용될 수 없는 합성구조의 옵션까지 변동성 곡면 구축에 활용하였다. 둘째, 배당정보의 반영에 따라 변동성 곡면의 수준(level)과 기울기(slope)가 달라질 수 있는데, 본 연구에서는 시장에서 거래되는 선물가에서 역으로 계산한 내재배당(implied dividend)을 사용하여 변동성 곡면에서 산출된 옵션을 구성한 합성선물가격이 실제 선물시장의 선물가와 일치되게 하는 방법을 사용하였다. 셋째, 본 연구를 통한 모수추정은 다른 변동성 곡면 모형보다 변동성 곡면의 전체를 일관된 방식으로 최적화하는 방법론을 사용하여 변동성 곡면 산출의 안정성을 높였다.

이상과 같이 구현한 변동성 곡면은 주가연계증권의 가격결정과 헤징에 활용될 수 있는데 ELS에 변동성 스마일과 만기구조의 존재에 따라 ELS헤지트레이더가 취하고 있는 포지션의 델타헤지(delta hedge)에 따라 손익변동이 생길 수 있어, 변동성 곡면의 활용방안이 대두되고 있다. 변동성 곡면이 기존에 사용되고 있는 역사적 변동성에 따른 ELS시가평가를 대체하게 된다면 투자자의 환매요청에 따라 국내외 ELS발행사가 계산하여 제시하고 있는 ELS 환매가격과 채권평가사의 ELS 평가가격과의 괴리를 줄여주어 투자자의 민원 감소효과가 나타날 것으로 판단해, 투자자보호에도 기여할 것으로 전망된다.

참 고 문 헌

- 김솔 (2010), Heston(1993)모형을 이용한 옵션내재변동성의 미래 변동성 예측, 금융안정연구 제11권 제1호, 예금보험공사
- 옥기울, 이상구 (2012), KOSPI200 옵션시장에서의 내재변동성 곡면에 관한 연구, Journal of The Korean Data Analysis Society 14(3), 한국자료분석학회, 1633-1643
- 이효섭, 남길남 (2011), 장외 주식파생상품시장의 효율적인 변동성 산출 방안, 자본시

장연구원 학술연구용역보고서

- Andersen, L.B.G., Brotherton, R.-Ratcliffe (1997/1998), The equity option volatility smile: an implicit finite-difference approach. *Journal of Computational Finance*, 1,2, 5-38
- Andreasen, J., Huge, B. (2011) Volatility Interpolation. *Risk Magazine*, 76-79.
- Albrecher, H., Mayer, P., Schoutens, W. & Tistaert, J. (2007), The little Heston trap, *Wilmott Mag.* 83 - 92
- Carr, P. and Madan, D. (1998), Option valuation using the Fast Fourier Transform, *Journal of Computational Finance*, 2, 61 - 73
- Derman, E. and I. Kani (1994), Riding on a Smile. *RISK*, 7 no 2, 32-39
- Dupire, B. (1994), Pricing with a smile, *Risk*, 7 no 1, 18-20
- Gatheral, J. (2005), The volatility surface: A practioner's guide, *Wiley Finance*, New York, 20
- Heston, S. L. (1993), A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bonds and currency options, *The Review of Financial Studies*, 6(2), 327 - 343
- Hull, J. C., and White, A. (1987), The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities, *Journal of Finance*, 42, 281 - 300
- Ingber, A. L. (1993), Simulated annealing: Practice versus theory, *Journal of Mathematical Computational Modelling* 18(11), 29 - 57
- Moodley, Nimalin (2005), The Heston Model : A Practical Approach with Matlab Code, *University of the Witwatersrand*, Johannesburg
- Stein, E.M., Rubinstein, M.E. (1994), Implied Binomial Trees, *Journal of Finance*, 69, 771-818.
- Stein, E. M., and Stein, J. C. (1991), Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach, *Review of Financial Studies*, 4, 727 - 752
- Van der Kamp, Roel (2009), Local Volatility Modelling M.Sc. dissertation, *University of Twente*, The Netherlands

Abstract

A Practitioner's Guide to the Stochastic Volatility Surface : Construction and Implementation

Cheonghee Ahn^{}, Chang-Rae Park^{**} and Changsoo Hong^{**}*

We study the construction of implied volatility surface and local volatility surface using Heston(1993) and Dupire(1994) model, respectively. Practitioners have been aware of the drawback of Black-Scholes option pricing model when it comes to the assumption of constant volatility. We contemplate sophisticated construction methods reflecting volatility skew and term structure in real financial markets. Heston(1993) model enables us to calibrate implied volatility surface which has long term maturity and deep out of the money strikes using listed and OTC derivatives including hybrid options. We also make it into the local volatility surface which can be used for pricing and hedging ELS(Equity-Linked-Securities) products following Dupire(1994) model.

There is a growing number of the utilization of volatility surface in hedging and pricing ELS products in financial markets. We expect that exploiting volatility surface could give us operation benefits comparing with the use of constant volatility. Furthermore, it would contribute to the advancement of the bond pricing companies by filling the gap between redemption price and evaluation price of the ELS.

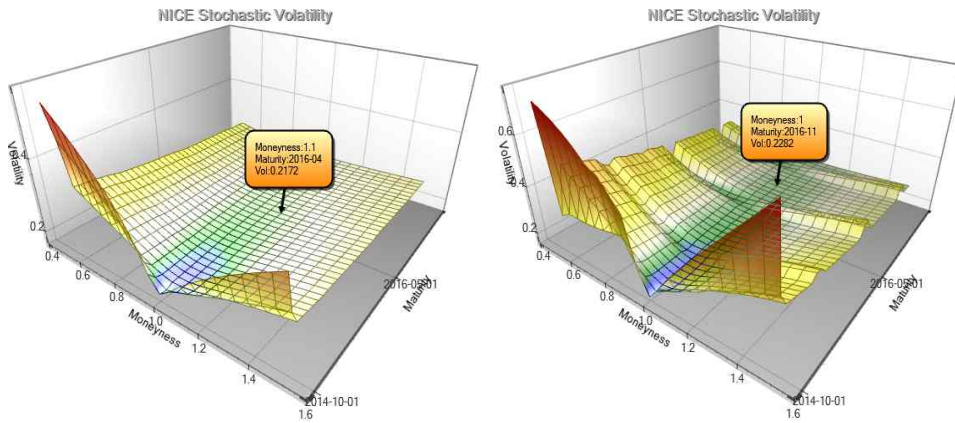
Key words: Stochastic Volatility, Volatility Surface, ELS, Mark to Market

* (First Author) Team Manger, Ph.D, NICE P&I Financial Engineering Research Center.

** (Co-Author) Researcher, Ph.D Candidate, NICE P&I Financial Engineering Research Center.

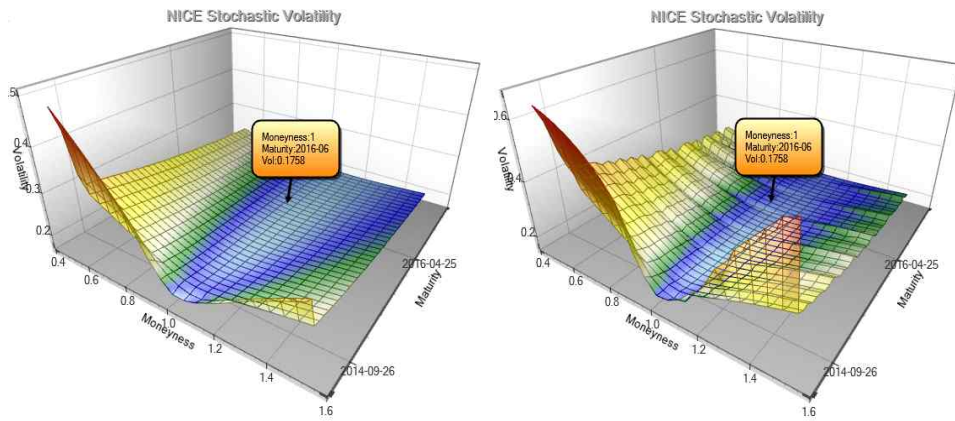
*** (Corresponding Author) Officer, Ph.D Candidate, NICE P&I Financial Engineering Research Center.

부록 A. 지수별 변동성 곡면



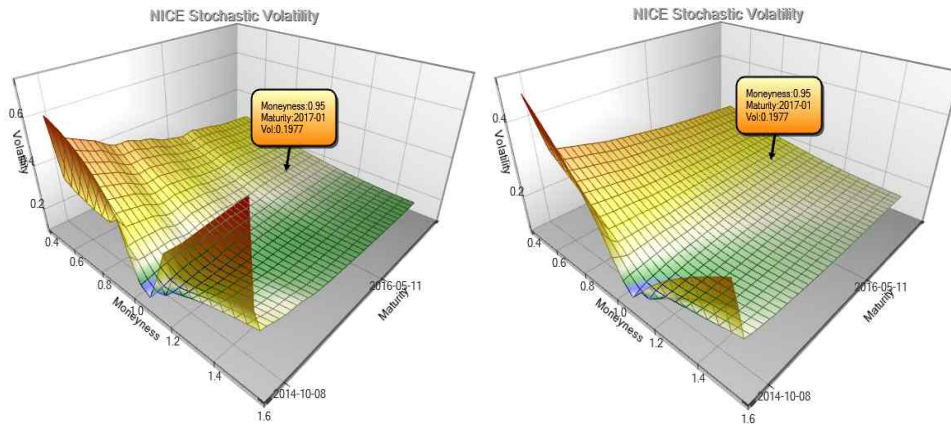
출처 : NICE Volatility & Information System

[그림 6] HSCEI의 내재변동성 곡면(左)과 국소변동성 곡면(右)



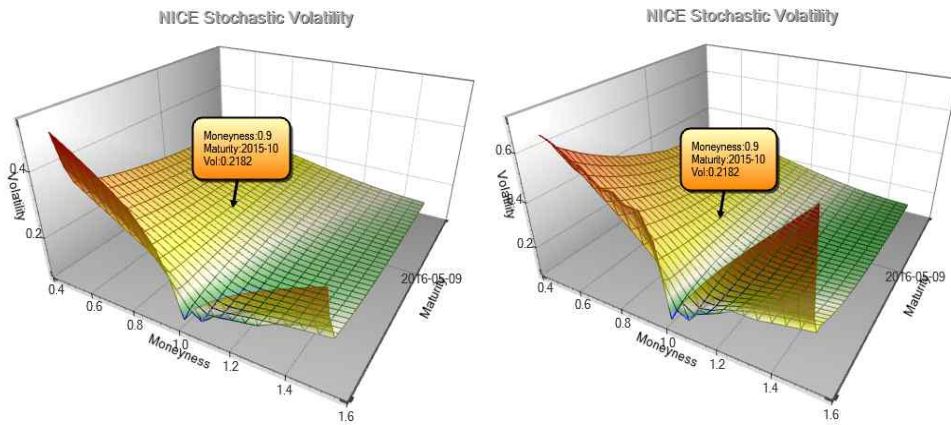
출처 : NICE Volatility & Information System

[그림 7] NIKKEI225의 내재변동성 곡면(左)과 국소변동성 곡면(右)



출처 : NICE Volatility & Information System

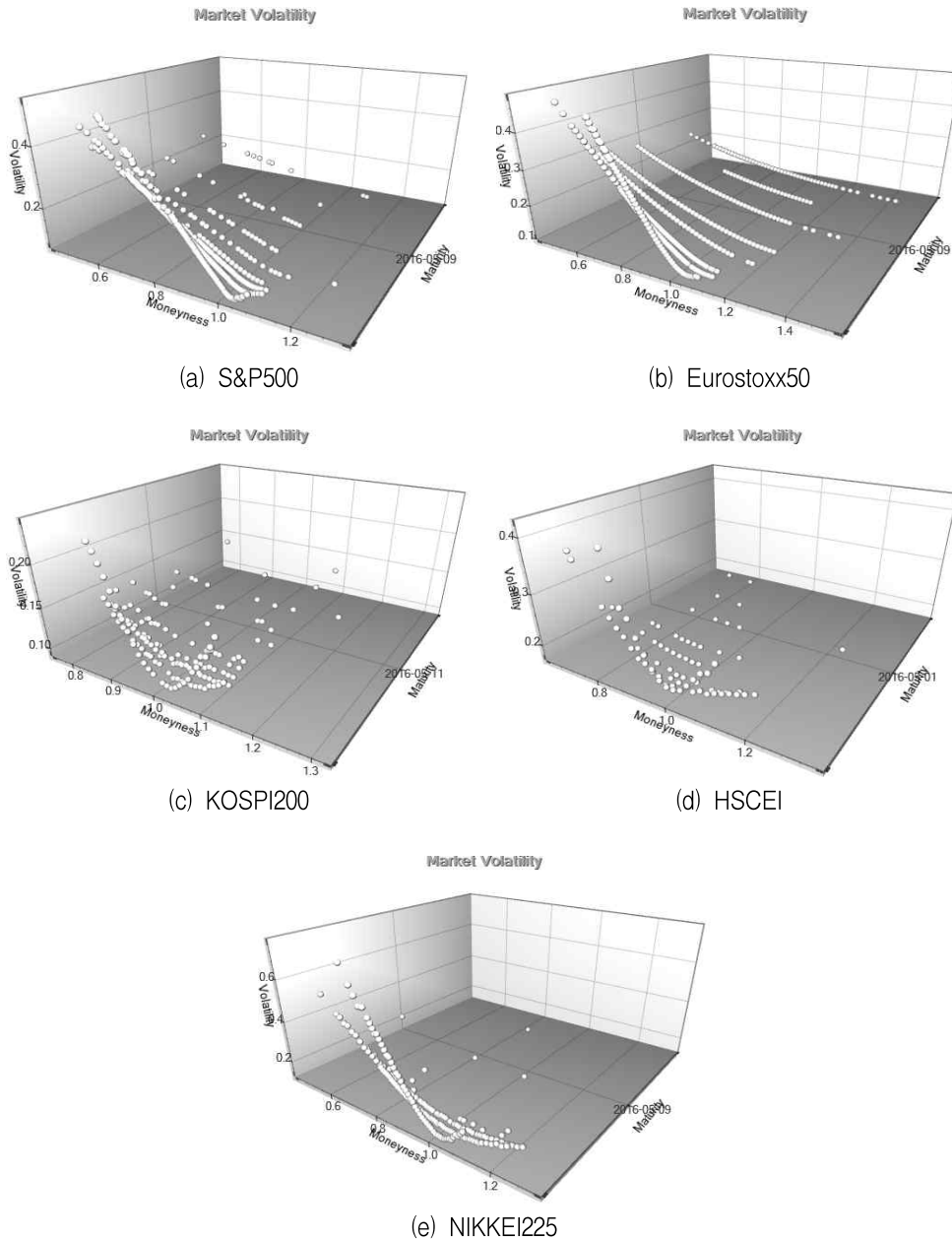
[그림 8] Eurostoxx50의 내재변동성 곡면(左)과 국소변동성 곡면(右)



출처 : NICE Volatility & Information System

[그림 9] S&P500의 내재변동성 곡면(左)과 국소변동성 곡면(右)

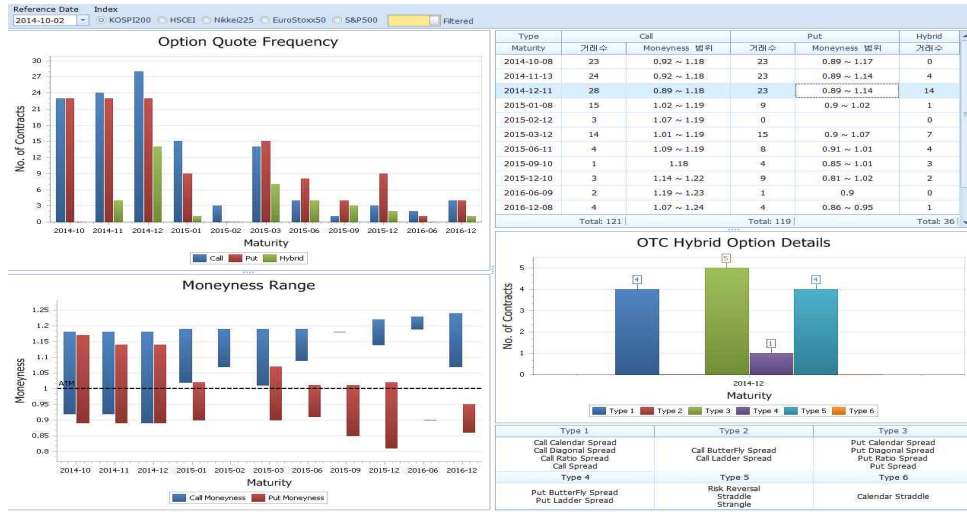
부록 B. 지수별 시장 변동성



출처 : NICE Volatility & Information System

[그림 10] 지수별 시장 변동성(합성구조상품 제외)

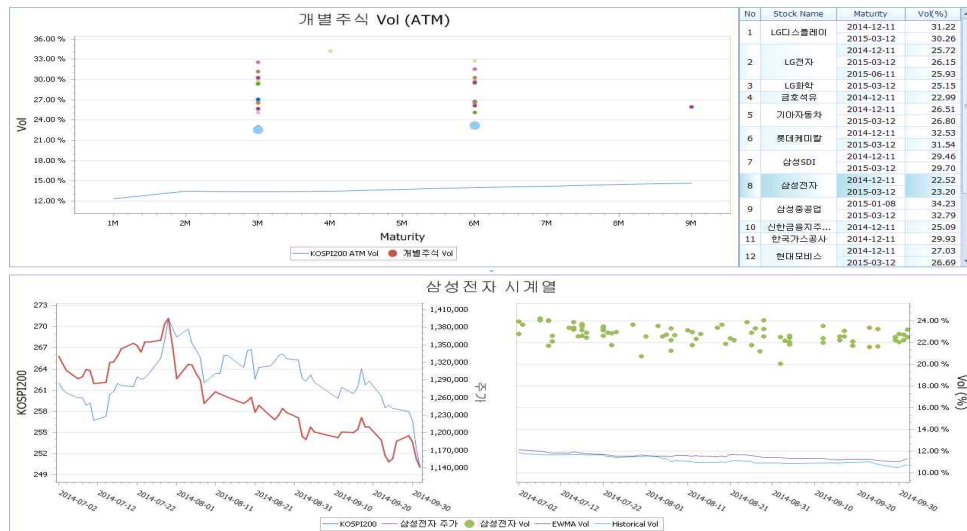
부록 C. 지수옵션 시장 분석



출처 : NICE Volatility & Information System

[그림 11] 지수옵션시장 상품 정보 분석 - 장내/장외 표준형 및 합성구조 옵션자료

부록 D. 개별주식 옵션 변동성 및 시계열



출처 : NICE Volatility & Information System

[그림 12] 개별주식 옵션 변동성 및 시계열, KOSPI200 및 삼성전자 주가 시계열

