

# Step down 구조 상품의 내재이연 방식 도입에 따른 북 안정성 개선

김민재\*

## 〈요약〉

본 논문에서는 step down 구조인 ELS(Equity Linked Security) 상품의 리스크량이 발행 수익을 인식하는 방법에 따라 어떻게 변화할 수 있는지 알아보도록 한다. 일반적으로 통용되는 이연수익과 이론가를 이원적 관리하는 분리 이연수익 인식(DDRR, Divided Deferred Revenue Recognition) 방식을 설명하고, 이연수익을 이론가 자체에서 고려하여 조기상환 구조에 보다 적합하다고 판단되는 내재 이연수익 인식(IDRR, Implied Deferred Revenue Recognition) 방식을 소개하도록 한다. DDRR의 경우는 ELS 헷지 거래를 위한 그릭 포지션이 이연수익과는 별개로 계산되므로 보다 큰 레버리지 효과를 만들어 내게 되며, 이에 따라 pin risk 상황과 같이 조기상환 여부가 불확실할 때 북운용의 안정성을 저해하게 된다. 반면 IDRR의 경우는 이연수익이 이론가 평가 내에 고려되어 그릭스 절대값 축소되는 디레버리지 효과가 있고, pin risk에서도 상대적으로 안정적인 운용이 가능함을 확인할 수 있다.

주제어 : 발행마진, 이연수익, Step down, Pin risk

논문접수일 : 2023. 11. 20. 1차 수정일 : 2024. 01. 05. 게재확정일 : 2024. 02. 26.

\* NH투자증권 FICC 파생운용부 차장, 02-750-5752, E-mail: MinjaeKim@nhqv.com.

# I. 서론

기본적인 파생상품의 평가 방법론은 포트폴리오 복제라는 이론적인 토대 내에서 보다 많은 헷지 자산을 이용할 수 있는 방법론들이 연구되었고, 이를 바탕으로 신규 파생상품을 발행 및 운용하는 토대가 되었다(Black et al., 1973; Derman et al., 1994; Hagan, 2002; Heston, 1993; Schwartz et al., 1997; Gatheral, 2006; Dupire, 1994; 임현철 · 배형욱, 2019; 김민재, 2020). 그리고 이론적 가치가 동일해도 XVA 등으로 인해 house의 평가 차이가 발생하였고, 이를 통해 계약 상대방 각각이 수익을 취하며 상품 거래를 수행할 수 있었다(Castagna, 2012). 또한 일반 리테일 고객을 위해서도 ELS와 같은 상품을 발행하여 투자 자산을 다양화해 주는 역할을 수행하였다.

ELS 상품의 발행 수익은 리테일 고객이 청약을 통하여 지불한 금액과 발행사의 평가 가치의 차이에서 발생한다. 예를 들어 ELS 상품 10,000원을 발행하여 고객은 청약금으로 10,000원(price,  $CF_0$ )을 발행사에 지불한 반면, 발행사가 계산한 이론가격( $V$ , theoretical NPV)은 9,000원이었다고 가정하자. 그러면  $CF_0 - V$ 에 해당하는 1,000원의 발행 수익이 발생하게 된다. 이때 이 발행 수익을 상품 발행일에 모두 인식할 수도 있지만, 향후 다이나믹 헷지 비용을 고려하여 상품 만기까지 1,000원의 일부를 안분하여 인식하는 경우가 많다<sup>1)</sup>. 즉, 평가가격( $NPV^D$ )은 식 (1)에서와 같이 이론가격( $V^D$ )과 이연수익( $R^D$ )으로 나누어 관리하는 분리 이연수익 인식(DDRR, Divided Deferred Revenue Recognition) 방식을 따르게 되며, 거래 당일 발행 수익은 식 (3)과 같이  $R^D$ 의 정도에 따라서  $0 \leq PL_0 \leq 1,000$ 원에서 결정된다.<sup>2)</sup>

$$NPV^D(S_t, t, R^D(t, T)) = V^D(S_t, t) + R^D(t, T) \tag{1}$$

$$R^D(T, T) = 0 \tag{2}$$

$$PL_0 = CF_0 - NPV^D(S_0, 0, R^D(0, T)) = CF_0 - \{V^D(S_0, 0) + R^D(0, T)\} \tag{3}$$

---

1) 재무회계상으로는 발행수익을 상품 만기까지 이연하여 인식 한다. 하지만 복운용자 및 상품 발행 부서의 성과를 평가하는 관리회계 기준으로는 내부 정책에 따라 수익인식 시점을 변경할 수 있다.  
 2) 일반적으로  $CF_0 = 10,000$ 이고  $V^D(S_0, 0) \leq 10,000$ 원인 상황에서  $R^D(0, T) \geq 0$ 를 만족한다. 위의 예에서 발행 수익은  $0 \leq PL_0 \leq 1,000$  원이고, 이에 해당하는 이연수익은  $0 \leq R^D(0, T) \leq 1,000$ 원의 형태가 된다. 또한 초기 인식된 이연수익  $R^D(0, T)$ 는 시간에 따라 점진적으로 인식되기 때문에  $t$ 에 따른 monotonic decreasing function의 형태를 지니게 되며, 식 (2)에서와 같이 만기 시점에서는 0에 수렴하게 된다. 일반적으로 myopic한 발행사일수록, 보다 큰 초기 수익을 인식하고 보다 빠른 속도로 0에 수렴하는  $R^D(0, T)$ 를 설정하게 될 것이다.

여기서  $S_t$ 는 임의의 시점  $t$ 에서 기초자산의 가격<sup>3)</sup>,  $V^D(S_t, t)$ 는  $t$ 시점에서 이론 평가값,  $R^D(t, T)$ 는  $t$ 시점에서 상품의 만기  $T$ 까지 남아있는 이연수익을 의미한다. 하지만 이것만으로는  $t^*$ 시점( $t^* \leq T$ )에서 조기상환이 확정되면  $R^D(t, T) \rightarrow 0$ 이 되어야 하는 특성을 모사하지 못한다. 따라서 본서에서는  $t^*$ 시점에서  $R^D(t, T) \rightarrow 0$ 이 되는 속성이 실제 이론 가격에 반영될 수 있도록 식 (4)와 같은 내재 이연수익 인식(IDRR, Implied Deferred Revenue Recognition) 방식을 제안하고자 한다.

$$NPV^I(S_t, t, R^I(t, T)) = V^I(S_t, t, R^I(t, T)) = V^*(S_t, t, R^I(t, T)) + R^I(t, T) \quad (4)$$

본서에서는  $NPV^D(S_t, t, R^D(t, T))$ 와  $NPV^I(S_t, t, R^I(t, T))$  차이에 따른 그릭스의 안정성 및 조기상환 일자 근처에서 델타의 안정성에 대하여 살펴보도록 한다. Chapter II에서는 일반적인 관행인 DDDR을 먼저 설명하고, 조기상환 구조의 상품에 보다 적합한 IDRR을 소개하도록 한다. 그리고 수익 인식 방식  $R(t, T)$ 의 형태와 IDRR에서  $R^I(t, T)$ 을 결정 방식에 대하여 알아보도록 한다. Chapter III에서는 본서에서 이용할 ELS 상품을 소개하고, 평가에 이용한 시장 데이터를 소개한다. 그리고 DDDR과 IDRR에서 계산된 그릭스를 이용하여 MtM(Mark to Market) 변화 설명력을 비교해 보고, 조기상환이 근접한 시점에서의 델타 프로파일을 분석하도록 한다.

## II. 이론적 배경

### 1. 자동 조기상환 상품 평가 방식

#### 1.1 조기상환 상품 이론적 평가

조기상환 조건이 없는 상품의 경우  $V(S_t, t)$ 는 만기  $T$ 에서  $S_T$ 에 따라 약정된 현금흐름  $\Pi(S_T)$ , 현재 관찰되는 기초자산  $S_t$ 이  $S_T$ 에 도달할 확률인  $P(S_T|S_t)$ , 그리고  $T$  시점까지의 할인을  $DF_{t,T}$ 을 이용하여 식 (5)와 같이 계산된다.

$$V(S_t, t) = E[V(S_T, T) \cdot DF_{t,T}|S_t] = DF_{t,T} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(S_T) \cdot P(S_T|S_t) dS_T \quad (5)$$

3) 여기서  $S_t$ 는 상품 정의에 따라 다르다. 본서에서 예시로 든 step down ELS 상품의 경우는 발행일 시점의 가격  $P_0$  대비 상품 발행 후 임의의  $t$  시점에서의 가격  $P_t$ 의 비율로 정의되는 performance( $S_t = P_t/P_0$ )로 상품의 가격이 결정된다. 또한 N개의 자산으로 구성된 multi asset 상품의 경우 대부분은 worst performer( $S_t = \min\{P_t^1/P_0^1, \dots, P_t^N/P_0^N\}$ )를 기준으로 상품의 가격이 결정된다.

하지만 stepdown 상품과 같이 상품 명목 만기 이전인  $Y \in \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  에서 기초자산  $S_{t_i}$  에 따라 조기상환 여부가 결정되고, 조기상환 시  $CF_{t_i}$  라는 현금흐름이 발생한다면  $t_i$  시점에서의  $V(S_{t_i}, t_i)$  는 식 (6)과 같이 update 된다.

$$V^*(S_{t_i}, t_i) = \begin{cases} CF_{t_i}, & S_{t_i} \in Stopping \\ V(S_{t_i}, t_i), & S_{t_i} \notin Stopping \end{cases} \quad (6)$$

식 (6)과 같이  $t_i$  시점에서 조기상환 여부가 결정되면,  $S_{t_i}$  인 state space에서 이론 가격을  $V(S_{t_i}, t_i) = V^*(S_{t_i}, t_i)$  로 변경한다. 그리고 이를 식 (7)과 같이 구간별로 backwardation 하면서, 임의의  $t$  시점 ( $t < t_i$ )에서의  $V(S_t, t)$  를 계산하게 된다.

$$V(S_t, t) = DF_{t, t_{i+1}} \int_{-\infty}^{\infty} V(S_{t_{i+1}}, t_{i+1}) \cdot P(S_{t_{i+1}} | S_t) dS_{t_{i+1}} \quad (7)$$

### 1.2 DDDR 이용 시 step down 구조 상품의 조기상환일 가치 평가

일반적인 step down ELS의 경우 조기상환일  $t_i \in \{t_1, t_2, \dots, t_M = T\}$  에서 발행 시점의 기초자산 가격 대비  $t_i$  시점 기초자산 가격 비율인  $performance(S_{t_i} = \frac{P_{t_i}}{P_{t_0}})$  를 기준으로  $M$ 번의 원금 및 쿠폰지급 기회가 주어진다. 조기상환은  $S_{t_i}$  가 약정된 조기상환 레벨  $L_{t_i}$  이상일 때 이루어지며, 상황이 진행되면 고객은 원금  $N$ 와 약정된 이자  $C_{t_i}$  를 수취하게 된다. 만약 상품 만기일까지 상황이 이루어 지지 않는다면 원금 손실이 발생할 수 있는데, 이는 매일 관찰하여야 하는  $B(B < L_{t_M})$  라는 Barrier 조건이 의해 결정된다.<sup>4)</sup> 만약 모든  $0 \leq t \leq T$  구간에서  $S_t > B$  였다면 만기 시점에서 원금과 이자를 수취하게 되겠지만,  $S_t \leq B$  인 경우가 한번이라도 존재하였고 만기일  $S_T \leq L_{t_M}$  으로 마감되었다면,  $M(1 - S_T)$  만큼의 원금 손실이 발생하게 된다. 즉 식 (8)과 같이 만기 시점의 현금흐름은 발행 후 만기까지  $S_t$  가  $B$  이하로 하락한 적이 있었느냐와 만기 시점의  $S_T$  에 의해 결정된다<sup>5)</sup>.

4) 일반적으로  $L_{t_{i+1}} \leq L_{t_i} \leq 1$  의 형태로  $L_{t_i}$  는 decreasing function이며,  $S_t$  가 하락하여도 차기 조기상환 가능성이 다소 높아지도록 설계 되어있는 구조이다. 또한  $B \leq L_{t_M}$  의 형태를 지닌다.

5) FDM으로 평가할 경우 Barrier 옵션과 같은 형태이므로 grafting 방법을 이용하여 평가하게 된다(Duffy, 2006).

$$V^D(S_T, T) = \begin{cases} \text{case 1. } S_i > \mathbf{B} (0 \leq t \leq T) \rightarrow \begin{cases} N + C_{t_M}, S_T > \mathbf{B} \\ NS_T \quad \text{else} \end{cases} \\ \text{case 2. } S_i \leq \mathbf{B} (0 \leq t \leq T) \rightarrow \begin{cases} N + C_{t_M}, S_T > L_{t_M} \\ NS_T \quad \text{else} \end{cases} \end{cases} \quad (8)$$

$V^D(S_i, t)$ 는  $V^D(S_T, T)$ 를 backwardation하여 계산하고, 각 조기상환 일자인  $t_i$ 시점에서 식 (9)과 같이 조기상환 가치를 변경한다.

$$V^*(S_i, t_i) = \begin{cases} N + C_{t_i}, & P_{t_i} \geq L_{t_i} \\ V^D(S_i, t_i), & \text{else} \end{cases} \quad (9)$$

그리고 식 (6)과 같이  $V^D(S_i, t_i) = V^*(S_i, t_i)$ 로 변경하고, 이를 다시 backwardation 하면서  $V^D(S_i, t)$ 를 계산하게 된다. 하지만 이 방법론으로는 조기상환 가능성이 확정적인 시점  $t$ 에서  $NPV^D(S_i, t, R^D(t, T))$  값과 실제 상황이 되어 인식되는  $NPV^D(S_i, t_i, R^D(t_i, T))$  불연속성이 생길 수 있다. 식 (1)을 이용하여 조기상환이 근접해질 경우 부채의 가치는 식 (10)과 같다.

$$\begin{aligned} NPV^D(S_{t_i - \epsilon}, t_{i - \epsilon}, R^D(t_{i - \epsilon}, T)) &\approx V^D(S_{t_i - \epsilon}, t_{i - \epsilon}, R^D(t_i, T)) + R^D(t_i, T) \\ &\approx N + C_{t_i} + R^D(t_i, T) \end{aligned} \quad (10)$$

하지만 식 (9)에서 확인할 수 있듯이, 실제 고객에게 지불하는  $N + C_{t_i}$ 와는  $R^D(t_i, T)$  만큼의 차이가 발생하게 된다. 즉, 이론적인 평가 가격과 괴리가 발생하는 것이다. 물론 보수적인 부채 평가를 하였기 때문에, 발행자는 조기상환 확정 시  $R^D(t_i, T)$  수준의 추가 수익이 향유할 수 있다. 하지만 델타를 계산할 때 이용되는  $V^D(S_i, t)$ 는  $R^D(t_i, T)$ 를 고려하지 않았기 때문에 보다 큰 델타를 계산<sup>6)</sup>하게 되고, 경우에 따라서  $NPV^D(S_i, t, R^D(t, T))$ 의 변화를 정확히 설명하지 못하게 된다. 또한 pin risk 발생 시 조기상환 여부에 따라  $R^D(t_i, T)$ 에 해당하는 손익의 불연속성이 존재하며, 특히 계산된 델타는 과도한 레버리지를 요구하기에 조기상환이 실패하는 경우 운용 손실이 증가할 개연성이 있다.

6) Step down 상품은  $L_i$ 가 높아져야 조기상환이 이루어지며, 이때 고객에게 쿠폰은 지불하기 위하여 기초자산을 부채의 델타만큼 매수하게 된다. 따라서 부채 평가 시  $V^D(S_i, T)$ 는 실제 고객에게 지불하는  $P + C_{t_i}$ 만을 고려하고, 이연을 통해 인식되는  $R^D(t_i, T)$ 는 고려하지 못한다. 따라서 발행사의 실제 손익 대비  $R^D(t_i, T)$ 만큼 공격적인 델타를 계산하게 되고, 그만큼의 기초자산을 추가로 매수하는 효과를 지니게 된다.

### 1.3 IDRR 이용 시 step down 구조 상품 조기상환일 가치평가

IDRR은 조기상환 될 때 0으로 수렴되는  $R(t, T)$  특성을 이론가 평가할 때 반영하는 방식이다. 단,  $R(T, T) = 0$ 이므로 IDRR을 적용하더라도 만기 시점에서의 가치는 식 (8)과 동일하게  $V^F(S_T, T, 0) = V^D(S_T, T)$ 이다. 하지만 조기상환 가치를 반영하는 식 (9)는 식 (11)과 같이 잔존 이연수익이 인식될 수 있도록 변하게 된다.

$$V^*(S_i, t_i, R^I(t, T)) = \begin{cases} N + C_i - R^I(t_i, T), & S_i \geq L_i \\ V^F(S_i, t_i, R^I(t, T)), & \text{else} \end{cases} \quad (11)$$

그리고 이전 조기상환을 처리하는 것과 같이 조기상환이 되지 않는 경우와 조기상환된 경우를 구분하여 업데이트한다. 이때 차이점은 조기상환이 되는 경우 고객에 지불하는 현금흐름은 물론 잔존하는 이연수익이 한 번에 인식하도록 변경한 것이다. 그리고 이렇게 변경된 이론가격을 이용하여 현재시점  $t$ 에서의 가치  $V^F(S_i, t)$ 를 계산하게 된다. 그리고 마지막으로 식 (12)과 같이  $R^I(t, T)$ 를 보정하여 이론 가격  $V^I(S_i, t, R^I(t, T))$ 을 계산하게 된다.

$$V^I(S_i, t, R^I(t, T)) = V^F(S_i, t, R^I(t, T)) + R^I(t, T) \quad (12)$$

따라서 IDRR로 평가하면 식 (10)과 같은 DDRR의 불연속적인 가격 변화 문제점을 해결할 수 있다. 조기상환 가능성이 확정적일 경우라도 식 (4)를 통해 계산된 IDRR상의 부채 가치는 식 (13)과 같이 이론 평가 및 고객에 지불하는 금액과  $NPV^D(S_i, t, R^D(t, T))$  사이의 괴리가 사라지게 된다. 또한  $V^I(S_i, t, R^I(t, T))$  자체에서  $R^I(t, T)$ 를 고려하므로 디레버리지 된 델타를 계산할 수 있고, 이를 이용하여  $NPV^D(S_i, t, R^D(t, T))$ 의 변화를 보다 안정적으로 예상할 수 있게 된다.

$$NPV^I(S_i - \epsilon, t_i - \epsilon, R^I(t_i - \epsilon, T)) \approx [N + C_i - R^I(t_i, T)] + R^I(t_i, T) = N + C_i \quad (13)$$

## 2. IDRR의 이연 방식 설정

### 2.1 이연수익 $R(t, T)$ 에 대한 가정

본 논문에서는 일정 수준의  $PL_0$  외에는 상품 만기까지 선형적인 형태로 0에 수렴하는

$R(t, T)$ 를 가정한다.

$$R(t, T) = R(0, T) \left(1 - \frac{t}{T}\right) \quad (14)$$

## 2.2 이연수익 $R^I(0, T)$ 에 대한 가정

적절한 수준의  $PL_0$ 을 도출하는  $R^D(t, T)$ 는 식 (3)에 의하여 결정된다. 하지만  $NPV^I(S_0, 0, R^I(0, T))$ 에서는 이  $PL_0$ 을 계산할 수 있는  $R^I(0, T)$ 를 역산해야 한다.<sup>7)</sup> 이때  $R^I(0, T)$ 는  $V^I(S_0, 0, R^I(0, T))$ 와 monotonic increasing 관계이므로

$$R^I(0, T) = \arg \min_{R^I(0, T)} |PL_0 - (CF_0 - V^I(S_0, 0, R^I(0, T)))| \quad (15)$$

의 과정을 통하여  $R^I(0, T)$ 를 구할 수 있다.

# Ⅲ. IDRR과 DDDR의 안정성 비교

## 1. ELS 상품 구조, 평가 model 및 평가 data

### 1.1 ELS 상품 구조(Stepdown with barrier)

본 chapter에서는 <표 1>에서 소개할 step down ELS 상품을 이용하여 DDDR과 IDRR의 차이를 분석해 본다. <표 1>은 2022년 1월 3일 발행한 만기 3년, 5회에 걸쳐 조기상환이 가능한 구조를 소개한다. 조기상환 시점  $t_i$ 에서  $S_{t_i} > L_{t_i}$ 를 만족한다면, 고객은  $N(1 + C_{t_i})$ 을 지급받고 계약이 완료되게 된다. 반면 상환 없이 만기까지 계약이 유지된다면,  $S_{t_i} \leq B$  여부에 따라서 원금 손실 여부가 정해지게 된다.

7)  $PL_0 = CF_0 - V^I(S_0, 0, R^I(0, T))$ 를 만족할 수 있는  $R^I(0, T)$ 를 찾는 것으로 생각할 수 있다. 그리고  $PL_0$ 을  $V^D(0, T)$ 의 일정 비율로 인식하는 규정을 정하고 이용한다면,  $R^I(0, T)$ 의 조절을 통하여  $PL_0$ 을 원하는 데로 만들어 낸다는 회계적 논란을 피할 수 있다.

<표 1> Step down ELS 상품 구조(Knock in barrier 상품).

상품 구조 개략				
상품 발행일	상품 만기일	조기상환 주기	Notional	Position
2022년 1월 3일	2025년 1월 2일	6개월	10,000,000,000	Sell
기초 자산 정보 (Worst Performer)				
기초자산 A	A 기준가	기초자산 B	B 기준가	
KOSPI2	395.51	SPX	4796.56	
조기상환 정보				
상환회차	날짜	조기상환 조건 ( $L_t$ )	Coupon ( $C_t$ )	
1	2022년 6월 30일	90%	3%	
2	2022년 12월 30일	90%	6%	
3	2023년 7월 02일	85%	9%	
4	2023년 12월 30일	85%	12%	
5	2024년 7월 02일	80%	15%	
Knock in Barrier의 trigger 조건				
Worst performer가 Barrier 55% 이하로 하락 하는 경우				
만기 조건				
Barrier Hit 여부	A. $P_{t_M}$ level	Coupon ( $C_t$ )	A. $P_{t_M}$ level	B. 상환액
No	55% 초과	18%	55% 이하	$P_{t_M}$
YES	75% 초과	18%	75% 이하	$P_{t_M}$

### 1.2 상품평가 방법론

본 상품은 lognormal model하에서 Andreasen Huge model로 계산된 local volatility를 이용하여 평가하였다(Andreasen et al., 2010). 내재변동성은 Markit으로부터 제공받은 data를 이용하였으며, 행사가격과 만기를 고정하여 평가하기 위해 2D linear interpolation을 수행하였다. 또한 선물과 배당 정보를 이용하여 drift term을 계산하였고, 평가의 안정성을 위하여 자산 간의 상관관계는 EWMA를 이용하여 평가하였다(김민재, 2017). FDM을 이용하였으며, grid는  $0 \leq S_{i_0} \leq 2$ 을 기준으로 200개의 node로 나누었다.

### 1.3 시장데이터

ELS 발행일인 2022년 1월 3일의 기초자산 선물 가격은 <표 2>와 같다. 주식 시장은 이자율, 외환, 상품 시장과는 달리 커브 변동이 거의 없다. 따라서 ELS 상품의 현금흐름을 결정하는 KOSPI2와 SPX는 근월물 지수만으로도 대부분 델타 헷지가 가능하다(김민재, 2017).



&lt;표 2&gt; KOSPI2와 SPX의 선물 가격.

만기	기초자산 선물 가격		근원물 대비 선물 가격	
	KOSPI2	SPX	KOSPI2	SPX
6M	395.63	4796.56	100.0%	99.6%
12M	392.63	4779.321	99.2%	99.5%
18M	394.15	4774.27	99.7%	99.6%
24M	390.91	4788.81	98.8%	99.8%
30M	393.13	4803.37	99.4%	100.1%
36M	394.51	4820.08	99.7%	100.5%

상품 평가에 사용된 행사가격과 만기는 <표 3>과 <표 4>와 같이 고정되어 있으며, <표 3>은 KOSPI2, <표 4>는 SPX의 상품 발행일의 내재변동성을 보여준다. 실제로 Markit은 고시 당일 spot 가격의 moneyness를 기준으로 행사가격, 그리고 고정된 일자를 만기일로 내재변동성을 고시한다. 하지만 내재변동성에 이용되는 행사가격 및 잔존 만기의 변화가 실제 ELS 가격에 영향을 미칠 수 있으므로 아래와 같이 보간하여 데이터를 기준으로 시계열을 업데이트하였다. 그리고 이렇게 보간 된 내재변동성을 기준으로 이론가 및 그릭을 계산하였다(김민재, 2018).

&lt;표 3&gt; KOSPI2의 내재변동성

	KOSPI 내재변동성								
	150	200	250	300	350	400	450	500	550
3M	45%	44%	36%	28%	21%	16%	15%	17%	20%
6M	40%	40%	33%	27%	22%	17%	15%	16%	17%
1Y	35%	34%	29%	25%	21%	18%	16%	16%	17%
18M	31%	31%	27%	23%	20%	18%	17%	16%	17%
2Y	29%	29%	25%	22%	20%	18%	17%	17%	17%
3Y	26%	26%	23%	21%	19%	18%	17%	17%	17%

&lt;표 4&gt; SPX의 내재변동성

	SPX 내재변동성								
	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000	5500	6000
3M	59%	57%	47%	37%	20%	16%	13%	13%	16%
6M	49%	48%	40%	33%	21%	17%	15%	13%	14%
1Y	42%	40%	35%	30%	22%	18%	18%	15%	14%
18M	38%	37%	33%	29%	22%	18%	19%	16%	15%
2Y	35%	35%	31%	28%	22%	18%	19%	17%	15%
3Y	33%	32%	29%	26%	22%	18%	20%	18%	17%

## 2. DRR과 IDRR에 대한 시계열 분석

### 2.1 이연수익 $R^D(0, T)$ 와 $R^I(0, T)$ 설정

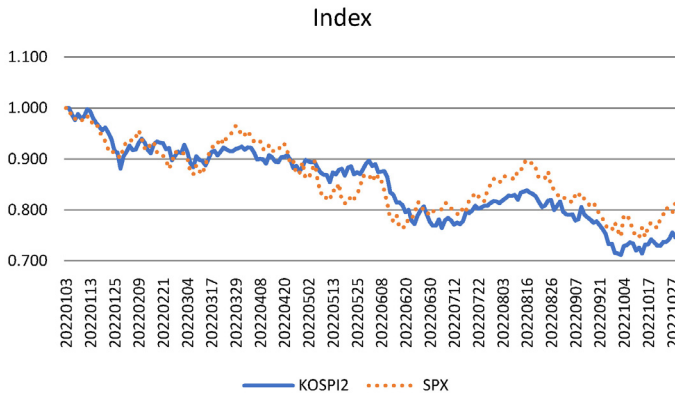
발행일  $PL_0$ 에 해당하는  $NPV^D$ 와  $NPV^I$ 는 <표 5>와 같이 동일한 수치로 설정하였다. 본 논문에서는 테스트를 위하여  $V^D$ 를 계산한 이후 대략적인  $R^I(0, T)$ 을 선정하였고, 여기서 산출된  $NPV^I$  값을 이용하여  $R^D(0, T)$ 를 선택하였다.

<표 5>  $PL_0$  수익 산출 및 이연수익  $R^I(0, T)$  설정.

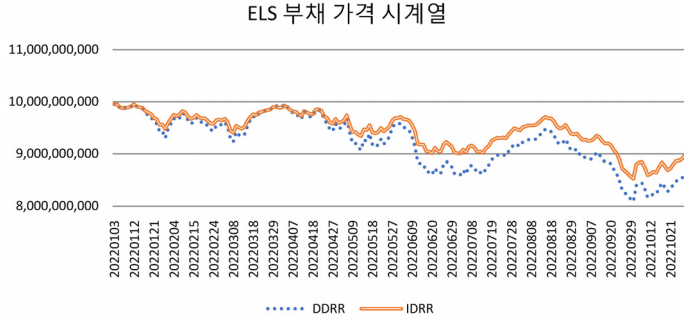
발행일 이론가 및 평가가격 (원)			
$V^D(S_0, 0, R^D(0, T))$	9,641,454,299	$V^I(S_0, 0, R^I(0, T))$	9,951,835,014
$R^D(0, T)$	310,380,715	$R^I(0, T)$	1,000,000,000
$NPV^D(S_0, 0, R^D(0, T))$	9,951,835,014	$NPV^I(S_0, 0, R^I(0, T))$	9,951,835,014
$PL_0$	48,164,986		

### 2.2 DRR과 IDRR에 따른 ELS 상품 평가 가격 및 그릭스 변화 시계열 비교

2022년 1월 3일부터 10월까지의 시계열을 분석해 보도록 한다. [그림 1]은 각 기초자산별  $S^i$ 로 KOSPI2(파란 점선) 근월물과 SPX(주황 테두리선) 근월물을 나타낸다. 모든 지수가 기준가 대비 하향하여 조기상환 조건을 만족하지 못하였다. 다음으로 [그림 2]는  $NPV^D$ (주황 테두리선)와  $NPV^I$ (파란점선)의 시계열이다.  $NPV^D$ 와  $NPV^I$ 의 전체적 추세에는 큰 차이가 없다. 하지만  $NPV^D$ 이  $NPV^I$ 에 비하여 1차 조기상환에 실패한 6월말 이후 더욱 빨리 가치 절하되는 것을 확인할 수 있다.



[그림 1] 2022년 1월 3일 이후 KOSPI2와 SPX 지수의  $P_t$  시계열



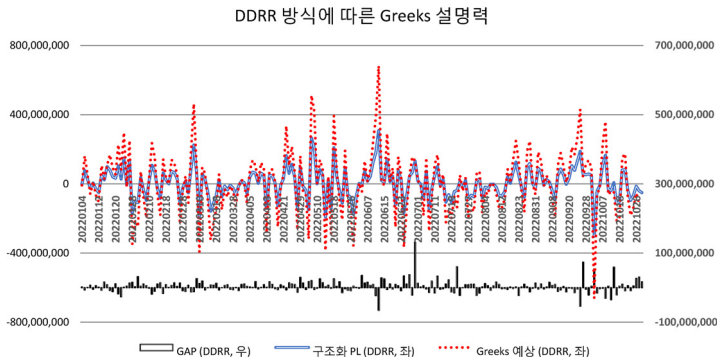
[그림 2] 2022년 1월 3일 이후 DDRR과 IDRR을 이용한 ELS 부채 가격

다음으로 ELS 상품에서 산출된 그리스가 얼마나 정밀하게 NPV 변화를 분석할 수 있는지 알아보도록 한다. 이는 식 (16)과 같이 예상된 PL을 이용한다.

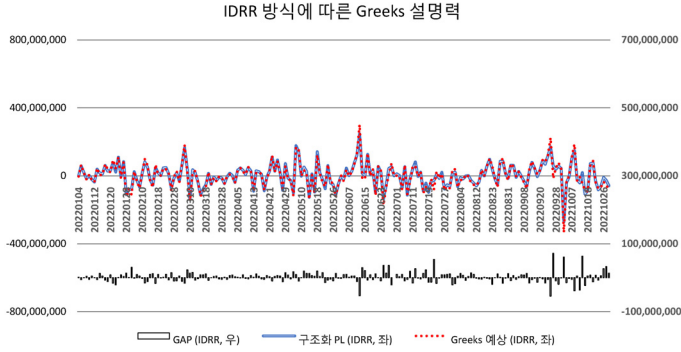
$$d\Pi(t+\tau) = \sum_{i=0}^N \Delta_i(t) [M_i(t+\tau) - M_i(t)] \quad (16)$$

식 (16)에서  $\Delta_i(t)$ 는 임의의  $t$ 일에서 계산된  $i$ 번째 그리스로 key rate 델타, 베가 및 쉐타에 해당한다. 그리고  $M_i(t)$ 는  $t$ 일  $i$ 번째 시장 데이터를 의미한다. 즉 식 (16)은 선형적인 속성을 지니는 그리스만을 헛지하였다고 가정하였을 때 성과를 의미한다.

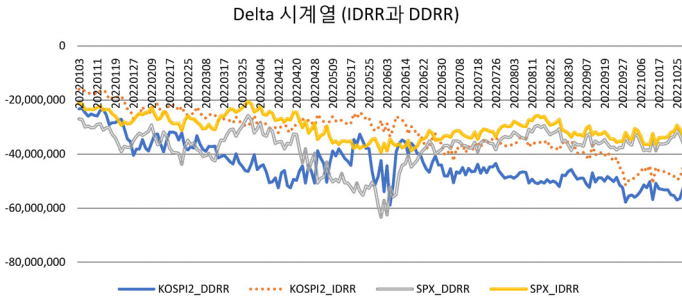
[그림 3]은 DDRR 방식을 이용하였을 때의 그리크 설명력이고, [그림 4]는 IDRR 방식을 이용하였을 때의 그리크 설명력이다. 두 경우 모두 파란색 테두리선은 ELS 상품의 가치 변화(PL), 빨간 점선은 식 (16)에서 계산된 ELS 상품의 NPV 변화 예상치이다. 그리고 하단의 막대는 식 (16)으로 설명되지 않는 curvature 손익(비선형적인 속성을 지니는 요소로



[그림 3] ELS 상품에 대한 DDRR을 방식의 greeks 설명력



[그림 4] ELS 상품에 대한 IDRR을 방식의 greeks 설명력



[그림 5] KOSPI2와 SPX의 델타 시계열 비교 (IDRR과 DDRR).

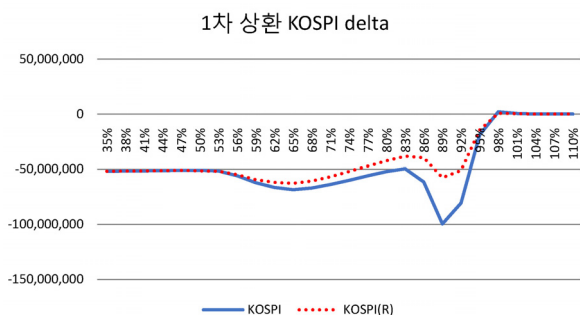
인한 손익)을 의미한다.  $NPV^I$ 와  $NPV^D$ 의 움직임은 큰 변화 없었다. 하지만 [그림 3]에서와 같이 DDRR 그리스로 예상되는 손익 변동은 [그림 4]의 IDRR 경우보다 크게 틀어지는 경우가 종종 발생한다.

DDRR의 그리스 설명력이 IDRR에 비하여 불안정적인 이유는 [그림5]에서 찾을 수 있다. [그림5]는 DDRR과 IDRR의 방법으로부터 산출한 델타의 시계열이다. 파란색 실선은 DDRR을 이용하여 계산된 KOSPI2의 델타, 회색 테두리선은 SPX의 델타이다. 그리고 주황색 점선은 IDRR을 이용하여 계산된 KOSPI2의 델타, 아래가 두꺼운 노란색 테두리선은 SPX의 델타이다. [그림 5]에서와 같이 step down 상품을 발행하게 되면 발행자 입장에서는 기초자산인 KOSPI2와 SPX 숏 포지션(-델타)이 생겨나고, 이에 맞추어 KOSPI2와 SPX를 매수하여 복을 운용하게 된다. 그런데 첫 조기상환 일자에 해당하는 6월달에 들어서면 DDRR의 그리스가 IDRR에 비하여 상대적으로 불안정한 것을 확인할 수 있다. 이는 IDRR은 조기상환 평가 자체에 식 (11)에서와 같이  $R^I(t, T)$ 가 반영이 되고, 이로인하여 pin risk<sup>8)</sup>의 영향도가 상대적으로 smoothing 되어 줄어들기 때문이다. 이런 요인으로 [그림 4]와 같이

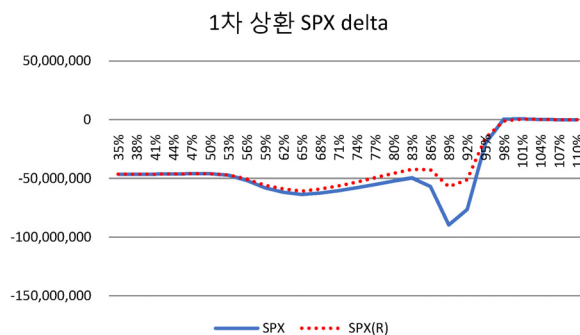
IDRR의 그릭 설명력이 향상되는 것을 유추할 수 있다. 또한 델타의 절대적인 크기 역시 IDRR이 적기에, IDRR을 이용하는 경우 자연스럽게 디레버리징된 상태에서 ELS를 헷지 운용하게 된다는 차이가 발생한다.

### 2.3 1차, 2차 조기상환 시점에서 델타 프로파일 분석

다음으로 첫 번째, 두 번째 조기상환일 근처에서 델타 프로파일을 살펴보도록 한다. 1차와 2차에 해당하는  $L_{t_1}$ 와  $L_{t_2}$ 는 모두 90%이며, 상품 전 구간에서  $B$ 는 55%이다. 발행일인 2022년 1월 3일 데이터를 이용하였고, KOSPI2와 SPX의  $s_t$ 가 35%에서 110%까지 범위일 때 델타를 계산하였다. [그림 6]은 1차 조기 상환일에 인접한 2022년 6월 24일 계산한 KOSPI2의 델타 프로파일<sup>9)</sup>이다. 파란 실선은 DRR에서 산출된  $s_t$ 별 KOSPI2의 델타, 빨간 점선은



[그림 6] 1차 조기상환 시점에서 KOSPI2의 델타 프로파일 비교(IDRR과 DRR)

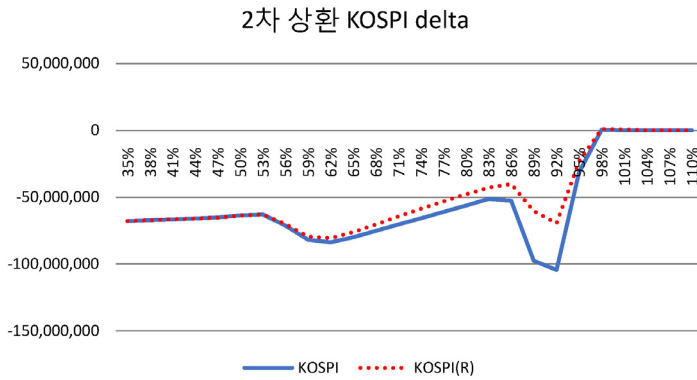


[그림 7] 1차 조기상환 시점에서 SPX의 델타 프로파일 비교(IDRR과 DRR)

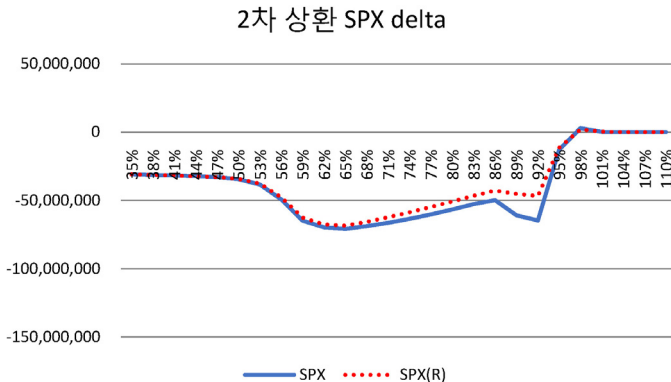
8) Digital 형태의 payoff로 인하여 numerical error 및 운용의 어려움이 있는 구간을 의미한다.  
 9) [그림 1]에서 보여 주는 것처럼 KOSPI2와 SPX가 비슷하게 움직이므로, KOSPI2와 SPX의  $p_t$ 는 동일하다고 가정하고 각각의 델타를 계산하였다. 또한 델타는 Fairing gamma를 이용하여 numerical error를 축소하였다(Kang et al., 2012).

IDRR로부터 산출된 KOSPI2의 델타이다. DDRR로부터 산출된 델타가 IDRR에 비해  $L_{t_1}$  부근에서 변동이 심한 것을 확인할 수 있다. 이는 조기상환이 이루어지느냐 아니냐에 따라 ELS의 가치가 불연속적으로 변화하는데, 상환 시  $R(t_i, T)$ 가 사라지는 효과가 이론가에 반영된 IDRR의 경우 불연속성이 완화되었기 때문이다. [그림 7]은 1차 조기상환 시점에서의 SPX의 델타 프로파일로 KOSPI2와 유사한 결과를 보인다.

다음으로 [그림 8]과 [그림 9]는 각각 2차 조기 상환일이 인접한 2022년 12월 26일 KOSPI2와 SPX의 델타 프로파일이다. 비록  $C_{t_1} < C_{t_2}$ 이므로 1차 상환에서보다 pin risk가 더 크기는 하지만, [그림 6]과 [그림 7]는 유사한 모습을 보인다. 단, 잔존 만기가 짧아짐에 따라 만기 payoff의 불연속성이 더 크게 반영되어  $s_t$ 가  $B$  근처인 구간에서 델타의 변화가 커짐을 확인할 수 있다. 그리고  $L_{t_2}$  근방에서 델타의 변동 역시 IDRR이 상대적으로 안정적임을 확인할 수 있다.



[그림 8] 2차 조기상환 시점에서 KOSPI2의 델타 프로파일 비교(IDRR과 DDRR)



[그림 9] 2차 조기상환 시점에서 SPX의 델타 프로파일 비교(IDRR과 DDRR)

## IV. 결론 및 시사점

본 논문에서는 이연수익 인식 방법에 따른 step down 상품 운용의 복 안정성에 대하여 분석해 보았다. 조기상환이 있는 상품의 경우에는 이연수익을 따로 관리하는 DDDR 방법을 이용하는 것보다 이연수익을 이론가 평가 자체에 반영하는 IDRR 방법을 이용하는 것이 안정적인 복운용을 하는데 도움이 될 수 있음을 확인하였다. 이는 IDRR 방법론은 DDDR에 비하여 디레버리지 된 운용 형태이기에 델타의 크기 및 변화량이 적기 때문이다. 특히 조기상환 시점이나 barrier 근처에서도 포지션 변경을 급격히 해야 하는 감마 리스크가 적고, 이에 따른 헤지 비용이 적기에 복 운용자의 부담을 줄여 줄 수 있음을 확인하였다.

또한 조기상환이 이루어지지 않는 경우 숏 감마 영역으로 진입하게 되며, 기초자산의 추가 하락이 있는 경우 발행사는 델타 방어를 위하여 기초자산을 매도하게 된다. 이는 negative feedback 형태로 기초자산의 추가 하락을 야기하고, 투자자의 원금 손실 가능성을 높이는 위험이 존재한다. 따라서 IDRR과 같은 레버리지 축소는 투자자의 원금 손실 방어에도 도움을 줄 수 있을 것으로 예상된다.

물론 현업에서 주로 이용하고 있는 DDDR은 첫 번째 조기 상환일에 상환을 성공하게 된다면 발행 수익을 한 번에 인식할 수 있게 한다. 하지만 조기상환에 실패하면 실제 상품 손익보다 레버리지 된 포지션을 운용하였던 것이므로, 헷지 포지션 상의 손실이 누적되는 효과를 지니게 된다. 따라서 ELS 발행을 통하여 수익을 내야 하는 발행사의 입장에서는 식 (16)에서와 같이 DDDR과 IDRR을 조합하여, 일정 수준의 상환 수익을 취하면서도 상환 실패 시 리스크를 관리할 수 있는 방법을 고려하는 것이 리스크 관리상 도움이 될 것으로 판단한다.

$$NPV^f(S_t, t, R^f(t, T)) = V^f(S_t, t, R^f(t, T)) + R^{D^*}(t, T) \quad (16)$$

## 참 고 문 헌

- 김민재 (2017), “안정적인 hedge 방법론에 대한 고찰,” 금융공학산학연구, 제3권, 15-47.
- 김민재 (2018), “Latent greeks의 필요성 및 영향도 분석,” 금융공학산학연구, 제4권, 59-78.
- 김민재 (2020), “Lognormal v.s. Normal 변동성: 파생상품 Mark to Market 변화요인 분석,” 금융공학연구, 제2권, 153-184.
- 임현철 · 배형욱 (2019), “박관 스플라인 함수를 이용한 내재변동성 곡면 생성 방법 연구,” 금융공학연구, 제18권 제4호, 1-36.
- Andersen, L. and V. Piterbarg (2010), “Interest Rate Modeling,” *Atlantic Financial Press*.
- Andreasen, J. and B. Huge (2011), “Volatility interpolation,” *Risk*, 24, 76-79.
- Black, F. and M. Scholes (1973), “The Pricing of Options and Liabilities,” *Journal Political Economy*, 81, 637-695.
- Castagna, A. (2012), “On the Dynamic Replication of the DVA: Do Banks Hedge their Debit Value Adjustment or their Destroying Value Adjustment?,” *iason*.
- Cristian Homescu (2011), “Implied Volatility Surface: construction methodologies and characteristics,” *SSNR Electronic Journal*, 10.2139/ssrn.1882567.
- Derman, E. and I. Kani (1994), “The Volatility Smile and Its Implied Tree,” *Risk*, 7, 32-39.
- Duffy, D. J. (2006), “Finite difference methods in financial engineering,” *WILEY*.
- Duffy, D. J. (2006), “Introduction to C++ for financial engineering,” *WILEY*.
- Dupire, B. (1994), “Pricing with a smile,” *Risk*, 7, 18-20.
- Gatheral, J. (2006), *The Volatility Surface*, John Wiley & Sons, Inc.
- Hagan, P. S., D. Kumar, A. S. Lesniewski, and D. E. Woodward (2002), “Managing Smile Risk,” *WILMOTT Magazine*, 84-108.
- Heston, S. (1993), “A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Application to Bond and Currency Option,” *Review of Financial Studies*, 6, 327-343.
- Kang, W., K. Kim, and H. Shin (2012), “Fairing the Gamma: An Engineering Approach to Sensitivity Estimation,” *IIE Transactions*, 46, 4.
- Kim, M., C. Kim, and I. Hwang (2017), “The Zero Lower Bound and Economic Determinants of the Volatility Surface in the Interest Cap Markets,” *The Journal of Futures Market*, 37(6), 578-598.
- Schwartz, E. (1997), “The stochastic behavior of commodity prices: Implications for valuation and hedging,” *Journal of Derivatives*, 5(2), 923-973.



Abstract

## Constructing the Robust Book for Step Down Product by Introducing the Implied Deferred Revenue Recognition

*Minjae Kim*\*

In this paper, we compare risk amount (such as stability of mark to market, explaining power of the greeks, and delta profile near the pin risk) of the step down product, the most famous ELS(Equity Linked Security), generated from the different approach on how to recognize the deferred profit. The traditional DDDR, Divided Deferred Revenue Recognition, which separates the theoretical value and revenue from issuing, is reviewed, and IDRR, Implied Deferred Revenue Recognition, which inserts revenue from issuing as the input of theoretical value, are introduced. The DDDR leads to higher leverage since this value is constructed without considering revenue recognition at early termination. Thus the stability at pin risk area is deteriorated. In contrary, IDRR can enhance greeks stability, and construct less leveraged and robust hedge position especially at pin risk, as theoretical valuation includes the effect of revenue recognition at early termination.

Key words: Margin from the issuing, Deferred Revenue recognition, Step down product,  
Pin Risk

---

\* General Manager, NHIS, FICC Derivatives Trading Department, +82-2-750-5752,  
E-mail: MinjaeKim@nhqv.com