[객관식]

1. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(3)=-1$이고, $\lim\limits_{x \to 3}\dfrac{9f(x)-x^2f(3)}{x-3}=3$일 때, $f(3)$의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1

④ 1 ⑤ 2

2. 함수 $f(x)=ax^3+bx^2$이 다음 두 조건을 만족할 때, 상수 $a+b$의 값은?

(가) $\lim\limits_{h \to 0}\dfrac{f(2+3h)-f(2)}{h}=9$
(나) $\lim\limits_{h \to 0}\dfrac{f(1)-f(1-h)}{h}=-\dfrac{3}{2}$

① $-\dfrac{5}{4}$ ② -1 ③ $-\dfrac{3}{4}$

④ $-\dfrac{1}{2}$ ⑤ $-\dfrac{1}{4}$

3. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=1$, $f'(0)=2$이고, $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{10}(2x+1)^n\{f(x)\}^{10}$일 때, $g'(0)$의 값은?

① 300 ② 305 ③ 310

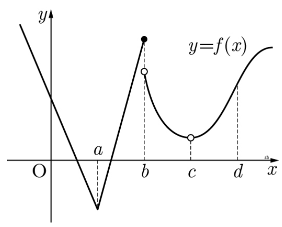
④ 315 ⑤ 320

4. 다항식 $x^{10}+ax^5+b$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $5x-5$이다. 이때 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9

④ 10 ⑤ 11

5. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 구간 $(0, d)$에서 함수 $f(x)$가 불연속인 점은 m개, 미분가능하지 않은 점은 n개다. 이때 $m+n$의 값은?



① 2 ② 3 ③ 4

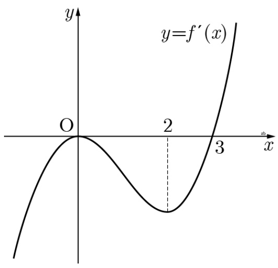
④ 5 ⑤ 6

6. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기는?

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이다.
> (나) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 2)$에서의 접선의 기울기는 28이다.

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

7. 사차함수 $f(x)$에 대하여 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 다음 그림과 같고 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=-8$일 때, $f(x)$의 최솟값은?



① $-\dfrac{7}{2}$ ② $-\dfrac{9}{2}$
③ $-\dfrac{11}{2}$ ④ $-\dfrac{13}{2}$
⑤ $-\dfrac{15}{2}$

8. 함수 $f(x)=x^2+1$, $g(x)=2x-1$에 대하여 $\int h(x)dx=f(x)g(x)$를 만족시키는 함수 $h(x)$가 있다. $h'(2)$의 값은?

① 20 ② 22 ③ 24
④ 26 ⑤ 28

9. 연속함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=\begin{cases} 1 & (x<-1) \\ 2x & (-1<x<1) \\ -1 & (x>1) \end{cases}$$

이다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점을 지날 때, 방정식 $5f(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

10. 두 곡선 $y=x^4-x^3$, $y=-x^4+x$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{3}{20}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{7}{20}$

11. 함수 $y=x^3+2$의 그래프와 직선 $y=kx$로 둘러싸인 도형의 개수를 $G(k)$라 할 때, $\sum_{k=1}^{7} G(k)$의 값은?

① 7 ② 9 ③ 11

④ 12 ⑤ 13

12. 함수 $f(x)=x^3+x-8$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 $y=-x-8$으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 54 ② 56 ③ 58

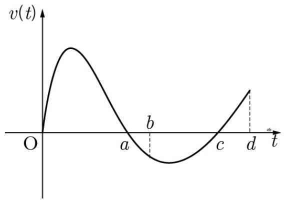
④ 60 ⑤ 62

13. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q가 출발한 지 t초 후의 속도를 각각 $V_P(t)$, $V_Q(t)$라 할 때, $V_P(t)=2t$, $V_Q(t)=-3$이다. 점 P는 원점, 점 Q는 좌표가 28인 점에서 출발하고, 출발한 지 a초 후에 두 점 P, Q가 만난다. 이 때, 시각 $t=0$에서 시각 $t=a$까지 두 점 P, Q가 움직인 거리를 각각 m, n이라 하면 $|m-n|$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

14. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(0 \le t \le d)$에서의 속도 $v(t)$의 그래프가 다음과 같다.



$\int_0^a |v(t)|dt = \int_a^d |v(t)|dt$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 모두 고른 것은? (단, $0 < a < b < c < d$)

| 보기 |

ㄱ. 점 P는 출발하고 나서 원점을 다시 지난다.

ㄴ. $\int_0^c v(t)dt = \int_c^d v(t)dt$

ㄷ. $\int_0^b v(t)dt = \int_b^d |v(t)|dt$

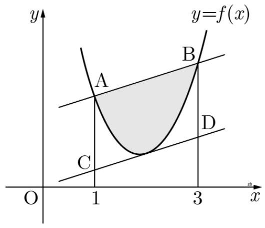
① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 함수 $f(x) = |x|$ 와 양수 t 에 대하여 닫힌구간 $[-4t,\, t^2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값을 $g(t)$ 라 할 때, $\int_3^5 g(t)dt$ 의 값은?

① $\frac{103}{3}$ ② $\frac{104}{3}$ ③ 35
④ $\frac{106}{3}$ ⑤ $\frac{107}{3}$

16. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = f(x)$의 그래프 위에 두 점 $A(1, f(1))$, $B(3, f(3))$이 있다. 이 곡선에 접하고 직선 AB와 평행한 직선이 두 직선 $x = 1$, $x = 3$과 만나는 점을 각각 C, D라고 하자. 평행사변형 $ACDB$의 넓이가 8일 때, 곡선 $y = f(x)$와 직선 AB로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\frac{q}{p}$이다. 이때, $p + q$의 값은?

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



① 17 ② 19 ③ 21
④ 23 ⑤ 25

[주관식]

17. 함수 $f(x) = -2x^3 + ax^2 + bx + 1$이 $-3 \le x \le 6$에서 증가하고, $x \le -3$, $x \ge 6$에서 감소할 때, 상수 $a + b$의 값을 구하시오.

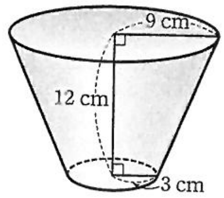
18. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+(a+6)x-8$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동하고 다시 y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하였더니 함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 되었다. 함수 $f(x)-g(x)$ 가 극값을 갖도록 하는 자연수 a 의 최솟값을 구하시오.

19. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=\int_x^{x+2}\{f(t)+2\}dt$가 다음 조건을 만족시킨다.

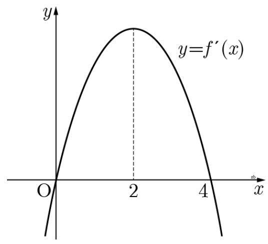
(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)=0$

$f'(0)\neq 0$일 때, $f(3)+g\left(\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오.

20. 오른쪽 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 각각 $9\,\text{cm}$, $3\,\text{cm}$이고 높이가 $12\,\text{cm}$인 원뿔대 모양의 그릇이 있다. 이 그릇에 수면의 높이가 매초 $\frac{1}{2}\,\text{cm}$씩 증가하도록 물을 부을 때, 수면의 높이가 그릇의 높이의 $\frac{1}{2}$이 되는 순간의 부피의 변화율을 구하시오. (단, 그릇의 두께는 무시한다.)



21. 삼차함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 다음 그림과 같고, 함수 $f(x)$는 극댓값 32, 극솟값 0을 가진다. 이 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.



정답 및 풀이

1. 정답 ②

$$\lim_{x\to3}\frac{9f(x)-x^2f(3)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{9f(x)-9f(3)+9f(3)-x^2f(3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\left\{9\cdot\frac{f(x)-f(3)}{x-3}-\frac{(x^2-9)f(3)}{x-3}\right\}$$
$$=9f'(3)-6f(3)=3$$

$f'(3)=-1$이므로 $f(3)=-2$

2. 정답 ①

(가)에서 $\lim_{h\to0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{h}=3\lim_{h\to0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{3h}=3f'(2)$

$\therefore\ f'(2)=3$

(나)에서 $\lim_{h\to0}\frac{f(1)-f(1-h)}{h}=f'(1)$

$\therefore\ f'(1)=-\frac{3}{2}$

$f'(x)=3ax^2+2bx$이므로

$f'(2)=12a+4b=3$ …… ㉠

$f'(1)=3a+2b=-\frac{3}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=1,\ b=-\frac{9}{4}$

$\therefore\ a+b=-\frac{5}{4}$

3. 정답 ③

$$g(x)=\sum_{n=1}^{10}(2x+1)^n\{f(x)\}^{10}$$
$$=\{(2x+1)+(2x+1)^2+\cdots+(2x+1)^{10}\}\{f(x)\}^{10}$$
$$g'(x)=\{2+4(2x+1)+\cdots+20(2x+1)^9\}\{f(x)\}^{10}$$
$$+10\{(2x+1)+(2x+1)^2+\cdots+(2x+1)^{10}\}\{f(x)\}^9f'(x)$$

이므로

$$g'(0)=(2+4+\cdots+20)\times1+10\times10\times2$$
$$=110+200$$
$$=310$$

4. 정답 ⑤

$x^{10}+ax^5+b=(x+1)^2Q(x)+5x-5$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$1-a+b=-10$

양변을 미분하면

$10x^9+5ax^4=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+5$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$-10+5a=5$

따라서 $a=3,\ b=-8$이므로

$a-b=11$

5. 정답 ④

$f(x)$가 불연속인 점 $x=b,\ x=c$의 2개

$f(x)$가 미분가능하지 않은 점 $x=a,\ x=b,\ x=c$의 3개

$\therefore\ m+n=5$

6. 정답 ①

최고차항의 계수가 1이고, (가)에 의해 우함수이므로

$f(x)=x^4+ax^2+b$라 하자.

$f(2)=2$이므로

$16+4a+b=2$

$f'(x)=4x^3+2ax$이고, 점 $(2,2)$에서의 접선의 기울기는 28이므로

$32+4a=28$

$\therefore\ a=-1,\ b=-10$

$f(x)=x^4-x^2-10$이고

$f'(x)=4x^3-2x$이므로

$f'(1)=2$

7. 정답 ③

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=-8$이므로 $f(2)=0,\ f'(2)=-8$

$y=f'(x)$의 그래프에 의해

$f'(x)=ax^2(x-3)$

$f'(2)=-4a=-8$

$\therefore\ a=2$

$f'(x)=2x^3-6x^2$이고

$f(x)=\frac{1}{2}x^4-2x^3+C$ (단, C는 적분상수)

$f(2)=8-16+C=0$

$\therefore\ C=8$

$f(x)=\frac{1}{2}x^4-2x^3+8$

$f(x)$의 최솟값은 $x=3$일 때이므로

$f(3)=\frac{81}{2}-54+8=-\frac{11}{2}$

8. 정답 ②

$$h(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$
$$=2x(2x-1)+(x^2+1)\times2$$
$$=6x^2-2x+2$$

$h'(x)=12x-2$

$\therefore\ h'(2)=22$

9. 정답 ④

$f'(x)=\begin{cases}1 & (x<-1)\\ 2x & (-1<x<1)\\ -1 & (x>1)\end{cases}$를 적분하면

$f(x)=\begin{cases}x+C_1 & (x<-1)\\ x^2+C_2 & (-1\le x<1)\\ -x+C_3 & (x\ge 1)\end{cases}$ (단, C_1, C_2, C_3는 적분상수)

$f(x)$는 원점을 지나므로 $C_2=0$

$f(x)$는 연속함수이므로

$\lim_{x\to -1-} f(x)=f(-1)$

$-1+C_1=1 \qquad \therefore\ C_1=2$

$\lim_{x\to 1+} f(x)=f(1)$

$-1+C_3=1 \qquad \therefore\ C_2=2$

따라서

$f(x)=\begin{cases}x+2 & (x<-1)\\ x^2 & (-1\le x<1)\\ -x+2 & (x\ge 1)\end{cases}$

이고 $5f(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

10. 정답 ⑤

$x^4-x^3=-x^4+x$

$2x^4-x^3-x=0$

$x(x-1)(2x^2+x+1)=0$이므로

두 곡선의 교점은 $x=0$, $x=1$

따라서 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_0^1(-2x^4+x^3+x)dx=\left[-\frac{2}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{7}{20}$

11. 정답 ②

둘러싸인 도형의 개수는 직선이 곡선과 접할 때 1개, 직선이 곡선을 뚫고 지나갈 때 2개다.

접선을 기준으로 개수가 바뀌므로 접선의 방정식을 구하자.

접점을 $(t,\ t^3+2)$라 하면 접선의 기울기는 $3t^2$이므로

접선의 방정식은 $y=3t^2(x-t)+t^3+2$

$(0,\ 0)$을 지나므로 $-2t^3=-2$, $t=1$

따라서 접선의 기울기가 3일 때 직선이 곡선과 접한다.

$\therefore\ \sum_{k=1}^{7}G(k)=0+0+1+2+2+2+2=9$

12. 정답 ②

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 $y=-x-8$으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$y=x$와 $y=f(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배와 $y=-x-8$과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 합하면 된다.

$y=x$와 $y=f(x)$의 교점을 구하면

$x^3+x-8=x$, $x^3=8 \qquad \therefore\ x=2$

$y=x$와 $y=f(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배는

$2\int_0^2\{x-(x^3+x-8)\}dx=2\int_0^2(-x^3+8)dx=24$

$y=-x-8$과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$8\times 8\times\frac{1}{2}=32$

$\therefore\ 24+32=56$

13. 정답 ④

$x_P(t)=t^2$, $x_Q(t)=-3t+28$

두 점이 만나는 시간을 구하면

$t^2=-3t+28$, $t^2+3t-28=0$

$(t-4)(t+7)=0 \qquad \therefore\ t=4$ ($\because\ t>0$)

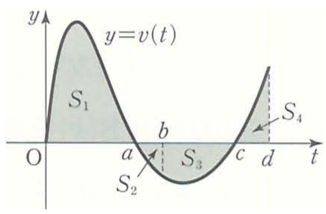
4초까지 움직인 거리를 각각 구하면

$m=\int_0^4 2tdt=\left[t^2\right]_0^4=16$

$n=\int_0^4 3dt=\left[3t\right]_0^4=12$

$\therefore\ |m-n|=4$

14. 정답 ④



오른쪽 그림과 같이 각각의 넓이를 S_1, S_2, S_3, S_4라 하면

$\int_0^a|v(t)|dt=\int_a^d|v(t)|dt$

이므로

$S_1=S_2+S_3+S_4 \qquad \cdots\cdots㉠$

ㄱ. $S_1>S_2+S_3$이므로 점 P는 출발하고 나서 다시 원점을 지나지 않는다. (거짓)

ㄴ. $\int_0^c v(t)dt=S_1-S_2-S_3$,

$\int_c^d v(t)dt=S_4=S_1-S_2-S_3$ ($\because$ ㉠)

$\therefore \int_0^c v(t)dt=\int_c^d v(t)dt$ (참)

ㄷ. $\int_0^b v(t)dt=S_1-S_2$, $\int_b^d|v(t)|dt=S_3+S_4$

그런데 ㉠에서 $S_1-S_2=S_3+S_4$이므로

$\int_0^b v(t)dt=\int_b^d|v(t)|dt$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

15. 정답 ①

$x=-4t,\ x=t^2$ 에서의 $f(x)$의 값은

$f(-4t)=|-4t|=4t\ (t>0)$

$f(t^2)=|t^2|=t^2$

따라서 닫힌구간 $[-4t,\ t^2]$에서 $f(x)$의 최댓값은 $4t$또는 t^2이다.

(i) $t^2\ge 4t$, 즉 $t\ge 4$일 때

$g(t)=t^2$

(ii) $t^2<4t$, 즉 $0<t<4$일 때

$g(t)=4t$

[step2] 구간을 나누어 정적분을 계산한다.

(i), (ii)에 의하여

$$\int_3^5 g(t)dt=\int_3^4 g(t)dt+\int_4^5 g(t)dt$$
$$=\int_3^4 4tdt+\int_4^5 t^2dt$$
$$=\left[2t^2\right]_3^4+\left[\frac{1}{3}t^3\right]_4^5$$
$$=(32-18)+\left(\frac{125}{3}-\frac{64}{3}\right)$$
$$=14+\frac{61}{3}$$
$$=\frac{103}{3}$$

16. 정답 ②

평행사변형의 넓이가 8이므로 $AC=4$

직선 AB를 $g(x)$라 하면

$f(x)-g(x)=a(x-1)(x-3)$이고

$f(x)$는 $g(x)-4$와 접하므로

$f(x)-g(x)+4=0$은 중근을 갖는다.

$a(x-1)(x-3)+4=ax^2-4ax+3a+4$

$D/4=4a^2-3a^2-4a=a^2-4a=0$

$\therefore\ a=4\ (\because\ a\neq 0)$

따라서 $f(x)$와 $g(x)$로 둘러싸인 넓이는

$\frac{4}{6}|3-1|^3=\frac{16}{3}$이므로

$p+q=19$

17. 정답 117

함수 $f(x)=-2x^3+ax^2+bx+1$이 $-3\le x\le 6$에서 증가하고, $x\le -3,\ x\ge 6$에서 감소하므로 $x=-3$에서 극소, $x=6$에서 극대를 가진다.

$f'(x)=-6x^2+2ax+b$에서

$-6x^2+2ax+b=0$을 만족시키는 두 근이 $x=-3,\ x=6$이므로

근과 계수의 관계에 의해

$\frac{a}{3}=3,\ -\frac{b}{6}=-18\qquad \therefore\ a=9,\ b=108$

$\therefore\ a+b=117$

18. 정답 7

$F(x)=f(x)-g(x)$라 하면 $g(x)=-f(x)+b$이므로

$F(x)=2f(x)-b$

$F'(x)=2f'(x)=2(3x^2+2ax+a+6)$

삼차함수 $F(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $F'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $3x^2+2ax+a+6=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3(a+6)>0$

$a^2-3a-18>0,\ (a+3)(a-6)>0$

$a<-3$ 또는 $a>6$

따라서 자연수 a의 최솟값은 7이다.

19. 정답 4

$g'(x)=f(x+2)-f(x)=0$이므로

$f(x+2)=f(x)$

따라서 $f(x)$는 주기가 2인 주기함수이므로 $f(-1)=f(1)$

(가)에서 $f(x)$는 기함수이므로 $f(-1)=-f(1)$

$\therefore\ f(3)=f(1)=f(-1)=0$

$$g(x)=\int_x^{x+2}\{f(t)+2\}dt$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}}\{f(t)+2\}dt$$
$$=\int_{-1}^{1}\{f(t)+2\}dt\ \ (\because\ f(x)\text{는 주기가 }2\text{인 주기함수})$$
$$=\int_{-1}^{1}2dt\ \ (\because\ f(x)\text{는 기함수})$$
$$=4$$

20. 정답 $18\pi(\mathrm{cm}^3/\mathrm{s})$

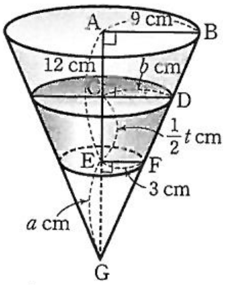
원뿔대 모양의 그릇에 담긴 물의 수면의 높이가 매초 $\frac{1}{2}\mathrm{cm}$씩 증가하도록 물을 부었으므로 수면의 높이를 h라 하면

$h=\frac{1}{2}t\ (\mathrm{cm})$

수면의 높이가 그릇의 높이 $12\mathrm{cm}$의 $\frac{1}{2}$이 되는 순간의 시각은

$\frac{1}{2}t=\frac{1}{2}\times 12\qquad \therefore t=12$

한편, 오른쪽 그림과 같이 원뿔대를 만들면



$\overline{AB}=9\,\text{cm}$, $\overline{EF}=3\,\text{cm}$, $\overline{AE}=12\,\text{cm}$,

$\overline{CE}=\frac{1}{2}t\,\text{cm}$

$\overline{EG}=a\,\text{cm}$라 하면

$\triangle AGB \backsim \triangle EGF$이므로

$\overline{AB}:\overline{EF}=\overline{AG}:\overline{EG}$, $9:3=(12+a):a$

$3(12+a)=9a$, $6a=36$ $\quad \therefore a=6(\text{cm})$

또한, $\overline{CD}=b\,\text{cm}$라 하면 $\triangle CGD \backsim \triangle EGF$이므로

$\overline{CD}:\overline{EF}=\overline{CG}:\overline{EG}$, $b:3=\left(\frac{1}{2}t+6\right):6$

$3\left(\frac{1}{2}t+6\right)=6b$ $\quad \therefore b=\frac{1}{4}t+3(\text{cm})$

용기에 담긴 물의 부피를 V라 하면

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{4}t+3\right)^2\left(\frac{1}{2}t+6\right)-\frac{1}{3}\pi\times 3^2\times 6$$

$$=\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{4}t+3\right)^2\left(\frac{1}{2}t+6\right)-18\pi$$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{3}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}t+3\right)\left(\frac{1}{2}t+6\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}t+3\right)^2\right\}$$

따라서 $t=12$일 때 부피의 변화율은

$$\frac{\pi}{3}\left\{\frac{1}{2}\times 6\times 12+\frac{1}{2}\times 6^2\right\}=\frac{\pi}{3}\times 54=18\pi(\text{cm}^3/\text{s})$$

21. 정답 108

$f'(x)=-ax(x-4)$이고 $x=0$에서 극소, $x=4$에서 극대를 갖는다.

$f(x)=-\frac{a}{3}x^3+2ax^2+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=0$이므로 $C=0$

$f(4)=-\frac{a}{3}\times 64+32a=32$, $a=3$

따라서 $f(x)=-x^3+6x^2$이므로 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$S=\frac{|-1|}{12}|6-0|^4=108$$