제 2 교시

수 학

100분
100점

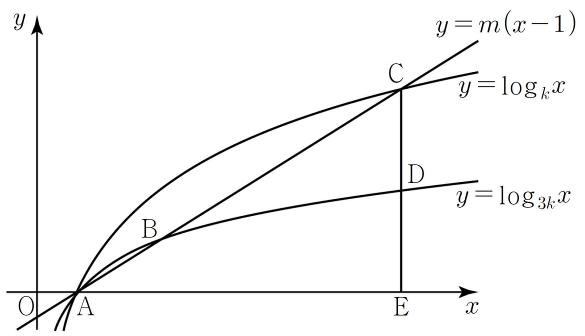
성 명		수험번호	

수학세상

1. $k>1$인 실수 k에 대하여 두 곡선 $y=\log_{3k}x$, $y=\log_{k}x$가 만나는 점을 A라 하자. 양수 m에 대하여 직선 $y=m(x-1)$이 두 곡선 $y=\log_{3k}x$, $y=\log_{k}x$와 제1사분면에서 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_{3k}x$, x축과 만나는 점을 각각 D, E라 할 때, 세 삼각형 ADB, AED, BDC가 다음 조건을 만족시킨다.

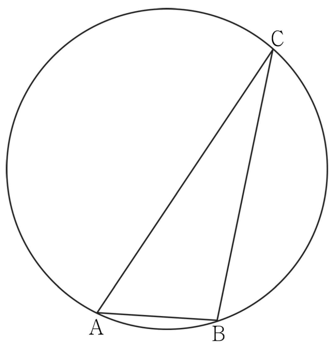
(가) 삼각형 BDC의 넓이는 삼각형 ADB의 넓이의 3배이다.
(나) 삼각형 BDC의 넓이는 삼각형 AED의 넓이의 $\frac{3}{4}$배이다.

$\frac{k}{m}$의 값을 구하시오.



2. $0 \le x \le \pi$일 때, 2 이상의 자연수 n에 대하여 두 곡선 $y=\sin x$와 $y=\sin(nx)$의 교점의 개수를 a_n이라 하자. a_3+a_5의 값을 구하시오.

3. 그림과 같이 원 C에 내접하고 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\angle\mathrm{BAC}=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 원 C의 넓이가 $\frac{49}{3}\pi$일 때, 원 C 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAC의 넓이의 최댓값은? (단, 점 P는 점 A도 아니고 점 C도 아니다.)



① $\frac{32}{3}\sqrt{3}$ ② $\frac{34}{3}\sqrt{3}$ ③ $12\sqrt{3}$ ④ $\frac{38}{3}\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{40}{3}\sqrt{3}$

4. 공차가 d이고 모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 \le d$
(나) 어떤 자연수 $k(k \ge 3)$에 대하여
세 항 a_2, a_k, a_{3k-1}이 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

$90 \le a_{16} \le 100$일 때, a_{20}의 값을 구하시오.

5. 첫째항이 6인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2-a_n & (a_n \geq 0) \\ a_n+p & (a_n < 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_4=0$이 되도록 하는 모든 실수 p의 값의 합을 구하시오.

6. 두 양수 p, q가 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은?

(가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x)=\lvert xf(x-p)+qx \rvert$이다. (나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

7. $a>0$인 상수 a에 대하여 함수 $f(x)=|(x^2-9)(x+a)|$가 오직 한 개의 x 값에서만 미분가능하지 않을 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은?

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

8. 두 삼차함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)\,g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$$

을 만족시킨다. $g(x)$의 최고차항의 계수가 3이고, $g(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가질 때, $f'(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

9. 실수 a와 함수 $f(x)=x^3-12x^2+45+3$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_a^x \{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4\,dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오.

10. 사차함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$ 에 대하여 $x\geq 0$에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_{-x}^{2x}\{f(t)-|f(t)|\}\,dt$$

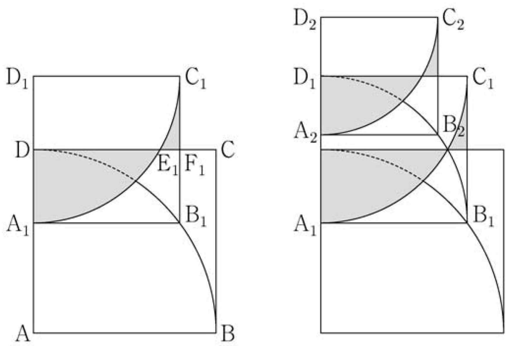
가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0<x<1$에서 $g(x)=c_1$ (c_1은 상수)
(나) $1<x<5$에서 $g(x)$는 감소한다.
(다) $x>5$에서 $g(x)=c_2$ (c_2는 상수)

$f(\sqrt{2})$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 40 ② 42 ③ 44 ④ 46 ⑤ 48

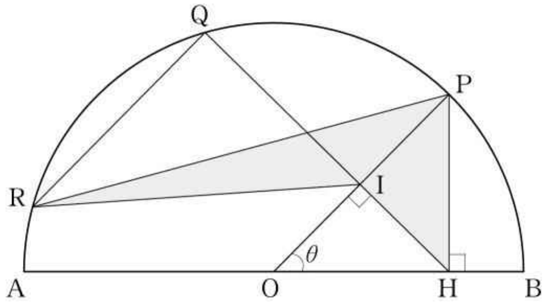
11. 그림과 같이 한 변의 길이가 5인 정사각형 ABCD에 중심이 A이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 ABD를 그린다. 선분 AD를 3 : 2로 내분하는 점을 A_1, 점 A_1을 지나고 선분 AB에 평행한 직선 이 호 BD와 만나는 점을 B_1이라 하자. 선분 A_1B_1을 한 변으로 하고 선분 DC와 만나도록 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$을 그린 후, 중심이 D_1이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 $D_1A_1C_1$을 그린다. 선분 DC가 호 A_1C_1, 선분 B_1C_1과 만나는 점을 각각 E_1, F_1이라 하고, 두 선분 DA_1, DE_1과 호 A_1E_1로 둘러싸인 부분과 두 선분 E_1F_1, F_1C_1과 호 E_1C_1로 둘러싸인 부분인 ◸ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$에 중심이 A_1이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 $A_1B_1D_1$을 그린다. 선분 A_1D_1을 3 : 2로 내분하는 점을 A_2, 점 A_2를 지나고 선분 A_1B_1에 평행한 직선이 호 B_1D_1과 만나는 점을 B_2라 하자. 선분 A_2B_2를 한 변으로 하고 선분 D_1C_1과 만나도록 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린 후, 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 ◸ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림 을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠 되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



R_1 R_2 ⋯

① $\frac{50}{3}\left(3-\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}\right)$ ② $\frac{100}{9}\left(3-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$ ③ $\frac{50}{3}\left(2-\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}\right)$ ④ $\frac{100}{9}\left(3-\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}\right)$ ⑤ $\frac{100}{9}\left(2-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$

12. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하고, 점 H를 지나고 선분 OP에 수직인 직선이 선분 OP, 호 AB와 만나는 점을 각각 I, Q라 하자.
점 Q를 지나고 직선 OP에 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점 중 Q가 아닌 점을 R라 하자. $\angle POB=\theta$일 때, 두 삼각형 RIP, IHP 의 넓이를 각각 $S(\theta)$, $T(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)-T(\theta)}{\theta^3}$ 의 값은? $\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$



① $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ ③ $\sqrt{2}-1$ ④ $\frac{2\sqrt{2}-1}{4}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{2}-1}{2}$

13. 함수 $f(x)=(x^2+ax+b)e^x$과 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족 시킨다.

(가) $f(1)=e$, $f'(1)=e$ (나) 모든 실수 x에 대하여 $g(f(x))=f'(x)$이다.

함수 $h(x)=f^{-1}(x)g(x)$에 대하여 $h'(e)$의 값은?
(단, a, b는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

14. 두 함수

$$f(x)=e^x,\ g(x)=k\sin x$$

에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3일 때, 양수 k의 값은?

① $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{2}}$ ② $\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}}$ ③ $\sqrt{2}e^{2\pi}$ ④ $\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}}$ ⑤ $\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{2}}$

15. 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여
$f(x_1) > f(x_2)$이다.
(나) 닫힌구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은
1이고
최솟값은 -2이다.

$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = 3$일 때, $\int_{-2}^{1} f^{-1}(x)\,dx$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

빠른답지

1. 정답 12
2. 정답 9
3. 정답 ①
4. 정답 117
5. 정답 8
6. 정답 ③
7. 정답 ①
8. 정답 10
9. 정답 8
10. 정답 ④
11. 정답 ⑤
12. 정답 ②
13. 정답 ④
14. 정답 ④
15. 정답 ⑤

정답 및 해설

1. 정답 12

[출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 문제 해결하기

조건 (가)에 의하여 삼각형 ADB의 넓이를 S라 하면

삼각형 BDC의 넓이는 $3S$이다.

$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{BC}} = 1 : 3$에서 $\overline{\mathrm{BC}} = 3\overline{\mathrm{AB}}$이고

점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 B$'$이라 하면

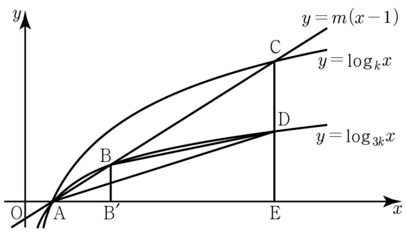
$\overline{\mathrm{B'E}} = 3\overline{\mathrm{AB'}}$이다.

$\overline{\mathrm{AB'}} = a$라 하면 $\overline{\mathrm{B'E}} = 3a$이므로

$\mathrm{B}(a+1,\ \log_{3k}(a+1))$,

$\mathrm{C}(4a+1,\ \log_k(4a+1))$,

$\mathrm{D}(4a+1,\ \log_{3k}(4a+1))$이다.



조건 (나)에 의하여 삼각형 AED의 넓이는 $4S$이고 삼각형 AEC의 넓이는 $8S$이므로 D는 선분 CE의 중점이다.

$\log_k(4a+1) = 2\log_{3k}(4a+1)$

$$\frac{\log_k(4a+1)}{\log_k k} = \frac{2\log_k(4a+1)}{\log_k 3k}$$

$\log_k 3k = 2$에서 $k^2 = 3k$이므로 $k = 3$

세 점 A, B, C가 직선 $y = m(x-1)$ 위에 있으므로

$$m = \frac{\log_9(a+1) - 0}{(a+1)-1} = \frac{\log_3(4a+1) - 0}{(4a+1)-1}$$ 에서

$2\log_3(a+1) = \log_3(4a+1)$

$(a+1)^2 = 4a+1$

$a^2 - 2a = 0$

$a > 0$이므로 $a = 2$

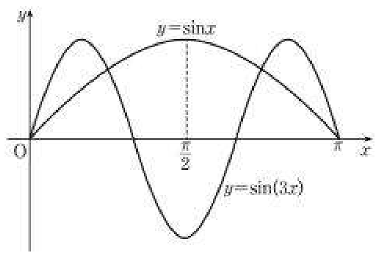
$$m = \frac{\log_9 3}{2} = \frac{1}{4}$$

따라서 $\dfrac{k}{m} = 12$

2. 정답 9

[출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 두 그래프가 만나는 점의 개수를 추론한다.

두 함수 $y = \sin x$, $y = \sin(3x)$의 주기가 각각 2π, $\dfrac{2\pi}{3}$이므로 $0 \le x \le \pi$에서 두 곡선 $y = \sin x$, $y = \sin(3x)$를 좌표평면에 나타내면 [그림 1]과 같다.

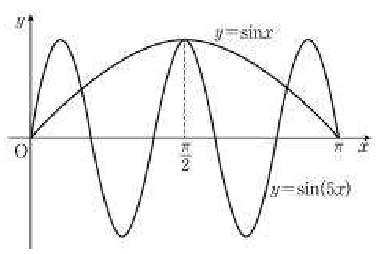


[그림 1]

[그림 1]에서 두 곡선 $y = \sin x$, $y = \sin(3x)$의 교점의 개수가 4이므로

$a_3 = 4$

두 함수 $y = \sin x$, $y = \sin(5x)$의 주기가 각각 2π, $\dfrac{2\pi}{5}$이므로 $0 \le x \le \pi$에서 두 곡선 $y = \sin x$, $y = \sin(5x)$를 좌표평면에 나타내면 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

[그림 2]에서 두 곡선 $y = \sin x$, $y = \sin(5x)$의 교점의 개수가 5이므로

$a_5 = 5$

따라서 $a_3 + a_5 = 4 + 5 = 9$

3. 정답 ①

원 C의 반지름의 길이를 R라 하면

원 C의 넓이가 $\dfrac{49}{3}\pi$이므로

$R^2\pi = \dfrac{49}{3}\pi$, $R = \dfrac{7}{3}\sqrt{3}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R$, $\overline{\mathrm{BC}}=2\times\frac{7}{3}\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=7$

삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AC}}=a$라 하면 코사인법칙에 의해

$7^2=a^2+3^2-2\times a\times 3\times\cos\frac{\pi}{3}$

$a^2-3a-40=0$, $(a-8)(a+5)=0$

$a>0$이므로 $a=8$

$\overline{\mathrm{AC}}=8$이고 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$\cos(\angle\mathrm{CBA})=\frac{3^2+7^2-8^2}{2\times3\times7}=-\frac{1}{7}$

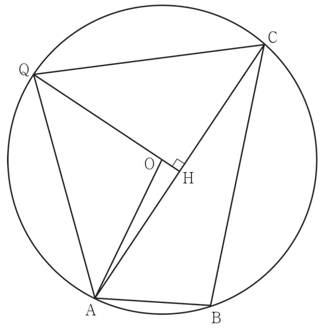
이므로 $\frac{\pi}{2}<\angle\mathrm{CBA}<\pi$가 되어

삼각형 ABC는 둔각삼각형이다.

삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되도록 하는 점을 Q라 하면 점 Q는 선분 AC의 수직이등분선과 원 C의 두 교점 중 직선 AC로부터 멀리 떨어져 있는 점이다.

그림과 같이 점 Q에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면

원 C의 중심 O는 선분 QH 위에 있다.



직각삼각형 AHO에서

$\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{\left(\frac{7}{3}\sqrt{3}\right)^2-4^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\overline{\mathrm{QH}}=\frac{8}{3}\sqrt{3}$이므로 삼각형 PAC의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times8\times\frac{8}{3}\sqrt{3}=\frac{32}{3}\sqrt{3}$

4. 정답 117

[출제의도] 등차수열과 등비수열의 성질을 활용하여 문제해결하기

$a_1=a$라 하면

조건 (나)에 의하여

$\{a+(k-1)d\}^2=(a+d)\{a+(3k-2)d\}$

$d\{k^2-5k+3\}=a(k+1)$ …… ㉠

모든 항이 자연수이므로

조건 (가)에서 $0<a\le d$

$a(k+1)\le d(k+1)$

$k^2-5k+3\le k+1$

$k^2-6k+2\le 0$

$3-\sqrt{7}\le k\le 3+\sqrt{7}$

$k\ge 3$이므로 자연수 $k=3,\ 4,\ 5$

㉠에서 $k^2-5k+3>0$이므로 $k=5$, $d=2a$

$90\le a_{16}\le 10$, $a_{16}=a+15d=31a$

이므로 $a=3$, $d=6$

따라서 $a_{20}=a+19d=117$

5. 정답 8

[출제의도] 조건을 만족시키는 수열을 추론하여 값을 구한다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 6이므로 $a_1>0$

이때 $a_2=2-6=-4$

$a_2<0$이므로

$a_3=a_2+p=-4+p$

(i) $-4+p\ge0$, 즉 $p\ge4$일 때

$a_4=2-a_3=2-(-4+p)=6-p=0$에서

$p=6$

(ii) $-4+p<0$, 즉 $p<4$일 때

$a_4=a_3+p=(-4+p)+p=-4+2p=0$에서

$p=2$

따라서 (i), (ii)에 의하여 $a_4=0$이 되도록 하는 모든 실수 p의 값의 합은 $6+2=8$

6. 정답 ③

[출제의도] 절댓값을 포함한 함수의 미분가능성을 판단할 수 있는가?

$f'(x)=3x^2-6x-9$

$=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $f(-1)=-7$을 갖고,

$x=3$에서 극솟값 $f(3)=-39$를 갖는다.

조건 (가)에서

$xg(x)=|xf(x-p)+qx|$

이므로

$g(x)=\begin{cases}|f(x-p)+q| & (x>0)\\ -|f(x-p)+q| & (x<0)\end{cases}$

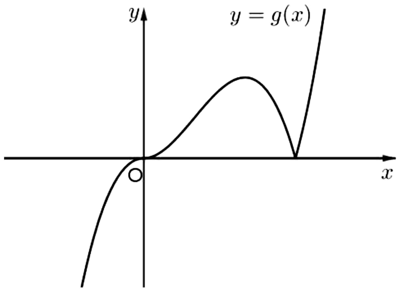
함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$|f(-p)+q|=-|f(-p)+q|$

즉, $|f(-p)+q|=0$이어야 한다.

한편, 함수 $y=|f(x-p)+q|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동시킨 후, $y<0$인 부분에 그려진 부분을 x축에

대하여 대칭이동시킨 것이다. 이때, p, q가 모두 양수이고 조건 (나)에서 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수가 1이므로 $p=1$, $q=7$이어야 한다. 따라서 $p+q=1+7=8$

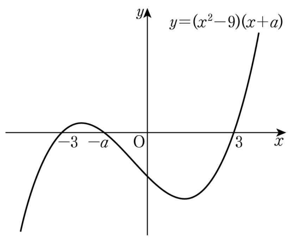


7. 정답 ①

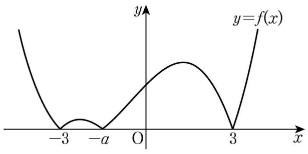
[출제의도] 조건을 만족시키는 함수의 그래프를 추론하여 극댓값을 구한다.

(ⅰ) $0<a<3$일 때

함수 $y=(x^2-9)(x+a)$의 그래프는 x축과 세 점 $(-3, 0)$, $(-a, 0)$, $(3, 0)$에서 만나므로 그래프의 개형은 그림과 같다.



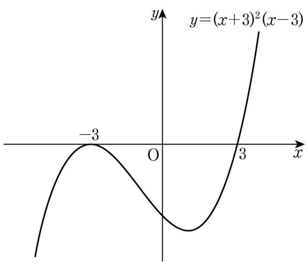
그러므로 함수 $f(x)=\left|(x^2-9)(x+a)\right|$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



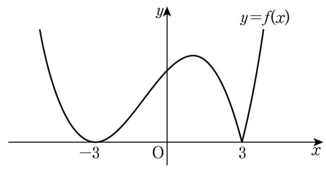
함수 $f(x)$는 $x=-3$, $x=-a$, $x=3$에서 미분가능하지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a=3$일 때

함수 $y=(x^2-9)(x+a)=(x+3)^2(x-3)$의 그래프는$x$축과 점 $(-3, 0)$에서 접하고 점 $(3, 0)$에서 만나므로 그래프의 개형은 그림과 같다.



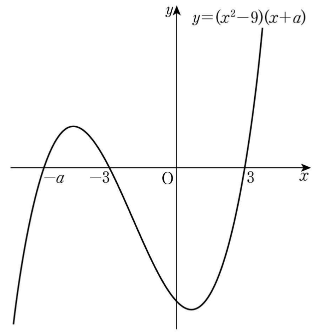
그러므로 $f(x)=\left|(x+3)^2(x-3)\right|$의 그래프 개형은 그림과 같다.



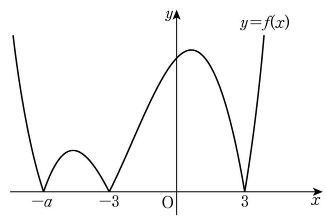
$f(x)$는 $x=3$에서만 미분가능하지 않으므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(ⅲ) $a>3$일 때

함수 $y=(x^2-9)(x+a)$의 그래프는 x축과 세 점 $(-a, 0)$, $(-3, 0)$, $(3, 0)$에서 만나므로 그래프의 개형은 그림과 같다.



그러므로 함수 $f(x)=\left|(x^2-9)(x+a)\right|$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=-a$, $x=-3$, $x=3$에서 미분가능하지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 $a=3$

함수 $y=\left(x^2-9\right)(x+3)$의 극솟값의 절댓값이

함수 $f(x)=\left|\left(x^2-9\right)(x+3)\right|$의 극댓값이다.

$y=\left(x^2-9\right)(x+3)$의 도함수는

$y'=2x(x+3)+\left(x^2-9\right)=3(x+3)(x-1)$이므로

$y'=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

$y=\left(x^2-9\right)(x+3)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	0	$\searrow$	-32	$\nearrow$

그러므로 함수 $y=\left(x^2-9\right)(x+3)$은 $x=1$에서 극소이고 극솟값은 -32

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고 극댓값은

$f(1)=|-32|=32$

[보충 설명]

$a=3$일 때 함수 $f(x)$가 $x=3$에서만 미분가능하지 않음을 보이자.

$f(x)=|(x^2-9)(x+3)|$

$=|(x+3)^2(x-3)|$

$=\begin{cases}(x+3)^2(x-3) & (x\ge 3)\\ -(x+3)^2(x-3) & (x<3)\end{cases}$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, 3)$과 구간 $(3, \infty)$에서 각각 다항함수이므로 함수 $f(x)$는 $x\ne 3$인 모든 실수 x에서 미분가능하다.
그런데

$\lim_{x\to 3-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3-}\frac{-(x+3)^2(x-3)}{x-3}=-36$

$\lim_{x\to 3+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3+}\frac{(x+3)^2(x-3)}{x-3}=36$

이므로 극한값 $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$이 존재하지 않는다.
그러므로 $f(x)$는 $x=3$에서 미분가능하지 않다.
따라서 $f(x)$는 오직 한 개의 x 값에서만 미분가능하지 않다.

8. 정답 10

$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$에서
$g(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가지므로 $g(x)$는 $(x-2)^2$을 인수로 갖고, $g(x)$의 최고차항의 계수가 양의 실수이므로 삼차함수의 개형을 통해 $(x-3)$을 인수로 가짐을 알 수 있다.
($g(x)$가 $(x-1)$을 인수로 가질 때, $x=2$에서 극솟값을 갖게 된다.)
$g(x)$의 최고차항의 계수가 3이므로
$g(x)=3(x-1)^2(x-3)$이다.
$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$에서
$f(x)=\frac{1}{3}(x-1)^2(x-3)$이다.

$f(x)$를 미분하면 $f'(x)=\frac{2}{3}(x-1)(x-3)+\frac{1}{3}(x-1)^2$이므로

$f'(0)=\frac{2}{3}(-1)(-2)+\frac{1}{3}(-1)^2=\frac{7}{3}$이다.

그러므로 $p=3,\ q=7$이 되고 $p+q=3+7=10$이다.

9. 정답 8

[출제의도] 정적분으로 나타내어진 함수가 극값을 하나만 갖도록 하는 상수 a의 값을 구할 수 있는가?

$f(x)=x^3-12x^2+45x+3$에서

$f'(x)=3x^2-24x+45$
$=3(x-3)(x-5)$

$g(x)=\int_a^x\{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4dt$

$=f(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt-\int_a^x\{f(t)\}^5dt$

$g'(x)=f'(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt+\{f(x)\}^5-\{f(x)\}^5$

$=f'(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt$

$g'(x)=0$에서
$f'(x)=0$ 또는 $x=a$

(ⅰ) $a\ne 3,\ a\ne 5$일 때,
$g'(x)=0$에서
$x=3$ 또는 $x=5$ 또는 $x=a$
함수 $g(x)$는 $x=3,\ x=5,\ x=a$에서 모두 극값을 갖는다.

(ⅱ) $a=3$일 때
$g'(x)=0$에서 $x=3$ 또는 $x=5$
함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	극소	↗

함수 $g(x)$는 $x=5$에서만 극값을 갖는다.

(ⅲ) $a=5$일 때
$g'(x)=0$에서
$x=3$ 또는 $x=5$
함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗

함수 $g(x)$는 $x=3$에서만 극값을 갖는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서
함수 $g(x)$가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a의 값은 3 또는 5이다.
따라서 모든 a의 값의 합은
$3+5=8$

10. 정답 ④

사차함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$의 그래프는 y축에 대칭이다.

$f(t)-|f(t)|=\begin{cases}0 & (f(t)\ge 0)\\ 2f(t) & (f(t)<0)\end{cases}$에서

$f(t)-|f(t)|\le 0$이므로

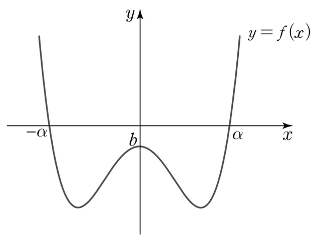
함수 $g(x)=\int_{-x}^{2x}\{f(x)-|f(x)|\}dx$는 증가하지 않는 함수이다.

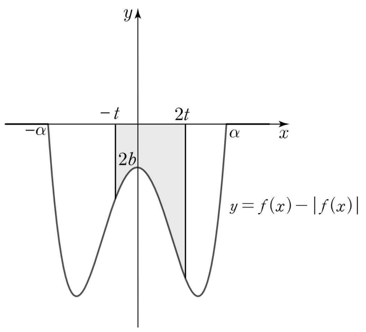
즉, $g(x)$의 그래프는 상수함수인 구간과 감소하는 구간으로
이루어진다.
조건 (가)에서 $g(x)$는 상수함수이므로 $0\le x\le 2$에서
$f(x)\ge 0$
조건 (나)에서 $g(x)$는 감소함수이므로 $2<x<5$에서
$f(x)<0$

조건 (다)에서 $g(x)$는 상수함수이므로 $x>5$에서 $f(x)>0$
함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$는 연속함수이므로 $f(x)=0$은 반드시 $x=-2,\ 2,\ -5,\ 5$를 해로 가져야 한다.
따라서 $f(x)=(x^2-4)(x^2-25)$이므로
$f(\sqrt{2})=(-2)(-23)=46$이다.

다른 풀이

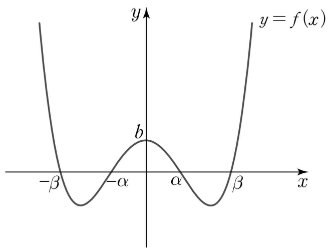
사차함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$의 그래프는 y축에 대칭이다.
b의 값에 따라 나누어보면
(i) $b\le 0$일 때

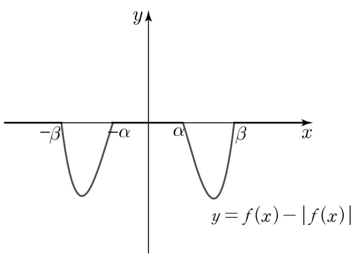




$0<x<1$에서 $g(x)$는 감소함수이므로 조건 (가)를 만족하지 못한다.

(ii) $b>0$일 때





① $0<x<1$에서 $g(x)$가 상수함수이므로
$f(x)-|f(x)|=0$에서 $\alpha\ge 2$
② $1<x<5$에서 $g(x)$가 감소하므로
$f(x)-|f(x)|<0$에서 $\alpha\le 2$이고 $-\beta\le -5$ 즉, $\beta\ge 5$
③ $x>5$에서 $g(x)$가 상수함수이므로 $-\beta\ge -5$ 즉, $\beta\le 5$
①, ②, ③에 의해 $\alpha=2,\ \beta=5$이고
$f(x)=(x^2-4)(x^2-25)$이다.

따라서 $f(\sqrt{2})=(-2)\times(-23)=46$이다.

11. 정답 ⑤

[출제의도] 등비급수를 이용하여 무한히 반복되는 도형의 넓이의 합을 구할 수 있는가?

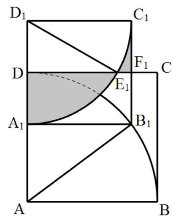


그림 R_1에서 $\overline{AA_1}=3,\ \overline{AB_1}=5$이므로
$\overline{A_1B_1}=4$
즉, $\overline{D_1E_1}=4,\ \overline{D_1D}=2$이므로
$\angle DD_1E_1=60°,\ \angle C_1D_1E_1=30°$
따라서

$$S_1=\left(\frac{8}{3}\pi-2\sqrt{3}\right)+\left(8-2\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)$$
$$=8-4\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi$$

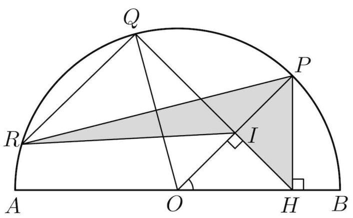
한편 정사각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 한 변의 길이는 $A_nB_nC_nD_n$의 한 변의 길이의 $\frac{4}{5}$이므로 그림 R_{n+1}에서 새로 색칠한 부분의 넓이는 그림 R_n에서 새로 색칠한 부분의 넓이의 $\frac{16}{25}$이다.

따라서

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{8-4\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi}{1-\frac{16}{25}}$$
$$=\frac{25}{9}\left(8-4\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi\right)$$
$$=\frac{100}{9}\left(2-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$$

12. 정답 ②

[출제의도] 도형의 성질과 삼각함수의 극한을 이용하여 문제를 해결한다.



$\angle OHP=\frac{\pi}{2}$ 이므로
$\overline{OH}=\overline{OP}\cos\theta=\cos\theta$
$\angle HIO=\frac{\pi}{2}$ 이므로
$\overline{OI}=\overline{OH}\cos\theta=\cos^2\theta$
$\overline{IH}=\overline{OH}\sin\theta=\cos\theta\sin\theta$

$\overline{\mathrm{IP}}=\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{OI}}=1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$

삼각형 IHP의 넓이 $T(\theta)$는

$$T(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{IH}}\times\overline{\mathrm{IP}}$$
$$=\frac{1}{2}\times(\cos\theta\sin\theta)\times\sin^2\theta$$
$$=\frac{1}{2}\sin^3\theta\cos\theta$$

직선 OP와 직선 RQ가 평행이므로 삼각형 RIP의 높이는 $\overline{\mathrm{QI}}$이다.

$\overline{\mathrm{OQ}}=1$, $\angle\mathrm{OIQ}=\frac{\pi}{2}$이므로 직각삼각형 OIQ에서

$$\overline{\mathrm{QI}}^2=\overline{\mathrm{OQ}}^2-\overline{\mathrm{OI}}^2$$
$$\overline{\mathrm{QI}}=\sqrt{1-(\cos^2\theta)^2}$$
$$=\sqrt{(1-\cos^2\theta)(1+\cos^2\theta)}$$
$$=\sin\theta\sqrt{1+\cos^2\theta}\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

삼각형 RIP의 넓이 $S(\theta)$는

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{IP}}\times\overline{\mathrm{QI}}$$
$$=\frac{1}{2}\times\sin^2\theta\times\left(\sin\theta\sqrt{1+\cos^2\theta}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sin^3\theta\sqrt{1+\cos^2\theta}$$

$$S(\theta)-T(\theta)=\frac{1}{2}\sin^3\theta\left(\sqrt{1+\cos^2\theta}-\cos\theta\right)$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)-T(\theta)}{\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\sin^3\theta\left(\sqrt{1+\cos^2\theta}-\cos\theta\right)}{\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{1}{2}\times\frac{\sin^3\theta}{\theta^3}\times\left(\sqrt{1+\cos^2\theta}-\cos\theta\right)\right\}$$
$$=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

13. 정답 ④

[출제의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 함수의 미분계수를 구한다.

$f(1)=(1+a+b)e=e$에서

$a+b=0$ …… ㉠

$f'(x)=\{x^2+(a+2)x+a+b\}e^x$ 이므로

$f'(1)=\{1+(a+2)+a+b\}e=e$ 에서

$2a+b=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a=-2,\ b=2$

$f(x)=(x^2-2x+2)e^x$에서

$f'(x)=x^2e^x$

$f''(x)=x(x+2)e^x$이므로

$f''(1)=3e$

이때 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이므로

함수 $f(x)$는 역함수가 존재한다.

$f(1)=e$에서 $f^{-1}(e)=1$이므로

역함수의 미분법에 의하여

$$\left(f^{-1}\right)'(e)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{e}$$

한편 $g(f(1))=f'(1)$, 즉 $g(e)=e$이고

$g(f(x))=f'(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(f(x))f'(x)=f''(x)$ …… ㉢

㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면

$g'(f(1))f'(1)=f''(1)$

$g'(e)\times e=3e,\ g'(e)=3$

따라서

$$h'(e)=\left(f^{-1}\right)'(e)g(e)+f^{-1}(e)g'(e)$$
$$=\frac{1}{e}\times e+1\times3=4$$

14. 정답 ④

[출제의도] 방정식의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3일 조건을 구할 수 있는가?

$e^x=k\sin x$에서 $\frac{1}{k}=\frac{\sin x}{e^x}$ ……㉠이므로

$h(x)=\frac{\sin x}{e^x}$라 하면

$$h'(x)=\frac{e^x\cos x-e^x\sin x}{e^{2x}}=\frac{\cos x-\sin x}{e^x}$$

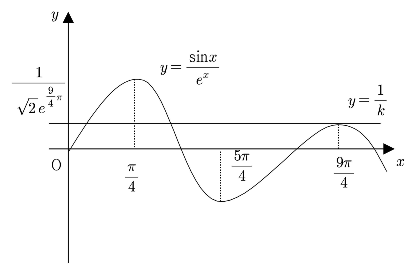
따라서 $x>0$에서 $h'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{9}{4}\pi,\ \cdots$

이므로 함수 $y=h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$
$h'(x)$	1	+	0	−	0	+
$h(x)$	0	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}$	↘	$-\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi}}$	↗

x	$\cdots$	$\frac{9\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{13}{4}\pi$	$\cdots$
$h'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}}}$	↘	$-\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{13}{4}\pi}}$	↗



이때 ㉠의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3이기 위해서는 그림과 같이 직선 $y=\frac{1}{k}$이 $x=\frac{9}{4}\pi$에서 곡선 $y=\frac{\sin x}{e^x}$와 접해야 하므로

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}}$$

따라서

$$k=\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}$$

15. 정답 ⑤

[출제의도] 치환적분법과 부분적분법을 이용하여 문제를 해결한다.

조건 (가)에 의해 함수 $f(x)$는 감소한다.

그러므로 조건 (나)에 의해

$f(-1)=1$, $f(3)=-2$ 즉 $f^{-1}(1)=-1$, $f^{-1}(-2)=3$

$\int_{-2}^{1} f^{-1}(x)\,dx$에서 $f^{-1}(x)=t$로 놓으면

$x=-2$일 때 $t=3$, $x=1$일 때 $t=-1$이고,

$x=f(t)$에서 $\frac{dx}{dt}=f'(t)$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{1} f^{-1}(x)\,dx &= \int_{3}^{-1} tf'(t)\,dt \\ &= \Big[tf(t)\Big]_{3}^{-1}-\int_{3}^{-1} f(t)\,dt \\ &= -f(-1)-3f(3)+\int_{-1}^{3} f(t)\,dt \\ &= -1+6+3=8\end{aligned}$$