01. 수열의 극한

1. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+2}\sum_{k=1}^{n}k+\frac{1}{n^3+3}\sum_{k=1}^{n}k^2\right)$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

2. $\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+2}-n\right)$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

3. 첫째항이 4이고 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{2n-1}+{a_{n+1}}^2}{a_{2n}+1}$의 값은?

① $\frac{47}{4}$ ② 12 ③ $\frac{49}{4}$ ④ $\frac{25}{2}$ ⑤ $\frac{51}{4}$

4. 수열 $\left\{\frac{2^{-n+1}\times k^n+3^n}{4^n+\left(\frac{1}{3}\right)^{-2n+1}}\right\}$이 수렴하기 위한 정수 k의 개수를 구하시오.

5. 수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-\sqrt{n^2+3n+5})=2$를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n-n)$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

6. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)(x-3)^n}{5^n}$ 이 수렴하도록 하는 모든 정수 x 의 개수는?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

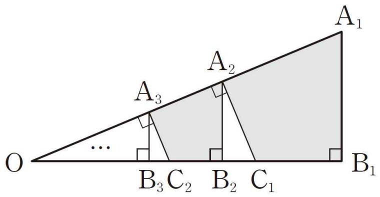
7. $\sum_{n=1}^{\infty}2^n(3^{-n}+4^{-n+1})$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

8. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^n+4^{n-1}}=2$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$의 값은?

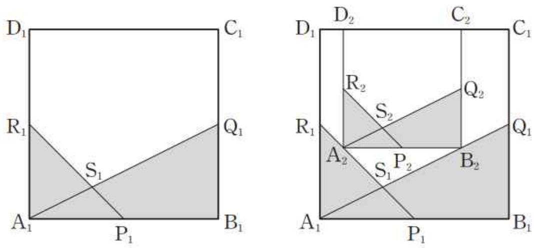
① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

9. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{OA_1}}=13$, $\overline{\mathrm{OB_1}}=12$, $\angle \mathrm{OB_1A_1}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 $\mathrm{A_1OB_1}$이 있다. 선분 $\mathrm{OB_1}$ 위의 점 $\mathrm{C_1}$에 대하여 점 $\mathrm{C_1}$에서 선분 $\mathrm{OA_1}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{A_2}$라 할 때, $\overline{\mathrm{C_1B_1}}=\overline{\mathrm{C_1A_2}}$ 를 만족시키도록 두 점 $\mathrm{C_1}, \mathrm{A_2}$를 잡고, 점 $\mathrm{A_2}$에서 선분 $\mathrm{OB_1}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{B_2}$라 하자. 또 선분 $\mathrm{OB_2}$ 위의 점 $\mathrm{C_2}$에 대하여 점 $\mathrm{C_2}$에서 선분 $\mathrm{OA_2}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{A_3}$이라 할 때, $\overline{\mathrm{C_2B_2}}=\overline{\mathrm{C_2A_3}}$을 만족시키도록 두 점 $\mathrm{C_2}, \mathrm{A_3}$을 잡고, 점 $\mathrm{A_3}$에서 선분 $\mathrm{OB_2}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{B_3}$이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 선분 OB_n 위의 점 C_n에 대하여 점 C_n에서 선분 OA_n에 내린 수선의 발을 A_{n+1}이라 할 때, $\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n}=\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{A}_{n+1}}$을 만족시키도록 두 점 $\mathrm{C}_n, \mathrm{A}_{n+1}$을 잡고, 점 A_{n+1}에서 선분 OB_n에 내린 수선의 발을 B_{n+1}이라 하자. 사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?



① $\frac{845}{33}$ ② 26 ③ $\frac{845}{32}$ ④ $\frac{1690}{63}$ ⑤ $\frac{845}{31}$

10. [그림 1]과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$에서 선분 $\mathrm{A_1B_1}$의 중점을 $\mathrm{P_1}$, 선분 $\mathrm{B_1C_1}$의 중점을 $\mathrm{Q_1}$, 선분 $\mathrm{A_1D_1}$의 중점을 $\mathrm{R_1}$이라 하고, 선분 $\mathrm{A_1Q_1}$과 선분 $\mathrm{P_1R_1}$의 교점을 $\mathrm{S_1}$이라 할 때, 다섯 개의 점 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{B_1}$, $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{S_1}$, $\mathrm{R_1}$을 연결하여 만든  모양의 다각형 $\mathrm{A_1B_1Q_1S_1R_1}$의 넓이를 T_1이라 하자. [그림 2]와 같이 선분 $\mathrm{R_1S_1}$ 위의 점 $\mathrm{A_2}$, 선분 $\mathrm{Q_1S_1}$ 위의 점 $\mathrm{B_2}$, 선분 $\mathrm{C_1D_1}$위의 두 점 $\mathrm{C_2}$, $\mathrm{D_2}$에 대하여 사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$가 정사각형이 되도록 네 점 $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{C_2}$, $\mathrm{D_2}$를 잡는다. 선분 $\mathrm{A_2B_2}$의 중점을 $\mathrm{P_2}$, 선분 $\mathrm{B_2C_2}$의 중점을 $\mathrm{Q_2}$, 선분 $\mathrm{A_2D_2}$의 중점을 $\mathrm{R_2}$라 하고, 선분 $\mathrm{A_2Q_2}$와 선분 $\mathrm{P_2R_2}$의 교점을 $\mathrm{S_2}$라 할 때, 다섯 개의 점 $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{Q_2}$, $\mathrm{S_2}$, $\mathrm{R_2}$를 연결하여 만든  모양의 다각형 $\mathrm{A_2B_2Q_2S_2R_2}$의 넓이를 T_2라 하자. 이와 같은 방법으로 계속하여 자연수 n에 대하여 다섯 개의 점 A_n, B_n, Q_n, S_n, R_n을 연결하여 만든  모양의 다각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{S}_n\mathrm{R}_n$의 넓이를 T_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} T_n$의 값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이고, 선분 $\mathrm{C}_n\mathrm{C}_{n+1}$의 길이는 선분 $\mathrm{C}_n\mathrm{D}_{n+1}$의 길이보다 작다.)



[그림 1] [그림 2]

02. 미분법

11. $\lim_{x\to 2}(x-1)^{\frac{1}{2x-4}}$의 값은?

① $\frac{1}{e}$ ② 1 ③ $\sqrt{e}$ ④ e ⑤ e^2

12. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax^2)}{2x^2+b}=6$을 만족시키는 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

13. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x^2+ax}=\frac{1}{2}$을 만족시키는 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

14. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1+3x)}$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

15. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{e^{x-1}-1} & (x\neq 1) \\ 4 & (x=1) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $f(5)$의 값은?

① 9 ② 16 ③ 25 ④ 36 ⑤ 49

16. 모든 실수 x에 대하여 연속인 함수 $f(x)$가

$$(x-3)f(x)=2^x+2^{-x+3}-9$$

를 만족시킬 때, $f(3)$의 값은?

① $5\ln 2$ ② $6\ln 2$ ③ $7\ln 2$ ④ $8\ln 2$ ⑤ $9\ln 2$

17. $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 미분가능한 함수 $f(x)$가 부등식

$$1+\ln x \le f(x) \le e^{x-1}$$

을 만족시킨다. $g(x)=(2x+\ln x)f(x)$에 대하여 $g'(1)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

18. $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},\ 0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$이고

$$\sin(\pi-\alpha)=\frac{1}{5},\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=\frac{3}{5}$$

일 때, $\sin(\alpha+\beta)=p+q\sqrt{6}$이다. $100(p+q)$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 유리수이다.)

19. $\lim_{x\to0}\dfrac{\sin(x^2+2x)}{(e^{2x}-1)(x+2)}$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

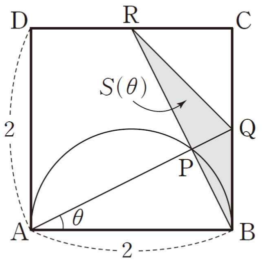
20. 함수

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-\cos 2x}{x^2} & (x\neq 0)\\ a & (x=0)\end{cases}$$

이 $x=0$에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

21. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD의 내부에 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 반원의 호 위의 점 P에 대하여 직선 AP가 선분 BC와 만나는 점을 Q, 직선 BP가 선분 CD와 만나는 점을 R라 하고, $\angle\mathrm{PAB}=\theta$라 하자. 삼각형 BQR의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to0+}\dfrac{S(\theta)}{\theta^2}$의 값은? $\left(\text{단, } 0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$



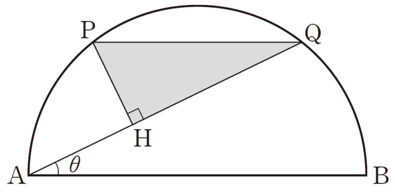
① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

22. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원에서 선분 AB에 평행한 직선이 반원의 호 AB와 만나는 두 점 중 점 A에 가까운 점을 P, 점 B에 가까운 점을 Q라 하고, 점 P에서 선분 AQ에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\angle \mathrm{QAB} = \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right)$일 때, 삼각형 PHQ의 넓이를 $S(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} \frac{S(\theta)}{(\pi - 4\theta)^2} = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



23. 곡선 $y = a\sin x \cos x + b$ 위의 점 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$에서의 접선의 기울기가 $\sqrt{3}$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하시오.

24. 함수 $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 0)$에서의 접선의 기울기는?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

25. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x) = f(e^{2x})$이 $g(0) = g'(0) = 2$를 만족시킨다. $f(2)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

26. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x \to \ln 2} \frac{f(x)-5}{x-\ln 2}=8$
>
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{4+\{g(x)\}^2}=\frac{f(x)}{e^x}$이다.

$h(x)=f(x)g(x)$라 할 때, $h'(\ln 2)$의 값은?
(단, 모든 양수 x에 대하여 $g(x)>0$이다.)

① $\frac{41}{2}$ ② $\frac{43}{2}$ ③ $\frac{45}{2}$ ④ $\frac{47}{2}$ ⑤ $\frac{49}{2}$

27. 매개변수 $t\,(t>0)$으로 나타낸 곡선 $x=\ln\sqrt{t}$, $y=\frac{1}{2}t^2-at$에 대하여 $t=3$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기가 6일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

28. 곡선 $x^2+xy+2y^2=4$ 위의 서로 다른 두 점 P, Q에서의 접선의 기울기가 모두 $\frac{3}{2}$일 때, 선분 PQ의 길이는?

① $2\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ 4 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

29. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(e^x-e^{-x})=x^3+2x$$

를 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(0)+g'(0)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

30. 함수 $f(x)=2^{\ln x}+x\ (x>0)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 곡선 $y=g(x)$는 점 $(2, 1)$을 지난다. $g'(2)$의 값은?

① $\frac{1}{1+2\ln 2}$ ② $\frac{1}{1+\ln 2}$ ③ 1 ④ $1+\ln 2$ ⑤ $1+2\ln 2$

31. 곡선 $y=\sin^2 x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ \sin^2 t)$에서의 접선과 수직이고, 점 P를 지나는 직선의 y절편을 $g(t)$라 할 때, $\lim\limits_{t\to 0+} g(t)$의 값은? $\left(단,\ 0<t<\frac{\pi}{2}\right)$

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

32. 함수 $f(x)=\frac{x+1}{x^2+a}$은 $x=-3$에서 극값을 갖는다. $f(x)$의 극댓값을 M, 극솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은? (단, a는 양수이다.)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{7}{24}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{3}{8}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

33. 함수 $f(x)=\ln\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)-kx$가 $x=1$에서 극값을 가질 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은? (단, k는 상수이다.)

① $\ln 3-2$ ② $\ln 3-\frac{4}{3}$ ③ $\ln 3-\frac{2}{3}$ ④ $2\ln 2-2$ ⑤ $2\ln 2-\frac{4}{3}$

34. 함수 $f(x)=2e^{2x}-e^{-x}+\frac{1}{2}$에 대하여 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표가 $(a,\ b)$일 때, 두 수 $a,\ b$의 곱 ab의 값은?

① $-2\ln 2$ ② $-\ln 2$ ③ 1 ④ $\ln 2$ ⑤ $2\ln 2$

35. 함수 $f(x)=|x^2-1|e^{-x}$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈 보기 〉

ㄱ. $f'(0)=-1$

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

ㄷ. 양수 k에 대하여 방정식 $f(x)=k$의 실근의 개수의 최솟값은 2이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

36. 함수 $f(x)=\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}-|x|}\sin x$와 양의 실수 k에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수를 $g(k)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈 보기 〉

ㄱ. $f'(0)=\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}$

ㄴ. $g(e^{-\pi})=2$

ㄷ. $e^{-\frac{5}{2}\pi}\le k\le 2$에서 함수 $g(k)$가 불연속인 k의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

37. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=f'(1)=0$
> (나) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

양수 t에 대하여 $x>1$에서 정의된 함수 $y=|\ln f(x)|$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리를 $g(t)$라 할 때, $g'(3\ln 2)$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

38. 함수 $f(x)=(x^2+ax+b)e^x$ (a, b는 실수)와 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=f(t)$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. 두 함수 $f(x)$와 $g(t)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 서로 다른 두 실수 α, β가 존재한다.

> (가) 함수 $y=|f(x)-f(\alpha)|$는 모든 실수 x에 대하여 미분가능하다.
> (나) 함수 $y=g(t)$는 $t=\beta$에서 불연속이고, $\lim_{t\to\beta-}g(t)=\lim_{t\to\beta+}g(t)$이다.

$\alpha+\beta=1$이고 $f(\alpha)f(\beta)=-5e$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.
(단, $\lim_{x\to-\infty}x^2e^x=0$)

39. 방정식 $(x+2)^2e^{-x}=k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수는? (단, $\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}=0$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

40. $-2\pi \le x \le 2\pi$에서 정의된 함수 $f(x)=x\sin x+\cos x$에 대하여 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은?

① -2π ② $-\pi$ ③ 0 ④ π ⑤ 2π

41. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 위치 $(x,\ y)$가

$$x=4\sqrt{2t},\ \ y=t^2+\frac{1}{t}$$

이다. 점 P의 속력이 최소일 때, 점 P의 가속도는 $(a,\ b)$이다. a^2+b^2의 값은?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

03. 적분법

42. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$f'(x)=\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2,\ f(1)=3$$

을 만족시킬 때, $f(4)$의 값은?

① $\frac{5}{4}+\ln 2$ ② $\frac{7}{4}+\ln 2$ ③ $\frac{5}{4}+2\ln 2$ ④ $\frac{7}{4}+2\ln 2$ ⑤ $\frac{9}{4}+2\ln 2$

43. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=(1+2\sin x)\cos x$이고 $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$일 때, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$의 값은?

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

44. 열린구간 $\left(\frac{1}{2},\ \infty\right)$에서 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$f'(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{2x-1}},\ f(1)=\frac{7}{3}$$

을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오.

45. $\int_0^1 2x\ln(x+1)dx+\int_0^1 \ln(x+1)dx$의 값은?

① $\ln 2-\frac{1}{2}$ ② $2\ln 2-\frac{1}{2}$

③ $\ln 2+\frac{1}{2}$ ④ $2\ln 2+\frac{1}{2}$

⑤ $4\ln 2-\frac{1}{2}$

46. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$f'(x)=e^{-x}\cos x,\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$$

을 만족시킬 때, $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)\times f\left(\frac{\pi}{6}\right)$의 값은?

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{16}$

47. 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 양의 실수 전체의 집합에서 연속이고

$$\int_1^x (x-t)f'(t)dt = x\ln x + ax^2 + b\,(x>0)$$

을 만족시킬 때, $f\left(\frac{1}{b}\right)-f(1)$의 값은? (단, a,b는 상수이다.)

① $\ln 2-1$ ② $2\ln 2-1$ ③ $\ln 2+1$ ④ $2\ln 2+1$ ⑤ $4\ln 2+1$

48. 함수 $f(x)=a(x+2)\ln x$에 대하여

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1}{2x-1}\int_{\frac{1}{2}}^{x} f(t)dt=-1$$

일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

49. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2\pi}{n}\sin\left(1+\frac{k}{2n}\right)\pi\cos\left(1-\frac{k}{2n}\right)\pi\right\}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

50. 정의역이 $\{x|x>0\}$이고 모든 양의 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

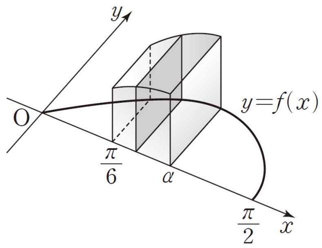
> (가) $f(1)=1$, $f(3)=2$
> (나) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{7}{2}$이다.

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,
$\int_1^9 f'(\sqrt{x})\,dx+\int_1^4 \frac{g(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$의 값을 구하시오.

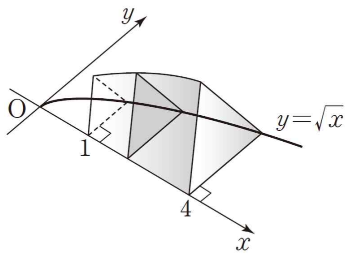
51. 함수 $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{\sqrt{e}}x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 $p-\frac{3}{\sqrt{e}}$일 때, p의 값은?

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

52. 그림과 같이 닫힌구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 정의된 함수 $f(x)=\sin x\sqrt{\cos x}$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=\frac{\pi}{6}, x=\alpha\left(\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형이 있다. $f'(\alpha)=0$일 때, 이 입체도형의 부피는 $p\sqrt{6}+q$이다. $\frac{2}{p}-\frac{1}{q}$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.)



53. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x}$와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=4$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고, x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형인 입체도형의 부피가 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



54. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 위치 $(x,\ y)$가

$$x=4e^{t},\ y=2t-e^{2t}$$

일 때, $t=\ln 2$에서 $t=\ln 4$까지 점 P가 움직인 거리는 $m+2\ln 2$이다. 정수 m의 값을 구하시오.

55. 함수 $f(x)=\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2}$에 대하여 $6 \leq x \leq 13$에서 곡선 $y=f(x)$의 길이는?

① $\frac{71}{3}$ ② $\frac{74}{3}$ ③ $\frac{77}{3}$ ④ $\frac{80}{3}$ ⑤ $\frac{83}{3}$

[빠른 정답]

1. 정답 ⑤
2. 정답 ③
3. 정답 ③
4. 정답 36
5. 정답 ③
6. 정답 ④
7. 정답 ②
8. 정답 ②
9. 정답 ④
10. 정답 181
11. 정답 ③
12. 정답 ④
13. 정답 ④
14. 정답 ②
15. 정답 ②
16. 정답 ③
17. 정답 ⑤
18. 정답 44
19. 정답 ②
20. 정답 ③
21. 정답 ④
22. 정답 5
23. 정답 16
24. 정답 ④
25. 정답 ④
26. 정답 ⑤
27. 정답 ②
28. 정답 ④
29. 정답 ④
30. 정답 ②
31. 정답 ②
32. 정답 ③
33. 정답 ②
34. 정답 ④
35. 정답 ①
36. 정답 ③
37. 정답 ⑤
38. 정답 10
39. 정답 ③
40. 정답 ②
41. 정답 ④
42. 정답 ④
43. 정답 ③
44. 정답 15
45. 정답 ②
46. 정답 ④
47. 정답 ①
48. 정답 24
49. 정답 ④
50. 정답 6
51. 정답 ①
52. 정답 51
53. 정답 23
54. 정답 12
55. 정답 ②

[정답 및 해설]

1. 정답 ⑤

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+2}\sum_{k=1}^{n}k+\frac{1}{n^3+3}\sum_{k=1}^{n}k^2\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n^2+2}\times\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{n^3+1}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n^2+2}+\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3+3}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n^2}}+\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{1+\frac{3}{n^3}}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}+\frac{1}{6}\times\frac{\left(1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\left(2+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^3}}$$
$$=\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{6}\times2=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

2. 정답 ③

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+2}-n\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\sqrt{n^2+2}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2}+n\right)}{\sqrt{n^2+2}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+1}$$
$$=\frac{2}{\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+1}=1$$

3. 정답 ③

$a_n=4\times3^{n-1}$이므로

$$a_{2n}=4\times3^{2n-1}=\frac{4}{3}\times9^n$$
$${a_{n+1}}^2=(4\times3^n)^2=16\times9^n$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{2n-1}+{a_{n+1}}^2}{a_{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}\times9^n+16\times9^n}{\frac{4}{3}\times9^n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}+16}{\frac{4}{3}+\left(\frac{1}{9}\right)^n}$$
$$=\frac{\frac{49}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{49}{4}$$

4. 정답 36

$$\frac{2^{-n+1}\times k^n+3^n}{4^n+\left(\frac{1}{3}\right)^{-2n+1}}=\frac{2\times2^{-n}\times k^n+3^n}{4^n+\frac{1}{3}\times9^n}$$
$$=\frac{2\times\left(\frac{k}{2}\right)^n+3^n}{4^n+\frac{1}{3}\times9^n}$$
$$=\frac{2\times\left(\frac{k}{18}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{4}{9}\right)^n+\frac{1}{3}}$$

이 수열이 수렴하기 위해서는

$-18<k\le10$

따라서 정수 k는 $-17,\ -16,\ \cdots,\ 18$로 그 개수는 36이다.

5. 정답 ③

$b_n=a_n-\sqrt{n^2+3n+5}$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=2$에서 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$

$b_n=a_n-\sqrt{n^2+3n+5}$에서

$a_n=b_n+\sqrt{n^2+3n+5}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-n)=\lim_{n\to\infty}\left(b_n+\sqrt{n^2+3n+5}-n\right)$$

그런데

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+5}-n\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+3n+5}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3n+5}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+3n+5}+n\right)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+5}{\left(\sqrt{n^2+3n+5}+n\right)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}+1}$$
$$=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(b_n+\sqrt{n^2+3n+5}-n\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}b_n+\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+5}-n\right)$$
$$=0+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

6. 정답 ④

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)(x-3)^n}{5^n}$ 이 수렴하려면 $x+2=0$ 또는

$-1<\frac{x-3}{5}<1$ 이어야 하므로 $x=-2$ 또는

$-2<x<8$

따라서 조건을 만족시키는 정수 x는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ \cdots,$ 7이고 그 개수는 10이다.

7. 정답 ②

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\left(3^{-n}+4^{-n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}2^n\left(\frac{1}{3^n}+4\times\frac{1}{4^n}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

이때

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=2,\quad\sum_{n=1}^{\infty}\left\{4\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=\frac{2}{1-\frac{1}{2}}=4$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\left(3^{-n}+4^{-n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{4\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$
$$=2+4=6$$

8. 정답 ②

수열 $\{a_n\}$이 등비수열이므로 $a_n=ar^{n-1}$이라 하면

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^n+4^{n-1}}=2$에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ar^{n-1}}{3^n+4^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a}{r}\times\left(\frac{r}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{1}{4}}\quad\cdots\cdots㉠$$

이 값이 0이 아닌 값을 가지려면 $r=4$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a}{4}}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{1}{4}}=\frac{\frac{a}{4}}{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{1}{4}}=a=2$$

따라서 $a_n=2\times4^{n-1}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\times4^{n-1}}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$$

[참고]

$-1<\frac{r}{4}<1$이면 ㉠의 극한값은 0

$\frac{r}{4}>1$이면 ㉠은 ∞로 발산

$\frac{r}{4}\le-1$이면 ㉠은 진동

9. 정답 ④

선분 $\mathrm{A_1C_1}$은 공통,

$\overline{\mathrm{C_1B_1}}=\overline{\mathrm{C_1A_2}},\angle\mathrm{C_1B_1A_1}=\angle\mathrm{C_1A_2A_1}=\frac{\pi}{2}$이므로

삼각형 $\mathrm{A_1C_1B_1}$과 삼각형 $\mathrm{A_1C_1A_2}$는 합동인 삼각형이다.

$\overline{\mathrm{A_1B_1}}=\sqrt{13^2-12^2}=5$이므로

$\overline{\mathrm{A_1B_2}}=5$

$\overline{\mathrm{OA_1}}=13$이므로

$\overline{\mathrm{OA_2}}=13-5=8$

삼각형 $\mathrm{A_1OB_1}$과 삼각형 $\mathrm{C_1OA_2}$는 닮은 삼각형이므로

$\overline{\mathrm{OA_1}}:\overline{\mathrm{OB_1}}=\overline{\mathrm{OC_1}}:\overline{\mathrm{OA_2}}\quad\cdots\cdots㉠$

를 만족시킨다.

$\overline{\mathrm{C_1B_1}}=\overline{\mathrm{C_1A_2}}=x$라 하면 ㉠에서

$13:12=(12-x):8$

$12(12-x)=13\times8,12-x=\frac{26}{3},x=\frac{10}{3}$

$\overline{\mathrm{C_1B_1}}=\overline{\mathrm{C_1A_2}}=\frac{10}{3}$

$S_1=2\times\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{C_1B_1}}\times\overline{\mathrm{A_1B_1}}=2\times\frac{1}{2}\times\frac{10}{3}\times5=\frac{50}{3}$

또한 삼각형 $\mathrm{A_1OB_1}$과 삼각형 $\mathrm{A_2OB_2}$는 닮은 삼각형이고 닮음비는

$\frac{\overline{\mathrm{OA_2}}}{\overline{\mathrm{OA_1}}}=\frac{8}{13}$이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$은 첫째항이 $\frac{50}{3}$이고 공비가 $\left(\frac{8}{13}\right)^2$인 등비급수이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{50}{3}}{1-\left(\frac{8}{13}\right)^2}=\frac{50}{3}\times\frac{169}{105}=\frac{1690}{63}$$

10. 정답 181

점 $\mathrm{A_1}$을 원점, 직선 $\mathrm{A_1B_1}$을 x축, 직선 $\mathrm{A_1D_1}$을 y축으로 놓으면

$B_1(1,\ 0)$, $D_1(0,\ 1)$, $P_1\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$, $Q_1\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$,

$R_1\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$

이다. 이때 직선 A_1Q_1의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x$이고, 직선 P_1R_1의 방정식은 $y=-x+\frac{1}{2}$이다.

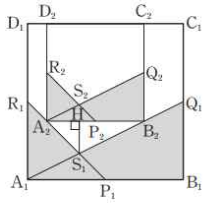
$\frac{1}{2}x=-x+\frac{1}{2}$에서

$\frac{2}{3}x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{3}$

이므로 $S_1\left(\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right)$이다.

다각형 $A_1B_1Q_1S_1R_1$의 넓이는 삼각형 $A_1P_1R_1$의 넓이와 삼각형 $A_1B_1Q_1$의 넓이의 합에서 삼각형 $A_1P_1S_1$의 넓이를 뺀 것이므로

$$T_1=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$



정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 한 변의 길이를 x라 하자.

점 S_1에서 선분 A_2B_2에 내린 수선의 발을 H라 하면

점 $S_1\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{6}\right)$에서 선분 C_1D_1까지의 거리는

$1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$이므로

선분 S_1H의 길이는 $\frac{5}{6}-x$이다.

이때 선분 A_2H의 길이는 $\frac{5}{6}-x$, 선분 B_2H의 길이는 $2\left(\frac{5}{6}-x\right)$이다.

$\overline{A_2H}+\overline{B_2H}=\overline{A_2B_2}$이므로

$\frac{5}{6}-x+2\left(\frac{5}{6}-x\right)=x$

$\frac{5}{6}-x+\frac{5}{6}-2x=x$

$4x=\frac{5}{2}$

$x=\frac{5}{8}$

정사각형 $A_1B_1C_1D_1$과 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 한 변의 길이의 비가 $1:\frac{5}{8}$이므로 다각형 $A_nB_nQ_nS_nR_n$과 다각형 $A_{n+1}B_{n+1}Q_{n+1}S_{n+1}R_{n+1}$의 넓이의 비는 $1:\left(\frac{5}{8}\right)^2$이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}T_n$은 첫째항이 $\frac{1}{3}$이고 공비가 $\left(\frac{5}{8}\right)^2$인 등비급수이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n=\frac{\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{5}{8}\right)^2}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{39}{64}}=\frac{64}{117}$$

따라서 $p=117$, $q=64$이므로

$p+q=181$

11. 정답 ③

$\lim_{x\to2}(x-1)^{\frac{1}{2x-4}}$에서 $x-2=t$로 놓으면 $x\to2$일 때 $t\to0$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}(x-1)^{\frac{1}{2x-4}}&=\lim_{x\to2}\{1+(x-2)\}^{\frac{1}{2(x-2)}}\\&=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{2t}}\\&=\lim_{t\to0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^{\frac{1}{2}}\\&=e^{\frac{1}{2}}\\&=\sqrt{e}\end{aligned}$$

12. 정답 ④

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+ax^2)}{2x^2+b}=6$에서

$\lim_{x\to0}\ln(1+ax^2)=0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to0}(2x^2+b)=0+b=0$

이어야 한다. 즉, $b=0$

이때 $a=0$이면

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+ax^2)}{2x^2+b}=\lim_{x\to0}\frac{\ln1}{2x^2}=\lim_{x\to0}0\neq6$

이므로 $a\neq0$이다.

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+ax^2)}{2x^2+b}&=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+ax^2)}{2x^2}\\&=\frac{a}{2}\times\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+ax^2)}{2x^2}\\&=\frac{a}{2}\times1=\frac{a}{2}=6\end{aligned}$$

즉, $a=12$이므로

$a+b=12+0=12$

13. 정답 ④

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x^2+ax}&=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x(x+a)}\\&=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\times\frac{2}{x+a}\right)\\&=1\times\frac{2}{0+a}\\&=\frac{2}{a}\end{aligned}$$

$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x^2+ax}=\frac{1}{2}$이므로

$\frac{2}{a}=\frac{1}{2}$에서

$a=4$

14. 정답 ②

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1+3x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{e^{2x}-1}{x}}{\frac{\ln(1+3x)}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{e^{2x}-1}{2x}\times2}{\frac{\ln(1+3x)}{3x}\times3}$$

이때 $2x=t$, $3x=s$로 놓으면 $x\to0$일 때, $t\to0$, $s\to0$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=1$,

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{3x}=\lim_{s\to0}\frac{\ln(1+s)}{s}=1$

이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1+3x)}=\frac{2}{3}\times\frac{\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}}{\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{3x}}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{1}=\frac{2}{3}$$

15. 정답 ②

$f(x)=x^2+ax+b$ (a,b는 상수)로 놓으면

$$f(x)g(x)=\begin{cases}\frac{x^2+ax+b}{e^{x-1}-1} & (x\neq1)\\ 4(a+b+1) & (x=1)\end{cases}$$

함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{e^{x-1}-1}=4(a+b+1)$

(i) $x\to1$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $a+b+1=0$에서 $b=-a-1$

(ii) $\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-a-1}{e^{x-1}-1}=0$에서

$\lim_{t\to1}\frac{t}{e^t-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{e^{x-1}-1}=1$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+a+1)}{e^{x-1}-1}=2+a=0$, $a=-2$

$b=-a-1=1$

(i), (ii)에서 $f(x)=x^2-2x+1$이므로

$f(5)=25-10+1=16$

16. 정답 ③

$(x-3)f(x)=2^x+2^{-x+3}-9$에서 $x\neq3$일 때

$f(x)=\frac{2^x+2^{-x+3}-9}{x-3}$ $(x\neq3)$

이다. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 $x=3$에서 연속이고

$f(3)=\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{2^x2^{-x+3}-9}{x-3}$

$g(x)=2^x+2^{-x+3}$이라 하면 $g(3)=9$이고

$$\begin{aligned}g'(x)&=\left(2^x+2^{-x+3}\right)'\\&=\left(2^x\right)'+2^3\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}'\\&=2^x\ln2+2^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^x\ln\frac{1}{2}\\&=2^x\ln2-2^{-x+3}\ln2\\&=\left(2^x-2^{-x+3}\right)\ln2\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}f(3)&=\lim_{x\to3}\frac{2^x+2^{-x+3}-9}{x-3}\\&=\lim_{x\to3}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}\\&=g'(3)=(8-1)\ln2=7\ln2\end{aligned}$$

17. 정답 ⑤

$1+\ln x\le f(x)\le e^{x-1}$ …… ㉠

㉠에 $x=1$을 대입하면 $1\le f(1)\le1$이므로

$f(1)=1$

(i) $x>1$인 경우

㉠에서 $\ln x\le f(x)-1\le e^{x-1}-1$

$x-1>0$이므로

$\frac{\ln x}{x-1}\le\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\le\frac{e^{x-1}-1}{x-1}$

(ii) $x<1$인 경우

㉠ 에서 $\ln x \le f(x)-1 \le e^{x-1}-1$

$x-1<0$이므로

$\frac{e^{x-1}-1}{x-1} \le \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \le \frac{\ln x}{x-1}$

$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$,

$\lim_{x\to1}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=1$

이므로 $f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1$

$g(x)=(2x+\ln x)\ f(x)$에서

$g'(x)=\left(2+\frac{1}{x}\right)f(x)+(2x+\ln x)f'(x)$이므로

$g'(1)=(2+1)f(1)+(2+0)f'(1)$

$=3\times1+2\times1=5$

18. 정답 44

$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha=\frac{1}{5}$이고, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이므로

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{1}{25}}=\frac{2\sqrt6}{5}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=\cos\beta=\frac{3}{5}$이고, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$이므로

$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$

따라서

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\frac{1}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{2\sqrt6}{5}\times\frac{4}{5}$

$=\frac{3}{25}+\frac{8\sqrt6}{25}$

이므로 $p=\frac{3}{25}, q=\frac{8}{25}$이다.

따라서 $100(p+q)=4(3+8)=44$

19. 정답 ②

$\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^2+2x)}{(e^{2x}-1)(x+2)}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin(x^2+2x)}{x^2+2x}\times\frac{2x}{e^{2x}-1}\times\frac{x^2+2x}{2x(x+2)}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^2+2x)}{x^2+2x}\times\frac{1}{\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}}\times\frac{1}{2}$

$=1\times\frac{1}{1}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

20. 정답 ③

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=a$이다.

$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos2x}{x^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(\cos x-\cos2x)(\cos x+\cos2x)}{x^2(\cos x+\cos2x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\cos^2x-\cos^2 2x}{x^2(\cos x+\cos2x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1-\sin^2x-(1-\sin^2 2x)}{x^2(\cos x+\cos2x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin^2x+\sin^2 2x}{x^2(\cos x+\cos2x)}$

$=\lim_{x\to0}\left\{-\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+\left(\frac{\sin2x}{x}\right)^2\right\}$

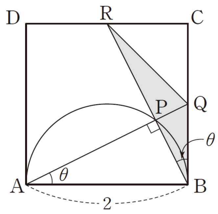
$\times\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x+\cos2x}$

$=(-1^2+2^2)\times\frac{1}{1+1}$

$=\frac{3}{2}$

따라서 $a=\frac{3}{2}$

21. 정답 ④



삼각형 ABQ에서 $\frac{\overline{BQ}}{\overline{AB}}=\tan\theta$이므로

$\overline{BQ}=2\tan\theta$

$\angle APB=\frac{\pi}{2}$에서 $\angle PBC=\theta$이고,

삼각형 BCR에서 $\frac{\overline{BC}}{\overline{BR}}=\cos\theta$이므로

$\overline{BR}=\frac{2}{\cos\theta}$

그러므로 삼각형 BQR의 넓이 $S(\theta)$는

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{BR}\times\overline{BQ}\times\sin(\angle QBR)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\cos\theta}\times2\tan\theta\times\sin\theta$

$=2\tan^2\theta$

따라서

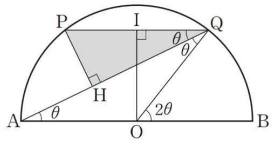
$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\left(2\times\frac{\tan^2\theta}{\theta^2}\right)$

$=\lim_{\theta\to0+}\left\{2\times\left(\frac{\tan\theta}{\theta}\right)^2\right\}$

$=2\times1^2=2$

22. 정답 5

반원의 중심을 O라 하자



$\angle QAB=\theta$이므로

$\angle AQO=\angle AQP=\theta, \angle QOB=2\theta, \angle OQP=2\theta$

점 O에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\overline{QI}=\cos2\theta$ 이므로 $\overline{PQ}=2\cos2\theta$

이때 $\overline{PH}=\overline{PQ}\sin\theta=2\cos2\theta\times\sin\theta$,

$\overline{QH}=\overline{PQ}\cos\theta=2\cos2\theta\times\cos\theta$이므로

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PH}\times\overline{QH}=2\cos^2 2\theta\times\sin\theta\times\cos\theta$

$\frac{\pi}{4}-\theta=t$라 하면

$\pi-4\theta=4t, 2\theta=\frac{\pi}{2}-2t, \theta=\frac{\pi}{4}-t$이므로

$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{S(\theta)}{(\pi-4\theta)^2}$

$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{2\cos^2 2\theta\sin\theta\cos\theta}{(\pi-4\theta)^2}$

$=\lim_{t\to0+}\frac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-2t\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}{(4t)^2}$

$=\lim_{t\to0+}\frac{2\sin^2 2t\sin\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}{16t^2}$

$=\lim_{t\to0+}\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sin2t}{2t}\right)^2\sin\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\times1^2\times\sin\frac{\pi}{4}\times\cos\frac{\pi}{4}$

$=\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\sqrt2}{2}\times\frac{\sqrt2}{2}=\frac{1}{4}$

따라서 $p=4, q=1$이므로

$p+q=4+1=5$

23. 정답 16

$f(x)=a\sin x\cos x+b$라 하면

점 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$이 곡선 $y=f(x)$위의 점이므로

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=a\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}+b$

$=a\times\frac{\sqrt3}{2}\times\frac{1}{2}+b$

$=\frac{\sqrt3 a}{4}+b$

즉, $\frac{\sqrt3 a}{4}+b=\frac{1}{2}$에서

$\sqrt3 a+4b=2$ …… ㉠

한편,

$f'(x)=a\cos x\times\cos x+a\sin x\times(-\sin x)$

$=a(\cos^2x-\sin^2x)$

이고, 점 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$에서의 접선의 기울기가 $\sqrt3$ 이므로

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt3$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=a\left(\cos^2\frac{\pi}{3}-\sin^2\frac{\pi}{3}\right)$

$=a\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^2\right\}$

$=a\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)=-\frac{a}{2}$

즉, $-\frac{a}{2}=\sqrt3$ 에서

$a=-2\sqrt3$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\sqrt3\times(-2\sqrt3)+4b=2$

$4b=8$에서 $b=2$

따라서 $a^2+b^2=(-2\sqrt3)^2+2^2=16$

24. 정답 ④

함수 $f(x)=\frac{x-1}{x^2+1}$ 에서

$f'(x)=\frac{1\times(x^2+1)-(x-1)\times2x}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{(x^2+1)-(2x^2-2x)}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$

이므로

$f'(1)=\frac{-1^2+2\times1+1}{(1^2+1)^2}=\frac{1}{2}$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 0)$ 에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다.

25. 정답 ④

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면 두 함수 $f(x)$, e^{2x}이 실수 전체의 집합에서 미분 가능하므로 함수 $g(x)$도 실수 전체의 집합에서 미분 가능하다.

$g(0)=2$에서 $f(1)=2$이므로

$1+a+b=2$

$a+b=1$ …… ㉠

한편,

$f'(x)=2x+a$,

$g'(x)=f'(e^{2x})\times(e^{2x})'=f'(e^{2x})\times 2e^{2x}$

이고, $g'(0)=f'(1)\times 2=2$에서 $f'(1)=1$이므로

$2+a=1$, $a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$-1+b=1$, $b=2$

따라서 $f(x)=x^2-x+2$이므로

$f(2)=2^2-2+2=4$

26. 정답 ⑤

조건 (가)에서 $\lim\limits_{x\to\ln 2}\frac{f(x)-5}{x-\ln 2}=8$이고, $x\to\ln 2$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

이때 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$는 실수전체의 집합에서 연속이므로

$f(\ln 2)=\lim\limits_{x\to\ln 2}f(x)=5$

따라서 미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to\ln 2}\frac{f(x)-5}{x-\ln 2}=\lim_{x\to\ln 2}\frac{f(x)-f(\ln 2)}{x-\ln 2}$$
$$=f'(\ln 2)=8$$

조건 (나)에서

$\sqrt{4+\{g(x)\}^2}=\frac{f(x)}{e^x}$ …… ㉠

이므로 ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{2g(x)g'(x)}{2\sqrt{4+\{g(x)\}^2}}=\frac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{e^{2x}}$$

$\frac{g(x)g'(x)}{\sqrt{4+\{g(x)\}^2}}=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$ …… ㉡

㉠에 $x=\ln 2$를 대입하면

$$\sqrt{4+\{g(\ln 2)\}^2}=\frac{f(\ln 2)}{e^{\ln 2}}$$
$$=\frac{5}{2}$$

$\sqrt{4+\{g(\ln 2)\}^2}=\frac{5}{2}$의 양변을 제곱하면

$4+\{g(\ln 2)\}^2=\frac{25}{4}$

$\{g(\ln 2)\}^2=\frac{9}{4}$

모든 양수 x에 대하여 $g(x)>0$이므로

$g(\ln 2)=\frac{3}{2}$

㉡에 $x=\ln 2$를 대입하면

$$\frac{g(\ln 2)g'(\ln 2)}{\sqrt{4+\{g(\ln 2)\}^2}}=\frac{f'(\ln 2)-f(\ln 2)}{e^x}$$

즉, $\dfrac{\frac{3}{2}g'(\ln 2)}{\sqrt{4+\left(\frac{3}{2}\right)^2}}=\frac{3}{2}$에서

$g'(\ln 2)=\frac{5}{2}$

한편, $h(x)=f(x)g(x)$에서

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

따라서

$h'(\ln 2)=f'(\ln 2)g(\ln 2)+f(\ln 2)g'(\ln 2)$

$=8\times\frac{3}{2}+5\times\frac{5}{2}=\frac{49}{2}$

27. 정답 ②

$x=\ln\sqrt{t}=\ln t^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln t$에서 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2t}$,

$y=\frac{1}{2}t^2-at$에서 $\frac{dy}{dt}=t-a$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{t-a}{\frac{1}{2t}}$$

$=2t(t-a)=2t^2-2at$ …… ㉠

$t=3$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는 ㉠에 $t=3$을 대입한 값과 같으므로

$2\times 3^2-2\times a\times 3=18-6a=6$

$6a=12$

따라서 $a=2$

28. 정답 ④

$x^2+xy+2y^2=4$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x+y+x\times\frac{dy}{dx}+4y\times\frac{dy}{dx}=0$

$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x-y}{x+4y}$ (단, $x+4y\neq 0$)

$\frac{-2x-y}{x+4y}=\frac{3}{2}$에서 $-4x-2y=3x+12y$

따라서 $y=-\frac{x}{2}$

$y=-\frac{x}{2}$를 $x^2+xy+2y^2=4$에 대입하면

$x^2+x\times\left(-\frac{x}{2}\right)+2\times\left(-\frac{x}{2}\right)^2=4$, $x^2=4$

따라서 $x=2$ 또는 $x=-2$

$\mathrm{P}(2,-1)$, $\mathrm{Q}(-2,1)$로 놓을 수 있고 이때 선분 PQ의 길이는

$\sqrt{(-2-2)^2+(1+1)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

29. 정답 ④

$f(e^x-e^{-x})=x^3+2x$에 $x=0$을 대입하면

$f(e^0-e^{-0})=0^3+0$에서 $f(0)=0$이므로 $g(0)=0$

$f(e^x-e^{-x})=x^3+2x$, $g(f(x))=x$에서

$g(f(e^x-e^{-x}))=g(x^3+2x)$

$g(x^3+2x)=e^x-e^{-x}$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x^3+2x)\times(3x^2+2)=e^x+e^{-x}$

위의 식에 $x=0$을 대입하면

$g'(0)\times 2=1+1$, $g'(0)=1$

따라서 $g(0)+g'(0)=0+1=1$

30. 정답 ②

함수 $g(x)$가 함수 $f(x)$의 역함수이므로

$f(g(x))=x$

이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=1$ …… ㉠

한편, $g(2)=1$이므로

$f(1)=2$

$f'(x)=2^{\ln x}\times\ln 2\times\frac{1}{x}+1$

$=\frac{2^{\ln x}\times\ln 2}{x}+1$

이므로 $f'(1)=1+\ln 2$

따라서 ㉠에 $x=2$를 대입하면

$$g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}$$
$$=\frac{1}{f'(1)}$$
$$=\frac{1}{1+\ln 2}$$

31. 정답 ②

$y=\sin^2 x$에서 $y'=2\sin x\cos x$

$x=t$에서의 접선을 l이라 하면 l의 기울기는 $2\sin t\cos t$

따라서 곡선 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ \sin^2 t)$에서의 접선 l에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2\sin t\cos t}$이므로 직선의 방정식은

$y-\sin^2 t=-\frac{1}{2\sin t\cos t}(x-t)$ …… ㉠

이때 ㉠의 y절편이 $g(t)$이므로

$g(t)=\sin^2 t+\frac{t}{2\sin t\cos t}$

$$\lim_{t\to 0+}g(t)=\lim_{t\to 0+}\left(\sin^2 t+\frac{t}{2\sin t\cos t}\right)$$
$$=\lim_{t\to 0+}\left(\sin^2 t+\frac{1}{2}\times\frac{t}{\sin t}\times\frac{1}{\cos t}\right)$$
$$=0+\frac{1}{2}\times 1\times 1$$
$$=\frac{1}{2}$$

32. 정답 ③

함수 $f(x)$가 $x=-3$에서 극값을 가지므로

$f'(-3)=0$

$f'(x)=\frac{1\times(x^2+a)-(x+1)\times 2x}{(x^2+a)^2}=\frac{-x^2-2x+a}{(x^2+a)^2}$

$f'(-3)=\frac{-(-3)^2-2\times(-3)+a}{\{(-3)^2+a\}^2}=0$에서 $a=3$

$f(x)=\frac{x+1}{x^2+3}$

$f'(x)=\frac{-x^2-2x+3}{(x^2+3)^2}=\frac{-(x+3)(x-1)}{(x^2+3)^2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{6}$ (극소)	↗	$\frac{1}{2}$ (극대)	↘

따라서 $M=\frac{1}{2}$, $m=-\frac{1}{6}$이므로

$M+m=\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{3}$

33. 정답 ②

$f(x)=\ln\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)-kx$에서

$f'(x)=\frac{x}{\frac{1}{2}x^2+1}-k=\frac{2x}{x^2+2}-k$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극값을 가지므로

$f'(1)=\frac{2}{1+2}-k=0$에서 $k=\frac{2}{3}$

즉, 함수 $f(x)=\ln\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)-\frac{2}{3}x$이고,

$f'(x)=\frac{2x}{x^2+2}-\frac{2}{3}=\frac{-2(x^2-3x+2)}{3(x^2+2)}$

$=\frac{-2(x-1)(x-2)}{3(x^2+2)}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이고, 극댓값은

$f(2)=\ln\left(\dfrac{1}{2}\times 2^2+1\right)-\dfrac{2}{3}\times 2=\ln 3-\dfrac{4}{3}$

34. 정답 ④

$f(x)=2e^{2x}-e^{-x}+\dfrac{1}{2}$에서

$f'(x)=4e^{2x}+e^{-x}$

$f''(x)=8e^{2x}-e^{-x}=\dfrac{8e^{3x}-1}{e^x}$

$=\dfrac{(2e^x-1)(4e^{2x}+2e^x+1)}{e^x}$

$f''(x)=0$에서

$2e^x-1=0,\ e^x=\dfrac{1}{2},\ x=-\ln 2$

$x<-\ln 2$에서 $f''(x)<0$, $x>-\ln 2$에서 $f''(x)>0$이고

$f(-\ln 2)=2e^{-2\ln 2}-e^{\ln 2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}-2+\dfrac{1}{2}=-1$

이므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표는 $(-\ln 2,\ -1)$이다.

따라서 $a=-\ln 2,\ b=-1$이므로

$ab=-\ln 2\times(-1)=\ln 2$

35. 정답 ①

$f(x)=|x^2-1|e^{-x}$에서

$f(x)=\begin{cases}(x^2-1)e^{-x} & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 1)\\ (1-x^2)e^{-x} & (-1<x<1)\end{cases}$

ㄱ. $-1<x<1$에서 $f(x)=(1-x^2)e^{-x}$이므로

$f'(x)=-2xe^{-x}+(1-x^2)(-e^{-x})$

$=(x^2-2x-1)e^{-x}$

$f'(0)=(0-0-1)e^0=-1$ (참)

ㄴ. $\displaystyle\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0+}\frac{\{(1+h)^2-1\}e^{-(1+h)}-0}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0+}(2+h)e^{-(1+h)}=2e^{-1}$

$\displaystyle\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0+}\frac{\{1-(1+h)^2\}e^{-(1+h)}-0}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0+}(-2-h)e^{-(1+h)}=-2e^{-1}$

$\displaystyle\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\neq\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다. (거짓)

ㄷ. $x<-1$ 또는 $x>1$일 때

$f'(x)=2xe^{-x}+(x^2-1)(-e^{-x})$

$=-(x^2-2x-1)e^{-x}$

$-1<x<1$일 때

$f'(x)=(x^2-2x-1)e^{-x}$

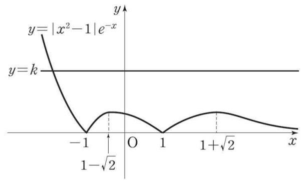
이고 ㄴ과 같은 방법으로 $f(x)$는 $x=1,\ x=-1$에서 미분가능하지 않다. $f'(x)=0$에서

$x=1-\sqrt{2},\ x=1+\sqrt{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$1-\sqrt{2}$
$f'(x)$	$-$		$+$	0
$f(x)$	↘	극소	↗	극대

$\cdots$	1	$\cdots$	$1+\sqrt{2}$	$\cdots$
$-$		$+$	0	$-$
↘	극소	↗	극대	↘



함수 $f(x)$는 $x=1,\ x=-1$에서 극솟값 0을 갖는다.

또, $x=1-\sqrt{2},\ x=1+\sqrt{2}$에서 극댓값을 갖고 $f(1-\sqrt{2})>0,\ f(1+\sqrt{2})>0$,

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$이다.

따라서 양수 k에 대하여 방정식 $f(x)=k$의 실근의 개수의 최솟값은 1이다. (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ이다.

36. 정답 ③

ㄱ. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}-x}\sin x & (x\ge 0)\\ \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}+x}\sin x & (x<0)\end{cases}$이므로

$f(0)=0$에서

$\displaystyle\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}-h}\sin h-0}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0+}\left(\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}-h}\times\frac{\sin h}{h}\right)$

$=\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}$

$\displaystyle\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}+h}\sin h-0}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0-}\left(\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}+h}\times\frac{\sin h}{h}\right)$

$=\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}$

$\displaystyle\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}$이므로 함수

$f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하고 $f'(0)=\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}$ (참)

ㄴ. $x>0$일 때

$f'(x)=\sqrt{2}\left(-e^{\frac{\pi}{4}-x}\right)\sin x+\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}-x}\cos x$

$=\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}-x}(\cos x-\sin x)$

$x<0$일 때

$f'(x)=\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}+x}\sin x+\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}+x}\cos x$

$=\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}+x}(\cos x+\sin x)$

이고 $f'(0)=\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}$이므로

$f'(x)=\begin{cases}\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}-x}(\cos x-\sin x) & (x\ge 0)\\ \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}+x}(\cos x+\sin x) & (x<0)\end{cases}$

$f'(x)=0$에서

$x\ge 0$일 때 $\cos x-\sin x=0$, 즉 $\tan x=1$이므로

$x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{9}{4}\pi,\ \cdots$

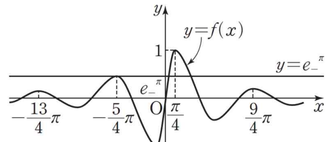
$x<0$일 때 $\cos x+\sin x=0$, 즉 $\tan x=-1$이므로

$x=-\dfrac{\pi}{4},\ -\dfrac{5}{4}\pi,\ -\dfrac{9}{4}\pi,\ \cdots$

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극대일 때 극댓값은

$f(\alpha)=\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}-|\alpha|}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=e^{\frac{\pi}{4}-|\alpha|}$

이므로 $|\alpha|$가 클수록 극댓값이 작아진다.



함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{5}{4}\pi,\ x=\dfrac{\pi}{4}$에서 극대이고

$f\left(-\dfrac{5}{4}\pi\right)=e^{-\pi},\ f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$에서

$f\left(-\dfrac{5}{4}\pi\right)<f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

$|x|>\dfrac{5}{4}\pi$이면 $f(x)$의 극댓값은 $e^{-\pi}$보다 작으므로

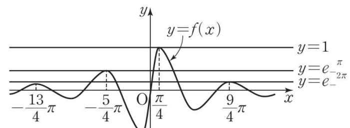
함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $y=e^{-\pi}$과 서로 다른 세 점에서 만난다.

따라서 $g(e^{-\pi})=3$ (거짓)

ㄷ. 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극대일 때, $|\alpha|$가 클수록 극댓값이 작아지므로

$f\left(-\dfrac{13}{4}\pi\right)=e^{-3\pi}<e^{-\frac{5}{2}\pi}<f\left(\dfrac{9}{4}\pi\right)=e^{-2\pi}$

$<f\left(-\dfrac{5}{4}\pi\right)=e^{-\pi}<f\left(\dfrac{\pi}{4}=1\right)<2$



$e^{-\frac{5}{2}\pi}\le k\le 2$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수는 k의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값이 극대일 때마다 줄어들므로 이때 $g(k)$는 불연속이 된다.

따라서 $e^{-\frac{5}{2}\pi}\le k\le 2$에서 함수 $g(k)$가 불연속인 k의 개수는 3이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ 이다.

37. 정답 ⑤

조건 (가)에 의하여

$f(x)=(x-1)^2(x-a)$ (a는 상수)라 하면

$f'(x)=2(x-1)(x-a)+(x-1)^2$

$=3x^2-2(a+2)x+2a+1$

조건 (나)에 의하여 모든 실수 x에 대하여

$f'(x)\ge 0$이어야 하므로 이차방정식

$3x^2-2(a+2)x+2a+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(a+2)^2-3(2a+1)\le 0$

$a^2-2a+1\le 0$

$(a-1)^2\le 0$

즉, $a=1$

따라서 $f(x)=(x-1)^3$이고, $x>1$에서 $f(x)>0$이므로

$\ln f(x)=\ln(x-1)^3$

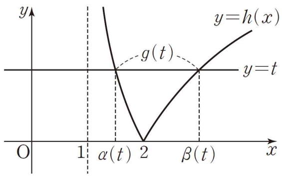
$=3\ln(x-1)$

$h(x)=|\ln f(x)|$라 하면

$h(x)=|3\ln(x-1)|$

$=\begin{cases} -3\ln(x-1) & (1<x<2) \\ 3\ln(x-1) & (x\ge 2) \end{cases}$

이고, 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=t$는 그림과 같다.



양수 t에 대하여 방정식 $h(x)=t$를 만족시키는 실수 x를 $\alpha(t)$, $\beta(t)$ $(\alpha(t)<\beta(t))$라 하자.

(i) $-3\ln(x-1)=t$에서

$\ln(x-1)=-\dfrac{t}{3}$

$x=e^{-\frac{t}{3}}+1$

즉, $\alpha(t)=e^{-\frac{t}{3}}+1$

(ii) $3\ln(x-1)=t$에서

$\ln(x-1)=\dfrac{t}{3}$

$x=e^{\frac{t}{3}}+1$

즉, $\beta(t)=e^{\frac{t}{3}}+1$

(i), (ii)에서

$g(t)=\beta(t)-\alpha(t)$

$=e^{\frac{t}{3}}-e^{-\frac{t}{3}}$

$g'(t)=\dfrac{1}{3}\left(e^{\ln 2}+e^{-\ln 2}\right)$

$=\dfrac{1}{3}\left(2+\dfrac{1}{2}\right)$

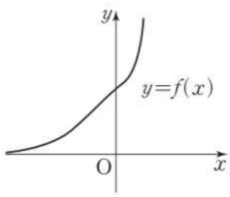
$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{5}{2}$

$=\dfrac{5}{6}$

38. 정답 10

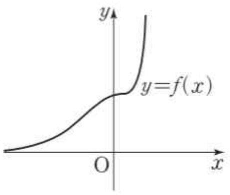
$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

(i) 방정식 $f'(x)=0$이 허근을 갖는 경우



조건 (가)를 만족시키지 않는다.

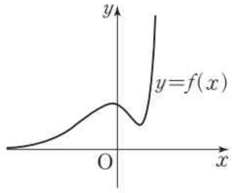
(ii) 방정식 $f'(x)=0$이 중근을 갖는 경우



조건 (나)를 만족시키지 않는다.

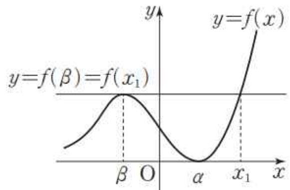
(iii) 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우

① $f(x)$의 극솟값이 0보다 큰 경우

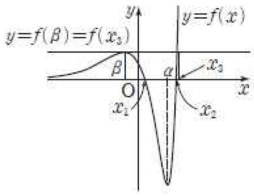


조건 (가)를 만족시키지 않는다.②

ⓐ $f(x)$의 극솟값이 0인 경우

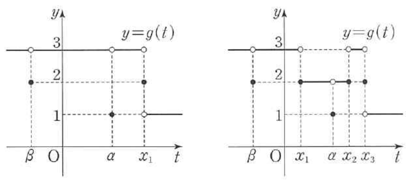


ⓑ $f(x)$의 극솟값이 0보다 작은 경우



위의 ⓐ, ⓑ의 경우 조건 (가), (나)를 모두 만족시킨다.

이때 $x=\alpha$에서 극솟값, $x=\beta$에서 극댓값을 가지며, $f(\alpha)\le 0$, $f(\beta)>0$이다. 함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음과 같다.



$f(\alpha)f(\beta)=-5e$이므로 ⓑ의 경우이다.

$f'(x)=(2x+a)e^x+(x^2+ax+b)e^x$

$=\{x^2+(a+2)x+a+b\}e^x$

에서 $f'(\alpha)=0$, $f'(\beta)=0$이므로 α, β는 이차방정식 $x^2+(a+2)x+a+b=0$의 두 근이다. 근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta=-a-2$, $\alpha\beta=a+b$ …… ㉠

$\alpha^2+a\alpha+b=-2\alpha-a$, $\beta^2+a\beta+b=-2\beta-a$

$f(\alpha)=(\alpha^2+a\alpha+b)e^{\alpha}$, $f(\beta)=(\beta^2+a\beta+b)e^{\beta}$

$f(\alpha)f(\beta)=(\alpha^2+a\alpha+b)(\beta^2+a\beta+b)e^{\alpha+\beta}$

$\alpha+\beta=1$이고 $f(\alpha)f(\beta)=-5e$이므로

$(\alpha^2+a\alpha+b)(\beta^2+a\beta+b)=-5$ …… ㉡

$\alpha+\beta=-a-2=1$이므로 $a=-3$

㉠, ㉡에서

$(\alpha^2+a\alpha+b)(\beta^2+a\beta+b)=(-2\alpha-a)(-2\beta-a)$

$=(2\alpha-3)(2\beta-3)$

$=4\alpha\beta-6(\alpha+\beta)+9$

$=4(-3+b)-6\times1+9$

$=4b-9$

$4b-9=-5$에서 $b=1$

따라서 $a^2+b^2=(-3)^2+1^2=10$

39. 정답 ③

방정식 $(x+2)^2e^{-x}=k$에서 $f(x)=(x+2)^2e^{-x}$이라 하면

$f'(x)=2(x+2)e^{-x}-(x+2)^2e^{-x}=-x(x+2)e^{-x}$

모든 실수 x에 대하여 $e^{-x}>0$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

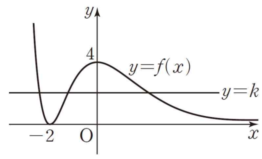
$\lim\limits_{x\to\infty}x^2e^{-x}=0$에서 $x+2=t$로 놓으면

$x\to\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)^2e^{-x}=\lim\limits_{t\to\infty}t^2e^{-t+2}=e^2\times\lim\limits_{t\to\infty}t^2e^{-t}=0$

또 $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)^2e^{-x}=\infty$이고, $f(-2)=0$,

$f(0)=4$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 갖기 위해서는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 3이어야 하므로 이를 만족시키는 실수 k의 값의 범위는 $0<k<4$

따라서 가능한 정수 k의 값은 1, 2, 3으로 그 개수는 3이다.

40. 정답 ②

방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수와 같고,

$f(-x)=-x\sin(-x)+\cos(-x)$

$=x\sin x+\cos x$

$=f(x)$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

$f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$이고,

$0<x<2\pi$일 때 $f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는

$x=\dfrac{3}{2}\pi$이므로

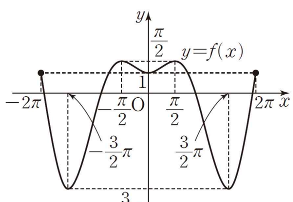
$0\le x\le 2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	극대	↘	극소	↗	1

함수 $f(x)$의 극댓값은 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$, 극솟값은

$f\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)=-\dfrac{3}{2}\pi$

$f'(0)=0$, $f(0)=1$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로 $-2\pi\le x\le 2\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두

점에서 만나야 하므로 $k=\frac{\pi}{2}$ 또는 $k=-\frac{3}{2}\pi$이어야 한다.

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{\pi}{2}+\left(-\frac{3}{2}\pi\right)=-\pi$

41. 정답 ④

$x=4\sqrt{2t}$, $y=t^2+\frac{1}{t}$에서

$\frac{dx}{dt}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{t}}$, $\frac{dy}{dt}=2t-\frac{1}{t^2}$

이므로 점 P의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{t}}\right)^2+\left(2t-\frac{1}{t^2}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{8}{t}+4t^2-\frac{4}{t}+\frac{1}{t^4}}$$
$$=\sqrt{4t^2+\frac{4}{t}+\frac{1}{t^4}}$$
$$=\sqrt{\left(2t+\frac{1}{t^2}\right)^2}$$
$$=\left|2t+\frac{1}{t^2}\right|$$
$$=2t+\frac{1}{t^2}\quad (t>0\text{이므로})$$

$f(t)=2t+\frac{1}{t^2}$이라 하면

$f'(t)=2-\frac{2}{t^3}$

이므로 $f'(t)=0$에서 $t=1$

$t=1$의 좌우에서 $f'(t)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(t)$는 $t=1$에서 극소이며 최소이다.

$\frac{dx}{dt}=2\sqrt{2}\,t^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{dy}{dt}=2t-t^{-2}$에서

$\frac{d^2x}{dt^2}=-\sqrt{2}\,t^{-\frac{3}{2}}$, $\frac{d^2y}{dt^2}=2+2t^{-3}$

이므로 $t=1$일 때의 점 P의 가속도는 $(-\sqrt{2},\ 4)$이다.

따라서 $a=-\sqrt{2}$, $b=4$이므로

$$a^2+b^2=(-\sqrt{2})^2+4^2$$
$$=2+16=18$$

42. 정답 ④

$f'(x)=\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$이므로

$$f(x)=\int\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2dx$$
$$=\int\frac{1}{x}\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\right)dx$$
$$=\int\left(\frac{1}{x}-2x^{-\frac{3}{2}}+x^{-2}\right)dx$$
$$=\ln x+4x^{-\frac{1}{2}}-x^{-1}+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

$f(1)=3$이므로

$4-1+C=3$에서 $C=0$

따라서

$f(x)=\ln x+4x^{-\frac{1}{2}}-x^{-1}$

이므로

$$f(4)=\ln 4+4\times 4^{-\frac{1}{2}}-4^{-1}$$
$$=2\ln 2+4\times\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$$
$$=\frac{7}{4}+2\ln 2$$

43. 정답 ③

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int(1+2\sin x)\cos x\,dx$$

이때 $1+2\sin x=t$로 놓으면

$2\cos x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int(1+2\sin x)\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int t\,dt$$
$$=\frac{1}{4}t^2+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

즉, $f(x)=\frac{1}{4}(1+2\sin x)^2+C$

이때, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{1}{4}+C$ 이므로 $\frac{1}{4}+C=\frac{1}{2}$에서 $C=\frac{1}{4}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}(1+2\sin x)^2+\frac{1}{4}$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{9}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$

44. 정답 15

$f'(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{2x-1}}$이므로

$$f(x)=\int\frac{2x+1}{\sqrt{2x-1}}dx$$
$$=\int\frac{(2x-1)+2}{\sqrt{2x-1}}dx$$
$$=\int\left(\sqrt{2x-1}+\frac{2}{\sqrt{2x-1}}\right)dx$$

$2x-1=t$로 놓으면 $2=\frac{dt}{dx}$ 이므로

$f(x)$

$$=\int\left(\sqrt{2x-1}+\frac{2}{\sqrt{2x-1}}\right)dx=\int\left(\frac{1}{2}\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt$$
$$=\int\left(\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}+t^{-\frac{1}{2}}\right)dt=\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}+2t^{\frac{1}{2}}+C$$
$$=\frac{1}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}}+2(2x-1)^{\frac{1}{2}}+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

$f(1)=\frac{7}{3}$이므로 $\frac{1}{3}+2+C=\frac{7}{3}$에서 $C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}}+2(2x-1)^{\frac{1}{2}}$이므로

$f(5)=\frac{1}{3}\times 9^{\frac{3}{2}}+2\times 9^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}\times 27+2\times 3=9+6=15$

[다른 풀이]

$f'(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{2x-1}}$이므로

$$f(x)=\int\frac{2x+1}{\sqrt{2x-1}}dx=\int\frac{(2x-1)+2}{\sqrt{2x-1}}dx$$
$$=\int\left(\sqrt{2x-1}+\frac{2}{\sqrt{2x-1}}\right)dx$$

$\sqrt{2x-1}=t$로 놓으면

$\frac{1}{\sqrt{2x-1}}=\frac{dt}{dx}$, 즉 $\frac{1}{t}=\frac{dt}{dx}$ 이므로

$$f(x)=\int\left(\sqrt{2x-1}+\frac{2}{\sqrt{2x-1}}\right)dx$$
$$=\int\left\{\left(t+\frac{2}{t}\right)\times t\right\}dt$$
$$=\int(t^2+2)dt=\frac{1}{3}t^3+2t+C$$
$$=\frac{1}{3}(\sqrt{2x-1})^3+2\sqrt{2x-1}+C$$

(단, C는 적분상수)

$f(1)=\frac{7}{3}$이므로 $\frac{1}{3}+2+C=\frac{7}{3}$에서 $C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}}+2(2x-1)^{\frac{1}{2}}$이므로

$f(5)=\frac{1}{3}\times 9^{\frac{3}{2}}+2\times 9^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}\times 27+2\times 3=9+6=15$

45. 정답 ②

$$\int_0^1 2x\ln(x+1)dx+\int_0^1\ln(x+1)dx$$
$$=\int_0^1(2x+1)\ln(x+1)dx$$

$u(x)=\ln(x+1)$, $v'(x)=2x+1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x+1}$, $v(x)=x^2+x$이므로

$$\int_0^1(2x+1)\ln(x+1)dx$$
$$=\Big[(x^2+x)\ln(x+1)\Big]_0^1-\int_0^1\left\{(x^2+x)\times\frac{1}{x+1}\right\}dx$$
$$=2\ln 2-\int_0^1 x\,dx$$
$$=2\ln 2-\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=2\ln 2-\frac{1}{2}$$

46. 정답 ④

$f'(x)=e^{-x}\cos x$이므로 $f(x)=\int e^{-x}\cos x\,dx$

$u(x)=\cos x, v'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$u'(x)=-\sin x, v(x)=-e^{-x}$이므로

$$f(x)=\int e^{-x}\cos x\,dx$$
$$=-e^{-x}\cos x-\int\{(-e^{-x})\times(-\sin x)\}dx$$
$$=-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\sin x\,dx$$
$$\int e^{-x}\sin x\,dx=-e^{-x}\sin x-\int(-e^{-x})\cos x\,dx$$
$$=-e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\cos x\,dx$$

이므로

$$\int e^{-x}\cos x\,dx$$
$$=-e^{-x}\cos x-\left(-e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\cos x\,dx\right)$$
$$=e^{-x}(\sin x-\cos x)-\int e^{-x}\cos x\,dx$$

$f(x)=\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)+C$ (단, C는 적분상수)

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)$이므로

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{6}}\left\{\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{6}}\left(-\sin\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{6}}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{6}}\left(\sin\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

에서

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)\times f\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{6}}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=-\frac{1}{4}e^{\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=-\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$$

47. 정답 ①

$\int_1^x (x-t)f'(t)dt = x\ln x + ax^2 + b$에서

$\int_1^x xf'(t)dt - \int_1^x tf'(t)dt = x\ln x + ax^2 + b$

…… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=a+b$ ……㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f'(t)dt + xf'(x) - xf'(x) = \ln x + 1 + 2ax$

$\int_1^x f'(t)dt = \ln x + 1 + 2ax$ …… ㉢

㉢의 양변에 x=1을 대입하면

$0=1+2a$에서 $a=-\frac{1}{2}$

$a=-\frac{1}{2}$을 ㉡에 대입하면 $b=\frac{1}{2}$

㉢에서 $\int_1^x f'(t)dt = \ln x + 1 - x$이므로

$f\left(\frac{1}{b}\right) - f(1) = f(2) - f(1) = \int_1^2 f'(t)dt$

$=\ln 2 + 1 - 2 = \ln 2 - 1$

48. 정답 24

함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{1}{2x-1}\int_{\frac{1}{2}}^x f(t)dt = -1$이므로

$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{1}{2x-1}\int_{\frac{1}{2}}^x f(t)dt = \frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{F(x)-F\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{2}F'\left(\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}\times a\times\frac{5}{2}\times\ln\frac{1}{2}$

$=-\frac{5}{4}a\ln 2 = -1$

에서 $a=\frac{4}{5\ln 2}$

따라서 $f(x)=\frac{4}{5\ln 2}(x+2)\ln x$이므로

$f(8)=\frac{4}{5\ln 2}\times 10\ln 8 = \frac{4}{5\ln 2}\times 10\times 3\ln 2 = 24$

49. 정답 ④

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2\pi}{n}\sin\left(1+\frac{k}{2n}\right)\pi\cos\left(1-\frac{k}{2n}\right)\pi\right\}$

$=2\pi\int_0^1 \sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\pi-\frac{\pi}{2}x\right)dx$

$=2\pi\int_0^1 \sin\frac{\pi}{2}x\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$

$\sin\frac{\pi}{2}x = t$로 놓으면 $\frac{\pi}{2}cos\frac{\pi}{2}x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=0, x=1$일 때 $t=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2\pi}{n}\sin\left(1+\frac{k}{2n}\right)\pi\cos\left(1-\frac{k}{2n}\right)\pi\right\}$

$=2\pi\int_0^1 \sin\frac{\pi}{2}x\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$

=$2\pi\times\frac{2}{\pi}\int_0^1 t\,dt$

$=4\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1$

$=4\times\frac{1}{2}=2$

[다른 풀이]

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2\pi}{n}\sin\left(1+\frac{k}{2n}\right)\pi\cos\left(1-\frac{k}{2n}\right)\pi\right\}$

$=2\pi\int_0^1 \sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\pi-\frac{\pi}{2}x\right)dx$

$=2\pi\int_0^1 \sin\frac{\pi}{2}x\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$

이때 $2\sin\frac{\pi}{2}x\cos\frac{\pi}{2}x=\sin\pi x$이므로

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2\pi}{n}\sin\left(1+\frac{k}{2n}\right)\pi\cos\left(1-\frac{k}{2n}\right)\pi\right\}$

$=2\pi\int_0^1 \sin\frac{\pi}{2}x\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$

$=\pi\int_0^1 \sin\pi x\,dx$

$=\pi\left[-\frac{1}{\pi}cos\,\pi x\right]_0^1$

$=\pi\times\left\{\frac{1}{\pi}-\left(-\frac{1}{\pi}\right)\right\}=2$

[다른 풀이]

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2\pi}{n}\sin\left(1+\frac{k}{2n}\right)\pi\cos\left(1-\frac{k}{2n}\right)\pi\right\}$

=$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2\pi}{n}\sin\left(\pi+\frac{k\pi}{2n}\right)\cos\left(\pi-\frac{k\pi}{2n}\right)\right\}$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\pi+x)\ \cos\ (\pi-x)dx$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos x\,dx$

$=4\int_0^1 t\,dt$

$=4\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1$

$=4\times\frac{1}{2}=2$

[다른 풀이]

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2\pi}{n}\sin\left(1+\frac{k}{2n}\right)\pi\cos\left(1-\frac{k}{2n}\right)\pi\right\}$

=$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2\pi}{n}\sin\left(\pi+\frac{k\pi}{2n}\right)\cos\left(\pi-\frac{k\pi}{2n}\right)\right\}$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\pi+x)\ \cos(\pi-x)dx$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos x\,dx$

이때 $2\sin x\cos x = \sin 2x$이므로

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2\pi}{n}\sin\left(1+\frac{k}{2n}\right)\pi\cos\left(1-\frac{k}{2n}\right)\pi\right\}$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos x\,dx$

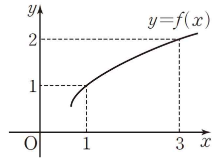
$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx$

$=2\left[-\frac{1}{2}cos\,2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=2\times\left\{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}=2$

50. 정답 6

함수 $y=f(x)$의 그래프가 좌표평면의 두 점 $(1,\ 1)$, $(3,\ 2)$를 지나고, $f'(x)>0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



(ⅰ) $\int_1^9 f'(\sqrt{x})dx$에서 $\sqrt{x}=t$로 놓으면

$x=1$일 때 $t=1$, $x=9$일 때 $t=3$이고,

$\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{dt}{dx}$, $\frac{1}{2t}=\frac{dt}{dx}$이므로

$\int_1^9 f'(\sqrt{x})dx = \int_1^3 2tf'(t)dt$

이때 $\int_1^3 2tf'(t)dt$에서

$u(t)=2t$, $v'(t)=f'(t)$로 놓으면

$u'(t)=2$, $v(t)=f(t)$이므로

$\int_1^3 2tf'(t)dt = \left[2tf(t)\right]_1^3 - 2\int_1^3 f(t)dt$

$=6f(3)-2f(1)-2\int_1^3 f(t)dt$

조건 (가)에서 $f(1)=1$, $f(3)=2$이고,

조건 (나)에서 $\int_1^3 f(x)dx=\frac{7}{2}$이므로

$\int_1^3 2tf'(t)dt = 6\times 2-2\times 1-2\times\frac{7}{2}=3$

즉, $\int_1^9 f'(\sqrt{x})dx=3$

(ⅱ) $\int_1^4 \frac{g(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$에서 $\sqrt{x}=s$로 놓으면

$x=1$일 때 $s=1$, $x=4$일 때 $s=2$이고,

$\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{ds}{dx}$이므로

$\int_1^4 \frac{g(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = \int_1^2 2g(s)ds$

이때 $\int_1^2 g(s)ds$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 y축 및 두 직선 $y=1$, $y=2$로 둘러싸인 부분의 넓이이므로

$\int_1^2 g(s)ds = 3\times 2-1\times 1-\frac{7}{2}=\frac{3}{2}$

즉, $\int_1^4 \frac{g(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = 2\times\frac{3}{2}=3$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$\int_1^9 f'(\sqrt{x})dx + \int_1^4 \frac{g(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = 3+3=6$

51. 정답 ①

$f(-x)=-f(x)$이므로 곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이다. 또

$f'(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}+xe^{-\frac{x^2}{2}}\times(-x)$

$=e^{-\frac{x^2}{2}}\times(1-x^2)$

이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$x\ge 0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$	0	↗	극대	↘

$f''(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}\times(-x)\times(1-x^2)+e^{-\frac{x^2}{2}}\times(-2x)$

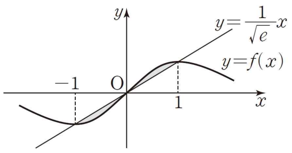
$=x(x^2-3)e^{-\frac{x^2}{2}}$

에서 $0<x<1$일 때 $f''(x)<0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록하다.

또 $xe^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}x$에서 $x\left(e^{-\frac{x^2}{2}}-e^{-\frac{1}{2}}\right)=0$이므로

$x=0$ 또는 $x=1$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{\sqrt{e}}x$는 그림과 같다.



구하는 넓이를 S라 하면

$\frac{1}{2}S=\int_0^1 xe^{-\frac{x^2}{2}}dx-\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{\sqrt{e}}$

이때 $\int_0^1 xe^{-\frac{x^2}{2}}dx$에서 $\frac{x^2}{2}=t$로 놓으면

$x=0$일 때 $t=0$, $x=1$일 때 $t=\frac{1}{2}$이고,

$x=\frac{dt}{dx}$이므로

$\int_0^1 xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\left[-e^{-t}\right]_0^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{e}}+1$

따라서 $\frac{1}{2}S=\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}+1\right)-\frac{1}{2\sqrt{e}}=1-\frac{3}{2\sqrt{e}}$에서

$S=2-\frac{3}{\sqrt{e}}$이므로 $p=2$

52. 정답 51

$f(x)=\sin x\sqrt{\cos x}$에서

$f'(x)=\cos x\sqrt{\cos x}+\sin x\times\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$

$=\frac{2\cos^2 x-\sin^2 x}{2\sqrt{\cos x}}$

$f'(\alpha)=0$에서

$2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=0$ …… ㉠

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$이므로 ㉠과 연립하여 풀면

$\sin^2\alpha=\frac{2}{3}$

$\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

이다. x축 위의 점 $(t,0)\left(\frac{\pi}{6}\le t\le\alpha\right)$를 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $\sin t\sqrt{\cos t}$ 인 정사각형이므로 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=(\sin t\sqrt{\cos t})^2=\sin^2 t\cos t$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$V=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\alpha}\sin^2 t\cos t\,dt$

$\sin t=s$로 놓으면 $\cos t=\frac{ds}{dt}$이고

$t=\frac{\pi}{6}$일 때 $s=\frac{1}{2}$, $t=\alpha$일 때 $s=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$이므로

$V=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\alpha}\sin^2 t\cos t\,dt=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}s^2 ds=\left[\frac{1}{3}s^3\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$

$=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}=\frac{2\sqrt{6}}{27}-\frac{1}{24}$

따라서 $p=\frac{2}{27}$, $q=-\frac{1}{24}$이므로

$\frac{2}{p}-\frac{1}{q}=27-(-24)=51$

53. 정답 23

$1\le t\le4$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{t})^2=\frac{\sqrt{3}}{4}t$

구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$V=\int_1^4 S(t)\,dt$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_1^4 t\,dt$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^4=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(8-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{15}{2}=\frac{15}{8}\sqrt{3}$

따라서 $p=8$, $q=15$이므로

$p+q=8+15=23$

54. 정답 12

$x=4e^t$에서 $\frac{dx}{dt}=4e^t$, $y=2t-e^{2t}$에서

$\frac{dy}{dt}=2-2e^{2t}$이므로

$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(4e^t)^2+(2-2e^{2t})^2}$

$=\sqrt{4(e^{2t}+1)^2}$

$=2(e^{2t}+1)$

따라서 $t=\ln 2$에서 $t=\ln 4$까지 점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$s=\int_{\ln 2}^{\ln 4}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

$=2\int_{\ln 2}^{\ln 4}(e^{2t}+1)\,dt$

$=2\left[\frac{1}{2}e^{2t}+t\right]_{\ln 2}^{\ln 4}$

$=2\times\{(8+2\ln 2)-(2+\ln 2)\}$

$=12+2\ln 2$

즉, $m=12$

55. 정답 ②

$f(x)=\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}$에서 $f'(x)=(x+2)^{\frac{1}{2}}$이므로

$6\le x\le13$에서 곡선 $y=f(x)$의 길이를 l이라 하면

$l=\int_6^{13}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$

$=\int_6^{13}\sqrt{1+(x+2)}\,dx$

$=\int_6^{13}\sqrt{x+3}\,dx$

$=\left[\frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}\right]_6^{13}$

$=\frac{2}{3}\times\left(16^{\frac{3}{2}}-9^{\frac{3}{2}}\right)$

$=\frac{2}{3}\times37$

$=\frac{74}{3}$