수학영역 정답 및 풀이

■ [공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]

01. ②	02. ⑤	03. ④	04. ③	05. ①
06. ①	07. ②	08. ④	09. ③	10. ③
11. ①	12. ①	13. ⑤	14. ③	15. ④
16. 2	17. 10	18. 15	19. 9	20. 48
21. 11	22. 32			

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sqrt[3]{9}\times3^{-\frac{5}{3}}=3^{\frac{2}{3}}\times3^{-\frac{5}{3}}$

$=3^{\frac{2}{3}-\frac{5}{3}}$

$=3^{-1}=\frac{1}{3}$

정답 ②

2. **출제의도** : 다항함수의 도함수를 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=3x^2-x+1$에서

$f'(x)=6x-1$

따라서

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=f'(1)$

$=6\times1-1=5$

정답 ⑤

3. **출제의도** : $\sum$의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sum_{k=1}^{5}(2a_k+b_k)=19$에서

$2\sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=1}^{5}b_k=19$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k)=10$에서

$\sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=1}^{5}b_k=10$ …… ㉡

㉠－㉡을 하면

$\sum_{k=1}^{5}a_k=19-10=9$

정답 ④

4. **출제의도** : 그래프를 보고 함수의 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to-1-}f(x)=-1$, $\lim_{x\to1+}f(x)=1$

이므로

$\lim_{x\to-1-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)$

$=-1+1$

$=0$

정답 ③

5. **출제의도** : 곱의 미분법을 이용하여 함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=3(x^2-2x+2)+(3x-1)\times(2x-2)$

$=9x^2-14x+8$

$f'(2)=9\times2^2-14\times2+8$

$=36-28+8=16$

정답 ①

6. **출제의도** : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 tan의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 : $\cos^2\theta=\dfrac{1}{10}$을

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에 대입하면

$\sin^2\theta=1-\dfrac{1}{10}=\dfrac{9}{10}$

$$\tan^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\frac{9}{10}}{\frac{1}{10}}=9$$

한편 $\dfrac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$일 때 $\tan\theta<0$이므로

$\tan\theta=-3$

정답 ①

7. **출제의도** : 함수의 극솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=3x^2+a$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이므로

$f'(-1)=3+a=0$

$a=-3$

$f(x)=x^3-3x+9$이고,

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이므로 함수 $f(x)$의 극솟값은

$f(1)=1-3+9=7$

정답 ②

8. **출제의도** : 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\overline{\mathrm{AC}}=x$라 하면

$a=8,\ b=x,\ c=4$이므로

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$-\dfrac{1}{4}=\dfrac{x^2+4^2-8^2}{2\times x\times4}$

$x^2+2x-48=0$

$(x+8)(x-6)=0$

$x=6\ (\because\ x>0)$

따라서 선분 AC의 길이는 6이다.

정답 ④

9. **출제의도** : 정적분을 활용하여 두 점의 위치가 같아지는 시각을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

출발한 후 시각 $t=k$일 때 점 P의 위치는

$$0+\int_0^k v_1(t)dt=\int_0^k (t^2-t)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2\right]_0^k$$
$$=\frac{1}{3}k^3-\frac{1}{2}k^2$$

출발한 후 시각 $t=k$일 때 점 Q의 위치는

$$0+\int_0^k v_2(t)dt=\int_0^k t\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^k$$
$$=\frac{1}{2}k^2$$

$t=k$에서 두 점 P, Q의 위치가 같으므로

$$\frac{1}{3}k^3-\frac{1}{2}k^2=\frac{1}{2}k^2$$

$$\frac{1}{3}k^3-k^2=0$$

$$\frac{1}{3}k^2(k-3)=0$$

따라서 양수 k의 값은 3이다.

정답 ③

10\. **출제의도** : 로그의 성질과 밑의 변환을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 식에서 로그의 밑을 3으로 변환하면

$$\log_9 a=\frac{1}{2}\log_3 a,\ \log_9 b=\frac{1}{2}\log_3 b$$

이므로

$$\frac{1}{2}\log_3 a+\log_3 b=2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\log_3 a=4\log_3 b \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\frac{1}{2}\times 4\log_3 b+\log_3 b=2$$

에서 $\log_3 b=\frac{2}{3}$이고

㉡에서 $\log_3 a=\frac{8}{3}$

이때

$$\log_3\frac{a}{b}=\log_3 a-\log_3 b=\frac{8}{3}-\frac{2}{3}=2$$

이므로

$$\frac{a}{b}=3^2=9$$

정답 ③

11\. **출제의도** : 함수의 극한의 성질을 이용하여 함수를 결정할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+2)}{x(f(x)-3)}$에서

$x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to 0}f(x+2)=0$에서 $f(2)=0$

$$\cdots\cdots ㉠$$

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x+2)}{x(f(x)-3)}$에서

함수 $f(x)$가 일차함수이므로

$\lim\limits_{x\to 3}f(x+2)=f(5)\neq 0$

이때 $\lim_{x\to 3} x(f(x)-3) \neq 0$이면

$\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x+2)}{x(f(x)-3)}$의 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to 3} x(f(x)-3)=0$

이어야 한다.

즉, $3(f(3)-3)=0$에서 $f(3)=3$

$\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)=3(x-2)$

따라서 $f(4)=3\times 2=6$

정답 ①

12. **출제의도** : 등비수열의 일반항을 이용하여 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 : 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면 $r>0$이고

$a=0$이면 주어진 식을 만족시키지 못하므로 $a\neq 0$

$2a_1(a_1+a_3)=5a_2(a_1+a_2)$에서

$2a(a+ar^2)=5ar(a+ar)$

$2a^2(1+r^2)=5a^2r(1+r)$

$2+2r^2=5r+5r^2$

$3r^2+5r-2=0$

$(3r-1)(r+2)=0$

$r>0$이므로 $r=\dfrac{1}{3}$

$2a(a+ar^2)=20$, $a^2(1+r^2)=10$에서

$a^2\times\left(1+\dfrac{1}{9}\right)=10$, $a^2=9$

따라서 $a_1\times a_6=a^2r^5=9\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^5=\dfrac{1}{27}$

정답 ①

13. **출제의도** : 정적분을 이용하여 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

모든 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$이고 양수 t에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=0$, $x=t$로 둘러싸인 도형의 넓이가 $S(t)$이므로

$$S(t)=\int_0^t |f(x)-g(x)|\,dx$$

$$=\int_0^t (f(x)-g(x))\,dx$$

ㄱ. $S'(t)=f(t)-g(t)=t^2-2t+a$

$f(1)=g(1)+1$에서 $f(1)-g(1)=1$이므로

$S'(1)=f(1)-g(1)=1-2+a$

$1=a-1$

$a=2$ (거짓)

ㄴ. $S(3)=\displaystyle\int_0^3 (f(x)-g(x))\,dx$

$=\displaystyle\int_0^3 (x^2-2x+2)\,dx$

$=\left[\dfrac{1}{3}x^3-x^2+2x\right]_0^3$

$=6$ (참)

ㄷ. $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$

이므로 곡선 $y=h(x)$는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다. $\cdots\cdots$ ㉠

$S(4)$의 값은 곡선 $y=h(x)$와 두 직선 $x=0$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이이므로 ㉠에 의해 곡선 $y=h(x)$와 두 직선 $x=-2$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이, 즉 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선

$x=-2$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

14. 출제의도 : 삼각함수의 그래프를 이용하여 삼각함수를 포함한 방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\left(\cos(b\pi x)-\frac{1}{2}\right)\left(a\cos(b\pi x)+\frac{a+2}{2}\right)=0 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

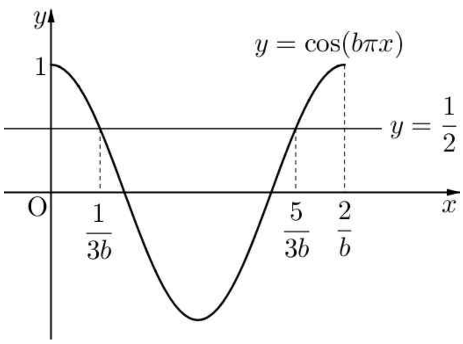
방정식 ㉠에서

$\cos(b\pi x)=\dfrac{1}{2}$ 또는

$\cos(b\pi x)=-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{a}\right)$

함수 $y=\cos(b\pi x)$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{b\pi}=\dfrac{2}{b}$

이고, $0\le x\le\dfrac{2}{b}$에서 함수 $y=\cos(b\pi x)$의 그래프는 그림과 같다.



b가 자연수이므로 $0\le x\le 2$에서 함수 $y=\cos(b\pi x)$의 주기가 b번 반복됨을 알 수 있고, $a>0$이므로 a의 값의 범위에 따라 조건을 만족시키는 자연수 b의 값을 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) $a>2$일 때,

$\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{a}<1$이므로 $0\le x\le\dfrac{2}{b}$에서 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

그러므로 $0\le x\le 2$에서 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수는 $4b$이다.

그런데, $4b=15$를 만족하는 자연수 b의 값은 존재하지 않는다.

(ⅱ) $a=2$일 때,

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{a}=1$이므로 $0\le x\le\dfrac{2}{b}$에서 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

그러므로 $0\le x\le 2$에서 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수는 $3b$이다.

즉, $3b=15$에서 $b=5$

(ⅲ) $0<a<2$일 때

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{a}>1$이므로 $0\le x\le\dfrac{2}{b}$에서 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

그러므로 $0\le x\le 2$에서 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수는 $2b$이다.

그런데, $2b=15$를 만족하는 자연수 b의 값은 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $a=2$, $b=5$

따라서 $a+b=2+5=7$

정답 ③

15. 출제의도 : 정적분 사이의 관계를 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 찾고 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 $\int_a^b |f(x)|dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$

가 성립하려면 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 함수 $f(x)$는 $f(x) \geq 0$이거나 $f(x) \leq 0$이어야 한다.

삼차함수 $f(x)$의 상수항이 0이므로

$f(0)=0$ …… ㉠

조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 열린 구간 $(p,\ p+3)$에서 부호가 바뀌어야 한다. 즉 $f(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 부호가 반대인 실수 a가 열린구간 $(p,\ p+3)$에 존재하여야 한다.

$p<a<p+3,\ a-3<p<a$

이때 조건 (가)를 만족시키는 실수 p의 범위가 $0<p<3$이므로 두 범위 $a-3<p<a,\ 0<p<3$은 일치한다.

$a-3=0$에서 $a=3$

즉 $f(3)=0$ …… ㉡

한편 $x=0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 접하지 않는다고 하자. 즉 0이 닫힌 구간 $[p,\ p+3]$에 포함된다고 하면 $p<0<p+3$에서 $-3 \leq p \leq 0$이어야 하므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=0$인 점에서 x축과 접해야 한다.

$f'(0)=0$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

함수 $f(x)$를 $f(x)=ax^2(x-3)$(단, a는 상수)라 놓을 수 있다.

또한 조건 (나)에서 함수 $f(x)+q$는 닫힌 구간 $[0,\ 3]$에서 부호가 바뀌어야 한다.

$$f'(x)=2ax(x-3)+ax^2$$
$$=ax\{2(x-3)+x\}$$
$$=3ax(x-2)$$

이므로 a의 부호에 따라 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

(i) $a>0$일 때,

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$	(0)	$-$	0	$+$	(0)
$f(x)$		↘	극소	↗	

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 $f(x) \leq 0$이다.

(ii) $a<0$일 때,

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$	(0)	$+$	0	$-$	(0)
$f(x)$		↗	극대	↘	

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[0,\ 3]$에서 $f(x) \geq 0$이고 $0<q<1$이므로 $f(x)+q$는 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 $f(x)+q>0$이 되어 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(i), (ii)에 의하여 $a>0$

닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $f(x)=ax^2(x-3)$는 $x=2$에서 극소이자 최솟값을 갖고

$f(2)=a \times 2^2 \times (2-3) = -4a$이므로

$-4a \leq f(x) \leq 0,\ -4a+q \leq f(x)+q \leq q$

함수 $f(x)+q$는 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 부호가 바뀌므로

$-4a+q<0,\ q>0$

즉 $0<q<4a$에서 $4a=1,\ a=\dfrac{1}{4}$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2(x-3)$이므로

$f(6)=\dfrac{1}{4} \times 6^2 \times 3 = 27$

정답 ④

16. 출제의도 : 지수방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$3^{x-6}=3^{-2x}$

$x-6=-2x$

$3x=6$

$x=2$

정답 2

17. **출제의도** : 다항함수를 적분할 수 있는가?

정답풀이 : $f'(x)=6x^2+5$이므로

$f(x)=\int(6x^2+5)dx=2x^3+5x+C$

$f(0)=3$이므로 $C=3$

따라서 $f(x)=2x^3+5x+3$이므로

$f(1)=2\times1^3+5\times1+3=10$

정답 10

18. **출제의도** : 주어진 조건을 이용하여 등차수열의 일반항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_5=a_2-6$에서 $a_5-a_2=-6$

즉, $3d=-6$에서 $d=-2$

따라서

$a_1=a_6-5d$

$=5-5\times(-2)$

$=5+10=15$

정답 15

19. **출제의도** : 접선의 방정식을 이용하여 접선의 y절편을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3-5x^2+3x+6$이라 하면

$f'(x)=3x^2-10x+3$

$f'(1)=3-10+3=-4$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,5)$에서의 접선의 기울기가 -4이므로 접선의 방정식은

$y-5=-4(x-1)$

$y=-4x+9$

따라서 이 접선의 y절편은

9

정답 9

20. **출제의도** : 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 빈칸에 들어갈 알맞은 수를 추론할 수 있는가?

정답풀이 :

제1사분면에 있는 점 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$는 두 곡선

$y=f(x),\ y=g(x)$

위의 점이므로, 두 양수 $\alpha,\ \beta$가

$\beta=b^{\alpha},\ \beta=-\log_b\alpha$

를 만족시킨다.

$\alpha\beta^3=1$이고 $\alpha=\log_b\beta,\ \beta=-\log_b\alpha$이므로

$3\alpha-\beta=3\log_b\beta+\log_b\alpha=\log_b(\alpha\beta^3)=0$

이다.

이때 $3\alpha-\beta=0$에서 $\beta=3\alpha$이다.

그러므로 $m=\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{3\alpha}{\alpha}=\boxed{3}$이다.

$\beta^4=m\alpha\beta^3=m$이므로

$\beta^4=3$에서 $\beta=\boxed{3^{\frac{1}{4}}}$이다.

$b=\alpha^{-\frac{1}{\beta}}$이고 $\alpha=\dfrac{\beta}{m}$이므로

$$g(m) = -\log_b m = \frac{\beta}{\log_m \alpha} = \frac{\beta}{-1+\log_m \beta}$$

$$= \frac{3^{\frac{1}{4}}}{-1+\log_3 3^{\frac{1}{4}}} = \frac{3^{\frac{1}{4}}}{-1+\frac{1}{4}} = \boxed{-4\times 3^{-\frac{3}{4}}}$$

이다.

$p=3$, $q=3^{\frac{1}{4}}$, $r=-4\times 3^{-\frac{3}{4}}$이므로

$$(p\times q\times r)^2 = \left\{3\times 3^{\frac{1}{4}}\times\left(-4\times 3^{-\frac{3}{4}}\right)\right\}^2$$

$$= \left(-4\times 3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 48$$

정답 48

21. **출제의도** : 새롭게 정의된 함수의 연속성을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 함수 $f(x)$를

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

로 놓을 수 있다.

이때 문제에서 주어진 등식의 우변을 $h(t)$라 하면

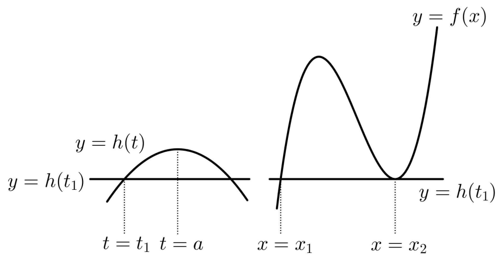
$$h(t) = f'(t) - 4t^2 + 4$$
$$= (3t^2 + 2at + b) - 4t^2 + 4$$
$$= -t^2 + 2at + b + 4$$

이고, 함수 $y=h(t)$의 그래프는 직선 $t=a$에 대하여 대칭인 위로 볼록한 포물선 모양이다.

삼차함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하면 방정식 $f(\alpha)=h(t)$를 만족시키는 실수 α의 최댓값 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. 즉, 삼차함수 $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 갖는다.

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1로 양수이므로 함수 $g(t)$가 $t=t_1$에서 불연속인 경우는 $h(t_1)$이 함수 $f(x)$의 극솟값인 경우이다.

$f(x_1) = f(x_2) = h(t_1)$ $(x_1 < x_2)$라 할 때,

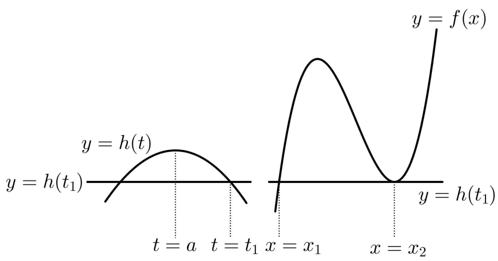


[그림 1]

[그림 1]과 같이 $t_1 < a$이면

$\lim_{t\to t_1-} g(t) = x_1$, $\lim_{t\to t_1+} g(t) = x_2$, $g(t_1) = x_2$

이므로 함수 $g(t)$는 $t=t_1$에서 불연속이다.



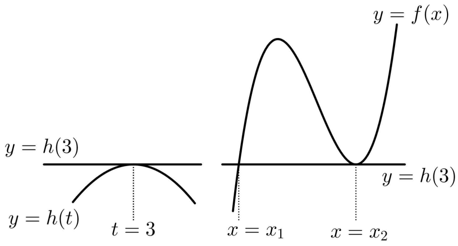
[그림 2]

[그림 2]와 같이 $t_1 > a$이면

$\lim_{t\to t_1+} g(t) = x_1$, $\lim_{t\to t_1-} g(t) = x_2$, $g(t_1) = x_2$

이므로 함수 $g(t)$는 $t=t_1$에서 불연속이다.

이때 함수 $h(t)$는 직선 $t=a$에 대하여 대칭이므로 만약 $a\neq 3$이면 함수 $g(t)$는 $t=3$과 $t=2a-3$에서 불연속이다.



[그림 3]

문제에서 함수 $g(t)$는 $t=3$에서만 불연속이므로 [그림 3]과 같이 $a=3$이어야 하고, $h(3)$이 함수 $f(x)$의 극솟값과 같아야 한다.

이때 $f(x_1)=f(x_2)=h(3)$ $(x_1<x_2)$라 하면

$\lim_{t\to3-}g(t)=x_1$, $\lim_{t\to3+}g(t)=x_1$, $g(3)=x_2$

로 실제로 함수 $g(t)$는 $t=3$에서만 불연속이다.

$g(3)=1$이므로 $x_2=1$

$f(x)$가 $x=1$에서 극솟값을 가지므로

$f'(1)=3+2a+b=9+b=0$, $b=-9$

$f(1)=h(3)$이므로

$f(1)=1+a+b+c=1+3-9+c=c-5$

$h(3)=-9+6a+b+4=-9+18-9+4=4$

에서 $c-5=4$, $c=9$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2-9x+9$이므로

$f(2)=8+12-18+9=11$

정답 11

22. 출제의도 : 수열의 귀납적 정의를 만족시키는 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

	a_{4n+1}	a_{4n+2}	a_{4n+3}	a_{4n+4}
$n=0$	1	2	4	3
$n=1$	5	5	5	4
$n=2$	6	6	6	6
$n=3$	8	6	8	5
$n=4$	7	7	7	7
$n=5$	9	7	9	7
$n=6$	9	9	9	7

$a_{32}=a_{16}+1=6$, $a_{64}=a_{32}+1=7$,

$a_{128}=a_{64}+1=8$, $\cdots$

$n\ge17$이고 $n\ne32$일 때 $a_n>6$이다.

(ⅰ) k가 홀수일 때

k는 $4n+1$ 또는 $4n+3$의 꼴이다.

$a_n=6$인 n의 값은

9, 10, 11, 12, 14, 32의 6개이고 이때 각각의 n마다 $a_{4n+1}=a_{4n+3}=10$이다.

따라서 (ⅰ)에서 구하는 k의 개수는 $6\times2=12$

(ⅱ) k가 짝수일 때

ⓐ $k=4m$이면

$a_k=a_{4m}=a_{2m}+1=a_m+1+1=a_m+2$

$a_m+2=10$에서 $a_m=8$

$a_m=8$인 m의 개수를 구해보자.

ⓐ-① m이 홀수일 때

$m=4n+1$ 또는 $m=4n+3$의 꼴이다.

$a_n=4$인 n의 값은 3, 8의 2개이고 이때 각각의 n마다

$a_{4n+1}=a_{4n+3}=8$이다.

즉 $a_m=8$인 홀수 m의 개수는

$2\times2=4$

ⓐ-② m이 짝수일 때

$m=4n$이면

$a_m=a_{4n}=a_{2n}+1=a_n+2=8$

에서 $a_n=6$

$a_n = 6$인 n의 개수는 6

$m = 8n+2$ 또는 $m = 8n+6$이면

$a_{8n+2} = a_{4n+1} + 1$

$= a_n + 4 + 1 = a_n + 5$,

$a_{8n+6} = a_{4n+3} + 1$

$= a_n + 4 + 1 = a_n + 5$

이다.

$a_n + 5 = 8$에서 $a_n = 3$이고,

$a_n = 3$인 n의 개수는 1

즉 $a_m = 8$인 짝수 m의 개수는

$6 + 2 \times 1 = 8$

ⓐ에서 구하는 k의 개수는

$4 + 8 = 12$

ⓑ $k = 8n+2$ 또는 $k = 8n+6$이면

$a_{8n+2} = a_{4n+1} + 1$

$= a_n + 4 + 1 = a_n + 5$,

$a_{8n+6} = a_{4n+3} + 1$

$= a_n + 4 + 1 = a_n + 5$

이다.

$a_n + 5 = 10$에서 $a_n = 5$이고,

$a_n = 5$인 n의 값은 5, 6, 7, 16의 4개다.

ⓑ에서 구하는 k의 개수는

$2 \times 4 = 8$

따라서 (ⅱ)에서 구하는 k의 개수는 $12 + 8 = 20$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 k의 개수는

$12 + 20 = 32$

정답 32

■ [선택: 확률과 통계]

23. ③	24. ②	25. ①	26. ⑤	27. ④
28. ③	29. 98	30. 780		

23. **출제의도** : 같은 것이 있는 순열의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 : x, y, z, z를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는 같은 것이 2개 포함되어 있는 4개를 일렬로 나열하는 순열의 수와 같으므로

$\frac{4!}{2!} = 4 \times 3 = 12$

정답 ③

24. **출제의도** : 여사건의 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A \cap B^C)$

$= \frac{1}{3} + \frac{3}{8} = \frac{17}{24}$

이므로

$\mathrm{P}(A^C) = 1 - \mathrm{P}(A)$

$= 1 - \frac{17}{24} = \frac{7}{24}$

정답 ②

25. **출제의도** : 이항정리를 이용하여 다항식의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 : $(x+4)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6\mathrm{C}_r \times x^r \times 4^{6-r}$ (단, $r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6$)

(ⅰ) $(x+4)^6$의 전개식에서 x^5항과 $3x+2$에서 $3x$를 곱하는 경우

$r=5$인 경우이므로

${}_6\mathrm{C}_5 \times x^5 \times 4^{6-5} \times 3x = 6\times4\times3\times x^6 = 72x^6$

(ⅱ) $(x+4)^6$의 전개식에서 x^6항과 $3x+2$에서 2를 곱하는 경우

$r=6$인 경우이므로

${}_6\mathrm{C}_6 \times x^6 \times 4^{6-6} \times 2 = 1\times1\times2\times x^6 = 2x^6$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 계수는

$72+2=74$

정답 ①

26. **출제의도** : 여사건의 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주머니의 10개의 공에서 임의로 4개를 택하는 경우의 수는

${}_{10}\mathrm{C}_4 = \dfrac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1} = 210$

꺼낸 공에 적혀 있는 네 자연수의 곱이 5의 배수가 되려면 4개의 공에 5나 10이 적힌 공이 적어도 한 개 있어야 한다.

꺼낸 4개의 공에 적혀 있는 네 자연수의 곱이 5의 배수인 사건을 A라 하면 A의 여사건은 4개의 공에 5와 10이 적힌 공이 모두 포함되어 있지 않은 경우이다.

즉, 5와 10이 적힌 공을 제외한 8개의 공에서 4개의 공을 꺼내는 사건이므로 그 경우의 수는

${}_8\mathrm{C}_4 = \dfrac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1} = 70$

이고

$\mathrm{P}(A^C) = \dfrac{{}_8\mathrm{C}_4}{{}_{10}\mathrm{C}_4} = \dfrac{70}{210} = \dfrac{1}{3}$

따라서

$\mathrm{P}(A) = 1-\mathrm{P}(A^C)$

$= 1-\dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$

정답 ⑤

27. **출제의도** : 중복순열의 수를 이용하여 함수의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 : 주어진 함수에서

$f(1)\times f(2)=4$를 만족시키는 경우는 $f(1)=f(2)=2$인 경우뿐이므로 구하는 함수의 개수는 전체 함수의 개수에서 $f(1)\times f(2)=4$를 만족시키는 함수의 개수를 빼면 된다.

집합 X에서 집합 Y로의 함수의 개수는

${}_3\Pi_5 = 3^5 = 243$

이 중 $f(1)=f(2)=2$를 만족시키는 함수의 개수는 집합 $\{3,\ 4,\ 5\}$에서 집합 $\{1,\ 2,\ 3\}$으로의 함수의 개수와 같으므로

${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$

따라서 구하는 함수의 개수는

$243-27=216$

정답 ④

28. **출제의도** : 같은 것이 있는 순열의 수를 이용한 확률을 구하는 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

주사위를 4번 던질 때 나오는 경우의 수는 6^4이다.

4번의 시행에서 1, 6은 홀수 번 뒤집고, 2, 3, 4, 5는 뒤집지 않거나 짝수 번 뒤집어야 모두 앞면이 보이게 된다.

1은 주사위의 눈의 수가 홀수일 때 뒤집고, 6은 주사위의 눈의 수가 짝수일 때 뒤집으므로 홀수의 눈이 홀수 번, 짝수의 눈이 홀수 번 나와야 한다.

또 1과 6이 한 번씩 나오면 모두 앞면이 되고, 2와 5가 한 번씩 나오면 모두 앞면이 되므로 이 경우 나머지 2번의 시행에서 같은 수가 나오면 된다.

1과 6이 한 번씩 나오지 않거나 2와 5가 한 번씩 나오지 않으면 모두 다른 수가 나와야 한다.

(i) 4번의 시행에서 1과 6만 나오거나 2와 5만 나오는 경우

$(1,1,1,6)$, $(1,6,6,6)$,

$(2,2,2,5)$, $(2,5,5,5)$

와 같은 수로 구성이 되어있는 경우이므로 이 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}\times 4 = 16$$

(ii) 4번의 시행에서 1과 6이 한 번씩 나오거나 2와 5가 한 번씩 나오고 다른 수 1개가 2번 나오는 경우

$(1,6,2,2)$, $(1,6,3,3)$,

$(1,6,4,4)$, $(1,6,5,5)$,

$(2,5,1,1)$, $(2,5,3,3)$,

$(2,5,4,4)$, $(2,5,6,6)$

과 같은 수로 구성이 되어 있는 경우이므로 이 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!}\times 8 = 96$$

(iii) 1과 6이 한 번씩 나오지 않거나 2와 5가 한 번씩 나오지 않는 경우

같은 수가 나오지 않는 경우이고, 홀수 1, 3, 5가 한 번씩 나오면 짝수 4가 나와야 하고, 짝수 2, 4, 6이 한 번씩 나오면 홀수 3이 나와야 한다.

즉 $(1,3,5,4)$, $(2,4,6,3)$과 같은 수로 구성이 되어 있는 경우이므로 이 경우의 수는

$4! \times 2 = 48$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{16+96+48}{6^4} = \frac{160}{6^4} = \frac{10}{81}$$

정답 ③

29. 출제의도 : 조건부 확률을 이용하여 확률을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

서로 다른 다섯 개의 주사위를 동시에 던져 나온 다섯 개의 눈의 수의 곱이 홀수인 사건을 A, 눈의 수의 합이 15인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

다섯 개의 눈의 수의 곱이 홀수가 되는 경우는 다섯 개의 눈이 모두 홀수인 경우이고 한 번 던졌을 때 홀수가 나오는 경우의 수가 3이므로

$$\mathrm{P}(A) = \left(\frac{3}{6}\right)^5$$

사건 $A\cap B$는 다섯 개의 눈의 수가 모두 홀수이고, 합이 15인 경우이므로 그 경우의 수는

3, 3, 3, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우

또는

1, 1, 3, 5, 5를 일렬로 나열하는 경우

또는

1, 3, 3, 3, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

(ⅰ) 3, 3, 3, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는 1

(ⅱ) 1, 1, 3, 5, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!2!}=5\times3\times2=30$

(ⅲ) 1, 3, 3, 3, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!}=5\times4=20$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{51}{6^5}$

따라서

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{51}{6^5}}{\left(\frac{3}{6}\right)^5}=\frac{17}{81}$$

에서 $p=81$, $q=17$이므로

$p+q=98$

정답 98

30. 출제의도 : 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

검은 공을 먼저 나열하고 검은 공 사이나 양 끝에 노란색 공이나 보라색 공을 한 가지 색의 공만 오도록 나열하면 된다.

즉

(A) 검 (B) 검 (C) 검 (D) 검 (E)

위의 배열에서 A, B, C, D, E의 자리에 노란색 공 또는 보라색 공이 한 가지 색만 있도록 나열하는 경우이다.

노란색 공이 들어갈 자리에 따라 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) 노란색 공을 1자리에 나열하는 경우

노란색 공이 들어갈 자리를 선택하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_1=5$

나머지 4자리에 보라색 공을 나열하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{H}_4={}_7\mathrm{C}_4={}_7\mathrm{C}_3=35$

이때의 경우의 수는

$5\times35=175$

(ⅱ) 노란색 공을 2자리에 나열하는 경우

노란색 공이 들어갈 자리를 선택하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_2=10$

선택된 2자리에 먼저 노란색 공을 하나씩 나열하고 나머지 2개를 나열하는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_2={}_3\mathrm{C}_2=3$

나머지 3자리에 보라색 공을 나열하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$

이때의 경우의 수는

$10\times3\times15=450$

(ⅲ) 노란색 공을 3자리에 나열하는 경우

노란색 공이 들어갈 자리를 선택하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_3=10$

선택된 3자리에 먼저 노란색 공을 하나씩 나열하고 나머지 1개를 나열하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_1={}_3\mathrm{C}_1=3$

나머지 2자리에 보라색 공을 나열하는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_4={}_5\mathrm{C}_4=5$

이때의 경우의 수는

$10\times3\times5=150$

(ⅳ) 노란색 공을 4자리에 나열하는 경우

노란색 공이 들어갈 자리를 선택하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_4=5$

선택된 4자리에 노란색 공을 하나씩 나열하는 경우의 수는 1

나머지 1자리에 보라색 공을 나열하는 경우의 수는 1

이때의 경우의 수는

$5\times1\times1=5$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 경우의 수는

$175+450+150+5=780$

정답 780

■ **[선택: 미적분]**

23. ④	24. ③	25. ②	26. ⑤	27. ①
28. ③	29. 54	30. 20		

23. **출제의도** : 등비수열이 포함된 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4\times5^n-2^{n+1}}{5^n+2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4-2\times\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n}=\frac{4-2\times0}{1+0}=4$$

정답 ④

24. **출제의도** : 음함수의 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$2x+\sqrt{y}=xy$에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2+\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}=y+x\frac{dy}{dx}$$

$$\left(x-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)\frac{dy}{dx}=2-y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2-y}{x-\frac{1}{2\sqrt{y}}}\ \left(\text{단, } x-\frac{1}{2\sqrt{y}}\neq0\right)$$

곡선 $2x+\sqrt{y}=xy$ 위의 점 $(-1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $x=-1$, $y=1$일 때

의 $\dfrac{dy}{dx}$의 값이므로 구하는 값은

$$\frac{2-1}{-1-\dfrac{1}{2\sqrt{1}}}=-\frac{2}{3}$$

정답 ③

25. **출제의도** : 등차수열의 일반항을 구하여 급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 4, 공차가 3이므로

$a_n=4+3(n-1)=3n+1$

등차수열 $\{b_n\}$의 첫째항이 7, 공차가 3이므로

$b_n=7+3(n-1)=3n+4$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_nb_n}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3k+4}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3n+4}\right)\\&=\frac{1}{12}\end{aligned}$$

정답 ②

26. **출제의도** : 삼각함수의 미분법과 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 두 직선이 이루는 각의 크기의 tan값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

방정식 $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,(0<x<\pi)$의 해는

$x=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x=\dfrac{2}{3}\pi$

이므로 두 점 A, B의 x좌표는 각각 $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $\dfrac{2}{3}\pi$, $\dfrac{\pi}{3}$이다.

두 경우 모두 θ의 값이 같으므로 두 점 A, B를

$\mathrm{A}\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

라 하자.

$y=\sin x$에서 $y'=\cos x$이므로

점 A에서의 접선의 기울기는

$\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$

점 B에서의 접선의 기울기는

$\cos\dfrac{2}{3}\pi=-\dfrac{1}{2}$

좌표평면에서 두 직선의 기울기가 각각 m, m'일 때, 두 직선이 이루는 예각의 크기 α에 대하여

$\tan\alpha=\left|\dfrac{m-m'}{1+m\times m'}\right|$이므로

구하는 값은

$$\tan\theta=\left|\frac{\dfrac{1}{2}-\left(-\dfrac{1}{2}\right)}{1+\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{1-\dfrac{1}{4}}\right|=\frac{4}{3}$$

정답 ⑤

27. **출제의도** : 좌표평면 위를 움직이는 점의 속력을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

시각 $t\left(\frac{\pi}{2}<t<\frac{3\pi}{2}\right)$일 때 점 P의 위치 $(x,\ y)$가

$x=at+\tan t,\ y=1+\sec t$

이므로

$\frac{dx}{dt}=a+\sec^2 t,\ \frac{dy}{dt}=\sec t\tan t$

이다.

$t=\frac{3\pi}{4}$ 일 때

$\frac{dx}{dt}=a+(-\sqrt{2})^2=a+2,$

$\frac{dy}{dt}=(-\sqrt{2})\times(-1)=\sqrt{2}$

이므로

$t=\frac{3\pi}{4}$ 일 때의 속력은

$\sqrt{(a+2)^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{a^2+4a+6}$ …… ㉠

$t=\pi$일 때

$\frac{dx}{dt}=a+(-1)^2=a+1,$

$\frac{dy}{dt}=(-1)\times 0=0$

이므로

$t=\pi$일 때의 속력은

$\sqrt{(a+1)^2+0^2}=\sqrt{a^2+2a+1}$ …… ㉡

두 시각 $t=\frac{3\pi}{4}$, $t=\pi$에서의 속력이 같으므로 ㉠, ㉡에서

$\sqrt{a^2+4a+6}=\sqrt{a^2+2a+1}$

$a^2+4a+6=a^2+2a+1$

$2a=-5,\ a=-\frac{5}{2}$

정답 ①

28. **출제의도** : 음함수의 미분법과 이계도함수를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P의 x좌표를 $p(t)$라 하면

$e^{2p(t)}-e^{-p(t)}+1=t$ …… ㉠

양변을 t에 대하여 미분하면

$2p'(t)e^{2p(t)}+p'(t)e^{-p(t)}=1$

$p'(t)=\frac{1}{2e^{2p(t)}+e^{-p(t)}}$

$f(t)=e^{2p(t)}$에서

$f'(t)=2p'(t)e^{2p(t)}$

$=\frac{2e^{2p(t)}}{2e^{2p(t)}+e^{-p(t)}}$ …… ㉡

점 Q의 x좌표를 $q(t)$라 하면

$e^{2q(t)}=t$

$e^{-q(t)}=t^{-\frac{1}{2}}$ 이므로

$g(t)=e^{2q(t)}-e^{-q(t)}+1$에서

$g(t)=t-t^{-\frac{1}{2}}+1$

$g'(t)=1+\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}$ …… ㉢

㉠의 양변에 $t=1$을 대입하면

$e^{2p(1)}-e^{-p(1)}+1=1,\ \left(e^{p(1)}\right)^3=1$

$e^{p(1)}=1$

㉡에서

$$f'(1)=\frac{2e^{2p(1)}}{2e^{2p(1)}+e^{-p(1)}}=\frac{2}{3}$$

ⓒ에서

$$g'(1)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{t\to1}\frac{9f'(t)-4g'(t)}{t-1}$$
$$=\lim_{t\to1}\frac{(9f'(t)-6)-(4g'(t)-6)}{t-1}$$

$t\to1$일 때, $p(t)\to0$이고

㉠에서 $t-1=e^{2p(t)}-e^{-p(t)}$이므로

ⓛ에 의하여

$$\lim_{t\to1}\frac{9f'(t)-6}{t-1}$$
$$=\lim_{p(t)\to0}\frac{\frac{9\times2e^{2p(t)}}{2e^{2p(t)}+e^{-p(t)}}-6}{e^{2p(t)}-e^{-p(t)}}$$
$$=\lim_{p(t)\to0}\frac{6\left(e^{2p(t)}-e^{-p(t)}\right)}{\left(e^{2p(t)}-e^{-p(t)}\right)\left(2e^{2p(t)}+e^{-p(t)}\right)}$$
$$=\lim_{p(t)\to0}\frac{6}{2e^{2p(t)}+e^{-p(t)}}$$
$$=\frac{6}{2+1}=2$$

ⓒ에서

$g''(t)=-\frac{3}{4}t^{-\frac{5}{2}}$이므로

$$\lim_{t\to1}\frac{4g'(t)-6}{t-1}$$
$$=4\lim_{t\to1}\frac{g'(t)-\frac{3}{2}}{t-1}$$
$$=4\lim_{t\to1}\frac{g'(t)-g'(1)}{t-1}$$
$$=4g''(1)$$
$$=4\times\left(-\frac{3}{4}\right)=-3$$

따라서

$$\lim_{t\to1}\frac{9f'(t)-4g'(t)}{t-1}$$
$$=\lim_{t\to1}\frac{9f'(t)-6}{t-1}-\lim_{t\to1}\frac{4g'(t)-6}{t-1}$$
$$=2-(-3)=5$$

정답 ③

29. **출제의도** : 등비급수의 합을 이용하여 주어진 식의 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d (a, d는 정수)라 하자.

등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r이라 하면 이 수열의 모든 항이 양수이므로 $r>0$이고

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하므로

$0<r<1$ …… ㉠

조건 (가)에서

$a_1=b_1$이므로 등비수열 $\{b_n\}$의 첫째항이 a이고 a는 자연수이다.

$a_4=b_2$에서

$a+3d=ar$

$3d=a(r-1)$ …… ⓛ

a는 자연수이고 ㉠에서 $r-1<0$이므로 d는 음의 정수이다.

조건 (나)에서 $a_k=b_3$이므로

$a+(k-1)d=ar^2$

$(k-1)d=a(r-1)(r+1)$

이 식에 ⓛ을 대입하면

$(k-1)d=3d(r+1)$

$k-1=3(r+1)$

$k=3r+4$ …… ⓒ

㉠에서 $4<3r+4<7$

즉, $4<k<7$이고 k는 자연수이므로

$k=5$ 또는 $k=6$

(ⅰ) $k=5$인 경우

㉢에서 $r=\dfrac{k-4}{3}=\dfrac{1}{3}$

㉡에서 $3d=-\dfrac{2}{3}a$, $d=-\dfrac{2}{9}a$

d가 음의 정수이므로 $a=9t$(t는 자연수)라 하자.

$$a_n=a+(n-1)\times\left(-\frac{2}{9}a\right)=-2tn+11t$$

$$b_n=a\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=9t\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos(a_n\pi))\right|$$
$$=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left\{9t\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cos(-2tn\pi+11t\pi)\right\}\right|$$
$$=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left\{9t\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cos(11t\pi)\right\}\right|$$
$$=\left|9t\cos(11t\pi)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right|$$
$$=9t\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{27}{2}t$$

(ⅱ) $k=6$인 경우

㉢에서 $r=\dfrac{k-4}{3}=\dfrac{2}{3}$

㉡에서 $3d=-\dfrac{a}{3}$, $d=-\dfrac{a}{9}$

d가 음의 정수이므로 $a=9t$(t는 자연수)라 하자.

$$a_n=a+(n-1)\times\left(-\frac{a}{9}\right)=-tn+10t$$

$$b_n=a\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=9t\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos(a_n\pi))\right|$$
$$=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left\{9t\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cos(-tn\pi+10t\pi)\right\}\right|$$
$$=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left\{9t\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cos(tn\pi)\right\}\right|$$

ⓐ $t=2s$(s는 자연수)이면

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos(a_n\pi))\right|$$
$$=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left\{18s\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cos(2sn\pi)\right\}\right|$$
$$=\left|18s\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right|$$
$$=18s\times\frac{1}{1-\frac{2}{3}}$$
$$=54s$$

ⓑ $t=2s-1$(s는 자연수)이면

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos(a_n\pi))\right|$$
$$=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left\{9(2s-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cos(2sn\pi-n\pi)\right\}\right|$$
$$=\left|9(2s-1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cos(n\pi)\right|$$
$$=\left|-9(2s-1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right|$$
$$=9(2s-1)\times\frac{1}{1+\frac{2}{3}}$$
$$=\frac{27}{5}(2s-1)$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\left|\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos(a_n\pi))\right|$의 값이 최소가 되기 위해서는 $r=\dfrac{2}{3}$, $t=2s-1$ (s는 자연수)이고 $s=1$인 경우이다.

따라서 구하는 최솟값 m은

$m=\frac{27}{5}(2\times1-1)=\frac{27}{5}$

이므로

$10\times m=10\times\frac{27}{5}=54$

정답 54

30. 출제의도 : 함수의 미분가능성과 극값을 가질 조건으로부터 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$g'(0)=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x}\times\sqrt[3]{(f(x))^2}}{x}$$

의 값이 존재해야 한다.

이때 $f(0)\neq0$이면 위의 극한은 발산하므로 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

그러므로 $f(0)=0$이고, 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$를

$f(x)=x\times p(x)$ (단, $p(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차식)

으로 놓을 수 있다.

(ⅰ) 방정식 $p(x)=0$이 서로 다른 두 실근 $x=\alpha$, $x=\beta$를 갖는 경우

$f(x)=x(x-\alpha)(x-\beta)$이므로

$$g(x)=\sqrt[3]{x^3(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}$$
$$=x\times\sqrt[3]{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}$$

이때

$$g'(\alpha)=\lim_{x\to\alpha}\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}$$
$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{x\times\sqrt[3]{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}}{x-\alpha}$$
$$=\lim_{x\to\alpha}\left\{x\times\frac{\sqrt[3]{(x-\beta)^2}}{\sqrt[3]{x-\alpha}}\right\}$$

이고 이 극한값은 존재하지 않으므로 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 미분가능하지 않다.

(ⅱ) 방정식 $p(x)=0$이 중근 $x=\alpha$를 갖는 경우

$f(x)=x(x-\alpha)^2$이므로

$$g(x)=\sqrt[3]{x^3(x-\alpha)^4}$$
$$=x(x-\alpha)^{\frac{4}{3}}$$

이때

$$g'(x)=(x-\alpha)^{\frac{4}{3}}+\frac{4}{3}x(x-\alpha)^{\frac{1}{3}}$$
$$=(x-\alpha)^{\frac{1}{3}}\left\{(x-\alpha)+\frac{4}{3}x\right\}$$
$$=(x-\alpha)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{7}{3}x-\alpha\right)$$

이므로

$g'(x)=0$에서

$x=\alpha$ 또는 $x=\frac{3}{7}\alpha$

$g(x)$가 $x=\frac{19}{7}$와 $x=3$에서 극값을 가지므로 $\left\{\alpha,\ \frac{3}{7}\alpha\right\}=\left\{\frac{19}{7},\ 3\right\}$이어야 한다.

그러나 이를 만족시키는 실수 α는 존재하지 않는다.

(ⅲ) 방정식 $p(x)=0$이 실근을 갖지 않는 경우

모든 실수 x에 대하여 $p(x)>0$이다.

$p(x)=x^2+ax+b$라 하면

$g(x)=\{x^3(x^2+ax+b)^2\}^{\frac{1}{3}}=x(x^2+ax+b)^{\frac{2}{3}}$

이다.

$$g'(x)=(x^2+ax+b)^{\frac{2}{3}}+x\left\{\frac{2}{3}(x^2+ax+b)^{-\frac{1}{3}}(2x+a)\right\}$$

$$=\frac{3(x^2+ax+b)+2x(2x+a)}{3(x^2+ax+b)^{\frac{1}{3}}}$$

$$=\frac{7x^2+5ax+3b}{3(x^2+ax+b)^{\frac{1}{3}}}$$

함수 $g(x)$가 $x=\frac{19}{7}$와 $x=3$에서 극값을 가지므로

이차방정식 $7x^2+5ax+3b=0$의 두 근이 $\frac{19}{7}$와 3이 되어야 한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{5a}{7}=\frac{19}{7}+3=\frac{40}{7}$, $a=-8$

$\frac{3b}{7}=\frac{19}{7}\times 3=\frac{57}{7}$, $b=19$

즉, $p(x)=x^2-8x+19$이고,

실제로 이차방정식 $x^2-8x+19=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-4)^2-19=-3<0$이므로 실근을 갖지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$f(x)=x(x^2-8x+19)$

이고, 모든 실수 x에 대하여 $p(x)>0$이므로 함수

$g(x)=x(x^2-8x+19)^{\frac{2}{3}}$

은 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

따라서

$f(5)=5\times(5^2-8\times 5+19)=20$

정답 20

■ [선택: 기하]
23. ⑤ 24. ③ 25. ③ 26. ① 27. ②
28. ④ 29. 14 30. 29

23. **출제의도** : 벡터의 덧셈을 이용하여 성분의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$\vec{a}+2\vec{b}$
$=(3,0)+2(-1,2)$
$=(3,0)+(-2,4)$
$=(1,4)$
따라서 $\vec{a}+2\vec{b}$의모든 성분의 합은 5이다.

정답 ⑤

24. **출제의도** : 포물선의 방정식에서 초점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$y^2=-12x=4\times(-3)\times x$이므로 이 포물선의 초점의 좌표는 $(-3, 0)$이다.
따라서 $p=-3$

정답 ③

25. **출제의도** : 직선의 방향벡터를 이용하여 두 직선이 이루는 각의 크기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
직선 l_1의 방향벡터를 $\overrightarrow{u_1}$이라 하면
$\overrightarrow{u_1}=(1, 5)$
직선 l_2 : $\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y+1}{2}$의 방향벡터를
$\overrightarrow{u_2}$라 하면
$\overrightarrow{u_2}=(3, 2)$
따라서

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|}$$
$$=\frac{|(1, 5)\cdot(3, 2)|}{\sqrt{1^2+5^2}\times\sqrt{3^2+2^2}}$$
$$=\frac{13}{\sqrt{26}\times\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

정답 ③

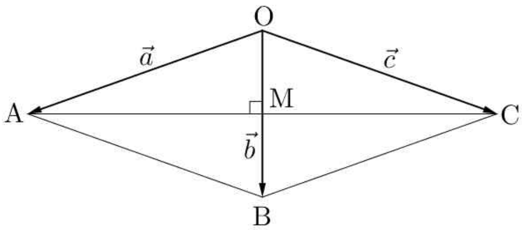
26. **출제의도** : 타원의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
점 $(a, 2)$가 타원 위의 점이므로 타원의 방정식에 대입하면
$\dfrac{a^2}{18}+\dfrac{2^2}{8}=1$
에서 $a^2=9$, $a=3$ ($\because$ $a>0$)
점 $(3, 2)$에서의 접선의 방정식은
$\dfrac{3x}{18}+\dfrac{2y}{8}=1$
$y=0$을 대입하면
$\dfrac{3x}{18}=1$에서 $x=6$
따라서 타원 위의 점 $(3, 2)$에서의 접선의 x절편은 6이다.

정답 ①

27. **출제의도** : 도형의 성질과 두 벡터가 수직이기 위한 조건을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :



마름모 OABC에서 두 대각선이 서로를 수직이등분하므로 두 선분 OB, AC가 만나는 점을 M이라 하면

$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=\frac{1}{2}|\vec{b}|=\frac{1}{2}\times4=2$

$|\vec{c}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=6$이고, 두 벡터 $\vec{b}$, $\vec{c}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 직각삼각형 OMC에서

$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{OM}}}{\overline{\mathrm{OC}}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

그러므로

$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta$

$=4\times6\times\frac{1}{3}=8$

두 벡터 $\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{b}+t\vec{c}$가 서로 수직이므로

$(\vec{b}-\vec{c})\cdot(\vec{b}+t\vec{c})=0$

$|\vec{b}|^2+(t-1)\vec{b}\cdot\vec{c}-t|\vec{c}|^2=0$

$4^2+(t-1)\times8-t\times6^2=0$

$8-28t=0$, $28t=8$

따라서 $t=\frac{2}{7}$

정답 ②

[다른 풀이]

마름모 OABC에서 두 대각선이 서로를 수직이등분하므로

$\vec{b}=\vec{a}+\vec{c}$

그러므로

$|\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{c})$

$|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2$

$4^2=6^2+2\vec{a}\cdot\vec{c}+6^2$

$2\vec{a}\cdot\vec{c}=-56$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=-28$

두 벡터 $\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{b}+t\vec{c}$가 서로 수직이므로

$(\vec{b}-\vec{c})\cdot(\vec{b}+t\vec{c})=0$

즉, $\vec{a}\cdot\{\vec{a}+(t+1)\vec{c}\}=0$에서

$|\vec{a}|^2+(t+1)\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

$6^2+(t+1)\times(-28)=0$, $t+1=\frac{9}{7}$

따라서 $t=\frac{2}{7}$

28. **출제의도** : 타원의 성질을 이용하여 타원의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\overline{\mathrm{PF}}=k$라 하면 $\overline{\mathrm{QF}}=2k$, $\overline{\mathrm{FF'}}=\frac{16}{\sqrt{6}}k$

타원의 정의로부터 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2a$,

$\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{QF'}}=2a$이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}=2a-k$, $\overline{\mathrm{QF'}}=2a-2k$

$\angle\mathrm{PFF'}=\theta$라 하면

삼각형 $\mathrm{PF'F}$에서

$$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{FF'}}^2-\overline{\mathrm{PF'}}^2}{2\times\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{FF'}}}$$

$$=\frac{k^2+\left(\frac{16}{\sqrt{6}}k\right)^2-(2a-k)^2}{2\times k\times\frac{16}{\sqrt{6}}k}$$

$\angle \mathrm{QFF}' = \pi - \theta$ 이므로

$$\cos(\pi-\theta) = \frac{\overline{\mathrm{QF}}^2 + \overline{\mathrm{FF}'}^2 - \overline{\mathrm{QF}'}^2}{2\times\overline{\mathrm{QF}}\times\overline{\mathrm{FF}'}}$$

$$= \frac{(2k)^2 + \left(\frac{16}{\sqrt{6}}k\right)^2 - (2a-2k)^2}{2\times 2k\times\frac{16}{\sqrt{6}}k}$$

이때 $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$ 이므로

$$\frac{k^2 + \left(\frac{16}{\sqrt{6}}k\right)^2 - (2a-k)^2}{2\times k\times\frac{16}{\sqrt{6}}k}$$

$$= \frac{(2a-2k)^2 - (2k)^2 - \left(\frac{16}{\sqrt{6}}k\right)^2}{2\times 2k\times\frac{16}{\sqrt{6}}k}$$

에서

$$2k^2 + 2\times\left(\frac{16}{\sqrt{6}}k\right)^2 - 2(2a-k)^2$$

$$= (2a-2k)^2 - (2k)^2 - \left(\frac{16}{\sqrt{6}}k\right)^2$$

$3a^2 - 4ak - 32k^2 = 0$

$(a-4k)(3a+8k) = 0$

$a = 4k$ ($\because$ $a>0$, $k>0$)

이때

$$\cos\theta = \frac{k^2 + \left(\frac{16}{\sqrt{6}}k\right)^2 - (7k)^2}{2\times k\times\frac{16}{\sqrt{6}}k}$$

$$= -\frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{30}}{6}$$

삼각형 $\mathrm{FF}'\mathrm{Q}$의 넓이가 $4\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{FF}'}\times\overline{\mathrm{QF}}\times\sin(\angle \mathrm{F}'\mathrm{FQ})$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{16}{\sqrt{6}}k\times 2k\times\frac{\sqrt{30}}{6}$$

$$= 4\sqrt{5}$$

$k^2 = \frac{3}{2}$ 이므로 $k = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$2a = \overline{\mathrm{PF}'} + \overline{\mathrm{PF}} = 7k + k = 8k = 4\sqrt{6}$ 에서

$a = 2\sqrt{6}$

$c = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{FF}'} = \frac{8k}{\sqrt{6}} = 4$

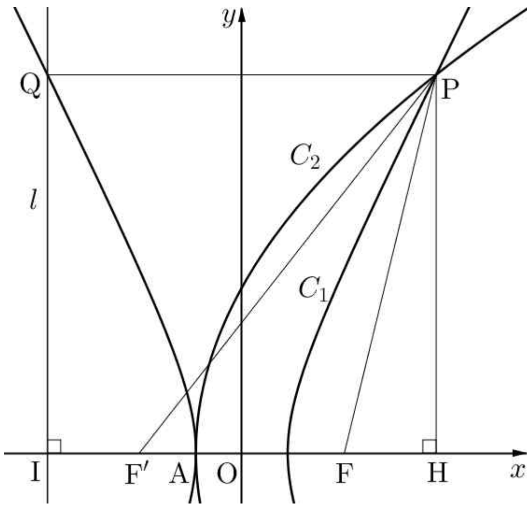
$b^2 = a^2 - c^2 = (2\sqrt{6})^2 - 4^2 = 24 - 16 = 8$

정답 ④

29. **출제의도** : 주어진 조건과 포물선 및 쌍곡선의 정의를 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

쌍곡선 C_1과 포물선 C_2가 만나는 점 중 제1사분면 위의 점을 P, 쌍곡선 C_1과 직선 l이 만나는 점 중 제2사분면 위의 점을 Q라 하고, 두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하자.



포물선의 정의에 의하여 $\overline{FA}=\overline{AI}$이므로
점 I의 좌표는 $(-2a-3,\ 0)$
두 점 P, Q가 쌍곡선 C_1 위의 점이고 두 점의 y좌표가 같으므로 두 점 P, Q는 y축에 대하여 대칭이다.
그러므로 점 H의 좌표는 $(2a+3,\ 0)$
포물선의 정의에 의하여
$\overline{PF}=\overline{PQ}=4a+6$
쌍곡선 C_1의 주축의 길이가 $2a$이므로
쌍곡선의 정의에 의하여
$\overline{PF'}-\overline{PF}=2a$
그러므로

$$\begin{aligned}\overline{PF'}&=\overline{PF}+2a\\&=(4a+6)+2a=6a+6\end{aligned}$$

직각삼각형 PF′H에서
$\overline{F'H}=(2a+3)-(-3)=2a+6$
이므로

$$\begin{aligned}\overline{PH}^2&=(6a+6)^2-(2a+6)^2\\&=32a^2+48a \qquad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

또, $\overline{FH}=(2a+3)-3=2a$이므로
직각삼각형 PFH에서

$$\begin{aligned}\overline{PH}^2&=(4a+6)^2-(2a)^2\\&=12a^2+48a+36 \qquad \cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

㉠, ㉡에서
$32a^2+48a=12a^2+48a+36$
$20a^2=36,\ a^2=\dfrac{9}{5}$
따라서 $p=5,\ q=9$이므로
$p+q=5+9=14$

정답 14

30. 출제의도 : 벡터의 내적의 성질을 이용하여 벡터의 내적의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
원과 선분 BC가 만나는 점을 E라 하고, 원의 중심을 O라 하자.
$\angle AEB=\dfrac{\pi}{2}$이므로
$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BC}|\times|\overrightarrow{BE}|$
점 D에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}=|\overrightarrow{CB}|\times|\overrightarrow{CH}|$
또는 $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}=-|\overrightarrow{CB}|\times|\overrightarrow{CH}|$
$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}$이므로
$|\overrightarrow{BE}|=|\overrightarrow{CH}|$
따라서 점 H는 점 E이다.
$2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=2|\overrightarrow{AE}|\times|\overrightarrow{AD}|$
$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=|\overrightarrow{DA}|\times|\overrightarrow{DE}|$
$2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}$이므로
$2|\overrightarrow{AE}|=|\overrightarrow{DE}|$
$|\overrightarrow{AE}|=k$라 하면 $|\overrightarrow{DE}|=2k$
삼각형 ABE와 삼각형 ADO는 닮음이므로
$\overline{AB}:\overline{AE}=\overline{AD}:\overline{AO}$
$2:k=3k:1$
$3k^2=2$에서 $k=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$
$\overline{BE}=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{30}}{3}$
$\overline{BC}=\dfrac{2\sqrt{30}}{3}$
점 O를 지나고 직선 BC에 평행한 직선이 원과 만나는 점을 각각 P, Q라 하고 (단, $\overline{CP}>\overline{CQ}$), 직선 AD와 만나는 점을 R라 하면
$\overline{OR}=\dfrac{\sqrt{30}}{6}$

$\overrightarrow{\mathrm{DX}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}$의 최댓값은 점 X가 점 Q일 때

이고 $M = \overline{\mathrm{BC}} \times \overline{\mathrm{QR}}$

$\overrightarrow{\mathrm{DX}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}$의 최솟값은 점 X가 점 P일 때

이고 $m = -\overline{\mathrm{BC}} \times \overline{\mathrm{PR}}$

따라서

$|M \times m| = (\overline{\mathrm{BC}})^2 \times \overline{\mathrm{QR}} \times \overline{\mathrm{PR}}$

$= \left(\dfrac{2\sqrt{30}}{3}\right)^2 \times \left(1 - \dfrac{\sqrt{30}}{6}\right) \times \left(1 + \dfrac{\sqrt{30}}{6}\right)$

$= \dfrac{4 \times 30}{9} \times \left(1 - \dfrac{30}{36}\right)$

$= \dfrac{4 \times 30}{9} \times \dfrac{1}{6}$

$= \dfrac{20}{9}$

정답 29