제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\left(\dfrac{5}{\sqrt[3]{25}}\right)^{\frac{3}{2}}$의 값은? [2점]

① $\dfrac{1}{5}$ ② $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 1 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ 5

$\left(5^{1-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

2. 함수 $f(x)=x^2+x+2$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x)=2x+1$

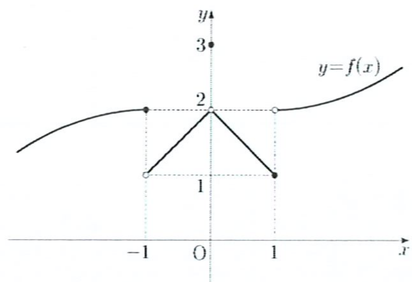
$f'(2)=5$

3. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5}(a_k+1)=9$이고 $a_6=4$일 때, $\sum_{k=1}^{6}a_k$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$\sum_{k=1}^{5}a_k + a_6 = 4+4=8$

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0+}f(x)+\lim_{x\to 1-}f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$2+1=3$

5. 함수 $f(x)=(x^2-1)(x^2+2x+2)$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(x)=2x(x^2+2x+2)+(x^2-1)(2x+2)$

$f'(1)=2\times 5=10$

6. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{5}$일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{4}{5}$ ② $-\frac{3}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

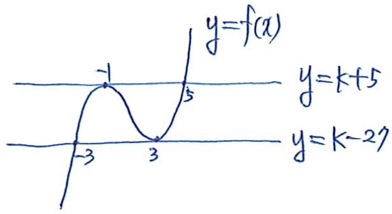
$-\cos\theta=\frac{3}{5}$

$\sin\theta=-\frac{4}{5}$

7. x에 대한 방정식 $x^3-3x^2-9x+k=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은? [3점]

① 13 ② 16 ③ 19 ④ 22 ⑤ 25

$f'(x)=3(x^2-2x-3)$



$k=-5,\ 27$

8. $a_1a_2<0$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_6=16,\quad 2a_8-3a_7=32$$

일 때, a_9+a_{11}의 값은? [3점]

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

$a^2r<0 \Rightarrow r<0$

$16(2r^2-3r)=32 \Rightarrow 2r^2-3r-2=0$

$2r \quad +1$
$r \quad -2$

$r=-\frac{1}{2}$

$\therefore a_6(r^3+r^5)=16\left(-\frac{1}{8}-\frac{1}{32}\right)=-\frac{5}{2}$

9. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x-\frac{1}{2} & (x<0) \\ -x^2+3 & (x\geq 0)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $(f(x)+a)^2$이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① $-\frac{9}{4}$ ② $-\frac{7}{4}$ ③ $-\frac{5}{4}$ ④ $-\frac{3}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

$\left(-\frac{1}{2}+a\right)^2=(3+a)^2$

$2a+\frac{5}{2}=0$

$a=-\frac{5}{4}$

10. 다음 조건을 만족시키는 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 9π일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]

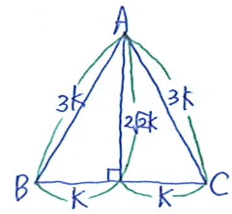
(가) $3\sin A=2\sin B$
(나) $\cos B=\cos C$

① $\frac{32}{9}\sqrt{2}$ ② $\frac{40}{9}\sqrt{2}$ ③ $\frac{16}{3}\sqrt{2}$ ④ $\frac{56}{9}\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{64}{9}\sqrt{2}$

$R=3$

(가) $3a=2b \Rightarrow a:b=2:3$

(나) $B=C$



$b=2R\sin B$

$3k=6\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$k=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

$\therefore S=2\sqrt{2}k^2=\frac{64}{9}\sqrt{2}$

11. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-1}{x-a} = 3$$

을 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 y절편이 4일 때, $f(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$f(a)=1,\ f'(a)=3$

접선 : $y=3(x-a)+1$

$1-3a=4 \Rightarrow a=-1$

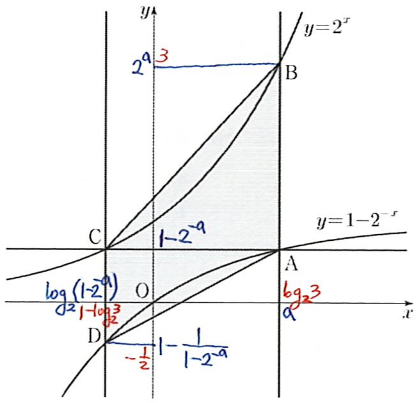
$f(-1)=1,\ f'(-1)=3$

$f(x)=(x+1)^3+k(x+1)^2+3(x+1)+1$

$f(0)=k+5=0 \Rightarrow k=-5$

$f(1)=8-5\times4+7=-5$

12. 그림과 같이 곡선 $y=1-2^{-x}$ 위의 제1사분면에 있는 점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 C, 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=1-2^{-x}$과 만나는 점을 D라 하자. $\overline{AB}=2\overline{CD}$일 때, 사각형 ABCD의 넓이는? [4점]



① $\frac{5}{2}\log_2 3-\frac{5}{4}$ ② $3\log_2 3-\frac{3}{2}$ ③ $\frac{7}{2}\log_2 3-\frac{7}{4}$

④ $4\log_2 3-2$ ⑤ $\frac{9}{2}\log_2 3-\frac{9}{4}$

$2^a+2^{-a}-1 = 2\left(\frac{1}{1-2^{-a}}-2^{-a}\right)$

$\frac{4^a-2^a+1}{2^a} = 2\left(\frac{2^a}{2^a-1}-\frac{1}{2^a}\right)$

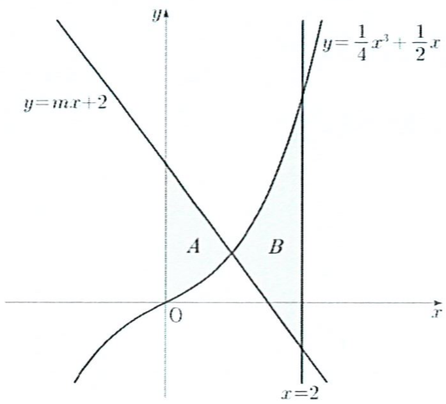
$\frac{\cancel{4^a-2^a+1}}{\cancel{2^a}} = \frac{2(\cancel{4^a-2^a+1})}{\cancel{2^a}(2^a-1)}$

$2^a=3 \Rightarrow a=\log_2 3$

$\therefore S=\frac{1}{2}(2\log_2 3-1)\frac{7}{2}=\frac{7}{2}\log_2 3-\frac{7}{4}$

13. 곡선 $y=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x$와 직선 $y=mx+2$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x$와 두 직선 $y=mx+2$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $B-A=\frac{2}{3}$일 때, 상수 m의 값은? (단, $m<-1$) [4점]

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{17}{12}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{5}{4}$ ⑤ $-\frac{7}{6}$



$$B-A=\int_0^2\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x-mx-2\right)dx$$

$$=1+1-2m-4=\frac{2}{3}$$

$\therefore m=-\frac{4}{3}$

14. 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은? [4점]

> $\log_2\sqrt{-n^2+10n+75}-\log_4(75-kn)$의 값이 양수가 되도록 하는 자연수 n의 개수가 12이다.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$\log_4(-n^2+10n+75)>\log_4(75-kn)$

$$\begin{cases} -n^2+10n+75>0 \Rightarrow (n+5)(n-15)<0 \Rightarrow \underline{n\le 14} \\ 75-kn>0 \Rightarrow \underline{n<\frac{75}{k}} \\ -n^2+10n+\cancel{75}>\cancel{75}-kn \Rightarrow \underline{n<k+10} \end{cases}$$

$\therefore n=1,2,3,\cdots,12 \Rightarrow \underline{k=3,6}$

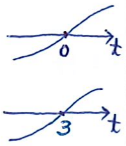
15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 상수 $k\,(k \geq 0)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} 2x-k & (x \leq k) \\ f(x) & (x > k) \end{cases}$$

$$g'(x)=\begin{cases} 2 & (x<k) \\ f'(x) & (x>k) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

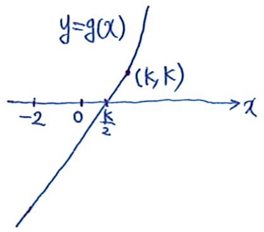
> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능하다.
>
> (나) 모든 실수 x에 대하여
>
> $\int_0^x g(t)\{|t(t-1)|+t(t-1)\}\,dt \geq 0$이고
>
> $\int_3^x g(t)\{|(t-1)(t+2)|-(t-1)(t+2)\}\,dt \geq 0$이다.

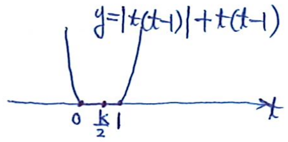


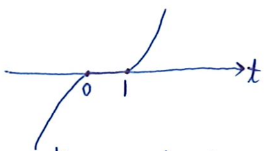
$g(k+1)$의 최솟값은? [4점]

① $4-\sqrt{6}$ ② $5-\sqrt{6}$ ③ $6-\sqrt{6}$ ④ $7-\sqrt{6}$ ⑤ $8-\sqrt{6}$

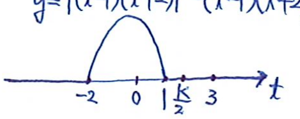
(가) $f(k)=k,\ f'(k)=2,\ f'(x)\geq 0\ (x>k)$

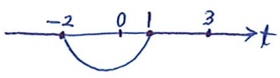






$\frac{k}{2}\leq 1 \Rightarrow k\leq 2$





$\frac{k}{2}\geq 1 \Rightarrow k\geq 2$

$\therefore k=2 \Rightarrow f(2)=2,\ f'(2)=2,\ f'(x)\geq 0\ (x>2)$

$f(x)=(x-2)^3+a(x-2)^2+2(x-2)+2$

$f'(x)=3(x-2)^2+2a(x-2)+2\geq 0\ \ (x>2)$

$x-2=t:\ 3t^2+2at+2\geq 0\ (t>0)$

$3t+\frac{2}{t}+2a\geq 0 \Rightarrow 2a+2\sqrt{6}\geq 0 \Rightarrow a\geq -\sqrt{6}$

$\therefore g(3)=f(3)=a+5\geq 5-\sqrt{6}$

단답형

16. 방정식 $\log_2(x+1)-5=\log_{\frac{1}{2}}(x-3)$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

7

$\log_2(x+1)+\log_2(x-3)=5$

$x^2-2x-3=32$

$x^2-2x-35=0$

$\therefore x=\cancel{-5},\ 7$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2+2$이고 $f(0)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

23

$f(x)=2x^3+2x+3$

$f(2)=16+4+3=23$

18. $\sum_{k=1}^{9}(ak^2-10k)=120$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

2

$a\times\frac{9\times10\times19}{6}-10\times\frac{9\times10}{2}=120$

$a\times\frac{57}{2}=12+45=57$

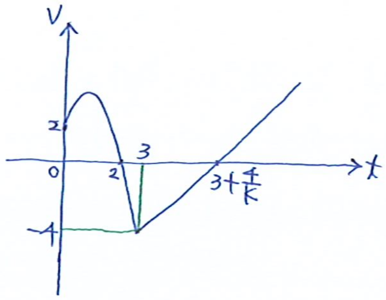
$a=2$

19. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\geq0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=\begin{cases}-t^2+t+2 & (0\leq t\leq3)\\ k(t-3)-4 & (t>3)\end{cases}$$

이다. 출발한 후 점 P의 운동 방향이 두 번째로 바뀌는 시각에서의 점 P의 위치가 1일 때, 양수 k의 값을 구하시오.

16 [3점]



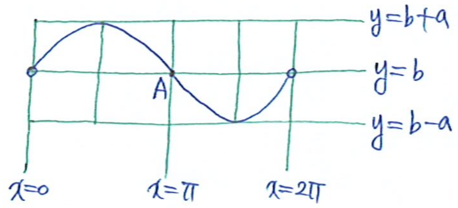
$\int_0^{3+\frac{4}{k}}v(t)dt=\int_0^3(-t^2+t+2)dt-\frac{8}{k}$

$=\frac{3}{2}-\frac{8}{k}=1$

$\therefore k=16$

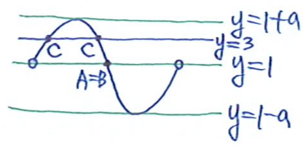
20. 5 이하의 두 자연수 a, b에 대하여 열린구간 $(0,\,2\pi)$에서 정의된 함수 $y=a\sin x+b$의 그래프가 직선 $x=\pi$와 만나는 점의 집합을 A라 하고, 두 직선 $y=1$, $y=3$과 만나는 점의 집합을 각각 B, C라 하자. $n(A\cup B\cup C)=3$이 되도록 하는 a, b의 순서쌍 $(a,\,b)$에 대하여 $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M\times m$의 값을 구하시오. [4점]

24



$A=\{(\pi,b)\}$

i) $b=1$

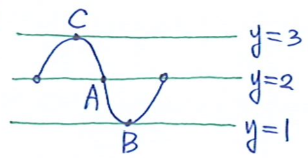


$1+a>3$

$a>2$

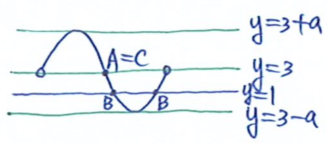
$a=3,4,5$

ii) $b=2$



$a=1$

iii) $b=3$

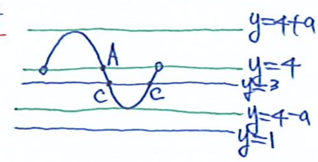


$3-a<1$

$a>2$

$a=3,4,5$

iv) $b=4$

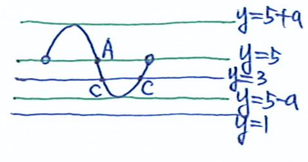


$1<4-a<3$

$1<a<3$

$a=2$

v) $b=5$



$1<5-a<3$

$2<a<4$

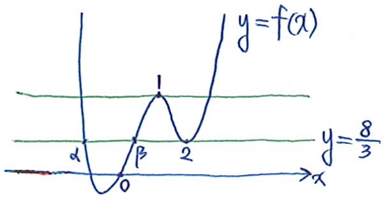
$a=3$

$\therefore M=8,\ m=3$

21. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f'(a) \le 0$인 실수 a의 최댓값은 2이다.
> (나) 집합 $\{x \mid f(x)=k\}$의 원소의 개수가 3 이상이 되도록 하는 실수 k의 최솟값은 $\frac{8}{3}$이다.

$f(0)=0$, $f'(1)=0$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [4점] 15



$f(x)=(x-2)^2(x-\alpha)(x-\beta)+\frac{8}{3}$

$f(0)=4\alpha\beta+\frac{8}{3}=0 \Rightarrow \alpha\beta=-\frac{2}{3}$

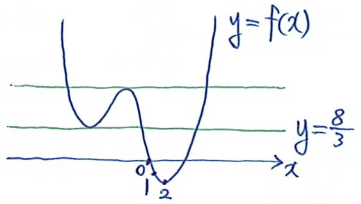
$f'(x)=2(x-2)(x-\alpha)(x-\beta)+(x-2)^2\{(x-\alpha)+(x-\beta)\}$

$f'(1)=-2(1-\alpha)(1-\beta)+\{(1-\alpha)+(1-\beta)\}=0$

$-2\{\cancel{1}-(\alpha+\beta)-\frac{2}{3}\}+\{\cancel{2}-(\alpha+\beta)\}=0 \Rightarrow \alpha+\beta=-\frac{4}{3}$

$\therefore f(3)=(3-\alpha)(3-\beta)+\frac{8}{3}=9+4-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}=15$

※



(X)

22. 수열 $\{a_n\}$은

$a_2=-a_1$

이고, $n \ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여

$n=4, 9$

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-\sqrt{n}\times a_{\sqrt{n}} & (\sqrt{n}\text{ 이 자연수이고 } a_n>0\text{인 경우}) \\ a_n+1 & (\text{그 외의 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_{15}=1$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 곱을 구하시오. [4점] 231

$a_3=a_2+1=-a_1+1$
$a_4=a_3+1=-a_1+2$

$a_{15}=a_{14}+1=1 \Rightarrow a_{14}=0 \Rightarrow a_{13}=-1 \Rightarrow a_{12}=-2 \Rightarrow a_{11}=-3$
$a_{10}=-4$

i) $a_4>0\ (a_1<2)$: $a_5=a_4-2a_2=-a_1+2+2a_1=a_1+2$

$a_6=a_1+3$, $a_7=a_1+4$, $a_8=a_1+5$, $a_9=a_1+6$

① $a_9>0\ (-6<a_1<2)$: $a_{10}=a_9-3a_3=a_1+6+3a_1-3$
$=4a_1+3=-4 \Rightarrow a_1=-\frac{7}{4}$

② $a_9\le 0\ (a_1\le -6)$: $a_{10}=a_9+1=a_1+7=-4 \Rightarrow a_1=-11$

ii) $a_4\le 0\ (a_1\ge 2)$: $a_5=a_4+1=-a_1+3$, $a_6=-a_1+4$

$a_7=-a_1+5$, $a_8=-a_1+6$, $a_9=-a_1+7$

① $a_9>0\ (2\le a_1<7)$: $a_{10}=a_9-3a_3=-a_1+7+3a_1-3$
$=2a_1+4=-4 \Rightarrow a_1=-4$ (X)

② $a_9\le 0\ (a_1\ge 7)$: $a_{10}=a_9+1=-a_1+8=-4 \Rightarrow a_1=12$

$\therefore (-\frac{7}{4})\times(-11)\times 12=231$

> ＊ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 네 개의 숫자 1, 1, 2, 3을 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

$\frac{4!}{2!}=12$

24. 두 사건 A, B는 서로 배반사건이고

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{5}{6},\quad \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{3}{4}$$

일 때, $\mathrm{P}(B^C)$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{11}{24}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{13}{24}$

$\frac{1}{6}+P(B)=\frac{3}{4}$

$P(B)=\frac{7}{12}$

$P(B^c)=\frac{5}{12}$

25. 다항식 $(x^2-2)^5$의 전개식에서 x^6의 계수는? [3점]

① -50 ② -20 ③ 10 ④ 40 ⑤ 70

$_5C_3(x^2)^3(-2)^2=40x^6$

26. 문자 a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 문자열 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 문자 a가 한 개만 포함되거나 문자 b가 한 개만 포함된 문자열이 선택될 확률은? [3점]

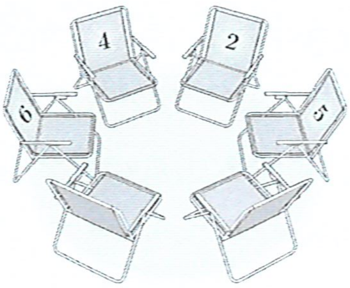
① $\frac{5}{8}$ ② $\frac{41}{64}$ ③ $\frac{21}{32}$ ④ $\frac{43}{64}$ ⑤ $\frac{11}{16}$

$a, b, c, d \xrightarrow{_4\Pi_4} \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc$

$$\frac{2\times(_4C_1\times3^3)-{}_4C_1\times{}_3C_1\times2^2}{4^4}=\frac{27-6}{2^5}=\frac{21}{32}$$

27. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 의자가 있다. 이 6개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 합이 11이 되지 않도록 배열하는 경우의 수는?
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 72 ② 78 ③ 84 ④ 90 ⑤ 96



1, 2, 3, 4, $\underline{5, 6}$
이웃X

$\therefore 3! \times {}_4P_2 = 72$

28. 탁자 위에 놓인 4개의 동전에 대하여 다음 시행을 한다.

4개의 동전 중 임의로 한 개의 동전을 택하여 한 번 뒤집는다.

처음에 3개의 동전은 앞면이 보이도록, 1개의 동전은 뒷면이 보이도록 놓여 있다. 위의 시행을 5번 반복한 후 4개의 동전이 모두 같은 면이 보이도록 놓여 있을 때, 모두 앞면이 보이도록 놓여 있을 확률은? [4점]

① $\frac{17}{32}$ ② $\frac{35}{64}$ ③ $\frac{9}{16}$ ④ $\frac{37}{64}$ ⑤ $\frac{19}{32}$

HHHT $\xrightarrow[4^5]{5번}$ HHHH / TTTT

ㅈㅈㅈㅎ
ㅎㅎㅎㅈ

4001 ⇒ 11114 ⇒ $3 \times 5 = 15$
2201 ⇒ 11224 ⇒ $3 \times \frac{5!}{2!2!} = 90$
2003 ⇒ 11444 ⇒ $3 \times \frac{5!}{2!3!} = 30$
0005 ⇒ 44444 ⇒ 1
3110 ⇒ 11123 ⇒ $3 \times \frac{5!}{3!} = 60$
1112 ⇒ 12344 ⇒ $\frac{5!}{2!} = 60$

$\therefore \frac{15+90+30+1}{15+90+30+1+60+60} = \frac{136}{256} = \frac{17}{32}$

단답형

29. 40개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 각각의 공은 흰 공 또는 검은 공 중 하나이다.
이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 흰 공 2개를 꺼낼 확률을 p, 흰 공 1개와 검은 공 1개를 꺼낼 확률을 q, 검은 공 2개를 꺼낼 확률을 r이라 하자. $p=q$일 때, $60r$의 값을 구하시오. (단, $p>0$) [4점] 6

$$\frac{{}_nC_2}{\cancel{{}_{40}C_2}} = \frac{{}_nC_1 \times {}_{40-n}C_1}{\cancel{{}_{40}C_2}}$$

$$\frac{\cancel{n}(n-1)}{2} = \cancel{n}(40-n)$$

$n=27$ (흰공 개수)

$$\therefore\ 60r = 60\times\frac{{}_{13}C_2}{{}_{40}C_2} = 6$$

30. 집합 $X=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오. [4점] 108

> (가) X의 모든 원소 x에 대하여 $x+f(x) \in X$이다.
> (나) $x=-2, -1, 0, 1$일 때 $f(x) \geq f(x+1)$이다.

(가) $-2+f(-2)=-2,-1,0,1,2 \Rightarrow f(-2)=0,1,2$
$-1+f(-1)=-2,-1,0,1,2 \Rightarrow f(-1)=-1,0,1,2$
$0+f(0)=-2,-1,0,1,2 \Rightarrow f(0)=-2,-1,0,1,2$
$1+f(1)=-2,-1,0,1,2 \Rightarrow f(1)=-2,-1,0,1$
$2+f(2)=-2,-1,0,1,2 \Rightarrow f(2)=-2,-1,0$

(나) $f(-2) \geq f(-1) \geq f(0) \geq f(1) \geq f(2)$
먼저

3개 — -1, 3개 — 0, 2개 — 1, 1개 — 2 — -2 — -2 — -2 $\Rightarrow 9\times1=9$

-1, 0, 1, 2 — -1 — -2 — -2 / -1 — -2, -1 $\Rightarrow 9\times3=27$

3개 — 0, 2개 — 1, 1개 — 2 — 0 — -2 — 1개, -1 — 2개, 0 — 3개 $\Rightarrow 6\times6=36$

$1 \Rightarrow 27$

$2 \Rightarrow 9$

$\therefore\ 9+27+36+27+9=108$

> ＊ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, **「선택과목(미적분)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n \to \infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\left|\frac{1}{2}\right| > \left|\frac{1}{3}\right|$

$\therefore \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

24. 곡선 $x\sin 2y + 3x = 3$ 위의 점 $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$\sin 2y + x \times 2y' \cos 2y + 3 = 0$

$0 + 1 \times 2y' \times (-1) + 3 = 0$

$y' = \frac{3}{2}$

25. 수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - \frac{3n^2-n}{2n^2+1}\right) = 2$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n^2+2a_n)$의 값은? [3점]

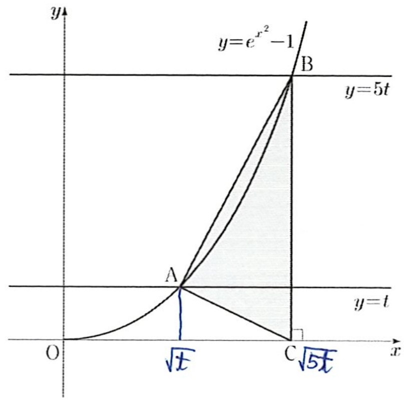
① $\frac{17}{4}$ ② $\frac{19}{4}$ ③ $\frac{21}{4}$ ④ $\frac{23}{4}$ ⑤ $\frac{25}{4}$

$a_1 - \frac{2}{3} = 2,\ a_n = \frac{3n^2-n}{2n^2+1}\ (n \geq 2)$

$\therefore \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 \times \frac{3}{2} = \frac{21}{4}$

26. 양수 t에 대하여 곡선 $y=e^{x^2}-1\ (x \geq 0)$이 두 직선 $y=t$, $y=5t$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim_{t\to0+}\frac{S(t)}{t\sqrt{t}}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{5}{4}(\sqrt{5}-1)$ ② $\frac{5}{2}(\sqrt{5}-1)$ ③ $5(\sqrt{5}-1)$
④ $\frac{5}{4}(\sqrt{5}+1)$ ⑤ $\frac{5}{2}(\sqrt{5}+1)$



$e^{x^2}-1 = t \Rightarrow x = \sqrt{\ln(1+t)} \fallingdotseq \sqrt{t}$

$S(t) \fallingdotseq \frac{1}{2} \times 5t \times (\sqrt{5}-1)\sqrt{t} \Rightarrow \frac{5}{2}(\sqrt{5}-1)$

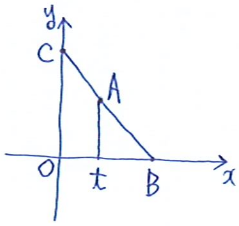
27. 상수 $a\,(a>1)$과 실수 $t\,(t>0)$에 대하여 곡선 $y=a^x$ 위의 점 $\mathrm{A}(t,\,a^t)$에서의 접선을 l이라 하자. 점 A를 지나고 직선 l에 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 B, y축과 만나는 점을 C라 하자. $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$ 의 값이 $t=1$에서 최대일 때, a의 값은? [3점]

① $\sqrt{2}$　② $\sqrt{e}$　③ 2　④ $\sqrt{2e}$　⑤ e

$y-a^t=\dfrac{-1}{a^t\ln a}(x-t)$

$B(t+a^{2t}\ln a,\,0)$

$C\left(0,\,\dfrac{t}{a^t\ln a}+a^t\right)$



$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\dfrac{t}{a^{2t}\ln a}=\dfrac{1}{\ln a}\times ta^{-2t}=f(t)$

$f'(t)=\dfrac{a^{-2t}}{\ln a}(1-2t\ln a)$

$f'(1)=0 \Rightarrow 1-2\ln a=0 \Rightarrow a=\sqrt{e}$

28. 함수 $f(x)$가

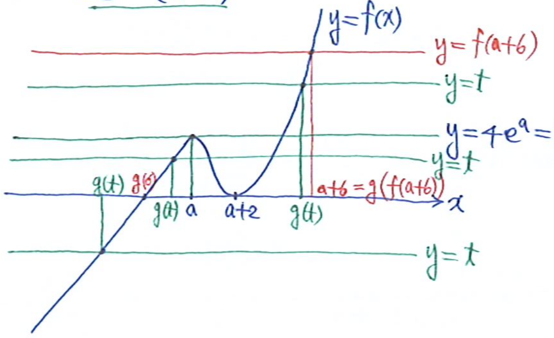
$$f(x)=\begin{cases}(x-a-2)^2e^x & (x\ge a)\\ e^{2a}(x-a)+4e^a & (x<a)\end{cases}$$

일 때, 실수 t에 대하여 $f(x)=t$를 만족시키는 x의 최솟값을 $g(t)$라 하자.

함수 $g(t)$가 $t=12$에서만 불연속일 때, $\dfrac{g'(f(a+2))}{g'(f(a+6))}$ 의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① $6e^4$　② $9e^4$　③ $12e^4$　④ $8e^6$　⑤ $10e^6$

$f'(x)=\begin{cases}e^x\{(x-a-2)^2+2(x-a-2)\}=e^x(x-a)(x-a-2) & (x>a)\\ e^{2a} & (x<a)\end{cases}$



$e^a=3 \Rightarrow a=\ln 3$

$f(g(t))=t \Rightarrow f'(g(t))\,g'(t)=1$

$f(a+2)=0 \Rightarrow t=0:\ f(g(0))=0,\ \underbrace{f'(g(0))}_{e^{2a}=9}g'(0)=1$

$t=f(a+6):\ \underbrace{f'(a+6)}_{24e^{a+6}=72e^6}g'(f(a+6))=1$

$\therefore \dfrac{g'(f(a+2))}{g'(f(a+6))}=\dfrac{g'(0)}{g'(f(a+6))}=\dfrac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{72e^6}}=8e^6$

단답형

29. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\ln(1+x^2)+a$ (a는 상수)와 두 양수 b, c에 대하여 함수

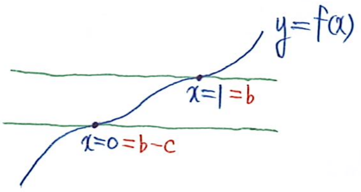
$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \ge b) \\ -f(x-c) & (x<b) \end{cases}$$

는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
$a+b+c=p+q\ln 2$일 때, $30(p+q)$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 유리수이고, $\ln 2$는 무리수이다.) [4점] 55

$$g'(x)=\begin{cases} f'(x) & (x>b) \\ -f'(x-c) & (x<b) \end{cases}$$

$$f(b)=-f(b-c),\quad \underbrace{f'(b)}_{0\text{이상}}=\underbrace{-f'(b-c)}_{0\text{이하}}=0$$

$$f'(x)=x^2-2x+\frac{2x}{x^2+1}=\frac{x^2(x-1)^2}{x^2+1}\ge 0$$



$\underline{b=1,\ c=1} \Rightarrow f(1)+f(0)=0$

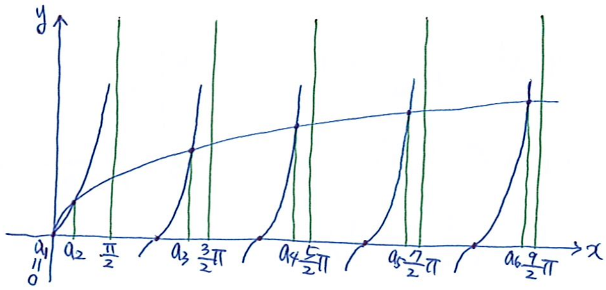
$2a-\frac{2}{3}+\ln 2=0 \Rightarrow \underline{a=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\ln 2}$

$\therefore\ a+b+c=\frac{7}{3}-\frac{1}{2}\ln 2 \Rightarrow 30\left(\frac{7}{3}-\frac{1}{2}\right)=55$

30. 함수 $y=\frac{\sqrt{x}}{10}$의 그래프와 함수 $y=\tan x$의 그래프가 만나는 모든 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.

$$\frac{1}{\pi^2}\times\lim_{n\to\infty} a_n^3\tan^2(a_{n+1}-a_n)$$

의 값을 구하시오. [4점] 25



$$\frac{\sqrt{a_n}}{10}=\tan a_n$$

$$a_n^3\tan^2(a_{n+1}-a_n)=a_n^3\left(\frac{\tan a_{n+1}-\tan a_n}{1+\tan a_{n+1}\tan a_n}\right)^2$$

$$=a_n^3\left(\frac{\frac{\sqrt{a_{n+1}}}{10}-\frac{\sqrt{a_n}}{10}}{1+\frac{\sqrt{a_{n+1}}}{10}\times\frac{\sqrt{a_n}}{10}}\right)^2=100a_n^3\left(\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{100+\sqrt{a_n}\sqrt{a_{n+1}}}\right)^2$$

$$=100a_n^3\left\{\frac{a_{n+1}-a_n}{(100+\sqrt{a_n}\sqrt{a_{n+1}})(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n})}\right\}^2$$

$$\fallingdotseq 100\cancel{a_n^3}\left(\frac{\pi}{\cancel{a_n}\times 2\cancel{\sqrt{a_n}}}\right)^2 \longrightarrow 25\pi^2$$

* 확인 사항

ㅇ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

ㅇ 이어서, **「선택과목(기하)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$에 대하여

$$\vec{a}+3(\vec{a}-\vec{b})=k\vec{a}-3\vec{b}$$

이다. 실수 k의 값은? (단, $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$) [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$k=4$

24. 타원 $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(3, \sqrt{5})$에서의 접선의 y절편은? (단, b는 양수이다.) [3점]

① $\frac{3}{2}\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $\frac{5}{2}\sqrt{5}$ ④ $3\sqrt{5}$ ⑤ $\frac{7}{2}\sqrt{5}$

$\frac{1}{2}+\frac{5}{b^2}=1 \Rightarrow b=\sqrt{10}$

$\frac{3x}{18}+\frac{\sqrt{5}y}{10}=1$

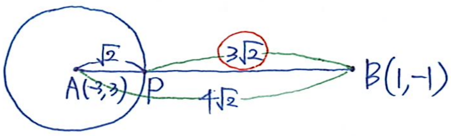
$x=0$; $y=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$

25. 좌표평면에서 두 벡터 $\vec{a}=(-3,\ 3)$, $\vec{b}=(1,\ -1)$에 대하여 벡터 $\vec{p}$가

$$|\vec{p}-\vec{a}|=|\vec{b}|$$

를 만족시킬 때, $|\vec{p}-\vec{b}|$의 최솟값은? [3점]

① $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{7}{2}\sqrt{2}$



26. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 한 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)\ (c>0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 쌍곡선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. 쌍곡선의 한 점근선의 방정식이 $y=x$이고 $\overline{\mathrm{PQ}}=8$일 때, $a^2+b^2+c^2$의 값은? (단, a와 b는 양수이다.) [3점]

① 56 ② 60 ③ 64 ④ 68 ⑤ 72

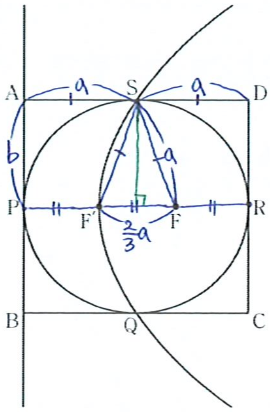
$a=b \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$

$c=\sqrt{2}a \Rightarrow x=\sqrt{2}a : 2-\frac{y^2}{a^2}=1 \Rightarrow y^2=a^2$

$y=\pm a \Rightarrow \overline{PQ}=2a=8$

$\therefore a=4 \Rightarrow a^2+b^2+c^2=4a^2=64$

27. 그림과 같이 직사각형 ABCD의 네 변의 중점 P, Q, R, S를 꼭짓점으로 하는 타원의 두 초점을 F, F′이라 하자. 점 F를 초점, 직선 AB를 준선으로 하는 포물선이 세 점 F′, Q, S를 지난다. 직사각형 ABCD의 넓이가 $32\sqrt{2}$일 때, 선분 FF′의 길이는? [3점]



① $\frac{7}{6}\sqrt{3}$　② $\frac{4}{3}\sqrt{3}$　③ $\frac{3}{2}\sqrt{3}$　④ $\frac{5}{3}\sqrt{3}$　⑤ $\frac{11}{6}\sqrt{3}$

$b^2 = a^2 - \frac{1}{9}a^2 = \frac{8}{9}a^2$

$b = \frac{2\sqrt{2}}{3}a$

$S = 2a \times 2b = 4a \times \frac{2\sqrt{2}}{3}a = 32\sqrt{2}$

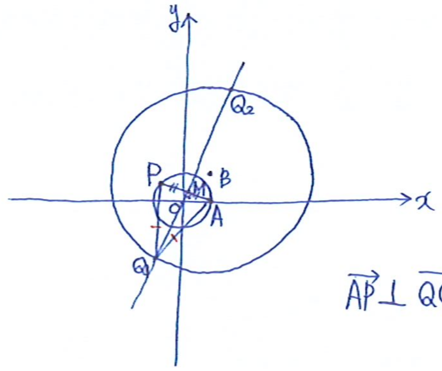
$a = 2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{2}{3}a = \frac{4}{3}\sqrt{3}$

28. 좌표평면에서 두 점 A(1, 0), B(1, 1)에 대하여 두 점 P, Q가

$$|\overrightarrow{OP}| = 1,\quad |\overrightarrow{BQ}| = 3,\quad \overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QP}) = 0$$ $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{QM}$

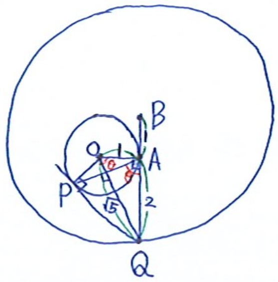
을 만족시킨다. $|\overrightarrow{PQ}|$의 값이 최소가 되도록 하는 두 점 P, Q에 대하여 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BQ}$의 값은?
(단, O는 원점이고, $|\overrightarrow{AP}| > 0$이다.) [4점]

① $\frac{6}{5}$　② $\frac{9}{5}$　③ $\frac{12}{5}$　④ 3　⑤ $\frac{18}{5}$



$\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{QO}$

$\overline{PQ} = \overline{AQ}$ (최소)



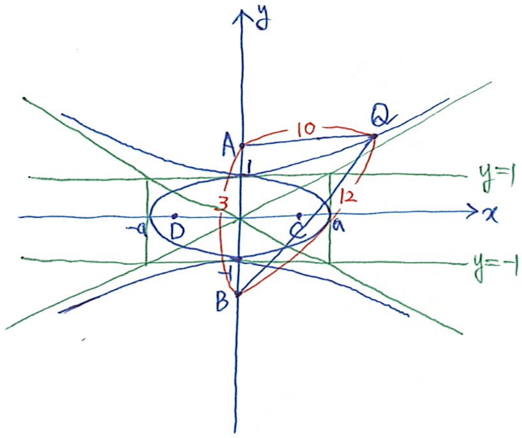
$\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BQ} = 3 \times \frac{4}{\sqrt{5}} \times \cos\theta = \frac{12}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{12}{5}$

단답형

29. 좌표평면에 곡선 $|y^2-1|=\dfrac{x^2}{a^2}$ 과 네 점 A$(0,\ c+1)$, B$(0,\ -c-1)$, C$(c,\ 0)$, D$(-c,\ 0)$이 있다. 곡선 위의 점 중 y좌표의 절댓값이 1보다 작거나 같은 모든 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PC}}+\overline{\mathrm{PD}}=\sqrt{5}$ 이다. 곡선 위의 점 Q가 제1사분면에 있고 $\overline{\mathrm{AQ}}=10$일 때, 삼각형 ABQ의 둘레의 길이를 구하시오. (단, a와 c는 양수이다.) [4점]

25

$$\begin{cases} y^2 \ge 1 : \ y^2-1=\dfrac{x^2}{a^2} \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{1^2}=-1 \ (\text{쌍곡선}) \\ y^2<1 : \ 1-y^2=\dfrac{x^2}{a^2} \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{1^2}=1 \ (\text{타원}) \end{cases}$$



$c^2=a^2-1,\ 2a=\sqrt{5} \Rightarrow a=\dfrac{\sqrt{5}}{2},\ c=\dfrac{1}{2}$

$a^2+1=\dfrac{9}{4}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=(c+1)^2$

$\therefore\ 10+12+3=25$

30. 두 초점이 F$(5,\ 0)$, F$'(-5,\ 0)$이고, 주축의 길이가 6인 쌍곡선이 있다. 쌍곡선 위의 $\overline{\mathrm{PF}}<\overline{\mathrm{PF'}}$ 인 점 P에 대하여 점 Q가

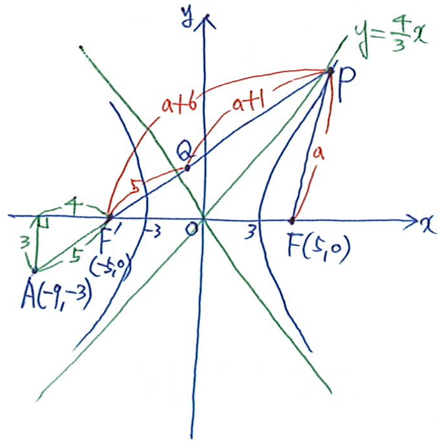
$$(|\overrightarrow{\mathrm{FP}}|+1)\overrightarrow{\mathrm{F'Q}}=5\overrightarrow{\mathrm{QP}}$$

를 만족시킨다. 점 A$(-9,\ -3)$에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$의 최댓값을 구하시오. [4점]

10

$\overrightarrow{F'Q},\ \overrightarrow{QP} \Rightarrow$ 같은 방향

$c=5,\ a=3,\ b=4$



$(a+1)\overrightarrow{F'Q}=5\overrightarrow{QP}$

$\overline{F'Q}:\overline{QP}=5:a+1$

$\therefore\ |\overrightarrow{AQ}|=|\underbrace{\overrightarrow{AF'}}_{\text{크기:5}}+\underbrace{\overrightarrow{F'Q}}_{\text{크기:5}}|\le 5+5=10$

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.