내신대비 모의고사

범위 : 미분-적분

시험시간 : 50분

이름 :

[객관식]

1. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t일 때의 위치 x가

$$x=t^3-2t^2+4t$$

이다. 속도가 8인 순간의 점 P의 가속도는?

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

2. 다항함수 $f(x)$에 대하여

$$\int f(x)\,dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\mathrm{C} \quad (\text{단, } \mathrm{C}\text{는 적분상수})$$

가 성립할 때, $f(-2)$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

3. 다항함수 $f(x)$에 대하여

$$f(x)=\int_1^{x+1} t(t+2)\,dt$$

가 성립한다. $f'(1)$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 7 ⑤ 8

4. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가

$$x=t^3+at^2+bt+4$$

이고 $t=3$일 때, 점 P는 운동 방향을 바꾸며 이때의 위치는 -5이다. 점 P가 $t=3$이외에 운동 방향을 바꾸는 시각은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

5. 함수 $f(x)=-x^3+kx^2-3x$가 실수 전체의 구간에서 감소할 때, 정수 k의 개수는?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

6. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{1-h}^{1+h}(x-2)(x+1)\,dx$의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

7. 다항함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여 다음을 모두 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?

(가) $F(x)=xf(x)-4x^3-x^2+1$ (나) $f(0)=3$

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

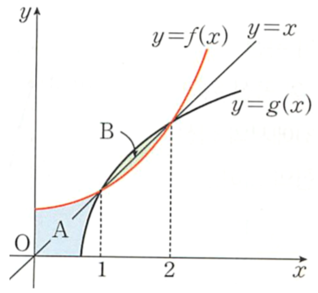
8. 민지는 첨단 농법으로 원예작물을 재배하여 매달 140kg의 작물을 판매하고 있다. 판매가격은 1kg당 40000원이고 생산하는데 드는 비용은 생산량에 관계없이 매달 3000000원이다.
조사에 따르면 판매 가격을 1kg당 $1000x^2$원 내릴 때, 매달 판매량은 $20x\text{kg}$ 증가하는 것으로 나타났다. 한 달 수익이 최대가 되게 하는 1kg당 판매가격은?

① 12000 ② 24000 ③ 30000
④ 36000 ⑤ 45000

9. 방정식 $2x^3-9x^2+12x-a=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $1<a<2$ ② $2<a<3$ ③ $3<a<4$
④ $4<a<5$ ⑤ $5<a<6$

10. 그림과 같이 함수 $f(x)=ax^2+b(x\geq 0)$의 그래프와 그 역함수 $g(x)$의 그래프가 만나는 두 점의 x좌표는 1과 2이다. $0\leq x\leq 1$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$및 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A라 하고 $1\leq x\leq 2$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라고 할 때, $\mathrm{A}-\mathrm{B}$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)



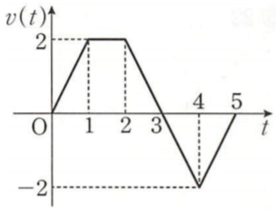
① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

11. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(a+x)=f(a-x)$이다. (나) $\int_a^2 f(x)\,dx=2,\ \int_a^2 \lvert f(x)\rvert\,dx=\frac{22}{9}$

$f(k)=0$이고 $k<a$인 실수 k에 대하여 $\int_k^2 f(x)\,dx=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.(단, a는 상수이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

12. 좌표가 1인 점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$의 그래프가 그림과 같을 때, [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?



ㄱ. 출발 후 처음으로 방향을 바꿀 때 점 P의 위치는 5이다. ㄴ. 출발 후 5초 동안 점 P가 움직인 거리는 6이다. ㄷ. $t=2$일 때 $t=4$일 때의 점 P의 위치는 같다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 $3x^2+8x-2$이다. $\int_0^2 f(x)dx=\frac{2}{3}$일 때, $f(1)$의 값은?

① -8 ② -6 ③ -4
④ -2 ⑤ 0

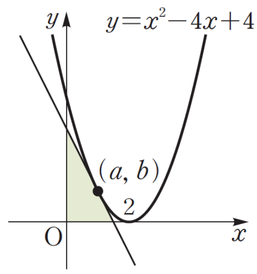
14. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=ax^2(0 \le x < 2)$ (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)+2$이다.

$\int_1^7 f(x)dx$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 16 ② 20 ③ 22
④ 24 ⑤ 30

15. 오른쪽 그림과 같이 곡선 $f(x)=x^2-4x+4$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 최대일 때, $b-a$의 값은? (단, $0<a<2$)



① $\frac{8}{9}$ ② 1
③ $\frac{10}{9}$ ④ $\frac{11}{9}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

16. 함수 $f(x)=2x^4-px^3+x^2$의 극값이 한 개뿐일 때, 상수 p의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $\frac{M}{m}$의 값은?

① -3　② -2　③ $-\frac{3}{2}$　④ -1　⑤ $-\frac{1}{2}$

[주관식]

17. 다항함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=3x^2-6x$$

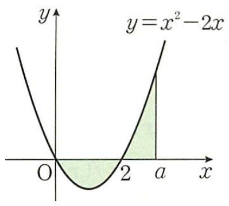
이다. 함수 $f(x)$의 극댓값이 5일 때, 함수 $f(x)$의 극솟값을 구하시오.

18. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt=x^3+ax^2-2$$

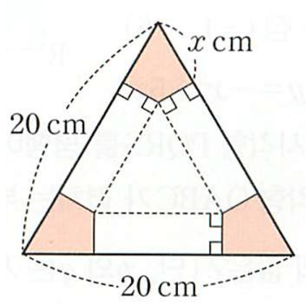
를 만족시킬 때, $f'(a)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수)

19. 곡선 $y=x^2-2x$와 x축 및 직선 $x=a$로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{8}{3}$일 때, a의 값을 구하시오. (단, $a>2$)



20. 함수 $f(x)=3x^3-9x^2+5$에서 방정식 $|f(x)|=k$가 서로 다른 네 실근을 갖도록 하는 상수 k의 값의 범위가 $\alpha<x<\beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하시오.

21. 한 변의 길이가 $20\,\text{cm}$인 정삼각형 모양의 종이에 세 모퉁이에서 합동인 사각형 모양의 종이를 다음 그림과 같이 잘라내고 남은 부분을 접어서 뚜껑이 없는 상자를 만들 때, 그 부피가 최대가 되는 x의 값을 구하시오. (단, 단위는 cm^3)



22. 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(6)$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. [4점]

(가) $f(2)=f'(2)=0$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq -3$이다.

정답 및 풀이

1. 정답 ①

점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$와 가속도 $a(t)$는

$v(t)=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-4t+4,\ a(t)=\dfrac{dv}{dt}=6t-4$

$v(t)=8$일 때, $3t^2-4t+4=8$

$3t^2-4t-4=0,\ (3t+2)(t-2)=0$

이때 $t>0$이므로 $t=2$

따라서 $t=2$에서 가속도는 $a(2)=12-4=8$

2. 정답 ⑤

$\displaystyle\int f(x)\,dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\mathrm{C}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=x^2-x$

따라서 $f(x)=x^2-x$이므로 $f(-2)=4+2=6$

3. 정답 ⑤

$f(x)=\displaystyle\int_1^{x+1}t(t+2)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x+1)(x+3)$

따라서 $f'(1)=8$

4. 정답 ②

$v(t)=\dfrac{dx}{dt}=3t^2+2at+b$에서 $t=3$일 때,

속도가 0이므로 $27+6a+b=0$

$\therefore\ 6a+b=-27$ ……㉠

$t=3$일 때, 위치가 -5이므로 $27+9a+3b+4=-5$

$\therefore\ 3a+b=-12$ ……㉡

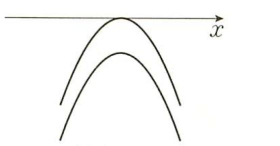
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-5,\ b=3$

$v(t)=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-10t+3=(3t-1)(t-3)$이므로

$v=0$에서 $t=\dfrac{1}{3}$ 또는 $t=3$

따라서 $t=3$ 이외에 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=\dfrac{1}{3}$

5. 정답 ②



$f'(x)=-3x^2+2kx-3$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 구간에서 감소하므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f'(x)\le 0$이 성립해야 한다.

$f'(x)=-3x^2+2kx-3\le 0$이어야 하므로 이차함수 $y=f'(x)$가 x축에 접하거나 x축 보다 아래에 있어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=k^2-9\le 0,\ (k+3)(k-3)\le 0$

$\therefore\ -3\le k\le 3$

따라서 정수 k는 $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$이므로 개수는 7이다.

6. 정답 ②

$f(x)=(x-2)(x+1)$이라 하고 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{1-h}^{1+h}f(t)\,dt\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+h)-F(1-h)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+h)-F(1)-F(1-h)+F(1)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{F(1-h)-F(1)}{-h}\\
&=F'(1)+F'(1)=2F'(1)\\
&=2f(1)=2\cdot(-1)\cdot 2=-4
\end{aligned}$$

7. 정답 ③

$F(x)=xf(x)-4x^3-x^2+1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-12x^2-2x$

즉 $f'(x)=12x+2$

$f(x)=\displaystyle\int(12x+2)dx=6x^2+2x+\mathrm{C}$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(0)=3$이므로 $\mathrm{C}=3$

따라서 $f(x)=6x^2+2x+3$이므로 $f(1)=6+2+3=11$

8. 정답 ④

판매가격을 $1\mathrm{kg}$당 $(40000-1000x^2)$원으로 내리면 한 달 판매량은 $(140+20x)\mathrm{kg}$

$x>0,\ 40000-1000x^2>0$에서 $0<x<2\sqrt{10}$

한 달 수익을 $f(x)$원이라 하면

$f(x)=(40000-1000x^2)(140+20x)-3000000$

$=20000(-x^3-7x^2+40x+130)$

이때 $g(x)=-x^3-7x^2+40x+130$로 놓으면

$g'(x)=-3x^2-14x+40=-(x-2)(3x+20)$

$g'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=-\dfrac{20}{3}$

열린구간 $(0,\ 2\sqrt{10})$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	$(2\sqrt{10})$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극대이면서 최대이고 $g(x)$가 최대일 때, $f(x)$도 최대이므로 한 달 수익이 최대가 되게 하는 1kg당 판매가격은 $40000-1000\times 2^2=36000$(원)

9. 정답 ④

$2x^3-9x^2+12x-a=0$에서 $2x^3-9x^2+12x=a$이므로

주어진 방정식의 실근의 개수는 함수 $y=2x^3-9x^2+12x$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 개수와 같다.

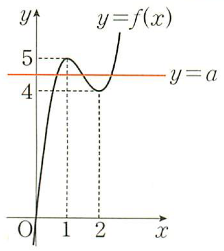
$f(x)=2x^3-9x^2+12x$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내고 그 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5	↘	4	↗



함수 $f(x)$는

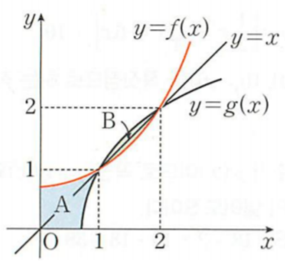
$x=1$일 때, 극댓값 $f(1)=5$,

$x=2$일 때, 극솟값 $f(2)=4$를 갖는다.

따라서 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 a의 값의 범위는 $4<a<5$

10. 정답 ④

$y=f(x)$, $y=g(x)$는 서로 역함수 관계에 있으므로 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



즉 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점은 $(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$이므로

$f(x)=ax^2+b(x\geq 0)$의 그래프는 $(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$를 지난다.

$f(1)=a+b=1$, $f(2)=4a+b=2$을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{2}{3}$

$\therefore\ f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}$ (단, $x\geq 0$)

(ⅰ) $\mathrm{A}=2\int_0^1|f(x)-x|dx=2\int_0^1\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}-x\right)dx$

$=2\left[\frac{1}{9}x^3+\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$

$=2\cdot\frac{5}{18}=\frac{5}{9}$

(ⅱ) $\mathrm{B}=2\int_1^2|f(x)-x|dx=2\int_1^2\left(x-\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}\right)dx$

$=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{9}x^3-\frac{2}{3}x\right]_1^2$

$=2\cdot\frac{1}{18}=\frac{1}{9}$

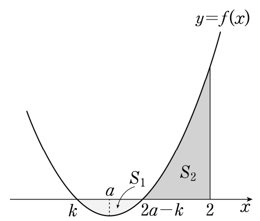
따라서 $\mathrm{A}-\mathrm{B}=\frac{5}{9}-\frac{1}{9}=\frac{4}{9}$

11. 정답 25

함수 $f(x)$는 이차함수이고 조건 (가)에서 $x=a$에 대하여 대칭이다.

조건 (나)에서 $0<\int_a^2 f(x)dx<\int_a^2|f(x)|dx$ 이므로 $a<2$ 이고,

함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 두 점 $(k,\ 0)$, $(2a-k,\ 0)$에서 만난다.



위의 그림에서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면

$\int_k^a f(x)dx=\int_a^{2a-k}f(x)dx=-\frac{S_1}{2}$ 이므로

$\int_a^2 f(x)dx=-\frac{S_1}{2}+S_2=2$, $\int_a^2|f(x)|dx=\frac{S_1}{2}+S_2=\frac{22}{9}$

따라서 $S_1=\frac{4}{9}$, $S_2=\frac{20}{9}$이다. $\int_k^2 f(x)dx=-S_1+S_2=\frac{16}{9}$

$p=9$, $q=16$이므로 $p+q=25$

12. 정답 ⑤

시각 $t=0$에서 $t=3$까지 수직선의 양의 방향으로 4만큼 움직이고 시각 $t=3$에서 $t=5$까지는 음의 방향으로 2만큼 움직인 다음 멈춘다.

ㄱ. 운동 방향이 바뀌려면 속도가 0인 순간의 속도의 부호가 달라야 하므로 $t=3$일 때, $v(t)=0$이고 그 좌우에서 부호가 변한다.

즉 구하는 위치는 $1+\int_0^3 v(t)dt=1+\frac{1}{2}\cdot(1+3)\cdot 2=5$ [참]

ㄴ. $t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$$s=\int_0^5|v(t)|dt=\int_0^3 v(t)dt+\int_3^5\{-v(t)\}dt$$

$$=4+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=6$$ [참]

ㄷ. $t=2$일 때, 점 P의 위치는

$1+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2+1\cdot 2=4$

$t=4$일 때, 점 P의 위치는

$1+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2+1\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=4$

이므로 $t=2$일 때와 $t=4$일 때의 점 P의 위치는 같다. [참]

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

13. 정답 ④

점 $(x,\ y)$에서의 접선의 기울기가 $3x^2+8x-2$이므로

$f'(x)=3x^2+8x-2$

$f(x)=\int(3x^2+8x-2)dx=x^3+4x^2-2x+C$

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(x^3+4x^2-2x+C)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3-x^2+Cx\right]_0^2$$

$$=\frac{32}{3}+2C$$

이므로 $\frac{32}{3}+2C=\frac{2}{3}$ $\quad\therefore\ C=-5$

따라서 $f(x)=x^3+4x^2-2x-5$이므로 $f(1)=1+4-2-5=-2$

14. 정답 ③

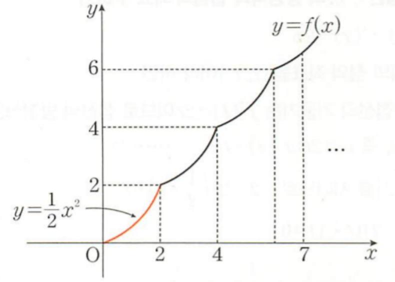
조건 (나)에서 $f(x+2)=f(x)+2$이고

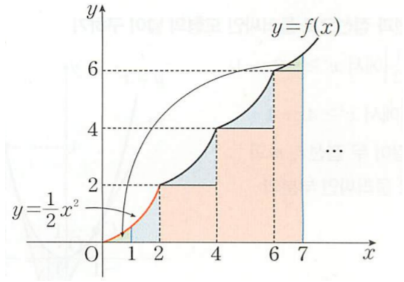
$f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(2)=f(0)+2,\ 4a=2$

$\therefore\ a=\frac{1}{2}$

이때 $f(x)=\frac{1}{2}x^2(0\le x\le 2)$이고 실수 전체의 집합에서 $f(x+2)=f(x)+2$이 성립하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.





이때 $\int_0^1 f(x)dx=\int_6^7\{f(x)-6\}dx$이므로

$\int_1^7 f(x)dx$의 값은

$=\int_0^6 f(x)dx+$(가로의 길이가 1이고 세로의 길이가 6인 직사각형의 넓이)

$=3\int_0^2\frac{1}{2}x^2dx+2\cdot 2+2\cdot 4+1\cdot 6$

$=3\left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^2+4+8+6$

$=4+18$

$=22$

15. 정답 ③

$f(x)=x^2-4x+4$에서 $f'(x)=2x-4$

$f'(a)=2a-4$이므로 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$y-b=(2a-4)(x-a)\quad\therefore\ y=(2a-4)x-2a^2+4a+b$

이때 점 $(a,\ b)$는 곡선 $y=f(x)$위의 점이므로 $b=a^2-4a+4$

$\therefore\ y=(2a-4)x-a^2+4$

따라서 접선의 x절편은 $\frac{a^2-4}{2a-4}=\frac{a+2}{2}$이고, 접선의 y절편은 $-a^2+4$이다.

삼각형의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\frac{1}{2}\cdot\frac{a+2}{2}\cdot(-a^2+4)=\frac{1}{4}(-a^3-2a^2+4a+8)$에서

$S'(a)=\frac{1}{4}(-3a^2-4a+4)=-\frac{1}{4}(a+2)(3a-2)$

$S'(a)=0$에서 $a=\frac{2}{3}$

$(\because\ 0<a<2)$

a	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	(2)
$S'(a)$		$+$	0	$-$	

따라서 함수 $S(a)$는

$S(a)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

$a=\frac{2}{3}$ 일 때 극대이면서 최대이므로 $b=\left(\frac{2}{3}\right)^2-4\cdot\frac{2}{3}+4=\frac{16}{9}$

$\therefore\ b-a=\frac{16}{9}-\frac{2}{3}=\frac{10}{9}$

16. 정답 ④

$f(x)=2x^4-px^3+x^2$에서

$f'(x)=8x^3-3px^2+2x=x(8x^2-3px+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $8x^2-3px+2=0$

함수 $f(x)$가 극값을 하나만 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근(또는 삼중근)을 가져야 한다.

이차방정식 $8x^2-3px+2=0$의 판별식을 D라 하면

(i) $x(8x^2-3px+2)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

이차방정식 $8x^2-3px+2=0$이 허근을 가져야 하므로

$D=9p^2-64<0,\ (3p-8)(3p+8)<0$

$\therefore\ -\frac{8}{3}<p<\frac{8}{3}$

(ii) $x(8x^2-3px+2)=0$이 한 실근과 중근을 갖는 경우

이차방정식 $8x^2-3px+2=0$이 0을 근으로 갖거나 0이 아닌 실수를 중근으로 가져야 한다.

이때 $8x^2-3px+2=0$이 0을 근으로 가질 수 없으므로 0이 아닌 실수를 중근으로 가져야 한다.

$D=9p^2-64=0,\ (3p-8)(3p+8)=0$

$\therefore\ p=-\frac{8}{3}$ 또는 $p=\frac{8}{3}$

(i), (ii)에서 $-\frac{8}{3}\le p\le\frac{8}{3}$

따라서 $M=\frac{8}{3},\ m=-\frac{8}{3}$이므로 $\frac{M}{m}=-1$

17. 정답 1

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내면 다음 표와 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값 5를 가지므로 $f(0)=5$

$f(x)=\int(3x^2-6x)dx=x^3-3x^2+C$ (단, C는 적분상수)

이므로 $f(0)=C=5$

$\therefore\ f(x)=x^3-3x^2+5$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이고 극솟값은

$f(2)=8-12+5=1$

18. 정답 5

$$\int_1^x\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt=x^3+ax^2-2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1+a-2$에서 $a=1$

한편 $\frac{d}{dt}f(t)=f'(t)$이므로

$$\int_1^x\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt=\int_1^x f'(t)dt=\left[f(t)\right]_1^x=f(x)-f(1)$$

이때 $\int_1^x\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt=x^3+x^2-2$에서 $f(x)-f(1)=x^3+x^2-2$

$f(x)-f(1)=x^3+x^2-2$의 양변을 x에 관하여 미분하면

$f'(x)=3x^2+2x$

따라서 $f'(a)=f'(1)=3+2=5$

19. 정답 3

$y=x^2-2x$와 x축 직선 $x=a$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^2(-x^2+2x)dx+\int_2^a(x^2-2x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^a$$

$$=\frac{1}{3}a^3-a^2+\frac{8}{3}$$

도형의 넓이가 $\frac{8}{3}$이므로 $\frac{1}{3}a^3-a^2+\frac{8}{3}=\frac{8}{3}$

$\frac{1}{3}a^3-a^2=0,\ a^2(a-3)=0$

따라서 $a>2$이므로 $a=3$

20. 정답 12

$f(x)=3x^3-9x^2+5$에서 $f'(x)=9x^2-18x=9x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

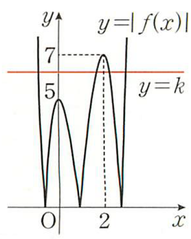
$f(x)$의 증가 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-7	$\nearrow$

$x=0$에서 극대이고 극댓값은 $f(0)=5$

$x=2$에서 극소이고 극솟값은 $f(2)=-7$

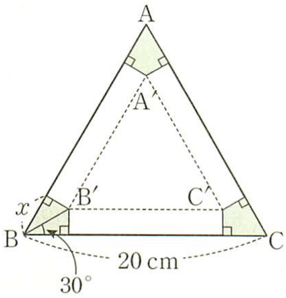
함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



서로 다른 네 실근을 갖도록 하는 상수 k의 값의 범위는 $5<k<7$

따라서 $\alpha=5,\ \beta=7$이므로 $\alpha+\beta=12$

21. 정답 $\frac{10}{3}$



상자의 밑면인 $\triangle A'B'C'$의 넓이는

$\frac{1}{2}(20-2x)(20-2x)\sin 60°$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}(20-2x)^2$

상자의 높이는

$x\tan 30° = \frac{x}{\sqrt{3}}$이므로 상자의 부피는

$V(x)$라 하면

$V(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(20-2x)^2\times\frac{x}{\sqrt{3}}$

$=\frac{1}{4}(4x^3-80x^2+400x)$ (단, $0<x<10$)

$V'(x)=\frac{1}{4}(12x^2-160x+400)=\frac{1}{4}(2x-20)(6x-20)$

$V(x)=0$에서 $x=\frac{10}{3}$

$V(x)$의 증가와 감소를 나타내면 다음 표와 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{10}{3}$	$\cdots$	(10)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	극대	↘	

따라서 부피가 최대가 되는 x의 값은 $\frac{10}{3}$

22. 정답 128

(가)로부터

$f(x)=(x-2)^2(x-c)=x^3-(4+c)x^2+(4+4c)x-4c$

(나)에서

$f'(x)=3x^2-2(4+c)x+(4+4c)\ge -3$

$3x^2-2(4+c)x+(7+4c)\ge 0$

$D/4=(4+c)^2-3(7+4c)=c^2-4c-5$

$=(c-5)(c+1)\le 0,\ -1\le c\le 5$

$f(6)=16(6-c)$의 최대와 최소는 각각 $c=-1,\ c=5$일 때 이므로

$16(6+1)+16(6-5)=128$