2027학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가

# 수학영역 정답 및 풀이

■ [공통: 수학 I ·수학 II]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 01. ② | 02. ⑤ | 03. ④ | 04. ③ | 05. ① |
| 06. ① | 07. ② | 08. ④ | 09. ③ | 10. ③ |
| 11. ① | 12. ① | 13. ⑤ | 14. ③ | 15. ④ |
| 16. 2 | 17. 10 | 18. 15 | 19. 9 | 20. 48 |
| 21. 11 | 22. 32 | | | |

**1. 출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$$\sqrt[3]{9}\times 3^{-\frac{5}{3}}=3^{\frac{2}{3}}\times 3^{-\frac{5}{3}}$$
$$=3^{\frac{2}{3}-\frac{5}{3}}$$
$$=3^{-1}=\frac{1}{3}$$

정답 ②

**2. 출제의도** : 다항함수의 도함수를 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$f(x)=3x^2-x+1$에서

$f'(x)=6x-1$

따라서

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=f'(1)$$
$$=6\times 1-1=5$$

정답 ⑤

**3. 출제의도** : $\sum$의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(2a_k+b_k)=19$에서

$$2\sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=1}^{5}b_k=19 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k)=10$에서

$$\sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=1}^{5}b_k=10 \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠ − ㉡을 하면

$$\sum_{k=1}^{5}a_k=19-10=9$$

정답 ④

**4. 출제의도** : 그래프를 보고 함수의 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$$\lim_{x\to -1-}f(x)=-1,\ \lim_{x\to 1+}f(x)=1$$

이므로

$$\lim_{x\to -1-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)$$
$$=-1+1$$
$$=0$$

정답 ③

**5. 출제의도** : 곱의 미분법을 이용하여 함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

**정답풀이 :**

$f'(x)=3(x^2-2x+2)+(3x-1)\times(2x-2)$

$=9x^2-14x+8$

$f'(2)=9\times2^2-14\times2+8$

$=36-28+8=16$

**정답** ①

6. **출제의도** : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 tan의 값을 구할 수 있는가?

**정답풀이 :** $\cos^2\theta=\frac{1}{10}$을

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에 대입하면

$\sin^2\theta=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$

$\tan^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\frac{9}{10}}{\frac{1}{10}}=9$

한편 $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$일 때 $\tan\theta<0$이므로

$\tan\theta=-3$

**정답** ①

7. **출제의도** : 함수의 극솟값을 구할 수 있는가?

**정답풀이 :**

$f'(x)=3x^2+a$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이므로

$f'(-1)=3+a=0$

$a=-3$

$f(x)=x^3-3x+9$이고,

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ |

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이므로 함수 $f(x)$의 극솟값은

$f(1)=1-3+9=7$

**정답** ②

8. **출제의도** : 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

**정답풀이 :**

$\overline{\mathrm{AC}}=x$라 하면

$a=8$, $b=x$, $c=4$이므로

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$-\frac{1}{4}=\frac{x^2+4^2-8^2}{2\times x\times4}$

$x^2+2x-48=0$

$(x+8)(x-6)=0$

$x=6$ ($\because$ $x>0$)

따라서 선분 AC의 길이는 6이다.

**정답** ④

9. **출제의도** : 정적분을 활용하여 두 점의 위치가 같아지는 시각을 구할 수 있는가?

**정답풀이 :**

출발한 후 시각 $t=k$일 때 점 P의 위치는

$$0+\int_0^k v_1(t)dt=\int_0^k (t^2-t)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2\right]_0^k$$
$$=\frac{1}{3}k^3-\frac{1}{2}k^2$$

출발한 후 시각 $t=k$일 때 점 Q의 위치는

$$0+\int_0^k v_2(t)dt=\int_0^k t\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^k$$
$$=\frac{1}{2}k^2$$

$t=k$에서 두 점 P, Q의 위치가 같으므로

$$\frac{1}{3}k^3-\frac{1}{2}k^2=\frac{1}{2}k^2$$

$$\frac{1}{3}k^3-k^2=0$$

$$\frac{1}{3}k^2(k-3)=0$$

따라서 양수 $k$의 값은 3이다.

**정답** ③

10. **출제의도** : 로그의 성질과 밑의 변환을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

**정답풀이 :**

주어진 식에서 로그의 밑을 3으로 변환하면

$$\log_9 a=\frac{1}{2}\log_3 a,\ \log_9 b=\frac{1}{2}\log_3 b$$

이므로

$$\frac{1}{2}\log_3 a+\log_3 b=2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\log_3 a=4\log_3 b \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\frac{1}{2}\times 4\log_3 b+\log_3 b=2$$

에서 $\log_3 b=\frac{2}{3}$이고

㉡에서 $\log_3 a=\frac{8}{3}$

이때

$$\log_3\frac{a}{b}=\log_3 a-\log_3 b=\frac{8}{3}-\frac{2}{3}=2$$

이므로

$$\frac{a}{b}=3^2=9$$

**정답** ③

11. **출제의도** : 함수의 극한의 성질을 이용하여 함수를 결정할 수 있는가?

**정답풀이 :**

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+2)}{x(f(x)-3)}$에서

$x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}f(x+2)=0$에서 $f(2)=0$

$\cdots\cdots$ ㉠

$\lim_{x\to 3}\frac{f(x+2)}{x(f(x)-3)}$에서

함수 $f(x)$가 일차함수이므로

$\lim_{x\to 3}f(x+2)=f(5)\neq 0$

이때 $\lim_{x\to3}x(f(x)-3)\neq0$이면

$\lim_{x\to0}\frac{f(x+2)}{x(f(x)-3)}$의 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to3}x(f(x)-3)=0$

이어야 한다.

즉, $3(f(3)-3)=0$에서 $f(3)=3$

…… ㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)=3(x-2)$

따라서 $f(4)=3\times2=6$

**정답** ①

12. **출제의도** : 등비수열의 일반항을 이용하여 항을 구할 수 있는가?

**정답풀이** : 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공비를 $r$이라 하면 $r>0$이고

$a=0$이면 주어진 식을 만족시키지 못하므로 $a\neq0$

$2a_1(a_1+a_3)=5a_2(a_1+a_2)$에서

$2a(a+ar^2)=5ar(a+ar)$

$2a^2(1+r^2)=5a^2r(1+r)$

$2+2r^2=5r+5r^2$

$3r^2+5r-2=0$

$(3r-1)(r+2)=0$

$r>0$이므로 $r=\frac{1}{3}$

$2a(a+ar^2)=20$, $a^2(1+r^2)=10$에서

$a^2\times\left(1+\frac{1}{9}\right)=10$, $a^2=9$

따라서 $a_1\times a_6=a^2r^5=9\times\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{27}$

**정답** ①

13. **출제의도** : 정적분을 이용하여 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)>g(x)$이고 양수 $t$에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=0$, $x=t$로 둘러싸인 도형의 넓이가 $S(t)$이므로

$S(t)=\int_0^t|f(x)-g(x)|\,dx$

$=\int_0^t(f(x)-g(x))\,dx$

ㄱ. $S'(t)=f(t)-g(t)=t^2-2t+a$

$f(1)=g(1)+1$에서 $f(1)-g(1)=1$이므로

$S'(1)=f(1)-g(1)=1-2+a$

$1=a-1$

$a=2$ (거짓)

ㄴ. $S(3)=\int_0^3(f(x)-g(x))\,dx$

$=\int_0^3(x^2-2x+2)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+2x\right]_0^3$

$=6$ (참)

ㄷ. $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$

이므로 곡선 $y=h(x)$는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다. …… ㉠

$S(4)$의 값은 곡선 $y=h(x)$와 두 직선 $x=0$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이이므로 ㉠에 의해 곡선 $y=h(x)$와 두 직선 $x=-2$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이, 즉 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선

$x=-2$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

**정답 ⑤**

**14. 출제의도** : 삼각함수의 그래프를 이용하여 삼각함수를 포함한 방정식의 해를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$$\left(\cos(b\pi x)-\frac{1}{2}\right)\left(a\cos(b\pi x)+\frac{a+2}{2}\right)=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

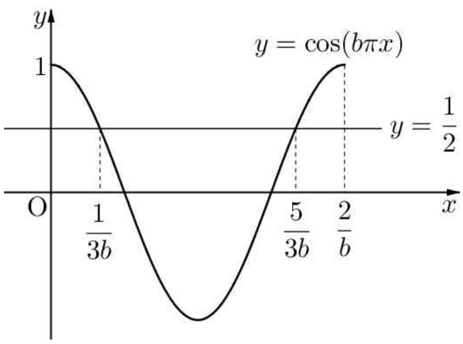
방정식 ㉠에서

$\cos(b\pi x)=\frac{1}{2}$ 또는

$\cos(b\pi x)=-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{a}\right)$

함수 $y=\cos(b\pi x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{b\pi}=\frac{2}{b}$

이고, $0\le x\le\frac{2}{b}$에서 함수 $y=\cos(b\pi x)$의 그래프는 그림과 같다.




$b$가 자연수이므로 $0\le x\le 2$에서 함수 $y=\cos(b\pi x)$의 주기가 $b$번 반복됨을 알 수 있고, $a>0$이므로 $a$의 값의 범위에 따라 조건을 만족시키는 자연수 $b$의 값을 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) $a>2$일 때,

$\frac{1}{2}<\frac{1}{2}+\frac{1}{a}<1$이므로 $0\le x\le\frac{2}{b}$에서 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

그러므로 $0\le x\le 2$에서 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수는 $4b$이다.

그런데, $4b=15$를 만족하는 자연수 $b$의 값은 존재하지 않는다.

(ⅱ) $a=2$일 때,

$\frac{1}{2}+\frac{1}{a}=1$이므로 $0\le x\le\frac{2}{b}$에서 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

그러므로 $0\le x\le 2$에서 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수는 $3b$이다.

즉, $3b=15$에서 $b=5$

(ⅲ) $0<a<2$일 때

$\frac{1}{2}+\frac{1}{a}>1$이므로 $0\le x\le\frac{2}{b}$에서 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

그러므로 $0\le x\le 2$에서 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수는 $2b$이다.

그런데, $2b=15$를 만족하는 자연수 $b$의 값은 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $a=2$, $b=5$

따라서 $a+b=2+5=7$

**정답 ③**

**15. 출제의도** : 정적분 사이의 관계를 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 찾고 함숫값을 구할 수 있는가?

**정답풀이 :**

함수 $f(x)$가 $\int_a^b |f(x)|dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$가 성립하려면 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 함수 $f(x)$는 $f(x) \geq 0$이거나 $f(x) \leq 0$이어야 한다.

삼차함수 $f(x)$의 상수항이 0이므로

$f(0)=0$ …… ㉠

조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 열린 구간 $(p,\ p+3)$에서 부호가 바뀌어야 한다. 즉 $f(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 부호가 반대인 실수 $a$가 열린구간 $(p,\ p+3)$에 존재하여야 한다.

$p<a<p+3$, $a-3<p<a$

이때 조건 (가)를 만족시키는 실수 $p$의 범위가 $0<p<3$이므로 두 범위 $a-3<p<a$, $0<p<3$은 일치한다.

$a-3=0$에서 $a=3$

즉 $f(3)=0$ …… ㉡

한편 $x=0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 접하지 않는다고 하자. 즉 0이 닫힌 구간 $[p,\ p+3]$에 포함된다고 하면 $p<0<p+3$에서 $-3 \leq p \leq 0$이어야 하므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=0$인 점에서 $x$축과 접해야 한다.

$f'(0)=0$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

함수 $f(x)$를 $f(x)=ax^2(x-3)$(단, $a$는 상수)라 놓을 수 있다.

또한 조건 (나)에서 함수 $f(x)+q$는 닫힌 구간 $[0,\ 3]$에서 부호가 바뀌어야 한다.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2ax(x-3)+ax^2 \\ &= ax\{2(x-3)+x\} \\ &= 3ax(x-2) \end{aligned}$$

이므로 $a$의 부호에 따라 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

( i ) $a>0$일 때,

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | (0) | $-$ | 0 | $+$ | (0) |
| $f(x)$ | | ↘ | 극소 | ↗ | |

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 $f(x) \leq 0$이다.

( ii ) $a<0$일 때,

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | (0) | $+$ | 0 | $-$ | (0) |
| $f(x)$ | | ↗ | 극대 | ↘ | |

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[0,\ 3]$에서 $f(x) \geq 0$이고 $0<q<1$이므로 $f(x)+q$는 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 $f(x)+q>0$이 되어 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

( i ), ( ii )에 의하여 $a>0$

닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $f(x)=ax^2(x-3)$는 $x=2$에서 극소이자 최솟값을 갖고

$f(2)=a\times 2^2\times(2-3)=-4a$이므로

$-4a \leq f(x) \leq 0$, $-4a+q \leq f(x)+q \leq q$

함수 $f(x)+q$는 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 부호가 바뀌므로

$-4a+q<0$, $q>0$

즉 $0<q<4a$에서 $4a=1$, $a=\dfrac{1}{4}$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2(x-3)$이므로

$f(6)=\dfrac{1}{4}\times 6^2\times 3=27$

**정답 ④**

**16. 출제의도** : 지수방정식의 해를 구할 수 있는가?

**정답풀이 :**

$3^{x-6}=3^{-2x}$

$x-6=-2x$

$3x=6$

$x=2$

**정답** 2

17. **출제의도** : 다항함수를 적분할 수 있는가?

**정답풀이 :** $f'(x)=6x^2+5$이므로

$f(x)=\int(6x^2+5)dx=2x^3+5x+C$

$f(0)=3$이므로 $C=3$

따라서 $f(x)=2x^3+5x+3$이므로

$f(1)=2\times1^3+5\times1+3=10$

**정답** 10

18. **출제의도** : 주어진 조건을 이용하여 등차수열의 일반항을 구할 수 있는가?

**정답풀이 :**

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d$라 하면

$a_5=a_2-6$에서 $a_5-a_2=-6$

즉, $3d=-6$에서 $d=-2$

따라서

$a_1=a_6-5d$

$=5-5\times(-2)$

$=5+10=15$

**정답** 15

19. **출제의도** : 접선의 방정식을 이용하여 접선의 $y$절편을 구할 수 있는가?

**정답풀이 :**

$f(x)=x^3-5x^2+3x+6$이라 하면

$f'(x)=3x^2-10x+3$

$f'(1)=3-10+3=-4$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 5)$에서의 접선의 기울기가 $-4$이므로 접선의 방정식은

$y-5=-4(x-1)$

$y=-4x+9$

따라서 이 접선의 $y$절편은

9

**정답** 9

20. **출제의도** : 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 빈칸에 들어갈 알맞은 수를 추론할 수 있는가?

**정답풀이 :**

제1사분면에 있는 점 $\mathrm{P}(\alpha, \beta)$는 두 곡선

$y=f(x)$, $y=g(x)$

위의 점이므로, 두 양수 $\alpha$, $\beta$가

$\beta=b^{\alpha}$, $\beta=-\log_b\alpha$

를 만족시킨다.

$\alpha\beta^3=1$이고 $\alpha=\log_b\beta$, $\beta=-\log_b\alpha$이므로

$3\alpha-\beta=3\log_b\beta+\log_b\alpha=\log_b(\alpha\beta^3)=0$

이다.

이때 $3\alpha-\beta=0$에서 $\beta=3\alpha$이다.

그러므로 $m=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{3\alpha}{\alpha}=\boxed{3}$이다.

$\beta^4=m\alpha\beta^3=m$이므로

$\beta^4=3$에서 $\beta=\boxed{3^{\frac{1}{4}}}$이다.

$b=\alpha^{-\frac{1}{\beta}}$이고 $\alpha=\frac{\beta}{m}$이므로

$$g(m) = -\log_b m = \frac{\beta}{\log_m \alpha} = \frac{\beta}{-1+\log_m \beta}$$

$$= \frac{3^{\frac{1}{4}}}{-1+\log_3 3^{\frac{1}{4}}} = \frac{3^{\frac{1}{4}}}{-1+\frac{1}{4}} = \boxed{-4\times 3^{-\frac{3}{4}}}$$

이다.

$p=3$, $q=3^{\frac{1}{4}}$, $r=-4\times 3^{-\frac{3}{4}}$이므로

$$(p\times q\times r)^2 = \left\{3\times 3^{\frac{1}{4}}\times\left(-4\times 3^{-\frac{3}{4}}\right)\right\}^2$$

$$= \left(-4\times 3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 48$$

**정답** 48

21. **출제의도** : 새롭게 정의된 함수의 연속성을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 함수 $f(x)$를

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

로 놓을 수 있다.

이때 문제에서 주어진 등식의 우변을 $h(t)$라 하면

$h(t) = f'(t) - 4t^2 + 4$

$= (3t^2 + 2at + b) - 4t^2 + 4$

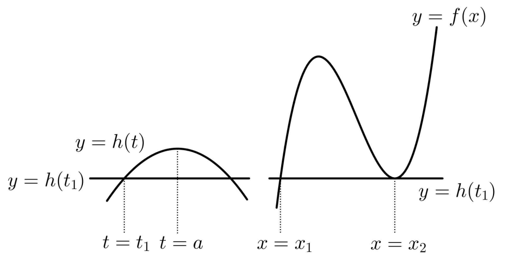
$= -t^2 + 2at + b + 4$

이고, 함수 $y = h(t)$의 그래프는 직선 $t=a$에 대하여 대칭인 위로 볼록한 포물선 모양이다.

삼차함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하면 방정식 $f(\alpha) = h(t)$를 만족시키는 실수 $\alpha$의 최댓값 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. 즉, 삼차함수 $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 갖는다.

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1로 양수이므로 함수 $g(t)$가 $t=t_1$에서 불연속인 경우는 $h(t_1)$이 함수 $f(x)$의 극솟값인 경우이다.

$f(x_1) = f(x_2) = h(t_1)$ $(x_1 < x_2)$라 할 때,

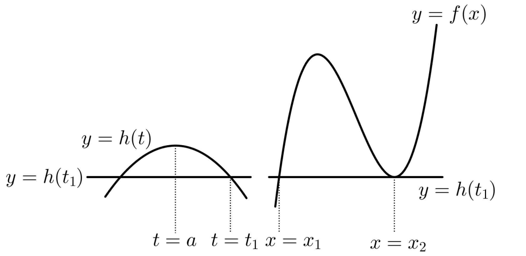



[그림 1]

[그림 1]과 같이 $t_1 < a$이면

$\lim_{t\to t_1-} g(t) = x_1$, $\lim_{t\to t_1+} g(t) = x_2$, $g(t_1) = x_2$

이므로 함수 $g(t)$는 $t=t_1$에서 불연속이다.



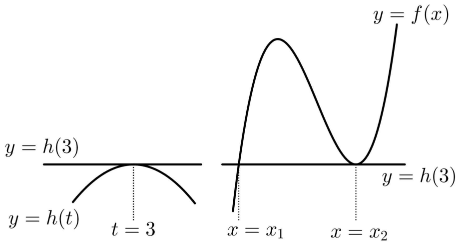

[그림 2]

[그림 2]와 같이 $t_1 > a$이면

$\lim_{t\to t_1+} g(t) = x_1$, $\lim_{t\to t_1-} g(t) = x_2$, $g(t_1) = x_2$

이므로 함수 $g(t)$는 $t=t_1$에서 불연속이다.

이때 함수 $h(t)$는 직선 $t=a$에 대하여 대칭이므로 만약 $a\neq 3$이면 함수 $g(t)$는 $t=3$과 $t=2a-3$에서 불연속이다.




[그림 3]

문제에서 함수 $g(t)$는 $t=3$에서만 불연속이므로 [그림 3]과 같이 $a=3$이어야 하고, $h(3)$이 함수 $f(x)$의 극솟값과 같아야 한다.

이때 $f(x_1)=f(x_2)=h(3)$ $(x_1<x_2)$라 하면

$\lim_{t\to 3-} g(t)=x_1$, $\lim_{t\to 3+} g(t)=x_1$, $g(3)=x_2$

로 실제로 함수 $g(t)$는 $t=3$에서만 불연속이다.

$g(3)=1$이므로 $x_2=1$

$f(x)$가 $x=1$에서 극솟값을 가지므로

$f'(1)=3+2a+b=9+b=0$, $b=-9$

$f(1)=h(3)$이므로

$f(1)=1+a+b+c=1+3-9+c=c-5$

$h(3)=-9+6a+b+4=-9+18-9+4=4$

에서 $c-5=4$, $c=9$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2-9x+9$이므로

$f(2)=8+12-18+9=11$

**정답** 11

**22. 출제의도** : 수열의 귀납적 정의를 만족시키는 항의 값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

| | $a_{4n+1}$ | $a_{4n+2}$ | $a_{4n+3}$ | $a_{4n+4}$ |
|---|---|---|---|---|
| $n=0$ | 1 | 2 | 4 | 3 |
| $n=1$ | 5 | 5 | 5 | 4 |
| $n=2$ | 6 | 6 | 6 | 6 |
| $n=3$ | 8 | 6 | 8 | 5 |
| $n=4$ | 7 | 7 | 7 | 7 |
| $n=5$ | 9 | 7 | 9 | 7 |
| $n=6$ | 9 | 9 | 9 | 7 |

$a_{32}=a_{16}+1=6$, $a_{64}=a_{32}+1=7$,

$a_{128}=a_{64}+1=8$, $\cdots$

$n\ge 17$이고 $n\ne 32$일 때 $a_n>6$이다.

( i ) $k$가 홀수일 때

$k$는 $4n+1$ 또는 $4n+3$의 꼴이다.

$a_n=6$인 $n$의 값은

9, 10, 11, 12, 14, 32의 6개이고 이때 각각의 $n$마다 $a_{4n+1}=a_{4n+3}=10$이다.

따라서 ( i )에서 구하는 $k$의 개수는 $6\times 2=12$

( ii ) $k$가 짝수일 때

ⓐ $k=4m$이면

$a_k=a_{4m}=a_{2m}+1=a_m+1+1=a_m+2$

$a_m+2=10$에서 $a_m=8$

$a_m=8$인 $m$의 개수를 구해보자.

ⓐ-① $m$이 홀수일 때

$m=4n+1$ 또는 $m=4n+3$의 꼴이다.

$a_n=4$인 $n$의 값은 3, 8의 2개이고 이때 각각의 $n$마다

$a_{4n+1}=a_{4n+3}=8$이다.

즉 $a_m=8$인 홀수 $m$의 개수는

$2\times 2=4$

ⓐ-② $m$이 짝수일 때

$m=4n$이면

$a_m=a_{4n}=a_{2n}+1=a_n+2=8$

에서 $a_n=6$

$a_n=6$인 $n$의 개수는 6

$m=8n+2$ 또는 $m=8n+6$이면

$a_{8n+2}=a_{4n+1}+1$

$=a_n+4+1=a_n+5$,

$a_{8n+6}=a_{4n+3}+1$

$=a_n+4+1=a_n+5$

이다.

$a_n+5=8$에서 $a_n=3$이고,

$a_n=3$인 $n$의 개수는 1

즉 $a_m=8$인 짝수 $m$의 개수는

$6+2\times1=8$

ⓐ에서 구하는 $k$의 개수는

$4+8=12$

ⓑ $k=8n+2$ 또는 $k=8n+6$이면

$a_{8n+2}=a_{4n+1}+1$

$=a_n+4+1=a_n+5$,

$a_{8n+6}=a_{4n+3}+1$

$=a_n+4+1=a_n+5$

이다.

$a_n+5=10$에서 $a_n=5$이고,

$a_n=5$인 $n$의 값은 5, 6, 7, 16의 4개다.

ⓑ에서 구하는 $k$의 개수는

$2\times4=8$

따라서 (ⅱ)에서 구하는 $k$의 개수는 $12+8=20$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 $k$의 개수는

$12+20=32$

**정답** 32

| ■ **[선택: 기하]** |
|---|
| 23. ⑤ 24. ③ 25. ③ 26. ① 27. ② |
| 28. ④ 29. 14 30. 29 |

23. **출제의도** : 벡터의 덧셈을 이용하여 성분의 합을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$\vec{a}+2\vec{b}$

$=(3,\ 0)+2(-1,\ 2)$

$=(3,\ 0)+(-2,\ 4)$

$=(1,\ 4)$

따라서 $\vec{a}+2\vec{b}$의모든 성분의 합은 5이다.

**정답** ⑤

24. **출제의도** : 포물선의 방정식에서 초점의 좌표를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$y^2=-12x=4\times(-3)\times x$이므로 이 포물선의 초점의 좌표는 $(-3,\ 0)$이다.

따라서 $p=-3$

**정답** ③

25. **출제의도** : 직선의 방향벡터를 이용하여 두 직선이 이루는 각의 크기를 구할 수 있는가?

**정답풀이 :**

직선 $l_1$의 방향벡터를 $\overrightarrow{u_1}$이라 하면

$\overrightarrow{u_1}=(1,\ 5)$

직선 $l_2$ : $\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y+1}{2}$의 방향벡터를

$\overrightarrow{u_2}$라 하면

$\overrightarrow{u_2}=(3,\ 2)$

따라서

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|}$$
$$=\frac{|(1,\ 5)\cdot(3,\ 2)|}{\sqrt{1^2+5^2}\times\sqrt{3^2+2^2}}$$
$$=\frac{13}{\sqrt{26}\times\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

**정답** ③

**26. 출제의도** : 타원의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

**정답풀이 :**

점 $(a, 2)$가 타원 위의 점이므로 타원의 방정식에 대입하면

$$\frac{a^2}{18}+\frac{2^2}{8}=1$$

에서 $a^2=9$, $a=3$ ($\because$ $a>0$)

점 $(3, 2)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{3x}{18}+\frac{2y}{8}=1$$

$y=0$을 대입하면

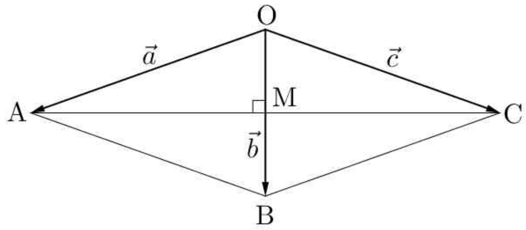
$\dfrac{3x}{18}=1$에서 $x=6$

따라서 타원 위의 점 $(3, 2)$에서의 접선의 $x$절편은 $6$이다.

**정답** ①

**27. 출제의도** : 도형의 성질과 두 벡터가 수직이기 위한 조건을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

**정답풀이 :**




마름모 OABC에서 두 대각선이 서로를 수직이등분하므로 두 선분 OB, AC가 만나는 점을 M이라 하면

$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=\dfrac{1}{2}|\vec{b}|=\dfrac{1}{2}\times4=2$

$|\vec{c}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=6$이고, 두 벡터 $\vec{b}$, $\vec{c}$가 이루는 각의 크기를 $\theta$라 하면 직각삼각형 OMC에서

$$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{OM}}}{\overline{\mathrm{OC}}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

그러므로

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta$$
$$=4\times6\times\frac{1}{3}=8$$

두 벡터 $\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{b}+t\vec{c}$가 서로 수직이므로

$(\vec{b}-\vec{c})\cdot(\vec{b}+t\vec{c})=0$

$|\vec{b}|^2+(t-1)\vec{b}\cdot\vec{c}-t|\vec{c}|^2=0$

$4^2+(t-1)\times8-t\times6^2=0$

$8-28t=0$, $28t=8$

따라서 $t=\dfrac{2}{7}$

**정답** ②

[다른 풀이]

마름모 OABC에서 두 대각선이 서로를 수직이등분하므로

$\vec{b}=\vec{a}+\vec{c}$

그러므로

$|\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{c})$

$|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2$

$4^2=6^2+2\vec{a}\cdot\vec{c}+6^2$

$2\vec{a}\cdot\vec{c}=-56$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=-28$

두 벡터 $\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{b}+t\vec{c}$가 서로 수직이므로

$(\vec{b}-\vec{c})\cdot(\vec{b}+t\vec{c})=0$

즉, $\vec{a}\cdot\{\vec{a}+(t+1)\vec{c}\}=0$에서

$|\vec{a}|^2+(t+1)\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

$6^2+(t+1)\times(-28)=0$, $t+1=\dfrac{9}{7}$

따라서 $t=\dfrac{2}{7}$

**28. 출제의도** : 타원의 성질을 이용하여 타원의 방정식을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$\overline{\mathrm{PF}}=k$라 하면 $\overline{\mathrm{QF}}=2k$, $\overline{\mathrm{FF'}}=\dfrac{16}{\sqrt{6}}k$

타원의 정의로부터 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2a$,

$\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{QF'}}=2a$이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}=2a-k$, $\overline{\mathrm{QF'}}=2a-2k$

$\angle\mathrm{PFF'}=\theta$라 하면

삼각형 $\mathrm{PF'F}$에서

$$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{FF'}}^2-\overline{\mathrm{PF'}}^2}{2\times\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{FF'}}}$$

$$=\frac{k^2+\left(\frac{16}{\sqrt{6}}k\right)^2-(2a-k)^2}{2\times k\times\frac{16}{\sqrt{6}}k}$$

$\angle\mathrm{QFF'}=\pi-\theta$이므로

$$\cos(\pi-\theta)=\frac{\overline{\mathrm{QF}}^2+\overline{\mathrm{FF'}}^2-\overline{\mathrm{QF'}}^2}{2\times\overline{\mathrm{QF}}\times\overline{\mathrm{FF'}}}$$

$$=\frac{(2k)^2+\left(\frac{16}{\sqrt{6}}k\right)^2-(2a-2k)^2}{2\times2k\times\frac{16}{\sqrt{6}}k}$$

이때 $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$이므로

$$\frac{k^2+\left(\frac{16}{\sqrt{6}}k\right)^2-(2a-k)^2}{2\times k\times\frac{16}{\sqrt{6}}k}$$

$$=\frac{(2a-2k)^2-(2k)^2-\left(\frac{16}{\sqrt{6}}k\right)^2}{2\times2k\times\frac{16}{\sqrt{6}}k}$$

에서

$2k^2+2\times\left(\frac{16}{\sqrt{6}}k\right)^2-2(2a-k)^2$

$=(2a-2k)^2-(2k)^2-\left(\frac{16}{\sqrt{6}}k\right)^2$

$3a^2-4ak-32k^2=0$

$(a-4k)(3a+8k)=0$

$a=4k$ ($\because$ $a>0$, $k>0$)

이때

$$\cos\theta=\frac{k^2+\left(\frac{16}{\sqrt{6}}k\right)^2-(7k)^2}{2\times k\times\frac{16}{\sqrt{6}}k}$$

$$=-\frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{30}}{6}$$

삼각형 $\mathrm{FF'Q}$의 넓이가 $4\sqrt{5}$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{FF'}}\times\overline{\mathrm{QF}}\times\sin(\angle\mathrm{F'FQ})$

$=\frac{1}{2}\times\frac{16}{\sqrt{6}}k\times2k\times\frac{\sqrt{30}}{6}$

$=4\sqrt{5}$

$k^2=\frac{3}{2}$ 이므로 $k=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$2a=\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=7k+k=8k=4\sqrt{6}$ 에서

$a=2\sqrt{6}$

$c=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{FF'}}=\frac{8k}{\sqrt{6}}=4$

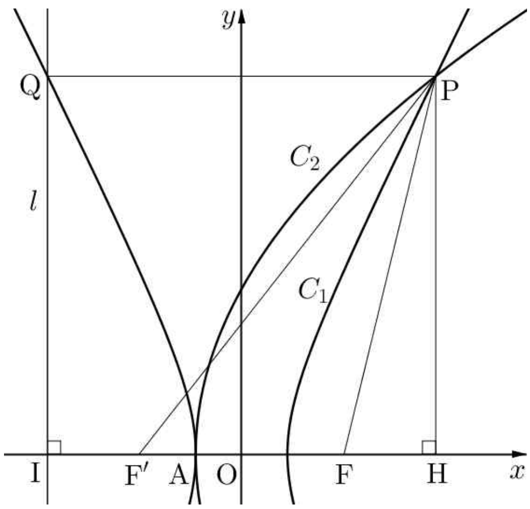
$b^2=a^2-c^2=(2\sqrt{6})^2-4^2=24-16=8$

**정답** ④

29. **출제의도** : 주어진 조건과 포물선 및 쌍곡선의 정의를 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

쌍곡선 $C_1$과 포물선 $C_2$가 만나는 점 중 제1사분면 위의 점을 P, 쌍곡선 $C_1$과 직선 $l$이 만나는 점 중 제2사분면 위의 점을 Q라 하고, 두 점 P, Q에서 $x$축에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하자.




포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{FA}}=\overline{\mathrm{AI}}$이므로 점 I의 좌표는 $(-2a-3,\ 0)$

두 점 P, Q가 쌍곡선 $C_1$ 위의 점이고 두 점의 $y$좌표가 같으므로 두 점 P, Q는 $y$축에 대하여 대칭이다.

그러므로 점 H의 좌표는 $(2a+3,\ 0)$

포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PQ}}=4a+6$

쌍곡선 $C_1$의 주축의 길이가 $2a$이므로

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2a$

그러므로

$\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PF}}+2a$

$=(4a+6)+2a=6a+6$

직각삼각형 PF′H에서

$\overline{\mathrm{F'H}}=(2a+3)-(-3)=2a+6$

이므로

$\overline{\mathrm{PH}}^2=(6a+6)^2-(2a+6)^2$

$=32a^2+48a$ …… ㉠

또, $\overline{\mathrm{FH}}=(2a+3)-3=2a$이므로

직각삼각형 PFH에서

$\overline{\mathrm{PH}}^2=(4a+6)^2-(2a)^2$

$=12a^2+48a+36$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$32a^2+48a=12a^2+48a+36$

$20a^2=36,\ a^2=\frac{9}{5}$

따라서 $p=5,\ q=9$이므로

$p+q=5+9=14$

**정답** 14

30. **출제의도** : 벡터의 내적의 성질을 이용하여 벡터의 내적의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

원과 선분 BC가 만나는 점을 E라 하고, 원의 중심을 O라 하자.

$\angle AEB = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BC}| \times |\overrightarrow{BE}|$

점 D에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = |\overrightarrow{CB}| \times |\overrightarrow{CH}|$

또는 $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = -|\overrightarrow{CB}| \times |\overrightarrow{CH}|$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}$ 이므로

$|\overrightarrow{BE}| = |\overrightarrow{CH}|$

따라서 점 H는 점 E이다.

$2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 2|\overrightarrow{AE}| \times |\overrightarrow{AD}|$

$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = |\overrightarrow{DA}| \times |\overrightarrow{DE}|$

$2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB}$ 이므로

$2|\overrightarrow{AE}| = |\overrightarrow{DE}|$

$|\overrightarrow{AE}| = k$라 하면 $|\overrightarrow{DE}| = 2k$

삼각형 ABE와 삼각형 ADO는 닮음이므로

$\overline{AB} : \overline{AE} = \overline{AD} : \overline{AO}$

$2 : k = 3k : 1$

$3k^2 = 2$에서 $k = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\overline{BE} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{30}}{3}$

$\overline{BC} = \frac{2\sqrt{30}}{3}$

점 O를 지나고 직선 BC에 평행한 직선이 원과 만나는 점을 각각 P, Q라 하고 (단, $\overline{CP} > \overline{CQ}$), 직선 AD와 만나는 점을 R라 하면

$\overline{OR} = \frac{\sqrt{30}}{6}$

$\overrightarrow{DX} \cdot \overrightarrow{BC}$의 최댓값은 점 X가 점 Q일 때이고 $M = \overline{BC} \times \overline{QR}$

$\overrightarrow{DX} \cdot \overrightarrow{BC}$의 최솟값은 점 X가 점 P일 때이고 $m = -\overline{BC} \times \overline{PR}$

따라서

$|M \times m| = (\overline{BC})^2 \times \overline{QR} \times \overline{PR}$

$= \left(\frac{2\sqrt{30}}{3}\right)^2 \times \left(1 - \frac{\sqrt{30}}{6}\right) \times \left(1 + \frac{\sqrt{30}}{6}\right)$

$= \frac{4 \times 30}{9} \times \left(1 - \frac{30}{36}\right)$

$= \frac{4 \times 30}{9} \times \frac{1}{6}$

$= \frac{20}{9}$

**정답** 29