내신대비 모의고사

범위 : 미분-적분

시험시간 : 50분

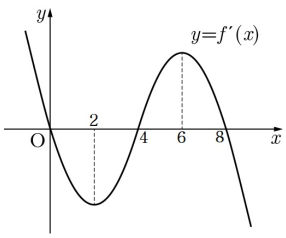
이름 :

[객관식]

1. 함수 $f(x)=ax^3-10x^2+\frac{4a}{3}x+5$이 $x_1<x_2$인 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 항상 $f(x_1)>f(x_2)$가 성립하도록 하는 실수 a의 최댓값은?

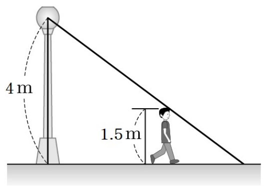
① -8 ② -6 ③ -5
④ 5 ⑤ 6

2. 함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 중 옳은 것은?



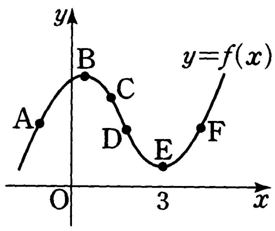
① $f(x)$는 $x=2$에서 극소이다.
② $f(x)$는 $x=4$에서 극대이다.
③ $f(x)$는 $x=2$에서 증가상태에 있다.
④ $f(x)$는 구간 $(2, 4)$에서 감소한다.
⑤ $f(x)$는 구간 $(2, 6)$에서 증가한다.

3. 키가 1.5m인 철수가 지면으로 부터의 높이가 4m인 가로등 바로 밑에서 출발하여 일직선으로 초속 1.4m의 속도로 걸어가고 있을 때, 철수의 그림자의 끝이 움직이는 속도는?



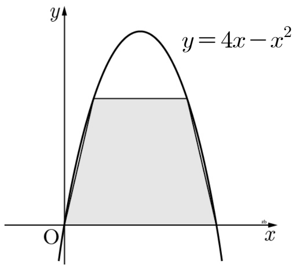
① $1\text{m}/$초 ② $2.24\text{m}/$초
③ $3\text{m}/$초 ④ $4.24\text{m}/$초
⑤ $5\text{m}/$초

4. 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 점 A~F에 대하여 부등식 $f'(x)f(x)>0$을 만족하는 점의 개수는? (단, 점 B, E는 각각 극대, 극소가 되는 점이다.)



① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

5. 다음 그림과 같이 곡선 $y=4x-x^2$과 x축으로 둘러싸인 부분에 내접하는 사다리꼴의 넓이의 최댓값은?

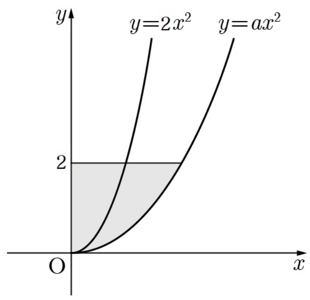


① $\frac{512}{9}$ ② $\frac{1024}{9}$ ③ $\frac{256}{27}$
④ $\frac{512}{27}$ ⑤ $\frac{1024}{27}$

6. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $3x^4-x^3 \ge k$가 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값은?

① $-\frac{1}{256}$ ② $-\frac{3}{256}$ ③ $-\frac{5}{256}$
④ $-\frac{1}{64}$ ⑤ $-\frac{3}{64}$

7. 다음 그림과 같이 곡선 $y=ax^2\,(x \ge 0)$과 y축 및 직선 $y=2$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 곡선 $y=2x^2\,(x \ge 0)$이 이등분할 때, 양수 a의 값은?



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ 1

8. $\int_{-3}^{1}(5x^4+7x^3-3x^2+6x-1)dx$

$+\int_{1}^{3}(5x^4+7x^3-3x^2+6x-1)dx$의 값은?

① 245 ② 407 ③ 426
④ 640 ⑤ 845

9. 함수 $f(x)=\int_{-1}^{x}(4|t|-4)dt$에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.
ㄷ. 함수 $g(x)=f(x)+2$이라 하면 $\int_{-2}^{2}g(x)dx=0$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10. 연속함수 $f(x)$는 임의의 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-x)=f(x)$ (나) $f(x+4)=f(x)$

$\int_{0}^{2}f(x)dx=4$일 때, $\int_{-4}^{8}f(x)dx$의 값은?

① 10 ② 16 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

11. 곡선 $y=|x(x-2)|$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $6S$ 값은?

① 5 ② 13 ③ 14
④ 16 ⑤ 20

12. 함수 $f(x)=x^3-3x+1$에 대하여 $\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}\int_{3}^{x}f(t)dt$의 값은?

① 4 ② 7 ③ 12
④ 15 ⑤ 19

13. 좌표가 2인 점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)=20-2t$일 때, 점 P가 움직이는 방향이 바뀌는 시각에서의 점 P의 위치는?

① 101 ② 102 ③ 103
④ 104 ⑤ 105

14. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치가 각각 $x_P(t)=t^2-4t$, $x_Q(t)=t^2-6t$일 때, 두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이는 t의 값의 범위는 $a<t<b$일 때, $a+b$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 9

[주관식]

15. 다음 조건을 만족하는 삼차함수 $y=f(x)$를 구하시오.

(가) $f(0)=5$
(나) $f'(0)=f'(2)=-3$
(다) 극댓값과 극솟값이 존재하며 극댓점과 극솟점을 지나는 직선의 기울기의 절댓값은 2이다.

16. $x\ge 1$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^3-4ax^2+4a^2x-4\ge 0$이 성립하도록 하는 실수 a의 범위를 구하시오.

17. 함수 $f(x)=6x^2+\int_0^1(x-t)f(t)dt$를 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하시오

18. 함수 $f(x)$가 $f(1)=5$이고 $f(x)=k\int_0^3|x-t|dt$(k는 상수)일 때, $\int_0^4 kf(x)dx$의 값을 구하시오.

정답 및 풀이

1. 정답 ③

$f'(x)=3ax^2-20x+\frac{4a}{3}$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 하므로

$a<0$ …… ㉠

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=100-3a\times\frac{4a}{3}=100-4a^2\le 0$

$\therefore\ a\le -5$ 또는 $a\ge 5$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a\le -5$

따라서 a의 최댓값은 -5

2. 정답 ④

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 $0,\ 2,\ 4$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$ 또는 $x=8$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$	8	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

① $f'(2)\ne 0$이므로 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖지 않는다.

② $f(x)$는 $x=4$에서 극소이다.

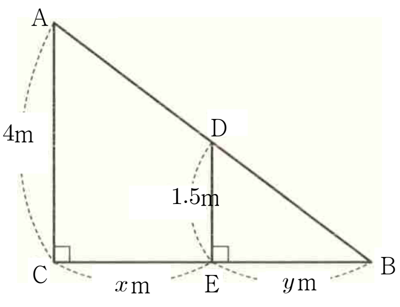
③ $f(x)$는 $x=2$에서 감소상태에 있다.

④ 구간 $(2,\ 4)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

⑤ 구간 $(2,\ 4)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

이상에서 옳은 것은 ④이다.

3. 정답 ②



t초 동안 사람이 움직인 거리를 xm, 사람의 그림자의 길이를 ym라 하면 그림에서 $\triangle ABC \backsim \triangle DBE$

$4:1.5=(x+y):y$, $3x+3y=8y$, $3x=5y$

그런데 $x=1.4t$이므로 $y=0.84t$

$\therefore\ \frac{dx}{dt}=1.4,\ \frac{dy}{dt}=0.84$

따라서 그림자의 끝이 움직이는 속도는

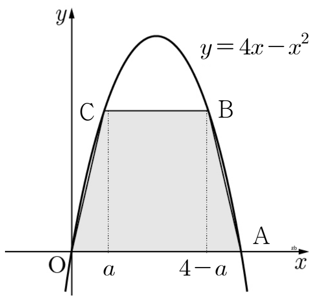
$\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=1.4+0.84=2.24$ m/초

4. 정답 ①

	A	B	C	D	E	F
$f(x)$	+	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+

따라서, $f'(x)f(x)>0$을 만족하는 점은 A, F 2개다.

5. 정답 ③



$4x-x^2=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

$\therefore\ A(4,\ 0)$

그림과 같이 점 C의 좌표를 $(a,\ 4a-a^2)\ (0<a<2)$라 하면

$B(4-a,\ 4a-a^2)$

사다리꼴 OABC의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\frac{1}{2}\{4+(4-2a)\}(4a-a^2)=a^3-8a^2+16a$

$\therefore\ S'(a)=3a^2-16a+16=(3a-4)(a-4)$

$S'(a)=0$에서 $a=\frac{4}{3}$ $(\because\ 0<a<2)$

a	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		↗		↘	

따라서 $S(a)$는 $a=\frac{4}{3}$일 때 최댓값 $S\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{256}{27}$

6. 정답 ①

$3x^4-x^3-k\ge 0$

$f(x)=3x^4-x^3-k$라 하면 $f'(x)=12x^3-3x^2=3x^2(4x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{1}{4}$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	↘	$-k$	↘	$-k-\frac{1}{256}$	↗

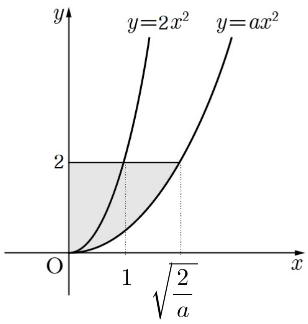
따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 이므로 모든 실수 x에 대하여

$f(x) \geq 0$이 성립하려면 $-k-\frac{1}{256} \geq 0$

$\therefore\ k \leq -\frac{1}{256}$

즉 실수 k의 최댓값은 $-\frac{1}{256}$이다.

7. 정답 ②



$y=ax^2(x \geq 0)$에서 $y=2$일 때 $x=\sqrt{\frac{2}{a}}$ 이므로

곡선 $y=ax^2(x \geq 0)$과 y축 및 직선 $y=2$으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^{\sqrt{\frac{2}{a}}}(2-ax^2)\,dx=\left[2x-\frac{a}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{\frac{2}{a}}}=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{a}}$$

$y=2x^2(x \geq 0)$에서 $y=2$일 때 $x=1$이므로

곡선 $y=2x^2(x \geq 0)$과 y축 및 직선 $y=2$으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^1(2-2x^2)\,dx=\left[2x-\frac{2}{3}x^3\right]_0^1=\frac{4}{3}$$

따라서 $\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{a}}=\frac{4}{3}$ 이므로

$\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{a}$

$\therefore\ a=\frac{1}{2}$

8. 정답 ③

$$\int_{-3}^{3}(5x^4+7x^3-3x^2+6x-1)dx$$

$$=2\int_0^3(5x^4-3x^2-1)\,dx+0$$

$$=2\left[x^5-x^3-x\right]_0^3=426$$

9. 정답 ⑤

$f(-1)=0$

$f'(x)=4|x|-4$

(i) $x<0$ 일 때

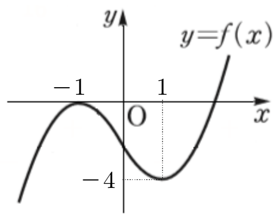
$$f(x)=\int_{-1}^{x}(-4t-4)dt$$

$$=\left[-2t^2-4t\right]_{-1}^{x}=-2(x+1)^2$$

(ii) $x \geq 0$ 일 때

$$f(x)=\int_{-1}^{0}(-4t-4)dt+\int_0^x(4t-4)dt$$

$$=\left[-2t^2-4t\right]_{-1}^{0}+\left[2t^2-4t\right]_0^x=2(x-1)^2-4$$



ㄷ. $g(x)=f(x)+2=\begin{cases}-2x^2-4x & (x<0)\\ 2x^2-4x & (x \geq 0)\end{cases}$

$$\int_{-2}^{2}g(x)dx=\int_{-2}^{0}(-2x^2-4x)dx+\int_0^2(2x^2-4x)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3-2x^2\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{2}{3}x^3-2x^2\right]_0^2=0$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

10. 정답 ⑤

또, $f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 y축 대칭 함수이므로

$$\int_{-2}^{0}f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx=4 \qquad \therefore\ \int_{-2}^{2}f(x)dx=8$$

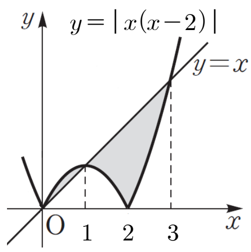
$f(x+4)=f(x)$이므로

$$\int_{-2}^{2}f(x)dx=\int_2^6 f(x)dx=8$$

$$\int_{-4}^{-2}f(x)dx=\int_6^8 f(x)dx=4$$

$$\therefore\ \int_{-4}^{8}f(x)dx=4\times2+8\times2=24$$

11. 정답 ②



$y=|x(x-2)|$

$=\begin{cases} x(x-2) & (x \le 0 \text{ 또는 } x \ge 2) \\ -x(x-2) & (0 \le x \le 2) \end{cases}$

이므로 곡선 $y=|x(x-2)|$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 다음과 같다.

(i) $x \le 0$ 또는 $x \ge 2$ 일 때,

$x(x-2)=x$에서 $x^2-3x=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=3$

(ii) $0 \le x \le 2$ 일 때,

$-x(x-2)=x$에서 $x^2-x=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이의 합 S는

$$S=\int_0^1\{-x(x-2)-x\}dx+\int_1^2\{x+x(x-2)\}dx+\int_2^3\{x-x(x-2)\}dx$$

$$=\int_0^1(-x^2+x)dx+\int_1^2(x^2-x)dx+\int_2^3(-x^2+3x)dx$$

$$=\frac{13}{6}$$

$\therefore\ 6S=13$

12. 정답 ⑤

$F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{x\to3}\frac{1}{x-3}\int_3^x f(t)dt=\lim_{x\to3}\frac{F(x)-F(3)}{x-3}$$
$$=F'(3)=f(3)=19$$

13. 정답 ②

$v(t)=0$일 때 점 P가 움직이는 방향이 바뀌므로

$20-2t=0 \qquad \therefore\ t=10$

따라서 $t=10$에서의 점 P의 위치는

$$2+\int_0^{10}(20-2t)dt=2+\left[20t-t^2\right]_0^{10}=102$$

14. 정답 ②

두 점 P, Q의 속도를 각각 v_{P}, v_{Q}라 하면

$v_{\mathrm{P}}=2t-4,\quad v_{\mathrm{Q}}=2t-6$

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 $v_{\mathrm{P}}v_{\mathrm{Q}}<0$이므로

$(2t-4)(2t-6)<0$

$4(t-2)(t-3)<0$

$2<t<3$

$\therefore\ a+b=5$

15. 정답 $f(x)=-2x^3+6x^2-3x+5$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라 하면

$f(0)=d=5$

$f'(0)=f'(2)=-3$ 이므로

$f'(x)=3ax(x-2)-3$

$\quad =3ax^2-6ax-3$

$f(x)=ax^3-3ax^2-3x+5$

$f'(x)=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 $\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-\frac{1}{a}$이다.

극댓값과 극솟값이 존재하므로 $f'(x)=0$는 서로 다른 두 실근을 가지므로

$\frac{D}{4}=9a^2+9a>0$

$\therefore\ a<-1$ 또는 $a>0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

극댓점과 극솟점을 지나는 직선의 기울기의 절댓값이 2이고, 극점이 $(\alpha,\ f(\alpha))$, $(\beta,\ f(\beta))$이기 때문에

$$\left|\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}\right|=2$$

$$\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}=\frac{a(\alpha^3-\beta^3)-3a(\alpha^2-\beta^2)-3(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}$$
$$=a(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-3a(\alpha+\beta)-3$$
$$=a\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\}-6a-3$$
$$=a\left(4+\frac{1}{a}\right)-6a-3$$
$$=-2a-2$$

(i) $\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}=-2$ 일 때

$-2a-2=-2$

$\therefore\ a=0$

(ii) $\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}=2$ 일 때

$-2a-2=2$

$\therefore\ a=-2$

(i), (ii)에서 $a=-2$ ($\because$ ㉠)

따라서 $f(x)=-2x^3+6x^2-3x+5$

16. 정답 $a \le -\frac{1}{2}$

$f(x)=x^3-4ax^2+4a^2x-4$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-8ax+4a^2=(x-2a)(3x-2a)$

$f'(x)=0$에서 $x=2a$ 또는 $x=\frac{2}{3}a$

$f(2a)=-4,\ f\left(\frac{2}{3}a\right)=\frac{32}{27}a^3-4,\ f(1)=(2a+1)(2a-3)$

(i) $a \ge 0$ 이면

x	$\cdots$	$\frac{2}{3}a$	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘	-4	↗

$\begin{cases}2a<1\\ f(1)\ge 0\end{cases}$ ⇨ $\begin{cases}a<\frac{1}{2}\\ a\le-\frac{1}{2} \text{ 또는 } a\ge\frac{3}{2}\end{cases}$ ⇨ $a\le-\frac{1}{2}$

$a\ge 0$이므로 해는 없다.

(ii) $a<0$ 이면

x	$\cdots$	$2a$	$\cdots$	$\frac{2}{3}a$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	-4	↘		↗

$f(1)\ge 0$ ⇨ $a\le-\frac{1}{2}$ 또는 $a\ge\frac{3}{2}$

$\therefore\ a\le-\frac{1}{2}$ ($\because\ a<0$)

17. 정답 $f(x)=6x^2+\frac{18}{13}x-\frac{17}{13}$

$f(x)=6x^2+x\int_0^1 f(t)dt-\int_0^1 tf(t)dt$

이때

$\int_0^1 f(t)dt=m,\ \int_0^1 tf(t)dt=n$ ($m,\ n$은 상수)…… ㉠

으로 놓으면

$f(x)=6x^2+mx-n$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$m=\int_0^1(6t^2+mt-n)dt,\ \ n=\int_0^1(6t^3+mt^2-nt)dt$

$m=2+\frac{m}{2}-n,\ \ n=\frac{3}{2}+\frac{m}{3}-\frac{n}{2}$

$m=4-2n,\ \ \frac{3}{2}n=\frac{3}{2}+\frac{1}{3}m$

$\therefore\ m=\frac{18}{13},\ n=\frac{17}{13}$

$\therefore\ f(x)=6x^2+\frac{18}{13}x-\frac{17}{13}$

18. 정답 60

(i) $0\le x\le 3$ 이면

$f(x)=k\int_0^x(x-t)dt+k\int_x^3(-x+t)dt$

$=k\left[xt-\frac{1}{2}t^2\right]_0^x+k\left[-xt+\frac{1}{2}t^2\right]_x^3$

$=k\left(x^2-3x+\frac{9}{2}\right)$

$f(1)=\frac{5}{2}k=5\quad \therefore\ k=2$

$f(x)=2x^2-6x+9$

(ii) $x\ge 3$ 이면

$f(x)=k\int_0^3(x-t)dt$

$=2\left[xt-\frac{1}{2}t^2\right]_0^3=6x-9$

$\therefore\ \int_0^4 kf(x)dx=\int_0^3 2(2x^2-6x+9)dx+\int_3^4 2(6x-9)dx$

$=2\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2+9x\right]_0^3+2\left[3x^2-9x\right]_3^4$

$=60$