6. 삼각함수의 그래프(step1)

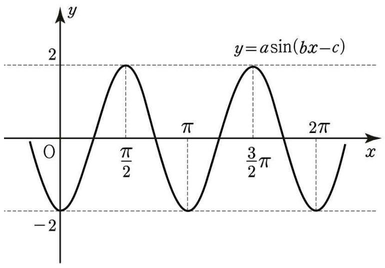
삼각함수의 최대최소와 주기

1. 함수 $y=3\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)-1$ 에 대한 설명으로 옳지 않은 것은? [4.8점]

① 주기는 $\frac{2}{3}\pi$ 이다.
② 최댓값은 2 이다.
③ 최솟값은 -4 이다.
④ 그래프는 점 $(0,\ -4)$ 를 지난다.
⑤ 그래프는 함수 $y=3\sin 3x$ 의 그래프를 x 축 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼,
y 축 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

삼각함수의 미정계수의 결정

2. 함수 $y=a\sin(bx-c)$ 의 그래프가 아래의 그림과 같을 때, 상수 $a,\ b,\ c$ 에 대하여 $a+b+c$ 의 값은? (단, $a>0,\ b>0,\ 0<c<\pi$) [3.8점]



① $1+\frac{\pi}{2}$　② $2+\frac{\pi}{2}$　③ $3+\frac{\pi}{3}$
④ $4+\frac{\pi}{2}$　⑤ $5+\frac{\pi}{4}$

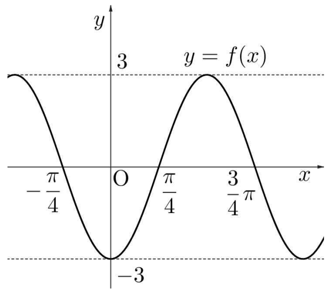
3. 함수 $f(x)=a\sin\left(bx+\frac{\pi}{2}\right)+c$ 의 최댓값이 1, 최솟값이 -3, 주기가 π일 때, 세 상수 $a,\ b,\ c$에 대하여 abc의 값은? (단, $a>0,\ b>0$이다.) [4.0점]

① -4　② -2　③ 0
④ 2　⑤ 4

4. 함수 $y=3\sin\pi x+1$ 의 주기를 a, 최댓값을 b, 최솟값을 c 라 할 때, $a+b+c$ 의 값은? [3.7점]

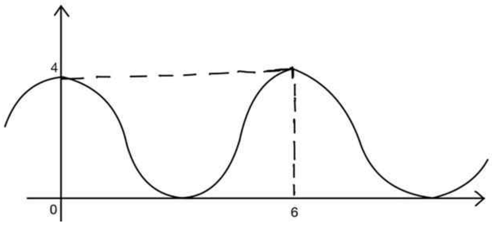
① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

5. 그림은 $f(x)=\alpha\cos\beta\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프이다. $\alpha+\beta$의 값은? (단, $\alpha>0,\ \beta>0$) [3.5점]



① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

6. 함수 $y=a\cos\frac{\pi}{b}x+c$의 그래프가 그림과 같을 때, $a+b+c$의 값은? (단, a, b, c는 양수이다.) [4.7점]



① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

7. 세 양수 a, b, c 에 대하여 함수 $y=a\cos bx+c$ 의 최댓값이 5, 최솟값이 1, 주기가 π 일 때, 세 수의 곱 abc 의 값은? [4.3점]

① 8 ② 10 ③ 12
④ 16 ⑤ 20

여러가지 각의 삼각함수

8. $\sin\frac{7}{3}\pi$의 값은? [3.9점]

① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

9. $\tan\frac{7}{6}\pi\times\cos\left(-\frac{13}{3}\pi\right)\times\sin\left(-\frac{7}{3}\pi\right)$ 의 값은? [4.3점]

① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ 1

한빛고/23년/K2/D

10. $\sin 840^\circ\times\tan 420^\circ+\sin 315^\circ\times\cos 675^\circ$ 의 값은? [3.9점]

① 1 ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{7}{4}$ ⑤ 1

삼각함수의 최대최소

11. 함수 $f(x)=\sin(\pi+x)\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$의 최솟값은? [5.3점]

① -2 ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ 2

삼각방정식

12. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$일 때, 방정식 $\sin x=\frac{1}{2}$의 해는? [3.7점]

① 0 ② $\frac{\pi}{6}$ ③ $\frac{\pi}{4}$
④ $\frac{\pi}{3}$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

13. $0<x<\pi$에서 방정식 $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 두 실근을 α, β라고 할 때, $\alpha+\beta$의 값은? (단, $\alpha<\beta$) [4.4점]

① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ π
④ $\frac{3\pi}{2}$ ⑤ 2π

14. $0 \leq x \leq \pi$일 때, 방정식 $2\cos x+1=0$의 해는? [4.0점]

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$
④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}\pi$

삼각부등식

15. 부등식 $2\sin x-\sqrt{2}>0$의 해는? (단, $0 \le x < 2\pi$) [4.0점]

① $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{3\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$
③ $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{4}$ ④ $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$
⑤ $0 \le x < \frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{3\pi}{4} \le x < 2\pi$

16. $0 \le x \le 2\pi$ 일 때, 부등식 $\cos x \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 을 만족시키는 모든 x 의 값의 범위가 $\alpha \le x \le \beta$ 이다. $\frac{\beta}{\alpha}$ 의 값은? [4.1점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

6. 삼각함수의 그래프(step2)

주기함수

17. 다음 함수 중 함수 $y=\cos 2x$와 주기가 다른 것은? [4.4점]

① $y=|\tan x|$ ② $y=|\cos x|$ ③ $y=\cos 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$
④ $y=-2\tan x$ ⑤ $y=\frac{1}{2}\sin(-x)$

18. 자연수 n에 대하여 지수함수 $y=2^{\frac{x}{n}}$와 함수 $y=\frac{1}{2}\sin\pi\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}$의 그래프의 교점의 개수가 7이 되도록 하는 모든 n의 값의 합은? [4.4점]

① 9 ② 11 ③ 13
④ 15 ⑤ 17

19. $0 \le x \le 2$에서 정의된 함수 $y=4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$의 그래프위의 점 중 y좌표가 정수인 점의 개수는? [4.9점]

① 10 ② 9 ③ 8
④ 7 ⑤ 6

삼각함수의 최대최소와 주기

20. 다음 중 함수 $y=\tan\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)+1$에 대한 설명으로 옳은 것은? [4.3점]

① 주기는 $\dfrac{\pi}{4}$이다.
② 최솟값은 1이다.
③ 그래프는 점 $\left(\dfrac{\pi}{4},1\right)$에 대하여 대칭이다.
④ 점근선의 방정식은 $x=\dfrac{n\pi}{4}$(n은 정수)이다.
⑤ 그래프는 함수 $y=\tan 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

21. 곡선 $y=4\cos\dfrac{1}{3}(x-\pi)$ $(0\le x\le 10\pi)$와 직선 $y=2$가 만나는 점들 중 서로 다른 두 점 A, B와 이 곡선 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은? (단, 점 P는 직선 $y=2$ 위의 점이 아니다.) [4.1점]

① 12π ② 15π ③ 18π
④ 21π ⑤ 24π

22. 양의 실수 a에 대하여 두 함수

$y=\tan\dfrac{\pi}{12}x$, $y=1+\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x}{a}$ 의 그래프가 제1 사분면에서 만나는 점의 개수가 3 이 되도록 하는 모든 자연수 a 의 값의 합은? [4.6점]

① 24 ② 30 ③ 38
④ 42 ⑤ 50

삼각함수의 미정계수의 결정

23. 양수 a와 실수 b에 대하여 함수

$$f(x)=3a\sin\left(ax+\frac{\pi}{12}\right)+3a\cos\left(\frac{5}{12}\pi-ax\right)+b$$

의 주기가 6π이고 최솟값이 2일 때, $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$의 값은? [4.6점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

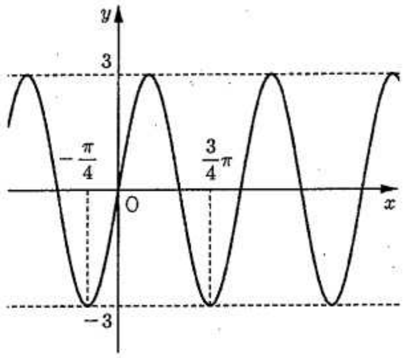
24. 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\cos\frac{x}{2}+b$의 최댓값은 5이고, $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=4$일 때, $a-b$의 값은? (단, $a>0$) [4.7점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

25. a, b, c가 자연수 일 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)=a\sin bx+c$에 대하여 $f\left(\frac{5}{36}\pi\right)$의 최솟값을 구하는 풀이과정과 답을 쓰시오.[8점]

(가) 함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{3}$이다. (나) 함수 $f(x)$의 최댓값은 14이다. (다) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않는다.

26. 다음 그림은 삼각함수 $f(x)=a\sin bx$의 그래프의 일부를 그린 것이다. 이 함수에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 상수이고, $a>0$, $b>0$이다.) [4.8점]

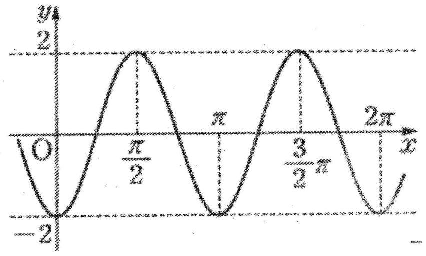


[보 기]

ㄱ. $f(x)$는 원점대칭이다.
ㄴ. 함수 $y=\tan x$와 주기가 같다.
ㄷ. $0\le x<\frac{\pi}{2}$에서 $f(x)=k$ $(0<k<3)$의 두 근 α, β가 $\sin(3\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{13}}{5}$ 일 때, k값은 $\frac{3\sqrt{6}}{5}$ 이다. $(\alpha<\beta)$

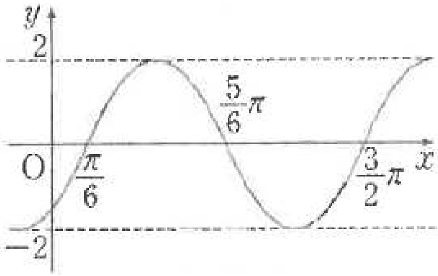
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

27. 함수 $y=a\cos(bx-c)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 상수 $a+b+\frac{c}{\pi}$ 의 값은? (단, $a>0$, $b>0$, $-2\pi<c<0$)
[4.4점]



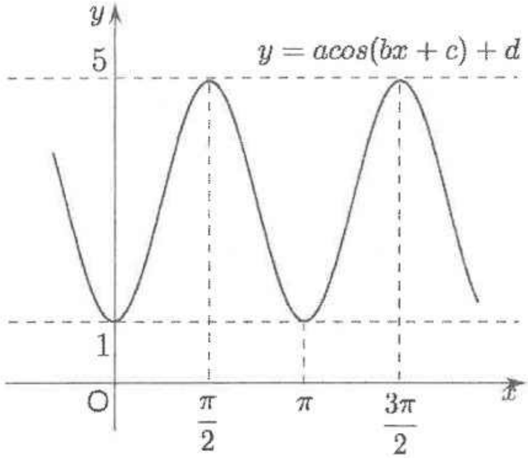
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

28. $y=a\cos(bx-c)$의 그래프가 그림과 같을 때, 상수 a, b, c의 값의 곱 abc는?(단, $a>0$, $b>0$, $0<c<\pi$이다.)



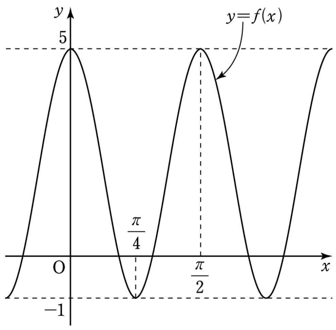
① $\frac{5\pi}{4}$ ② $\frac{3\pi}{2}$ ③ $\frac{7\pi}{4}$
④ 2π ⑤ $\frac{9\pi}{4}$

29. 함수 $y=a\cos(bx+c)+d$의 그래프가 그림과 같을 때, $a+b+c+d$의 값은? (단, $a>0$, $b>0$, $-2\pi<c<0$, $d>0$)
[4.5점]



① $6-\pi$ ② $7-\pi$ ③ $8-\pi$
④ $6+\pi$ ⑤ $7+\pi$

30. 두 양수 a, b에 대하여 $f(x)=a\cos(bx)+2$ 이다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같고 $f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=5$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$일 때, $a+b+f\left(\frac{17}{6}\pi\right)$의 값은? [4.5점]



① $7-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{13}{2}$ ③ $7+\frac{\sqrt{2}}{2}$
④ $\frac{15}{2}$ ⑤ $7+\frac{\sqrt{3}}{2}$

31. 두 함수 $f(x)=a\cos bx+c$와 $g(x)=\sin\frac{3}{5}x$가 다음 조건을 만족시킬 때, $20(a+b+c)$의 값은?
(단, $a>0$, $b>0$이고, a, b, c는 상수이다.)

> (가) $0\le x\le 5\pi$에서 $f(x)\le g(x)$이다.
> (나) $f(0)=g(0)$, $f\left(\frac{5}{2}\pi\right)=g\left(\frac{5}{2}\pi\right)$

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

32. 세 실수 a, b, c 에 대하여 함수 $f(x)=a\cos(b+x)+c$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $c\sin\left(\frac{\pi}{a}\right)+b$ 의 최댓값과 최솟값의 합은? (단, $a\ne0$, $0<b<2\pi$) [5.2점]

> (가) $f(0)=5$ 이다.
> (나) $f(x)$ 의 최댓값은 8 , 최솟값은 4 이다.

① $\frac{2}{3}\pi$ ② π ③ $\frac{4}{3}\pi$
④ $\frac{5}{3}\pi$ ⑤ 2π

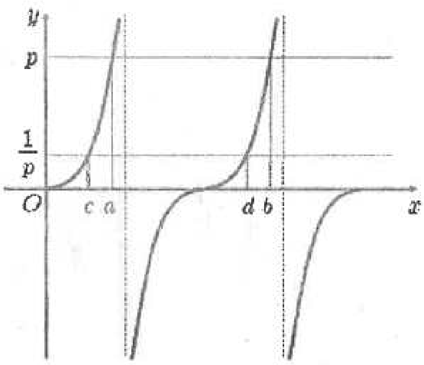
33. 함수 $y=2\cos 4x+5$ 의 그래프와 $y=\tan\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$ 의 그래프의 점근선이 만나는 모든 점의 y 좌표 중에서 서로 다른 모든 y 좌표의 합은? [4.7점]

① 15 ② 12 ③ 11
④ 10 ⑤ 9

34. 함수 $y=\tan 2x$ 의 그래프와 직선 $x=k$ 가 만나지 않도록 하는 음의 실수 k 의 최댓값은? [4.0점]

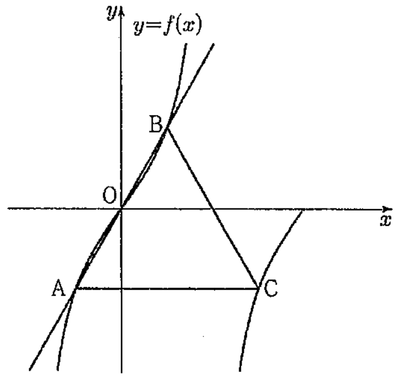
① $-\frac{\pi}{2}$　② $-\frac{\pi}{3}$　③ $-\frac{\pi}{4}$
④ $-\frac{\pi}{6}$　⑤ $-\frac{\pi}{8}$

35. 그림과 같이 $0 \le x \le 2\pi$인 범위에서 $\tan x = p(p>1)$를 만족하는 x의 값을 각각 a, b라 하고, $\tan x = \frac{1}{p}$를 만족하는 x의 값을 각각 c, d라 할 때, $\cos(a+b+c+d)$의 값은?



① -1　② 0　③ 1
④ $\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$　⑤ $\frac{1}{\sqrt{p}}$

36. 양수 a에 대하여 집합 $\left\{x \mid -\frac{a}{2}<x\le\frac{2a}{3},\ x\ne\frac{a}{3}\right\}$에서 정의된 함수 $f(x)=\tan\frac{3\pi x}{2a}$가 있다.아래그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 세 점 O, A, B를 지나는 직선이 있다. 점A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점중 A가 아닌점을 C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형ABC의 넓이는?(단, O는 원점이다.)[4.4점]



① $\frac{\sqrt{3}}{3}$　② $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　③ $\frac{3\sqrt{3}}{4}$
④ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　⑤ $3\sqrt{3}$

37. $-\pi < x < \pi$ 일 때, 자연수 n에 대하여 함수 $y=\tan\left(nx-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프와 직선 $y=-2x$의 서로 다른 교점의 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어, $a_1=2$이다. 이때, a_3+a_4의 값은?[5.0점]

① 13　② 14　③ 15
④ 16　⑤ 17

삼각함수 그래프의 대칭성

38. 함수 $f(x)$가 다음 세 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=f(x)$이다.
>
> (나) $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$일 때, $f(x)=\sin 8x$
>
> (다) $\frac{\pi}{4} < x \le \frac{\pi}{2}$일 때, $f(x)=-\sin 8x$

이때, 함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=-\frac{x}{\pi}+\frac{1}{2}$가 만나는 점의 개수는? [4.7점]

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

39. 함수 $f(x)$가 <조건>을 만족시킨다.

> [조 건]
>
> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)$이다.
>
> (나) $0 \le x \le \frac{1}{2}$일 때, $f(x)=4\sin \pi x$
>
> (다) $\frac{1}{2} < x \le 1$일 때, $f(x)=-4\sin \pi x$

이때 함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 점의 개수는? [5.2점]

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

절댓값이 있는 삼각함수

한빛고/23년/K2/C

40. 양수 a, b, c에 대하여 함수 $y=|a\cos bx-c|$의 주기는 6π이고, 이 함수의 최댓값은 7, 최솟값은 3일 때, $a+b+c$의 값은? [4.6점]

① $\frac{10}{3}$ ② $\frac{14}{3}$ ③ 6
④ $\frac{22}{3}$ ⑤ $\frac{26}{3}$

41. 두 함수 $y=\left|\sin\frac{ax}{8}\right|$, $y=\left|\tan\frac{4x}{b}\right|$의 주기가 서로 같도록 하는 두 자연수 a, b에 대하여 $a+b$의 최솟값은? [5.0점]

① 8 ② 12 ③ 16
④ 20 ⑤ 24

42. 실수 t 에 대하여 $0<\theta<\pi$ 에서 정의된 두 함수 $f(\theta)=\frac{1}{3}\sin\theta$, $g(\theta)=\frac{1}{2}|\cos\theta|+t$ 의 그래프의 교점의 개수를 $h(t)$ 라 하자. 직선 $y=mx+n$ 과 함수 $y=h(x)$ 의 교점의 개수가 3 일 때, 정수 n 의 최솟값은? (단, m 은 실수이다.) [4.9점]

① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

여러가지 각의 삼각함수

43. 좌표평면 위에 중심이 원점 O이고, 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 각 θ가 나타내는 동경과 원이 만나는 점의 좌표를 $\mathrm{A}(a,\ b)$라 하자. $\cos(\pi-\theta)=\frac{1}{4}$, $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)>0$일 때, $a+b^2=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값은? (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4.6점]

① 27 ② 29 ③ 31
④ 33 ⑤ 35

44. $\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$인 θ에 대하여 $\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=1$일 때, $\cos\theta$의 값은? [4.7점]

① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$
④ $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $-\frac{1}{3}$

45. $-\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 점 $\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{6},\ 0\right)$을 지나고 기울기가 양수인 직선이 함수 $y=\tan 3x$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 두 점의 x좌표 α, β에 대하여 $\beta-\alpha=\frac{\pi}{2}$일 때, $\tan(\alpha+2\beta)$의 값은? (단, $\alpha<\beta$) [5.2점]

① $-\sqrt{3}$ ② -1 ③ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ 1

46. 좌표평면 위에 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 각 θ가 나타내는 동경과 원이 만나는 점의 좌표를 $\mathrm{A}(a,b)$라 하자. $\cos(\pi+\theta)=\frac{1}{4}$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)>0$ 일 때, $a+b+\tan\theta$의 값은? [5점]

① $\frac{-1+3\sqrt{15}}{4}$ ② $\frac{-1+2\sqrt{15}}{4}$ ③ $\frac{-1+\sqrt{15}}{4}$
④ $\frac{-1+3\sqrt{15}}{2}$ ⑤ $\frac{-1+\sqrt{15}}{2}$

47. $0\le\alpha\le\beta\le 2\pi$인 두 실수 α,β에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [5.1점]

| 보 기 |

ㄱ. $\alpha<x<\beta$에서 $\sin x>\cos x$이면 $\beta-\alpha\le\pi$이다.
ㄴ. $\alpha<x<\beta$에서 $\sin x>|\cos x|$이면 $\beta-\alpha\le\frac{\pi}{2}$이다.
ㄷ. $|\sin\alpha|-|\cos\alpha|=\frac{1}{2}$인 α의 개수는 6이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

삼각함수의 최대최소

48. 함수 $y=3\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-2m$의 값은? [4.3점]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

49. 두 함수 $f(x)=2\sin\frac{\pi}{3}x$, $g(x)=2\cos\frac{\pi}{3}x+1$에 대하여 다음 물음에 답하시오. [총 6점]

(1) 함수 $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$의 최댓값이 α, 최솟값이 β일 때, 상수 $\alpha+\beta$의 값을 구하고, 그 풀이 과정을 자세히 하시오. [2점]

(2) $f(n)+g(n-1)=-1-\sqrt{3}$을 만족시키는 두 자리 자연수 n의 개수를 구하고, 그 풀이 과정을 자세히 하시오. [4점]

50. $0 \le x \le 2\pi$ 에서 함수 $y=\sin^2 x + a\cos x + \frac{1}{2}a + 5$ 의 최댓값을 $f(a)$ 라 하자. 방정식 $4f(a) - 3a - 35 = 0$ 을 만족시키는 모든 실수 a 의 값의 곱을 구하고, 그 과정을 하시오. [6점]

51. $0 \le x \le 2\pi$에서 $y = -2\sin^2 x + \sin x + 3$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오. [6.0점]

한빛고/23년/K3/C

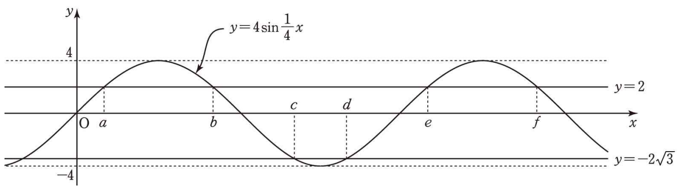
52. 실수 k에 대하여 함수

$f(x) = \sin^2\left(x+\frac{3}{4}\pi\right) + \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + k$의 최솟값은 2, 최댓값은 M이다. kM의 값은? [4.9점]

① $\frac{27}{4}$ ② $\frac{33}{4}$ ③ $\frac{39}{4}$
④ $\frac{45}{4}$ ⑤ $\frac{51}{4}$

삼각방정식

53. 그림과 같이 $0 \le x \le 12\pi$ 에서 $y=4\sin\frac{1}{4}x$ 의 그래프가 직선 $y=2$ 와 만나는 점의 x 좌표를 $a, b, e, f\ (a<b<e<f)$ 라 하고, 직선 $y=-2\sqrt{3}$ 와 만나는 점의 x 좌표를 $c, d(c<d)$ 라 할 때, 실수 $a+b+c+d+e+f$ 의 값은? [4.8점]



① 32π ② 34π ③ 36π
④ 38π ⑤ 40π

54. $0 \le x \le 2\pi$일 때, 방정식 $2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$의 모든 실근의 합은? [3.5점]

① π ② 2π ③ 3π
④ 4π ⑤ 5π

55. 자연수 n에 대하여 $0<x<\frac{n}{12}\pi$일 때, 방정식 $\sin^2(4x)-1=0$의 실근의 개수를 $f(n)$이라 하자. $f(n)=37$이 되도록 하는 모든 n의 값의 합은? [5.0점]

① 329 ② 330 ③ 331
④ 332 ⑤ 333

한빛고/23년/K2/C

56. 함수 $y=4\cos\frac{\pi}{6}x\ (0\le x\le 12)$의 그래프와 직선 $y=2$가 만나는 두 점을 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이는? [4.5점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

57. $0<x\le 2\pi$일 때, 방정식 $2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos x=1$의 모든 근의 합은?

① π ② $\frac{3\pi}{2}$ ③ 2π
④ $\frac{5\pi}{2}$ ⑤ 3π

58. 삼각함수 $y=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)(0<x<\pi)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{3}$이 만나는 점의 x좌표를 각각 $\alpha,\beta(\alpha<\beta)$라 할 때, $\sin(\alpha+\beta)$의 값은? [5.4점]

① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

59. $0\le x<2\pi$일 때, $2\log_2(-\sqrt{3}\sin x)=\log_2(1+\cos x)-1$을 만족시키는 x의 값 a에 대하여 $\tan a$의 값은? [4.6점]

① $-\frac{\sqrt{11}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{11}}{6}$ ③ $\frac{\sqrt{11}}{6}$
④ $\frac{\sqrt{11}}{5}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

60. $0\le x<\frac{5}{2}\pi$일 때, 방정식 $3\tan x=2$를 만족시키는 x의 값을 작은 것부터 차례대로 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라고 하자. 이때 $\tan\left(\alpha-\frac{\beta-\gamma}{2}\right)$의 값은? [4.6점]

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ 0
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

삼각부등식

61. 부등식 $\tan x < \sqrt{3}$ (단, $0 \le x < \frac{\pi}{2}$)의 해는? [4.5점]

① $0 \le x < \frac{\pi}{6}$ ② $0 \le x < \frac{\pi}{4}$ ③ $0 \le x < \frac{\pi}{3}$
④ $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$ ⑤ $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$

62. $0 \le x < 4\pi$에서 부등식 $-\sqrt{3} < \tan\frac{x}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$의 해가 $0 \le x \le \alpha$ 또는 $\beta < x < \gamma$ 또는 $\delta < x < 4\pi$일 때, $\alpha+\beta+\gamma+\delta$의 값은?
[4.7점]

① $\frac{16}{3}\pi$ ② 6π ③ $\frac{20}{3}\pi$
④ $\frac{22}{3}\pi$ ⑤ 8π

63. $0 < x < 4$ 일 때, 부등식 $(3^x - 9)\left(2\sin\frac{\pi}{2}x - 1\right) < 0$ 의 해는 $\alpha < x < \beta$ 또는 $\gamma < x < \delta$ 이다. $(\beta-\alpha)+(\delta-\gamma)$ 의 값은?
[5.0점]

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3
④ $\frac{10}{3}$ ⑤ 4

64. $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ 일 때, 직선 $y = 2x\tan\theta - \frac{1}{\cos\theta}$ 와 포물선 $y = x^2 + 1$ 이 만나도록 하는 모든 θ 의 범위를 구하고 그 과정을 하시오. [8.0점]

65. 실수 x에 대하여 부등식 $x^2-2x\sin\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta>0$이 항상 성립하도록 하는 모든 θ의 값의 범위가 $\alpha<\theta<\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 값은? (단, $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$) [5.1점]

① $-\frac{3\pi}{4}$ ② $-\frac{\pi}{4}$ ③ 0
④ $\frac{\pi}{4}$ ⑤ $\frac{3\pi}{4}$

66. 부등식 $\cos^2\theta+\sin\theta\geq-2k+3$ 이 모든 실수 θ 에 대하여 항상 성립하도록 하는 실수 k 의 최솟값은? [4.6점]

① $\frac{7}{8}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

67. x에 대한 이차방정식 $12x^2+4\sqrt{2}x\cos\theta+\cos\theta=0$의 실근이 존재하지 않을 때, θ의 값의 범위는? (단, $0\leq x<2\pi$)

① $0<x<\frac{\pi}{2}$
② $0<x<\pi$
③ $\frac{3\pi}{2}\leq x<2\pi$
④ $0<x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3\pi}{2}\leq x<2\pi$
⑤ $0\leq x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$

68. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2+2\sqrt{3}\sin\theta x+5\cos\theta+1>0$이 항상 성립하도록 하는 θ의 범위가 $0\leq\theta<p$ 또는 $q<\theta<2\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하는 과정을 논술하시오. (단, $0\leq\theta<2\pi$이다.) [총 10.0점]

삼각방정식과 부등식의 활용

69. $0 \le x \le 2\pi$일 때, x에 대한 부등식 $\sin x - \cos^2 x + k \ge 0$이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값은? [4.2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

70. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2 + 2x\sin\theta + \frac{1}{9} \ge 0$이 성립할 때, $\cos\theta$의 최솟값은? $\left(-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$ [5점]

① $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{3}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

71. $0 < x < \pi$일 때, 부등식 $\cos^2 x - 3\sin x - a + 1 < 0$이 항상 성립하도록 정수 a의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

72. 부등식 $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{2}$과 방정식 $|\tan x| = 1$을 동시에 만족시키는 모든 x값의 합은? (단, $0 < x < 2\pi$)
[4.9점]

① $\frac{11}{4}\pi$ ② 3π ③ $\frac{13}{4}\pi$
④ $\frac{7}{2}\pi$ ⑤ $\frac{15}{4}$

73. 어느 지역의 t월의 월평균 기온 $T(t)\,^\circ\mathrm{C}$가
$T(t) = 6\sqrt{3} + 12\cos\frac{\pi}{6}(t-2)(^\circ\mathrm{C})$
일 때, 일 년 동안 이 지역의 월평균 기온이 $0\,^\circ\mathrm{C}$이하인 달은 모두 m월부터 M월까지 이다. $2m + M$의 값은? (단, m, M은 12이하의 자연수이다.)
[4.9점]

① 19 ② 20 ③ 21
④ 22 ⑤ 23

6. 삼각함수의 그래프 (step3)

74. 양의 실수 a에 대하여 두 함수 $y=\tan\frac{\pi}{4}x$, $y=\log_{\frac{1}{2}}\frac{x}{a}+1$의 그래프가 제1사분면에서 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 모든 자연수 a의 값의 합을 구하고, 풀이과정을 논술하시오. [9.0점]

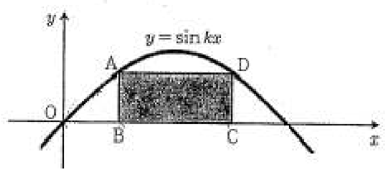
75. 두 양수 a, b와 자연수 n에 대하여 $0 \le x \le 2\pi$에서 정의된 함수 $f(x)=a\sin 3x+b$의 그래프와 직선 $y=n$이 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(n)$이라 하자. 두 함수 $f(x)$와 $g(n)$이 다음 조건을 모두 만족시킬 때, a^2+b^2의 값은? [5.3점]

(가) $f(0)>2$
(나) $g(2)=g(6)$
(다) $g(2)+g(4)+g(6)+g(8)+g(10)=28$

① 46 ② 48 ③ 50
④ 52 ⑤ 54

76. 함수 $f(x)=\sin 2x$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수를 $y=g(x)$라 하자. $0 \le x \le \pi$일 때, 방정식 $\{f(x)\}^2=\frac{3}{2}g(x)$를 만족시키는 서로 다른 실수 x의 값을 모두 구하고 그 과정을 논술하시오. [6.0점]

77. 그림과 같이 함수 $y=\sin kx$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분에 직사각형 $ABCD$ 가 내접하고 있다. $\overline{BC}=2$이고, 직사각형 $ABCD$의 넓이가 $\sqrt{2}$일 때, 상수 k의 값은? (단, $0<k<\pi$이다.) [4.3점]



① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$
④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ $\frac{2\pi}{3}$

78. $-2<x<2$인 실수 x에 대하여 함수 $y=2^{x}$의 그래프와 함수 $y=2\cos\frac{\pi}{3}x$의 그래프가 만나는 점을 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $x_1<x_2$) [5.7점]

[보기]

ㄱ. $x_2>\frac{1}{2}$ ㄴ. $y_1y_2>1$ ㄷ. $x_2-x_1>y_2-y_1$

① ㄱ ② ㄱ,ㄴ ③ ㄱ,ㄷ
④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

79. 양수 a와 자연수 b에 대하여 정의역이 $\left\{x|0\le x\le\frac{5\pi}{2b}\right\}$인 함수 $f(x)=a\sin bx+\frac{a}{2}$의 그래프와 직선 $y=a$가 세 점에서 만날 때, 이 세 점을 x좌표가 작은 것부터 순서대로 $A,\ B,\ C$라 하고, 세 점 $A,\ B,\ C$의 x좌표를 각각 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 하자. 점 $P\left(\frac{3\pi}{2b},\ -\frac{a}{2}\right)$에 대하여, 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족할 때, 삼각형 ACP의 넓이는? [5.3점]

(가) $f\left(\frac{\gamma-\alpha}{4}\right)=\frac{3}{4}$ 이다.

(나) $\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

① $\frac{\pi}{32}$ ② $\frac{\pi}{16}$ ③ $\frac{\pi}{8}$
④ $\frac{\pi}{4}$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

80. 자연수 k에 대하여 집합 A_k를

$$A_k=\left\{\cos\frac{2(m-1)}{k}\pi\,\middle|\,m\text{은 자연수}\right\}$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4.3점]

[보 기]

ㄱ. $A_3=\left\{-\frac{1}{2},\ 1\right\}$

ㄴ. 0이 집합 A_k의 원소가 되도록 하는 두 자리 자연수 k의 개수는 22이다.

ㄷ. $n(A_k)=9$를 만족시키는 모든 k의 값의 합은 33이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

81. 함수 $y=\sin2x\,(0\le x<2\pi)$의 그래프와 직선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}$의 교점의 x좌표를 작은 것부터 차례로 $a,b,c,d,$라 할 대, $\sin2a\times\cos(2b+2c+2d)$의 값은? [5.9점]

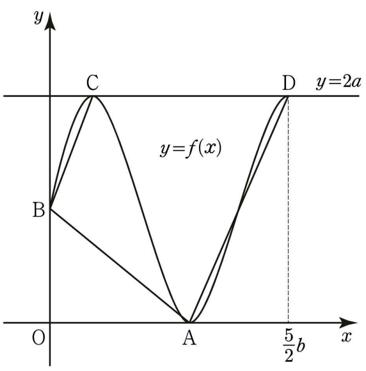
① $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

한빛고/23년/K2/B

82. 함수 $y=2\sin 5x-1$의 그래프와 함수 $y=\tan\left(3x-\frac{5}{2}\pi\right)$의 그래프의 점근선이 만나는 점의 y좌표의 최댓값을 α, 최솟값을 β라고 할 때 $\alpha^2+\beta^2$의 값은? [4.9점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

83. 함수 $f(x)=a\sin\left(\frac{\pi}{b}x\right)+a$가 있다. 곡선 $y=f(x)$ $\left(0\le x\le\frac{5}{2}b\right)$가 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=2a$와 만나는 두 점을 C, D라 하자. 점 C와 직선 AD사이의 거리가 $\frac{6\sqrt{10}}{5}$이고, 사각형 ABCD의 넓이가 18일 때, $f(5)$의 값을 구하고 그 과정을 논술하시오. (단, $0<b<a$) [7점]



84. 함수 $f(x)=(2\sin\theta+1)x^2+2(\cos\theta+\sin\theta)x+\cos\theta$의 그래프가 x축과 오직 한 점에서만 만날 때, θ의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $\theta=M$일 때의 $y=f(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표를 α, $\theta=m$일 때의 $y=f(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표를 β라 할 때, $\alpha+\beta$의 값은? (단, $0\le\theta<2\pi$) [4.4점]

① $\frac{-7-\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{-7+\sqrt{3}}{4}$ ③ 0
④ $\frac{7-\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{7+\sqrt{3}}{4}$

85. 함수 $f(x)=2a\sin\frac{\pi}{6}(x-1)-a$에 대하여 $0<x<20$에서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프가 직선 $y=k$와 만나는 점의 개수를 $g(k)$라 하자. $g(3)=6$일 때, $a+g(k)$의 최댓값은? (단, a는 상수이고, $k>0$이다.) [5.2점]

① 8 ② 11 ③ 14
④ 17 ⑤ 20

86. a는 자연수, b는 정수일 때 함수 $y=a\cos(2x+1)+b$의 주기를 p라 하자. 이 함수의 최댓값을 15, 최솟값을 m이라 할 때, $m \geq p$가 성립한다. a, b의 순서쌍 (a,b)의 개수는? [4.7점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

87. 정의역이 $0 \leq x \leq 2\pi$ 인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오. [총 8점]

(1) 함수 $f(x)=[2^{\sin x}]+[2^{\cos x}]$ 의 그래프를 그리시오.
(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [3점]

(2) 함수 $g(x)=2\sin 2x+1$ 에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 해를 구하시오. [5점]

88. 실수 x에 대하여 t에 대한 함수

$$f(t)=2\sin^2 t+x\cos t+3$$

의 최댓값을 $g(x)$라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 $y=11$로 둘러싸인 도형의 내부에 있고 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는? [4.8점]

① 35 ② 38 ③ 40
④ 42 ⑤ 45

89. 다음 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$ 와 함수 $g(x)=\dfrac{2}{2n-1}|x-1|-3$ 의 교점의 개수를 $h(n)$ 이라 할 때, $h(1)+h(2)+h(3)$ 의 값은? (단, n은 자연수이다.) [5점]

(가) $f(x)=-3\sin\pi x \quad (0 \leq x \leq 2)$
(나) 모든 실수 x 에 대하여
$f(-x)=f(x), f(x+4)=f(x)$

① 52 ② 53 ③ 54
④ 55 ⑤ 56

90. 정의역이 $\{x \mid 0 \le x < 2\}$인 함수 $f^n(x)$가 다음 조건을 만족한다.

(가) $n=1$일 때, $f^1(x)=\left|\,|\sin\pi x|-\dfrac{1}{2}\right|$이다.

(나) 자연수 n에 대하여

$f^{n+1}(x)=\left|f^n(x)-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right|$이다.

(다) 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$y=2^{-(x+k)}$(k는 음이 아닌 정수)에 대하여 $g_n(k)$는

$y=2^{-(x+k)}$과 $y=f^n(x)$의 그래프가 만나는 점의

개수이다. 예를들어 $g_1(0)=4, g_2(1)=8$이다.

$n=\alpha$일 때, $g_\alpha(k)$가 최대가 되게 하는 k의 최솟값을 m_α라 하자. $m_1+m_2+\cdots+m_9$의 값을 구하는 풀이과정과 답을 쓰시오.[9점]

91. $-6 \le x \le 6$에서 정의된 함수

$f(x)=2\sin|\pi x|-\cos^2|\pi x|+3$에 대한 설명중 옳은 것 만을 <보기>에서 있는대로 고른 것은?(단, n은 자연수)[5점]

[보 기]

ㄱ. $f(x)$의 최솟값과 최댓값의 합은 6이다.

ㄴ. 5이하의 자연수 k에 대하여 방정식 $f(x)=k$의 모든 근의 합은 0이다.

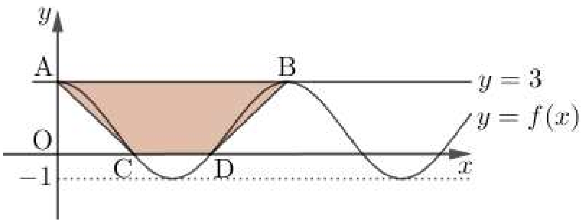
ㄷ. 함수 $y=g(x)$는 $-1 \le x \le 1$에서 $g(x)=n\times|x|$이며 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$를 만족시킨다. 자연수 n에 대하여 방정식 $g(x)=f(x)$의 근의 개수를 $h(n)$이라 할 때, $h(1)+h(2)+\cdots+h(5)=48$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

92. $-2\pi \le x \le 2\pi$ 일 때, 방정식 $\cos^2\left(\dfrac{nx}{3}\right)-1=0$의 실근의 개수가 13이 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합은? [4.6점]

① 9 ② 12 ③ 15
④ 19 ⑤ 23

93. $x \geq 0$에서 함수 $f(x)=a\cos bx+c$가 그림과 같을 때, 함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=3$이 만나는 점을 각각 A, B라 하고, x축과 만나는 점을 각각 C, D라 할 때, 사각형 ACDB의 넓이가 8π일 때, $0 \leq x \leq 3\pi$에서 방정식 $f(x)=1-\sqrt{3}$의 두 근을 α, β라 하자. $\beta-\alpha$의 값을 구하고, 그 과정을 하시오. (단, a, b, c는 양수이고, $\alpha<\beta$이다.)
[부분점수 있음. 7.0점]



95. 두 함수 $f(x)=\sin\frac{x}{2}$, $g(x)=2\pi\sin 2x$에 대하여 $0 \leq x \leq \pi$에서 방정식 $(f \circ g)(x)=0$의 모든 실근의 합은? [5.5점]

① $\frac{5\pi}{4}$ ② $\frac{3\pi}{2}$ ③ $\frac{7\pi}{4}$
④ $\frac{9\pi}{4}$ ⑤ $\frac{5\pi}{2}$

96. 실수 k에 대하여 x에 대한 방정식
$2\sin^2 x-2\sin x=k$ $\left(0 \leq x < \frac{3\pi}{2}\right)$ 를 만족시키는 서로 다른 모든 실수 x의 개수를 $f(k)$라 하자, 직선 $y=ax+4$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 a의 최댓값을 구하고, 그 과정을 논술하시오. [7.0점]

94. $0<n<20$ 인 자연수 n 에 대하여 부등식
$$4\sin\frac{n\pi}{10}\cos\frac{n\pi}{10}-2\sin\frac{n\pi}{10}-2\cos\frac{n\pi}{10}+1<0$$
을 만족시키는 n 의 개수는? [4.6점]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

97. 양의 실수 a 에 대하여 두 함수

$y=-\tan\frac{\pi x}{6}$, $y=\log_2\frac{x}{a}-1$ 의 그래프가 제4 사분면에서 만나는 점의 개수가 3 개가 되도록 하는 모든 자연수 a 의 값의 합은? [5.1점]

① 18 ② 21 ③ 24
④ 27 ⑤ 30

98. 자연수 n 에 대하여 $0<x<\frac{n}{12}\pi$ 일 때, 방정식 $\sin^2(4x)-1=0$ 의 실근의 개수를 $f(n)$ 이라 하자.
$f(n)=31$ 이 되도록 하는 모든 n 의 값의 합은? [4.7점]

① 271 ② 273 ③ 275
④ 277 ⑤ 279

99. $1<x<9$일 때, x에 대한 방정식

$$\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)^2-\frac{1}{n^2}=0$$

의 모든 해의 합을 $f(n)$이라 할 때, $f(1)+f(5)$의 값은? [4.4점]

① 15 ② 25 ③ 35
④ 55 ⑤ 65

100. $1\le k\le 10$인 실수 k에 대하여 x에 대한 방정식

$$4\sin^2x-4\cos x-6+k=0 \quad \left(0\le x\le\frac{3}{2}\pi\right)$$

의 모든 해의 합을 $f(k)$라 하자. 함수 $y=f(x)$의 최댓값은? [4.6점]

① 4π ② 3π ③ 2π
④ $\frac{3}{2}\pi$ ⑤ π

101. 함수 $f(x)=2x^2+4\cos\pi\theta|x|+2\sin^2\pi\theta+1$ 와 x 축과의 교점이 2 개일 때, 가능한 모든 θ 값의 합은? (단, $0<\theta<\frac{3}{2}$) [5점]

① $\frac{11}{6}$ ② 2 ③ $\frac{13}{6}$
④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

102. 함수 $y=\left|2\cos\left(3\pi x-\frac{3\pi}{8}\right)+1\right|$ 의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$ 이 만나는 서로 다른 점의 개수는 n 이다. 이 n 개의 점의 x 좌표의 합을 a 라고 할 때, $\frac{a}{n}$ 의 값은? (단, $0<x<2$) [5.2점]

① 1 ② $\frac{9}{8}$ ③ $\frac{5}{4}$
④ $\frac{11}{8}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

103. $0\le x<2\pi$에서 x에 대한 부등식

$$(2a+6)\cos x-a\sin^2 x+a+12<0$$

의 해가 $\frac{2}{3}\pi<x<\frac{4}{3}\pi$가 되게 하는 a의 값은? (단, a는 정수이다.)
[5점]

① -12 ② $-4\sqrt{3}$ ③ $4\sqrt{3}$
④ 12 ⑤ $6\sqrt{2}$

104. $0\le t\le 10$인 실수 t에 대하여 $t\le x\le t+5$에서 방정식 $\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)=\frac{1}{2}$의 모든 해의 개수를 $f(t)$라 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{4}x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 최댓값은? [4.9점]

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ $-\frac{2}{3}$
④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

105. $0 \le x \le 2\pi$에서 부등식 $3\sin x + 2|\cos x| \ge 3$의 해가 $\{x | \alpha \le x \le \beta\}$일 때, $\sin\alpha - \cos\beta = \frac{q}{p}$이다. 이때 $q-p$의 값은? (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)[5.3점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

106. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x \le \frac{2}{k}$ 일 때, $f(x) = \lvert kx-1 \rvert$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f\left(x+\frac{2}{k}\right) = f(x)$

함수 $g(x) = \lvert \sin 2k\pi x \rvert$에 대하여 $0 \le x \le \frac{4}{k}$에서 $f(x) = g(x)$를 만족시키는 서로 다른 모든 실근의 합이 7일 때, 상수 k의 값은? (단, $k>0$) [4.9점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

107. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $2\sin^2 x + 4\cos x - a < 0$이 항상 성립하도록 하는 실수 a의 값의 범위는? [4.8점]

① $a<2$ ② $a<4$ ③ $a>1$
④ $a>2$ ⑤ $a>4$

108. 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수 $y=f(x)$에 대하여 $0 \le x \le 3$일 때 $f(x) = \sin\frac{2\pi}{3}x$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = f(x)$, $f(x+6) = f(x)$를 만족시킨다. 두 점 $(3, 0)$, $(9, -1)$을 지나는 직선이 $-6 \le x \le 9$에서 함수 $y=f(x)$와 만나는 모든 점의 개수는? [5.2점]

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

109. 음이 아닌 세 정수 $a,\ b,\ n$에 대하여

$$(-2a^2+b^2+ab+1)\sin\left(\frac{n}{4}\pi-\frac{\pi}{2}\right)+(a^2-ab+4)\tan\frac{2n+1}{4}\pi=0$$

일 때, $a-b+\cos^2\frac{(n-2)}{8}\pi$의 값은? (단, $a\geq b$) [5.3점]

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

7. 삼각함수의 활용(step1)

사인법칙

돌마고/2022년/K4/D

110. $\triangle$ABC에서 $\overline{\mathrm{AC}}=6$, $\overline{\mathrm{BC}}=5$, $A=120^{\circ}$일 때, $\sin B$의 값은? [4.0점]

① $\frac{\sqrt{3}}{5}$ ② $\frac{3\sqrt{3}}{10}$ ③ $\frac{2\sqrt{3}}{5}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{3}}{5}$

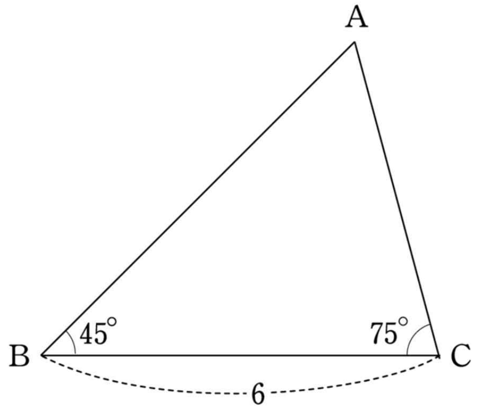
111. 삼각형 ABC에서 $A=75^{\circ}, B=60^{\circ}, \overline{AC}=3$ 일 때, $\overline{AB}$ 의 길이는?[4.3점]

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2
④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

112. 삼각형 ABC에서 $a:b:c=3:4:5$일 때, $\frac{\sin A+\sin C}{\sin B}$의 값은? [3.2점]

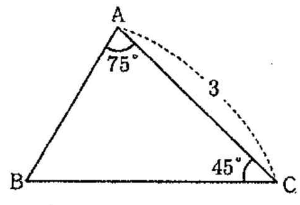
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

113. 삼각형 ABC에서 $B=45^{\circ}, C=75^{\circ}$ 이고, 선분 BC의 길이가 6 일 때, 선분 AC의 길이는? [4.2점]



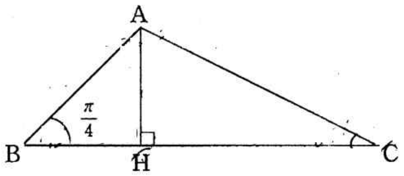
① $\sqrt{23}$ ② $2\sqrt{6}$ ③ 5
④ $\sqrt{26}$ ⑤ $3\sqrt{3}$

114. 삼각형 ABC에서 $\angle BAC=75^{\circ}$, $\angle ACB=45^{\circ}$, $\overline{AC}=3$일 때, $\overline{AB}$의 길이는? [3.8점]



① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$
④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$

115. 그림과 같이 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\angle \mathrm{B}=\frac{\pi}{4}$, $\sin \mathrm{C}=\frac{1}{3}$일 때, 선분 CH의 길이는? (단, $0<\mathrm{C}<\frac{\pi}{2}$) [4.5점]

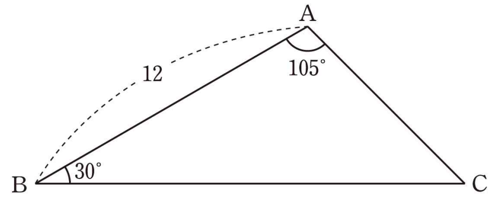


① 8 ② 9 ③ $8\sqrt{2}$
④ $9\sqrt{2}$ ⑤ $8\sqrt{3}$

116. 반지름의 길이가 6인 원에 내접하는 삼각형 ABC에서 $B=C=15^\circ$일 때, 삼각형 ABC의 세 변 중에서 가장 긴 변의 길이는? [1.4.0점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

117. 삼각형 ABC에서 $\angle \mathrm{A}=105^\circ$, $\angle \mathrm{B}=30^\circ$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=12$일 때, $\overline{\mathrm{AC}}$의 값은? [4.2점]



① 4 ② $4\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{3}$
④ $6\sqrt{2}$ ⑤ $6\sqrt{3}$

118. 사인법칙과 외접원

삼각형 ABC에서 $\angle A=30^\circ$, $\overline{BC}=6$일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는? [4점]

① 3 ② $2\sqrt{3}$ ③ 4
④ 6 ⑤ $4\sqrt{3}$

119. 지름의 길이가 $3\sqrt{2}$인 원에 내접하는 삼각형 ABC가 있다.
$\sin\mathrm{A}+\sin\mathrm{B}+\sin\mathrm{C}=1+\sqrt{2}$
일 때, 삼각형 ABC의 둘레의 길이는 $m+n\sqrt{2}$이다. 두 자연수 m, n에 대하여 $m+n$의 값은?[4.1점]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

120. $\angle A=30^{\circ}$, $\overline{BC}=2$ 인 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는? [4점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

121. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 5이고, $\cos(B+C)=-\frac{3}{5}$일 때, 선분 BC의 길이는? [4.8점]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

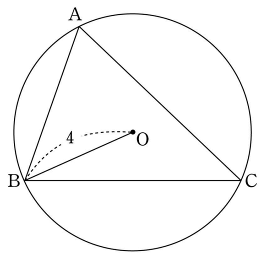
122. 반지름의 길이가 3인 원에 내접하는 삼각형 ABC가 있다. 이 삼각형의 둘레의 길이가 10일 때, $\sin A+\sin B+\sin(A+B)$의 값은? [4.2점]

① $\frac{5}{6}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{10}{3}$
④ 5 ⑤ $\frac{20}{3}$

123. 반지름이 2인 원에 내접하는 삼각형 ABC에서 $2\sin(A+B)\sin C=1$이 성립할 때, 선분 AB의 길이는? [4.0점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{2}$
④ 3 ⑤ 4

124. 그림과 같이 반지름의 길이가 4인 원의 둘레를 $\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CA}=3:4:5$가 되도록 나눌 때, 삼각형 OBC의 넓이는? [4.8점]



① $2\sqrt{3}$ ② 4 ③ $4\sqrt{3}$
④ 8 ⑤ $8\sqrt{3}$

125. △ABC에서 $b=8$, $\mathrm{B}=45^\circ$ 일 때, 외접원의 반지름의 길이 R의 값은? [3.7점]

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ 4
④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 8

126. 삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\angle\mathrm{A}=60^\circ$, $\angle\mathrm{B}=75^\circ$ 일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하자. 이때, $\overline{\mathrm{BC}}\times\mathrm{R}$의 값은? [4점]

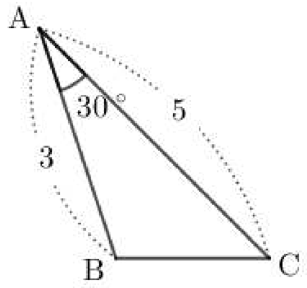
① $5\sqrt{3}$ ② $6\sqrt{3}$ ③ $7\sqrt{3}$
④ $8\sqrt{3}$ ⑤ $9\sqrt{3}$

127. 반지름의 길이가 3인 원에 내접하는 삼각형 ABC에 대하여 $a+b+c=18$일 때, $\sin\mathrm{A}+\sin\mathrm{B}+\sin\mathrm{C}$의 값은? [3.9점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

코사인법칙

128. 삼각형 ABC에서 $\angle\mathrm{A}=30^\circ$, $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{AC}}=5$일 때, $\overline{\mathrm{BC}}^2$의 값은 $p+q\sqrt{3}$이다. $p-q$의 값은? (단, p, q는 유리수이다.)
[4.1점]

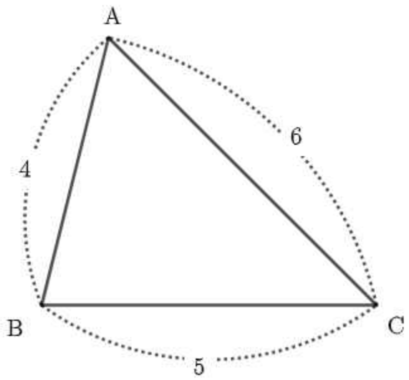


① 48 ② 49 ③ 50
④ 51 ⑤ 52

129. 삼각형 ABC 에서 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=10$, $\overline{AC}=14$일 때, $\angle B$의 크기는? [3.9점]

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{3}$ ③ $\frac{\pi}{2}$
④ $\frac{2\pi}{3}$ ⑤ $\frac{5\pi}{6}$

130. 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=5$, $\overline{CA}=6$일 때, $\cos A$의 값은?[4.2점]



① $\frac{17}{24}$ ② $\frac{9}{16}$ ③ $\frac{5}{12}$
④ $\frac{13}{48}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

131. 삼각형 ABC 에서 $a=6$, $c=12$, $B=120°$ 일 때, b 의 값은? [3.7점]

① $5\sqrt{6}$ ② $6\sqrt{6}$ ③ $5\sqrt{7}$
④ $6\sqrt{7}$ ⑤ $5\sqrt{8}$

132. 삼각형 ABC에서 $\cos A=\frac{3}{5}$, $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=6$일 때, $\cos B$의 값은? [4.3점]

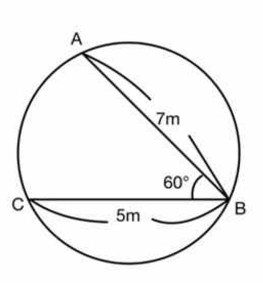
① $\frac{7}{25}$ ② $\frac{9}{25}$ ③ $\frac{11}{25}$
④ $\frac{13}{25}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

133. △ABC에서 $a=5$, $b=4$, $C=60°$ 일 때, c의 값은? [3.8점]

① $\sqrt{19}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{21}$
④ $\sqrt{22}$ ⑤ $\sqrt{23}$

사인법칙과 코사인법칙

134. 그림과 같이 원 모양인 연못의 가장자리의 세 지점 A, B, C에서 거리와 각을 측정한 결과가 $\overline{AB}=7m$, $\overline{BC}=5m$, $\angle ABC=60^\circ$이다. 이 연못의 넓이를 $a(m^2)$라 할 때, a의 값은? [5점]

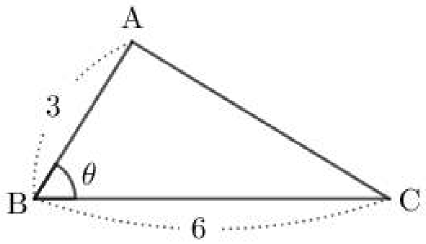


① 13π ② 24π ③ 39π
④ 41π ⑤ 52π

135. 삼각형 ABC 에서 $\sin A : \sin B : \sin C = 2:3:4$일 때, $\cos C$ 의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오. [5.0점]

삼각형의 넓이

136. $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{BC}}=6$, $\angle\mathrm{ABC}=\theta$인 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값은 a이고, 그 때의 θ의 값은 $b\pi$이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 유리수이다.) [4.2점]



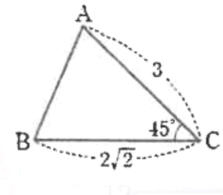
① 8 ② $\frac{17}{2}$ ③ 9
④ $\frac{19}{2}$ ⑤ 10

137. 세 변의 길이가 4, 5, 7인 삼각형 ABC의 넓이는? [4.3점]

① $4\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{6}$ ③ $5\sqrt{3}$
④ $5\sqrt{6}$ ⑤ 6

138. 그림과 같이

$\overline{BC}=2\sqrt{2}$, $\overline{AC}=3$, $\angle C=45^\circ$ 인 삼각형 ABC의 넓이는? [3.8점]



① 3 ② $3\sqrt{2}$
③ 6 ④ $6\sqrt{2}$ ⑤ 12

139. 삼각형 ABC에서 $a=\sqrt{7}$, $b=3$, $c=2$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [3.7점]

① $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ ② $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{3}}{4}$
④ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

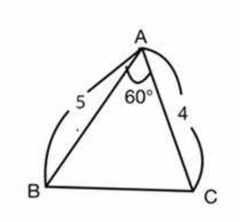
140. 삼각형 ABC에서 $\mathrm{b}=10$, $\mathrm{c}=10$, $\angle \mathrm{A}=45^\circ$ 일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4.0점]

① 25 ② $25\sqrt{2}$ ③ $25\sqrt{3}$
④ 50 ⑤ $25\sqrt{5}$

141. 삼각형 ABC에서 $a=3$, $b=8$, $\angle \mathrm{C}=60^\circ$ 일 때, 이 삼각형의 넓이는?[3.5점]

① $5\sqrt{3}$ ② $6\sqrt{3}$ ③ $7\sqrt{3}$
④ $8\sqrt{3}$ ⑤ $9\sqrt{3}$

142. 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=4$, $\angle A=60^\circ$ 인 삼각형 ABC의 넓이는? [4.2점]

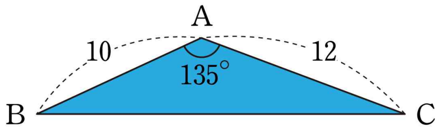


① 4 ② 5 ③ $5\sqrt{3}$
④ 10 ⑤ $10\sqrt{3}$

143. 사각형 ABCD에서 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{BC}}=6$, $\overline{\mathrm{CD}}=3$, $\overline{\mathrm{AD}}=3$, $\angle\mathrm{BAD}=90^\circ$ 일 때, 이 사각형의 넓이는? [4.5점]

① 16 ② $\frac{21}{2}$ ③ 24
④ $6+2\sqrt{14}$ ⑤ $8+9\sqrt{2}$

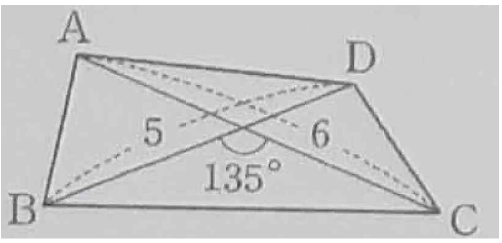
144. 다음 삼각형 ABC의 넓이는? [3.7점]



① $18\sqrt{2}$　② $18\sqrt{3}$　③ $30\sqrt{2}$
④ $30\sqrt{3}$　⑤ $42\sqrt{2}$

사각형의 넓이

145. 그림과 같은 사각형 $ABCD$에서 두 대각선의 길이가 각각 $6,\ 5$이고 두 대각선이 이루는 각의 크기가 135° 일 때, 사각형 $ABCD$의 넓이는?
[3.5점]



① $\dfrac{15\sqrt{2}}{2}$　② $10\sqrt{2}$　③ $\dfrac{25\sqrt{2}}{2}$
④ $15\sqrt{2}$　⑤ $\dfrac{35\sqrt{2}}{2}$

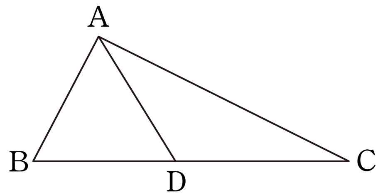
7. 삼각함수의 활용(step2)

사인법칙

146. 그림에서 삼각형 ABC의 변 BC 위의 점 D가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $\sin C$의 값은? [4점]

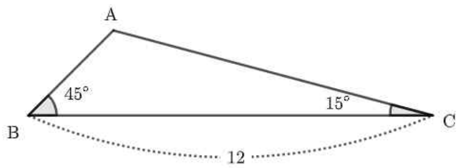
(가) $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BD}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{\mathrm{AD}}$

(나) $\overline{\mathrm{AC}}=2\overline{\mathrm{AD}}$



① $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$ ③ $\dfrac{\sqrt{6}}{7}$
④ $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{6}}{5}$

147. $\overline{\mathrm{AC}}=12$이고, $\angle\mathrm{B}=45^\circ$, $\angle\mathrm{C}=15^\circ$ 인 삼각형 ABC에서 선분 AC의 길이는? [4.4점]



① $4\sqrt{6}$ ② $\dfrac{7\sqrt{6}}{2}$ ③ $3\sqrt{6}$
④ $\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

사인법칙과 외접원

148. 반지름의 길이가 4인 원에 내접하는 삼각형 ABC에 대하여
$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1$이 성립한다고 할 때,
$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$의 값은? [3.7점]

① 25 ② 32 ③ 64
④ 72 ⑤ 128

149. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 10 이고 $\cos(\mathrm{A}+\mathrm{B})=-\dfrac{3}{4}$일 때, 선분 AB의 길이를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오. [6점]

150. 삼각형 ABC에서 $a=2$, $B=150^\circ$, $c=2\sqrt{3}$일 때, 이 삼각형의 외접원의 넓이는? [4.8점]

① 14π ② 21π ③ 28π
④ 35π ⑤ 42π

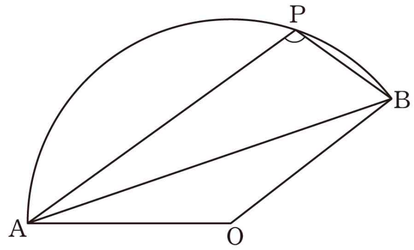
151. $\overline{AB}=15$, $\overline{BC}=8$, $\overline{CA}=17$인 삼각형 ABC와 그 삼각형의 내부에 $\overline{AP}=6$인 점 P가 있다. 점 P에서 변 AB와 변 AC에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 할 때, 선분QR의 길이는 ? [5.2점]

① $\frac{58}{17}$ ② $\frac{54}{17}$ ③ $\frac{52}{17}$
④ $\frac{50}{17}$ ⑤ $\frac{48}{17}$

152. $\triangle \mathrm{ABC}$에서 선분 BC의 길이가 6이고, $\sin A\cos C=\sin B$일 때, $\triangle \mathrm{ABC}$의 외접원의 반지름의 길이는? [4.4점]

① 2 ② $\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{2}$
④ 3 ⑤ 6

153. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 6인 부채꼴 OAB가 있다. $\overline{\mathrm{AB}}=8\sqrt{2}$이고 부채꼴 OAB의 호 AB 위의 한 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{BPA}>90^\circ$, $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=3:1$일 때, 선분 AP의 길이는? [4.6점]



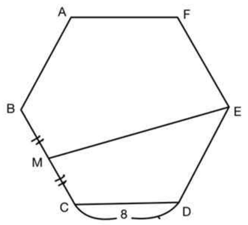
① $3\sqrt{6}$ ② $\frac{7\sqrt{6}}{2}$ ③ $4\sqrt{6}$
④ $\frac{9\sqrt{6}}{2}$ ⑤ $5\sqrt{6}$

154. $\triangle \mathrm{ABC}$의 외접원의 반지름의 길이가$2\sqrt{2}$이고 $\angle A=60^\circ$ $b=4$, 일 때, C 의 크기는? [4.2 점]

① 45° ② 60° ③ 75°
④ 90° ⑤ 105°

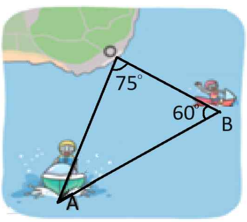
코사인법칙

155. 그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정육각형 $ABCDEF$에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때, 선분 ME의 길이는? [4.9점]



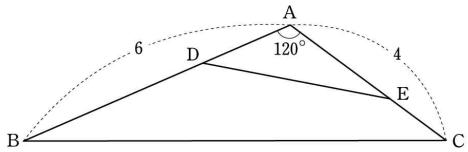
① $8\sqrt{2}$ ② $8\sqrt{3}$ ③ 13
④ $4\sqrt{13}$ ⑤ 15

156. 오른쪽 그림과 같이 두 제트 스키 A, B가 선착장 O를 동시에 출발하여 $\angle AOB = 75^\circ$, $\angle ABO = 60^\circ$가 되도록 각각 직선 모양으로 달리고 있다. 두 제트 스키 A, B는 각각 초속 $3\sqrt{6}\,\text{m}$, $6\,\text{m}$의 속력으로 일정하게 달리고 5초가 지났을 때, 두 제트 스키 A, B 사이의 거리는? [5.2점]



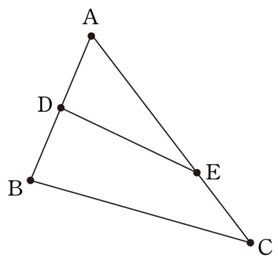
① $9\sqrt{6}\,\text{m}$ ② $13\,\text{m}$ ③ $13(\sqrt{3}+1)\,\text{m}$
④ $15(\sqrt{3}+1)\,\text{m}$ ⑤ $17\,\text{m}$

157. 그림과 같이 $\angle A = 120^\circ$, $\overline{AB} = 6$, $\overline{AC} = 4$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AB 위의 점 D와 선분 AC 위의 점 E는 삼각형 ADE의 넓이가 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{4}$이 되도록 유지하면서 각각 움직인다. 선분 DE의 길이의 최솟값은? [4.5점]



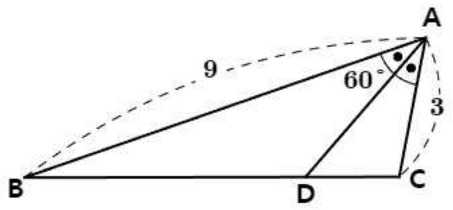
① $2\sqrt{3}$ ② $\sqrt{15}$ ③ $3\sqrt{2}$
④ $\sqrt{21}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

158. 그림과 같이 $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 5$, $\overline{BC} = \sqrt{19}$인 $\triangle ABC$에서 점 D는 A를 출발하여 B방향으로, 점 E는 C를 출발하여 A방향으로 움직이고 있으며, 점 D의 속력이 점 E의 속력의 두 배이다. 두 점 D, E사이의 최단 거리를 d라고 할 때, $14d^2$의 값은? (단, 점 D가 B에 도착하면 두 점은 더 이상 움직이지 않는다.) [5.2점]



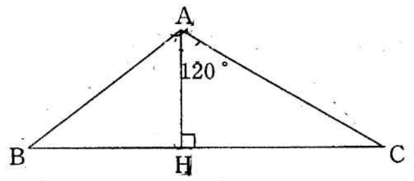
① 60 ② 90 ③ 120
④ 150 ⑤ 180

159. 다음 그림과 같은 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=9$, $\overline{AC}=3$, $\angle BAC=60^\circ$이고 $\angle BAC$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라고 할 때, 선분 BD의 길이는? [4.1점]



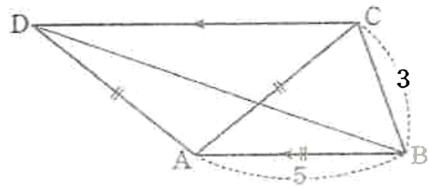
① $\frac{3\sqrt{7}}{4}$ ② $\frac{5\sqrt{7}}{4}$ ③ $2\sqrt{7}$
④ $\frac{9\sqrt{7}}{4}$ ⑤ $3\sqrt{7}$

160. 그림과 같이 $\overline{AB}=7$, $\overline{AC}=8$, $\angle A=120^\circ$인 삼각형 ABC에서 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{AH}$의 길이는? [4.7점]



① $\frac{26\sqrt{2}}{15}$ ② $\frac{28\sqrt{2}}{15}$ ③ $\frac{28\sqrt{3}}{15}$
④ $\frac{27\sqrt{2}}{13}$ ⑤ $\frac{28\sqrt{3}}{13}$

161. 그림과 같이 사각형 $ABCD$에서 변 AB와 변 CD는 평행하고 $\overline{BC}=3$, $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=5$일 때, 대각선 BD의 길이는? [4.2점]

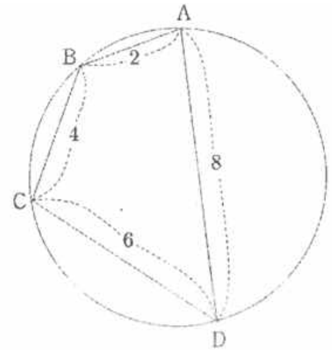


① $\sqrt{71}$ ② $2\sqrt{19}$ ③ 9
④ $\sqrt{86}$ ⑤ $\sqrt{91}$

162. $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=2$인 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O라 하자. 삼각형 OAB의 넓이가 2일 때, 선분 BC의 길이는 k이다. 서로 다른 모든 실수 k의 값과 합은?[5.4점]

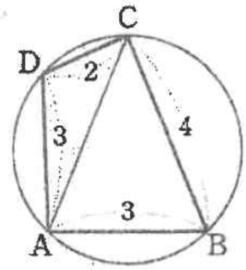
① $\frac{22\sqrt{5}}{5}$ ② $4\sqrt{5}$ ③ $\frac{18\sqrt{5}}{5}$
④ $\frac{16\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{14\sqrt{5}}{5}$

163. 그림과 같이 원에 내접하는 사각형 $ABCD$의 네 변의 길이가 $2, 4, 6, 8$일 때, 사각형 $ABCD$의 넓이는? [4.3점]



① $8\sqrt{3}$ ② 16 ③ $8\sqrt{5}$
④ $8\sqrt{6}$ ⑤ $8\sqrt{7}$

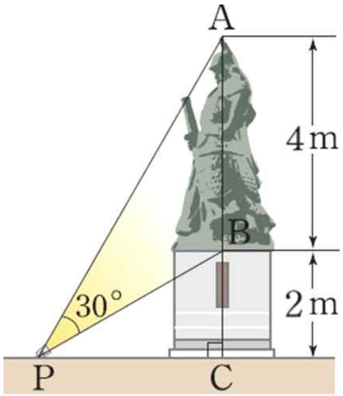
164. 아래 그림과 같이 원에 내접하는 □ABCD에서 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=4$, $\overline{CD}=2$, $\overline{DA}=3$일 때, □ABCD의 넓이는? (단, B는 예각이다.) [4.4점]



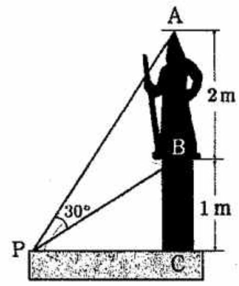
① $\frac{13\sqrt{2}}{2}$ ② $6\sqrt{2}$ ③ $\frac{11\sqrt{2}}{2}$
④ $5\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{2}}{2}$

코사인법칙의 활용

165. 그림과 같이 높이가 $2m$인 받침대 위에 키가 $4m$인 동상이
세워져 있다. P지점에 조명을 설치하여 밤에도 동상을 볼 수 있게 하려고 한다. $\angle APB=30^\circ$일 때, $\overline{PC}$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오. [6.0점]

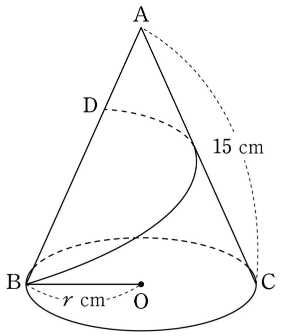


166. 아래 그림과 같이 높이가 $1m$인 받침대 위에 키가 $2m$인 동상이 세워져 있다. P지점에 조면을 설치하여 밤에도 동상을 볼 수 있게 하려고 한다. $\angle APB=30^\circ$일 때, $\overline{BP}$의 길이를 구하면? [4.7점]

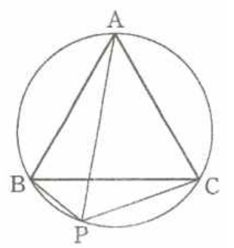


① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ 3
④ $2\sqrt{3}$ ⑤ 4

167. 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 rcm, 모선의 길이가 $15cm$인 원뿔에 대하여 모선 AB를 $1:2$로 내분하는 점을 D라 하자. 점 B에서 출발하여 원뿔의 표면을 따라 한 바퀴를 돈 후 점 D까지 가는 최단거리가 $5\sqrt{13}$일 때, 밑면의 반지름 r의 값을 구하고, 그 과정을 논술하시오. [5.0점]

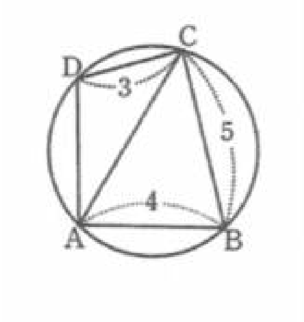


168. 그림과 같이 반지름의 길이가 3인 원에 내접하는 정삼각형 ABC가 있다. $\angle BAC$를 삼등분하는 직선 중 하나가 점 A를 포함하지 않는 호 BC와 만나는 점을 P라 할 때,
$3\left(\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2\right)$
의 값은? [4.5점]

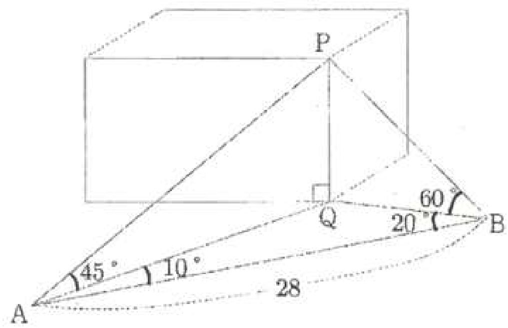


① 27 ② 54 ③ 81
④ 162 ⑤ 243

169. 그림과 같이 원에 내접하는 사각형 $ABCD$에서 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=5$, $\overline{CD}=3$이고 $\triangle ABC$의 넓이가 $\dfrac{5\sqrt{15}}{2}$일 때, $\overline{AD}$의 길이를 구하고 그 과정을 서술하시오.(단, B는 예각이다.), [7.0점]



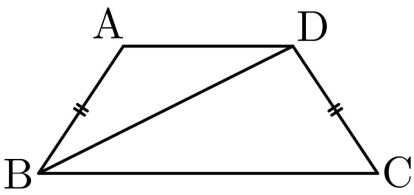
170. 그림과 같이 직육면체 모양의 성일고등학교 본관의 높이를 알아보기 위해서 지면에서 거리가 28인 두 지점 A, B에서 건물의 가장 높은 점 P를 올려다본 각을 측정하였더니 각각 $45°$, $60°$이었다. 점 P에서 수직으로 내린 지점을 Q라 할 때, $\angle ABQ=20°$, $\angle BAQ=10°$이다.
성일고등학교 본관의 높이 PQ의 길이는? [5.3점]



① $12\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{21}$ ③ $8\sqrt{6}$
④ $12\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{30}$

171. 사인법칙과 코사인법칙

그림과 같이 $\overline{AD} /\!/ \overline{BC}$, $\overline{AB}=\overline{CD}=5$인 사각형 ABCD가 있다. $\overline{BD}=4\sqrt{5}$이고, 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이가 $\frac{5\sqrt{5}}{2}$일 때, 사각형 ABCD의 넓이는? (단, $\overline{BC}>\overline{AD}$이다.) [4.0점]



① 32 ② 28 ③ 24
④ 20 ⑤ 16

172. 삼각형 ABC가 $\frac{\sin B-\sin C}{\sin A}=2\cos C-1$을 만족시킨다. $\sin C=\frac{4}{5}$일 때, $\cos B$의 값은? [4.7점]

① $\frac{7}{25}$ ② $\frac{9}{25}$ ③ $\frac{11}{25}$
④ $\frac{13}{25}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

173. $\sin A:\sin B:\sin C=3:5:7$ 인 삼각형 ABC의 외접원을 C, 원 C의 중심을 O라 하자. 점 O에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{OH}=\frac{55\sqrt{3}}{21}$ 이다. 원 C의 넓이를 구하고 그 과정을 서술하시오. [8.0점]

174. $\overline{BC}=8$인 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

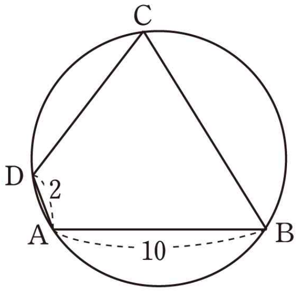
> (가) $\sin^2 B+\cos^2 C=1$
> (나) $\sin C=3(\sin B-\sin A)$

삼각형 ABC의 외접원의 넓이를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하시오.[8.0점/부분점수 있음]

175. △ABC에서 $a\sin A=b\sin B+c\sin C$가 성립할 때, △ABC는 어떤 삼각형인가? [4.2점]

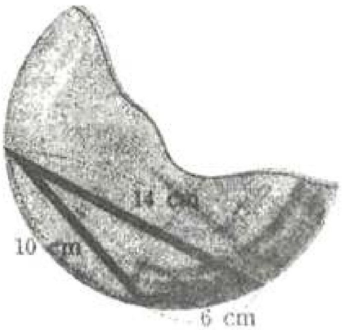
① $a=c$인 이등변삼각형
② $a=b$인 이등변삼각형
③ $C=90^\circ$ 인 직각삼각형
④ $B=90^\circ$ 인 직각삼각형
⑤ $A=90^\circ$ 인 직각삼각형

176. 그림과 같이 원에 내접하는 사각형 ABCD가 $\overline{AB}=10$, $\overline{AD}=2$, $\sin(\angle BCD)=\frac{4}{5}$를 만족시킨다. 이 원의 둘레의 길이가 $a\pi$ 일 때, a의 값은? (단, $\angle BCD<\frac{\pi}{2}$) [4.7점]

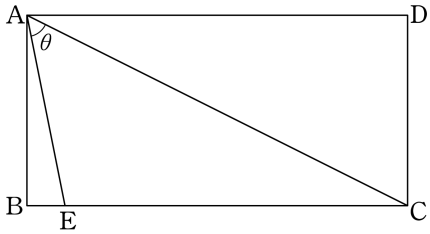


① $6\sqrt{2}$ ② $8\sqrt{2}$ ③ $10\sqrt{2}$
④ $12\sqrt{2}$ ⑤ $14\sqrt{2}$

177. 어느 왕릉에서 원 모양의 청동거울이 발견되었고, 일부가 깨져 반지름의 길이를 알 수가 없었다. 복원티은 청동거울에 세 변의 길이가 각각 $6cm$, $10cm$, $14cm$인 삼각형을 그려, 청동거울의 반지름의 길이를 알아낼 수 있었다. 청동거울의 반지름의 길이를 구하는 과정을 논술하시오. [6.0점]

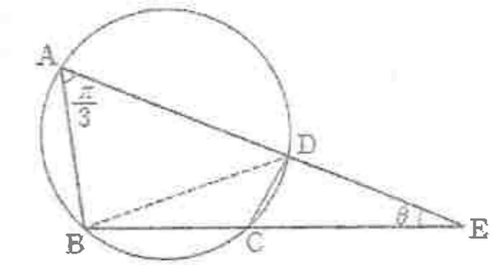


178. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=6$인 직사각형 ABCD에서 선분 BC를 $1:5$로 내분하는 점을 E라 하자. $\angle EAC=\theta$라 할 때, 삼각형 AEC의 외접원의 넓이는? [4.1점]

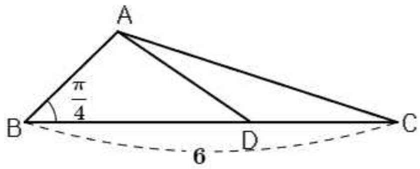


① 12π ② $\frac{25}{2}\pi$ ③ 13π
④ $\frac{27}{2}\pi$ ⑤ 14π

179. 그림과 같이 원에 내접하는 사각형 $ABCD$에 대하여 $\overline{AB}=\overline{BC}=2$, $\overline{AD}=3$, $\angle BAD=\frac{\pi}{3}$이다. 두 직선 AD, BC의 교점을 E라 하자. $\angle AEB=\theta$일 때, $\sin\theta$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오. [5.0점]

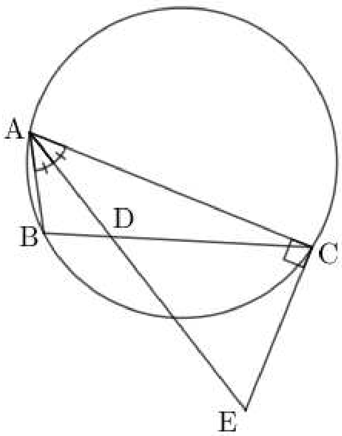


180. $\angle \mathrm{ABC}=\frac{\pi}{4}$, $\overline{\mathrm{BC}}=6$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC 위에 점 B와 점 C가 아닌 점 D를 잡고, 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 r_1, 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 r_2라 하자. $\frac{r_2}{r_1}=\sqrt{5}$ 일 때, 선분 AB의 길이는? [4.8점]



① $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ② $\sqrt{10}$ ③ $3\sqrt{2}$
④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{10}}{2}$

181. 그림과 같이 삼각형 ABC가 한 원에 내접하고 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{AC}}=12$, $\angle \mathrm{BAC}=\frac{\pi}{3}$, $\angle \mathrm{CAE}=\angle \mathrm{BAE}$, $\angle \mathrm{ACE}=\frac{\pi}{2}$일 때, 삼각형 CDE의 외접원의 넓이는?
[5.0점]

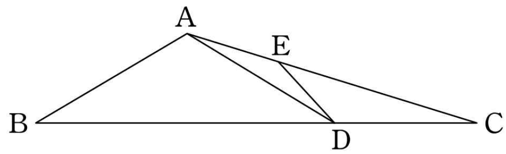


① 7π ② 14π ③ 21π
④ 28π ⑤ 35π

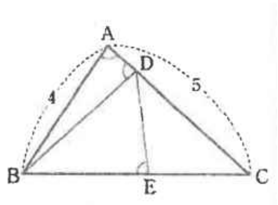
182. 사각형 $ABCD$의 네 꼭짓점은 한 원 위에 있고, $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=4$, $\overline{CD}=3$, $\overline{AD}=2$일 때, 사각형 $ABCD$에 외접하는 원의 반지름은 $\frac{q}{p}\sqrt{15}$ 이다. 두 자연수 p, q에 대하여 $p-q$의 값은? (단, p, q는 서로소이다.) [5.1점]

① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

183. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{BC}}=3\sqrt{6}$, $\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{26}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC 위에 점 B가 아닌 점 D를 $\overline{\mathrm{AD}}=2\sqrt{2}$가 되도록 잡고, 선분 AC 위에 양 끝점 A, C가 아닌 점 E를 사각형 ABDE가 원에 내접하도록 잡는다. 선분 DE의 길이를 구하고 그 과정을 작성하시오.[7.0점]

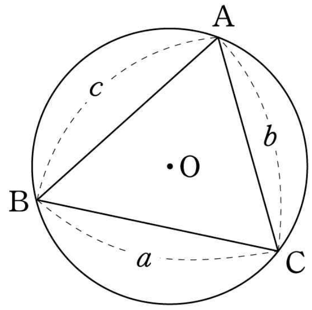


184. 그림과 같이 $\overline{AB}=4, \overline{AC}=5$ 이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E 에 대하여 $\angle BAC = \angle BDA = \angle BED$ 일 때, $\triangle BDE$의 넓이는? [4.1점]



① $\sqrt{7}$ ② $\frac{4\sqrt{7}}{3}$ ③ $\frac{5\sqrt{7}}{3}$
④ $2\sqrt{7}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{7}}{3}$

185. 그림과 같이 세 변의 길이가 $a,\ b,\ c$인 삼각형 ABC가 반지름의 길이가 R인 원에 내접할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[4.5점]



[보기]

ㄱ. $a^2+b^2+c^2=2bc\cos A+2ac\cos B+2ab\cos C$
ㄴ. $\frac{a}{R}$의 값이 정수가 되도록 하는 각 A의 값의 개수는 2이다.
ㄷ. $\angle C=30°,\ a=4,\ b=2\sqrt{3}$ 일 때, 삼각형 OAB의 외접원의 넓이는 4π이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

186. 둔각 삼각형 ABC에서 $a=4\sqrt{3},\ B=30°$ 이고 외접원의 반지름의 길이가 4 일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4.0점]

① $2\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ $6\sqrt{3}$
④ $8\sqrt{3}$ ⑤ $12\sqrt{3}$

삼각형의 결정

187. 등식 $\frac{\sin A}{2}=\cos B\sin C$가 성립하기 위한 필요충분조건은 삼각형 ABC가 $\boxed{\text{(가)}}$인 것이다. (가)에 들어갈 내용으로 옳은 것은? [4.4점]

① 정삼각형
② $\angle \mathrm{A}=90°$ 인 직각삼각형
③ $\angle \mathrm{C}=90°$ 인 직각삼각형
④ $\angle \mathrm{A}=\angle \mathrm{C}$인 이등변삼각형
⑤ $\angle \mathrm{B}=\angle \mathrm{C}$인 이등변삼각형

188. 삼각형 ABC가 등식 $2\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\times\sin(\pi-B)=\sin C$을 만족시킬 때, 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가? [4.4점]

① $\angle A=\frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형
② $\angle B=\frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형
③ $\angle C=\frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형
④ $\overline{BC}=\overline{AC}$ 인 이등변삼각형
⑤ $\overline{AC}=\overline{AB}$ 인 이등변삼각형

189. $\cos^2 A+\cos^2 B-\cos^2 C=1$을 만족하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가? [4.2점]

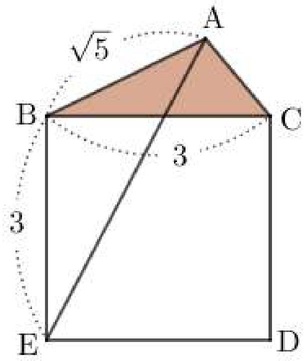
① 정삼각형
② $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$인 이등변삼각형
③ $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$인 이등변삼각형
④ $\angle \mathrm{B}=90°$ 인 직각삼각형
⑤ $\angle \mathrm{C}=90°$ 인 직각삼각형

190. $\triangle$ABC에서 $\sin B=2\cos A\sin C$ 이면, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가? [4.4점]

① $A=90°$ 인 직각삼각형
② $B=90°$ 인 직각삼각형
③ $a=b$인 이등변 삼각형
④ $a=c$인 이등변 삼각형
⑤ $b=c$인 이등변 삼각형

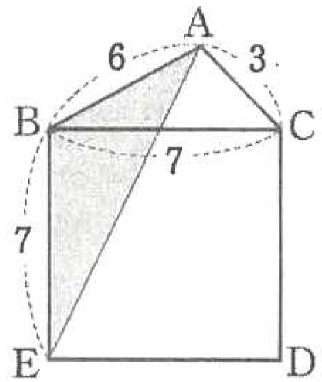
삼각형의 넓이

191. 그림과 같이 $\overline{AB}=\sqrt{5}$, $\overline{BC}=3$인 삼각형 ABC에서 선분 BC를 한 변으로 하는 정사각형 BEDC를 만들었다. 삼각형 ABE의 넓이가 3일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4.4점]



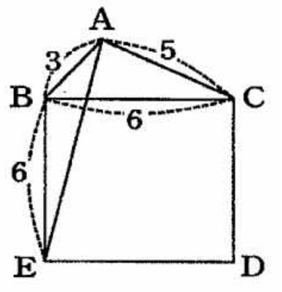
① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2
④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

192. 그림과 같이 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=7$, $\overline{AC}=3$인 삼각형 ABC에서 선분 BC를 한 변으로 하는 정사각형 $BEDC$를 만들었다. 이때 삼각형 ABE의 넓이는? [5.0점]



① 17　② 18　③ 19
④ 20　⑤ 21

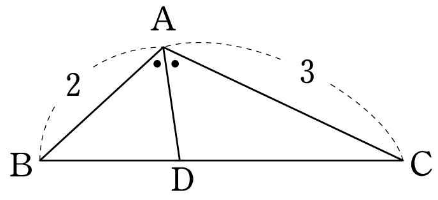
193. 아래의 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=6$, $\overline{AC}=5$인 삼각형 ABC에서 선분 BC를 한 변으로 하는 정사각형 $BEDC$를 만들었다. 이때, 삼각형 ABE의 넓이는? [4.1점]



① 4　② 5　③ 6
④ 7　⑤ 8

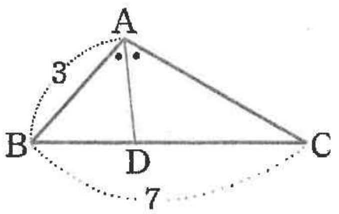
194. 세 변의 길이가 $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{5}$인 삼각형의 넓이를 S라 할 때, $8S^2$의 값을 구하시오. [4.6점]

195. 아래 그림과 같이 $\angle A = 120°$, $\overline{AB}=2$, $\overline{AC}=3$ 인 삼각형 ABC 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라고 할 때, 선분 AD 의 길이는? [4.2점]



① 1 ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{7}{5}$
④ $\frac{8}{5}$ ⑤ $\frac{9}{5}$

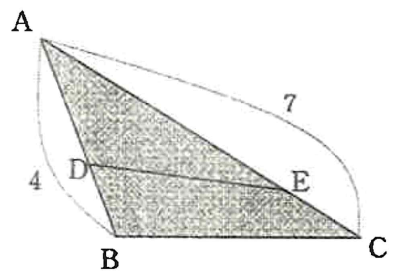
196. 아래 그림과 같이 $\triangle ABC$에서 각 A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 하자. $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=7$, $\angle BAC = 120°$ 일 때, $\overline{CD}$의 길이는? [4.4점]



① $\frac{31}{8}$ ② 4 ③ $\frac{33}{8}$
④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{35}{8}$

197. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=7$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AB위의 점 D, 선분 AC위의 점 E가 다음 조건을 만족시킬때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4.6점]

(가) $\overline{AD}+\overline{AE}=8$
(나) 삼각형 ADE의 넓이와 사각형 $DBCE$의 넓이는 같다.
(다) $\overline{DE}=\sqrt{15}$



① $7\sqrt{2}$ ② $\frac{7\sqrt{7}}{2}$ ③ $\frac{7\sqrt{6}}{2}$
④ $\frac{7\sqrt{5}}{2}$ ⑤ 7

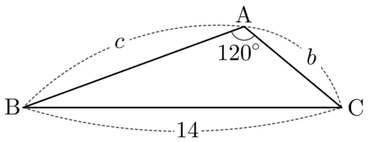
198. 삼각형 ABC에서 $\sin A : \sin B : \sin C = 5:6:7$이고, 이 삼각형의 넓이가 $54\sqrt{6}$일 때, 가장 긴 변의 길이는? [5.0점]

① 21 ② 28 ③ 35
④ 42 ⑤ 49

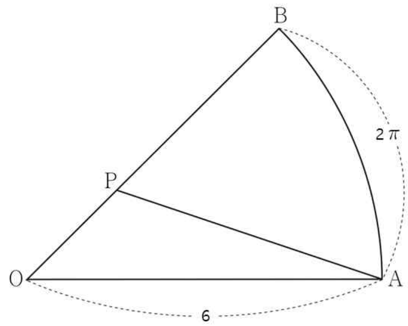
199. 삼각형 ABC에서 $A=135^\circ$ 이고 $\overline{AB}=2\sqrt{2}$, $\overline{BC}=\sqrt{13}$ 일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4.1점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 4 ⑤ $\frac{5}{2}$

200. 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}=14$, $\angle A=120^\circ$ 인 삼각형 ABC에서 $b+c=16$일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오. [7.0점]

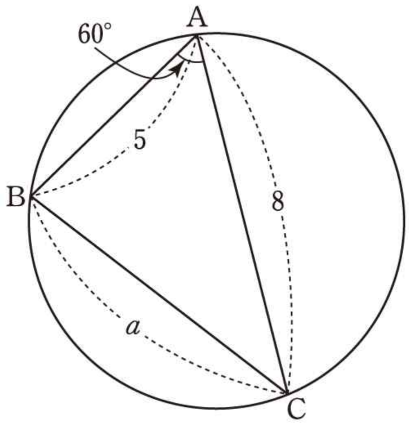


201. 그림과 같이 반지름의 길이가 6, 호의 길이가 2π인 부채꼴 OAB가 있다. 부채꼴 OAB의 넓이를 S, 선분 OB 위의 점 P에 대하여 삼각형 OAP의 넓이를 T라 하자.
$\frac{S}{T}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$일 때, 선분 AP의 길이는? (단, 점 P는 점 O가 아니다.) [4.7점]



① $2\sqrt{3}$ ② 4 ③ $2\sqrt{5}$
④ $2\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{7}$

202. 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=8$, $\overline{BC}=a$, $\angle A=60^\circ$ 인 삼각형 ABC가 원에 내접하고 있다. 외접원의 반지름의 길이를 R이라 할 때, 다음 물음에 답하시오.[총 7.0점]

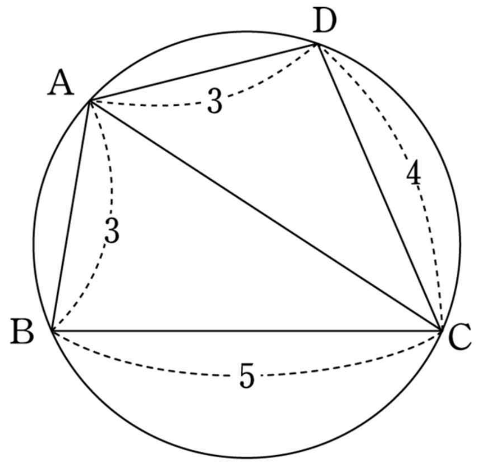


(1) 삼각형 ABC의 넓이를 구하고 그 과정을 논술하시오. [2.0점]

(2) a의 값을 구하고 그 과정을 논술하시오. [3.0점]

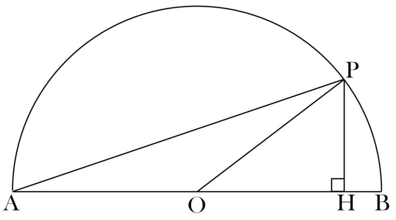
(3) R의 값을 구하고 그 과정을 논술하시오. [2.0점]

203. 사각형 $ABCD$의 네 꼭짓점은 한 원 위에 있고, $\overline{AB}=\overline{AD}=3$, $\overline{BC}=5$, $\overline{CD}=4$ 일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4.7점]



① $\dfrac{5\sqrt{35}}{4}$　② $\dfrac{3\sqrt{35}}{2}$　③ $\dfrac{7\sqrt{35}}{4}$
④ $2\sqrt{35}$　⑤ $\dfrac{9\sqrt{35}}{4}$

204. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 하고, 호 AB 위의 한 점 P에서 선분 AB 위에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\cos(\angle OPH)=\frac{2}{3}$이고, $\overline{AH}\times\overline{BH}=\frac{4}{9}\sqrt[3]{81}$일 때, 삼각형 AOP의 넓이 S에 대하여 $\log_3 S$의 값은? [5.1점]

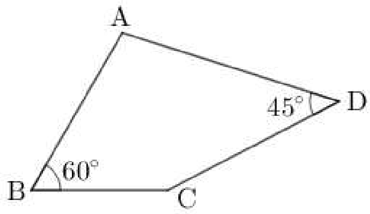


① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

205. 넓이가 $18\sqrt{11}$인 $\triangle\mathrm{ABC}$에서 $\sin A:\sin B:\sin C=\sqrt{3}:2:3$일 때, $\triangle\mathrm{ABC}$의 둘레의 길이가 $a+b\sqrt{3}$이다. 이때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 유리수이다.) [4.4점]

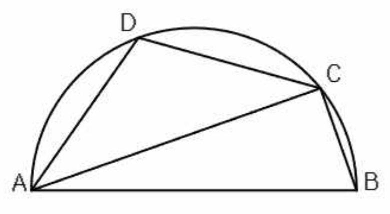
① 12 ② 18 ③ 24
④ 30 ⑤ 36

206. 그림과 같은 사각형 ABCD에서 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{BC}}=3$, $\overline{\mathrm{CD}}=3\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{AD}}=5$, $\angle\mathrm{B}=60^\circ$, $\angle\mathrm{D}=45^\circ$일 때, 사각형 ABCD의 넓이는 $a+b\sqrt{3}$이다. 유리수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?
[4.6점]

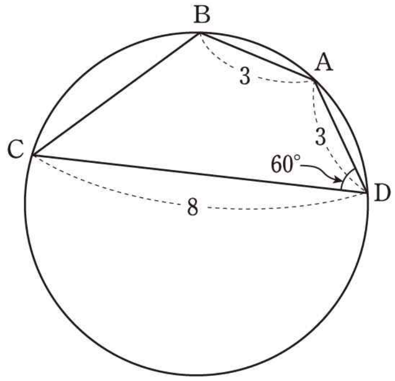


① 10 ② $\frac{21}{2}$ ③ 11
④ $\frac{23}{2}$ ⑤ 12

207. 길이가 15인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 C를 $\overline{\mathrm{BC}}=5$가 되도록 잡는다. 점 D가 호 AC 위의 점일 때, 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, 점 D는 점 A와 점 C가 아닌 점이다.) [8.0점]



208. 그림과 같이 원에 내접하는 사각형 $ABCD$ 가 $\overline{AB}=\overline{AD}=3$, $\overline{CD}=8$, $\angle ADC=60^\circ$ 를 만족시킨다. 사각형 $ABCD$ 의 넓이가 $\frac{p}{q}\sqrt{3}$ 일 때, $p+q$ 의 값은? (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [4.9점]

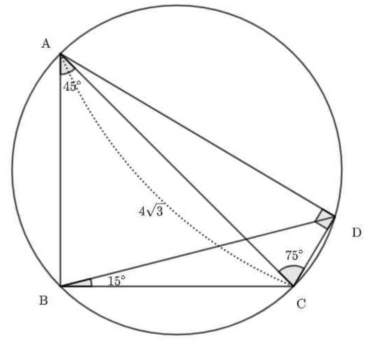


① 40　② 41　③ 42
④ 43　⑤ 44

209. $\triangle$ABC에서 세 변의 길이의 합이 28이고, $\angle A=120^\circ$, $\overline{BC}=12$일 때, $\triangle$ABC의 넓이는?[4.6점]

① $11\sqrt{3}$　② $12\sqrt{3}$　③ $13\sqrt{3}$
④ $14\sqrt{3}$　⑤ $15\sqrt{3}$

210. 그림과 같이 원에 내접하는 사각형 ABCD에서 $\angle BAC=45^\circ$, $\angle DBC=15^\circ$, $\angle ACD=75^\circ$ 이다. $\overline{AC}=4\sqrt{3}$ 일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4.8점]



[보 기]

ㄱ. $\overline{AB}=\overline{BC}$
ㄴ. $\overline{BD}=6$
ㄷ. 사각형 ABCD의 넓이는 20이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

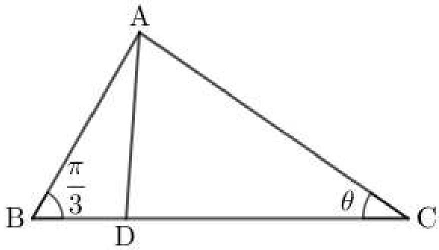
7. 삼각함수의 활용(step3)

211. $\overline{AB}=\overline{AC}$, $\overline{BC}=6$, $\angle A=120^\circ$ 인 이등변삼각형 ABC에서 $\overline{AC}$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$의 최솟값은? [5점]

① $\frac{45}{2}$ ② 23 ③ $\frac{47}{2}$
④ 24 ⑤ $\frac{49}{2}$

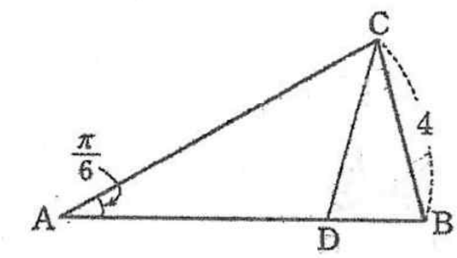
212. $\overline{AB}=\overline{BC}=2$인 삼각형 ABC에 대하여 선분 BC의 중점을 M, 선분 AM을 $1:2$로 내분하는 점을 N이라 하자. $\angle BAM=\angle MNC$일 때, 삼각형 ANC의 넓이를 구하고 그 과정을 논술하시오. [7점]

213. $\angle ABC=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC위에 점 B와 점 C가 아닌 점을 D를 잡고, 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 r_1, 삼각형 ADC의 외접원의 반지름의 길이는 r_2, $\angle ACB=\theta$라 하자. $\frac{r_2}{r_1}=\frac{\sqrt{13}}{3}$일 때, $\tan^2\theta$의 값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값은? (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [5.3점]



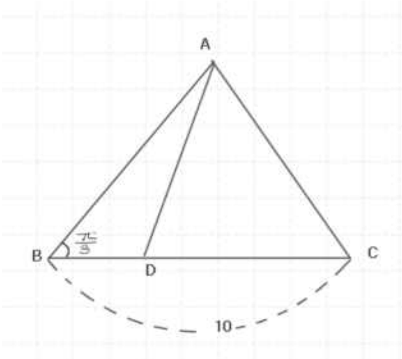
① 52 ② 53 ③ 54
④ 55 ⑤ 56

214. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$, $\overline{BC}=4$이고 $\angle CAB=\frac{\pi}{6}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AB 위의 점 D에 대하여 $\overline{CB}=\overline{CD}$일 때, $\overline{AB}^2+\overline{BD}^2$의 값은? [5.4점]



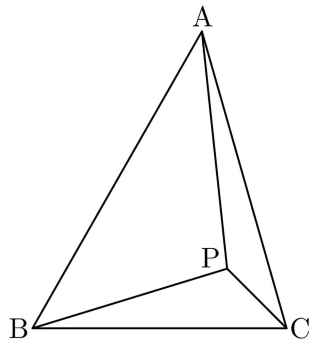
① 64 ② 68 ③ 72
④ 76 ⑤ 80

215. $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, $\overline{BC} = 10$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC위에
점B 와 점C 가 아닌 점D를 잡고, 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 r_1,삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 r_2,
라 하자. $\frac{r_2}{r_1} = \frac{\sqrt{21}}{4}$ 일 때, 선분 AB의 길이는? [4.5점]



① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

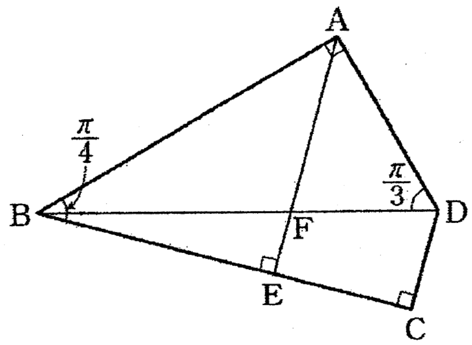
216. 그림과 같이 $\angle BAC = 45°$, $\overline{AC} = 6$, $\overline{BC} = 2\sqrt{6}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 내부의 점 P에 대하여 $\angle PBC = 15°$, $\angle PCB = 45°$ 일 때, 삼각형 ABP의 넓이는? [4.7점]



① $8+4\sqrt{3}$ ② $6+4\sqrt{3}$ ③ $6+2\sqrt{3}$
④ $3+2\sqrt{3}$ ⑤ $3+\sqrt{3}$

217. 그림과 같이 $\angle \mathrm{DAB} = \angle \mathrm{BCD} = \frac{\pi}{2}$ 이고, $\overline{\mathrm{AD}} = 1$ 인 사각형 ABCD가 있다. 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 E, 선분 BD와 선분 AE의 교점을 F라 할 때,

$\angle \mathrm{ABE} = \frac{\pi}{4}$, $\angle \mathrm{BDA} = \frac{\pi}{3}$ 이다.



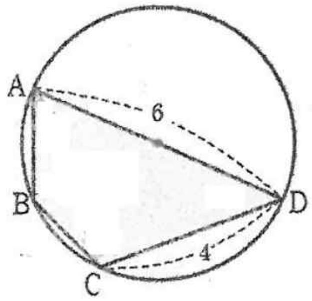
삼각형 ABF와 삼각형 AFD의 외접원의 반지름의 길이를 각각 R_1, R_2라 할 때, $(R_1)^2 - (R_2)^2$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오. [5점]

218. 삼각형 ABC가 $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$, $\sin A = 2(\sin C - \sin B)$를 만족시킨다. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $\frac{25}{2}$ 일 때, 선분 AC의 길이를 구하는 풀이과정과 답을 쓰시오. [8점]

219. 반지름이 r인 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(r,\ 0)$, $\mathrm{B}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}r,\ \frac{1}{2}r\right)$과 $\overline{\mathrm{OA}}$ 위의 점 C, $\overline{\mathrm{OB}}$ 위의 점 D에 대하여 $\frac{\overline{\mathrm{AC}} \times \overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{OC}} \times \overline{\mathrm{OD}}} = 1$을 만족한다. 삼각형 OAB의 넓이와 삼각형 OCD의 넓이의 비가 $25:6$ 일 때, $\overline{\mathrm{OD}}$는 반지름의 $\frac{m}{n}$배이다. $m \times n$의 값은? (단, O는 원점, $\overline{\mathrm{OC}} > \overline{\mathrm{OD}}$, m, n은 서로소인 자연수이다.) [5.0점]

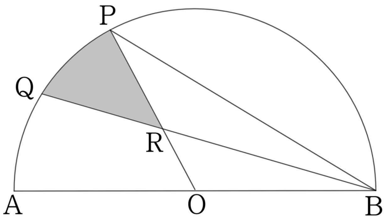
① 8 ② 10 ③ 12
④ 15 ⑤ 18

220. 그림과 같이 원 모양의 호수에 내접하는 사각형 모양의 무대 ABCD가 있다. $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{CD}} = 4$, $\overline{\mathrm{DA}} = 6$이고, 선분 AD가 원의 지름일 때, 사각형 ABCD의 넓이는? [5.1점]

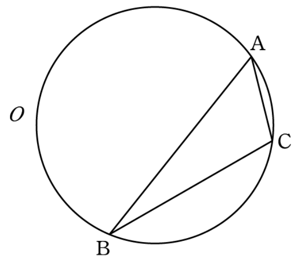


① $5\sqrt{5}$ ② $6\sqrt{5}$ ③ $7\sqrt{5}$
④ $8\sqrt{5}$ ⑤ $9\sqrt{5}$

221. 그림과 같이 길이가 24인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 하고, 호 AB 위의 한 점 P를 $\angle ABP=\frac{\pi}{6}$가 되도록 잡는다. $\angle ABP$의 이등분선이 호 AB와 만나는 점은 Q라 하고, 선분 OP와 선분 BQ가 만나는 점을 R이라 할 때, 호 PQ와 두 선분 PR, RQ로 둘러싸인 부분의 넓이는 $p+q\sqrt{3}+r\pi$ 이다. $p+q+r$의 값을 구하시오. (단, p, q, r은 유리수이다.) (답만 적으시오.) [5.2점]



222. 그림과 같이 원 O에 내접하고 $\overline{\mathrm{BC}}=7, \cos(\angle \mathrm{ABC})=\frac{13}{14}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 원 O의 넓이가 $\frac{49}{3}\pi$이고, 원 O 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값이 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$ 일 때, $p+q$의 값은? (단, 삼각형 ABC의 세 변 중 길이가 가장 긴 변은 $\overline{\mathrm{AB}}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [5.0점]



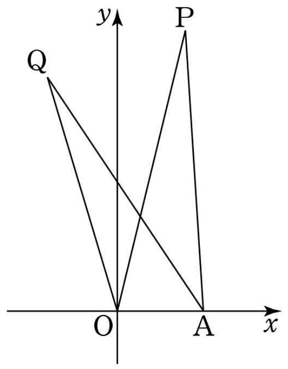
① 35 ② 37 ③ 39
④ 41 ⑤ 43

223. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(3,\ 0)$과 y좌표가 양수인 서로 다른 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}=6\sqrt{2}$이고 $\overline{\mathrm{OP}}>\overline{\mathrm{OQ}}$이다.

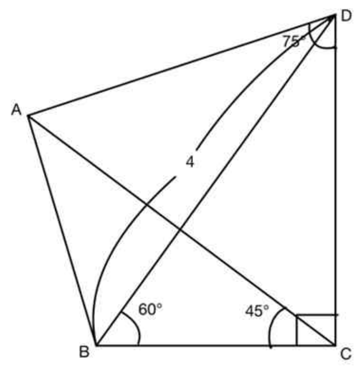
(나) $\cos(\angle\mathrm{OPA})=\cos(\angle\mathrm{OQA})=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

사각형 OAPQ의 넓이는?[4.9점]



① $21\sqrt{2}$ ② $22\sqrt{2}$ ③ $23\sqrt{2}$
④ $24\sqrt{2}$ ⑤ $25\sqrt{2}$

224. 그림과 같이 사각형 $ABCD$에 대하여 $\angle ACB=45^\circ$, $\angle ADC=75^\circ$, $\angle BCD=90^\circ$, $\angle CBD=60^\circ$, $\overline{BD}=4$이다. 선분 AB의 길이는? [5.8점]

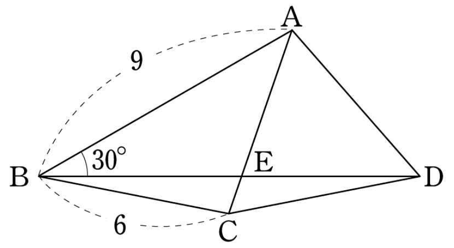


① $\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ 3
④ $\sqrt{10}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

225. $\overline{AB}=8, \overline{AC}=5$이고 넓이가 $10\sqrt{3}$인 삼각형 ABC가 있다. $\angle BAC$의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 P라 하고, 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 Q라 하자. $\overline{AQ}<\overline{PQ}$일 때, 선분 AQ의 길이는? [5.0점]

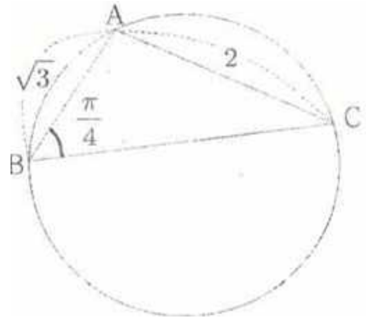
① $\frac{20}{13}$ ② $\frac{30}{13}$ ③ $\frac{40}{13}$
④ $\frac{50}{13}$ ⑤ $\frac{60}{13}$

226. 그림과 같이 사각형 ABCD의 두 대각선이 만나는 점을 E라 하자. $\overline{AB}=9$, $\overline{BC}=6$, $\angle ABE=30^{\circ}$이고 삼각형 ACD가 정삼각형일 때, 삼각형 AED의 외접원의 지름의 길이는 $a\sqrt{21}+b$이다. 두 유리수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?[4.4점]



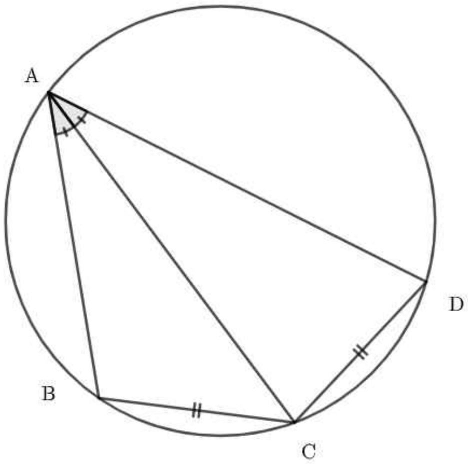
① -8 ② $-\frac{15}{2}$ ③ -7
④ $-\frac{13}{2}$ ⑤ -6

227. 그림과 같이 원에 내접하는 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=\sqrt{3}$, $\overline{CA}=2$, $\angle ABC=\frac{\pi}{4}$이다. $\angle ACB=\theta$라 할 때, $\sin^2\theta+\cos 2\theta$의 값은? [4.7점]



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

228. 그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고 있다. $\overline{AB}=5$, $\overline{AD}=7$, $\angle BAC=\angle CAD$, $\cos(\angle BAD)=\frac{3}{5}$ 일 때, 사각형 ABCD의 넓이는? [5.2점]

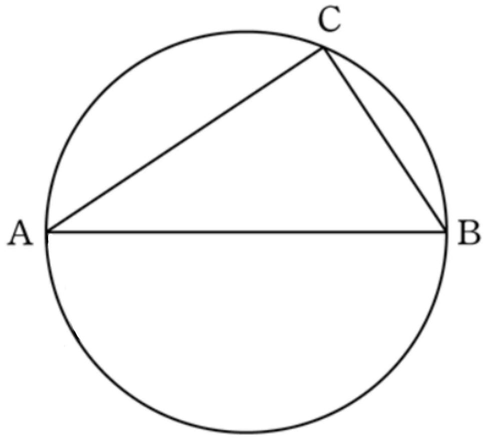


① 20 ② 19 ③ 18
④ 17 ⑤ 16

229. 넓이가 $8\sqrt{3}$ 인 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

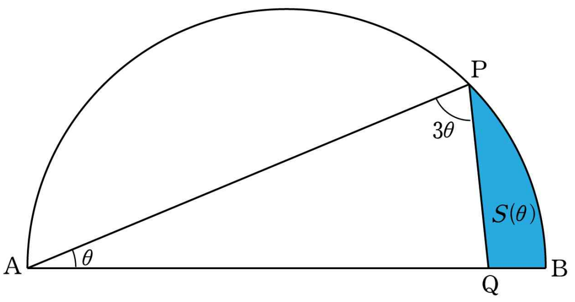
(가) $\cos^2 A+\cos^2 B=1+\cos^2 C$
(나) $\sqrt{3}\tan A-\tan B+\sqrt{3}=\tan\frac{C}{2}$

이 삼각형 ABC의 외접원에 대하여 $\angle ACB$를 육등분하는 직선 중 하나가 점 C를 포함하지 않는 호 AB와 만나는 점을 P라 하고, 선분 AP의 길이를 k라 할 때, k^2의 값은? (단, 점 P는 호 AB의 육등분점 중 A에 가장 가까운 점이다.) [4.7점]



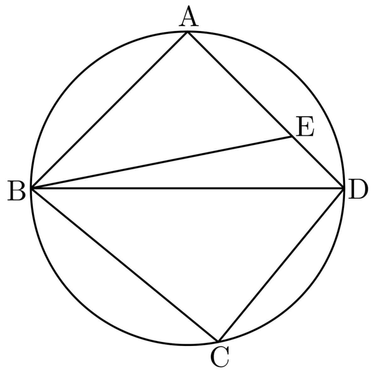
① $28-15\sqrt{3}$ ② $28-16\sqrt{3}$ ③ $32-14\sqrt{3}$
④ $32-15\sqrt{3}$ ⑤ $32-16\sqrt{3}$

230. 그림과 같이 선분 AB 를 지름으로 하는 반원의 호AB 위에 $\angle PAB = \theta$ 인 점 P 가 있다. $\angle APQ = 3\theta$ 가 되도록 선분 AB 위의 점 Q 를 잡을 때, 두 선분 PQ, QB 와 호 BP 로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. 1 라디안보다 작은 양의 각 k 에 대하여 $S(k) = 3\pi - p\sqrt{3}$ 일 때, 정수 p 의 값은? (단, $\overline{AB} = 12$, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$) [4.7점]



① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

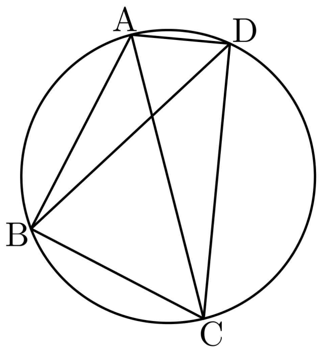
231. 그림과 같이 한 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여 $\overline{\mathrm{BC}} = 3\sqrt{3}$ 이고, 삼각형 ABD는 $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AD}}$ 인 이등변삼각형이며, 선분 AD를 $2:1$로 내분하는 점을 E라 하자. $\angle\mathrm{BAD} = \alpha$, $\angle\mathrm{ADB} = \beta$, $\angle\mathrm{BDC} = \gamma$라 할 때, $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{3}{4}$, $\sin\gamma = \frac{\sqrt{5}}{3}$ 이다. 선분 BE의 길이를 구하고, 그 과정을 서술하시오. [8.0점]



232. 그림과 같이 원에 내접하는 사각형 ABCD가 다음을 만족시킨다.

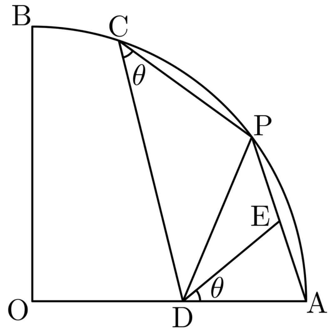
(가) $\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{14}$ 이고, $\overline{\mathrm{AC}}>\overline{\mathrm{AB}}$ 이다.
(나) $\cos(\angle \mathrm{DBA})=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

사각형 ABCD의 넓이가 $\dfrac{q}{p}\sqrt{7}$ 일 때, $p+q$의 값은? (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4.9점]



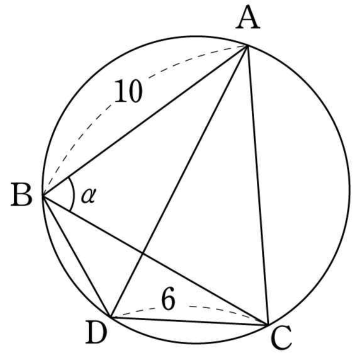
① 10 ② 9 ③ 8
④ 7 ⑤ 6

233. 그림과 같이 반지름의 길이가 5이고 중심각의 크기가 $\dfrac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PC}}=\overline{\mathrm{PD}}$가 되도록 호 PB 위에 점 C와 선분 OA 위에 점 D를 잡는다. $\angle \mathrm{PCD}=\theta$라 할 때, $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$이고, $\angle \mathrm{EDA}=\theta$가 되도록 선분 PA 위에 점 E를 잡는다. 이때, 삼각형 EDA의 넓이는? [4.6점]



① $\dfrac{12}{5}$ ② 2 ③ $\dfrac{8}{5}$
④ $\dfrac{6}{5}$ ⑤ $\dfrac{4}{5}$

234. 그림과 같이 예각삼각형 ABC가 한 원에 내접하고 있다. $\overline{AB}=10$이고, $\angle ABC=\alpha$라 할 때, $\cos\alpha=\frac{5}{14}$이다. 점 A를 지나지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\overline{CD}=6$이다. 두 삼각형 ABD, CBD의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $S_1 : S_2 = 2 : 1$이다. 삼각형 ADC의 넓이를 S라 할 때, $7S$의 값은?[4.7점]



① $50\sqrt{19}$ ② $52\sqrt{19}$ ③ $54\sqrt{19}$
④ $56\sqrt{19}$ ⑤ $58\sqrt{19}$

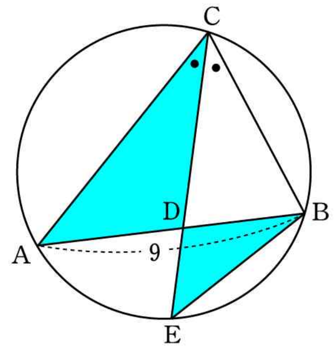
235. $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=6$, $\angle ABC=\frac{\pi}{3}$인 평행사변형 ABCD에 대하여 $\angle ABC$의 이등분선과 $\overline{AD}$가 만나는 점을 E라 하자. $\angle EBD=\theta$라 할 때, $\sin\theta$의 값은? [4.9점]

① $\frac{2}{19}$ ② $\frac{\sqrt{17}}{38}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{38}$
④ $\frac{\sqrt{19}}{38}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{19}$

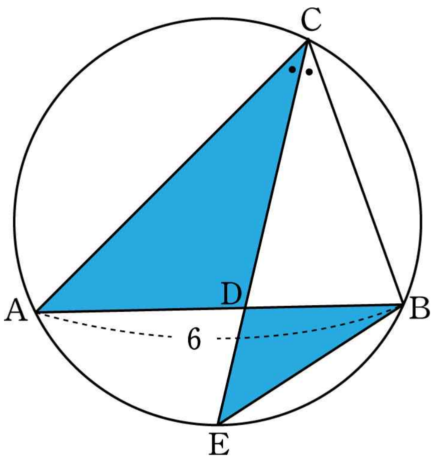
236. $\overline{AB}=\overline{AC}=6$인 둔각삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O라 하고, 선분 OA를 $1:2$로 내분하는 점을 D라 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 $12\sqrt{2}$일 때, 선분 CD의 길이는? [5.1점]

① $2\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ 4
④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

237. 그림과 같이 $\overline{AB}=9$, $\angle ACB=60^\circ$인 삼각형 ABC에서 선분 AB 위의 점 D에 대하여 직선 CD는 $\angle ACB$를 이등분한다. 직선 CD가 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점 중 C가 아닌 점을 E라 할 때, $\overline{CA}=\overline{CE}$가 성립한다. 삼각형 ADC의 넓이를 S, 삼각형 BDE의 넓이를 T라 할 때, $S-T$의 값을 구하고 그 과정을 논술하시오. [8.0점]



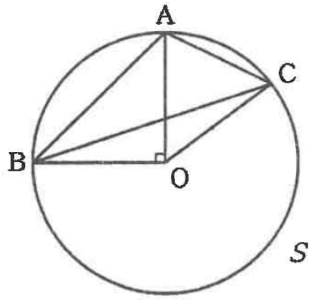
238. 그림과 같이 $\overline{AB}=6$, $\angle C=60^\circ$ 인 삼각형 ABC에서 선분 AB위의 점 D에 대하여 직선 CD는 $\angle ACB$를 이등분한다. 직선 CD가 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점 중 C가 아닌 점을 E라 할 때, $\overline{CA}=\overline{CE}$가 성립한다. 다음 물음 (1)~(2)에 답하시오. [총 6점]



(1) 삼각형 AEC의 외접원의 넓이를 구하고 그 풀이 과정을 자세히 서술하시오. [2점]

(2) 삼각형 ADC의 넓이를 P, 삼각형 BDE의 넓이를 Q, 선분 AC의 길이를 d라 할 때, $\dfrac{d^2}{P-Q}$의 값을 구하고 그 풀이과정을 자세히 서술하시오. [4점]

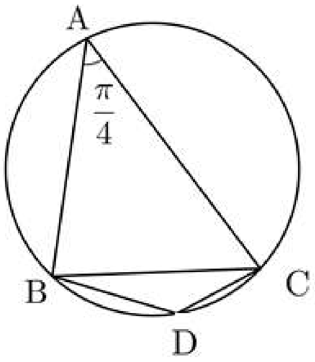
239. 아래 그림과 같이 중심이 O인 원 S 위에 서로 다른 세 점 A, B, C가 있다. $\angle AOB=\dfrac{\pi}{2}$이고, $\overline{AB}:\overline{AC}=\sqrt{10}:2$이다. 삼각형 ABC의 넓이가 6일 때, 삼각형 ABO의 넓이는? [4.6점]



① 5　② $5\sqrt{2}$　③ 10　④ $10\sqrt{2}$　⑤ 20

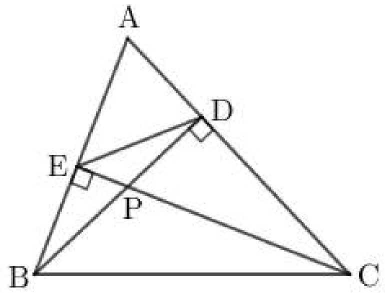
240. 반지름의 길이가 8인 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여 $\overline{AB}=\overline{CD}=4\sqrt{3}$, $\overline{BD}=6\sqrt{2}$일 때, 사각형 ABCD의 넓이를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오 [6.0점]

241. 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 인 원에 내접하고 $\angle A = \frac{\pi}{4}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle BCD) = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 일 때, 삼각형 BCD의 넓이는?[5.2점]



① $\sqrt{2}-1$ ② $\sqrt{3}-1$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

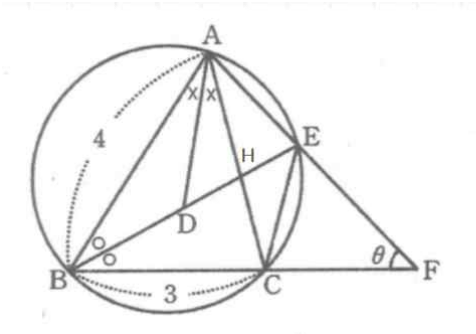
242. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=6$인 예각삼각형 ABC가 있다. 점 B에서 변 AC에 내린 수선의 발을 D, 점 C에서 변 AB에 내린 수선의 발을 E라 하고, 두 선분 BD, CE의 교점을 P라 하자. 삼각형 ABC의 외접원의 넓이와 삼각형 ADE의 외접원의 넓이의 차가 9π일 때, 삼각형 PBE의 넓이는 $\frac{p}{q}\sqrt{2}$이다. $p+q$의 값은? (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)
[5.6점]



① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

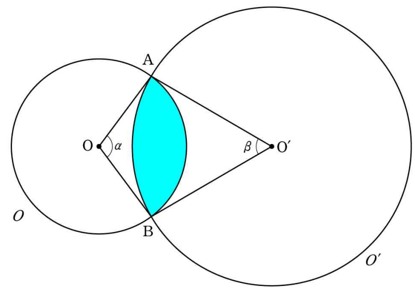
243. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{BC}}=3$, $\cos(\angle\mathrm{ABC})=\frac{17}{32}$ 인 삼각형 ABC 가 있다. $\angle\mathrm{ABC}$ 의 이등분선과 $\angle\mathrm{CAB}$ 의 이등분선 이 만나는 점을 D, 선분 BD 의 연장선과 삼각형 ABC 의 외접원이 만나는 점을 E 라 하고, 두 직선 AE ,BC의 교점을 F라 하자.

$\angle\mathrm{AFB}=\theta$일 때, $\overline{\mathrm{DE}}-\sin^2\theta=\frac{q}{p}$ 이다.$p-q$의 값은?
(단, p,q는 서로소인 자연수이다.) [5.4점]



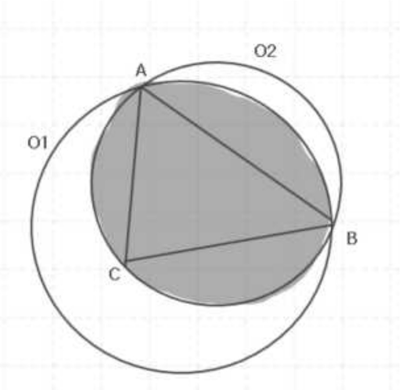
① 101 ② 111 ③ 121
④ 131 ⑤ 141

244. 그림과 같이 한 평면 위에 길이가 $2\sqrt{3}$인 선분 AB를 공통현으로 갖는 두 원 O, O'이 있다. 두 원 O, O'의 중심을 각각 O, O'이라 하고 $\angle\mathrm{AOB}=\alpha$, $\angle\mathrm{AO'B}=\beta$라 할 때, $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{3}\sin\frac{\beta}{2}$이고 사각형 AOBO'의 둘레의 길이가 $4+4\sqrt{3}$이다. 두 원 O, O'의 공통부분의 넓이가 $a\pi-b\sqrt{3}$일 때, $\frac{3}{8}ab$의 값은? (단, a, b는 유리수이고, 원 O의 중심 O는 원 O'의 외부에 있다.) [4.8점]



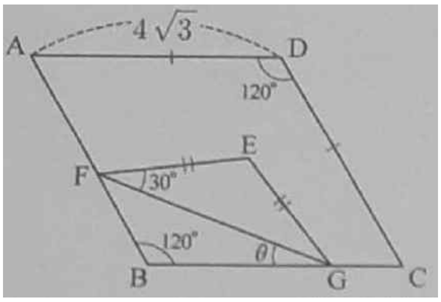
① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

245. 그림과 같이 반지름의 길이가 8인 원O_1이 있다.원O_1위에 서로 다른 두 점A, B를 $\overline{\mathrm{AB}}=8\sqrt{2}$가 되도록 잡고, 원$O_1$의 내부에 점C를 삼각형 ABC가 정삼각형이 되도록 잡는다. 정삼각형 ABC의 외접원을 O_2라 할 때, 원O_1과 O_2의 공통부분의 넓이는 $p+q\sqrt{3}+r\pi$이다. $p-q+r$의 값은? [5.1점]



① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{13}{9}$ ③ $\frac{14}{9}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{16}{9}$

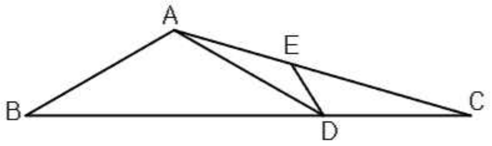
246. 그림과 같이 한 변의 길이가 $4\sqrt{3}$이고 $\angle B=120^\circ$인 마름모 $ABCD$의 내부에 $\overline{EF}=\overline{EG}=4$이고 $\angle EFG=30^\circ$인 이등변삼각형 EFG가 있다. 점 F는 선분 AB 위에, 점 G는 선분 BC 위에 있도록 삼각형 EFG를 움직일 때, $\angle BGF=\theta$라 하자. 항상 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $0^\circ<\theta<60^\circ$) [4.6점]



[보 기]
ㄱ. $\cos(\angle BFE)=\sin\theta$
ㄴ. $\overline{BF}=4\sin\theta$
ㄷ. 선분 BE의 길이는 항상 일정하며 그 값은 4이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

247. 그림과 같이 $\overline{AB}=2\sqrt{3}$, $\overline{BC}=9$, $\overline{CA}=\sqrt{39}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC 위에 점 B가 아닌 점 D를 $\overline{AD}=2\sqrt{3}$가 되도록 잡고, 선분 AC 위에 양 끝점 A, C가 아닌 점 E를 사각형 ABDE가 원에 내접하도록 잡는다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [5.4점]



[보 기]

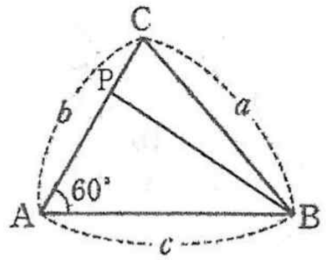
ㄱ. $\overline{BD}:\overline{CD}=2:1$

ㄴ. 삼각형 EDC의 외접원의 반지름의 길이는 3이다.

ㄷ. $\overline{AE}=\frac{6}{13}\sqrt{39}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

248. 그림과 같이 $\angle A=60^\circ$인 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 a, b, c라 할 때, 점 P가 $\overline{AC}$ 위를 움직인다고 한다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [5.2점]



[보 기]

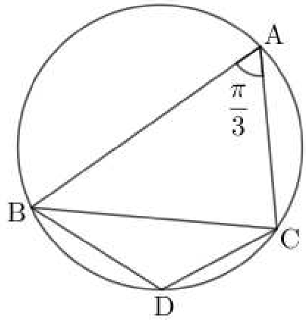
ㄱ. $a=3$일 때, $b=2\sqrt{3}\sin B$

ㄴ. $c=5$일 때, $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값은 $\frac{175}{8}$이다.

ㄷ. $\frac{c}{a+b}+\frac{b}{a+c}=1$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

249. 그림과 같이 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$인 원에 내접하고 $\angle A=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 점 D가 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위를 움직일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
[5.1점]



[보 기]

ㄱ. $\sin(\angle BDC)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

ㄴ. $\sin(\angle BCD)=\frac{1}{\sqrt{3}}$일 때, $\overline{CD}$의 길이는 $2\sqrt{6}-2$이다.

ㄷ. 삼각형 BCD의 넓이의 최댓값은 $3\sqrt{3}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3. 수열

8. 등차수열(step1)

등차수열의 일반항

250. 첫째항이 8, 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 제 9항의 값은? [4.0점]

① 26 ② 29 ③ 32
④ 35 ⑤ 38

251. 첫째항이 3, 공차가 5 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_6 의 값은?
[4.3점]

① 23 ② 28 ③ 33
④ 38 ⑤ 43

252. 첫째항이 2이고 공차가 3인 등차수열의 제 12항의 값은?[4.2점]

① 29 ② 31 ③ 33
④ 35 ⑤ 37

253. 공차가 4, 제9항이 -35인 등차수열에서 처음으로 양수가 되는 항은 제 몇 항인가? [4.1점]

① 14 ② 15 ③ 16
④ 17 ⑤ 18

254. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2=6$, $a_5=18$일 때, a_8의 값은? [4.6점]

① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

255. 공차가 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=2$일 때, a_8의 값은? [4.3점]

① 24 ② 26 ③ 28
④ 30 ⑤ 32

256. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3 = 10,\ a_5 = 16$$

일 때, a_4의 값은? [3.9점]

① 15 ② 14 ③ 13
④ 12 ⑤ 11

257. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = 6, a_7 = 18$ 일 때, a_8 값은? [3.6점]

① 19 ② 20 ③ 21
④ 22 ⑤ 23

258. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 = 8,\ a_{11} = 26$일 때, 수열 $\{a_n\}$의 공차는? [3.5점]

① -2 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 5

259. 공차가 3, 제 4항이 11인 등차수열 $\{a_n\}$에서 a_{11}의 값은?
[3.5점]

① 30 ② 31 ③ 32
④ 33 ⑤ 34

260. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3 = 23$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} + 2 = a_n$일 때, a_2의 값은?
[4.3점]

① 24 ② 25 ③ 26
④ 27 ⑤ 28

261. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2 = -2, a_5 = 10$일 때, a_8의 값은? [4.1점]

① 22 ② 23 ③ 24
④ 25 ⑤ 26

262. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=4$일 때, a_6의 값은? [3.6점]

① 15 ② 17 ③ 19
④ 21 ⑤ 23

263. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이 $a_n=3n+7$ 일 때 공차 d의 값은? [3.6점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

항 사이의 관계가 주어진 등차수열

264. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=4,\ a_4-a_2=6$ 일 때, a_7의 값은? [4.2점]

① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

265. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2+a_4=12,\ a_7+a_{11}=36$일 때, a_{10}의 값은? [3.9점]

① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

266. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=a_3+6,\ 2a_4-3a_6=-8$일 때, $a_k<0$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은?[4.0점]

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

267. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+a_2=8,\ a_3+a_4+a_5=42$일 때, $a_m=70$이다. 자연수 m의 값은? [3.5점]

① 16 ② 17 ③ 18
④ 19 ⑤ 20

등차수열을 이루는 수

268. 네 수 2, a, 8, b가 이 순서대로 등차수열을 이루도록 하는 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?[3.7점]

① 14 ② 15 ③ 16
④ 17 ⑤ 18

269. 네 수 $3,a,b,18$이 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $a+b$의 값은? [4.0점]

① 18 ② 21 ③ 24
④ 25 ⑤ 28

등차수열의 합

270. 제3항이 -12, 제7항이 0인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, S_{15}의 값은? [4.3점]

① 33 ② 36 ③ 39
④ 42 ⑤ 45

271. 첫째항이 28, 공차가 -3인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, S_n의 최댓값은? [4.5점]

① 137 ② 139 ③ 141
④ 143 ⑤ 145

272. 두 자리 자연수 중에서 모든 4의 배수의 합은? [3.8점]

① 1134 ② 1188 ③ 1242
④ 1296 ⑤ 1350

273. 두 자리 자연수 중에서 3 또는 5로 나누어 떨어지는 수의 총합은? [4.8점]

① 2285 ② 2290 ③ 2295
④ 2300 ⑤ 2305

부분합과 등차수열

274. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_2 - S_1 = 1$, $S_{10} - S_8 = 7$일 때, $a_k = 10$을 만족시키는 자연수 k의 값은? [3.9점]

① 28 ② 29 ③ 30
④ 31 ⑤ 32

275. 첫째항부터 제6항까지의 합이 36, 첫째항부터 제12항까지의 합이 80인 등차수열의 첫째항부터 제18항까지의 합은? [4.0점]

① 124 ② 126 ③ 128
④ 130 ⑤ 132

등차수열과 일반항

276. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 + 4n + 3$일 때, $a_9 - a_1$의 값은? [4.5점]

① 13 ② 14 ③ 15
④ 16 ⑤ 17

8. 등차수열(step2)

등차수열의 일반항

277. 등차수열 $\{a_n\}$에서

$a_6 = 17,\ a_{16} = 11$

일 때, 수열 $\{a_n\}$에서 자연수인 항의 개수는? [4.5점]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

278. 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $d \neq 0$)[4.8점]

[보기]
ㄱ. 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 공차가 $2d$인 등차수열이다.
ㄴ. 수열 $\{a_n + 2\}$는 공차가 $d+2$인 등차수열이다.
ㄷ. 수열 $\{a_{2n-1} - a_n\}$은 첫째항이 0이고, 공차가 d인 등차수열이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

279. 첫째항이 -5이고 공차가 $\frac{1}{4}$인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 부등식 $a_n^{\ 2} + |a_n| - 30 \leq 0$을 만족시키는 모든 자연수 n의 개수를 구하는 과정을 논술하시오. [7점]

280. 첫째항이 -35, 공차가 3인 등차수열에서, 처음으로 양수가 되는 항은 몇 번째 항인가? [4점]

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

281.

항 사이의 관계가 주어진 등차수열

공차가 2 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $|a_2 - 2| = |a_5 - 2|$ 일 때, a_3 의 값은? [4.2점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

두 수 사이에 수를 넣어 만든 등차수열

282. 두 수 1과 125 사이에 n개의 수를 넣어 만든 수열 $1,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ 125$가 등차수열을 이루고 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$은 모든 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합은? [3.7점]

① 157 ② 188 ③ 193
④ 218 ⑤ 223

283. 다음 수열 $-10, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{10}, 111$이 이 순서대로 등차수열일 때, a_5의 값은? [4.5점]

① 34 ② 39 ③ 45
④ 50 ⑤ 56

284. 두 수 2와 4 사이에 n개의 수 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n$을 넣어 만든 $(n+2)$개의 수 $2,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ 4$가 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 집합 $A_n=\{2,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ 4\}$에 대하여 $A_{2n+3}-A_{n+1}$의 모든 원소의 합을 $f(n)$이라 할 때, $f(9)$의 값은? (단, n은 자연수이다.) [4.7점]

① 33 ② 34 ③ 35
④ 36 ⑤ 37

등차중항

285. 두 함수 $f(x)=-x^2, g(x)=(x-3\sqrt{2})^2+k\ \ (k>0)$에 대하여 직선 $y=-k$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 두 점을 A, B라 하고, 함수 $y=g(x)$의 꼭짓점을 C라 하자. 세 점 $A,\ B,\ C$의 x좌표가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 상수 k의 값은? (단, 점 A는 제 3사분면 위에 존재한다.) [4.7점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

286. 두 수 1과 9사이에 세 수 a, b, c를 넣어 만든 수열 $1, a, b, c, 9$가 등차수열일 때, $a+b+c$의 값은? [4점]

① 15 ② 17 ③ 19
④ 21 ⑤ 23

등차수열을 이루는 수

287. 직각삼각형의 세 변의 길이가 등차수열을 이루고 빗변의 길이가 20일 때, 이 직각삼각형의 넓이는? [4.7점]

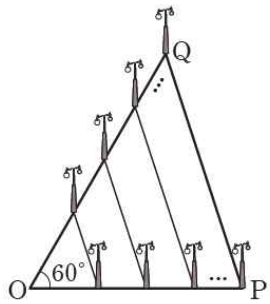
① 93 ② 94 ③ 95
④ 96 ⑤ 97

288. 두 곡선 $y=x^3+a^2x+2a$, $y=6x^2+8$이 서로 다른 세 점에서 만나고 세 교점의 x좌표가 등차수열을 이룰 때, 공차 d의 값은? (단, a는 상수이고 d는 양수이다.) [4점]

① $\frac{\sqrt{3}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ ③ $\frac{3\sqrt{3}}{5}$
④ $\frac{4\sqrt{3}}{5}$ ⑤ $\sqrt{3}$

등차수열을 활용

289. 그림과 같이 두 도로가 60°의 각을 이루며 점 O에서 만나고 있다. 점 O에서 점 P방향으로 $20m$ 떨어진 곳에 처음 가로등 하나를 설치하고 계속해서 같은 방향으로 $10m$마다 가로등을 설치한다. 또한 점 O에서 점 Q 방향으로 $40m$ 떨어진 곳에 처음 가로등 하나를 설치하고 계속해서 같은 방향을 $30m$마다 가로등을 설치한다. 점 P와 점 Q에도 가로등이 설치되었고 점 O에서 점 P까지 설치된 가로등의 개수가 점 O에서 점 Q까지 설치 된 가로등의 개수의 4배이다. 점 P와 점 Q 사이의 거리가 $190m$일 때, 설치된 가로등의 총 개수는? [4.2점]



① 20 ② 25 ③ 30
④ 35 ⑤ 40

290. $\angle CAB=\theta_1$, $\angle ABC=\theta_2$, $\angle BCA=\theta_3$ $(\theta_3<\theta_2<\theta_1)$인 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다. 이때 선분 BC의 길이와 삼각형 ABC의 넓이를 구하고, 그 과정을 논술하시오. [7.0점]

> (가) $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=\sqrt{21}$
> (나) 세 내각 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$은 순서대로 등차수열을 이룬다.

등차수열의 합

291. n개의 항으로 이루어진 등차수열 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 처음 3개 항의 합은 -9이다.
(나) 마지막 3개 항의 합은 117이다.
(다) $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=180$

이때 n의 값을 구하고 그 과정을 작성하시오.[6.0점]

292. 첫째항이 25, 공차가 -4인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하자. S_n의 최댓값은? [4.3점]

① 79 ② 83 ③ 87
④ 91 ⑤ 95

293. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=an^2+bn$이다. 수열 $\{a_n\}$은 공차가 $d(d\neq 0)$인 등차수열이고 $S_2=14$일 때, S_{20}의 값과 항상 같은 것은? (단, $a,\ b$는 상수이다.) [3.9점]

① $160d+60$ ② $160d+100$ ③ $180d+100$
④ $180d+120$ ⑤ $180d+140$

294. 공차 d가 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여
$f(n)=a_2+a_6+a_{10}+\cdots+a_{4n-2}$이고
$g(n)=a_4+a_8+a_{12}+\cdots+a_{4n}$이다. 자연수 p에 대하여
$f(p)=360,\ \ g(p)=380$이 성립할 때, $p+d$의 값은?
(단, $p\geq 2,\ d\geq 2.\ p>d$이다.) [5.4점]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

두 수 사이에 수를 넣어 만든 등차수열의 합

295. 2와 16 사이에 n개의 수를 넣어 공차가 d인 등차수열 $2,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ 16$을 만들었다. 모든 항의 합을 S_n이라 할 때, 다음을 구하고 그 과정을 논술하시오. (단, a_n은 자연수) [총 10점]

(1) 공차 d의 값들의 합을 구하시오. [5점]

(2) S_n의 최솟값과 최댓값을 구하시오. [5점]

296. 3 과 21 사이에 n 개의 수 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 을 넣어 등차수열을 만들 때, 이 수열의 합이 120 이다. 이때, 이 수열의 공차 d 와 n 의 값을 구하고, 그 풀이 과정을 자세히 서술하시오.[4점]

부분합과 등차수열

297. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_5 = 20$, $S_{11} = 209$일 때, a_5의 값은? [4.0점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

298. 첫째항부터 제3항까지의 합이 51, 제4항부터 제6항까지의 합이 24인 등차수열에서 처음으로 음수가 되는 항은 제 몇 항인가? [4.5점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

299. 첫째항이 34인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_6 = S_{12}$이다. 다음 물음에 답하시오,[총6.0 점]

(1) 일반항 a_n을 구하고 그 과정을 서술하시오. [3.0점]

(2) (1)의 결과를 이용하여 S_n의 최댓값을 구하고, 그 과정을 서술하시오. [3.0점]

등차수열의 합의 최대최소

300. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) S_n은 $n=6$, $n=7$에서 최솟값을 갖는다.
(나) $\lvert a_5 \rvert + \lvert a_7 \rvert = 6$

S_{15}의 값은? [4.2점]

① 180 ② 150 ③ 140 ④ 90 ⑤ 45

301. 첫째항이 -12 이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 $|S_n+22|-S_n=22$를 만족시키는 자연수 d의 최솟값은? [5.2점]

① 2　② 3　③ 4
④ 5　⑤ 6

나머지가 같은 자연수의 합

302. 50이하의 자연수 중에서 6으로 나누었을 때 나머지가 1인 수의 합을 구하시오. [4.4점]

등차수열의 합의 활용

303. 첫째항이 18이고 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하고, 수열 $\{|a_n|\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 T_n이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은? [4.8점]

> (가) $|a_k|=|a_{k+8}|$
> (나) 모든 자연수 n에 대하여 $S_n+T_n\le 200$이다.

① 24　② 21　③ 18
④ 15　⑤ 9

등차수열의 합과 일반항

304. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면 모든 자연수 n에 대하여 $S_{n+1}-S_n=-4n+30$을 만족시킬 때, S_n의 최댓값은? [4.9점]

① 120　② 124　③ 128
④ 132　⑤ 136

305. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여

$$a_1=1,\ \sqrt{S_{n-1}}+\sqrt{S_n}=\frac{1}{2}a_n\ (n\geq 2)$$

가 성립할 때, a_{101}의 값은? [5.2점]

① 796 ② 800 ③ 804
④ 808 ⑤ 812

306. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n=(n+1)^2$일 때, a_1+a_{20}의 값은? [4.1점]

① 43 ② 44 ③ 45
④ 46 ⑤ 47

307. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_n=2n^2+n-1$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4.5점]

[보 기]

ㄱ. $a_n=4n-1\,(n\geq 2)$

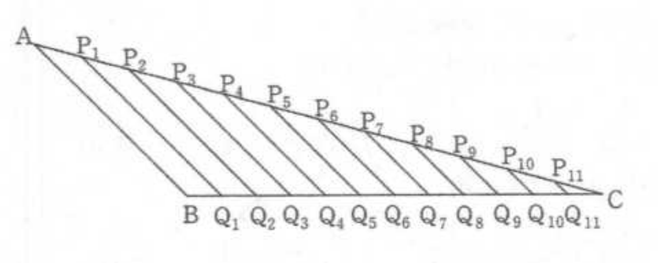
ㄴ. $a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=155$

ㄷ. 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 공차가 8인 등차수열이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. (step3)

308. 그림과 같이 $\angle\mathrm{ABC}=135^\circ$, $\angle\mathrm{ACB}=15^\circ$, $\overline{\mathrm{AB}}=12$인 삼각형 ABC에서 변 AC를 12등분한 점을 점 A에 가까운 점부터
$\mathrm{P_1, P_2, P_3}, \cdots, \mathrm{P_{11}}$이라 하고 변 BC를 12등분한 점을 점 B에 가까운 점부터 $\mathrm{Q_1, Q_2, Q_3}, \cdots, \mathrm{Q_{11}}$이라 할 때,
$\overline{\mathrm{P_1Q_1}}, \overline{\mathrm{P_2Q_2}}, \overline{\mathrm{P_3Q_3}}, \cdots, \overline{\mathrm{P_{11}Q_{11}}}$
은 공차가 k인 등차수열을 이룬다.
이 때 $2k+\overline{\mathrm{P_1Q_1}}+\overline{\mathrm{P_2Q_2}}+\overline{\mathrm{P_3Q_3}}+\cdots+\overline{\mathrm{P_{11}Q_{11}}}$의 값은? [5.3점]



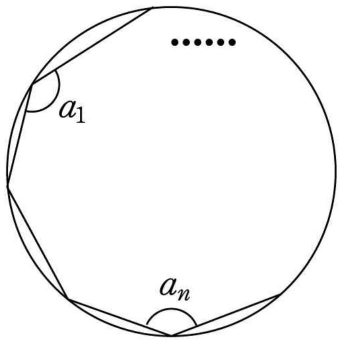
① $32(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ ② $33(\sqrt{6}-\sqrt{2})$
③ $34(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ ④ $35(\sqrt{6}-\sqrt{2})$
⑤ $36(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

309. 첫재항이 정수이고 모든 항이 유리수인 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 모든 자연수 n에 대하여 $b_n=a_n+a_{n+2}$ 라 하고, 좌표평면 위의 두 점을 $P_n(n, a_n)$, $Q_n(n, b_n)$이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열
$\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 b_{10} 의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때
$M+m=20\left(1+\frac{q}{p}\right)$이다. $p+q$의 값은?
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4.3점]

(가) $a_3-a_1>0$ (나) 10이 아닌 모든 자연수 k에 대하여 $\angle P_{12}Q_{10}Q_k=\frac{\pi}{2}$이다.

① 4 ② 7 ③ 10
④ 13 ⑤ 16

310. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 n각형이 있다. 이 n각형에서 n개의 내각의 크기를 작은 것부터 차례로 나열하여 수열 $\{a_k\}$를 만들 때, 수열 $\{a_k\}$가 $a_1 = 135°$ 이고, 공차가 $0°$ 가 아닌 양수인 등차수열을 이루도록 하는 n의 최솟값과 최댓값의 합은?(단, n은 $3 \le n \le 20$인 자연수이다.)[5.2점]



① 20　② 21　③ 22　④ 23　⑤ 24

311. 공차가 자연수인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 두 집합 A, B는

$A = \{a_k | a_k$는 수열 $\{a_n\}$의 항, $4 \le a_k \le 32\}$,

$B = \{b_k | b_k$는 수열 $\{b_n\}$의 항, k는 $1 \le k \le 10$인 자연수$\}$

이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_2 = b_2 = 8$
(나) $n(A-B) = n(A \cap B) = n(B-A)$
(다) 집합 $C = \{2^k | k$는 자연수$\}$에 대하여 $n(A \cap B \cap C) = 2$

$a_7 + b_7$의 값은? [4.8점]

① 78　② 72　③ 67　④ 61　⑤ 56

312. 부등식

$3 < a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{20} \le 90$

을 만족시키는 20개의 3의 배수 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{20}에 대하여 집합 A가 $A = \{x \mid x = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20}\}$일 때, 집합 A의 원소의 개수는?
[5.0점]

① 181 ② 182 ③ 183
④ 184 ⑤ 185

313. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, 모든 a_1 의 값을 구하고, 그 과정을 서술하시오. [9.0점]

(가) $|a_3| + a_4 = a_7$
(나) $|S_9| = 135$

314. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 이 수열이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4.7점]

(가) 수열$\{a_n\}$은 첫째항이 음수인 등차수열이다.
(나) $|S_9| = |S_{18}| = |S_{11}| + 30$이다.

① 6 ② 9 ③ 12
④ 15 ⑤ 18

315. 첫째항이 52, 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제n 항까지의 합을 S_n 이라 하면 $|S_{17} + S_{19}| < |S_{17}| + |S_{19}|$ 가 성립한다. 정수 d 의 값은? [4.8점]

① -9 ② -8 ③ -7
④ -6 ⑤ -5

316. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 수열 $\{a_n\}$과 S_n이 다음 조건을 만족시킬 때, a_3의 값은? [4.7점]

(가) $S_k < S_{k+1}$을 만족시키는 가장 작은 자연수 k에 대하여 $S_k = -154$이다.
(나) $a_9 = -2a_7$이고 $a_7 a_8 a_9 < 0$이다.

① -34 ② -31 ③ -28
④ -25 ⑤ -22

317. 다음 조건을 만족시키는 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 n항까지의 합은 S_n은 $n=k$일 때, 최댓값 M을 갖는다. $k+M$의 값은? (단, k는 자연수이다.) [5.1점]

(가) $a_1 = 30$
(나) $S_5 = S_{11}$

① 120 ② 124 ③ 128
④ 132 ⑤ 136

318. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 자연수 k에 대하여 $S_k = S_{k+3} = k(k+3)$를 만족시킨다. $S_{k+2} = 210$일 때,$a_{10}+k$의 값을 구하는 과정을 논술하시오. [7점]

319. 첫째항이 3이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$과 S_n은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $k>1$인 어떤 자연수 k에 대하여 $a_k = S_k$이다.
(나) $a_n < S_n$인 자연수 n의 개수는 9이다.

이때 $\sum_{n=1}^{10} |a_n|$의 값은? [4.7점]

① $\frac{50}{3}$ ② $\frac{55}{3}$ ③ 20
④ $\frac{65}{3}$ ⑤ $\frac{70}{3}$

320. 위례고/2023년/L1/A 첫째항이 -27, 공차가 6인차수열의째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여 집합 $\{S_k|k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$의 원소의 개수를 b_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} b_n$의 값은? [5.3점]

① 39 ② 40 ③ 41
④ 42 ⑤ 43

321. 첫째항이 200이고, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 모든 자연수 n에 대하여 $S_{10} \geq S_n$을 만족시킬 때, 모든 정수 d의 값의 합을 구하고, 그 과정을 서술하시오. [부분점수 있음. 8.0점]

322. 첫째항이 -48이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 d의 값의 합은? [4.8점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \neq 0$이다.
(나) $\sum_{k=1}^{m} a_k = 0$인 m이 존재한다.

① 120 ② 124 ③ 128
④ 132 ⑤ 136

323. 첫째항이 $2k-1$이이고 공차가 -2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n과 공차가 4이고 첫째항이 알려지지 않은 등차수열 $\{b_n\}$이 다음을 만족시킨다. (단, k는 3이상의 자연수) [9점]

(가) 방정식 $S_n = b_n$이 오직 하나의 자연수 해를 가진다.
(나) 조건 (가)에 제시된 방정식의 해의 최솟값을 $f(k)$,
두 번째로 작은 해의 값을 $g(k)$라 하자.
(다) $T(k)$는 $\overline{AB}=4^{f(k)}$, $\overline{AC}=2^{-g(k)}$,
$\angle A = \{f(k)+g(k)\}^\circ$ 인 삼각형 ABC의 넓이이다.

324. $x \geq 0$에서 정의된 함수 $f(x)=|p\cos 2x+q|$ $(p>0)$에 대하여 $f(0)<f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 이다. 직선 $y=t$가 곡선 $y=f(x)$와 만나도록 하는 실수 t에 대하여 직선 $y=t$ 가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 모든 점의 x의 좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열한 수열이 등차수열이 되도록 하는 t의 값은 $\alpha, \beta, (\alpha<\beta)$뿐이다. $t=\alpha,\ t=\beta$일 때의 이 등차수열을 각각 $\{a_n\}, \{b_n\}$이라 하자. $\alpha+\beta=8$이고 $\frac{f(a_3)}{b_2}=\frac{2}{\pi}$일 때, $5p+2q$의 값은? (단, p, q 는 상수이다.) [4.3점]

① 1 ② 4 ③ 7 ④ 11 ⑤ 15

325. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

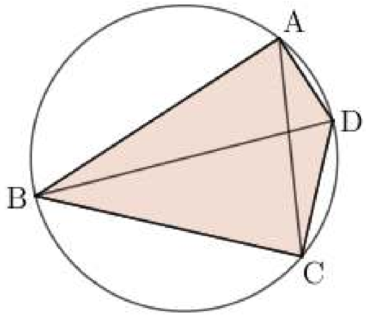
(가) $-\pi \leq x \leq \pi$일 때, $f(x)=3\cos\frac{x}{2}$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2\pi)$

자연수 n에 대하여 세 점 $(0,\ 0)$, $(n\pi,\ 3)$, $(-n\pi,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 둘레와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $a_2=7$이다. 이 때, $a_{100}+a_{99}$의 값은?
[5.1점]

① 596 ② 598 ③ 600 ④ 602 ⑤ 604

326. 그림과 같이 반지름의 길이가 $\frac{5}{2}$인 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여 $\overline{\mathrm{BD}}=5$이고 $\overline{\mathrm{BD}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{CD}}$의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 다음 물음에 답하시오. (단, $\overline{\mathrm{BC}}>\overline{\mathrm{CD}}$)
[10.0점]



[1-1] $\overline{\mathrm{CD}}$의 길이를 구하는 풀이과정과 답을 쓰시오.
[5.0점]

[1-2] $\overline{\mathrm{AD}}=2$일 때, 대각선 AC의 길이를 구하는 풀이과정과 답을 쓰시오.
[5.0점]

327. 첫째항이 1, 공차가 5인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 부등식 $2|x-a_n|\geq 3|x-a_{n+1}|\ (n\geq 1)$을 만족시키는 x의 최솟값을 b_n이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?
[5.4점]

[보기]

ㄱ. $3a_1+2a_2=5b_1$
ㄴ. 수열 $\{b_n\}$은 공차가 5인 등차수열이다.
ㄷ. $\sum_{k=1}^{10} b_k=285$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. 등비수열(step1)

등비수열의 일반항

328. $a_2=6$, $a_5=-48$인 등비수열 $\{a_n\}$의 공비는? [3.8점]

① -6 ② -5 ③ -4
④ -3 ⑤ -2

329. 첫째항이 1이고 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_4=8$일 때, a_6의 값은? [3.6점]

① 16 ② 32 ③ 64
④ 128 ⑤ 256

330. 첫째항이 $\frac{2}{3}$ 이고, 공비가 3 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_4 의 값은? [4점]

① 9 ② 18 ③ 27
④ 36 ⑤ 45

331. 공비가 실수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2=3$, $a_5=24$일 때, a_4+a_6의 값은? [4.0점]

① 56 ② 58 ③ 60
④ 62 ⑤ 64

항 사이의 관계가 주어진 등비수열

332. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=5$, $\frac{a_4}{a_3}=3$일 때, a_3의 값은? [4.3점]

① 15 ② 30 ③ 45
④ 60 ⑤ 75

333. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2=3$, $a_3+a_4=36$ 일 때, 공비는? [4.3점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ 4

등비중항

334. 세 수 a, 3, b가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수 a, 2, b가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, a^3+b^3의 값은? [4.1점]

① 114 ② 124 ③ 134
④ 144 ⑤ 154

335. 두 수 a와 b의 등차중항이 4이고, 등비중항이 2일 때, a^2+b^2의 값은? [4.0점]

① 54 ② 56 ③ 58
④ 60 ⑤ 62

336. 세 수 $a, 6, b$가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수 a, $\sqrt{20}, b$가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때 a^2+b^2의 값은? [4.3점]

① 96 ② 98 ③ 100
④ 102 ⑤ 104

337. 두 양수 a, b에 대하여

세 수 9, a, 15은 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수 a, b, 3은 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $a+b$값은?[4.2점]

① 20 ② 18 ③ 16
④ 14 ⑤ 12

등비수열을 이루는 수

338. 두 수 8과 72 사이에 세 개의 양수 a, b, c를 넣어 전체가 등비수열을 이루도록 할 때, b의 값은? [4.3점]

① 24 ② 32 ③ 40
④ 48 ⑤ 56

등비수열의 합

339. 첫째항이 16이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라고 하자. S_5의 값은? [4.4점]

① 27　② 28　③ 29　④ 30　⑤ 31

340. 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 5 항까지의 합은? [4.3점]

① $\frac{33}{32}$　② $\frac{17}{16}$　③ $\frac{31}{16}$　④ $\frac{63}{32}$　⑤ 2

341. 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. a_3+S_3의 값은?[3.8점]

① 30　② 31　③ 32　④ 33　⑤ 34

342. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에서 $S_k=20, S_{2k}=80$일 때, S_{3k}의 값은? [5.0점]

① 140　② 180　③ 220　④ 260　⑤ 300

343. 모든 항이 양수이고 $a_1=2$, $a_2+a_3=24$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{5a_n-a_{n+1}\}$의 첫째항부터 제8항까지의 합은? [4.5점]

① $2(2^8-1)$ ② $4(2^8-1)$ ③ $2(3^8-1)$
④ $3(3^8-1)$ ⑤ $4(3^8-1)$

344. 부분합과 등비수열

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_1+a_3=4,\ S_6-S_2=144$$

일 때, a_3+a_5의 값은? [4.1점]

① 72 ② 64 ③ 36
④ 16 ⑤ 12

345. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여 $S_{10}=8$, $S_{30}=248$일 때, S_{20}의 값은? (단, a_n은 실수) [4점]

① 32 ② 36 ③ 40
④ 44 ⑤ 48

9. 등비수열(step2)

항 사이의 관계가 주어진 등비수열

346. 공비가 음수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_2 \times a_4 \times a_6 = 1$, $\frac{a_4}{a_2} = 4$일 때, $|a_7|$의 값은? [3.9점]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

347. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 a_3 = 9$일 때, a_2의 값은? [4.2 점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1
④ 3 ⑤ 9

348. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = \frac{1}{4},\ a_2 + a_3 = 3$$

일 때, 첫째항부터 제4항까지의 합은? (단, $a_4 > 0$) [4.2점]

① $\frac{5}{2}$ ② 5 ③ 10
④ 20 ⑤ 40

349. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\frac{a_3 + a_5 + a_7}{a_1 + a_3 + a_5} = 12$ 일 때, $\frac{a_{100} - a_{98}}{a_{96} - a_{94}}$ 의 값을 구하고, 그 풀이 과정을 자세히 서술하시오.[5점]

350. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 = 160$, $\frac{a_2 - a_6}{a_4} = \frac{3}{2}$ 이다. a_n의 값이 자연수가 되도록 하는 n의 최댓값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오. [5.0점]

351. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 이고, $\frac{1}{\sqrt{2}} a_{n+1} = a_n$ 일 때, a_5의 값은? (단, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$) [4.3점]

① $2\sqrt{2}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{2}$
④ 6 ⑤ 8

352. 첫째항이 12이고 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$에서 a_1, a_2, a_3은 정수이고, $n>4$이면 a_n은 정수가 아니다. $a_1+a_2+a_3=21$일 때, $a_5=\frac{q}{p}$ 이다. 이때, $p+q$의 값은? (단, $r<0$이고, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4.7점]

① 245 ② 246 ③ 247
④ 248 ⑤ 249

353. $a_1+a_2+a_3=7$, $a_2+a_3+a_4=14$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_5 의 값은? [4.6점]

① 8 ② 16 ③ 24
④ 32 ⑤ 40

두 수 사이에 수를 넣어 만든 등비수열

354. 두 수 $\frac{1}{2}$과 32 사이에 n개의 실수를 넣어 만든 공비가 양수 r인 등비수열 $\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, 32$의 모든 항의 곱이 2^{12}일 때, $n+r^5$의 값은? [4.7점]

① 68 ② 64 ③ 60
④ 56 ⑤ 52

등비중항

355. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 세 항 a_3, a_5, a_{13}이 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, a_{10}의 값은? [4.5점]

① 11 ② 14 ③ 17
④ 20 ⑤ 23

356. 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 0이 아닐 때, 세 수 a_2, a_4, a_7가 순서대로 등비수열을 이룬다. $\frac{a_{28}}{a_2}$의 값은? [3.7점]

① $\frac{15}{2}$ ② $\frac{19}{3}$ ③ 8
④ $\frac{17}{2}$ ⑤ 9

357. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$과 자연수 p,q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $2a_p = a_6 + a_q$
> (나) 세 수 $7p, 14\sqrt{5}, q$가 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

$\frac{a_{30}-a_q}{a_{18}-a_p}$의 값은?[5.1점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

358. 첫째항과 공차가 모두 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 세 항 a_1, a_3, a_{13}이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $\frac{a_8}{a_2}$의 값은? [3.9점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

359. 공차가 9인 등차수열 $\{a_n\}$에서 a_2, a_{10}의 등차중항이 a_k이고 a_1과 a_k의 등비중항이 a_2일 때, a_k의 값은? [4.7점]

① 45 ② 48 ③ 51
④ 54 ⑤ 57

360. 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$가 다음 세 조건을 만족할 때, $f(2)$의 값은? (단, a, b, c는 상수이고, $a>0$이다.) [4.7점]

> (가) 세 수 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$은 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
> (나) 세 수 a, c, b는 이 순서대로 공비가 1이 아닌 등비수열을 이룬다.
> (다) 함수 $f(x)$의 최솟값은 -12이다.

① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

361. 이차다항식 ax^2+bx+c 를 $x, x-1, x+2$ 로 나눈 나머지를 각각 p, q, r 라 하면 세 수 p, q, r 가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 세 수 p, q, r 는 이 순서대로 공차가 3 인 등차수열을 이룬다.
> (나) 세 수 p, r, q 가 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

세 상수 a, b, c 를 각각 구하고 그 과정을 서술하시오. [8.0점]

362. 곡선 $y=x^3-2x^2+x$와 직선 $y=k$가 만나는 서로 다른 세 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열한 수가 등비수열을 이룰 때, 상수 k의 값은? [4.3점]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{3}{16}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{5}{16}$

등비수열의 활용

363. 자연수 m에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합을 $A(m)$이라 하자.

> 5×3^m은 첫째항이 5이고 공비가 3이상의 자연수인 등비수열의 제 k항이다.

예를 들어, 5×3^2은 첫째항이 5이고 공비가 3인 등비수열의 제 3항, 첫째항이 5이고 공비가 9인 등비수열의 제 2항이 되므로 $A(2)=3+2=5$이다. $A(108)$의 값은?[4.6점]

① 288 ② 289 ③ 290
④ 291 ⑤ 292

등비수열의 합

364. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_1=1$, $\dfrac{S_6}{S_3}=126$일 때, S_3의 값은? [4.8점]

① 26 ② 31 ③ 37
④ 43 ⑤ 49

365. 첫째항이 a_1 $(a_1>0)$ 이고, 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $2S_2=S_3+S_4$, $r^2=144a_1^2$ 일 때, a_5 의 값은? [4.5점]

① 2 ② $\dfrac{7}{3}$ ③ $\dfrac{8}{3}$
④ 3 ⑤ $\dfrac{10}{3}$

366. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_3=3$, $S_6=12$일 때, $2S_{30}$의 값은? [4.7점]

① $3^{14}-3$ ② $3^{13}-3$ ③ $3^{12}-3$
④ $3^{11}-3$ ⑤ $3^{10}-3$

367. 모든 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $S_3=5$, $S_6=30$ 일 때, S_9 의 값은? [4.4점]

① 140 ② 145 ③ 150
④ 155 ⑤ 160

368. 모든 항이 음수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 $|a_n|>|a_{n+1}|$이고 $\dfrac{S_5-S_1}{S_4-S_2}=\dfrac{5}{2}$일 때, $\dfrac{a_4}{a_5+a_1}$의 값은? [5.1점]

① $\dfrac{2}{33}$ ② $\dfrac{2}{17}$ ③ $\dfrac{2}{9}$
④ $\dfrac{2}{5}$ ⑤ $\dfrac{2}{3}$

369. 첫째항이 1인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면 $S_{10}=244S_5$이다. 이때 S_3의 값은? [4.3점]

① 17 ② 15 ③ 13
④ 11 ⑤ 9

370. 공차가 7인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 세 항 a_2, a_5, a_k는 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 항 a_2, a_4, a_k는 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, 다음 물음에 답하시오. [총 8점]

1-1, 등차수열의 일반항 a_n을 구하고, 그 과정을 서술하시오. [6점]

1-2, 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, S_{20}의 값을 구하고, 그 과정을 서술하시오. [2점]

371. 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_k = 12$, $S_{k+5} = 765$을 만족시키는 자연수 k에 대하여 S_k의 값은?
[4.8점]

① 19 ② 20 ③ 21
④ 22 ⑤ 23

372. 첫째항이 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_{10} = 7S_5$일 때, $S_{20} = kS_5$이다. 상수 k의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오. [7.0점]

373. 첫째항이 1인 두 등비수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$의 공비가 각각 r, r^2 $(r > 0, r \neq 1)$이고, 두 등비수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 각각 S_n, T_n이라 하자. 자연수 k에 대하여 $2S_{20} = kT_{10}$, $\dfrac{S_6}{T_2} = \dfrac{21}{40}k$일 때, $r+k$의 값은?[5.0점]

① $\dfrac{9}{2}$ ② 4 ③ $\dfrac{7}{2}$
④ 3 ⑤ $\dfrac{5}{2}$

부분합과 등비수열

374. 등비수열 $\{a_n\}$에서
$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} = 5$
$a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{20} = 30$일 때,
$a_{21} + a_{22} + a_{23} + \cdots + a_{30}$의 값은? [4.7점]

① 80 ② 110 ③ 145
④ 180 ⑤ 215

375. 첫째항과 제 2항의 합이 9, 첫째항부터 제 4항까지의 합이 36인 등비수열의 첫째항부터 제 8항까지의 합은? [4.1점]

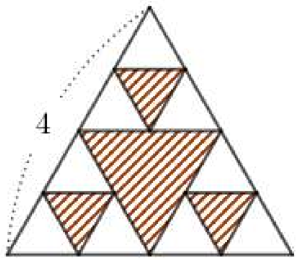
① 72 ② 144 ③ 216
④ 288 ⑤ 360

376. 첫째항부터 제3항까지의 합이 8, 첫째항부터 제 6항까지의 합이 96인 등비수열의 첫째항부터 제9항까지의 합은? [4.4점]

① 1000 ② 1032 ③ 1064
④ 1096 ⑤ 1128

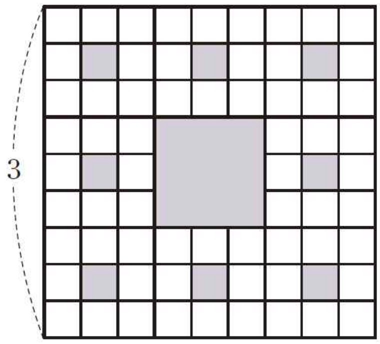
등비수열의 합의 활용

377. 한 변의 길이가 4인 정삼각형 모양의 종이가 있다. 그림과 같이 첫 번째 시행에서 정삼각형 각 변의 중점을 이어 만든 중앙의 정삼각형을 색칠하고, 두 번째 시행에서 첫 번째 시행 후 남은 3개의 정삼각형에 대해 각 변의 중점을 이어 만든 중앙의 정삼각형을 색칠한다. 이와 같은 시행을 5회 반복했을 때, 색칠한 부분의 넓이의 합을 $p(1-q^5)$이라 하자. 이 때, $p\times q$는? (단, p, q는 실수이고, $q<1$이다.) [4.9점]



① $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{3}$

378. 한 변의 길이가 3인 정사각형 모양의 종이가 있다. 다음 그림과 같이 첫 번째 시행에서 정사각형을 9등분 한 후 중앙의 정사각형을 색칠하고, 두 번째 시행에서 첫 번째 시행 후 남은 8개의 정사각형을 각각 9등분 한 후 중앙의 정사각형을 색칠한다. 이와 같은 시행을 5회 반복했을 때, 색칠한 부분을 제외한 넓이의 합이 $p\times\left(\frac{p}{q}\right)^4$이다. $2p+q$의 값은? (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4.5점]



① 21 ② 22 ③ 23
④ 24 ⑤ 25

379. 다항식 $x^{11}+x^{10}+x^9+\cdots+x^2+x+2$를 $x-1$로 나눈 몫을 $f(x)$라고 할 때, $f(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지는? [5.3점]

① $\frac{3^{10}-21}{4}$ ② $\frac{3^{12}-16}{4}$ ③ $\frac{3^{11}-11}{4}$
④ $\frac{3^{12}-25}{4}$ ⑤ $\frac{3^{12}-20}{4}$

등비수열의 합과 일반항

380. 첫째항이 2인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 공차가 3인 등차수열이다.
> (나) 수열 $\{S_{2n-1}\}$은 공비가 2인 등비수열이다.

a_{12}의 값은? [4.7점]

① 41 ② 42 ③ 43
④ 44 ⑤ 45

원리합계

381. 월이율이 4%이고, 매달 초에 복리로 $10,000$원씩 적립한다. 2023년 1월 초부터 2년 간 적립할 때, 2024년 12월 말 적립금의 원리합계는? (단, $1.04^{24}=2.56$으로 계산한다.) [4.5점]

① $404,600$원 ② $405,600$원 ③ $405,800$원
④ $406,400$월 ⑤ $406,600$원

382. 연이율 4%이고 1년마다 복리로 매년 초에 10만 원씩 10년 동안 적립할 때, 10년 말까지 적립금의 원리합계는? (단, $1.04^{10}=1.5$로 계산한다.) [4.2점]

① 110만원 ② 115만원 ③ 120만원
④ 125만원 ⑤ 130만원

383. 연이율 5%, 1 년마다 복리로 매년 말에 100 만 원씩 적립할 때, 10 년 째 말의 원리합계를 구하면? (단, $1.05^{10}=1.6$ 으로 계산한다.) [4.5점]

① 1080 만 ② 1140 만 ③ 1200 만
④ 1260 만 ⑤ 1320 만

384. 연이율이 6%이고 1년마다 복리로 매년 초에 a만 원씩 10년동안 적립하여 10년 말까지 3180만 원을 만들려고 한다. 상수 a의 값은? (단, $1.06^{10}=1.8$로 계산한다.) [4.5점]

① 205 ② 215 ③ 225
④ 235 ⑤ 245

9. 등비수열(step3)

385.

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 \times a_3 = a_5$이고, 수열 $\{\log_2 a_n\}$의 첫째항부터 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_3 = 18$일 때, $S_{2n} > 238$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은? [5.0점]

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

386. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_n = 2^{2n-1} + k$이고, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 등비수열이다. $k \times a_2$의 값은? (단, k는 상수이다.) [5.6점]

① -9 ② -3 ③ -1
④ 1 ⑤ 3

387. 공차가 d이고 모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_1 \le d$
> (나) 어떤 자연수 $k(k \ge 3)$에 대하여 세 항 a_2, a_k, a_{4k-1}이 이 순서대로 공비가 자연수인 등비수열을 이룬다.

$100 \le a_{19} \le 120$일 때, a_k의 값은? [4.5점]

① 42 ② 40 ③ 38
④ 36 ⑤ 34

388. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이 <조건>을 만족시킨다.

> (가) 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 정수이다.
> (나) a_k, a_{k+1}, a_{13}가 이 순서대로 등비수열을 이루도록
> 하는 13보다 작은 자연수 k가 존재한다.

$a_{13} = 432$가 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [5.2점]

① 14 ② 24 ③ 27
④ 33 ⑤ 44

389. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_1=1, S_{12}=6S_6$일 때, a_n값이 정수가 되도록 하는 100이하인 모든 자연수 n값의 합은? [5.5점]

① 853 ② 848 ③ 843
④ 838 ⑤ 833

390. 첫째항이 2이고 공비가 정수인 등비수열 $\{a_n\}$과 자연수 m이 다음 조건을 만족시킬 때, a_m의 값을 구하고, 그 과정을 논술하시오. [8.0점]

(가) $12 < a_2+a_3 \le 24$
(나) $\sum_{k=1}^{m} a_k = 242$

391. 첫째항이 2인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 두 수열 $\{S_{2n-1}\}$, $\{S_{2n}\}$은 각각 공비가 3인 등비수열이다. $a_6=a_7$일 때, $S_{10}+S_{12}$의 값은? [5.6점]

① 1269 ② 1278 ③ 1287
④ 1296 ⑤ 1305

392. 두 수 2와 50사이에 20개의 수를 넣어 만든 등비수열 $2,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{20},\ 50$이 있다. 등식

$$2+a_1+a_2+\ \cdots\ +a_{20}+50=k\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ \cdots\ +\frac{1}{a_{20}}+\frac{1}{50}\right)$$

을 만족시키는 상수 k의 값은?[4.6점]

① 100 ② 90 ③ 80
④ 60 ⑤ 40

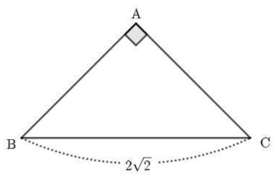
393. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

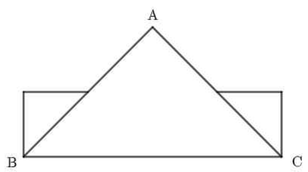
(가) 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항은 정수이다.
(나) a_5, a_7, a_k 가 이 순서대로 등비수열을 이루도록 하는 7 보다 큰 자연수 k 가 존재한다.

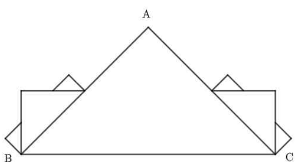
$a_k=256$ 이 되도록 하는 모든 k 의 값의 합은? [5.3점]

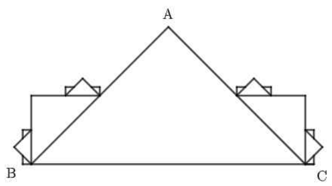
① 90 ② 81 ③ 58
④ 49 ⑤ 35

394. 그림과 같이 빗변의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 직각이등변삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC에서 빗변이 아닌 두 변의 각각의 중점과 빗변의 양 끝점 중 각 중점에 가까운 점을 이은 선분을 각각 빗변으로 하는 직각이등변삼각형을 삼각형 ABC의 외부에 그린 그림을 [그림 P_1]이라 하자. [그림 P_1]에서 새로 그린 직각이등변삼각형의 빗변이 아닌 두 변의 각각의 중점과 빗변의 양 끝점 중 각 중점에 가까운 점을 이는 선분을 각각 빗변으로 하는 직각이등변삼각형을 [그림 P_1]의 삼각형의 외부에 그린 그림을 [그림 P_2]라 하자.
[그림 P_2]에서 새로 그린 직각이등변삼각형의 빗변이 아닌 두 변의 각각의 중점과 빗변의 양 끝점 중 각 중점에 가까운 점을 이는 선분을 각각 빗변으로 하는 직각이등변삼각형을 [그림 P_2]의 삼각형의 외부에 그린 그림을 [그림 P_3]라 하자. 이와 같은 과정을 10회 반복하여 그려진 그림 P_{10}의 모든 삼각형의 넓이의 합은? [5.4점]



[그림 P_1]


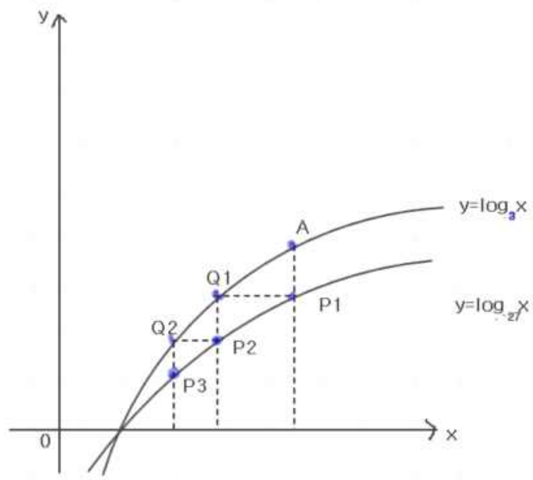
[그림 P_2]


[그림 P_3]


⋮ ⋮

① $\frac{1}{3}\left(8-\frac{1}{2^{19}}\right)$ ② $\frac{1}{3}\left(8-\frac{1}{2^{20}}\right)$ ③ $\frac{1}{3}\left(8-\frac{1}{2^{21}}\right)$
④ $\frac{1}{3}\left(9-\frac{1}{2^{20}}\right)$ ⑤ $\frac{1}{3}\left(9-\frac{1}{2^{21}}\right)$

395. 두 곡선 $y=\log_3 x$, $y=\log_{27}x$ 과 한 점 $A(3^{81}, 81)$ 이 있다.
점 A 를 지나고 y 축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_{27}x$ 와 만나는 점을 P_1 이라 하고, 점 P_1 를 지나고 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=\log_3 x$ 와 만나는 점을 Q_1이라 하자.점Q_1을 지나고 y 축과 평행한 직선이 $y=\log_{27}x$ 와 만나는 점을 P_2 라 하고, 점 P_2 를 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=\log_3 x$ 와 만나는 점을 Q_2라 하자,이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두점을 각각 P_n, Q_n 이라 하고 점P_n의 y 좌표를 y_n 이라 할 때, $y_n < \frac{1}{k}$ 을 만족시키는 n의 최솟값이 8이 되도록 하는 자연수 k의 개수는? [5.0점]



① 50 ② 51 ③ 52
④ 53 ⑤ 54

10. 수열의 합(step1)

기호 $\sum$

396. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=1$, $a_2=3$이고 $\sum_{k=1}^{9}a_k+\sum_{k=2}^{8}a_{k+1}=48$ 일 때, $\sum_{k=1}^{9}a_k$의 값은? [4.5점]

① 23 ② 24 ③ 25
④ 26 ⑤ 27

$\sum$의 성질

397. $\sum_{k=1}^{20}a_k=10$, $\sum_{k=1}^{20}b_k=20$일 때, $\sum_{k=1}^{20}\left(2a_k+b_k+\frac{1}{2}\right)$의 값은? [3.5점]

① 30 ② 35 ③ 40
④ 45 ⑤ 50

398. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{20}a_k=20$, $\sum_{k=1}^{20}b_k=-10$일 때, $\sum_{k=1}^{20}(2a_k-3b_k)$의 값은? [4.1점]

① 10 ② 30 ③ 50
④ 70 ⑤ 90

399. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}a_k=15$, $\sum_{k=1}^{10}b_k=60$일 때, $\sum_{k=1}^{10}(-3a_k+b_k-1)$의 값은? [3.5점]

① 5 ② 10 ③ 15
④ 20 ⑤ 25

400. $\sum_{k=1}^{10}a_k=20$, $\sum_{k=1}^{10}b_k=5$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10}(3a_k+2b_k)$ 의 값은? [4점]

① 50 ② 60 ③ 70
④ 80 ⑤ 90

401. $\sum_{k=1}^{7} a_k = -20$, $\sum_{k=1}^{7}(-4a_k+5b_k+3)=301$일 때, $\sum_{k=1}^{7} b_k$의 값은? [3.9점]

① 36 ② 40 ③ 48
④ 54 ⑤ 50

402. $\sum_{k=1}^{20} a_k = 31$일 때, $\sum_{k=1}^{20}(3a_k-2)$의 값은? [4.5점]

① 53 ② 72 ③ 91
④ 118 ⑤ 146

403. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 5$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10}(2a_k-1)$ 의 값은? [3.6점]

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

404. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{8}(3a_k-b_k)=5$, $\sum_{k=1}^{8}(2a_k+4b_k)=22$일 때, $\sum_{k=1}^{8}(a_k+2b_k+2)$의 값은? [3.5점]

① 13 ② 17 ③ 22
④ 27 ⑤ 32

405. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{15} a_k^2 = 30$일 때, $\sum_{k=1}^{15}(a_k+1)^2+\sum_{k=1}^{15}(a_k-1)^2$의 값은? [4.7점]

① 90 ② 100 ③ 110
④ 120 ⑤ 130

406. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 3$, $\sum_{k=1}^{10} a_k^2 = 6$일 때, $\sum_{k=1}^{10}(3a_k-1)^2$의 값은? [3.9점]

① 37 ② 40 ③ 43
④ 46 ⑤ 49

407. 자연수 n에 대하여 이차방정식 $x^2-2nx+2n-3=0$의 두 근을 a_n, b_n이라고 할 때, $\sum_{k=1}^{5}({a_k}^2+{b_k}^2)$의 값은? [3.8점]

① 190 ② 220 ③ 250
④ 280 ⑤ 310

∑와 등차등비수열

408. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3=2$, $a_5=6$일 때, $\sum_{k=1}^{50}a_{2k}-\sum_{k=1}^{50}a_{2k-1}$의 값은? [4.5점]

① 50 ② 100 ③ 150
④ 200 ⑤ 250

409. $\sum_{k=1}^{5}(2^k+2k)$의 값은? [4.0점]

① 93 ② 92 ③ 62
④ 61 ⑤ 60

410. 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{3a_{n+1}-a_n\}$은 공차가 6인 등차수열이다. 다음을 구하고 그 과정을 논술하시오. [총 10점]

(1) 수열 $\{a_n\}$의 공차를 구하시오. [5점]

(2) $\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값을 구하시오. [5점]

411. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에서 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=10$, $a_{21}+a_{22}+a_{23}+\cdots+a_{30}=40$, 일 때, $\sum_{n=1}^{60}a_n$의 값은? [4점]

① 610 ② 620 ③ 630
④ 640 ⑤ 650

자연수의 거듭제곱의 합

412. $\sum_{k=1}^{10}(k-2)$ 의 값은?
[4.3점]

① 20 ② 25 ③ 30
④ 35 ⑤ 40

413. $\sum_{k=1}^{10}(2k+1)^2-4\sum_{k=1}^{10}k(k+1)$의 값은? [4.0점]

① 10 ② 20 ③ 30
④ 40 ⑤ 50

414. $\sum_{k=1}^{8}\frac{2k^3}{k+1}-\sum_{k=1}^{8}\frac{k^3-1}{k+1}$ 의 값은? [4.2점]

① 176 ② 177 ③ 178
④ 179 ⑤ 180

415. $(1^2+1)+(2^2+2)+(3^2+3)+\cdots+(n^2+n)=30n$을 만족시키는 자연수 n의 값은? [4.9점]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

$\sum$를 이용한 여러 가지 수열의 합

416. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4.2점]

[보 기]

ㄱ. $\sum_{k=1}^{5}(2k-1)^2+\sum_{k=1}^{5}(2k)^2=\sum_{k=1}^{10}k^2$

ㄴ. $\sum_{k=1}^{19}(k+1)^2=\sum_{j=2}^{20}j^2$

ㄷ. $-1+1-1+1-1+1=\sum_{k=1}^{6}(-1)^{k+2}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

일반항이 k, n에 대한 식인 수열의 합

417. $1\times3+2\times4+3\times5+\cdots+10\times12$의 값은? [4.3점]

① 475 ② 480 ③ 485
④ 490 ⑤ 495

로그가 포함된 수열의 합

418. $\sum_{k=1}^{n}\log_3\left(1+\frac{1}{k}\right)=4$일 때, 자연수 n의 값은? [4.1점]

① 76 ② 78 ③ 80
④ 82 ⑤ 84

분수꼴의 수열의 합

419. $\sum_{k=1}^{11}\frac{1}{k(k+1)}$ 의 값은? [3.9점]

① $\frac{7}{8}$ ② $\frac{8}{9}$ ③ $\frac{9}{10}$
④ $\frac{10}{11}$ ⑤ $\frac{11}{12}$

420. $\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k(k+1)}$의 값은? [4.2점]

① $\frac{4}{11}$ ② $\frac{6}{11}$ ③ $\frac{8}{11}$
④ $\frac{10}{11}$ ⑤ $\frac{12}{11}$

421. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_n=\frac{1}{n(n+1)}$일 때, $\sum_{k=1}^{10}S_k\times\sum_{k=1}^{5}k^2$의 값은?[3.9점]

① 40 ② 50 ③ 60
④ 70 ⑤ 80

422. 다음 식의 값을 구하고 그 과정을 논술하시오. [6점]

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{19\times21}$$

근호가 포함된 수열의 합

423. $\sum_{k=1}^{n} \frac{3}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = 9$ 일 때, n 의 값은? [4.5점]

① 9 ② 12 ③ 15
④ 18 ⑤ 21

10. 수열의 합(step2)

기호 $\sum$

424. 첫째항이 $a_1 = 1$인 수열 $\{a_n\}$이

$\sum_{k=2}^{11} a_{k-1} - \sum_{k=1}^{8} a_{k+1} = 10$을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4.7점]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

$\sum$의 성질

425. 수열 $\{a_n\}$에서 $\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)(a_k-1)=0$,

$\sum_{k=1}^{10}(2a_k-1)^2 = 26$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값은? [4.5점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

426. 일 때일 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 20$일 때, $\sum_{k=1}^{10}(2a_k - 3)$의 값은? [4.3점]

① 10 ② 20 ③ 30
④ 40 ⑤ 50

$\sum$와 등차등비수열

427. 첫째항이 2인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n & (a_n < 8) \\ a_n - 6 & (a_n \geq 8) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값은?

[4.6점]

① 40 ② 42 ③ 44
④ 46 ⑤ 48

428. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_4 = 8$, $a_{16} = 80$일 때,

$\sum_{k=1}^{200} a_{2k} - \sum_{k=1}^{200} a_{2k-1}$의 값은? [4.7점]

① 1100 ② 1200 ③ 1300
④ 1400 ⑤ 1500

429. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 = 10$, $a_{20} = 30$,

$\sum_{k=1}^{19} a_{k+1} + \sum_{k=2}^{20} a_{k-1} = 58$ 이고 $a_1, a_2, \cdots, a_{18}, a_{19}$ 는 등차수열을 이룰 때, a_{10} 의 값은? [4.7점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

430. 두 수 27 과 -15 사이에 20 개의 실수를 넣어 만든 수열

$$27, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{20}, -15$$

가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $\sum_{n=1}^{20} a_n$ 의 값은? [4.5점]

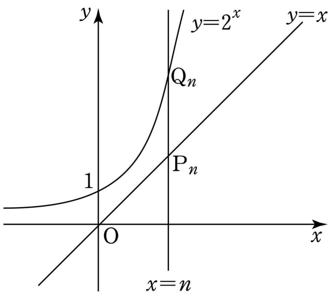
① 80 ② 90 ③ 100
④ 110 ⑤ 120

431. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2 = 6$,

$\frac{a_5}{a_3} = 4$ 일 때, $\sum_{k=1}^{7} a_k$의 값은? [4.3점]

① 369 ② 372 ③ 375
④ 378 ⑤ 381

432. 좌표평면에서 직선 $y=x$와 곡선 $y=2^x$이 직선 $x=n$과 만나는 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. 선분 P_nQ_n의 길이를 a_n이라 할 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$의 값은? (단, n은 자연수이다.) [5.1점]



① 1575 ② 1679 ③ 1783
④ 1887 ⑤ 1991

433. 공비가 3이고, 첫째항이 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{4}\frac{a_n\times a_{n+2}}{a_{n+1}}=12$일 때, $\frac{1}{a_1}$의 값은? [4.9점]

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

434. 첫째항이 1이고, 각 항이 양의 정수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 제 $(n+1)$항인 a_{n+1}이 이차방정식 $x^2+(2-3a_n)x-6a_n=0$의 근이다. $\sum_{k=1}^{10}a_{2k-1}=\frac{3^\beta-1}{\alpha}$일 때, 두 상수 α, β의 합 $\alpha+\beta$의 값은? [4.5점]

① 20 ② 22 ③ 24
④ 26 ⑤ 28

435. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{3}a_k=1$, $\sum_{k=1}^{6}a_k=28$이 성립할 때, $\sum_{k=7}^{12}a_k=2^u\times3^v\times7^w$ 이다. 세 상수 u, v, w의 합 $u+v+w$의 값은? [4.3점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

436. 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 두 수열 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$이 다음을 만족시킨다.

$b_n = 7 \times 2^{a_n} = 10^{c_n}$

S와 T를 각각 $S = \sum_{k=1}^{3} b_k$, $T = \sum_{k=1}^{4} c_k$이라 할 때, $\frac{T}{S}$의 값은? [4.4점]

① $\frac{11\log 2 + \log 7}{511}$ ② $\frac{11\log 2 + 2\log 7}{511}$ ③ $\frac{11\log 2 + 4\log 7}{511}$
④ $\frac{22\log 2 + 2\log 7}{511}$ ⑤ $\frac{22\log 2 + 4\log 7}{511}$

437. 첫째항이 음수이고 공비가 -2인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} (|a_k| + a_k) = 440$일 때, a_1의 값은? [4.8점]

① $-\frac{2}{31}$ ② $-\frac{4}{31}$ ③ $-\frac{6}{31}$
④ $-\frac{8}{31}$ ⑤ $-\frac{10}{31}$

438. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $b_n = a_n - |a_n|$이라 하고, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$b_8 = a_8$, $S_5 = -100$

이고, S_n의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은? (단, $M \neq 0$) [4.2점]

① -112 ② -128 ③ -136
④ -140 ⑤ -164

자연수의 거듭제곱의 합

439. $\sum_{k=1}^{15} (k+3)(k+p) = 115$를 만족시키는 상수 p의 값은? [4.6점]

① -13 ② -12 ③ -11
④ -10 ⑤ -9

440. x에 대한 이차방정식

$x^2-(2n+1)x+n(n-1)=0$

의 두 근을 a_n, b_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k-1)(b_k-1)$의 값은?

[4.6점]

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{4}$
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

441. $1\times20+3\times18+5\times16+\cdots+17\times4+19\times2$ 의 값은?

[4.7점]

① 770 ② 775 ③ 780
④ 785 ⑤ 790

442. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이

$S_n=\sum_{k=1}^{n+1}(k^2+1)-\sum_{k=1}^{n}(k^2-1)$일 때, a_7-a_1의 값은? [5.1점]

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

$\sum$를 여러 개 포함한 식

443. $\sum_{i=1}^{5}\left(\sum_{k=1}^{i}ik\right)$의 값은?

[4.3점]

① 137 ② 138 ③ 139
④ 140 ⑤ 141

444. $\sum_{j=1}^{5}\left\{\sum_{k=1}^{5}(j^2+k^3)\right\}$의 값은? [4.4점]

① 1350 ② 1400 ③ 1450
④ 1500 ⑤ 1550

445. $\sum_{x=1}^{10}\left(\sum_{i=1}^{k}(i-x)\right)$의 값은 $k=p$일 때, 최솟값 q을 갖는다.

이때, p와 q을 각각 구하고, 풀이 과정을 논리적으로 서술하시오. [4.0점]

446. $\sum_{m=1}^{15}\left\{\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{l}2\right)\right\}$의 값은? [4.3점]

① 1360 ② 1370 ③ 1380
④ 1390 ⑤ 1400

447. $\sum_{n=1}^{12}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k}{n+2}\right)$의 값은? [4.2점]

① 24 ② 31 ③ 38
④ 45 ⑤ 52

$\sum$를 이용한 여러 가지 수열의 합

448. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2-3x+1$과 직선 $y=5x-3-n$의 교점의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $\sum_{k=1}^{20}f(k)-\sum_{k=1}^{10}f(2k-1)$의 값은? [4.4점]

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

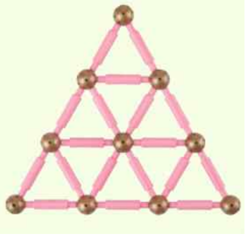
449. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|a_1|=3$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $|a_{n+1}|=|a_n|$이다.
(다) $\sum_{k=1}^{20}a_k=6$

$b_n=|a_n|-a_n$이라 할 때, $\sum_{k=1}^{20}b_k$의 값은? [4.2점]

① 60 ② 54 ③ 48
④ 36 ⑤ 24

450. 그림과 같이 길이가 같은 막대 모양의 자석 블록을 이용하여 정삼각형 모양을 계속 만들어 나간다. 이렇게 만들어진 가장 큰 정삼각형 모양의 한 변에 놓인 자석 블록의 개수가 n일 때, 전체 자석 블록의 개수를 a_n이라 하자. a_{10}의 값은? (단, 동그란 자석 블록은 생각하지 않는다.) [5.0점]

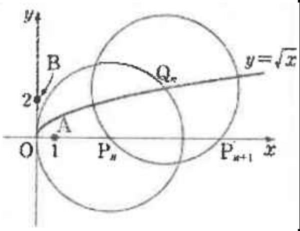


① 99 ② 165 ③ 273
④ 315 ⑤ 385

451. 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 x축 위의 점 P_n과 제1사분면 위의 점 Q_n이 있다.

> • 점 P_n을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{OP_n}$인 원은 곡선 $y=\sqrt{x}\,(x>0)$과 점 Q_n에서 만난다.
> • 점 Q_n을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{P_nQ_n}$인 원은 x축과 서로 다른 두 점 P_n, P_{n+1}에서 만난다.

다음은 점 P_1의 좌표가 $(3,0)$일 때, 두 점 $A(1,0), B(0,2)$에 대하여 삼각형 ABP_n의 넓이 S_n을 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)

> • 모든 자연수 n에 대하여 두 점 P_n, Q_n의 x좌표를 각각 a_n, b_n 이라 하자.
>
> 
>
>
> $\overline{OP_n}=\overline{P_nQ_n}$에서
> $b_n=\boxed{(가)}\times a_n-1$이다.
> 두 점 P_n, P_{n+1}은
> 점 Q_n을 중심으로 하는 원 위에 있으므로
> $a_{n+1}=\boxed{(나)}\times a_n-2$ 이다.
> 삼각형 ABP_n의 넓이 S_n에 대하여 $\dfrac{S_{n+1}}{S_n}$은 일정하므로
> $S_n=\boxed{(다)}$이다.

위의 (가),(나) 에 알맞은 수를 각각 p, q라 하고 (다)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $p+q+\sum_{n=1}^{4}f(n)$의 값은? [4.2점]

① 81　② 82　③ 83　④ 84　⑤ 85

452. 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의가 $a_1=2$,

$a_{n+1}=(n+1)a_n\ \ (n=1,2,3,\cdots)$일 때, $\sum_{k=1}^{100}a_k$의 일의 자리의 숫자는? [4.1점]

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

453. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면 $a_1=4$, $S_n=\dfrac{1}{n}(S_1+S_2+\cdots+S_{n-1})+3-a_n\ (n=2,3,4,\cdots)$일 때, a_6의 값은? [5.0점]

① $\dfrac{11}{20}$　② $\dfrac{13}{20}$　③ $\dfrac{17}{48}$　④ $\dfrac{23}{48}$　⑤ $\dfrac{25}{51}$

454. 자연수 n에 대하여 $0<x<2\pi$ 일 때, 방정식 $\tan 2nx=1$ 을 만족시키는 실근의 개수를 $f(n)$ 이라 하자. $\sum_{n=1}^{20}f(n)$ 의 값은? [5.1점]

① 420　② 580　③ 640　④ 720　⑤ 840

$\sum$로 표현된 수열의 합과 일반항

455. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2n(n+1)$일 때, $\sum_{k=1}^{10} {a_k}^2$의 값은? [4.9점]

① 6100 ② 6120 ③ 6140
④ 6160 ⑤ 6180

456. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2+4n+3$일 때, $\sum_{k=1}^{20} a_{2k}$의 값은? [4.4점]

① 800 ② 900 ③ 1000
④ 1100 ⑤ 1200

457. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1+a_2=7$이고,
$\sum_{k=2}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = 2n^2+1\ (n \geq 2)$를 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값은? [4.2점]

① 762 ② 767 ③ 772
④ 777 ⑤ 782

458. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n 이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$ 은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 공차가 3인 등차수열이다.
(나) 수열 $\{S_{2n-1}\}$ 은 공비가 2인 등비수열이다.

$\sum_{k=1}^{n} a_{2k} > 0$일 때, n의 최솟값은? [4.1점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

459. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n 이 $S_n = 2n^2-37n$ 일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4.4점]

[보 기]

ㄱ. $\sum_{k=1}^{50} (a_{2k-1})^2 - \sum_{k=1}^{50} (a_{2k})^2 = -4S_{100}$ 이다.
ㄴ. 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n=4$ 이다.
ㄷ. $|a_n|$ 의 값이 최소가 되는 자연수 n의 값은 10 이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

일반항이 k,n에 대한 식인 수열의 합

460. 수열 1, $\frac{1}{1+2}$, $\frac{1}{1+2+3}$, $\frac{1}{1+2+3+4}$, $\cdots$의 첫째항부터 제 30항까지의 합은? [4.7점]

① $\frac{60}{31}$ ② $\frac{61}{31}$ ③ 2
④ $\frac{63}{31}$ ⑤ $\frac{64}{31}$

461. 다음 식의 값을 구하면?

$1\times2+(1+3)\times3+(1+3+5)\times4+\ \cdots$
$+(1+3+5+\ \cdots\ +19)\times11$
[4.5점]

① 2319 ② 3210 ③ 3410
④ 4310 ⑤ 5410

462. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}=2n^2+10n$을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{8}\frac{180}{a_k}$의 값은? [5.2점]

① 29 ② 30 ③ 31
④ 32 ⑤ 33

463. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{3k-1}{a_k}=\frac{3}{2}n^2+\frac{7}{2}n$$

을 만족시킨다. $a_5a_6a_7=\frac{q}{p}$일 때, $2p-q$의 값은? (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4.6점]

① 29 ② 32 ③ 35
④ 38 ⑤ 41

464. 수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{k=1}^{n}k^2a_k=n^2+n$을 만족시킬 때, $\sum_{k=3}^{8}\frac{a_k}{k+1}$의 값은? [4.6점]

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{8}{9}$ ⑤ $\frac{10}{9}$

로그가 포함된 수열의 합

465. $\sum_{k=2}^{200}\log\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\log\frac{p}{q}$ 일 때, $2p-q$의 값은? (단 p, q는 서로소인 자연수) [4.5점]

① 2　② 3　③ 4
④ 5　⑤ 6

466. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n^2+3n}{2}$ 일 때, $\sum_{k=1}^{5}(2k-1)a_{2k}$ 의 값은? [4.8점]

① 214　② 215　③ 216
④ 217　⑤ 218

467. $\sum_{k=1}^{4}(k-p)^2=6$ 일 때, 상수 p 의 값의 곱은? [4.2점]

① 3　② 4　③ 5
④ 6　⑤ 7

468. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$$S_n=\frac{(n+1)(n+2)(2n+1)}{2}$$

일 때, $a_k=7a_1+2$ 를 만족시키는 자연수 k 의 값은? [5.0점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

분수꼴의 수열의 합

469. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+4n+2$를 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{22}\frac{1}{a_k a_{k+1}}$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하시오. [7.0점/부분점수 있음]

470. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)a_k}=\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{9}a_n$의 값은? [4.6점]

① $\frac{15}{56}$　② $\frac{2}{7}$　③ $\frac{17}{56}$
④ $\frac{9}{28}$　⑤ $\frac{19}{56}$

471. 첫째항이 3인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=a_n+2$일때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{a_k a_{k+1}}$의 값은? [$5.2$점]

① $\frac{1}{33}$ ② $\frac{5}{33}$ ③ $\frac{2}{11}$
④ $\frac{8}{33}$ ⑤ $\frac{3}{11}$

472. 이차방정식 $x^2+\frac{x}{2n}-n+1=0$ (n은 자연수) 의 두 근을 a_n, b_n이라고 할 때, $\displaystyle\sum_{k=2}^{60}\left(\frac{2}{a_k}+\frac{2}{b_k}\right)$의 값은? [4.9점]

① $\frac{51}{60}$ ② $\frac{53}{60}$ ③ $\frac{55}{60}$
④ $\frac{57}{60}$ ⑤ $\frac{59}{60}$

473. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k+1}=n(n+1)$을 만족시킬 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값은? [$4.2$점]

① 880 ② 870 ③ 860
④ 850 ⑤ 840

474. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n=n^2+4n$일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{25}\frac{1}{a_k a_{k+1}}$의 값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값은? (단, p,q는 서로소인 자연수이다.) [4.9점]

① 16 ② 15 ③ 14
④ 13 ⑤ 12

475. 자연수 전체의 집합을 정의역으로 하는 두 함수 $f(n)=(n-1)(n+2)$, $g(n)=3n+1$이 있다. $h(n)=(f\circ g)(n)$ 일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{h(n)}=\frac{2}{19}$를 만족하는 자연수 m의 값은? [4.8점]

① 16 ② 17 ③ 18
④ 19 ⑤ 20

476. $\frac{2}{1^2\times3^2}+\frac{4}{3^2\times5^2}+\frac{6}{5^2\times7^2}+\cdots+\frac{20}{19^2\times21^2}$ 의 값은? [4.1점]

① $\frac{110}{441}$ ② $\frac{12}{49}$ ③ $\frac{106}{441}$
④ $\frac{104}{441}$ ⑤ $\frac{34}{147}$

477. 모든 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}=2n^2-1$일 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오. [5.0점]

478. 수열 $\{a_n\}$이 자연수 n에 대하여

$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\frac{a_3}{4}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=n^2+n$을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{a_k}$의 값은? [5.6점]

① $\frac{10}{21}$ ② $\frac{5}{8}$ ③ $\frac{20}{27}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

479. 첫째항이 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$\sum_{k=1}^{13}\frac{1}{a_k a_{k+1}}=\frac{13}{42}$일 때, a_{10}의 값은? [4.0점]

① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{13}{2}$ ③ $\frac{15}{2}$
④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{19}{2}$

480. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=n^2+3n+1$일 때, $\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{a_k a_{k+1}}$의 값은? [$4.9$점]

① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{3}{40}$ ③ $\frac{1}{12}$
④ $\frac{11}{120}$ ⑤ $\frac{1}{10}$

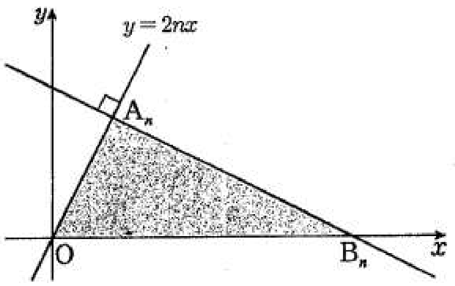
481. $\sum_{k=1}^{10}\frac{k^4+2k^3+k^2+a}{k(k+1)}=460$일 때, 상수 a의 값을 구하는풀이 과정과 답을 쓰시오. [7.0점]

482. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)a_k}=n^2+n$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{20}a_n$의 값을 구하고, 그 과정을 서술하시오. [5.0점]

483. 자연수 n에 대하여 점 $\mathrm{A}_n(n,\ 2n^2)$을 지나고 직선 $y=2nx$에 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 B_n이라고 하자. 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{OB}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=2}^{6}\frac{8n^3}{S_n-5n^3}$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. [7.0점]



근호가 포함된 수열의 합

484. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n=n^2$일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{24}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}$의 값은?

[4.8점]

① 3　② 4　③ 5
④ 6　⑤ 7

485. 첫째항이 4이고, 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=1}^{30}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}$의 값은? [4.4점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

486. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $0 < a_n < 1$이고

$\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) = \sqrt{n+2}$ 이 성립할 때, $\sum_{k=3}^{m} a_k = 4$를 만족시키는 자연수 m의 값은?
(단, $m > 3$) [3.9점]

① 28 ② 30 ③ 32
④ 34 ⑤ 36

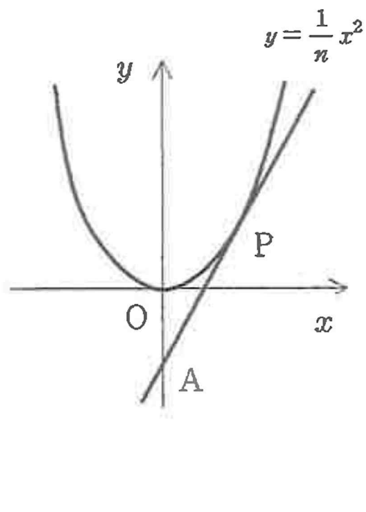
487. $\sum_{k=4}^{n} \frac{10}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = 40$ 일 때, 자연수 n 의 값은? [4.5점]

① 24 ② 35 ③ 48
④ 63 ⑤ 80

488. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 3$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = a_n + 1$일 때, $\sum_{k=1}^{24} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}}$ 의 값은? [4.9점]

① $\sqrt{3}$ ② 3 ③ $2\sqrt{3}$
④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

489. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 점 $A(0, -1)$을 지나는 기울기가 양수인 직선이 함수 $y = \frac{1}{n}x^2$의 그래프와 한 점에서 만날 때, 만나는 점을 $P(x_n, y_n)$이라 한다. $\sum_{n=1}^{15} \frac{y_n}{x_n + x_{n+1}}$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오. [5.0점]



490. 수열 $\{a_n\}$이

$a_n = \dfrac{2}{\sqrt{|2n-11|}+\sqrt{|2n-9|}}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$를 만족시킬 때,

$\sum_{k=1}^{9} a_k$의 값은? [5.1점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

491. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $|a_3|=|a_6|$일 때,

$\sum_{k=1}^{6}\left(\sqrt{|a_{k+3}|}-\sqrt{|a_k|}\right)=a-b\sqrt{3}$이다. 두 자연수 a, b에 대하여

$a+b$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

군수열

492. 다음은 [제 n행]에 $n+1$의 배수를 n개 나열한 것이다.

[제1행]	2			
[제2행]	3	6		
[제3행]	4	8	12	
[제4행]	5	10	15	20
				⋮

위의 [제1행]부터 [제10행]까지 나열된 수의 총합을 S라고 할 때, $\dfrac{S}{55}$의 값은? [4.5점]

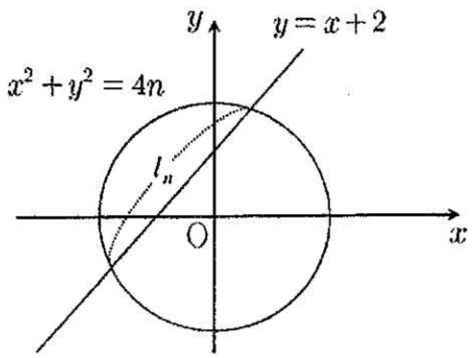
① 35 ② 40 ③ 45
④ 50 ⑤ 55

10. 수열의 합(step3)

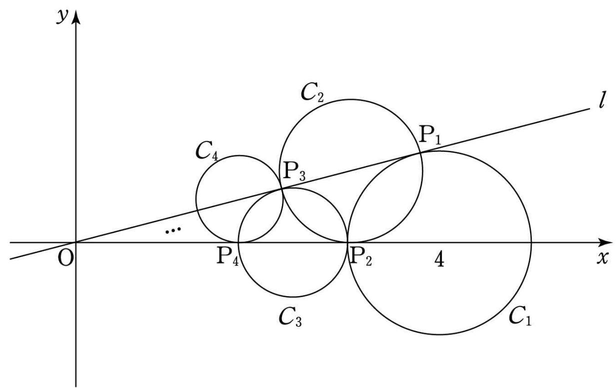
493. 자연수 n에 대하여 직선 $y=ax$가 원 $(x-4)^2+y^2=\frac{4}{n^2}$에 접할 때, $a=f(n)$이다. $\sum_{k=1}^{10}\{f(n)\}^2$의 값은? [5점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{8}{21}$ ③ $\frac{3}{7}$
④ $\frac{10}{21}$ ⑤ $\frac{11}{21}$

494. 자연수 n에 대하여 다음 그림과 같이 원 $x^2+y^2=4n$과 직선 $y=x+2$이 만나서 생기는 선분의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{50}\frac{101}{{l_n}^2 \cdot {l_{n+1}}^2}$의 값을 구하고, 풀이 과정을 논리적으로 서술하시오.
[6.0점 부분점수 있음]



495. 좌표평면에 원 $C_1 : (x-4)^2+y^2=1$ 이 있다. 아래 그림과 같이 원점에서 원 C_1 에 기울기가 양수인 접선 l 을 그었을 때, 생기는 접점을 P_1 이라 하자. 중심이 직선 l 위에 있고 점 P_1 을 지나며 x 축에 접하는 원을 C_2 라 하고 이 원과 x 축의 접점을 P_2 라 하자. 중심이 x 축 위에 있고 점 P_2 를 지나며 직선 l 에 접하는 원을 C_3 이라 하고 이 원과 직선 l 의 접점을 P_3 이라 하자. 중심이 직선 l 위에 있고 점 P_3 을 지나며 x 축에 접하는 원을 C_4 라 하고 이 원과 x 축의 접점을 P_4 라 하자. 이와 같은 과정을 계속할 때, 원 C_n 의 넓이를 S_n 이라 하자. 이때 $\frac{25}{24}\sum_{n=2}^{5}S_n=\frac{a}{b}\pi$ 이다. 서로소인 두 자연수 $a+b$ 의 값은? (단, 원 C_{n+1} 의 반지름의 길이는 원 C_n 의 반지름의 길이보다 작다.) [4.8점]



① 59 ② 61 ③ 63
④ 65 ⑤ 67

496. 세 변의 길이가 $n+1,\ n+2,\ n+3$인 삼각형의 넓이를 S_n이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$을 $a_n=\dfrac{4\sqrt{3}S_n}{3(n+2)}$ 이라 하자. 수열 $\{b_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} b_k=(a_n)^2$을 만족시킬 때, b_{10}의 값은? [4.4점]

① 21 ② 23 ③ 25
④ 27 ⑤ 29

497. 자연수 n 에 대하여 곡선 $y=x^2$ 과 직선 $y=x+n$ 이 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A_n, B_n 이라 하자. 또한 선분 A_nB_n 을 지름으로 하는 원이 곡선 $y=x^2$ 과 만나는 점 중 두 점 A_n, B_n 이 아니고 x 좌표가 0 이상인 점을 C_n 이라 하자. 점 C_n 의 x 좌표를 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=11}^{20}\left(a_n^2+a_n-2\right)$ 의 값은? [4.8점]

① 105 ② 110 ③ 115
④ 120 ⑤ 125

498. 2 이상의 자연수 n에 대하여 $2^{n-3}-4$의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $\sum_{n=2}^{m} f(n)=13$가 되도록 하는 자연수 m의 값은? [4.6점]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

499. 첫째항이 48이고 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, S_n은 다음 조건을 만족시킨다.

> $|S_l|=|S_{l+5}|=|S_m|$을 만족시키는 서로 다른 두 자연수 l, m이 존재하고, $5<l<14$이고 $m>l+5$이다.

$l+m$의 값은? [4.9점]

① 32 ② 34 ③ 36
④ 38 ⑤ 40

500. 집합 $A=\left\{x \middle| 2\sin^2\frac{\pi x}{2}<1-\sin\frac{\pi x}{2}\right\}$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=\begin{cases} 2 & (x\in A) \\ -1 & (x\notin A)\end{cases}$ 가 있다. $\sum_{k=1}^{m} kf(k) \leq \sum_{k=1}^{15} 4kf(4k)$ 를 만족시키는 자연수 m의 최댓값을 M이라 할 때, $\sum_{k=1}^{M} kf(k)-M$의 값은? [4.4점]

① 889　② 891　③ 893　④ 895　⑤ 897

501. 공차가 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_5=-26$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} a_k$이다.

$\sum_{k=1}^{30} |a_k|$의 값은? [5.2점]

① 1265　② 1270　③ 1275　④ 1280　⑤ 1285

502. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_n>1$이고, $a_n+\frac{1}{a_n}=2\sqrt{n+2}$이 성립할 때, $\sum_{k=1}^{96}\frac{1}{a_k}$의 값은? [4.9점]

① 3　② $3\sqrt{2}$　③ 6　④ $6\sqrt{2}$　⑤ 9

503. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다. 다음 물음에 답하시오. [8.0점]

(가) 3과 13 사이에 n개의 수를 넣어 만든 수열 3, a_1, a_2, $\cdots$, a_n, 13는 등차수열을 이룬다.
(나) 3과 13 사이에 m개의 수를 넣어 만든 수열 3, b_1, b_2, $\cdots$, b_m, 13는 등비수열을 이룬다.

(1) $\sum_{j=1}^{n} a_j=80$일 때, 자연수 n의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오. [3.0점]

(2) $\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{b_i}=k\sum_{i=1}^{m} b_i$일 때, 상수 k의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오. [5.0점]

504. 자연수 전체의 집합을 정의역으로 하는 두 함수 $f(n)=4n^2-1,\ g(n)=n+1$이 있다. $h(n)=(f\circ g)(n)$이고, $\displaystyle\sum_{k=1}^{30}\frac{1}{h(k)}=\frac{q}{p}$일 때, 두 상수 p, q의 합 $p+q$의 값은? (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4.7점]

① 57 ② 65 ③ 73
④ 81 ⑤ 89

505. 등식

$2\times(n+1)+4\times(n+2)+6\times(n+3)+\cdots+2\times(n-1)\times(2n-1)$
$+2n\times 2n=\dfrac{n(n+1)f(n)}{3}$ 일 때, $f(20)$의 값은? [4.8점]

① 97 ② 99 ③ 101
④ 103 ⑤ 105

506. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{\sum_{i=1}^{n}i(i+1)}=\frac{3b_n}{n(n+2)}\ (n=1, 2, 3, \cdots)$$으로 정의할 때,

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, m은 자연수) [4.5점]

(가) $a_n>0$ 일 때, $m<n$이면, $b_m<b_n$이다.
(나) $b_n=3n$이면 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{5}{198}$이다.
(다) 수열 $\{b_n\}$이 등차수열이면 수열$\{a_n\}$도 등차수열이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ.ㄷ
④ ㄴ. ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

507. 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n > 0$, $b_n > 0$

(나) $b_n = 2\sqrt{2}\sum_{k=1}^{n} k$

(다) $\log_{b_n}(a_1{}^3 + a_2{}^3 + a_3{}^3 + \cdots + a_n{}^3) = 2$

$\frac{1}{22}\sum_{k=1}^{8} a_k a_{k+1} a_{k+2}$ 의 값은? [5점]

① 90 ② 180 ③ 360
④ 540 ⑤ 720

508.] 두 자리의 자연수 중에서 10의 배수 또는 12의 배수인 수의 합을 구하는 풀이과정과 답을 쓰시오. [8점]

509. 첫째항이 양수이고, 공비가 -3인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$\sum_{k=1}^{7}(|a_k| + a_k) = 205$일 때, a_1의 값은? [4.6점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

510. 모든 항이 정수이고 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{n=1}^{5} a_n \times \sum_{n=1}^{5} |a_n| = 255$를 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{14} a_n$의 값은? [5.3점]

① 160 ② 164 ③ 168
④ 172 ⑤ 176

511. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $a_{15} + a_{16} = 130$, $S_n = pn^2 + qn$ (p, q는 소수)이다. $a_1 + a_3$의 값은? [4.8점]

① 22 ② 26 ③ 30
④ 34 ⑤ 38

512. n이 자연수일 때, 함수 $f(x)=\dfrac{x+4n}{4x-2p}$이

$f(2)<f(6)<f(4)$를 만족시키도록 하는 자연수 p의 최솟값을 m이라 하자. 자연수 n에 대하여 $p=m$일 때의 함수 $f(x)$와

함수 $g(x)=\dfrac{2x+n}{x+q}$이 $g(f(6))<g(f(4))<g(f(2))$를

만족시키도록 하는 자연수 q의 개수를 a_n이라 하자.

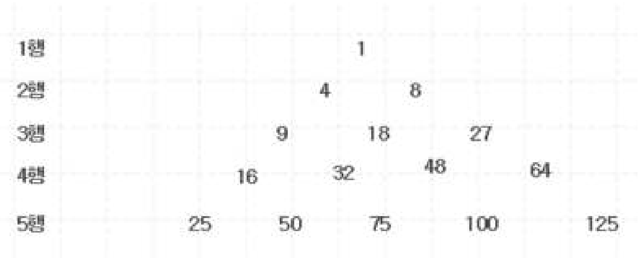
$m+\sum_{k=1}^{24}a_k$의 값은?[5.3점]

① 455 ② 458 ③ 461

④ 464 ⑤ 467

513. 그그림과 같이 자연수를 나열할 때, n행에 나열되는 수들의

합을 a_n이라 하자. $\sum_{k=1}^{8}\dfrac{a_k}{k}$의 값은? [4.8점]



① 750 ② 925 ③ 1100

④ 1275 ⑤ 1500

514. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여, 만족시킬 때,

$\sum_{k=1}^{20}(-1)^{k+1}a_k+\sum_{k=1}^{19}(a_k+a_{k+1})$의 값은? [4.8점]

① 427 ② 450 ③ 472

④ 497 ⑤ 510

515. 수열 $a_1=a,\ a_2=b,\ a_{n+2}=a_{n+1}-a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을 만족시킨다.

$a_{30}=100$일 때, $\sum_{k=1}^{20}|a_k|$의 값은? (단, $a>0,\ b<0$) [5.1점]

① 1000 ② 1100 ③ 1200

④ 1300 ⑤ 1400

516. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{5} a_n$의 값은? [5.3점]

(가) $|a_1| = 8$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $|a_{n+1}| = 2|a_n|$이다.
(다) $\sum_{n=1}^{10} a_n = -88$

① 104 ② 136 ③ 152 ④ 168 ⑤ 200

517. 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = \log_3 \sqrt{\frac{3n}{n+1}}$ 이다. $\sum_{k=1}^{m} a_k$의 값이 1000이하의 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 m의 값의 합은? [5.2점]

① 730 ② 736 ③ 816 ④ 818 ⑤ 844

518. 각 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을

$$b_n = \log_3 a_n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

으로 정의하자. 수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, b_{51}의 값을 구하고 그 과정을 논술하시오. [7.0점]

(가) $\sum_{k=1}^{50} b_{2k-1} = 50$
(나) $\sum_{k=1}^{50} b_{2k} = 150$

519. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

<조 건>
(가) $a_{2n} = a_n + 1$,
(나) $a_{2n+1} = a_n - 1$

집합 $A_n = \left\{ a_k \middle| 1 \le k \le n, k\text{는 자연수} \right\}$의 원소 중에서 값이 가장 큰 원소와 값이 가장 작은 원소의 합을 b_n이라 하자. $\sum_{k=2}^{127} b_n = 246$일 때, a_1의 값은? [5.5점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

520. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. 두 자연수 p, q에 대하여 $S_n = pn^2 - 18n + q$일 때, S_n이 <조건>을 만족시키도록 하는 p의 최솟값을 p_1이라 하자.

> 임의의 두 자연수 i, j에 대하여 $i \neq j$이면 $S_i \neq S_j$이다.

$p = p_1$일 때, $|a_k| < a_1$을 만족시키는 자연수 k의 개수가 3이 되도록 하는 모든 q의 값의 합은? [4.9점]

① 196 ② 204 ③ 212 ④ 220 ⑤ 228

521. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 수열 $\{S_n\}$은 $S_1 = 4, (n+1)S_{n+1} = 2nS_n \ (n \geq 1)$을 만족시킨다. $a_9 = \frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값은? (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [5.1점]

① 121 ② 233 ③ 457 ④ 905 ⑤ 2057

522. 자연수 n에 대하여 $a_k = \begin{cases} 0 & \left(\cos^2 \frac{n}{6}\pi < \frac{1}{2}\right) \\ 1 & \left(\frac{1}{2} \leq \cos^2 \frac{n}{6}\pi\right) \end{cases}$이라 할 때, $\sum_{k=1}^{100} a_k$의 값은? [4.2점]

① 48 ② 49 ③ 50 ④ 51 ⑤ 52

523. 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 공차는 양수이다.
> (나) $\left|\sum_{k=1}^{5} a_k\right| = \sum_{k=1}^{10} 2a_k$

$\sum_{k=1}^{n} a_k$의 최솟값이 -20이고, n에 대한 방정식 $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| = t$가 서로 다른 두 실근을 가지기 위한 모든 t의 값의 합은?
(단, n은 자연수이고 t는 실수이다.) [5.5점]

① 58 ② 59 ③ 60 ④ 61 ⑤ 62

524. 첫째항이 b (b는 자연수)이고 공차가 -4인 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 모든 자연수 n에 대하여 $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \geq 15$를 만족시키는 모든 b의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, m번째 수를 b_m이라 하자. $\sum_{m=1}^{15} b_m$의 값은? [4.7점]

① 640 ② 645 ③ 650 ④ 655 ⑤ 660

525. 첫째항이 b (b는 자연수)이고 공차가 -4인 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 모든 자연수 n에 대하여 $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \geq 15$를 만족시키는 모든 b의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, m번째 수를 b_m이라 하자.
$\sum_{m=1}^{10} b_m$의 값은? [4.9점]

① 350 ② 360 ③ 370 ④ 380 ⑤ 390

526. 첫째항은 b (b는 자연수)이고 공차가 -4 인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 있다. 모든 자연수 n 에 대하여 $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \geq 20$ 을 만족시키는 모든 b 의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, m 번째 수를 b_m 이라 하자. $\sum_{m=1}^{10} b_m$ 의 값은? [5.0점]

① 480 ② 500 ③ 520 ④ 540 ⑤ 560

527. 부등식 $1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_8 \leq 50$을 만족시키는 8개의 짝수 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_8$에 대하여 집합 A가
$A = \{x \mid x = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_8\}$일 때, 집합 A의 원소의 개수는? [5.3점]

① 111 ② 124 ③ 137 ④ 150 ⑤ 163

528. 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 (x, y)의 개수를 A_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{15} A_n$의 값을 구하시오. [4.8점]

(가) x, y는 모두 n이하의 자연수이다.
(나) $-x+n+1-\frac{1}{n+1}<y<n+1+\frac{1}{x-n-1}$

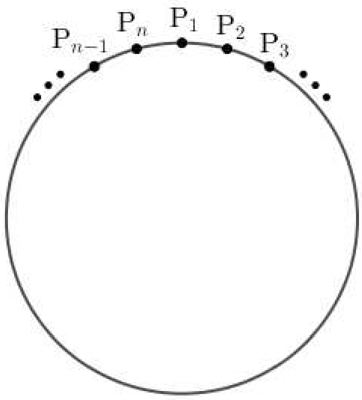
① 665 ② 670 ③ 675 ④ 680 ⑤ 685

529. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2+4n+3$일 때, $\sum_{k=1}^{30} ka_{3k-2}$의 값을 11로 나눈 나머지를 구하고, 그 과정을 서술하시오. [부분점수 있음. 7.0점]

530. 공차가 1보다 크고, $a_2+a_4=2$인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5}(a_k^2-12|a_k|)$의 값이 최소가 되도록 하는 수열 $\{a_n\}$의 공차의 값은? [4.8점]

① $\frac{14}{5}$ ② 3 ③ $\frac{16}{5}$ ④ $\frac{17}{5}$ ⑤ $\frac{18}{5}$

531. 그림과 같이 4이상의 자연수 n에 대하여 원의 둘레를 n등분하는 점 P_1, P_2, P_3, $\cdots$, P_n이 있다. n개의 점 중에서 임의로 택한 네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형 중 직사각형의 개수를 S_n이라 하자. $\sum_{n=4}^{26} S_n$의 값은? [5.2점]



① 356 ② 358 ③ 360 ④ 362 ⑤ 364

532. x 에 대한 방정식 $\cos x=\dfrac{1}{(2n-1)\pi}x$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 의 양의 실근의 개수를 $f(n)$ 이라 하자. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\frac{\{f(k)+1\}^2}{11}$ 의 값은? [4.7점]

① 140 ② 150 ③ 160
④ 170 ⑤ 180

533. 자연수 n에 대하여 방정식 $\cos nx=\sin x$의 서로 다른 실근의 개수를 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 다음을 구하시오. (단, $0\le x\le 2\pi$) [8.0점]

(1) a_1, a_2, a_3, a_4의 값을 구하시오. [2.0점]

(2) S_{100}의 값을 구하시오. [6.0점]

11. 수학적 귀납법(step1)

등차수열의 귀납적 정의

534. 수열 $\{a_n\}$이 귀납적으로 $a_1=10$, $a_2=7$,
$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$와 같이 정의 될 때, a_6의 값은?
[4.6점]

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

등비수열의 귀납적 정의

535. 수열 $\{a_n\}$ 이 귀납적으로

$a_1=6,\ a_2=-2,\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\ (n=1,2,3,\cdots)$

와 같이 정의될 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값은? [3.9점]

① $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{10}}\right)$ ② $\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{10}}\right)$ ③ $\frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{3^{10}}\right)$ ④ $\frac{7}{2}\left(1-\frac{1}{3^{10}}\right)$ ⑤ $\frac{9}{2}\left(1-\frac{1}{3^{10}}\right)$

여러가지 수열의 귀납적 정의

536. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=\dfrac{4}{n}$일 때, a_3의 값은? [3.4점]

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ 2

537. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=3$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{2n-1}+a_{2n}=2a_n-1$$

을 만족시킨다. $a_1+a_2+a_3+a_4$의 값은? [4.1점]

① 12 ② 11 ③ 10
④ 9 ⑤ 8

538. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1=5$, $a_{n+1}=a_n+2n$ $(n=1,2,3\cdots)$ 으로 정의될 때, a_7-a_2 의 값은? [4.2점]

① 24 ② 28 ③ 32
④ 36 ⑤ 40

539. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$a_1=21,\ a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2$를 만족시킬 때, a_4의 값은? [3.3점]

① $\frac{10}{3}$ ② $\frac{11}{3}$ ③ 4
④ $\frac{13}{3}$ ⑤ $\frac{14}{3}$

540. 첫째항이 3인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$\begin{cases} a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0 \\ a_{n+4}-a_n=16 \end{cases}$ 을 만족시킬 때 a_{15}의 값은? [4.8점]

① 55 ② 59 ③ 63
④ 67 ⑤ 71

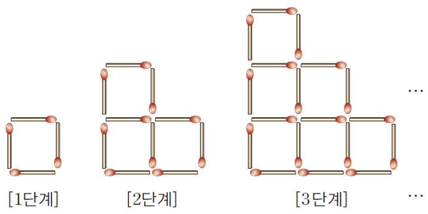
같은 수가 반복되는 수열

541. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=5,\ a_{n+1}\times a_n=5\ (n=1, 2, 3, \cdots)$ 로 정의될 때, a_7의 값은? [3.7점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

귀납적 정의의 도형의 활용

542. 그림과 같이 성냥개비를 사용하여 도형을 만들려고 한다. [n 단계]의 도형을 만드는 데 필요한 성냥개비의 개수를 a_n이라고 하고, a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 $a_{n+1}=a_n+f(n)$라 할 때, $f(10)$의 값은? (단, $f(n)$은 n에 관한 일차식이다.) [4.4점]



① 20 ② 22 ③ 24
④ 26 ⑤ 28

귀납적 정의의 실생활에서의 활용

543. 어떤 공장의 기름 탱크에 $2000L$의 기름이 들어 있다. 공장에서는 매일 하루 동안 기름 탱크에 들어 있는 기름의 양의 $\frac{1}{4}$을 사용한 후 그날의 작업이 끝나면 $200L$의 기름을 보충한다. 하루 공장 가동이 끝난 후 기름 탱크에 들어 있는 기름의 양을 기록한다고 한다. n번째 날 기록한 기름의 양을 a_n이라고 할 때, a_2의 값은? [4.9점]

① 1275 ② 1325 ③ 1375
④ 1425 ⑤ 1475

수학적 귀납법

544. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식 (★)이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다.

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 \quad \cdots\cdots \ (★)$$

> $n=1$일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=$ $\boxed{(가)}$이므로 등식 (★)이 성립한다.
> $n=k$일 때, 등식 (★)이 성립한다고 가정하면,
>
> $$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left\{\frac{1}{2}k(k+1)\right\}^2 \cdots\cdots \ (♥)$$
>
> 이다. 등식 (♥)의 양변에 $\boxed{(나)}$를 더하면
>
> $$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+\boxed{(나)}$$
> $$=\left\{\frac{1}{2}k(k+1)\right\}^2+\boxed{(나)}$$
> $$=\boxed{(다)}$$
>
> 즉, $n=k+1$일 때에도 등식 (★)이 성립한다.
> 따라서 등식 (★)은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)에 알맞은 식을 $f(k)$, (다)에 알맞은 식을 $g(k)$라고 할 때, $p+f(1)+g(1)$의 값은?
[3.9점]

① 14 ② 15 ③ 16
④ 17 ⑤ 18

545. 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad \cdots \ (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

[증 명]

> (i) $n=1$일 때, (좌변)$=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}$, (우변)$=1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
> 이므로 (*)이 성립한다.
> (ii) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면
>
> $$\sum_{k=1}^{m}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}=1-\frac{1}{\sqrt{m+1}}$$
>
> 이다. $n=m+1$일 때,
>
> $$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}$$
> $$=1-\frac{1}{\sqrt{m+1}}+\frac{\sqrt{m+2}-\sqrt{m+1}}{\sqrt{\boxed{(가)}}}$$
> $$=1-\frac{1}{\sqrt{\boxed{(나)}}}$$
>
> 이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$
>
> 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $f(1)+g(2)$의 값은?
[4.8점]

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

546. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$ 이

성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

[증 명]

(i) $n=1$ 일 때

(좌변)$=\frac{1}{1\times3}=\frac{1}{3}$, (우변)$=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$

따라서 $n=1$ 일 때 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$

$n=k+1$ 일 때

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\boxed{(가)}$$

$$=(\boxed{(나)})+\boxed{(가)}=\boxed{(다)}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 성립한다.

(i)과 (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$ 이다

.

위의 (가),(나),(다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$, $h(k)$라 할 때,

$\frac{g(11)\times h(11)}{f(11)}$ 의값은? [4.9점]

① 99 ② 110 ③ 121
④ 132 ⑤ 143

547. 모든 자연수 n에 대하여 $3^{2n}-1$이 8의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

[증 명]

(1) $n=1$일 때 $3^2-1=8$은 8의 배수이다.
따라서 $n=1$일 때 $3^{2n}-1$은 8의 배수이다.

(2) $n=k$일 때 $3^{2n}-1$이 8의 배수라 가정하면
$3^{2k}-1=8m$ (m은 자연수)
이므로 $3^{2k}=8m+1$
$n=k+1$일 때
$3^{2(k+1)}-1=9\times3^{2k}-1=\boxed{(가)}\times(9m+1)$
이므로 $n=k+1$일 때도 $3^{2n}-1$은 8의 배수이다.

(1), (2)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $3^{2n}-1$은 8의 배수이다.

위의 (가)에 알맞은 값은? [4.1점]

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

11. 수학적 귀납법(step2)

등차수열의 귀납적 정의

548. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 수열 $\{a_n + a_{n+1}\}$은 공차가 3인 등차수열이다.
(나) $a_{20} = 15$

$\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값은? [4.5점]

① 160 ② 170 ③ 180
④ 190 ⑤ 200

549. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 = 50$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $(a_{n+1})^3 - (a_n)^3 = 3a_{n+1}a_n(a_{n+1} - a_n) - 27$
이 성립할 때, a_{16}의 값은? [4.4점]

① 5 ② 4 ③ 3
④ 2 ⑤ 1

등비수열의 귀납적 정의

550. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_1 = 3,\ {a_{n+1}}^2 = a_{n+2} \cdot a_n$$

을 만족시킨다. $\log_3 a_5 = \frac{4}{3}$일 때, a_{13}의 값은?
[4.7점]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

여러가지 수열의 귀납적 정의

551. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1$이고 모든 자연수 n에 대하여
$a_{n+1} = a_n + 2n - 1$
을 만족시킬 때, a_5의 값은? [3.7점]

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

552. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_1=-1$, $a_{n+1}=(n+1)a_n+3$ (단, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$) 일 때, a_3+a_4의 값은? [4.2점]

① 27 ② 30 ③ 33
④ 36 ⑤ 39

553. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1=2, a_2=8$ 이고 모든 자연수 n 에 대하여

$$(3n-2)a_{n+2}=(3n+4)a_n$$

을 만족시킬 때, $\frac{a_8}{a_7}$ 의 값은? [5.1점]

① $\frac{20}{19}$ ② $\frac{21}{19}$ ③ $\frac{22}{19}$
④ $\frac{23}{19}$ ⑤ $\frac{24}{19}$

554. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n+a_{n+1}=2n-1$을 만족시킨다. $a_3-a_4=3$일 때, a_6의 값을 구하고, 그 과정을 서술하시오. [5.0점]

555. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_5가 될 수 있는 모든 수의 합은? [5.5점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n+a_{n+1}=4n$
(나) 어떤 자연수 k에 대하여 $a_k-a_{k+1}=12$

① 18 ② 20 ③ 22
④ 24 ⑤ 26

556. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n}=a_n-2$
(나) $a_{2n+1}=a_n+2$

$a_{21}=3$일 때, $\sum_{n=1}^{127}a_n$의 값을 구하고, 그 과정을 작성하시오.[7.0점]

557. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$\begin{cases} a_{3n-1}=2a_n+1 \\ a_{3n}=-a_n+2 \\ a_{3n+1}=a_n+1 \end{cases}$$

을 만족시킨다. $\sum_{k=2}^{13} a_k$의 값은? [5.0점]

① 30 ② 28 ③ 26
④ 24 ⑤ 22

558. 수열 $\{a_n\}$은 $a_4=2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-2n+1 & (a_n>0) \\ a_n+2n-1 & (a_n\le 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. 모든 a_2의 값의 합은?
[4.9점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

559. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}=\begin{cases} -a_n & (a_n<0) \\ a_n-2 & (a_n\ge 0) \end{cases}$을 만족시킨다.

$0<a_1<2$이고 $\sum_{k=1}^{30} a_k=\frac{3}{2}$일 때, a_1의 값은? [5.2점]

① $\frac{11}{8}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{13}{8}$
④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{15}{8}$

560. 첫째항이 $\frac{2}{5}$인 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}=\begin{cases} 2a_n & (a_n\le 1) \\ -a_n+2 & (a_n>1) \end{cases}$ 을 만족시킨다. a_4+a_{17}의 값은?
[4.0점]

① $\frac{4}{5}$ ② 1 ③ $\frac{6}{5}$
④ $\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{8}{5}$

561. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}-\dfrac{1}{a_n} & (a_n>0)\\ 3|a_n| & (a_n\le 0)\end{cases}$$

이고, $a_6=-\dfrac{1}{9}$일 때, $\sum_{k=1}^{35}a_k$의 값은? [4.3점]

① 59 ② 56 ③ 53
④ 50 ⑤ 47

같은 수가 반복되는 수열

562. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=$(7^n을 10으로 나누었을 때의 나머지) 일 때 a_{2023}의 값은? [4.3점]

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

563. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. 일반항 a_n이 $a_n=2\cos\dfrac{n\pi}{6}$일 때, a_4+S_{30}의 값은?[4.4점]

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

a_n과 S_n의 관계

564. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라고 하자. S_n이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $S_1=9$
(나) $(S_{n+1}-S_n)^2=3(S_{n+1}+S_n)\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$a_1+\sum_{k=1}^{10}a_{2k}$의 값은? [5.5점]

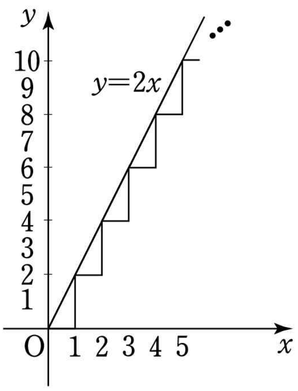
① 324 ② 339 ③ 350
④ 369 ⑤ 399

귀납적 정의의 도형의 활용

565. 좌표평면에서 그림과 같이 길이가 1과 2인 선분이 교대로 수직으로 만나도록 연결된 경로가 있다. 이 경로를 따라 원점에서 멀어지도록 움직이는 점 P의 위치를 나타내는 점 A_n을 다음과 같은 규칙으로 정한다.

> (가) A_0는 원점이다.
> (나) n이 자연수일 때, A_n은 점 A_{n-1}에서 점 P가 경로를 따라 $\frac{2n-1}{25}$만큼 이동한 위치에 있는 점이다.

예를 들어 점 A_2와 A_6의 좌표는 각각 $\left(\frac{4}{25},\ 0\right)$, $\left(1,\ \frac{11}{25}\right)$이다. 자연수 n에 대하여 점 A_n중 직선 $y=2x$ 위에 있는 점을 원점에서 가까운 순서대로 나열할 때, 두 번째 점의 y좌표를 α라 하자. α의 값은?[4.8점]



① 12 ② 16 ③ 20 ④ 24 ⑤ 28

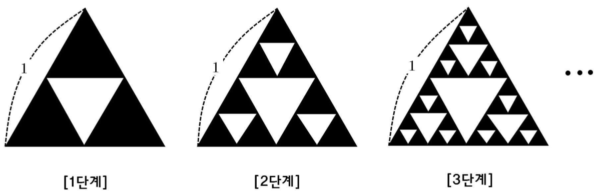
566. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 P_n을 <조건>에 따라 정한다.

> (가) 세 점 P_1, P_2, P_3의 좌표는 각각 $(1,\ 0)$, $(-1,\ 2)$, $(-1,\ 4)$이다.
> (나) 선분 P_nP_{n+1}의 중점과 선분 $P_{n+2}P_{n+3}$의 중점은 같다.

예를 들어, 점 P_4의 좌표는 $(1,\ -2)$이다. 점 P_n의 좌표가 $(a_n,\ b_n)$일 때, $\sum_{k=1}^{10}(|a_k|-b_k)$의 값은?

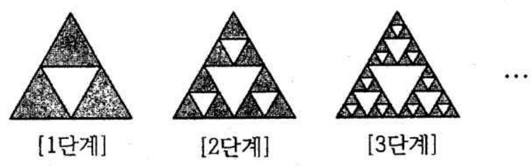
① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

567. 그림과 같이 [1단계]에서 한 변의 길이가 1인 정삼각형의 각변의 중점을 연결하여 가운데 정삼각형을 잘라낸다. [2단계]에서 첫 번째 시행에서 남은 3개의 정삼각형에서 같은 방법으로 가운데 부분을 잘라낸다. 이와 같은 시행을 반복할 때, [n단계]까지 잘라낸 정삼각형의 개수를 a_n이라고 하자. 예를 들어, $a_1=1$, $a_2=4$이다. $a_{n+1}=pa_n+q$가 성립할 때, $10p+q$의 값은?
(단, p와 q는 상수이다.) [4.4점]



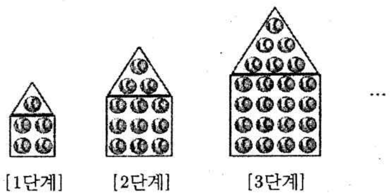
① 13 ② 22 ③ 29
④ 31 ⑤ 33

568. 아래 그림과 같이 [1단계]에서 한 변의 길이가 1인 정삼각형의 각 변의 중점을 연결하여 가운데 정삼각형을 잘라낸다. [2단계]에서 첫 번째 시행에서 남은 3개의 정삼각형에서 같은 방법으로 가운데 부분을 잘라낸다. 이와 같은 시행을 반복할 때, [n단계]까지 잘라낸 정삼각형의 개수를 a_n이라고 하자. 예를 들어, $a_1=1$, $a_2=4$, $a_3=13$이다. a_6의 값은? [4.7점]



① 40 ② 81 ③ 121
④ 202 ⑤ 364

569. 다음 그림과 같이 야구공을 ⌂모양으로 배열할 때, [6단계]에 있는 야구공의 개수를 구하면? [4.5점]



① 57 ② 61 ③ 70
④ 78 ⑤ 85

570. 평면 위에 n개의 원이 있다. 이때 임의의 두 원은 서로 다른 두 점에서 만나고, 어떤 세 개의 원도 한 점에서 만나지 않는다. 이 n개의 원으로 나누어진 영역의 개수를 a_n이라고 할 때, $a_n + a_{n+1} = 102$를 만족시키는 자연수 n의 값은? [3.9점]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

수학적 귀납법

571. $a_1 = 1,\ a_2 = -1,\ a_3 = 4$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $n(n-2)a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i$를 만족시킨다. 다음은 $a_n = \frac{8}{(n-1)(n-2)}\ (n \ge 3)$임을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n=3$일 때, $a_3 = 4 = \frac{8}{(3-1)(3-2)}$이므로 성립한다.
> (ii) $n=k\ (k \ge 3)$일 때, 성립한다고 가정하면
> $a_k = \frac{8}{(k-1)(k-2)}$이다.
> $k(k-2)a_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} a_i = a_k + \sum_{i=1}^{k-1} a_i$
> $= a_k + \boxed{(가)}\ a_k$
> $= \frac{\boxed{(나)}}{k-1}$
> 이다. 그러므로 $a_{k+1} = \frac{1}{k(k-2)} \times \frac{\boxed{(나)}}{k-1} = \frac{8}{\boxed{(다)}}$
> 이다. 따라서 $n=k+1$일 때 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 $n \ge 3$인 모든 자연수 n에 대하여
> $a_n = \frac{8}{(n-1)(n-2)}$다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k),\ g(k),\ h(k)$라 할 때, $\frac{f(10) \times g(12)}{h(8)}$의 값은?[4.2점]

① 78 ② 90 ③ 102
④ 114 ⑤ 126

572. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}\cdots(*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(ⅰ) $n=1$일 때,

(좌변)$=\frac{1}{2^1}=\frac{1}{2}$, (우변)$=2-\boxed{(가)}$

따라서 $n=1$일 때 (*)이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{k}{2^k}=2-\frac{k+2}{2^k}$$

양변에 $\frac{k+1}{\boxed{(나)}}$을 더하면

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{k}{2^k}+\frac{k+1}{\boxed{(나)}}=2-\frac{k+2}{2^k}+\frac{k+1}{\boxed{(나)}}$$

$$=2-\frac{\boxed{(다)}}{\boxed{(나)}}$$

이다. 따라서 $n=k+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k), g(k)$ 라 할 때, $2p+f(2)+g(4)$의 값은? [4.4점]

① 14 ② 15 ③ 16
④ 17 ⑤ 18

573. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$-1^2+2^2-3^2+4^2-\cdots+(-1)^n n^2=\frac{(-1)^n n(n+1)}{2}\cdots(*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=-1^2=-1$, (우변)$=\frac{-1\times1\times2}{2}=-1$이므로

(*)이

성립한다.

(ii) $n=k$일 때,

(*)이 성립한다고 가정하면

$$-1^2+2^2-3^2+4^2-\cdots+(-1)^k k^2=\frac{(-1)^k k(k+1)}{2}$$ 이다.

위의 등식의 양변에 $(-1)^{k+1}(k+1)^2$을 더하여

정리하면

$$-1^2+2^2-3^2+4^2-\cdots+(-1)^{k+1}(k+1)^2$$

$$=\frac{(-1)^k k(k+1)}{2}+(-1)^{k+1}(k+1)^2$$

$$=\frac{(-1)^k(k+1)}{2}\times(\boxed{(가)})$$

$$=\frac{(-1)^{k+1}(k+1)(k+2)}{2}$$

그러므로 $n=k+1$일 때도(*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 (*)이

성립한다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(k)$라 할 때, $\sum_{k=1}^{10}\{f(k)\}^2$의 값은?

[4.6점]

① 605 ② 615 ③ 625
④ 635 ⑤ 645

574. 다음은 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n에 대하여

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n} \qquad \cdots(*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n=2$일 때
>
> (좌변)= $\boxed{(가)}$, (우변)$=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$
>
> 이므로 $(*)$이 성립한다.
>
> (ii) $n=k$ $(k \geq 2)$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면
>
> $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$
>
> 이다.
>
> 이 부등식의 양변에 $\boxed{(나)}$ 을(를) 더하면
>
> $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\boxed{(나)}<2-\frac{1}{k}+\boxed{(나)}$
>
> 이때, $2-\frac{1}{k}+\boxed{(나)}-\boxed{(다)}=\frac{-1}{k(k+1)^2}$ 이고
>
> $\frac{-1}{k(k+1)^2}<0$ 이므로
>
> $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\boxed{(나)}<\boxed{(다)}$ 이다.
>
> 따라서 $n=k+1$ 일 때도 $(*)$이 성립한다.
>
> (i), (ii)에 의하여 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n에 대하여
>
> $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$ 이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$이라 할 때, $p+f(1)+g(1)$ 의 값은? [4.6점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

575. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $3^n > n^2+1 \cdots$ ㉠이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때, (좌변)= $\boxed{(가)}$, (우변)=2이므로
>
> ㉠이 성립한다.
>
> (ii) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면
>
> $3^k > k^2+1 \cdots$ ㉡
>
> ㉡의 양변에 3을 곱하면 $3^{(나)} > 3k^2+3$
>
> 이 때 $3k^2+3=(다)+\left\{2\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right\}>\boxed{(다)}$
>
> 즉, $3^{(나)} > 3k^2+3 > \boxed{(다)}$이므로
>
> $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.
>
> (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k), g(k)$라 할 때, $p\times\frac{g(6)}{f(9)}$의 값은? [4.3점]

① 12 ② 15 ③ 18
④ 21 ⑤ 24

576. $n \geq 5$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $2^n > n^2$이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하시오. [9.0점]

577. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1} \quad \cdots ①$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 <증명>한 것이다.

〈증명〉

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=\dfrac{1}{1\times3}=\dfrac{1}{3}$,

(우변)$=\dfrac{1}{2\times1+1}=\dfrac{1}{3}$

따라서 $n=1$일 때 ①이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\boxed{(가)}$$

양변에 $\dfrac{1}{\boxed{(나)}}$을 더하면

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{\boxed{(나)}}$$

$$=\boxed{(가)}+\frac{1}{\boxed{(나)}}=\frac{\boxed{(다)}}{2k+3} \quad \cdots ②$$

②는 ①의 n에 $k+1$을 대입한 것과 같으므로 $n=k+1$일 때도 ①이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$, $h(k)$이라 할 때, $\dfrac{f(2)g(2)}{h(6)}$의 값은? [5.1점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

578. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 n^3+3n^2+2n이 6의 배수임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

> $a_n=n^3+3n^2+2n$이라 하자.
> (ⅰ) $n=1$이면 $a_1=\boxed{(가)}$ 이므로 6의 배수이다.
> (ⅱ) $n=k$일 때, a_n이 6의 배수라 가정하면
> $(k+1)^3+3(k+1)^2+2(k+1)$
> $=(k^3+3k^2+2k)+\boxed{(나)}(k+1)(k+\boxed{(다)})$
> 이므로 $n=k+1$일 때도 a_n은 6의 배수이다.
> (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 a_n은 6의 배수이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 각각 $p,\ q,\ r$라 할 때, $p-q+r$의 값은? [5.4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

579. $a_1=1,\ a_2=-1,\ a_3=4$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $n(n-2)a_{n+1}=\sum_{i=1}^{n}a_i$를 만족시킨다. 다음은 $a_n=\frac{8}{(n-1)(n-2)}\ (n\ge 3)$임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

| 증 명 |

> (ⅰ) $n=3$일 때, $a_3=4=\frac{8}{(3-1)(3-2)}$ 이므로 성립한다.
> (ⅱ) $n=k\,(k\ge 3)$일 때, 성립한다고 가정하면
> $a_k=\frac{8}{(k-1)(k-2)}$ 이다.
> $k(k-2)a_{k+1}=\sum_{i=1}^{k}a_i=a_k+\sum_{i=1}^{k-1}a_i$
> $=a_k+(k-1)(k-3)a_k$
> $=a_k\times\boxed{(가)}$
> $=\frac{8}{(k-1)(k-2)}\times\boxed{(가)}$
> $=\frac{\boxed{(나)}}{k-1}$
> 이다. 그러므로
> $a_{k+1}=\frac{1}{k(k-2)}\times\frac{\boxed{(나)}}{k-1}=\frac{8}{\boxed{(다)}}$
> 이다. 따라서 $n=k+1$일 때도 성립한다.
> (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $n\ge 3$인 모든 자연수 n에 대하여
> $a_n=\frac{8}{(n-1)(n-2)}$ 이다.

위의 (가), (나), (다) 에 알맞은 식을 각각 $f(k),\ g(k),\ h(k)$라 할 때, $\frac{f(12)\times g(11)}{h(10)}$ 의 값은? [4.3점]

① 64 ② 68 ③ 72
④ 76 ⑤ 80

580. $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{2n}{n+1} \cdots$ ①

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정을 쓰시오. [5.0점]

581. 수열 $\{a_n\}$을 $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$이라 할 때, 다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=\frac{n(n+1)}{4}(2a_{n+1}-1)$ ……(★)

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

[증 명]

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=a_1$, (우변)$=a_2-\boxed{\text{(가)}}=1=a_1$

이므로 (★)이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, (★)이 성립한다고 가정하면

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+ma_m=\frac{m(m+1)}{4}(2a_{m+1}-1)$이다.

$n=m+1$일 때, (★)이 성립함을 보이자.

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+ma_m+(m+1)a_{m+1}$

$=\frac{m(m+1)}{4}(2a_{m+1}-1)+(m+1)a_{m+1}$

$=(m+1)a_{m+1}\left(\boxed{\text{(나)}}+1\right)-\frac{m(m+1)}{4}$

$=\frac{(m+1)(m+2)}{2}\left(a_{m+2}-\boxed{\text{(다)}}\right)-\frac{m(m+1)}{4}$

$=\frac{(m+1)(m+2)}{4}(2a_{m+2}-1)$

따라서 $n=m+1$일 때도 (★)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=\frac{n(n+1)}{4}(2a_{n+1}-1)$이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $f(p)\times g(p)$의 값은? [4.7점]

① $\frac{1}{10}$　② $\frac{1}{5}$　③ $\frac{3}{10}$　④ $\frac{2}{5}$　⑤ $\frac{1}{2}$

582. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 등식

$\sum_{i=1}^{n} 6i^2(n-i) = \frac{1}{2}n^2(n^2-1) \cdots\cdots (*)$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n=1$ 일 때, (좌변)$=0$, (우변)$=0$ 이므로 (*)이 성립한다.
>
> (ii) $n=k$ 일 때,
>
> (*) 이 성립한다고 가정하면
>
> $\sum_{i=1}^{k} 6i^2(k-i) = \frac{1}{2}k^2(k^2-1)$ 이다.
>
> $n=k+1$ 일 때, (*) 이 성립함을 보이자.
>
> $\sum_{i=1}^{k+1} 6i^2\{(k+1)-i\}$
>
> $= \sum_{i=1}^{\boxed{(가)}} 6i^2\{(k+1)-i\} + 6(k+1)^2\{(k+1)-(k+1)\}$
>
> $= \frac{1}{2}k^2(k^2-1) + \boxed{(나)}$
>
> $= \frac{1}{2}k(k+1)\boxed{(다)}$
>
> $= \frac{1}{2}(k+1)^2\{(k+1)^2-1\}$
>
> 그러므로 $n=k+1$ 일 때도 (*) 이 성립한다.
>
> 따라서 모든 자연수 n 에 대하여 (*) 이 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k), g(k), h(k)$ 라고 할 때, $\frac{g(4)}{f(3)h(5)}$ 의 값은? [5.0점]

① 1 ② $\frac{10}{7}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{11}{6}$ ⑤ 2

583. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $2^{3n-2}+3^n$이 5의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때,
>
> $2^{3\times1-2}+3^1 = \boxed{(가)}$ 이므로 $2^{3\times1-2}+3^1$은 5의 배수이다.
>
> (i) $n=k$일 때, $2^{3k-2}+3^k$이 5의 배수라고 가정하면 자연수 N에 대하여 $2^{3k-2}+3^k=5N$으로 놓을 수 있다.
>
> $2^{3(k+1)-2}+3^{k+1} = \boxed{(나)} \times N - 5\times3^{(다)}$
>
> 이때 $\boxed{(나)} \times N$ 과 $5\times3^{(다)}$이 모두 5의 배수이므로 $2^{3(k+1)-2}+3^{k+1}$도 5의 배수이다.
>
> (i),(i)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $2^{3n-2}+3^n$은 5의 배수이다.

위 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 p, q라 하고, (다)에 알맞은 식을 $f(k)$라 할 때, $p+q+f(4)$의 값은?[5.0점]

① 45 ② 46 ③ 47
④ 48 ⑤ 49

584. 다음은 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1=2$,

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\dfrac{n+1}{2}a_n\ (n\geq 1)$ 으로 정의될 때, 다음은 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이 $a_n=2n\ (n\geq 1)$ 임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

[증 명]

(1) $n=1$ 일 때, $a_1=2=2\times 1$

(2) $n=k$ 일 때, $a_k=2k$ 라 가정하자.

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k=\dfrac{k+1}{2}a_k$ ⋯⋯ ㉠

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{k+1}=\boxed{(가)}\times a_{k+1}$ ⋯⋯ ㉡

이므로 ㉠, ㉡ 에서

$a_{k+1}=\boxed{(나)}\times a_k=2(k+1)$

따라서 (1),(2)에 의하여

모든 자연수 n 에 대하여 $a_n=2n$ 이다.

위의 과정에서 (가)와 (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$ 와 $g(k)$ 라 할 때, $\dfrac{f(3)}{g(4)}$ 의 값은? [4.5점]

① 2　② $\dfrac{5}{2}$　③ 3

④ $\dfrac{7}{2}$　⑤ 4

585. 다음은 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}>\dfrac{2n}{n+1}$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

[증 명]

(1) $n=2$일 때

(좌변)$=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$, (우변)$=\dfrac{2\times 2}{2+1}=\dfrac{4}{3}$

따라서 주어진 부등식이 성립한다.

(2) $n=k\ (k\geq 2)$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}>\frac{2k}{k+1}$$

위의 식의 양변에 $\dfrac{1}{k+1}$을 더하면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}>\frac{(가)}{k+1}$$

이때 $\dfrac{(가)}{k+1}-\dfrac{(나)}{k+2}=\dfrac{k}{(k+1)(k+2)}>0$이므로

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}>\frac{2(k+1)}{k+1}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(1), (2)에서 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $f(5)\times g(4)$의 값은? [4.2점]

① 106　② 108　③ 110

④ 112　⑤ 114

586. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 n^3+3n^2+2n은 6의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. (가), (나), (다)에 알맞은 수들을 모두 곱한 값은? [4.5점]

> $a_n=n^3+3n^2+2n$이라고 하자.
>
> (i) $n=1$이면 $a_1=\boxed{(가)}$이므로 6의 배수이다.
>
> (ii) $n=k$일 때 a_n이 6의 배수라고 가정하면
>
> $(k+1)^3+3(k+1)^2+2(k+1)$
>
> $=(k^3+3k^2+2k)+\boxed{(나)}(k+1)(k+\boxed{(다)})$
>
> 이므로 $n=k+1$일 때도 a_n은 6의 배수이다.
>
> (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 a_n은 6의 배수이다.

① 34　② 36　③ 38
④ 40　⑤ 42

11. 수학적 귀납법 (step3)

587. 자연수 n에 대하여 P_n은 <조건>에 따라 정해진다.

[조 건]

(가) 점 P_1의 좌표는 $(1,\ 1)$이다.

(나) 점 P_n의 좌표가 $(a,\ b)$일 때,

$b<3^a$이면 점 P_{n+1}의 좌표는 $(a,\ b+1)$이고,

$b=3^a$이면 점 P_{n+1}의 좌표는 $(a+1,\ 1)$이다.

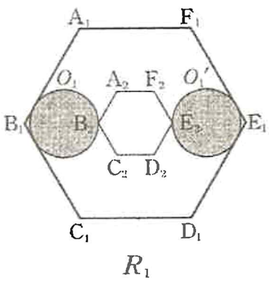
점 P_n의 좌표가 $(7,\ 3^7)$일 때, n의 값은? [5.5점]

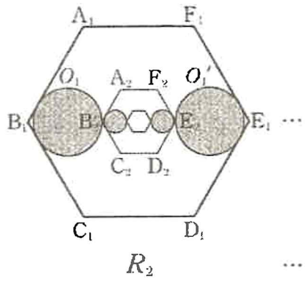
① $\frac{3^7-3}{2}$ ② $\frac{3^7}{2}$ ③ $\frac{3^7+3}{2}$

④ $\frac{3^8-3}{2}$ ⑤ $\frac{3^8}{2}$

588. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정육각형 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$의 내부에 선분 B_1E_1위에 중심이 있는 두 원 O_1, O_1'과 선분 B_1E_1위에 대각선 B_2E_2가 있는 정육각형 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$를 그리는데, 두 원 O_1, O_1'의 지름의 길이는 선분 B_2E_2의 길이와 같고, 두 원 O_1, O_1'은 각각 정육각형 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$의 두 변에 접하고 정육각형 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$와 한 점에서 만나도록 그린다. 두 원 O_1, O_1'에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 정육각형 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$의 내부에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 두 원 두 원 O_2, O_2'과 정육각형 $A_3B_3C_3D_3E_3F_3$을 각각 그리고 두 원 O_2, O_2'에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 모든 부분의 둘레의 길의 합을 L_n이라 할 때, $\frac{L_4}{L_2}$의 값은?

(단, $\overline{B_nB_{n+1}}<\overline{B_nE_{n+1}}$이고, 원 O_n은 점 B_{n+1}을 지난다. [4.8점]





…

① $\frac{27-6\sqrt{3}}{16}$ ② $\frac{14-3\sqrt{3}}{8}$ ③ $\frac{29-6\sqrt{3}}{16}$

④ $\frac{15-3\sqrt{3}}{8}$ ⑤ $\frac{31-6\sqrt{3}}{16}$

589. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $b_n = a_n + 2n + 1$이라 하고, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 $f(n)$이라 하자. $f(n)$이 다음 조건을 만족할 때, 수열 $\{a_n\}$이 양수가 되는 n의 최솟값은? [5.3점]

(가) $f(12) - f(1) = 55$이다.
(나) $1 \le k \le 4$인 자연수 k에 대하여 $f(5-k) = f(5+k)$이다.

① 15 ② 16 ③ 17
④ 18 ⑤ 19

590. 첫째항이 2인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $T_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1}\right)a_k$ 라고 할 때, $T_n - T_{n-1} = \frac{a_n}{2}$ $(n \ge 2)$를 만족시킨다. 이때, a_4의 값은? [5.3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

591. 물 30L가 들어 있는 어느 수족관에 매일 전날의 물의 $\frac{1}{3}$을 퍼내고, 8L의 물을 새로 넣는다. n일 후 수족관에 남아 있는 물의 양을 $a_n\text{L}$라 할 때, a_{10}의 값은? [4.6점]

① $3\left\{5+\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right\}$ ② $4\left\{6+\left(\frac{2}{3}\right)^{9}\right\}$ ③ $5\left\{7+\left(\frac{2}{3}\right)^{9}\right\}$
④ $6\left\{4+\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}$ ⑤ $8\left\{6+\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}$

592. 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n = \frac{1}{2} + S_n$으로 정의하고, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 T_n이라 할 때, 수열 $\{c_n\}$을 $c_n = \frac{3}{4} + T_n$으로 정의하자. 수열 $\{c_n\}$이 등비수열일 때, $2a + r$의 값은?(단, a, r은 상수이고, $r \ne 1$, $ar \ne 0$이다.)[5.1점]

① 5 ② 8 ③ 11
④ 14 ⑤ 17

593. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5=12$, $a_6=14$이고 $a_1 \neq a_2$이다. 모든 자연수 n에 대하여 $a_{2n+2}=a_{2n}+m$, $a_{2n+1}=m \times a_{2n-1}$을 만족하는 자연수 m이 존재할 때, a_7+a_8의 값은? [4.9점]

① 43 ② 42 ③ 41
④ 40 ⑤ 39

594. 첫째항이 $a\ (a<0)$이고 공비가 $r\ (r<-1)$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $b_n=a_1a_2a_3\cdots a_n$이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 $c_n=\begin{cases} n & (b_n>0) \\ 0 & (b_n \leq 0) \end{cases}$이라 할 때, $\sum_{k=1}^{m} c_k=715$가 성립한다. 자연수 m의 최댓값은? [4.9점]

① 51 ② 52 ③ 53
④ 54 ⑤ 55

595. 첫 번째 항이 1 인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 첫 번째 항부터 제 n 번째 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, 2 이상의 자연수 n 에 대하여 $a_n=\dfrac{3{S_n}^2}{3S_n-1}$ 의 관계가 성립한다. $S_8=\dfrac{p}{q}$ 라고 할 때, $p+q$ 의 값을 구하고 그 풀이 과정을 자세히 서술하시오. (단, $S_n \neq 0$ 이고, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [5점]

596. 수열 $\{a_n\}$은 $a_n=\begin{cases} 1 & (n \leq 8) \\ 2 & (n=9) \end{cases}$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+9}=\dfrac{a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+8}}{a_n \times a_{n+1} \times a_{n+2} \times \cdots \times a_{n+8}-1}$ 을 만족시킨다. $a_{20}+a_{202}+a_{2023}$의 값은? [5.7점]

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

597. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

이 성립한다. $a_{100} = p - q\sqrt{11}$ 일 때, 자연수 p, q에 대하여 $p+q$의 값은? [4.2점]

① 13 ② 15 ③ 17
④ 19 ⑤ 21

598. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = \frac{1}{8}(a_n+2)^2$ 일 때, $\sum_{k=1}^{m} a_k = 128$ 을 만족시키는 자연수 m의 값을 구하는 과정을 단계에 맞게 논술하시오.

[$1-1$] $n=1$ 일 때, a_1을 구하고, 그 과정을 논술하시오. [2점]

[$1-2$] $n \geq 2$ 일 때, a_n과 a_{n-1} 사이의 관계식을 구하고, 그 과정을 논술하시오. [4점]

[$1-3$] 위에서 구한 결과를 이용하여 $\sum_{k=1}^{m} a_k = 128$ 을 만족시키는 자연수 m의 값을 구하고, 그 과정을 논술하시오. [4점]

599. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 > 0$이고 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n} = a_n + 2$
(나) $a_{2n+1} = a_{2n} \times a_{2n+2}$

$a_3 = 24$일 때, a_{11}의 값은?[5.4점]

① 4436 ② 4432 ③ 4428
④ 4424 ⑤ 4420

600. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) a_1은 1이 아닌 양의 실수이다.
(나) 모든 자연수 n에 대하여
$a_{2n-1} + a_{2n} = 1$이고 $a_{2n} \times a_{2n+1} = 1$이다.

$\sum_{n=1}^{15}(|a_n| - a_n) = 10$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [5.1점]

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

601. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) a_1은 1이 아닌 양수이다.
(나) 모든 자연수 n에 대하여
$a_{2n-1} + a_{2n} = 1$이고 $a_{2n} \times a_{2n+1} = 1$이다.

$\sum_{n=1}^{14}(|a_n| + a_n) = 24$가 되도록 하는 모든 a_1의 값을 있는 대로 구하고 그 과정을 서술하시오. [10.0점]

602. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) a_1은 양수이다.
(나) 모든 자연수 n에 대하여
$a_{2n-1} + a_{2n} = -1$이고 $a_{2n} \times a_{2n+1} = 1$이다.

다음 물음에 답하시오. [총 8.0점]

(1) $a_1 = a$라 할 때, $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$를 각각 a로 표현하고 그 부호를 구하는 과정을 논술하시오. [3.0점]

(2) $\sum_{n=1}^{15}(|a_n| + a_n) = 14$가 되도록 하는 모든 a의 값을 구하고 그 과정을 논술하시오. [5.0점]

603. $a_3=-6$이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=a_n+a_{a+2}$ $(n\ge 1)$ 이라 하고, 두 집합 A, B를

$A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7\}$

$B=\{b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ b_6,\ b_7\}$

라 하자. $n(A\cap B)=4$가 되도록 하는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 모든 a_9의 값의 합은?

[5.2점]

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

604. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}-a_n+3 & (a_n\le 0)\\ a_n-1 & (a_n>0)\end{cases}$$을 만족시킨다.

$a_4+a_5=7$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4.6점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

605. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}2n+a_n & (a_n<n)\\ a_n-p & (a_n\ge n)\end{cases}$$을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 p의 값의 합은? [5.1점]

(가) p는 15 이하의 자연수이다.
(나) $a_m=0,\ a_{m+3}=0$인 자연수 m이 존재한다.

① 19 ② 20 ③ 21 ④ 22 ⑤ 23

606. 수열 $\{a_n\}$은 $-6<a_1<-3$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}-3a_n & (a_n\ge 0)\\ a_n+3 & (a_n<0)\end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_6=2$일 때, a_1의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. [7.0점]

607. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n+3}{2} & (a_n\text{이 홀수인 경우})\\ \dfrac{a_n}{2} & (a_n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

을 만족한다.

10 이하의 자연수 m에 대하여 $a_m=1$인 m의 개수가 3개일 때, a_1의 최댓값은? [4.3점]

① 28 ② 30 ③ 32
④ 34 ⑤ 36

608. 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 이 있다. 자연수 m에 대하여 a_1의 값이 될 수 있는 모든 수의 곱을 $P(m)$이라 할 때, $\sum_{m=2}^{10}P(m)$의 값을 구하고 그 과정을 논술하시오. (단, 만족하는 a_1이 유일하면 $a_1=P(m)$이다.) [7점]

> (가) $a_6=2^m$
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n & (a_n>0)\\ 2^{a_n} & (a_n\le 0)\end{cases}$$

609. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1=5$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$\begin{cases}a_{2n}=a_n-1\\ a_{2n+1}=2a_n-3\end{cases}$$

을 만족시킨다. 집합

$A=\{a_n\,|\,n\text{은 }70\text{이하의 자연수}\}$ 의 원소의 값 중 최댓값은? [4.8점]

① 61 ② 63 ③ 65
④ 67 ⑤ 69

610. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1=k$이고, 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+n+2k & (a_n\le 0)\\ -a_n+n-2k & (a_n>0)\end{cases}$$
> 이다.

$a_5=-17$일 때, k의 값을 α, $a_5=6$일 때, k의 값을 β라 하자. $\alpha+\beta$의 값을 구하고, 그 과정을 서술하시오. [7.0점]

611. 수열 $\{a_n\}$은 $2 < a_1 < 3$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -3a_n & (a_n < 0) \\ a_n - 3 & (a_n \geq 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_8 = 2$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [5.5점]

① $\frac{128}{27}$ ② $\frac{43}{9}$ ③ $\frac{130}{27}$
④ $\frac{131}{27}$ ⑤ $\frac{44}{9}$

612. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 3a_n - 1 & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{a_n}{2} + 1 & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_1 = 3$일 때, $\sum_{k=1}^{16} a_k$의 값은? [4.8점]

① 138 ② 141 ③ 144
④ 147 ⑤ 150

613. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 2의 배수인 경우}) \\ a_n + 1 & (a_n\text{이 2의 배수가 아닌 경우}) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_6 = 1$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4.8점]

① 89 ② 91 ③ 93
④ 95 ⑤ 97

614. 첫째항이 k인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} k \times a_n & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ k + a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_1 \neq a_2$이고 $a_5 + a_{11} = 3a_6$일 때, $\frac{a_{16}}{a_7}$의 값은? (단, k는 실수) [5.3점]

① -40 ② -38 ③ -36
④ -34 ⑤ -32

615. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=2}^{7} a_k$의 값은? [5.2점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여
$a_{n+1} = \begin{cases} 2^{n-2} & (a_n < 1) \\ \log_2 a_n & (a_n \ge 1) \end{cases}$이다.
(나) $a_5 + a_6 = 1$, $a_3 \ge 1$

① 33 ② 35 ③ 37
④ 39 ⑤ 41

616. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여
$$a_{n+2} = \begin{cases} -a_n + a_{n+1} & (a_n < a_{n+1}) \\ \dfrac{a_n}{2} - a_{n+1} & (a_n \ge a_{n+1}) \end{cases}$$
을 만족시킨다. $a_2 = a_5 = 8$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [5.0점]

① 62 ② 54 ③ 44
④ 36 ⑤ 28

617. $a_5 = 1$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여
$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 2의 배수가 아닌 경우}) \\ -\dfrac{a_n}{2} & (a_n\text{이 2의 배수인 경우}) \end{cases}$$
이다. $a_3 > 7$이고, a_1의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?
[5.4점]

① 61 ② 64 ③ 67
④ 70 ⑤ 73

618. 모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{11}의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M-m$의 값은?[5.0점]

(가) $a_7 = 20$
(나) 모든 자연수 n에 대하여
$a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1} + a_n & (a_{n+1}\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ \dfrac{1}{3}a_{n+1} & (a_{n+1}\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$ 이다.

① 55 ② 60 ③ 65
④ 70 ⑤ 75

619. 첫째항이 80인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여
수열 $\{T_n\}$을 $T_n = |a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n|$이라 하자.
수열 $\{T_n\}$은 $T_{19} < T_{20}$, $T_{20} = T_{21}$을 만족시킬 때,
$T_n > T_{n+1}$을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합과 a_3의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오. [7.0점]

620. 수열 $a_1, a_2, \cdots, a_{16}$은 다음 조건을 만족한다.

(가) $a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+6} = -1 \ (1 \le n \le 10)$
(나) $a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+10} = 1 \ (1 \le n \le 6)$

이때, $\sum_{k=1}^{16} |a_k|$ 의 값은? [4.3점]

① 109 ② 110 ③ 111
④ 112 ⑤ 113

621. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 9$, $a_2 = 3$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[4.3점]

| 보 기 |

ㄱ. $a_5 = -3$
ㄴ. $\sum_{k=1}^{30} (a_{2k-1} + a_{2k+1}) = 0$
ㄷ. $|a_p| = 9$를 만족시키는 200이하의 자연수 p의 개수는 67이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

622. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(2n+1-2k)^2=\frac{n^2(2n^2+1)}{3} \quad \cdots ①$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

[증 명]

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=1$, (우변)$=\frac{1^2(2\times1^2+1)}{3}=1$

따라서 $n=1$일 때 ①이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, ①이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}(2k-1)(2m+1-2k)^2=\frac{m^2(2m^2+1)}{3}$$

$n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1}(2k-1)(2m+3-2k)^2$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(2k-1)(2m+3-2k)^2+\boxed{(가)}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(2k-1)(2m+1-2k)^2$$

$$+\boxed{(나)}\times\sum_{k=1}^{m}(2k-1)\{m-(\boxed{(다)})\}$$

$$+\boxed{(가)}=\frac{(m+1)^2\{2(m+1)^2+1\}}{3}$$ 이다.

따라서 $n=m+1$일 때도 ①이 성립한다.

(i)과 (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다.

위의 (가)$=f(m)$, (나)$=a$, (다)$=g(k)$라 할 때, $f(3)+a+g(5)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [5.5점]

① 15 ② 19 ③ 23
④ 27 ⑤ 31

623. 수열 $\{a_n\}$을 $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$이라 할 때, 다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=\frac{n(n+1)}{4}(2a_{n+1}-1)\cdots(*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=a_1$, (우변)$=a_2-\boxed{(가)}=1=a_1$

이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+ma_m=\frac{m(m+1)}{4}(2a_{m+1}-1)$$

이다.

$n=m+1$일 때, $(*)$이 성립함을 보이자.

$$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+ma_m+(m+1)a_{m+1}$$

$$=\frac{m(m+1)}{4}(2a_{m+1}-1)+(m+1)a_{m+1}$$

$$=(m+1)a_{m+1}\times\boxed{(나)}-\frac{m(m+1)}{4}$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)}{2}\left(a_{m+2}-\boxed{(다)}\right)-\frac{m(m+1)}{4}$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)}{4}\left(2a_{m+2}-\frac{2}{m+2}-\boxed{(라)}\right)$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)}{4}(2a_{m+2}-1)$$

따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=\frac{n(n+1)}{4}(2a_{n+1}-1)$$

이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나), (다), (라)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$, $h(m)$이라 할 때, $\frac{f(2p)\times g(2p)}{h(2p)}$의 값은? [5.0점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

624. 다음은 $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다. [4.7점]

(i) $n=$ $\boxed{(가)}$ 일 때,

(좌변)$=1+\frac{1}{2^2}=\frac{5}{4}$, (우변)$=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

따라서 $n=$ $\boxed{(가)}$ 일 때 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$ $(k \geq 2)$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$$ 이므로,

$$\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}\right)+\frac{1}{\boxed{(나)}}$$

$$<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{\boxed{(나)}}$$

이때, $k \geq 2$ 이므로,

$$\left\{2-\frac{1}{k}+\frac{1}{\boxed{(나)}}\right\}-\left(2-\frac{1}{\boxed{(다)}}\right)$$

$$=-\frac{1}{k(k+1)^2}<0$$

에서

$$2-\frac{1}{k}+\frac{1}{\boxed{(나)}}<2-\frac{1}{\boxed{(다)}}$$

즉,

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{\boxed{(나)}}<2-\frac{1}{\boxed{(다)}}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

위의 과정에서 (가)에 알맞은 수를 a라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $a+\frac{f(5)}{g(3)}$의 값은?

① 7　② 8　③ 9
④ 10　⑤ 11

한눈에 보는 정답

1. ⑤
2. ④
3. ①
4. ④
5. ⑤
6. ⑤
7. ③
8. ⑤
9. ①
10. ①
11. ②
12. ②
13. ③
14. ⑤
15. ②
16. ⑤
17. ⑤
18. ③
19. ②
20. ③
21. ⑤
22. ④
23. ③
24. ②
25. 11
26. ③
27. ③
28. ⑤
29. ②
30. ④
31. ③
32. ④
33. ⑤
34. ③
35. ①
36. ④
37. ②
38. ④
39. ①
40. ④
41. ②
42. ④
43. ①
44. ③
45. ②
46. ①
47. ③
48. ①
49. (1) 10 (2) 15개
50. -15
51. $\frac{25}{8}$
52. ⑤
53. ③
54. ④
55. ⑤
56. ③
57. ⑤
58. ①
59. ①
60. ②
61. ③
62. ④
63. ④
64. $-\frac{\pi}{2}<\theta\le-\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{\pi}{3}\le\theta<\frac{\pi}{2}$
65. ④
66. ⑤
67. ⑤
68. 2π
69. ⑤
70. ⑤
71. ②
72. ⑤
73. ⑤
74. 7
75. ④
76. $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$
77. ②
78. ③
79. ③
80. ⑤
81. ④
82. ④
83. 6
84. ①
85. ②
86. ②
87. (1) 범위를 나누어 $f(x)$ 를 구하면 다음과 같다.

1) $x=0$ 일 때, $f(x)=[2^0]+[2^1]=3$

2) $0<x<\frac{\pi}{2}$ 일 때, $0<\sin x<1$ 이고 $0<\cos x<1$ 이므로

$f(x)=2$

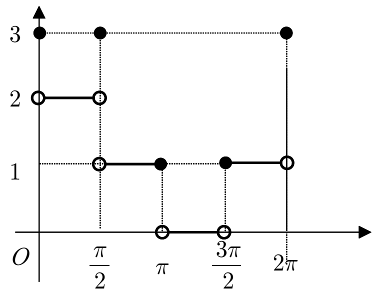
3) $x=\frac{\pi}{2}$ 일 때, $f(x)=[2^1]+[2^0]=3$

4) $\frac{\pi}{2}<x\le\pi$ 일 때, $0\le sinx<1$ 이고 $\cos x<0$ 이므로
$f(x)=1$

5) $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$ 일 때, $\sin x<0$ 이고 $\cos x<0$ 이므로 $f(x)=0$

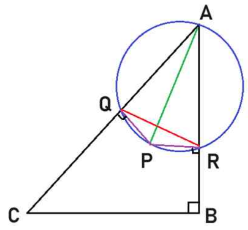
6) $\frac{3\pi}{2}\le x<2\pi$ 일 때, $\sin x<0$ 이고 $0\le cosx<1$ 이므로
$f(x)=1$

7) $x=2\pi$ 일 때, $f(x)=[2^0]+[2^1]=3$
따라서 그래프로 나타내면 다음과 같다.



(2) $x=\frac{\pi}{12},\ \frac{5\pi}{12},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}$

88. ⑤
89. ③
90. 45
91. ⑤
92. ④
93. $\frac{2}{3}\pi$
94. ⑤
95. ⑤
96. 2
97. ③
98. ⑤
99. ④
100. ①
101. ②
102. ②
103. ④
104. ⑤
105. ②
106. ⑤
107. ⑤
108. ②
109. ②
110. ⑤
111. ⑤
112. ②
113. ②
114. ④
115. ①
116. ①
117. ④
118. ④
119. ②
120. ①
121. ④
122. ②
123. ③
124. ③
125. ④
126. ④
127. ③
128. ②
129. ④
130. ②
131. ④
132. ①
133. ③
134. ①
135. $-\frac{1}{4}$
136. ④
137. ②
138. ①
139. ⑤
140. ②
141. ②
142. ③
143. ④
144. ③
145. ①
146. ④
147. ①
148. ⑤
149. $5\sqrt{7}$
150. ③
151. ⑤
152. ④
153. ③
154. ③
155. ④
156. ④
157. ③
158. ④
159. ④
160. ⑤



161. ⑤
162. ④
163. ④
164. ②
165. $\sqrt{3}\ \mathrm{m}$
166. ②
167. $r=5$
168. ④
169. 4
170. ②
171. ①
172. ①
173. $\frac{100\pi}{3}$
174. $\frac{81}{2}\pi$
175. ⑤
176. ③
177. $\frac{14\sqrt{3}}{3}$
178. ②
179. $\frac{3\sqrt{3}}{14}$
180. ①
181. ③
182. ②
183. $\frac{2\sqrt{78}}{13}$
184. ③
185. ①
186. ②
187. ⑤
188. ④
189. ⑤
190. ④
191. ②
192. ③
193. ②
194. 22
195. ②
196. ⑤
197. ②
198. ①
199. ②
200. $15\sqrt{3}$
201. ⑤
202. (1) $10\sqrt{3}$ (2) $a=7$ (3) $R=\frac{7\sqrt{3}}{3}$
203. ①
204. ③
205. ⑤
206. ②
207. $50\sqrt{2}$
208. ④
209. ④
210. ②
211. ①
212. $\frac{\sqrt{7}}{8}$
213. ①
214. ①
215. ⑤
216. ③
217. $4-2\sqrt{3}$
218. 15
219. ②
220. ①
221. 12
222. ①
223. ③
224. ②
225. ①
226. ①
227. ⑤
228. ③
229. ⑤
230. ④
231. $\sqrt{35}$
232. ④
233. ④
234. ③
235. ④
236. ⑤
237. $\frac{27}{2}$
238. (1) 12π (2) $4+2\sqrt{3}$
239. ①
240. $\frac{9\sqrt{39}}{2}$
241. ③
242. ①
243. ③
244. ①
245. ⑤
246. ③
247. ③

248. ⑤
249. ④
250. ③
251. ②
252. ④
253. ⑤
254. ⑤
255. ④
256. ③
257. ③
258. ④
259. ③
260. ②
261. ①
262. ③
263. ③
264. ①
265. ③
266. ④
267. ③
268. ③
269. ②
270. ⑤
271. ⑤
272. ②
273. ③
274. ②
275. ⑤
276. ①
277. ③
278. ③
279. 41개
280. ③
281. ④
282. ④
283. ③
284. ①
285. ②
286. ①
287. ④
288. ⑤
289. ②
290. $\overline{\mathrm{BC}}=5$, 넓이 $5\sqrt{3}$
291. $n=10$
292. ④
293. ⑤
294. ③
295. (1) 10 (2) $m=27$, $M=135$
296. $n=8, d=2$
297. ④
298. ①
299. (1) $a_n=-4n+38$ (2) 162
300. ⑤
301. ④
302. 225
303. ⑤
304. ③
305. ②
306. ③
307. ③
308. ①
309. ③
310. ⑤
311. ④
312. ①
313. $3, -75$
314. ③
315. ④
316. ③
317. ⑤
318. 23
319. ①
320. ③
321. -63
322. ③
323. 29
324. ②
325. ②
326. (1-1) 3 (1-2) $\dfrac{8+3\sqrt{21}}{5}$
327. ②
328. ⑤
329. ②
330. ②
331. ③
332. ③
333. ④
334. ④
335. ②
336. ⑤
337. ②
338. ①
339. ⑤
340. ③
341. ④
342. ④

343. ③
344. ③
345. ⑤
346. ③
347. ④
348. ③
349. 144
350. 11
351. ③
352. ③
353. ②
354. ①
355. ⑤
356. ①
357. ②
358. ③
359. ②
360. ③
361. $a=2, b=1, c=-4$
362. ②
363. ⑤
364. ②
365. ③
366. ④
367. ④
368. ②
369. ③
370. 1) $a_n=7n$, 2) 1470
371. ③
372. 259
373. ③
374. ④
375. ⑤
376. ③
377. ⑤
378. ⑤
379. ④
380. ④
381. ②
382. ⑤
383. ③
384. ③
385. ②
386. ②
387. ②
388. ④
389. ⑤
390. 162
391. ④
392. ①
393. ④
394. ①
395. ⑤
396. ④
397. ⑤
398. ④
399. ①
400.
401. ②
402. ①
403. ①
404. ④
405. ①
406. ④
407. ①
408. ②
409. ②
410. (1) 3 (2) 155
411. ③
412. ④
413. ①
414. ①
415. ①
416. ⑤
417. ⑤
418. ③
419. ⑤
420. ④
421. ②
422. $\frac{10}{21}$
423. ③
424. ②
425. ③
426. ①
427. ③
428. ②
429. ④
430. ⑤
431. ⑤
432. ⑤
433. ②
434. ⑤
435. ④
436. ②
437. ⑤

438. ④
439. ⑤
440. ⑤
441. ①
442. ②
443. ④
444. ②
445. $p=5$, $q=-125$
446. ①
447. ④
448. ③
449. ②
450. ②
451. ⑤
452. ②
453. ⑤
454. ⑤
455. ④
456. ②
457. ②
458. ②
459. ⑤
460. ①
461. ③
462. ①
463. ②
464. ②
465. ①
466. ②
467. ④
468. ④
469. $\frac{4}{49}$
470. ④
471. ②
472. ⑤
473. ①
474. ⑤
475. ③
476. ①
477. 1429
478. ①
479. ④
480. ④
481. 22
482. $\frac{10}{21}$
483. $\frac{25}{21}$
484. ①
485. ③
486. ④
487. ②
488. ③
489. 3
490. ⑤
491. ③
492. ①
493. ④
494. $\frac{25}{32}$
495. ①
496. ②
497. ⑤
498. ⑤
499. ⑤
500. ⑤
501. ①
502. ④
503. (1) 10 (2) $\frac{1}{39}$
504. ③
505. ③
506. ②
507. ⑤
508. 822
509. ⑤
510. ③
511. ①
512. ③
513. ①
514. ④
515. ④
516. ④
517. ③
518. 3
519. ②
520. ⑤
521. ③
522. ②
523. ③
524. ②
525. ④
526. ①
527. ③

528. ①
529. 3
530. ⑤
531. ⑤
532. ①
533. (1) $a_1=2$, $a_2=3$, $a_3=6$, $a_4=7$ (2) 10050
534. ①
535. ⑤
536. ④
537. ⑤
538. ⑤
539. ②
540. ②
541. ⑤
542. ③
543. ⑤
544. ⑤
545. ④
546. ④
547. ②
548. ①
549. ①
550. ②
551. ④
552. ③
553. ③
554. $a_6=3$
555. ①
556. 381
557. ①
558. ②
559. ④
560. ③
561. ①
562. ②
563. ③
564. ④
565. ④
566. ②
567. ④
568. ⑤
569. ③
570. ③
571. ②
572. ⑤
573. ⑤
574. ③
575. ②
576. ⅰ) $n=5$

$2^5>5^2$임은 자명하다.

ⅱ) $n\ge 6$

$2^n>n^2$이라고 가정하자.

$2^{n+1}>2n^2$,

$2n^2-(n+1)^2=n^2-2n-1=(n-1)^2-2>0$ ($n\ge 6$인 범위)

$2n^2>(n+1)^2$

$2^{n+1}>2n^2>(n+1)^2$이므로

$2^{n+1}>(n+1)^2$

$2^n>n^2$일 때 $2^{n+1}>(n+1)^2$이므로

수학적 귀납법에 의해 $n\ge 5$인 모든 자연수 n에 대하여

부등식 $2^n>n^2$이 성립한다.

577. ①
578. ⑤
579. ⑤
580. ⅰ) $n=2$일 때,

(좌변)$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, (우변)$=\frac{2\times 2}{2+1}=\frac{4}{3}$

이때 $\frac{3}{2}>\frac{4}{3}$이므로 ①이 성립한다.

ⅱ) $n=k(k\ge 2)$일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{k}>\frac{2k}{k+1}$이므로

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}>\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}=\frac{2k+1}{k+1}$

이때 $k\ge 2$에서

$\frac{2k+1}{k+1}-\frac{2(k+1)}{k+2}=\frac{(2k+1)(k+2)-2(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$

$=\frac{(2k^2+5k+2)-(2k^2+4k+2)}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{(k+1)(k+2)}>0$

즉, $\frac{2k+1}{k+1}>\frac{2(k+1)}{k+2}$이므로

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}>\frac{2(k+1)}{k+2}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식 ①이 성립한다.

ⅰ), ⅱ)에 의하여 $n\ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다.

581. ①
582. ②
583. ⑤
584. ①
585. ③
586. ②
587. ④
588. ②
589. ①
590. ④
591. ②

592. ①
593. ④
594. ④
595. 23
596. ③
597. ①
598. [1-1] $a_1=2$ [1-2] $a_n-a_{n-1}=4$ [1-3] $m=8$
599. ④
600. ②
601. $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{3}$, 2
602. (1) $a_1=a$ 라 하면 $a_1+a_2=-1$ 이므로 $a_2=-a-1$ 이고

$a_1=a>0$ 이므로 $a_2<0$ 이다.

$a_3=-\frac{1}{a+1}$ 이고 $a_3<0$ 이다.

$a_4=-1+\frac{1}{a+1}=-\frac{a}{a+1}$ 이고 $a_4<0$ 이다.

$a_5=-\frac{a+1}{a}$ 이고 $a_5<0$ 이다.

$a_6=-1+1+\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$ 이고 $a_6>0$ 이다.

$a_7=\frac{1}{a_6}=a$ 이고 $a_7>0$ 이다.

(2) $a=\frac{1}{3}$, 2

603. ①
604. ④
605. ②
606. $-\frac{14}{3}$
607. ③
608. $\frac{125}{2}$
609. ④
610. 7
611. ①
612. ①
613. ②
614. ④
615. ④
616. ③
617. ③
618. ①
619. 610, 72
620. ④
621. ⑤
622. ②
623. ③
624. ⑤

정답과 풀이

1. ⑤

① 주기는 $\frac{2}{3}\pi$ 이다. (참)

② 최댓값은 $3-1=2$ 이다. (참)

③ 최솟값은 $-3-1=-4$ 이다. (참)

④ 그래프는 점 $(0,\ -4)$ 를 지난다. (참)

⑤ 그래프는 함수 $y=3\sin 3x$ 의 그래프를 x 축 방향으로 $\frac{\pi}{6}$ 만큼, y 축 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.
(거짓)

2. ④

주어진 함수의 최댓값이 2, 최솟값이 -2 이고 $a>0$ 이므로

$a=2$

또 주기가 $\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{2}=\pi$ 이고 $b>0$ 이므로

$\frac{2\pi}{b}=\pi$에서 $b=2$

따라서 주어진 함수의 식은 $y=2\sin(2x-c)$ 이고, 이 함수의 그래프가 점 $(\pi,\ -2)$ 를 지나므로

$-2=2\sin(2\pi-c)$ $\therefore\ \sin(2\pi-c)=-1$

이때 $0<c<\pi$ 에서 $\pi<2\pi-c<2\pi$ 이므로

$2\pi-c=\frac{3}{2}\pi$에서 $c=\frac{\pi}{2}$

따라서 $a+b+c=4+\frac{\pi}{2}$

3. ①

$f(x)=a\cos bx+c$이고 주기는 $\pi=\frac{2\pi}{b}$

따라서 $b=2$

$a+c=1,\ \ -a+c=-3$

$a=2,\ c=-1$

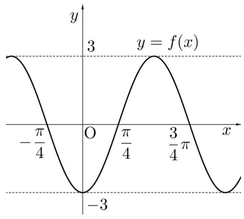
$\therefore\ abc=-4$

4. ④

$a=\frac{2\pi}{\pi}=2,\ b=3+1=4,\ c=-3+1=-2$ 이므로

$a+b+c=4$ 이다.

5. ⑤



$-3\le f(x)\le 3$이고 $\alpha>0$ 이므로 $\alpha=3$,

위 그래프의 주기는 π 이므로 $\frac{2\pi}{\beta}=\pi$ $\therefore\ \beta=2$

$\alpha+\beta=5$

6. ⑤

최댓값$=4$, 최솟값$=0$ 이므로 $a+c=4,\ -a+c=0$

$a=2, c=2$

주기$=6$ 이므로 $2\pi\div\frac{\pi}{b}=6,\ b=3$

$\therefore a+b+c=7$

7. ③

최댓값$=a+c=5$, 최솟값$=-a+c=1$, 주기$=\frac{2\pi}{b}=\pi$ 에서

$a=2,\ b=2,\ c=3$ 이므로 $abc=12$ 이다.

8. ⑤

$\sin\frac{7}{3}\pi=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

9. ①

$\tan\frac{7}{6}\pi\times\cos\left(-\frac{13}{3}\pi\right)\times\sin\left(-\frac{7}{3}\pi\right)$

$=\tan\frac{\pi}{6}\times\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\times\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{1}{4}$ 이다.

10. ①

$\sin 840^\circ\times\tan 60^\circ+\sin 315^\circ\times\cos 315^\circ$

$=\sin 120^\circ\times\tan 60^\circ+\sin 315\times\cos 315^\circ$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}+(-\frac{\sqrt{2}}{2})\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$

11. ②

$\sin(\pi+x)=-\sin x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sin x$

$f(x)=\sin^2 x+\sin x$

$\sin x=t\ (-1\le t\le 1)$ 라고 할 때,

$f(x)=t^2+t,\ t=-\frac{1}{2}$ 일 때, 최솟값 $-\frac{1}{4}$

$t=1$일 때, 최댓값 2를 갖는다.

12. ②

$x=\frac{\pi}{6}$

13. ③

$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$에서 $x=\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{2}{3}\pi$

따라서 $\alpha+\beta=\pi$

14. ⑤

$2\cos x+1=0$

$\cos x=-\frac{1}{2}$ $(0 \le x \le \pi)$

$x=\frac{2}{3}\pi$

15. ②

$2\sin x-\sqrt{2}>0$, $\sin x>\frac{\sqrt{2}}{2}$, $0 \le x<2\pi$

$\sin x>\frac{\sqrt{2}}{2}$인 범위는 $\frac{\pi}{4}<x<\frac{3}{4}\pi$

16. ⑤

$\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{7}{4}\pi$ 이므로 $\frac{\beta}{\alpha}=7$ 이다.

17. ⑤

① $y=|\tan x|$ 주기 π

② $y=|\cos x|$ 주기 $2\pi\times\frac{1}{2}=\pi$

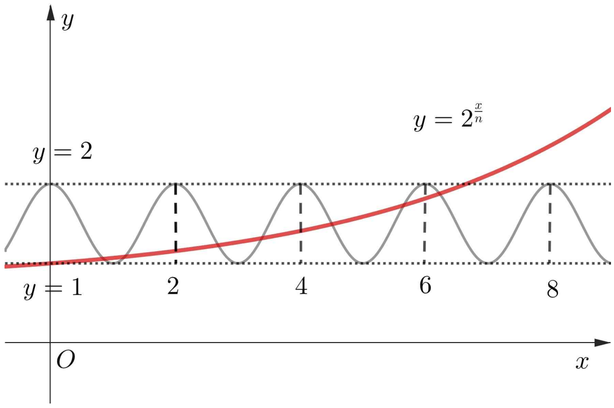
③ $y=\cos 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ 주기 $\frac{2\pi}{2}=\pi$

④ $y=-2\tan x$ 주기 π

⑤ $y=\frac{1}{2}\sin(-x)$ 주기 2π

18. ③

$y=2^{\frac{x}{n}}$와 함수 $y=\frac{1}{2}\sin\pi\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}$의 그래프의 점의 개수가 7이 되도록 하려면 그림과 같아야 한다.



$y=2^{\frac{x}{n}}$의 그래프가 점 $(6,\ 2)$보다는 작고, 점 $(8,\ 2)$보다는 커야한다.

$2 \ge 2^{\frac{6}{n}}$, $2<2^{\frac{8}{n}}$ 이므로

$6 \le n<8$이 성립하므로 $n=6$, 또는 7 이다.

모든 n값의 합은 13이다.

19. ②

$y=4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 주기 4 최댓값 4 최솟값 -4 인 그래프

$0 \le x \le 2$ $-4 \le y \le 4$ y좌표 정수점의 개수 9

20. ③

① 주기는 $\frac{\pi}{4}$이다. (거짓) $\frac{\pi}{2}$

② 최솟값은 1이다. (거짓) $\tan$함수 최대최소 없음

③ 그래프는 점 $\left(\frac{\pi}{4},1\right)$에 대하여 대칭이다. (참)

④ 점근선의 방정식은 $x=\frac{n\pi}{4}$(n은 정수)이다.(거짓)

점근선 $2x-\frac{\pi}{2}=n\pi+\frac{\pi}{2}$ $x=\frac{n}{2}\pi$

⑤ 그래프는 함수 $y=\tan 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.(거짓)

$y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+1=\tan 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1$

x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼,y축의 방향으로 1만큼 평행이동

21. ⑤

$4\cos\frac{1}{3}(x-\pi)=2$에서 $\cos\frac{1}{3}(x-\pi)=\frac{1}{2}$ …… ㉠

$\frac{1}{3}(x-\pi)=t$로 놓으면 $0 \le x \le 10\pi$에서 $-\frac{\pi}{3} \le t \le 3\pi$ 이고

㉠에서 $\cos t=\frac{1}{2}$

$\therefore$ $t=-\frac{\pi}{3}$ 또는 $t=\frac{\pi}{3}$ 또는 $t=\frac{5}{3}\pi$ 또는 $t=\frac{7}{3}\pi$

즉, $x=0$ 또는 $x=2\pi$ 또는 $x=6\pi$ 또는 $x=8\pi$
삼각형 PAB의 넓이가 최대이려면 밑변의 길이가 가장 길어야 하므로 두 점 A, B는 A$(0,\ 2)$, B$(8\pi,\ 2)$일 때이고, 높이도 가장 높아야 하므로 점 P는 y좌표가 -4인 점이어야 한다.
삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\cdot(8\pi-0)\cdot\{2-(-4)\}=\frac{1}{2}\cdot 8\pi\cdot 6=24\pi$$

22. ④

$\tan\frac{\pi}{12}x$의 주기는 12, $1+\log_{\frac{1}{3}}\frac{x}{a}=f(x)$라 하면,

$f(24)>0, f(36)\le 0$ 을 만족시켜야 하므로

$1-\log_3\frac{24}{a}>0,\ a>8$ 이고

$1-\log_3\frac{36}{a}\le 0,\ a\le 12$ 이다. 두 부등식을 연립하면 만족하는 자연수 $n=9,10,11,12$ 이므로 n의 값의 합은 42이다.

23. ③

$f(x)=3a\sin\left(ax+\frac{\pi}{12}\right)+3a\cos\left(\frac{5}{12}\pi-ax\right)+b$

$=3a\sin\left(ax+\frac{\pi}{12}\right)+3a\cos\left(\frac{6}{12}\pi-\frac{\pi}{12}-ax\right)+b$

$=3a\sin\left(ax+\frac{\pi}{12}\right)+3a\cos\left\{\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{12}+ax\right)\right\}+b$

$=3a\sin\left(ax+\frac{\pi}{12}\right)+3a\sin\left(\frac{\pi}{12}+ax\right)+b$

$=6a\sin\left(ax+\frac{\pi}{12}\right)+b$

$=6a\sin a\left(x+\frac{\pi}{12a}\right)+b$

함수 $f(x)$의 주기는 6π이므로

$\frac{2\pi}{a}=6\pi$

$a=\frac{2\pi}{6\pi}$

$\therefore a=\frac{1}{3}$

$f(x)=2\sin\frac{1}{3}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+b$에서

$f(x)$의 최솟값은 $-2+b$이므로

$-2+b=2$

$\therefore b=4$

그러므로 $f(x)=2\sin\frac{1}{3}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+4$

따라서 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)+4$

$=2\sin\frac{\pi}{6}+4$

$=1+4=5$

24. ②

$f(x)=a\cos\frac{x}{2}+b$의 최댓값은 $a+b$이므로 $a+b=5$이고,

$4=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=a\cos\frac{\pi}{3}+b=\frac{a}{2}+b$이므로$a=2$, $b=3$이다.

$a-b=-1$이다,

25. 11

주기 $\frac{2\pi}{b}=\frac{\pi}{3}$에서 $b=6$

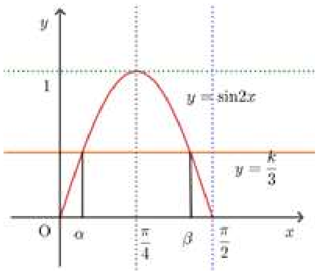
$a+c=14$이고 x축과 만나지 않으므로 $-a+c>0$을 만족해야 한다.$-a+14-a>0$에서 $a<7$

$f\left(\frac{5}{36\pi}\right)=\frac{1}{2}a+c=14-\frac{1}{2}a$이므로 a가 최대일 때, $f\left(\frac{5}{36}\pi\right)$는 최소이다.

그러므로 $a=6$일 때 최솟값 11을 가진다.

26. ③

$a>0,\ b>0$
최댓값이 3, 최솟값이 -3이므로 $a=3$
주기가 π이므로 $b=2$
$f(x)=3\sin 2x$
ㄱ. $f(-x)=3\sin(-2x)=-3\sin 2x=-f(x)$
 따라서 $f(x)$는 원점대칭이다. (참)
ㄴ. $y=\tan x$의 주기는 π (참)
ㄷ. $3\sin 2x=k$에서 $\sin 2x=\frac{k}{3}$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$라 하면



$\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ 이므로

$\sin(3\alpha+\beta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)=\cos 2\alpha=\frac{\sqrt{13}}{5}$

$\frac{k}{3}=\sin 2\alpha=\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}=\sqrt{1-\frac{13}{25}}=\frac{2\sqrt{3}}{5}$

$\therefore\ k=\frac{6\sqrt{3}}{5}$ (거짓)

27. ③

최댓값 $=|a|=a=2$, 주기$=\frac{2\pi}{b}=\pi$ 에서 $b=2$,

$f(0)=a\cos(-c)=2\cos c=-2$ 에서 $c=-\pi$

따라서 $a+b+\frac{c}{\pi}=2+2-1=3$ 이다.

28. ⑤

그림으로부터 최댓값이 2이고, 주기는 $\frac{4\pi}{3}$이며, $\left(\frac{\pi}{6},\ 0\right)$을 지난다. 따라서 $a=2,\ b=\frac{3}{2}$이다.

$\therefore y=2\cos\left(\frac{3}{2}x-c\right)$

에서 $0=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-c\right)$이므로 $c=\frac{3\pi}{4}$이다.

$abc=2\times\frac{3}{2}\times\frac{3\pi}{4}=\frac{9\pi}{4}$

29. ②

$a+d=5,\ -a+d=1$이므로 $a=2,\ d=3$

주기가 π이므로 $b=2$

함수 $y=2\cos(2x+c)+3$가 $(\pi,\ 1)$을 지나므로

$1=2\cos(2\pi+c)+3=2\cos c+3,\ \cos c=-1\ \ c=-\pi$

$a+b+c+d=2+2+3-\pi=7-\pi$

30. ④

함수 $f(x)=a\cos(bx)+2$에서 최댓값은 5, 최솟값은 -1이므로

$a+2=5,\ -a+2=-1$에서 $a=3$

또 주기는 $\frac{\pi}{2}$이고 $b>0$이므로 $\frac{2\pi}{b}=\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ b=4$

따라서 $f(x)=3\cos(4x)+2$이므로

$f\left(\frac{17}{6}\pi\right)=3\cos\left(11\pi+\frac{\pi}{3}\right)+2$

$=3\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+2=3\times\left(-\frac{1}{2}\right)+2=\frac{1}{2}$

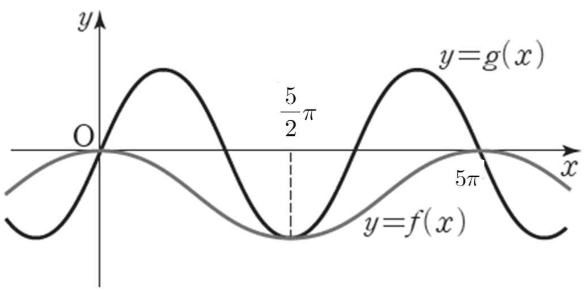
$\therefore\ a+b+f\left(\frac{17}{6}\pi\right)=\frac{15}{2}$

31. ③

(가)에서 $0\le x\le 5\pi$일 때, $f(x)\le g(x)$이어야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 같거나 아래쪽에 있어야 한다.

(나)에서 두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프는 $x=0$, $x=\frac{5}{2}\pi$

일 때 만나야 하므로 두 함수 $y=f(x),\ y=f(x)$의 그래프는



다음 그림과 같아야 한다.

함수 $f(x)$의 주기는 5π이므로

$\frac{2\pi}{b}=5\pi,\ b=\frac{2}{5}$

함수$f(x)$의 최댓값은 0, 최솟값은 -1이므로

$(|a|+c)+(-|a|+c)=2c=-1$

$c=-\frac{1}{2}$

$|a|+c=|a|-\frac{1}{2}=0$이므로 $a=\frac{1}{2}$

따라서 $20(a+b+c)=20(\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+-\frac{1}{2})=8$

32. ④

(가)에서 $f(0)=a\cos b+c=5$

(나)에서

$f(x)$ 의 최댓값은 $|a|+c=8$,

$f(x)$ 의 최솟값은 $-|a|+c=4$ 이므로

$c=6,\ |a|=2$

1) $a=2,\ c=6,\ \cos b=-\frac{1}{2}$ 일 때, $b=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$

$c\sin\left(\frac{\pi}{a}\right)+b=c+b=6+\frac{2}{3}\pi,\ 6+\frac{4}{3}\pi$

2) $a=-2,\ c=6,\ \cos b=\frac{1}{2}$ 일 때, $b=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$

$c\sin\left(\frac{\pi}{a}\right)+b=-c+b=-6+\frac{\pi}{3},\ -6+\frac{5}{3}\pi$

$c\sin\left(\frac{\pi}{a}\right)+b$ 의 최댓값과 최솟값의 합은

$\left(6+\frac{4}{3}\pi\right)+\left(-6+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{5}{3}\pi$ 이다.

33. ⑤

$\tan3(x+\frac{\pi}{12})$의 주기가 $\frac{\pi}{3}$ 이므로 점근선의 방정식을

$x=\frac{4n+1}{12}\pi$ (n은 정수)

$n=0$ 일 때, $x=\frac{\pi}{12}$ 이고 $2\cos\frac{\pi}{3}+5=6$

$n=1$ 일 때, $x=\frac{5}{12}\pi$ 이고 $2\cos\frac{5}{3}\pi+5=6$

$n=2$ 일 때, $x=\frac{3}{4}\pi$ 이고 $2\cos3\pi+5=3$

y좌표은 $6,3$ 을 반복하므로 y좌표의 합은 9이다.

34. ③

$2x=\pm\frac{\pi}{2},\ \pm\frac{3}{2}\pi,\ \pm\frac{5}{2}\pi,\ \cdots$ 이므로

음의 실수 k 의 최댓값은 $-\frac{\pi}{4}$ 이다.

35. ①
$a<b$라 하면, $b=a+\pi$이고 $c<d$라 하면 $d=c+\pi$이다.

$\tan a\times \tan c=1$이므로 $a+c=\frac{\pi}{2}$이다.

$\cos(a+b+c+d)=\cos 3\pi=-1$

36. ④
점 B의 좌표를 $\left(t,\ \tan\frac{3\pi x}{2a}\right)$라 하면 점$A\left(-t,\ -\tan\frac{3\pi t}{2a}\right)$

정삼각형이므로 AC의 중점을 D라하면 $\overline{AD}=2t$이고

$\overline{AC}=4t$이다.$4t$는 주기와 같은 값이므로 $4t=\frac{2}{3}a$이므로

점B의 y좌표는 $\tan\frac{\pi}{4}=1$ 정삼각형 ABC의 높이가 2이므로

한변의 길이는 $\frac{4}{\sqrt{3}}$에서

넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{16}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

37. ②
$-\pi<x<\pi$ 일 때, 자연수 n

$y=\tan\left(nx-\frac{\pi}{2}\right)$ 와 $y=-2x$ 교점의 개수 a_n

$y=\tan\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$ 와 $y=-2x$

$y=\tan 3x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$만큼 평행이동한것

$y=\tan 3\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 는 주기가 $\frac{\pi}{3}$ 점근선 $x=\frac{n}{3}\pi$

$y=-2x$와 만나는 점중 x좌표가 구간$(-\pi,\pi)$에속하는 점은 6개

$a_3=6$

$y=\tan\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)$ 와 $y=-2x$

$y=\tan 4x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{8}$만큼 평행이동한것

$y=\tan 4\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$ 는 주기가 $\frac{\pi}{4}$ 점근선 $x=\frac{n}{4}\pi$

$y=-2x$와 만나는 점중 x좌표가 구간$(-\pi,\pi)$에속하는 점은 8개

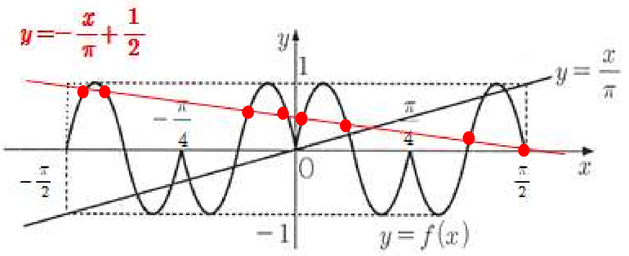
$a_4=8$

$a_3+a_4=14$

38. ④
조건 (가)에서 $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=f(x)$이므로 주기가 $\frac{\pi}{2}$ 이고

조건 (나), (다)에서 $y=\pm\sin 8x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$ 이므로

그래프는 다음과 같다.



직선 $y=-\frac{x}{\pi}+\frac{1}{2}$ 이 점 $\left(-\frac{\pi}{2},\ 1\right)$과 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$을 지나므로

교점이 8개이고, 또 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2},\ -1\right)$을 지나므로 교점이

8개다.

따라서 함수 $f(x)$와 직선 $y=-\frac{x}{\pi}+\frac{1}{2}$ 의 교점의 개수는

16개다.

39. ①
(가)주기:1인 함수

(나)$f(0)=0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=4$

(다)$f(1)=0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=-4$

최댓값:4,최솟값:-4 함수 그래프이다.

함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 점의 개수는

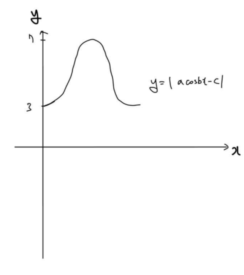
①원점:1개

②$0<x<4$: 3개

③$-4<x<0$: 3개

※7개

40. ④
최댓값7, 최솟값3이면 $a\cos bx-c=0$인 근을 가지지 않음



주기 $6\pi=\frac{2\pi}{b}$(b는 양수), $b=\frac{1}{3}$

a와 c가 양수인 경우는 위 그림과 같은 경우

$a=2, c=5$

41. ②
함수 $y=\left|\sin\frac{ax}{8}\right|$의 주기는 $\frac{8\pi}{a}$,

함수 $y=\left|\tan\frac{4x}{b}\right|$의 주기는 $\frac{b\pi}{4}$

따라서 $\frac{8\pi}{a}=\frac{b\pi}{4}$이므로 $ab=32$

$(a,\ b)$의 순서쌍은 $(1,\ 32)$, $(2,\ 16)$, $(4,\ 8)$, $(8,\ 4)$이고 $a+b$의 최솟값은 12이다.

42. ④

$g(\theta)$의 최댓값은 $t+\frac{1}{2}$이고 최솟값은 t 이다.

$t\le-\frac{1}{2}$ 일 때, $h(t)=0$

$-\frac{1}{2}<t<\frac{1}{3}$일 때, $h(t)=2$

$t=\frac{1}{3}$일 때, $h(t)=1$

$t>\frac{1}{3}$일 때, $h(t)=0$

$h(x)=mx+n$ 교점이 3개 일려면 $(\frac{1}{3},1)$을 지난다.

$(\frac{1}{3},1),(-\frac{1}{2},2)$를 지나는 직선의 방정식은 $y=-\frac{6}{5}x+\frac{7}{5}$

$n>\frac{7}{5}$ 이므로 정수 n의 최솟값은 2 이다.

43. ①

$a=\cos\theta,\ b=\sin\theta$

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=\frac{1}{4},\ \therefore\cos\theta=-\frac{1}{4}$

$a+b^2=\cos\theta+\sin^2\theta=-\frac{1}{4}+\frac{15}{16}=\frac{11}{16}$

따라서 $p+q=27$

44. ③

$\frac{\cos\theta(1+\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}-\frac{\cos\theta(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$

$=\frac{\cos\theta\cdot2\sin\theta}{1-\sin^2\theta}=1,\ \frac{2\sin\theta}{\cos\theta}=1,\tan\theta=\frac{1}{2}$

3사분면이므로 $\cos\theta=-\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

45. ②

$f(x)=\tan3x$라 하면, $f\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\tan(\pi-3x)=-\tan3x=-f(x)$

따라서 $f(x)$는 $\left(\frac{\pi}{6},\ 0\right)$에 대하여 점대칭이다, 또한 직선도 $\left(\frac{\pi}{6},\ 0\right)$에 점대칭이다.

$\beta=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{12},\ \alpha=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{12}$이다,

$\tan(\alpha+2\beta)=\tan\frac{3\pi}{4}=-1$

이다.

46. ①

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta=\frac{1}{4}$

$\cos\theta=-\frac{1}{4}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta>0$

$\sin\theta<0$

$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\frac{\sqrt{15}}{4}$

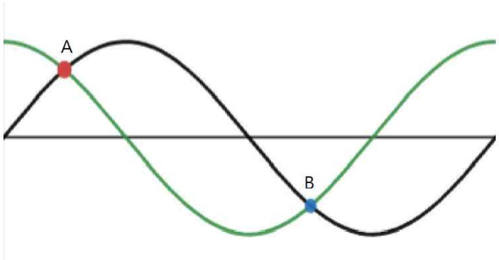
$a=r\cdot\cos\theta=-\frac{1}{4},\ b=r\cdot\sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{4}$

$\tan\theta=\frac{-\frac{\sqrt{15}}{4}}{-\frac{1}{4}}=\sqrt{15}$

$\therefore a+b+\tan\theta=\frac{-1+3\sqrt{15}}{4}$

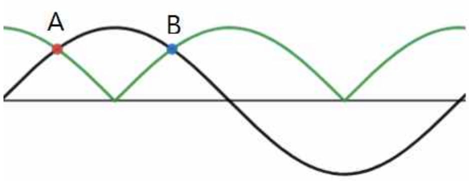
47. ③

ㄱ. $\cos x$와 $\sin x$의 그래프를 그리면



$A\left(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $B\left(\frac{5\pi}{4},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 이므로 $\beta-\alpha$는 최대 π이므로 맞다.

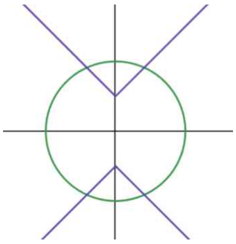
ㄴ. 마찬가지로 그래프를 그리면



$A\left(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $B\left(\frac{3\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 이므로 $\beta-\alpha$는 최대 $\frac{\pi}{2}$이므로 맞다.

ㄷ. $\sin\alpha=y$ $\cos\alpha=x$라 하면 $x^2+y^2=1$이고

$|y|=|x|+\frac{1}{2}$ 이므로 그래프로 교점을 확인하면



교점의 개수는 4개이다.

48. ①

$y=3\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1$에서

$-1 \le \sin x \le 1$이므로

$-1 \le \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \le 1$

$-3 \le 3\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \le 3$

$-2 \le 3\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1 \le 4$

$-2 \le y \le 4$

따라서 최댓값 M은 4이고 최솟값 m은 -2이다.

그러므로 $M-2m=4-2\times(-2)=4+4=8$

49. (1) 10 (2) 15개

(1) $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=\left\{2\sin\frac{\pi}{3}x\right\}^2+\left\{2\cos\frac{\pi}{3}x+1\right\}^2$

$=5+4\cos\frac{\pi}{3}x$

이때 $-1 \le \cos\frac{\pi}{3}x \le 1$ 이므로

$\therefore\ 1 \le 5+4\cos\frac{\pi}{3}x \le 9$

따라서 최댓값 $\alpha=9$, 최솟값 $\beta=1$ 이므로 $\alpha+\beta=10$

(2) $f(n)+g(n-1) = 2\sin\frac{\pi}{3}n+2\cos\frac{\pi}{3}(n-1)+1$이므로

$2\sin\frac{\pi}{3}n+2\cos\frac{\pi}{3}(n-1)+1=-1-\sqrt{3}$

$\sin\frac{\pi}{3}n+\cos\frac{\pi}{3}(n-1)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-1$

따라서 $\sin\frac{\pi}{3}n=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3}(n-1)=-1$ 이어야 하므로

$n=4$ 일 때 처음으로 성립하고 $f(x)$와 $g(x)$의 주기가 6이므로

두 자리 자연수 n은 $10, 16, \cdots, 94$이므로 15개다.

[원칙 풀이]

$f(n)+g(n-1) = 2\sin\frac{\pi}{3}n+2\cos\frac{\pi}{3}(n-1)+1$이고

$f(x)$와 $g(x)$의 주기가 6이므로 자연수 n을 6의 배수로 분류한다.

정수 k에 대하여

(i) $n=6k$일 때,

$f(n)+g(n-1)=2\sin 2k\pi+2\cos\left(2k\pi-\frac{\pi}{3}\right)+1=2$

(ii) $n=6k+1$일 때,

$f(n)+g(n-1)=2\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)+2\cos 2k\pi+1=3+\sqrt{3}$

(iii) $n=6k+2$일 때,

$f(n)+g(n-1)=2\sin\left(2k\pi+\frac{2\pi}{3}\right)+2\cos\left(2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)+1=2+\sqrt{3}$

(iv) $n=6k+3$일 때,

$f(n)+g(n-1)=2\sin(2k\pi+\pi)+2\cos\left(2k\pi+\frac{2\pi}{3}\right)+1=0$

(v) $n=6k+4$일 때,

$f(n)+g(n-1)=2\sin\left(2k\pi+\frac{4\pi}{3}\right)+2\cos(2k\pi+\pi)+1=-1-\sqrt{3}$

(vi) $n=6k+5$일 때,

$f(n)+g(n-1)=2\sin\left(2k\pi+\frac{5\pi}{3}\right)+2\cos\left(2k\pi+\frac{4\pi}{3}\right)+1=-\sqrt{3}$

따라서 $n=6k+4$일 때, $f(n)+g(n-1) = -1-\sqrt{3}$이 성립한다.

그러므로 두 자리 자연수 n은 $10, 16, \cdots, 94$이므로 15개다.

50. -15

$\sin^2 x+a\cos x+\frac{1}{a}+5=-\cos^2 x+a\cos x+\frac{1}{2}a+6$

$\cos x=t$ 라고 치환하면 $-t^2+at+\frac{1}{2}a+6$ $(-1 \le t \le 1)$

$-1<\frac{a}{2}<1$ 일 때, $f(a)=\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}a+6$

$4f(a)-3a-35=a^2-a-11=0$

$a=\frac{(1+3\sqrt{5})}{2}, \frac{(1-3\sqrt{5})}{2}$ 이므로 범위에 만족하지 않는다.

$1 \le \frac{a}{2}$ 일 때, $f(a)=\frac{3}{2}a+5$

$4f(a)-3a-35=3a-15=0,\ a=5$

$\frac{a}{2} \le -1$ 일 때, $f(a)=-\frac{1}{2}a+5$

$4f(a)-3a-35=-5a-15=0, a=-3$

따라서 a값의 곱은 -15이다.

51. $\frac{25}{8}$

$0 \le x \le 2\pi$에서 $-1 \le \sin x \le 1$, $\sin x=t$로 치환하면

$y=-2t^2+t+3$ $(-1 \le t \le 1)$

$y=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{25}{8}$

최댓값은 $t=\frac{1}{4}$일 때 $\frac{25}{8}$, 최솟값은 $t=-1$일 때 0

$\therefore\ \frac{25}{8}+0=\frac{25}{8}$

52. ⑤

$\sin(x+\frac{3\pi}{4}) = \sin([x+\frac{\pi}{4}]+\frac{\pi}{2}) = \cos(x+\frac{\pi}{4})$

$f(x) = \sin^2(x+\frac{3}{4}\pi)+\sin(x+\frac{\pi}{4})+k$

$= \cos^2(x+\frac{\pi}{4})+\sin(x+\frac{\pi}{4})+k$

$= \left\{1-\sin^2(x+\frac{\pi}{4})\right\}+\sin(x+\frac{\pi}{4})+k$

$\sin(x+\frac{\pi}{4}) = t$로 치환 $(-1 \le t \le 1)$

$\left\{1-\sin^2(x+\frac{\pi}{4})\right\}+\sin(x+\frac{\pi}{4})+k = -t^2+t+1+k$

$=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}+k$

$t=-1, -\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}+k = 2, k=3$(최소일 때)

$t=\frac{1}{2}, -\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}+k = \frac{17}{4}$

$kM = 3\times\frac{17}{4} = \frac{51}{4}$

53. ③

그래프의 대칭성에 따라

$a+b=4\pi,\ c+d=12\pi,\ e+f=20\pi$ 이므로

$a+b+c+d+e+f = 36\pi$ 이다.

54. ④

$2\sin^2 x+\cos x-1=0$에서 $2(1-\cos^2 x)+\cos x-1=0$

$2\cos^2 x-\cos x-1=0,\ (2\cos x+1)(\cos x-1)=0$

$\therefore\ \cos x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=1\ (\because -1 \le cos x \le 1)$

$0 \le x \le 2\pi$ 에서

따라서 $x=\frac{2}{3}\pi,\ x=\frac{4}{3}\pi,\ x=2\pi$이므로 합은

$\frac{2}{3}\pi+\frac{4}{3}\pi+2\pi=4\pi$

55. ⑤

$\sin^2(4x)=1$을 풀면 $\sin 4x=1$ or $\sin 4x=-1$ 이므로 교점의 개수의 합이 37개가 되려면 $\frac{\pi}{2}$ 주기마다 교점을 두 개씩 가지므로

$2\times 18+1$개의교점을 가지면 된다.

$\frac{\pi}{2}\times 18+\frac{\pi}{8} \le \frac{\pi}{12}n < \frac{\pi}{2}\times 18+\frac{3}{8}\pi$

$109.5 \le n < 112.5$이므로 $n=110,111,112$이다. 합은 333이 된다.

56. ③

$4\cos\frac{\pi}{6}x = 2, \cos\frac{\pi}{6}x = \frac{1}{2}$을 성립하는 $x = 2, 10$

선분 $AB = 10-2 = 8$

57. ⑤

$2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos x=1$에서

$2\sin^2 x-\cos x=1,\ 2-2\cos^2 x-\cos x=1$

$\therefore 0=2\cos^2 x+\cos x-1$

$=(2\cos x-1)(\cos x+1)$

$\therefore\ \cos x = \frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=-1$

x의 합은 $2\times\pi+\pi=3\pi$

58. ①

$2x-\frac{\pi}{3}=t\ ,\ -\frac{\pi}{3} < t < \frac{5\pi}{3}$

$t_1+t_2=2\pi,\ (2x_1-\frac{\pi}{3})+(2x_2-\frac{\pi}{3})=2\pi,\ x_1+x_2=\frac{4}{3}\pi$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

59. ①

$-\sqrt{3}\sin a>0,\ 1+\cos a>0$이고 $(-\sqrt{3}\sin a)^2 = \frac{1+\cos a}{2}$

$\therefore\ 6\cos^2 a+\cos a-5=0$에서 $\cos a = \frac{5}{6}$

따라서, $\tan a=-\frac{\sqrt{11}}{5}$

60. ②

$\tan\alpha=\frac{2}{3}\quad \beta=\alpha+\pi,\ \gamma=\alpha+2\pi$

$\tan\left(\alpha-\frac{\beta-\gamma}{2}\right)=\tan\left(\alpha-\frac{\alpha+\pi-(\alpha+2\pi)}{2}\right)=\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$

$=-\frac{1}{\tan\alpha}=-\frac{2}{3}$

61. ③

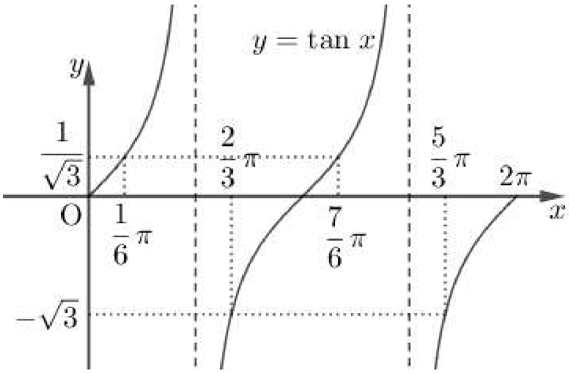
$\tan 0=0$

$\tan\frac{\sqrt{x}}{3}=\sqrt{3}$

$\therefore 0 \le x < \frac{\pi}{3}$

62. ④

$\frac{x}{2}=t$라 하면 $0 \le t < 2\pi,\ y=\tan t$의 그래프는 다음과 같다.



$0 \le t < \frac{1}{6}\pi,\ \frac{2}{3}\pi < t < \frac{7}{6}\pi,\ \frac{5}{3}\pi < t < 2\pi$이므로

$0 \le x < \frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi < x < \frac{7}{3}\pi,\ \frac{10}{3}\pi < x < 4\pi$

따라서 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\frac{22}{3}\pi$

63. ④

1) $0<x<2$ 일 때, $3^x-9<0$ 이므로

$2\sin\frac{\pi}{2}x-1>0$ 즉, $\sin\frac{\pi}{2}x>\frac{1}{2}$ 에서 $\frac{1}{3}<x<\frac{5}{3}$ 이다.

2) $2<x<4$ 일 때, $3^x-9>0$ 이므로

$2\sin\frac{\pi}{2}x-1<0$ 즉, $\sin\frac{\pi}{2}x<\frac{1}{2}$ 에서 $2<x<4$ 이다.

따라서 $(\beta-\alpha)+(\delta-\gamma)=\frac{5}{3}-\frac{1}{3}+4-2=\frac{10}{3}$ 이다.

64. $-\frac{\pi}{2}<\theta\le-\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{\pi}{3}\le\theta<\frac{\pi}{2}$

$x^2+1=2x\tan\theta-\frac{1}{\cos\theta}$

$x^2-2x\tan\theta+1+\frac{1}{\cos\theta}=0$

$D/4=\tan^2\theta-1-\frac{1}{\cos\theta}\ge0$

$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos^2\theta>0$이므로 $\cos^2\theta$을 곱하면

$\sin^2\theta-\cos^2\theta-\cos\theta\ge0$

$1-2\cos^2\theta-\cos\theta\ge0$

$2\cos^2\theta+\cos\theta-1\le0$

$(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)\le0$

$\cos\theta+1\ge0$이므로 $\cos\theta\le\frac{1}{2}$

$\therefore\ -\frac{\pi}{2}<\theta\le-\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{\pi}{3}\le\theta<\frac{\pi}{2}$

65. ④

$D/4=\sin^2\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta<0$이다. 따라서

$\sin\theta\left(\sin\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)<0,\ 0<\sin\theta<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

$\therefore\ 0<\theta<\frac{\pi}{4}$

이다.

66. ⑤

$\cos^2\theta+\sin\theta\ge-2k+3$ 를 변형하면

$\sin^2\theta-\sin\theta-2k+2\le0$

$\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)^2-2k+\frac{7}{4}\le0$ 이며

$-1\le sin\theta\le1$ 이므로

$f(\theta)=\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)^2-2k+\frac{7}{4}$ 는

$\sin\theta=-1$ 일 때 최댓값 $-2k+4$ 를 갖는다.

이 모든 실수 θ 에 대하여 항상 성립하도록 하려면

$-2k+4\le0$ 에서 실수 k 의 최솟값은 2 이다.

67. ⑤

$12x^2+4\sqrt{2}\cos\theta x+\cos\theta=0$

$D/4=8\cos^2\theta-12\cos\theta<0$

$2\cos^2\theta-3\cos\theta<0,\ \cos\theta(2\cos\theta-3)<0$

$0<\cos\theta<\frac{3}{2},\ 0\le\theta<2\pi$

$0<\cos\theta<\frac{3}{2}$ 인 범위는

$0\le\theta<\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

68. 2π

$3\sin^2\theta-5\cos\theta-1<0$이므로 $3\cos^2\theta+5\cos\theta-2>0$

따라서, $3\cos\theta>1$이므로 $\cos\theta>\frac{1}{3}$

$\cos\theta=\frac{1}{3}$ 인 $\theta=p,q$에 대하여 대칭성을 이용하면 $p+q=2\pi$

69. ⑤

$\sin x-\cos^2x+k\ge0$에서

$\sin x-(1-\sin^2x)+k\ge0$

$\therefore\ \sin^2x+\sin x+k-1\ge0$

$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le1$이고, 주어진 부등식은

$t^2+t+k-1\ge0$

$y=t^2+t+k-1$이라 하면

$y=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+k-\frac{5}{4}$

이므로 $-1\le t\le1$에서 $t=-\frac{1}{2}$ 일 때 최솟값 $k-\frac{5}{4}$ 를

갖는다.

이때 부등식이 항상 성립하려면 $k-\frac{5}{4}\geq 0$이어야 하므로

$k\geq\frac{5}{4}$

따라서 k의 최솟값은 $\frac{5}{4}$

70. ⑤

$D=(2\sin\theta)^2-4\times\frac{1}{9}\leq 0$

$-\frac{1}{3}\leq\sin\theta\leq\frac{1}{3}$

$-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta=\frac{1}{3}$ 또는 $-\frac{1}{3}$일 때, $\cos\theta$는 최솟값을 갖는다.

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

71. ②

$\cos^2x-3\sin x-a+1<0,\ 1-\sin^2x-3\sin x-a+1<0$

$\therefore 2-a<\sin^2x+3\sin x$

$u=\sin x(0<u\leq 1)$이라 하면, $\sin^x+3\sin x=u^2+3u$이다.

$2-a<u^2+3u$

따라서 $2-a$는 $u^2+3u(0<u\leq 1)$의 최솟값보다 작다.

$2-a\leq 0,\ a\geq 2$

72. ⑤

$\frac{\pi}{3}<x-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{3},\frac{\pi}{2}<x<\frac{11\pi}{6}$

$|\tan x|=1,\tan x=1,-1$

$x=\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$

73. ⑤

$\frac{\pi}{6}(t-2)=\theta$라 하자. $6\sqrt{3}+12\cos\theta\leq 0$에서

$\cos\theta\leq-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{5}{6}\pi\leq\theta\leq\frac{7}{6}\pi$

$\frac{5}{6}\pi\leq\frac{\pi}{6}(t-2)\leq\frac{7}{6}\pi$

$7\leq t\leq 9$

따라서 $m=7,\ M=9\ \therefore\ 2m+M=23$

74. 7

함수 $y=\tan\frac{\pi}{4}x$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{4}}=4$이다.

$a>0$이고, 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}\frac{x}{a}+1$이 제4사분면에서 만나는 점의 개수가 2가 되려면 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}\frac{x}{a}+1$의 그래프와 x축의 교점이 4보다 크고 8보다 작아야 한다.

즉 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{x}{a}+1$일 때, $f(4)>0,\ f(8)\leq 0$을 만족시켜야 한다.

(ⅰ) $f(4)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{4}{a}+1>0$

$\log_{\frac{1}{2}}\frac{4}{a}>-1=\log_{\frac{1}{2}}2$이므로

$\frac{4}{a}<2$이다.

따라서 $a>2$이다.

(ⅱ) $f(8)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{8}{a}+1\leq 0$

$\log_{\frac{1}{2}}\frac{8}{a}\leq-1=\log_{\frac{1}{2}}2$이므로

$\frac{8}{a}\leq 2$이다.

그러므로 $a\leq 4$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $2<a\leq 4$이므로

이를 만족하는 자연수 a는 3, 4이다.

따라서 만족하는 모든 자연수 a의 합은 7이다.

75. ④

사인함수의 주기가 $\frac{2\pi}{3}$이므로 교점은 $y=b$일때는 7개이고

$y=a+b,y=a-b$일때는 3개 $y=k$가 $b<k<a+b$거나 $a-b<k<b$인 경우에는 교점이 6개가 되어야한다. 다 조건을 만족시키려면 교점이 6개가 되는 k가 3개여야 하고 7개인 것 1개 3개인 것 1개여야 하는데 $f(0)>2$인 조건에서 $b>2$이이고 $g(2)=g(6)$이므로 $g(4)$가 $y=b$와의 교점이 되어야 한다.

$y=10$이 가장 값이 큰 상수함수인데 $g(10)$이 $y=a+b$와의 교점이어야지만 교점이 3개가 가능하므로 경우가 $a+b=10$인 한 가지만 존재한다.

따라서 $b=4\ \ a=6$이므로 $a^2+b^2=52$이다.

76. $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

$g(x)=\sin 2(x+\frac{\pi}{4})=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2x$이므로

$\sin^2 2x=\frac{3}{2}\cos 2x\ \ \sin^2 2x=1-\cos^2 2x$로 정리하면

$2\cos^2 2x+3\cos 2x-2=0\ \ \cos 2x=\frac{1}{2},-2$ 인데 $\cos 2x$의 최솟값은 -1이므로 $\cos 2x=\frac{1}{2}$이다. x의 범위인

$0\leq x\leq\pi$에서

방정식의 해는 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$이다.

77. ②

가로의 길이가 2이고 넓이가 $\sqrt{2}$이므로

높이는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이다

주어진 함수의 주기가 $\frac{2\pi}{k}$ 이므로

A와 D의 중점 x좌표는 $\frac{1}{4}\times\frac{2\pi}{k}=\frac{\pi}{2k}$

A의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{2k}-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\left\{k\left(\frac{\pi}{2k}-1\right)\right\}$

$k\left(\frac{\pi}{2k}-1\right)=\frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{2}-k=\frac{\pi}{4}$

$k=\frac{\pi}{4}$

78. ③

$f(x)=2^x$, $g(x)=2\cos\frac{\pi}{3}x$라 하자,

ㄱ, 참

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}$, $g\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}$이므로, $f\left(\frac{1}{2}\right)<g\left(\frac{1}{2}\right)$, $x>\frac{1}{2}$에서

$f(x)$는 증가함수. $g(x)$는 감소함수이며,

$2=f(1)>g(1)=1$이다. 따라서 $x_2>\frac{1}{2}$이다.

ㄴ. 거짓

$f(-2)=\frac{1}{4}$, $g(-2)=-1$이고 함수는 증가함수이고,

$f(-1)=\frac{1}{2}$, $g(-1)=1$이므로 $-2<x_1<-1$이다.

따라서 $y_2<2$이고, $y_1<\frac{1}{2}$이므로 $y_1y_2<1$이다.

ㄷ. 참

함수 $y=2^x$ 위의 점 $(1,\ 2)$와 점 $(-1,\ 0)$을 이은 선분의 기울기가 1이고, 이 선분과 함수 $y=2^x$가 만나는 $(1,\ 2)$가 아닌 점을 $(x_3,\ y_3)$이라 하자, 그러면 볼록의 성질에 의해

$\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}<1$이다. 또한 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}<\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}$이므로

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}<1$이다.

79. ③

$\gamma-\alpha=\frac{2\pi}{b}$, $f\left(\frac{\pi}{2b}\right)=\frac{3}{4}$ 이므로, $a=\frac{1}{2}$

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{b}$ 이고 $\cos\frac{\pi}{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로 $b=6$

따라서 삼각형 ACP 에서

$\overline{\mathrm{AC}}=\frac{\pi}{3}$ 이고 높이는 $\frac{3}{2}a=\frac{3}{4}$ 이므로

삼각형 ACP 의 넓이는 $\frac{\pi}{8}$ 이다.

80. ⑤

$f(m)=\cos\frac{2(m-1)}{k}\pi$라 하면 $f(k+1)=\cos 2\pi=f(1)$ 이므로

집합 A_k는 $A_k=\{f(1),\ f(2),\ \cdots,\ f(k)\}$ 이다.

ㄱ. $k=3$ 일 때

$f(1)=1$, $f(2)=\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$, $f(3)=\cos\frac{4}{3}\pi=-\frac{1}{2}$ 이므로

$A_3=\left\{-\frac{1}{2},\ 1\right\}$ (참)

ㄴ. 0이 집합 A_k의 원소가 되려면 $f(m)=0$을 만족시키는 자연수 m이 존재해야 한다.

$\cos\frac{2(m-1)}{k}\pi=0$에서 $\frac{2(m-1)}{k}\pi=\frac{\pi}{2}$ $\therefore$ $m=1+\frac{k}{4}$

이고 m이 자연수이므로 k는 4의 배수이어야 한다. 따라서 두 자리 자연수 $k=12,\ 16,\ \cdots,\ 96$이며 그 개수는 22이다. (참)

ㄷ. $y=\cos x$는 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로 $0\le x\le\pi$에서 9개의 값이 존재해야 한다.

(i) $f(9)=\cos\frac{16}{k}\pi=-1$인 경우

이때 $f(1)=1$, $0<f(2), f(3), f(4)<1$, $f(5)=0$이고 $-1<f(6), f(7), f(8)<0$, $f(9)=-1$이므로 9개의 값이 존재한다.

따라서 $\frac{16}{k}\pi=\pi$에서 $k=16$

(ii) $f(9)=\cos\frac{16}{k}\pi\neq-1$인 경우

이때 $f(1)=1$, $0<f(2), f(3), f(4), f(5)<1$이고 $-1<f(6), f(7), f(8), f(9)<0$이므로 9개의 값이 존재한다.

또한 $f(10)=\cos\frac{18}{k}\pi\neq-1$이면서 $f(9)=f(10)$이므로 따라서 $\frac{17}{k}\pi=\pi$에서 $k=17$

즉 $n(A_k)=9$를 만족시키는 모든 k의 값의 합은 $16+17=33$ (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

81. ④

$\sin 2a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin x$의 대칭성에 의하여

$b+c=\frac{5}{2}\pi,\ 2b+2c=5\pi$

$\cos(5\pi+2d)=-\cos 2d$

$\frac{3}{2}\pi<2d<2\pi$ 이므로 $\cos 2d=\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\sin 2a\times(-\cos 2d)=\frac{\sqrt{2}}{3}$

82. ④

점근선에 대한 방정식

$3x-\frac{5}{2}\pi = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\ \cdots$

$3x = 3\pi, 4\pi, 5\pi, \cdots$

$x = \frac{n}{3}\pi$ (n은 정수)

최솟값 $\alpha = 2\sin\frac{5}{3}\pi-1 = -\sqrt{3}-1$

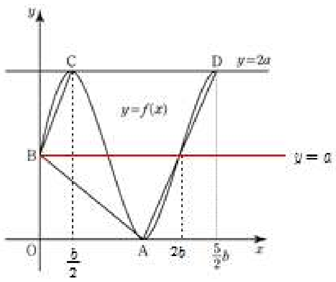
최댓값 $\beta = 2\sin\frac{2}{3}\pi-1 = \sqrt{3}-1$

$\alpha^2+\beta^2 = (-\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}-1)^2 = 8$

83. 6

a, b는 양수이므로 함수 $f(x)=a\sin\left(\frac{\pi}{b}x\right)+a$의 주기는

$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{b}}=2b$, 최댓값은 $2a$, 최솟값은 0이다.



위의 $y=f(x)$의 그래프에서 $\mathrm{C}\left(\frac{b}{2},\ 2a\right)$, $\mathrm{A}\left(\frac{3}{2}b,\ 0\right)$,

$\mathrm{D}\left(\frac{5}{2}b,\ 2a\right)$이므로 사각형 ABCD의 넓이는

$$\left(\frac{5}{2}b\times 2a\right)-\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}b\times a+\frac{1}{2}\times b\times 2a+\frac{1}{2}\times\frac{b}{2}\times a\right)=18$$

$$(5ab)-\left(\frac{3}{4}ab+ab+\frac{1}{4}ab\right)=18$$

$$3ab=18 \therefore\ ab=6 \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편, 직선 AD의 기울기는 $\frac{2a}{b}$이고 점 $\mathrm{A}\left(\frac{3}{2}b,\ 0\right)$를 지나므로

$$y=\frac{2a}{b}\left(x-\frac{3}{2}b\right),\ \text{즉}\ 2ax-by-3ab=0$$

이고 점 $\mathrm{C}\left(\frac{b}{2},\ 2a\right)$에서 직선 AD 사이의 거리가 $\frac{6\sqrt{10}}{5}$이므로

$$\frac{|ab-2ab-3ab|}{\sqrt{4a^2+b^2}}=\frac{6\sqrt{10}}{5}$$

정리하면 $36a^2+9b^2=10a^2b^2$

㉠에서 $b=\frac{6}{a}$이므로 위의 식에 대입하면

$$a^4-10a^2+9=0,\ (a^2-9)(a^2-1)=0$$

조건에서 $0<b<a$이므로 $\therefore\ a=3,\ b=2$

따라서 $f(x)=3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)+3$이고 구하는 값은

$f(5)=3\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)+3=3\times1+3=6$

84. ①

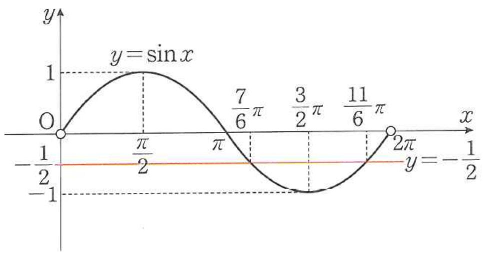
$f(x)=(2\sin\theta+1)x^2+2(\cos\theta+\sin\theta)x+\cos\theta$

주어진 방정식이 이차함수가 될 수 있고

일차함수가 될 수 있으므로

i) 주어진 방정식이 일차함수가 될 때,

$(2\sin\theta+1)=0$ 이므로 $\therefore\ \sin\theta=-\frac{1}{2}$이다.



이때 $0\le\theta<2\pi$에서 $\sin\theta=-\frac{1}{2}$에서

$\theta=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $\theta=\frac{11}{6}\pi$ 이다.

ii) 주어진 방정식이 이차함수가 될 때,

주어진 함수의 그래프가 x축에 접하면

이차방정식 $(2\sin\theta+1)x^2+2(\cos\theta+\sin\theta)x+\cos\theta=0$이

중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

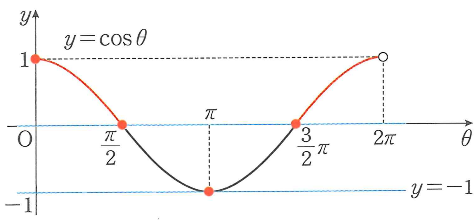
$D=0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(\cos\theta+\sin\theta)^2-\cos\theta(2\sin\theta+1)=0$

$\cos^2\theta+\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-2\sin\theta\cos\theta-\cos\theta=0$

$1-\cos\theta=0$ 이므로 $\therefore\ \cos\theta=1$ 이다.

이때 $0\le\theta<2\pi$에서 $\cos\theta=1$



교점의 θ좌표는 0이다.

θ의 최댓값을 M은 $\theta=\frac{11}{6}\pi$ 일 때,

$y=f(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표는

$f(x)=(2\sin\theta+1)x^2+2(\cos\theta+\sin\theta)x+\cos\theta$ 에서

$\sin\theta=-\frac{1}{2}$이고, $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로

$y=(\sqrt{3}-1)x+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$ 이므로

x좌표는 $\frac{-3-\sqrt{3}}{4}$

θ의 최솟값을 m은 $\theta=0$ 일 때,

$y=f(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표는

$f(x)=(2\sin\theta+1)x^2+2(\cos\theta+\sin\theta)x+\cos\theta$ 에서

$\sin\theta=0$이고, $\cos\theta=1$ 이므로

$f(x)=x^2+2x+1$ 이므로

x좌표는 -1 이다.

따라서 $\alpha=\frac{-3-\sqrt{3}}{4}$, $\beta=-1$이므로

$\alpha+\beta=\frac{-7-\sqrt{3}}{4}$

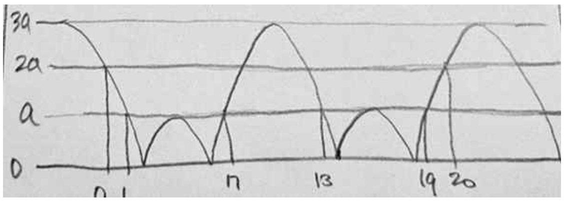
85. ②

함수 $f(x)=2a\sin\frac{\pi}{6}(x-1)-a$에서 주기는 $2\pi\times\frac{6}{\pi}=12$

$f(0)=f(20)=-2a$, $f(1)=f(19)=-a$

한편, $g(3)=6$이므로 $y=|f(x)|$가 $y=3$과 만나는 점의 개수가 $0<x<20$에서 6개다.

따라서 $a=3$



따라서, $g(k)$의 최댓값은 $0<k<3$일 때, 8이다.

$\therefore$ $a+g(k)$의 최댓값은 $3+8=11$

86. ②

주기 $p=\frac{2\pi}{2}=\pi$

$a+b=15$, $-a+b=m$ (m은 정수), $m\geq\pi$

a는 자연수, b는 정수이므로 m은 홀수이다.

(1) $m=5$일 때, $a=5$, $b=10$

(2) $m=7$일 때, $a=4$, $b=11$

(3) $m=9$일 때, $a=3$, $b=12$

(4) $m=11$일 때, $a=2$, $b=13$

(5) $m=13$일 때, $a=5$, $b=10$

87. (1) 범위를 나누어 $f(x)$를 구하면 다음과 같다.

1) $x=0$ 일 때, $f(x)=[2^0]+[2^1]=3$

2) $0<x<\frac{\pi}{2}$ 일 때, $0<\sin x<1$ 이고 $0<\cos x<1$ 이므로

$f(x)=2$

3) $x=\frac{\pi}{2}$ 일 때, $f(x)=[2^1]+[2^0]=3$

4) $\frac{\pi}{2}<x\leq\pi$ 일 때, $0\leq sinx<1$ 이고 $\cos x<0$ 이므로

$f(x)=1$

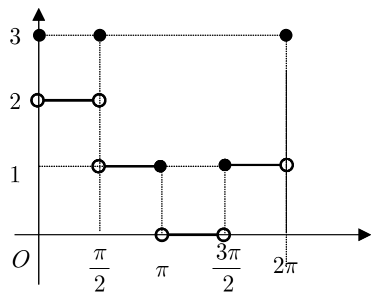
5) $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$ 일 때, $\sin x<0$ 이고 $\cos x<0$ 이므로 $f(x)=0$

6) $\frac{3\pi}{2}\leq x<2\pi$ 일 때, $\sin x<0$ 이고 $0\leq cosx<1$ 이므로

$f(x)=1$

7) $x=2\pi$ 일 때, $f(x)=[2^0]+[2^1]=3$

따라서 그래프로 나타내면 다음과 같다.



(2) $x=\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$, π, $\frac{3\pi}{2}$

(1) 범위를 나누어 $f(x)$를 구하면 다음과 같다.

1) $x=0$ 일 때, $f(x)=[2^0]+[2^1]=3$

2) $0<x<\frac{\pi}{2}$ 일 때, $0<\sin x<1$ 이고 $0<\cos x<1$ 이므로

$f(x)=2$

3) $x=\frac{\pi}{2}$ 일 때, $f(x)=[2^1]+[2^0]=3$

4) $\frac{\pi}{2}<x\leq\pi$ 일 때, $0\leq sinx<1$ 이고 $\cos x<0$ 이므로

$f(x)=1$

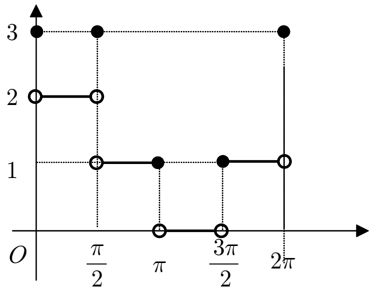
5) $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$ 일 때, $\sin x<0$ 이고 $\cos x<0$ 이므로 $f(x)=0$

6) $\frac{3\pi}{2}\leq x<2\pi$ 일 때, $\sin x<0$ 이고 $0\leq cosx<1$ 이므로

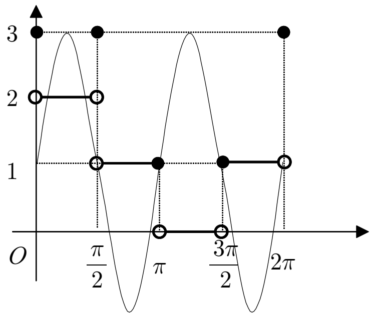
$f(x)=1$

7) $x=2\pi$ 일 때, $f(x)=[2^0]+[2^1]=3$

따라서 그래프로 나타내면 다음과 같다.



(2) $y=2\sin 2x+1$ 은 주기가 π 이므로 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



따라서 교점의 x 좌표를 구하면 $x=\frac{\pi}{12},\ \frac{5\pi}{12},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}$ 이다.

88. ⑤

$\cos t=X\ (-1\le X\le 1)$라 하면

$y=-2X^2+xX+5=-2\left(X-\frac{x}{4}\right)^2+\frac{x^2}{8}+5$

(i) $\frac{x}{4}\le -1$ 일 때, $X=-1$에서 최대이므로 $g(x)=-x+3$

(ii) $-1<\frac{x}{4}\le 1$ 일 때, 꼭짓점에서 최대이므로 $g(x)=\frac{x^2}{8}+5$

(iii) $1<\frac{x}{4}$ 일 때, $X=1$에서 최대이므로 $g(x)=x+3$

따라서 $g(x)=\begin{cases}-x+3 & (x\le -4)\\ \frac{1}{8}x^2+5 & (-4<x\le 4)\\ x+3 & (x>4)\end{cases}$

이때 함수 $y=g(x)$의 그래프와 $y=11$로 둘러싸인 도형의 내부에 있는 x, y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 $y=g(x)$의 그래프가 y축 대칭이므로

$x=0$일 때 : $y=6,\ \cdots,\ 10$ (5개)

$x=\pm 1$일 때 : $y=6,\ \cdots,\ 10$ (5개)

$x=\pm 2$일 때 : $y=6,\ \cdots,\ 10$ (5개)

$x=\pm 3$일 때 : $y=7,\ 8,\ 9,\ 10$ (4개)

$x=\pm 4$일 때 : $y=8,\ 9,\ 10$ (3개)

$x=\pm 5$일 때 : $y=9,\ 10$ (2개)

$x=\pm 6$일 때 : $y=10$ (1개)

따라서 $5+2(5+5+4+3+2+1)=45$

89. ③

$f(x)$의 그래프는 $(1,0)$대칭 함수이다

$n=1$일 때, $g(x)=2|x-1|-3$

$x>1$이면 $g(x)=2x-5$ 이므로 $(4,3)$을 지난다.

$x<1$이면 $g(x)=f(x)$ 교점의 개수는 $x>1$ 인 상황에서 $-g(x)=f(x)$와의 교점의개수와 같다.

따라서 $(1,-3),(4,3)$을 지나는 직선과 $f(x)$의 교점의개수와 $(1,3),(4,-3)$을 지나는 직선과 $f(x)$의 교점의 개수의 합과 같고

또한, 그점들의 개수는 $0<\alpha<3$ 이라 하면 $y=\alpha, y=-\alpha$와 $f(x)$의 교점의 개수와 같다.

따라서 $n=1$일 때, $g(x)$는 $(4,3)$을 지나므로 $1<x<4$에서 6개의 교점이 생긴다.

위와 같은 방법으로

$n=2$일 때, $g(x)=\frac{2}{3}|x-1|-3$ 이므로 $(10,3)$을 지난다.

따라서

$1<x<10$ 에서 $f(x)=\alpha$ or $f(x)=-\alpha$ 의 교점의 개수는 18개이고

$n=3$일 때, $g(x)=\frac{2}{5}|x-1|-3$ 이 $(16,3)$을 지나므로

$0<x<16$에서 $f(x)=\alpha$ or $f(x)=-\alpha$ 의 교점의 개수는 3개이므로

$h(1)+h(2)+h(3)=54$ 이다.

90. 45

$f^n(x)$의 최댓값은 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$이다.

$y=2^{-(x+k)}$와 $y=f^n(x)$의 교점 개수의 최댓값은 $8\times 2^{n-1}$이다.

$y=2^{-(x+k)}$의 그래프는 k값이 커질수록 x축의 음의 방향이로 이동하며 $y=2^{-(x+k)}$와 $y=f^n(x)$그래프의 y절편이 같을때가 가장 작게 이동한 경우이다.

$\therefore\ n=\alpha$일 때, $y=2^{-(x+k)}$의 y절편이 $\left(0,\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}\right)$인 경우의 k값이 m_α이다.

$m_1=1,\ m_2=2,\ \cdots$ 이므로

$m_\alpha=\alpha$ 이고 $m_1+m_2+\cdots+m_9=45$

91. ⑤

ㄱ. $\pi x=t$로 하면

$f(t)=\sin^2|t|+2\sin|t|+2=(\sin|t|+1)^2+1\quad -1\le sin|t|\le 1$

이므로 최댓값은 5, 최솟값은 1이다.(참)

ㄴ. $f(x)$는 y축에 대칭인 함수 이므로 모든 근의 합은 0이다.(참)

ㄷ. $h(1)=0$, $h(2)=h(3)=h(4)=h(5)=12$

92. ④

$\cos^2\left(\frac{nx}{3}\right)-1=0$

$\cos\left(\frac{nx}{3}\right)=\pm1$

실근 개수가 13개 이려면

주어진 범위에서 주기가 6번 이상 7번 미만 반복되어야 한다.

주기가 $\frac{2\pi}{\frac{n}{3}}$ 이므로

$4\pi=6\times\frac{2\pi}{\frac{n}{3}}$

$\frac{n}{9}=1$

$n=9$

$4\pi=7\times\frac{2\pi}{\frac{n}{3}}$

$n=\frac{21}{2}$

$\therefore\ 9\le n<10.5$

자연수 $n=9,10$

93. $\frac{2}{3}\pi$

$a+c=3,\ -a+c=-1$에서 $a=2,\ c=1$이다.

주기는 $\frac{2\pi}{b}$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\frac{2\pi}{b}$이다. $2\cos bx+1=0$에서

$bx=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$이므로 $\mathrm{C}\left(\frac{2\pi}{3b},\ 0\right),\ \mathrm{D}\left(\frac{4\pi}{3b},\ 0\right),\ \overline{\mathrm{CD}}=\frac{2\pi}{3b}$

따라서 사각형 ACDB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{2\pi}{b}+\frac{2\pi}{3b}\right)\times3=8\pi,\ \ \therefore b=\frac{1}{2}$$

$2\cos\frac{1}{2}x+1=1-\sqrt{3}$에서 $\frac{1}{2}x=\frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi$

$\beta=\frac{7}{3}\pi,\ \alpha=\frac{5}{3}\pi,\ \therefore\beta-\alpha=\frac{2}{3}\pi$

94. ⑤

$2\sin\frac{n}{10}\pi(scos\frac{n}{10}\pi-1)-2\cos\frac{n}{10}\pi+1$

$=(2\sin\frac{n}{10}\pi-1)(2\cos\frac{n}{10}\pi-1)<0$

$(\sin\frac{n}{10}\pi-\frac{1}{2})(\cos\frac{n}{10}\pi-\frac{1}{2})<0$

위 부등식을 만족시키는 $n=1,4,5,6,7,8,17,18,19$ 로 9개이다.

95. ⑤

$0\le x\le\pi$이므로 $-2\pi\le g(x)\le2\pi$이다, 따라서

$f(g(x))=0$인 $g(x)$는 $g(x)=-2\pi,\ 0,\ 2\pi$이다.

$\sin2x=-1,\ 0,\ 1$이므로 $2x=0\ \ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi$

$\therefore x=0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4},\ \pi$

합은 $\frac{5\pi}{2}$이다.

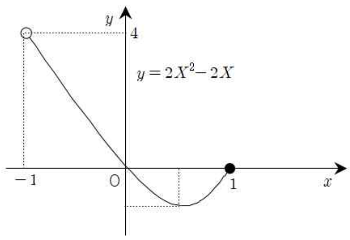
96. 2

$0\le x<\frac{3\pi}{2}$에서 $-1<\sin x\le1$이므로

$-\frac{1}{2}\le2\sin^2x-2\sin x<4$이다,

$y=2\sin^2x-2\sin x$와 $y=k$의 교점의 개수를 먼저 구해보자.

여기서 $X=\sin x$이라 하면 $y=2X^2-2X(-1<X\le1)$



(1) $k<-\frac{1}{2}$인 경우

교점이 없으므로 $f(k)=0$이다.

(2) $k=-\frac{1}{2}$인 경우

교점의 개수는 1개다. $f(k)=2$이다,

(3) $-\frac{1}{2}<k<0$인 경우

교점의 개수는 2개이고, X당 x눈 2개가 대응되므로 $f(k)=4$이다,

(4) $k=0$인 경우

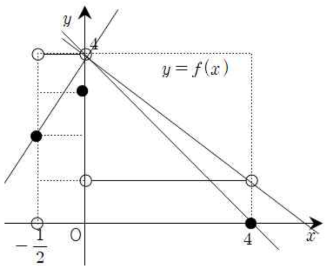
교점의 개수는 2개이고, $X=0$인 경우는 x는 2개가 대응되고 $X=1$인 경우는 x가 1개이므로 $f(k)=3$이다.

(5) $0<k<4$인 경우

교점의 개수는 1개이고, X당 x는 1개가 대응되므로 $f(k)=1$이다.

(6) $4\le k$인 경우

교점이 없으므로 $f(k)=0$이다.



그림으로부터 a의 최댓값은 2이다.

97. ③

$f(x)=-\tan\dfrac{\pi x}{6}$, $g(x)=\log_2\dfrac{x}{a}-1$ 의 그래프가

제4 사분면에서 만나는 점의 개수가 3 개가 되려면

$g(12)=\log_2\dfrac{12}{a}-1<0$ 에서

$\dfrac{12}{a}<2,\ a>6$

$g(18)=\log_2\dfrac{18}{a}-1\geq 0$ 에서

$\dfrac{18}{a}\geq 2,\ a\leq 9$

즉, $6<a\leq 9$ 이므로 모든 자연수 a 의 값의 합은

$7+8+9=24$ 이다.

98. ⑤

$\sin^2(4x)-1=0$, $\sin 4x=\pm 1$ 에서

$4x=\dfrac{2l-1}{2}\pi$, $x=\dfrac{2l-1}{8}\pi$ (단, l 은 정수)

$0<x=\dfrac{2l-1}{8}\pi<\dfrac{n}{12}\pi$ 에서

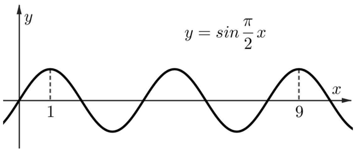
$0<3l-\dfrac{3}{2}<n$ 이므로

$f(n)=31$ 이 되려면 $l=1,2,3,\cdots,31$ 이므로

$91.5<n\leq 94.5$ 즉, 자연수 $n=92, 93, 94$ 이다.

따라서 모든 n 의 값의 합은 279 이다.

99. ④



$n=1$일 때 $\left(\sin\dfrac{\pi}{2}x\right)^2=1$, $\sin\dfrac{\pi}{2}x=\pm 1$

$f(1)=3+5+7=15$ ($\because\ 1<x<9$)

$n=5$일 때 $\left(\sin\dfrac{\pi}{2}x\right)^2=\dfrac{1}{25}$, $\sin\dfrac{\pi}{2}x=\pm\dfrac{1}{5}$

이를 만족하는 x는 $x=5$에 대하여 대칭인 8개의 해이다.

$f(5)=5\times 8=40\ \therefore\ f(1)+f(5)=55$

100. ①

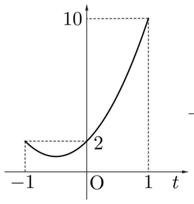
$4\sin^2 x-4\cos x-6+k=4(1-\cos^2 x)-4\cos x-6+k$

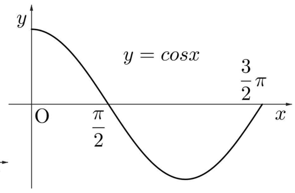
$=-4\cos^2 x-4\cos x-2+k=0$

$4\cos^2 x+4\cos x+2=k\ \left(0\leq x\leq\dfrac{3}{2}\pi\right)$

$-1\leq \cos x\leq 1$인 범위에서 $\cos x=t$라 하면

$4t^2+4t+2=k$





i) $2<k\leq 10$

이때 t의 값은 한 개이고 $0<t<1$이므로 해당하는 x의 값도 하나이면서 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$이다. 따라서 $0<f(k)<\dfrac{\pi}{2}$이다.

ii) $k=2$

이때 $t=-1,\ 0$이므로 $f(k)=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{3}{2}\pi+\pi=3\pi$이다.

iii) $1\leq k<2$

이때 t의 값은 두 개이고 각각의 t의 값은 $-1<t<0$이므로 해당하는 x의 값은 모두 4개 (각각 $x=\pi$에 대해 대칭)이므로

$f(k)=4\pi$

$\therefore\ 4\pi$

101. ②

$f(-x)=f(x)$ 이므로 $y=f(x)$ 는 y 축 대칭이다.

따라서 $x>0$ 인 부분에서 x 축과 한 점에서 만난다.

한편 $f(0)=2\sin\pi\theta+1>0$ 이므로

$y=f(x)$ 의 축의 위치는 $x>0$ 이고

$f(x)=2x^2+4(\cos\pi\theta)x+2\sin^2\pi\theta+1$ 의 판별식이 0 이다.

따라서 $\cos\pi\theta<0$ $\cdots$ ① 이고

$D/4=4\cos^2\pi\theta-4\sin^2\pi\theta-2=2-8\sin^2\pi\theta=0$

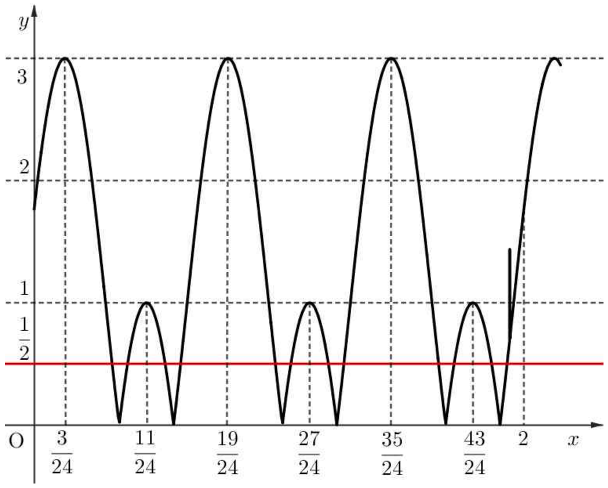
$\therefore\ \sin\pi\theta=\pm\dfrac{1}{2}$ $\cdots$ ②

따라서 ①, ②에서 $\theta=\dfrac{5}{6}$ or $\dfrac{7}{6}$ $\left(0<\theta<\dfrac{3}{2}\right)$ 이며,

가능한 모든 θ 의 합은 2 이다.

102. ②

$y=\left|2\cos\left(3\pi x-\dfrac{3\pi}{8}\right)+1\right|$ 및 직선 $y=\dfrac{1}{2}$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



곡선과 직선이 만나는 서로 다른 점의 개수 $n=12$ 이다.

$y=\left|2\cos\left(3\pi x-\frac{3\pi}{8}\right)+1\right|$ 의 주기는 $\frac{2}{3}$ 이고, 그래프의 대칭성을 고려하면, 이 n 개의 점의 x 좌표의 합

$a=4\times\frac{11}{24}+4\times\frac{27}{24}+4\times\frac{43}{24}=\frac{27}{2}$ 이다.

따라서 $\frac{a}{n}=\frac{27}{24}=\frac{9}{8}$ 이다.

103. ④

$(2a+6)\cos x-a\sin^2 x+a+12<0$에서

$(2a+6)\cos x-a(1-\cos^2 x)+a+12<0$

$a\cos^2 x+(2a+6)\cos x+12<0$

$(a\cos x+6)(\cos x+2)<0$에서 $\cos x+2>0$

$(\because -1\le \cos x\le 1)$이므로

$a\cos x+6<0$ …… ㉠

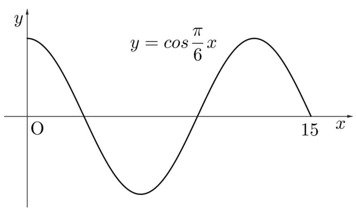
㉠의 해가 $\frac{2}{3}\pi<x<\frac{4}{3}\pi$가 되려면 $\cos x<-\frac{1}{2}$이어야 한다.

따라서 $a=12$이다.

104. ⑤

$0\le t\le 10,\ t\le x\le t+5$ 이므로 x는 0부터 15까지 모두 가능하다.

$0\le \frac{\pi}{6}x\le \frac{5}{2}\pi$



$\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)=\frac{1}{2}$을 만족하는 x를 찾으면

$\frac{\pi}{6}x=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi,\ \frac{7}{3}\pi$

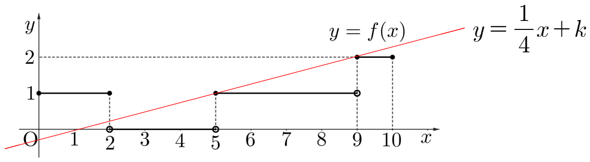
$x=2,\ 10,\ 14$

i) $0\le t\le 2$ $\quad f(t)=1$

ii) $2<t<5$ $\quad f(t)=0$

iii) $5\le t<9$ $\quad f(t)=1$

iv) $9\le t\le 10$ $\quad f(t)=2$



$y=\frac{1}{4}x+k$와 $y=f(x)$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 최댓값은 직선 $y=\frac{1}{4}x+k$가 $(9,\ 2)$를 지날 때이므로

$2=\frac{9}{4}+k$에서 $\therefore\ k=-\frac{1}{4}$

105. ②

$0\le x\le\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi\le x\le 2\pi$에서 $\cos x\ge 0$

$3\sin x+2\cos x\ge 3$

$3\sin x\ge 3-2\cos x$ 양변 제곱

$9\sin^2 x\ge 9-12\cos x+4\cos^2 x$ $\sin^2 x=1-\cos^2 x$

$9(1-\cos^2 x)\ge 9-12\cos x+4\cos^2 x$

$13\cos^2 x-12\cos x=\cos x(13\cos x-12)\le 0$

$0\le \cos x\le\frac{12}{13}$ $\sin x\ge\frac{5}{13}$

$\alpha\le x\le\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3}{2}\pi$에서 $\cos x\le 0$

$3\sin x-2\cos x\ge 3$

$3\sin x\ge 3+2\cos x$ 양변 제곱

$9\sin^2 x\ge 9+12\cos x+4\cos^2 x$ $\sin^2 x=1-\cos^2 x$

$9(1-\cos^2 x)\ge 9+12\cos x+4\cos^2 x$

$13\cos^2 x+12\cos x=\cos x(13\cos x+12)\le 0$

$-\frac{12}{13}\le\cos x\le 0$ $\sin x\ge\frac{5}{13}$

$\frac{\pi}{2}\le x\le\beta$

해가 $\{x|\,\alpha\le x\le\beta\}$ 일 때 $\alpha+\beta=\pi$

$\sin\alpha-\cos\beta=\sin\alpha-\cos(\pi-\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{17}{13}$

$\sin\alpha=\frac{5}{13},\ \cos\alpha=\frac{12}{13}$

$q-p=4$

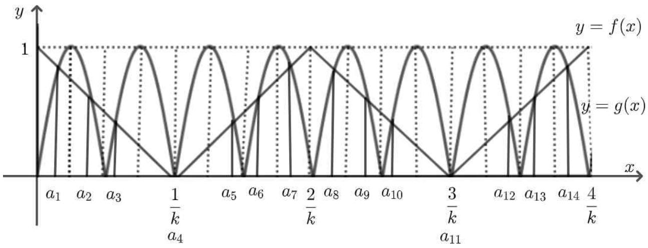
106. ⑤

$g(x)=|\sin 2k\pi x|$

최솟값 0, 최댓값 1, 주기는 $\frac{\pi}{2k\pi}=\frac{1}{2k}$을 만족한다.

주어진 조건에 따라

$0 \le x \le \frac{4}{k}$에서 $y=f(x)$, $y=g(x)$를 그리면 다음과 같다.



$y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 개수는 14개이고,
교점의 x좌표를 각각 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{14}라 하면

$\frac{a_1+a_7}{2}=\frac{1}{k}$, $\frac{a_2+a_6}{2}=\frac{1}{k}$, $\frac{a_3+a_5}{2}=\frac{1}{k}$, $a_4=\frac{1}{k}$

$\frac{a_8+a_{14}}{2}=\frac{3}{k}$, $\frac{a_9+a_{13}}{2}=\frac{3}{k}$, $\frac{a_{10}+a_{12}}{2}=\frac{3}{k}$, $a_{11}=\frac{3}{k}$

$\therefore\ a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{14}=3\times\frac{2}{k}+\frac{1}{k}+3\times\frac{6}{k}+\frac{3}{k}=\frac{28}{k}=7$

$\therefore\ k=4$

107. ⑤

$(1-\cos^2 x)+4\cos x-a<0$

$\cos^2 x-4\cos x+a-1>0$

$\cos x=1$일 때 최솟값을 가지므로

$1-4+a-1>0$, $\quad a>4$

【검수자 다른풀이】

$\cos x=t$하자.$(-1\le t\le 1)$

$t^2-4t+a-1>0$

$f(t)=t^2-4t+a-1$

$\quad=(t-2)^2+a-5$

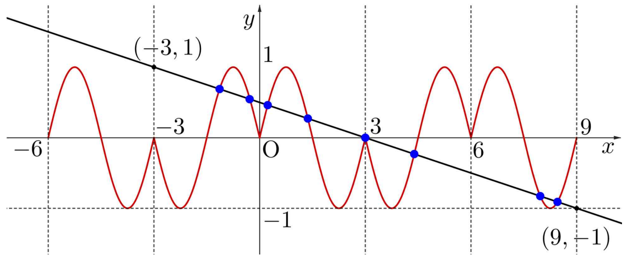
$f(1)$에서 최솟값을 갖는다.

$f(1)>0$

108. ②

$0\le x\le 3$일 때 $f(x)=\sin\frac{2\pi}{3}x$이고, 모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=f(x)$, $f(x+6)=f(x)$를 만족시키는 함수 및
두 점 $(3,0)$, $(9,-1)$을 지나는 직선을 그래프로 나타내면



$-6\le x\le 9$에서 함수 $y=f(x)$와 직선이 만나는 모든 점의 개수는 모두 8개다.

109. ②

$\sin\left(\frac{n}{4}\pi-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{n}{4}\pi\right)=-\cos\left(\frac{n}{4}\pi\right)$이므로

$(-2a^2+b^2+ab+1)\sin\left(\frac{n}{4}\pi-\frac{\pi}{2}\right)+(a^2-ab+4)\tan\frac{2n+1}{4}\pi=0$

$(2a^2-b^2-b-1)\cos\left(\frac{n}{4}\pi\right)+(a^2-ab+4)\tan\frac{2n+1}{4}\pi=0$

k는 정수일 때

$$\cos\left(\frac{n}{4}\pi\right)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2} & (n=8k+1)\\ 0 & (n=8k+2)\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & (n=8k+3)\\ -1 & (n=8k+4)\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & (n=8k+5)\\ 0 & (n=8k+6)\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & (n=8k+7)\\ 1 & (n=8k+8)\end{cases}$$

① $n=4k+1$일 때

$\tan\left(\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-\cot\frac{\pi}{4}=-1$

② $n=4k+2$일 때

$\tan\left(\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$

③ $n=4k+3$일 때

$\tan\left(\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-\cot\frac{\pi}{4}=-1$

④ $n=4k+4$일 때

$\tan\left(\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$

$\therefore\ \tan\left(\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{4}\right)=(-1)^n$ (n은 정수)

$\therefore\ (2a^2-b^2-ab-1)\cos\left(\frac{n}{4}\pi\right)+(-1)^n(a^2-ab+4)=0$

a, b가 정수일 때

$2a^2-b^2-ab-1$, a^2-ab+4는 정수이므로

$(2a^2-b^2-ab-1)\cos\left(\frac{n}{4}\pi\right)+(-1)^n(a^2-ab+4)=0$을 만족하기

위해서는 $\cos\left(\frac{n}{4}\pi\right)$도 정수이어야 한다.

따라서 조건을 만족하는 n의 값은

$8k+2,\ 8k+4,\ 8k+6,\ 8k+8$

i) $n=8k+2$ 일 때

$\cos\left(\frac{n}{4}\pi\right)=0,\ (-1)^n=1$이므로

$a^2-ab+4=0$

$a(a-b)=-4$

$a\ge b\ge 0$이므로 조건을 만족하지 않는다.

ii) $n=8k+4$일 때

$\cos\left(\frac{n}{4}\pi\right)=-1,\ (-1)^n=1$이므로

$-2a^2+b^2+ab+1+a^2-ab+4=0$

$a^2-b^2=5$

$a=3,\ b=2$일 때 만족한다.

iii) $n=8k+6$ 일 때

$\cos\left(\frac{n}{4}\pi\right)=0,\ (-1)^n=1$이므로

$a^2-ab+4=0$

$a(a-b)=-4$

$a\ge b$이므로 조건을 만족하지 않는다.

iv) $n=8k+8$ 일 때

$\cos\left(\frac{n}{4}\pi\right)=1,\ (-1)^n=1$이므로

$2a^2-b^2-ab-1+a^2-ab+4=0$

$3a^2-2ab-b^2=-3$

$(3a+b)(a-b)=-3$

$a\ge b\ge 0$이므로 조건을 만족하지 않는다.

i), ii), iii), iv)에 의해

$a=3,\ b=2,\ n=8k+4$ 일 때 성립

$n=8k+4$ 일 때

$\cos^2\left(\frac{n-2}{8}\pi\right)=\cos^2\left(\frac{8k+2}{8}\pi\right)=\cos^2\left(k\pi+\frac{1}{4}\pi\right)=\frac{1}{2}$

$\therefore\ a-b+\cos^2\frac{(n-2)}{8}\pi=3-2+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

110. ⑤

△ABC에서 사인법칙을 적용하면

$\frac{5}{\sin 120^\circ}=\frac{6}{\sin B}$에서

$\sin B=\frac{3\sqrt{3}}{5}$

111. ⑤

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{AB}}{\sin 45^\circ}=\frac{\overline{AC}}{\sin 60^\circ}$ 이므로

$\overline{AB}=\frac{\overline{AC}}{\sin 60^\circ}\times\sin 45^\circ=\sqrt{6}$ 이다.

112. ②

$\frac{a+c}{b}=\frac{3+5}{4}=2$

113. ②

$A=60^\circ$ 이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{6}{\sin 60^\circ}=\frac{\overline{AC}}{\sin 45^\circ}$ 에서 $\overline{AC}=2\sqrt{6}$ 이다.

114. ④

$\angle B=180^\circ-(75^\circ+45^\circ)=60^\circ$

사인법칙에 따라 $\frac{\overline{AB}}{\sin 45^\circ}=\frac{3}{\sin 60^\circ}$

따라서. $\overline{AB}=\frac{3\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ}=\frac{3\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{6}$

115. ①

△ABH는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{AH}=2\sqrt{2}$

$\sin C=\frac{1}{3}$ 이므로 $\overline{AC}=6\sqrt{2}$

$\overline{CH}=\sqrt{72-8}=8$

116. ①

$\frac{a}{\sin 150^\circ}=2R=12$에서

$a=\sin 150^\circ\times 12=\frac{1}{2}\times 12=6$

117. ④

$\angle ACB=45^\circ$

$\therefore\ \frac{\overline{AC}}{\sin B}=\frac{12}{\sin C}$

$\overline{AC}=6\sqrt{2}$

118. ④

$\sin A=\frac{\overline{BC}}{2R}$

$\frac{6}{2R}=\frac{1}{2}$

$R=6$

119. ②

반지름은 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$이므로

사인법칙에 의해

$\frac{a}{\sin A}=2R$에서 $\sin A=\frac{a}{3\sqrt{2}}$가 되고

마찬가지로 $\sin B=\frac{b}{3\sqrt{2}},\ \sin C=\frac{c}{3\sqrt{2}}$ 이므로

$\sin A + \sin B + \sin C = 1 + \sqrt{2}$에 대입하면

$\frac{1}{3\sqrt{2}}(a+b+c) = 1 + \sqrt{2}$가 되고

삼각형 둘레의 길이는 $a+b+c = 3\sqrt{2}(1+\sqrt{2}) = 6 + 3\sqrt{2}$

$m=6, n=3$

$m+n=9$

120. ①

사인법칙에 의해 $\frac{2}{\sin 30^\circ} = 2R$ 에서 $R=2$ 이다.

121. ④

$A+B+C=\pi$

$\cos(\pi - A) = -\frac{3}{5}$

$\cos A = \frac{3}{5}$

$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = 2 \times 5$

$\therefore \overline{BC} = 8$

122. ②

$\sin A = \frac{a}{6}$ $\sin B = \frac{b}{6}$ $\sin(A+B) = \sin(\pi - C) = \sin C = \frac{c}{6}$

$a+b+c = 10$이므로 $\frac{5}{3}$

123. ③

$\triangle \mathrm{ABC}$에서 $\mathrm{A+B+C} = \pi$, $\mathrm{A+B} = \pi - \mathrm{C}$

$2\sin(\mathrm{A+B})\sin\mathrm{C} = 2\sin(\pi - \mathrm{C})\sin\mathrm{C} = 2\sin^2\mathrm{C} = 1$,

$\sin^2\mathrm{C} = \frac{1}{2}$, $\sin\mathrm{C} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\mathrm{C} < \pi$ 이므로 $\sin\mathrm{C} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

사인법칙에 의해 $\overline{\mathrm{AB}} = 2r\sin\mathrm{C} = 2 \times 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

124. ③

$\angle BOC = \frac{4}{12} \times 2\pi = \frac{2}{3}\pi$

$\therefore S = \frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

125. ④

$\frac{\mathrm{b}}{\sin\mathrm{B}} = 2R$

$\frac{8}{\sin 45^\circ} = 2R$

$R = 4\sqrt{2}$

126. ④

$\overline{\mathrm{AB}} = 4$, $\angle\mathrm{A} = 60^\circ$, $\angle\mathrm{B} = 75^\circ$ 에서 $\angle\mathrm{C} = 45^\circ$ 이고

사인법칙에 의해

$\frac{4}{\sin 45^\circ} = 2R$에서 $R = 2\sqrt{2}$

$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin 60^\circ} = 4\sqrt{2}$ 에서 $\overline{\mathrm{BC}} = 2\sqrt{6}$ 이므로

$\overline{\mathrm{BC}} \times \mathrm{R} = 8\sqrt{3}$

127. ③

사인 법칙에 의해 $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{a+b+c}{6} = 3$ 이다.

128. ②

코사인 법칙에서

$\overline{\mathrm{BC}}^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5\cos 30^\circ$

$= 34 - 15\sqrt{3}$

따라서 $p=34$, $q=-15$, $p-q=49$

129. ④

코사인 법칙 $14^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos(\angle B)$

$\cos(\angle B) = -\frac{1}{2}$, $\angle B = \frac{2}{3}\pi$

130. ②

$\cos A = \frac{36+16-25}{2 \times 4 \times 6} = \frac{9}{16}$

131. ④

$b^2 = \overline{AC}^2 = 12^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot cos120^\circ = 252$

따라서 $b = 6\sqrt{7}$

132. ①

$\triangle \mathrm{ABC}$에서 코사인법칙을 이용하면

$a^2 = 25 + 36 - 2 \times 5 \times 6 \times \frac{3}{5} = 25$에서 $a=5$

$\cos B = \frac{25+25-36}{2 \times 5 \times 5} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}$

133. ③

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\mathrm{C}$

$= 25 + 16 - 2 \times 20 \times \frac{1}{2}$

$= 21$

$c = \sqrt{21}$

134. ①

연꽃의 반지름을 R이라 하면

$a = R^2$

$\overline{AC}^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \times 7 \times 5 \times cos60^\circ = 39$, $\overline{AC} = \sqrt{39}$

$\frac{\sqrt{39}}{2R}=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$R=\sqrt{13}, a=13\pi$

135. $-\frac{1}{4}$

사인법칙에 의하여

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=2:3:4$

따라서

$a=2k, b=3k, c=4k$ (k는 양의 상수)로 놓으면

코사인법칙에 의하여

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(2k)^2+(3k)^2-(4k)^2}{2\times 2k\times 3k}=-\frac{3k^2}{12k^2}=-\frac{1}{4}$

136. ④

$\triangle \mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\sin\theta,\ 0<\theta<\pi$에서

$0<\sin\theta\le 1$이므로 $\theta=\frac{1}{2}\pi$일 때, 넓이의 최댓값은 9이다.

따라서 $a+b=9+\frac{1}{2}=\frac{19}{2}$

137. ②

최대각을 θ라 하면

$\cos\theta=\frac{16+25-49}{2\cdot 4\cdot 5}=-\frac{1}{5}$

$\sin\theta=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

따라서 넓이 $S=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}=4\sqrt{6}$

138. ①

(삼각형 ABC의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BC}\times\sin(\angle ACB)$

$=\frac{1}{2}\times 3\times 2\sqrt{2}\times\sin 45^\circ=3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3$

139. ⑤

$\cos A=\frac{3^2+2^2-(\sqrt{7})^2}{2\times 3\times 2}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2},\ \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 3\times 2\times \sin A=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

140. ②

삼각형의 넓이$\mathrm{S}=\frac{1}{2}\times b\times c\times\sin 45^\circ$

$\therefore \mathrm{S}=\frac{1}{2}\times 10\times 10\times\sin 45^\circ=25\sqrt{2}$

141. ②

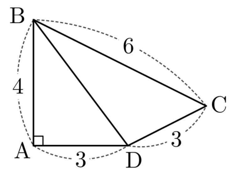
넓이$=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 3\times 8\times \sin 60^\circ=\frac{1}{2}\times 3\times 8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$

142. ③

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin\angle A=\frac{1}{2}\times 5\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$

143. ④



$\overline{\mathrm{BD}}^2=4^2+3^2=25,\ \overline{\mathrm{BD}}=5\ (\because\ \overline{\mathrm{BD}}>0)$

$\angle\mathrm{BDC}=\theta$라 하면 코사인 법칙에 의해

$\cos\theta=\frac{25+9-36}{2\times 5\times 3}=-\frac{1}{15}$

$\sin\theta=\frac{\sqrt{224}}{15}=\frac{4\sqrt{14}}{15}\ (\because\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\ \sin\theta>0)$

$\square\mathrm{ABCD}=\triangle\mathrm{BAD}+\triangle\mathrm{BDC}$

$=\frac{1}{2}\times 4\times 3+\frac{1}{2}\times 5\times 3\times\frac{4\sqrt{14}}{15}$

$=6+2\sqrt{14}$

144. ③

$S=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 12\cdot \sin 135^\circ=30\sqrt{2}$

145. ①

사각형 ABCD의 네 꼭짓점에서 두 대각선과 평행한 직선을 그어 만든 사각형 EFGH는 평행사변형이다.

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 5\times 6\times \sin 135^\circ=\frac{15\sqrt{2}}{2}$

146. ④

$\overline{AD}=k$라 하면 $\overline{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}k,\ \overline{AC}=2k,\ \overline{CD}=x$

$\cos\angle ADB=\frac{\frac{1}{2}k}{\frac{\sqrt{3}}{2}k}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ \sin\angle ADB=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\frac{\overline{AC}}{\sin\angle ADC}=\frac{\overline{AD}}{\sin C}$에서 $\sin C=\frac{\sqrt{6}}{6}$

147. ①

$\angle A = 120^\circ$

사인법칙

$$\frac{12}{\sin 120^\circ} = \frac{\overline{AC}}{\sin 45^\circ}$$

$$\frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\overline{AC}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$\overline{AC} = 4\sqrt{6}$

148. ⑤

$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$에서

$1 - \sin^2 A + 1 - \sin^2 B + 1 - \sin^2 C = 1$

$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$ ......㉠

사인법칙에서 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 8$

$\sin A = \frac{a}{8}$, $\sin B = \frac{b}{8}$, $\sin C = \frac{c}{8}$이므로

이것을 ㉠에 대입하면 $\frac{a^2+b^2+c^2}{64} = 2$

따라서 $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = a^2+b^2+c^2 = 128$

149. $5\sqrt{7}$

$A+B+C=\pi$이므로 $\cos(A+B) = \cos(\pi - C) = -\frac{3}{4}$

$\cos C = \frac{3}{4}$ 이므로 $\sin C = \frac{\sqrt{7}}{4}$

사인법칙에 의해 $\frac{c}{\sin C} = 20$이므로 $\overline{AB} = 5\sqrt{7}$

150. ③

$b^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2\times 2\times 2\sqrt{3}\cos 150^\circ$

$b^2 = 28,\ b = 2\sqrt{7}$ $\quad \frac{b}{\sin B} = \frac{2\sqrt{7}}{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{7} = 2R$

$R = 2\sqrt{7}$ 원의 넓이는 28π

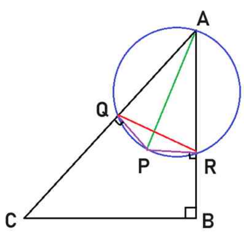
151. ⑤

$\overline{AB} = 15$, $\overline{BC} = 8$, $\overline{CA} = 17$으로

삼각형 ABC는 직각삼각형이므로

$\sin A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{8}{17}$

$\overline{AP} = 6$을 지름으로 하는 원을 그려보면 P에서 내린 수선의 발은 Q, R은 원 위에 존재



따라서 사인법칙에 따라 $\frac{\overline{QR}}{\sin A} = 6$ $\overline{QR} = 6\cdot\frac{8}{17} = \frac{48}{17}$

152. ④

$\sin A\cos C = \sin B$

$\frac{a}{2R}\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{b}{2R}$

$a^2+b^2-c^2 = 2b^2$

$a^2 = b^2 + c^2$ 삼각형 ABC는 $\angle A$가 직각인 직각삼각형

$a = \overline{BC} = 6$ (빗변의 길이)

외접원의 반지름 길이 3

153. ③

$\frac{\overline{AB}}{\sin\angle APB} = 2R$에서 $\frac{8\sqrt{2}}{\sin\angle APB} = 12$이므로

$\therefore\ \sin\angle APB = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos\angle APB = -\frac{1}{3}$

$\overline{PB} = k$라 하면 $(8\sqrt{2})^2 = k^2 + 9k^2 - 2\cdot k\cdot 3k\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$

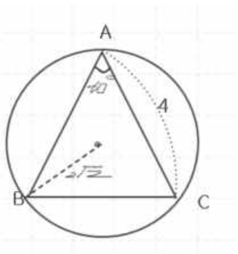
$\therefore\ k = \frac{4\sqrt{6}}{3}$

$\therefore\ \overline{AP} = 3k = 4\sqrt{6}$

154. ③

사인법칙을 적용하면

$\frac{4}{\sin B} = 4\sqrt{2}$ $\sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $B = 45^\circ$, $\therefore C = 75^\circ$



155. ④

$\angle ABC = 120^\circ$

정육각형이므로 $\overline{BE}$를 그으면 $\overline{BE} = 16$이다.

삼각형 BME에서 $\angle EBM = 60^\circ$ 이고 $\overline{BM} = 4$이므로

코사인법칙에 의하여

$\overline{ME}^2 = 16 + 256 - 2\times 4\times 16\times\cos 60^\circ = 208$

$\overline{ME} = 4\sqrt{13}$

156. ④

5초 후 $\overline{AO} = 15\sqrt{6}$, $\overline{BO} = 30$이다.

$\angle OAB = 45^\circ$

$\overline{AB} = x$라 하면 코사인 법칙에 의해

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{x^2+900-1350}{2\times 30x}$

$x^2-450=30x,\ x^2-30x-450=0$

$x=15\pm\sqrt{675}=15\pm 15\sqrt{3}$

$x>0$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=15(\sqrt{3}+1)(\mathrm{m})$

157. ③
AD의 길이를 a AE의 길이를 b라고 하자 삼각형넓이가 $1/4$이 된다고 하였으므로 ABC넓이는 $\frac{1}{2}\times 6\times 4\times \sin 120^\circ$

ADE넓이는 $\frac{1}{2}\times a\times b\times \sin 120^\circ$ 이므로 $ab=6$이 된다

DE의 길이를 x로 놓고 코사인법칙으로 정리하면

$x^2=a^2+b^2-2ab\cos 120^\circ$ $x^2=a^2+b^2+6$

$a^2+b^2\geq 2ab=12$이므로 x^2의 최소는 18 길이의 최소는 $3\sqrt{2}$가 된다.

158. ④

$\cos\theta=\frac{9+25-19}{2\cdot 3\cdot 5}=\frac{1}{2}$

$\angle BAD=\theta$에서 $\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\overline{EC}=x$, $\overline{AD}=2x$

$\overline{DE}^2=(2x)^2+(5-x)^2-2\cdot 2x\cdot(5-x)\times\frac{1}{2}$

$=4x^2+x^2-10x+25-10x+2x^2$

$=7x^2-20x+25=7\left(x-\frac{10}{7}\right)^2+\frac{75}{7}$

$\therefore \overline{DE}^2$의 최솟값은 $\frac{75}{7}$

$\therefore 14\times d^2=150$

159. ④
코사인법칙을 이용하면

$\overline{\mathrm{BC}}^2=81+9-2\times 9\times 3\times\cos 60^\circ=90-27=63$

$\overline{\mathrm{BC}}=3\sqrt{7}$
각의 이등분선의 성질에 의해
$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}$
$\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}=3:1$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BD}}=\frac{3}{4}\overline{\mathrm{BC}}=\frac{9\sqrt{7}}{4}$

160. ⑤
$\triangle\mathrm{ABC}$에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{\mathrm{BC}}^2=64+49-2\times 8\times 7\times(-\frac{1}{2})=169$에서 $\overline{\mathrm{BC}}=13$

$\overline{\mathrm{AH}}=x,\ \overline{\mathrm{BH}}=a,\ \overline{\mathrm{HC}}=13-a$라고 하면
피타고라스 정리에 의해
$x^2=49-a^2=64-(13-a)^2$가 성립하므로

$a=\frac{77}{13}$

따라서 $\overline{\mathrm{AH}}=\frac{28\sqrt{3}}{13}$

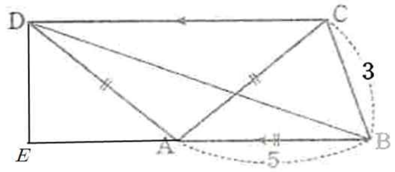
<다른풀이>
$\triangle\mathrm{ABC}$에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{\mathrm{BC}}^2=64+49-2\times 8\times 7\times(-\frac{1}{2})=169$에서 $\overline{\mathrm{BC}}=13$

$\triangle ABC$ 넓이$=\frac{1}{2}\times 7\times 8\times \sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}\times 13\times\overline{AH}$

$14\sqrt{3}=\frac{13}{2}\times\overline{AH}$ $\therefore \overline{AH}=\frac{28\sqrt{3}}{13}$

161. ⑤



점D에서 선분 EB에 내린 수선의 발을 E라 하고
$\angle CAB=\theta$라 하고 삼각형CAB에서 코사인법칙과
$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$을 이용하여

$\cos\theta=\frac{41}{50}$, $\sin\theta=\frac{3\sqrt{91}}{50}$

$\angle DAE=\theta$이고, $AD=5$이므로

$AE=5\cos\theta=4.1,\ DE=5\sin\theta=\frac{3\sqrt{91}}{10}$

$BD^2=DE^2+EB^2=\left(\frac{3\sqrt{91}}{10}\right)^2+\left(\frac{91}{10}\right)^2=91$

$BD=\sqrt{91}$

162. ④
외접원의 반지름 길이 $\overline{\mathrm{AO}}=\overline{\mathrm{BO}}=\overline{\mathrm{CO}}$
이때 외심의 성질에 의하여 O는 각 변의 수직이등분선의 교점이다.
점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{OH}}$ 이다.

문제에서 삼각형 OAB의 넓이가 2라고 주어졌으므로

$\overline{\mathrm{OH}}=1$이고 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{AO}}^2=4+1=5$

$\overline{\mathrm{AO}}=\sqrt{5}$이다.
원주각 성질에서
$2\angle\mathrm{ACB}=\angle\mathrm{AOB}$
$\angle\mathrm{AOH}=\angle\mathrm{ACB}=\theta$

$\sin\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$이고, $\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$ 또는 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ 이다.

$\overline{AB}=4,\ \overline{AC}=2,\ \overline{BC}=k,\ \angle ACB=\theta$ 이므로
삼각형 ABC에서 코사인법칙을 쓰면

$k^2-\dfrac{4\sqrt{5}}{5}k-12=0$ 또는 $k^2+\dfrac{4\sqrt{5}}{5}k-12=0$ 이다.

$k>0$ 이므로 근의 공식으로 각각 k의 값을 구하면

$k=\dfrac{10\sqrt{5}}{5}$ 또는 $k=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ 이므로

모든 k의 값의 합은 $\dfrac{16\sqrt{5}}{5}$

163. ④
선분 BD의 길이를 x라 두면
$\cos A=-\cos C$이므로
$x^2=4^2+6^2-2\times4\times6\cos C=2^2+8^2+2\times2\times8\cos C$

$80\cos C=-16,\ \cos C=-\dfrac{1}{5},\ \sin C=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

사각형$ABCD$의 넓이는 $\dfrac{1}{2}4\times6\dfrac{2\sqrt{6}}{5}+\dfrac{1}{2}2\times8\dfrac{2\sqrt{6}}{5}=8\sqrt{6}$

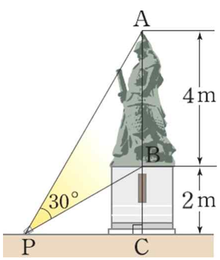
164. ②
$\angle B=\theta$라 하면 $\angle D=\pi-\theta$
$\triangle ADC$에서
$\overline{AC}^2=9+4-12\cos(\pi-\theta)$
$\triangle ABC$에서
$\overline{AC}^2=9+16-24\cos\theta$
위 값이 서로 같으므로

$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$S=\dfrac{1}{2}\times3\times4\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}+\dfrac{1}{2}\times2\times3\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=6\sqrt{2}$

165. $\sqrt{3}$ m



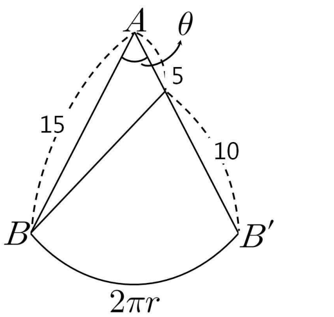
$\overline{PC}=x$ m라고 하면
$\overline{PA}=\sqrt{x^2+36},\ \overline{PB}=\sqrt{x^2+4}$

삼각형 APB에서 코사인법칙에 의하여
$4^2=(\sqrt{x^2+36})^2+(\sqrt{x^2+4})^2$
$-2\times\sqrt{x^2+36}\times\sqrt{x^2+4}\times\cos30°$

$2x^2+24=\sqrt{3(x^2+36)(x^2+4)}$
이 식의 양변을 제곱하여 정리하면
$x^4-24x^2+144=0,\ (x^2-12)^2=0,\ x^2=12$
$x>0$이므로 $x=2\sqrt{3}$
따라서 $\overline{PC}$의 길이는 $2\sqrt{3}$ m이다.

166. ②
$\overline{BP}=x(x>0)$라 하면 $\overline{PC}=\sqrt{x^2-1}$,
$\overline{AP}=\sqrt{(x^2-1)+3^2}=\sqrt{x^2+8}$
삼각형 APB에서 코사인법칙에 따라
$2^2=x^2+\left(\sqrt{x^2+8}\right)^2-2\cdot x\cdot\sqrt{x^2-8}\cos30°$
$2x^2+4=x\sqrt{3}\sqrt{x^2-8}$ 양변 제곱하며하여 정리하면
$4x^4+16x^2+16=3x^4-24x^2\ \ x^4-8x^2+16=0\ \ (x^2-4)^2=0$
따라서 $x>0$이므로 $x=2$

167. $r=5$



전개도에서 부채꼴의 중심각을 θ라 하자.

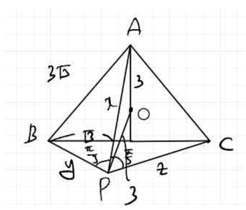
$\cos\theta=\dfrac{25+225-25\cdot13}{2\cdot5\cdot15}=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore\theta=\dfrac{2}{3}\pi$

$\therefore15\times\dfrac{2}{3}\pi=2\pi r$

$\therefore r=5$

168. ④



원에 내접하는 삼각형 ABC에 대해

원주각 $\angle ABC=\angle APB=\dfrac{\pi}{3}$

$\angle ACP=\angle APC=\dfrac{\pi}{3}$

원의 중심을 O라고 하자. 정삼각형 ABC에 대한 삼각비를 이용하면, 한 변의 길이가 $3\sqrt{3}$인 정삼각형임을 알 수 있다.
$\overline{OA}=3$, 점A에서 변 BC에 수선의 발은 원의 중심이자 삼각형

무게중심을 지난다.

$\overline{AA^1}=3\times\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$, $\overline{AB}=a$라고 할 때, $a\sin 60^\circ=\frac{9}{2}$,

$a=3\sqrt{3}$

$\overline{AP}=x, \overline{BP}=y$, $\overline{CP}=z$라고 하자. 코사인법칙을 이용하면

$\overline{AB}^2=x^2+y^2-2xy\cos\frac{\pi}{3}=x^2+y^2-xy$

$\overline{AB}=\overline{AC}$이므로, $x^2+y^2-xy=x^2+z^2-xz$

$y^2-z^2-xy+xz=0$

$(y-z)(y+z)-x(y-z)=0$

$(y-z)(y+x-z)=0$

$y\neq z$, $x=y+z$

$\overline{BC}^2=27=y^2+z^2-2yz\cos\frac{2}{3}\pi=y^2+z^2+yz$

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=x^2+y^2+z^2=(y+z)^2+y^2+z^2$

$=(y^2+2yz+z^2)+y^2+z^2=2(y^2+z^2+yz)=2\cdot 27=54$

$3(\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2)=3\cdot 54=162$

169. 4

$\triangle ABC$의 넓이가 $\frac{5\sqrt{15}}{2}$이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 4\times 5\times\sin B=\frac{5\sqrt{15}}{2}$

$\sin B=\frac{\sqrt{15}}{4}$ 이므로 $\cos B=\frac{1}{4}$

△ABC에서 코사인법칙에 의해서

$\overline{\mathrm{AC}}^2=4^2+5^2-2\times 4\times 5\times\frac{1}{4}=31$

△ADC에서 $\overline{\mathrm{AD}}=x$라고하면 $\cos D=\cos(\pi-B)=-\frac{1}{4}$

코사인법칙에 의해서

$21=3^2+x^2+2\times 3\times x\times\frac{1}{4}$

$2x^2+3x-44=0$ 이므로 $\therefore\ x=4$

$\therefore \overline{\mathrm{AD}}=4$

170. ②

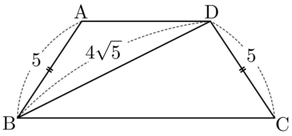
$\overline{BQ}=x$라 두면 $\overline{PQ}=\overline{AQ}=\sqrt{3}x$

코사인법칙에 의해 $28^2=x^2+(\sqrt{3}x)^2-2x(\sqrt{3}x)\cos 150^\circ$

$28^2=x^2+3x^2+2x(\sqrt{3}x)\frac{\sqrt{3}}{2}$ $x=4\sqrt{7}$

$\overline{PQ}=\sqrt{3}\times 4\sqrt{7}=4\sqrt{21}$

171. ①



△BCD의 외접원 반지름의 길이가 $\frac{5\sqrt{5}}{2}$이므로 사인법칙에 의해

$2\times\frac{5\sqrt{5}}{2}\times\sin(\angle\mathrm{DCB})=4\sqrt{5}$, $\sin(\angle\mathrm{DCB})=\frac{4}{5}$

$\cos(\angle\mathrm{DCB})=\frac{3}{5}$, $\overline{\mathrm{BC}}=x$라 하면

코사인 법칙에 의해 $\cos(\angle\mathrm{DCB})=\frac{3}{5}=\frac{x^2+25-80}{2\times 5\times x}$

$\frac{3}{5}=\frac{x^2-55}{10x}$, $x^2-55=6x$, $x^2-6x-55=0$

$(x+5)(x-11)=0$, $x>0$이므로 $x=11$

□ABCD는 사다리꼴이므로

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BC}}-2\overline{\mathrm{CD}}\cos(\angle\mathrm{DCB})=11-2\times 5\times\frac{3}{5}=5$

높이는 $\overline{\mathrm{CD}}\sin(\angle\mathrm{DCB})=4$

$\therefore$ □ABCD $=\frac{1}{2}\times 4\times(5+11)=32$

172. ①

사인법칙과 코사인법칙을 이용해서

조건식을 변형하면 $\frac{b-c}{a}=2\times\frac{b^2+a^2-c^2}{2ab}-1$ 이되고

위의 식을 정리해서 인수분해하면 $(a-c)(a+c-b)=0$이 된다

삼각형조건에 의해 $a=c$인 이등변삼각형이 되고

$\sin C=\frac{4}{5}$조건에 의해 각변의 비가 $5:5:6$인 이등변삼각형이 된다

그러므로 $\cos B=\frac{25+25-36}{50}=\frac{7}{25}$이다.

173. $\frac{100\pi}{3}$

삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=7k, \overline{BC}=3k, \overline{CA}=5k$ 이므로

코사인법칙에 의해 $\cos B=\frac{11}{14}$ 이다.

원의 중심 O에 대하여 $\angle B=\angle COH$ 이고

$\overline{OC}$를 원의 반지름 R이라 하면

$R\cos(\angle COH)=\overline{OH}$

따라서 $R=\frac{10\sqrt{3}}{3}$ 이므로 원 C의 넓이는 $\frac{100\pi}{3}$ 이다.

174. $\frac{81}{2}\pi$

조건 (가)에서 $\sin^2 B+\cos^2 C=1$

$\sin^2 B+\cos^2 C=1$ 이므로 $\sin^2 B=\sin^2 C$이고,

$\sin B=\sin C$이다. ($\because$ 삼각형 내각의 사인값은 항상 양수)

사인값의 비와 변의 길이의 비는 같으므로

삼각형 ABC는 $b=c$인 이등변삼각형이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=b$, $\overline{\mathrm{CA}}=b$, $\overline{\mathrm{BC}}=8=a$라 하면
조건 (나)에서 $\sin C=3(\sin B-\sin A)$에서
$c=3(b-a)$ 인데, $b=c$ 이므로
$2b=3a$, 즉 $2b=24$ 이므로 $b=12$
따라서 $\cos A=\dfrac{144+144-64}{2\times144}=\dfrac{7}{9}$ 이므로
$\sin A=\sqrt{1-\dfrac{49}{81}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$ 이고
$\dfrac{8}{\sin A}=\dfrac{8}{\frac{4\sqrt{2}}{9}}=9\sqrt{2}=2R$
$\therefore\ R=\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$ 이므로 외접원 넓이는 $\dfrac{81}{2}\pi$이다.

175. ⑤
$a\sin\mathrm{A}=b\sin\mathrm{B}+c\sin\mathrm{C}$
$a\times\dfrac{a}{2R}=b\times\dfrac{b}{2R}+c\times\dfrac{c}{2R}$
$a^2=b^2+c^2$

176. ③
$\angle BCD=\theta$라 하면 $\angle DAB=\pi-\theta$이고 $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$
$\overline{BD}^2=2^2+10^2-2\cdot2\cdot10\cdot\cos(\pi-\theta)=128$
$\therefore\ \overline{BD}=8\sqrt{2}$
$\dfrac{\overline{BD}}{\sin\theta}=\dfrac{8\sqrt{2}}{\frac{4}{5}}=10\sqrt{2}=2R$
따라서 $R=5\sqrt{2}$
둘레의 길이는 $10\sqrt{2}\pi$

177. $\dfrac{14\sqrt{3}}{3}$
$\cos\theta=\dfrac{10^2+6^2-14^2}{2\times10\times6}=-\dfrac{1}{2}$, $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$
사인법칙에 의해 $\dfrac{14}{\sin\frac{2}{3}\pi}=2R=\dfrac{28}{\sqrt{3}}$, $R=\dfrac{14}{\sqrt{3}}=\dfrac{14\sqrt{3}}{3}$

178. ②
$\overline{AE}=\sqrt{10}$, $\overline{AC}=3\sqrt{5}$, $\overline{EC}=5$
$\cos\theta=\dfrac{10+45-25}{2\cdot\sqrt{10}\cdot3\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
따라서 $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
$\dfrac{5}{\sin\theta}=2R$에서 $R=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$
$\therefore$ 넓이는 $\dfrac{25}{2}\pi$

179. $\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$
삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여
$\overline{BD}^2=3^2+2^2-2\times3\times2\times\cos\dfrac{\pi}{3}=7$ 이므로 $\overline{BD}=\sqrt{7}$이다.
$\angle BAD+\angle BCD=\pi$이므로
삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여
$2^2+\overline{CD}^2-2\times2\times\overline{CD}\times\cos\dfrac{2\pi}{3}=7$
$\overline{CD}^2+2\overline{CD}-3=0$
$(\overline{CD}-1)(\overline{CD}+3)=0$이므로 $\overline{CD}=1$이다.
삼각형 EAB와 삼각형 ECD에서 $\angle AEB$는 공통이고
$\angle EAB=\angle ECD$이므로
삼각형 EAB와 삼각형 ECD는 닮음이다.
따라서 $\dfrac{\overline{EA}}{\overline{EC}}=\dfrac{\overline{EB}}{\overline{ED}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$이다.
즉, $\dfrac{3+\overline{ED}}{\overline{EC}}=\dfrac{2+\overline{EC}}{\overline{ED}}=\dfrac{2}{1}$
$3+\overline{ED}=2\overline{EC}$, $2+\overline{EC}=2\overline{ED}$
이 두 식을 연립하여 풀면 $\overline{ED}=\dfrac{7}{3}$이다.
$\angle DEC=\pi-\angle BCD=\angle BAD=\dfrac{\pi}{3}$ 이므로
삼각형 ECD에서 사인법칙을 이용하면
$\dfrac{\frac{7}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{1}{\sin\theta}$에서 $\sin\theta=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$ 이다.

180. ①
$\overline{\mathrm{AB}}=c$, $\overline{\mathrm{AC}}=b$, $\angle\mathrm{ADB}=\theta$라 하면
$\triangle\mathrm{ABD}$에서 $2r_1=\dfrac{c}{\sin\theta}$ $\cdots$①
$\triangle\mathrm{ACD}$에서 $2r_2=\dfrac{b}{\sin(\pi-\theta)}=\dfrac{b}{\sin\theta}$ $\cdots$②
①÷②하면 $\dfrac{r_2}{r_1}=\dfrac{b}{c}=\sqrt{5}$
$b=\sqrt{5}c$
$\triangle\mathrm{ABC}$에서 코사인법칙에 의해
$5c^2=c^2+36-12c\cos\dfrac{\pi}{4}$
$2c^2+3\sqrt{2}c-18=0$
$(2c-3\sqrt{2})(c+3\sqrt{2})=0$
$\therefore\ c=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

181. ③
삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{BC}^2 = 4^2 + 12^2 - 2\times4\times12\times\cos\frac{\pi}{3} = 112$$

$$\therefore \overline{BC} = 4\sqrt{7}$$

$\overline{AD}$가 각 $\angle BAC$의 이등분선이므로

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD} = 1 : 3$$

이고 따라서 $\overline{CD} = 3\sqrt{7}$이다. 한편 $\angle CAE = \frac{\pi}{6}$이고

$\angle ACE = \frac{\pi}{2}$이므로 $\angle AEC = \frac{\pi}{3}$이다. 따라서 삼각형 CDE에서

사인법칙에 의해

$$2R = \frac{\overline{CD}}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{3\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{21}$$

따라서 삼각형 CDE의 외접원의 넓이는 21π이다.

182. ②

$\angle ABC = \theta$

$\angle ADC = \pi - \theta$

$\overline{AC}^2 = 2^2 + 4^2 - 2\cdot2\cdot4\cos\theta$

$= 2^2 + 3^2 - 2\cdot3\cdot2\cos(\pi-\theta)$

$$\therefore \cos\theta = \frac{1}{4},\ \sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$\overline{AC} = 4$ 이므로

$$\therefore \frac{\overline{AC}}{\sin\theta} = \frac{4}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{16}{\sqrt{15}} = 2R$$

$$\therefore R = \frac{8}{15}\sqrt{15}$$

$\therefore 15 - 8 = 7$

183. $\frac{2\sqrt{78}}{13}$

$$\cos(\angle ABC) = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{CA}^2}{2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BC}}$$

$$= \frac{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{6})^2 - (\sqrt{26})^2}{2\cdot2\sqrt{2}\cdot3\sqrt{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore\ \angle ABC = 30^\circ$

$\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle BCA)} = \frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABC)}$ 이므로

$$\sin(\angle BCA) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\sin(\angle ABC) = 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{26}}\sin30^\circ = \frac{\sqrt{13}}{13}$$

$\overline{AB} = \overline{AD} = 2\sqrt{2}$ 이므로

$$\overline{BD} = 2\overline{AB}\cos30^\circ = 2\cdot2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{6}$$

$\therefore\ \overline{CD} = \overline{BC} - \overline{BD} = 3\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = \sqrt{6}$

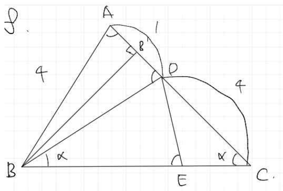
사각형 ABDE는 한 원에 내접하므로

$\angle CED = \angle ABC = 30^\circ$ 이다.

$\frac{\overline{DE}}{\sin(\angle BCA)} = \frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CED)}$ 이므로

$$\overline{DE} = \overline{CD}\times\frac{\sin(\angle BCA)}{\sin(\angle CED)} = \sqrt{6}\times\frac{\frac{\sqrt{13}}{13}}{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{78}}{13}$$

184. ③



$\angle ADB = \theta$라고 하자.

삼각형 ABC에 대해 코사인 법칙을 적용하면,

$\overline{BC}^2 = 4^2 + 5^2 - 2\cdot4\cdot5\cos\theta,\ \overline{BC} = 6$

점 B에서 $\overline{AD}$에 내린 수선의 발을 B'이라 하면

$4\cos(\angle BAC) = \frac{1}{2},\ \overline{AD} = 1$

삼각형 ABD는 $\angle ADB = \angle DAB$ 이등변 삼각형이므로

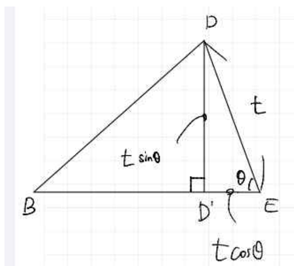
$\overline{BD} = 4,$

삼각형 BCD는 $\overline{BC} = \overline{CD} = 4$이므로 이등변삼각형

$\angle DBC = \angle DCB = \alpha$라고 하자.

$\angle ADB = \theta = 2\alpha$ (삼각형 CBD의 외각), $\angle BCD = \theta$이므로

$\angle CDE = \alpha$(외각)



$\overline{ED} = \overline{EC} = t$라고 하고 삼각형 DCE에서 코사인법칙을 적용하면

$$4^2 = t^2 + t^2 - 2\cdot t\cdot t\cdot \cos(\pi-\theta) = \frac{9}{4}t^2,\quad t = \frac{8}{3}$$

앞서 구한 $\overline{BC} = 6$ 이었는데 이등변 삼각형이므로 $\overline{BD'} = 3,$

$\triangle BDE$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times(3 + t\cos\theta)\times t\sin\theta$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}\right)\left(3 + \frac{1}{3}\right) = \frac{5\sqrt{7}}{3}$$

(다른 $\triangle ABC \backsim \triangle EDB$ 이므로 $\overline{ED} = 4k,\ \overline{EB} = 5k$라 하면

$\triangle EDB$ 에서 $4^2 = (4k)^2 + (5k)^2 - 2\times4k\times5k\times\cos(\angle BED)$

$= (4k)^2 + (5k)^2 - 2\times4k\times5k\times\frac{1}{8}$

$= 36k^2$

따라서 $k^2=\frac{4}{9}$

$\therefore\ \triangle\mathrm{EDB}=\frac{1}{2}\times4k\times5k\times sin(\angle\mathrm{BED})=10k^2\times\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}$

$=\frac{5\sqrt{7}}{3}$

185. ①

ㄱ) $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 마찬가지로 $\cos B$, $\cos C$를 우변에 대입해보면

$2bc\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+2ac\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+2ca\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=a^2+b^2+c^2$

ㄴ) 사인법칙에 의해 $0<A<180^\circ$ 에서

$\frac{a}{R}=2\sin A$이므로 $\sin A=1,\ \frac{1}{2}$의 값이 나와야 하므로

$\sin A=1$일 때, $A=90^\circ$

$\sin A=\frac{1}{2}$일 때, $A=30^\circ, 150^\circ$ 이므로

만족하는 각 A의 개수는 3개다.

ㄷ) 코사인법칙으로 $c^2=4^2+12-2\times4\times2\sqrt{3}\times\cos30^\circ$

$c^2=4,\ c=2$

$\triangle OAB$의 외접원의 반지름을 사인법칙을 이용해 구해보면

$\frac{2}{\sin60^\circ}=2R$에서 $R=\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\pi R^2=\frac{4}{3}\pi$

186. ②

$a=4\sqrt{3},\ B=30^\circ,\ R=4$

$\frac{b}{\sin B}=2R$에서 $b=8\sin30^\circ=4$

코사인법칙을 이용하면

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

$16=48+c^2-8\sqrt{3}c\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$c^2-12c+32=0$

$(c-4)(c-8)=0$

i) $c=8$ 일 때

$a=4\sqrt{3},\ b=4,\ c=8$

$c^2=a^2+b^2$

c가 빗변인 직각 삼각형이므로 성립하지 않음

ii) $c=4$ 일 때

$a=4\sqrt{3},\ b=4,\ c=4$

$a^2>b^2+c^2$

둔각 삼각형이므로 성립

따라서 ($\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이)$=\frac{1}{2}ac\sin B=4\sqrt{3}$

187. ⑤

사인법칙과 코사인법칙을 적용하면

$\frac{a}{2R}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\times\frac{c}{2R}$ 이고

식을 정리하면 $b^2=c^2$이므로 $b=c$인 이등변삼각형이다.

188. ④

$2\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\times\sin(\pi-B)=\sin C$를 변형하면

$2\cos A\times sinB=\sin C$

사인법칙, 코사인법칙을 이용하면

$2\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\times\frac{b}{2R}=\frac{c}{2R}$

이를 정리하면 $b^2=a^2$ 즉, $b=a$ 이다.

따라서 삼각형 ABC는 $\overline{BC}=\overline{AC}$ 인 이등변삼각형이다.

189. ⑤

$\cos^2\mathrm{A}+\cos^2\mathrm{B}-\cos^2\mathrm{C}=1-\sin^2\mathrm{A}+1-\sin^2\mathrm{B}-(1-\sin^2\mathrm{C})$

$=1-\sin^2\mathrm{A}-\sin^2\mathrm{B}+\sin^2\mathrm{C}=1$

$\sin^2\mathrm{C}=\sin^2\mathrm{A}+\sin^2\mathrm{B}$

외접원의 반지름을 r이라 하면 사인법칙에 의해

$4r^2\sin^2\mathrm{C}=4r^2\sin^2\mathrm{A}+4r^2\sin^2\mathrm{B}$

$(2r\sin\mathrm{C})^2=(2r\sin\mathrm{A})^2+(2r\sin\mathrm{B})^2$

$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2 \qquad \therefore\ \angle\mathrm{C}=90^\circ$

190. ④

$\sin B=2\cos A\sin C$에서

사인법칙,코사인법칙에 의하여

$\sin B=\frac{b}{2R},\ \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \sin C=\frac{c}{2R}$

$\frac{b}{2R}=2\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\times\frac{c}{2R}$

$b^2=b^2+c^2-a^2$

$\therefore\ a=c$인 이등변삼각형

191. ②

$\angle\mathrm{ABC}=\theta$라 하자. 삼각형 ABE에서

$$\triangle\mathrm{ABE}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\mathrm{BE}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$

$$3=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times3\times\cos\theta$$

$$\therefore\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}},\ \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times3\times\sin\theta=\frac{3}{2}$

192. ③

$\cos(\angle ABC) = \dfrac{6^2+7^2-3^2}{2\times6\times7} = \dfrac{19}{21}$

$\triangle ABE = \dfrac{6\times7}{2}\sin(\angle ABE) = 21\sin\left(\angle ABC + \dfrac{\pi}{2}\right) = 21\cos(\angle ABC) = 19$

193. ②
삼각형 ABC에서 코사인법칙에 따라

$\cos(\angle ABC) = \dfrac{3^2+6^2-5^2}{2\cdot3\cdot6} = \dfrac{20}{36} = \dfrac{5}{9}$

따라서 삼각형 ABE의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot6\cdot\sin(90^\circ + \angle ABC) = 9\cdot\cos(\angle ABC) = 9\cdot\dfrac{5}{9} = 5$

194. 22
$\triangle$ABC에서 $a=\sqrt{5}$, $b=\sqrt{3}$, $c=2$라 할 때,

$\cos A = \dfrac{4+3-5}{2\times2\times\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \dfrac{\sqrt{33}}{6}$

$S = \dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{33}}{6} = \dfrac{\sqrt{11}}{2}$

$\therefore 8S^2 = 22$

195. ②
$\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ADC$ 이므로

$\dfrac{1}{2}\times2\times3\times\sin120^\circ = \dfrac{1}{2}\times2\times\overline{AD}\times\sin60^\circ + \dfrac{1}{2}\times\overline{AD}\times3\times\sin60^\circ$

이므로 $\overline{AD} = \dfrac{6}{5}$ 이다.

196. ⑤
$\overline{AC} = x$라 하면

$7^2 = 3^2 + x^2 - 2\times3x\times\cos120^\circ$

$(x+8)(x-5) = 0$

$x = 5$

삼각형 각 이등분 성질에 의하여

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$

$3 : 5 = 7 - \overline{CD} : \overline{CD}$

$\overline{CD} = \dfrac{35}{8}$

197. ②

$\overline{AD} = a$, $\overline{AE} = b$라 하자.

$a+b=8$

삼각형 ADE의 넓이와 사각형 $DBCE$의 넓이는 같으므로
삼각형 ABC의 절반이 삼각형 ADE넓이임을 알 수 있다.

$\dfrac{1}{2}\times4\times7\times\sin A\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\times AD\times AE\times\sin A = \dfrac{1}{2}ab\sin A$이므로

$ab = 14$

삼각형 ADE에서

$\cos A = \dfrac{a^2+b^2-15}{2ab} = \dfrac{(a+b)^2-2ab-15}{2ab} = \dfrac{64-28-15}{28} = \dfrac{3}{4}$

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$에서

$\sin A = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

삼각형 $ABC = \dfrac{1}{2}\times4\times7\times sinA = 14\times\dfrac{\sqrt{7}}{4} = \dfrac{7\sqrt{7}}{2}$

198. ①
$a:b:c = 5:6:7$이므로 세변의 길이를 $5k$, $6k$, $7k$라 두고
헤론 공식에 의해 넓이$=\sqrt{9k\times4k\times3k\times2k} = 6\sqrt{6}k^2 = 54\sqrt{6}$
$k=3$ 가장 긴변의 길이는 21

【검수자 다른풀이】
$\overline{AB} = 7k$, $\overline{BC} = 5k$, $\overline{AC} = 6k$, $\angle ACB = \theta$ 하자.

①$(7k)^2 = (5k)^2 + (6k)^2 - 2\times5k\times6k\times cos\theta$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{1}{5} \Rightarrow \therefore \sin\theta = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

②$S = \dfrac{1}{2}\times5k\times6k\times\sin\theta\,(=54\sqrt{6})$

※ $k=3$

199. ②
선분 $\overline{AC} = x$라 하고 코사인법칙을 쓰면

$13 = 8 + x^2 + 4\sqrt{2}x\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$x^2+4x-5=0$이므로 $x=1$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times1\times2\sqrt{2}\times\sin135^\circ = 1$ 이다.

200. $15\sqrt{3}$
$\triangle$ABC에서 코사인 법칙에 의하여

$\overline{BC}^2 = 196 = b^2+c^2-2bc\cos120^\circ$

$= b^2+c^2+bc$

$= (b+c)^2 - bc$

$= 256 - bc$

$bc = 256 - 196 = 60$

$\triangle ABC = \dfrac{1}{2}bc\sin120^\circ = 30\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$

201. ⑤

$\angle AOB=\theta$라 하면 $2\pi=6\theta$에서 $\theta=\frac{\pi}{3}$

$S=\frac{1}{2}\times6^2\times\frac{\pi}{3}=6\pi$

$T=\frac{1}{2}\times\overline{OP}\times6\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3S}{2\sqrt{3}\pi}=\frac{3}{2\sqrt{3}\pi}6\pi$

따라서, $\overline{OP}=2$

$\overline{AP}^2=4+36-2\times2\times6\times\frac{1}{2}=28$

$\therefore\ \overline{AP}=2\sqrt{7}$

202. (1) $10\sqrt{3}$ (2) $a=7$ (3) $R=\frac{7\sqrt{3}}{3}$

(1) $S=\frac{1}{2}\times5\times8\times\sin60^\circ=10\sqrt{3}$

(2) 코사인법칙에 의하여 $a^2=5^2+8^2-2\times5\times8\times\cos60^\circ=49$ 이므로 $a=7$ 이다.

(3) 사인법칙에 의하여 $\frac{7}{\sin60^\circ}=2R$ 이므로 $R=\frac{7\sqrt{3}}{3}$ 이다.

203. ①

$\angle B=\theta$ 라 하면 원에 내접하는 사각형의 성질에 의해

$\angle D=\pi-\theta$ 이다.

$\overline{AC}=x$ 라 하면 코사인법칙에 의하여

$x^2=3^2+5^2-2\times3\times5\times cos\theta$

$x^2=3^2+4^2-2\times3\times4\times\cos(\pi-\theta)$

이므로 $\cos\theta=\frac{1}{6}$ 이다.

이때 $\sin\theta=\frac{\sqrt{35}}{6}$ 이므로

삼각형 ABC의 넓이 $=\frac{1}{2}\times3\times5\times\sin\theta=\frac{5}{4}\sqrt{35}$ 이다.

204. ③

$\overline{OA}=\overline{OP}=3k$라 하자.

$\overline{AH}\times\overline{BH}=(3+\sqrt{5})k\times(3-\sqrt{5})k=\frac{4}{9}\sqrt[3]{81}$

따라서, $k^2=3^{-\frac{2}{3}}$

삼각형 AOP의 넓이 $S=\frac{1}{2}3k\cdot2k=3k^2=3^{\frac{1}{3}}$

205. ⑤

$\sin A:\sin B:\sin C=\sqrt{3}:2:3$이므로 사인법칙에 따라

각 변의 길이를 $\sqrt{3}k,\ 2k,\ 3k$라 할 수 있다.

코사인법칙에 의해

$\cos A=\frac{(9+4-3)k^2}{(2\times3\times2)k^2}=\frac{5}{6}$에서 $\sin\mathrm{A}=\frac{\sqrt{11}}{6}$이다.

$\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이가 $18\sqrt{11}$에서

$\frac{1}{2}\times2k\times3k\times\frac{\sqrt{11}}{6}=18\sqrt{11}$이므로 $k=6$이므로

$\triangle\mathrm{ABC}$의 둘레의 길이는 $30+6\sqrt{3}$이 된다.

따라서 $a+b=36$

206. ②

$\overline{\mathrm{AD}}=x$라 하면 삼각형 $\triangle\mathrm{ABC}$, $\triangle\mathrm{ACD}$에서 사인법칙에 의해

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AC}}^2&=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\cos60^\circ\\&=\overline{\mathrm{AD}}^2+\overline{\mathrm{CD}}^2-2\times\overline{\mathrm{AD}}\times\mathrm{CD}\times\cos45^\circ\end{aligned}$$

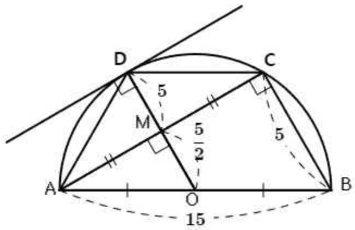
$4^2+3^2-2\times4\times3\times\frac{1}{2}=(3\sqrt{2})^2+x^2-2\times3\sqrt{2}\times x\times\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x^2-6x+5=(x-1)(x-5)=0,\ x=5$

$$\begin{aligned}\square\mathrm{ABCD}&=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD}\\&=\frac{1}{2}\times4\times3\times\sin60^\circ+\frac{1}{2}\times5\times3\sqrt{2}\times\sin45^\circ\\&=\frac{15}{2}+3\sqrt{3}\end{aligned}$$

$\therefore a+b=\frac{21}{2}$

207. $50\sqrt{2}$



$\overline{\mathrm{AB}}$는 지름이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{15^2-5^2}=\sqrt{200}=10\sqrt{2}$

$\square\mathrm{ABCD}$의 넓이가 최대일 때는 점 D를 지나는 직선이 $\overline{\mathrm{AC}}$와 평행한 원의 접선일 때이다.

원의 중심을 O, $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점을 M이라 하면

$\overline{\mathrm{OM}}=\frac{5}{2}$

$\overline{\mathrm{DM}}=\frac{15}{2}-\frac{5}{2}=5$

따라서 이때 $\square\mathrm{ABCD}$의 넓이를 S라 하면

$S=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD}$

$=\frac{1}{2}\times10\sqrt{2}\times5+\frac{1}{2}\times10\sqrt{2}\times5=50\sqrt{2}$

208. ④

코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=3^2+8^2-2\times3\times8\times\cos60^\circ=49$ 에서

$\overline{AC}=7$

원에 내접하는 사각형의 성질에 의해 $\angle ABC=120^\circ$

$\overline{BC}=x$ 라 하면

$3^2+x^2-2\times3\times x\times\cos120^\circ=49$ 에서

$\overline{BC}=5$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times3\times5\times\sin120^\circ=\frac{15}{4}\sqrt{3}$

$\triangle ACD=\frac{1}{2}\times3\times8\times\sin60^\circ=6\sqrt{3}$

사각형 $ABCD$ 의 넓이는

$\frac{15}{4}\sqrt{3}+6\sqrt{3}=\frac{39}{4}\sqrt{3}$ 이다.

따라서 $p+q=39+4=43$ 이다.

209. ④

$\overline{\mathrm{AB}}=a,\ \overline{\mathrm{AC}}=b$

$a+b=16$

$\cos120^\circ=\frac{a^2+b^2-144}{2ab}=-\frac{1}{2}$

$\frac{256-2ab-144}{2ab}=\frac{112-2ab}{2ab}=-\frac{1}{2}$

$ab=56$

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times ab\times\sin120^\circ=\frac{1}{2}\times56\times\frac{\sqrt{3}}{2}=14\sqrt{3}$

210. ②

원주각 성질

$\angle\mathrm{BAC}=45^\circ=\angle\mathrm{BDC},\ \angle\mathrm{DBC}=15^\circ=\angle\mathrm{DAC}$

$\angle\mathrm{ACD}=75^\circ=\angle\mathrm{ABD}$

$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ADC}=90^\circ$

$\overline{\mathrm{AC}}=4\sqrt{3}$는 원의 지름이다.

ㄱ. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$

삼각형 ABC 직각이등변 삼각형 (참)

ㄴ. $\overline{\mathrm{BD}}=6$

사인법칙 $\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin120^\circ}=4\sqrt{3}$ $\overline{\mathrm{BD}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times4\sqrt{3}=6$ (참)

ㄷ. 사각형 ABCD의 넓이는 20이다.

사각형 넓이 $\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times6\times\sin60^\circ=18$(거짓)

211. ①

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}=b,\ \overline{\mathrm{BC}}=6,\ \angle\mathrm{A}=120^\circ$ 인

이등변삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$36=2b^2+b^2$에서 $b=2\sqrt{3}$ $\cdots$①

$\overline{\mathrm{BP}}=x,\ \overline{\mathrm{CP}}=y,\ \overline{\mathrm{AP}}=2\sqrt{3}-y$라 하면

삼각형 ABP에서

$x^2=12+(2\sqrt{3}-y)^2+2\sqrt{3}(2\sqrt{3}-y)$

$x^2=36-6\sqrt{3}y+y^2$ $\cdots$②

①, ②에 의하여

$\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2=x^2+y^2$

$=2y^2-6\sqrt{3}y+36$이므로

$y=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 일 때 최솟값 $\frac{45}{2}$ 을 갖는다.

212. $\frac{\sqrt{7}}{8}$

$\angle BAM=\angle MNC=\theta,\ \angle AMB=\alpha$라 하자.

$\triangle ABM$에서 $\frac{2}{\sin\alpha}=\frac{1}{\sin\theta}$

$\triangle NMC$에서 $\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\overline{NC}}{\sin(\pi-\alpha)}$

따라서 $\overline{NC}=2$

$\overline{AN}=x$라 하자.

$\triangle ABM$에서 $\cos\theta=\frac{2^2+(3x)^2-1^2}{2\cdot2\cdot3x}$

$\triangle NMC$에서 $\cos\theta=\frac{2^2+(2x)^2-1^2}{2\cdot2\cdot2x}$

두 식을 연립하여 계산하면 $x^2=\frac{1}{2}$

$\overline{AN}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이고 $\overline{NM}=\sqrt{2}$

$\therefore\ \cos\theta=\frac{5}{4\sqrt{2}}$ 이고 $\sin\theta=\frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}$

따라서

$\triangle ANC=\frac{1}{2}\cdot\triangle NMC=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{7}}{8}$

213. ①

삼각형 ABD와 삼각형 ADC에서 사인법칙에 의해

$2r_1=\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin\frac{\pi}{3}}$,

$2r_2=\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin\theta}$

$\frac{r_2}{r_1}=\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{13}}{3}$에서 $\sin\theta=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$

따라서 $\sin^2\theta=\frac{27}{52},\ \cos^2\theta=\frac{25}{52},\ \tan^2\theta=\frac{27}{25}$

따라서 $p+q=52$이다.

214. ①

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}=x$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$16=x^2+x^2-2x^2\cos\frac{\pi}{6}=2x^2-\sqrt{3}x^2$ 에서

$x^2=32+16\sqrt{3}$ $\cdots$①

$\overline{\mathrm{BD}}=y$라 하면 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의해

$y^2=4^2+4^2-2\times4\times4\times cos\frac{\pi}{6}=32-16\sqrt{3}$ $\cdots$②

①, ②에 의하여 $\overline{AB}^2+\overline{BD}^2=64$

215. ⑤

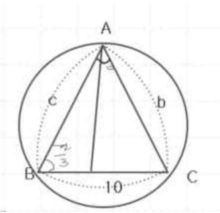
사인법칙에 의하여 삼각형 ABD의 외접원의반지름의 길이를 r_1

이므로 $2r_1=\dfrac{\overline{AD}}{\sin B}=\dfrac{\overline{AD}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2\overline{AD}}{\sqrt{3}}$

삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 r_2 이므로

$2r_2=\dfrac{\overline{AD}}{\sin C}$ 이므로 $\dfrac{r_2}{r_1}=\dfrac{\overline{AD}}{\sin C}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2\overline{AD}}=\dfrac{\sqrt{21}}{4}$ 이므로

$\sin C=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{21}}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$



$\dfrac{\overline{AC}}{\sin B}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}$에서 $\dfrac{\overline{AC}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\overline{AB}}{\frac{2}{\sqrt{7}}}$ 이므로

$\overline{AC}=\overline{AB}\times\dfrac{\sqrt{7}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{21}}{4}\times\overline{AB}$

삼각형 ABC 에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+10^2-2\times\overline{AB}\times10\times\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{21}{16}c^2=c^2+10^2-2\times c\times10\times\dfrac{1}{2}$

$5c^2+160c-1600=0$

$c^2+32c-320=0$

$\therefore c=\overline{AB}=8$

[다른 풀이]

$\angle ADB=\theta$라 하면 $\angle ADC=\pi-\theta$ 이고

삼각형 ABD에서 사인법칙에 따라

$\dfrac{\overline{AB}}{\sin\theta}=2r_1$

삼각형 ACD에서 사인법칙에 따라

$\dfrac{\overline{AC}}{\sin(\pi-\theta)}=2r_2$ 이므로

$\dfrac{\overline{AC}}{\sin(\pi-\theta)}\times\dfrac{\sin\theta}{\overline{AB}}=\dfrac{2r_2}{2r_1}$이므로

$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\dfrac{2r_2}{2r_1}=\dfrac{\sqrt{21}}{4}$ 즉 $\overline{AC}=\sqrt{21}k$, $\overline{AB}=4k$라 할 수 있다.

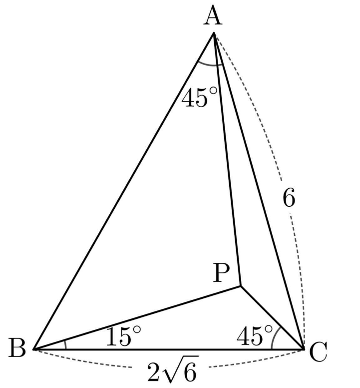
삼각형 ABC 에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+10^2-2\times\overline{AB}\times10\times\dfrac{1}{2}$

$21k^2=16k^2+10^2-2\times4k\times10\times\cos\dfrac{\pi}{3}$

$5k^2+40k-100=0$ $k=2$ $\therefore \overline{AB}=8$

216. ③



$\angle BPC=120^\circ$, 사인법칙에 의해 $\dfrac{\overline{BP}}{\sin45^\circ}=\dfrac{2\sqrt{6}}{\sin120^\circ}$

$\overline{BP}=\dfrac{\frac{2\sqrt{6}}{1}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{4\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=4$

$\overline{AB}=x$라 하면 코사인 법칙에 의해

$\cos45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{x^2+36-24}{2\times6\times x}=\dfrac{x^2+12}{12x}$

$x^2+12=6\sqrt{2}x,\ x^2-6\sqrt{2}x+12=0$

$x=3\sqrt{2}+\sqrt{6}$ $(\because\ x>2\sqrt{6})$

사인법칙에 의해 $\dfrac{2\sqrt{6}}{\sin45^\circ}=\dfrac{6}{\sin(\angle ABC)}$

$\sin(\angle ABC)=6\times\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{6}}=3\times\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\angle ABC=60^\circ$ $\therefore$ $\angle ABP=45^\circ$

점 P는 삼각형 내부의 점이므로

$\triangle ABP=\dfrac{1}{2}\times(3\sqrt{2}+\sqrt{6})\times4\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=6+2\sqrt{3}$

217. $4-2\sqrt{3}$

$\triangle ABF$에서 각 $\angle BAF=\angle DAF=45^\circ$ 이므로

$\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{BF}:\overline{FD}=\sqrt{3}:1$이다.

따라서 $\overline{FD}=2\times\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$

$\triangle AFD$에서 $\overline{AF}^2=1+(\sqrt{3}-1)^2-2(\sqrt{3}-1)\cos\dfrac{\pi}{3}$

$\overline{AF}^2=6-3\sqrt{3}$ 이므로 $\triangle RFD$와 $\triangle ABF$에서 사인법칙을 활용하면

$2R_1=\dfrac{\overline{AF}}{\sin\frac{\pi}{6}}=2\overline{AF}$ $\therefore R_1=\overline{AF}$

$2R_2=\dfrac{\overline{AF}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\overline{AF}$ $\therefore R_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\overline{AF}$

따라서

$R_1^2-R_2^2=\overline{AF}^2-\frac{1}{3}\overline{AF}^2=\frac{2}{3}\overline{AF}^2=\frac{2}{3}\{6-3\sqrt{3}\}=4-2\sqrt{3}$

218. 15

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ (사인법칙)

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{C}{2R}$ 주어진 두 식에 대입하면,

$\left(\frac{a}{2R}\right)^2+\left(\frac{b}{2R}\right)^2=\left(\frac{c}{2R}\right)^2$, $a^2+b^2=c^2$ (직각삼각형)

$\frac{a}{2R}=2\left(\frac{c}{2R}-\frac{b}{2R}\right)$, $\quad a=2(c-b)$

삼각형 ABC는 원에 내접하는 상태이고, 직각삼각형이므로 각 C는 90° 이다.

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $\frac{25}{2}$이므로

$c=25$이고

$a^2+b^2=25^2$, $(2c-2b)^2+b^2=25^2$, $(50-2b)^2+b^2=25^2$,

$5b^2-200b+50^2-25^2=5b^2-200b+75\times25=0$,

$b^2-40b+15\times25=(b-15)(b-25)=0$에서 $b=15$ 또는 $b=25$

그런데 $b<c$이므로 $b=\overline{AC}=15$이다.

219. ②

$\overline{OC}=x$, $\overline{OD}=y$라 하자.

(i) 두 삼각형의 넓이의 비는

$\triangle OAB:\triangle OCD=\overline{OA}\times\overline{OB}:\overline{OC}\times\overline{OD}=25:6$이므로

$r^2:xy=25:6$

$\therefore\ 6\cdot r^2=25xy$

(ii) $\frac{\overline{AC}\times\overline{BD}}{\overline{OC}\times\overline{OD}}=1$에서 $(r-x)(r-y)=xy$이므로

$r^2-(x+y)r=0$

$\therefore\ r=x+y$

$\frac{x}{r}+\frac{y}{r}=1$이고 $6\cdot r^2=25xy$에서 $\frac{x}{r}\times\frac{y}{r}=\frac{6}{25}$

따라서 $\frac{x}{r}=\frac{3}{5}$, $\frac{y}{r}=\frac{2}{5}$ $\quad(\overline{OC}>\overline{OD})$

그러므로 $\frac{\overline{OD}}{r}=\frac{y}{r}=\frac{2}{5}=\frac{m}{n}$

$\therefore\ m\times n=10$

220. ①

사각형 ABCD는 원에 내접하고

삼각형 ACD는 직각삼각형이므로

$\angle D=\theta$ 라 하면 $\angle B=\pi-\theta$ 이고

$\cos\theta=\frac{2}{3}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$가 된다.

$\overline{AB}=\overline{BC}=a$라 하면 코사인법칙에 의해

$\overline{AC}^2=4^2+6^2-2\times4\times6\times\cos\theta=52-32=20$ $\quad\cdots$ ①

$\overline{AC}^2=a^2+a^2-2a^2\cos(\pi-\theta)=2a^2+\frac{4}{3}a^2=\frac{10}{3}a^2$

$\cdots$ ②

① , ②에 의하여 $a^2=6$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

삼각형 ABC와 삼각형 ACD의 넓이의 합이므로

$\frac{\sqrt{5}}{6}(24+6)=5\sqrt{5}$

221. 12

O에서 선분 $\overline{BQ}$에 그은 수선의 발을 H라 하자.

$\angle HOR=\angle HRO=\frac{\pi}{4}$ 이므로 사인법칙에 의해서

$\frac{\overline{OQ}}{\sin135^\circ}=\frac{\overline{QR}}{\sin30^\circ}$

$\therefore\ \overline{QR}=6\sqrt{2}$

한편, 코사인법칙에 의해서

$\overline{QR}^2=12^2+\overline{OR}^2-2\cdot12\cdot\overline{OR}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$이고

$\overline{QR}=6(\sqrt{3}-1)$

$\therefore$ 넓이

$=\frac{1}{2}\cdot12^2\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\cdot12\cdot6(\sqrt{3}-1)\cdot\frac{1}{2}=18-18\sqrt{3}+12\pi$

따라서, $p+q+r=12$

222. ①

원 C의 반지름의 길이를 R라 하면 원 C의 넓이가

$\frac{49}{3}\pi$이므로 $R^2\pi=\frac{49}{3}\pi$, $R=\frac{7}{3}\sqrt{3}$

$\angle ABC=\theta$라 하면 $\cos\theta=\frac{13}{14}$ $\sin\theta=\frac{3\sqrt{3}}{14}$

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{AC}}{\sin\theta}=2R$ $\overline{AC}=3$ $\overline{AB}=x$라 하면

코사인법칙에 의해서 $3^2=x^2+7^2-2\times x\times7\times\frac{13}{14}$

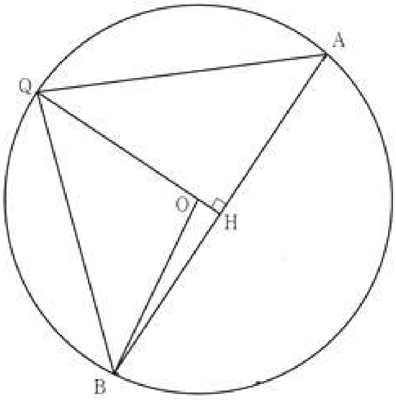
$x^2-13x+40=0$ $x=5$ or $x=8$ 인데 둔각삼각형이므로 $x=8$이다.

넓이가 최대가 되도록 하는 점을 Q라 하면 점 Q는 선분 AC의 수직이등분선과 원 C의 두 교점 중 직선 AC로부터 멀리 떨어져 있는 점이다.

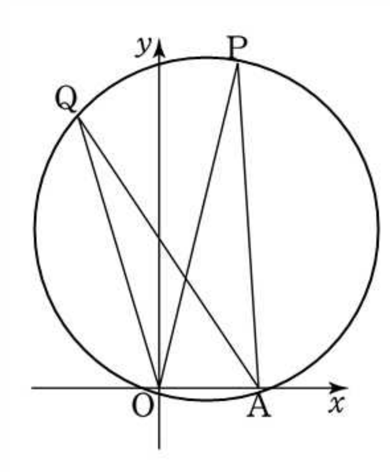
$\overline{OH}^2=\overline{OB}^2-\overline{BH}^2$ $\overline{OH}^2=\frac{49}{3}-16=\frac{1}{3}$

$\overline{OH}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ QAB삼각형의 높이는 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$이다.

넓이의 최대값은 $\frac{1}{2}\times8\times\frac{8\sqrt{3}}{3}=\frac{32\sqrt{3}}{3}$ $\quad p+q=35$이다.



223. ③



$\cos\angle OPA=\cos\angle OQA=\frac{2\sqrt{2}}{3}$에서 각이 같다는 것을 알고
A,O,P,Q가 한 원 위에 있음을 알 수 있다.
삼각형 OAP 에서 코사인법칙을 적용해보면

$OA=3, AP=6\sqrt{2}, \cos\angle OPA=\cos\angle OQA=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

에서 $OP=9$임을 알수 있고 OAP가 직각삼각형임을 알 수 있다.

삼각형 OAQ에서도 똑같이 해보면 $OQ=7$임을 알 수 있다.

$PQ=\sqrt{9^2-7^2}=4\sqrt{2}$

삼각형 OAP의 넓이는 $\frac{1}{2}\times3\times6\sqrt{2}=9\sqrt{2}$

삼각형 OQP 직각삼각형이므로

삼각형 OQP의 넓이는 $=\frac{1}{2}\times7\times4\sqrt{2}=14\sqrt{2}$

사각형 $OAPQ=9\sqrt{2}+14\sqrt{2}=23\sqrt{2}$

224. ②

$\angle BDC=30^\circ$, $\angle ADB=45^\circ=\angle ACB$ 이므로
사각형 $ABCD$는 한원위에 내접해있다.
따라서 $\angle ACD=45^\circ$ 이므로 $\angle ABD=45^\circ$ 이다.
삼각형 ABD는 직각이등변삼각형이므로
$\overline{AB}:\overline{BD}=1:\sqrt{2}$, $\overline{AB}=2\sqrt{2}$

225. ①

$\angle A=\theta$

삼각형 ABC 넓이 $10\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times8\times5\times sin\theta$

$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\theta=\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}$

$\theta=\frac{\pi}{3}$ 일 때

$\overline{PQ}:\overline{AQ}=1:\sqrt{3}$ $\overline{AQ}<\overline{PQ}$에 모순

따라서 $\theta=\frac{2\pi}{3}$

코사인법칙에서

$\overline{BC}^2=64+25-2\times8\times5\times\left(-\frac{1}{2}\right)=129$

$\overline{BC}=\sqrt{129}$

$\overline{BP}:\overline{PC}=8:5$

$\overline{BP}=\sqrt{129}\times\frac{8}{13}$

삼각형 ABP에서 코사인법칙

$\overline{PQ}:\overline{AQ}:\overline{AP}=\sqrt{3}:1:2$

$\overline{AP}=x$

$129\times\frac{64}{169}=64+x^2-2\times8\times x\times\frac{1}{2}$

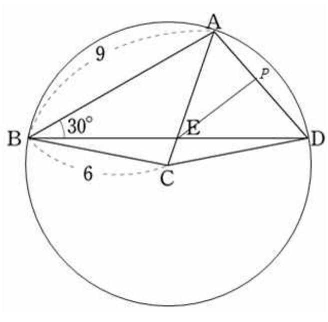
$169x^2-1352x+2560=(13x-40)(13x-64)=0$

$x=\frac{40}{13},\frac{64}{13}$에서 $x=\frac{40}{13}$(점 P는 선분 BC위에 있으므로)

$\overline{AQ}=\frac{1}{2}\overline{AP}$

$\overline{AP}=\frac{20}{13}$

226. ①



$\angle ACD=60^\circ$ 이고 $\angle ABD=30^\circ$ 이므로 $\triangle ABD$는 점C를 외접원의 중심으로 하는 삼각형임을 알수 있다.
$\overline{AC}=6$, $\triangle ABC$는 이등변 삼각형이므로 $\angle ADE=\theta$라 하면 원주각과 중심각 관계에 의하여 $\angle ACB=2\theta$가 되고 여기서 $\sin\theta$를 구해보면 점C에서 $\overline{AB}$에 수선의 발을 내려서 $\sin\theta$를 구하면 $\sin\theta=\frac{3}{4}$가 된다.

점E에서 $\overline{AD}$에 수선의 발을 P라 하자.

$\overline{AE}=x$라 하면 $\overline{AP}=\frac{x}{2}$, $\overline{EP}=\frac{\sqrt{3}x}{2}$가 되고

$\sin\theta=\frac{3}{4}$이므로 $\tan\theta=\frac{3}{\sqrt{7}}$이므로

$\tan\theta=\frac{3}{\sqrt{7}}=\frac{\frac{\sqrt{3}x}{2}}{6-\frac{x}{2}}$에서 $x=\frac{36}{\sqrt{21}+3}$이 된다.

$\triangle AED$에서 사인법칙을 써보면

$\frac{x}{\sin\theta}=2R$이 되므로

위에서 나온 값을 대입해보면

$$\frac{\frac{36}{\sqrt{21}+3}}{\frac{3}{4}}=\frac{48}{3+\sqrt{21}}=4\sqrt{21}-12$$

$a=4,\ b=-12$

$a+b=-8$

227. ⑤

$\frac{\sqrt{3}}{\sin\theta}=\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{2}=2R,\ \ \sin\theta=\frac{\sqrt{6}}{4},\ R=\sqrt{2}$

호AB의 원주각 C가 θ이므로 호AB의 중심각이 2θ

$\cos2\theta=\frac{\sqrt{2^2}+\sqrt{2^2}-\sqrt{3^2}}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{4}$

$\sin^2\theta+\cos2\theta=\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=\frac{5}{8}$

228. ③

$\overline{\mathrm{AB}}=5,\overline{\mathrm{AD}}=7,\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CAD},\cos(\angle\mathrm{BAD})=\frac{3}{5}$

$\overline{\mathrm{BD}}=y,\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CD}}=x$(원주각의 크기가 같으므로 현의 길이가 같다)

삼각형 ABD 코사인법칙

$y^2=25+49-2\times5\times7\times\frac{3}{5}$

$y^2=32\ y=4\sqrt{2}$

$\cos(\pi-\angle\mathrm{BAD})=-\cos(\angle\mathrm{BAD})=-\frac{3}{5}$

삼각형 CBD 코사인법칙

$32=2x^2-2\times x\times x\times\left(-\frac{3}{5}\right)$

$\frac{16}{5}x^2=32\ \ x^2=10, x=\sqrt{10}$

$\cos(\angle\mathrm{BAD})=\frac{3}{5}$ 이면 $\sin(\angle\mathrm{BAD})=\frac{4}{5}$

삼각형 ABD 의 넓이 $\frac{1}{2}\times5\times7\times\frac{4}{5}=14$

$\cos(\angle\mathrm{BCD})=-\frac{3}{5}$ 이면 $\sin(\angle\mathrm{BCD})=\frac{4}{5}$

삼각형 CBD 의 넓이 $\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}\times\frac{4}{5}=4$

사각형 ABCD의 넓이 18

229. ⑤

(가) $\cos^2A+\cos^2B=1+\cos^2C$에서
$1-\sin^2A+1-\sin^2B=1+1-\sin^2C$
$\sin^2A+\sin^2B=\sin^2C$
사인법칙에 의하여 $a^2+b^2=c^2$ 이다.
즉, 삼각형 ABC는 c가 빗변인 직각삼각형이고,
넓이가 $8\sqrt{3}$ 이므로 $ab=16\sqrt{3}$ 이다.

(나) $A+B=C=\frac{\pi}{2}$ 이므로

$\tan B=\tan\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\frac{1}{\tan A}$, $\tan\frac{C}{2}=1$

$\sqrt{3}\tan A-\tan B+\sqrt{3}=\tan\frac{C}{2}$ 에서

$\sqrt{3}\tan A-\frac{1}{\tan A}+\sqrt{3}-1=0$ 이므로

$\tan A=-1,\ \frac{1}{\sqrt{3}}$

A는 예각이므로 $\tan A=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 이고 $A=\frac{\pi}{6},\ B=\frac{\pi}{3}$ 이다.

따라서 $a=4,\ b=4\sqrt{3}$ 이다.

한편, $\overline{AB}$의 중점을 O라 하면 점 O는 외접원의 중심이다.

$\angle ACP=\frac{\pi}{12}$ 이므로 $\angle AOP=\frac{\pi}{6}$ 이다.

$\overline{OA}=\overline{OP}=4$ 이므로 코사인법칙에 의하여

$k^2=4^2+4^2-2\times4\times4\times\cos\frac{\pi}{6}=32-16\sqrt{3}$ 이다.

230. ④

$\overline{AB}$의 중점을 O라 하면, $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OP}=6$ 이다.
$\angle OAP=\angle OPA=\theta$ 이므로 $\angle OPQ=\angle POQ=2\theta$ 이다.
두 선분 PQ, QB와 호 BP로 둘러싸인 부분의 넓이 $S(\theta)$는

부채꼴 OBP에서 삼각형 OPQ를 제외하면 된다.

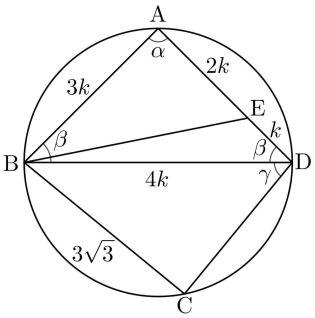
즉, $S(\theta)=\frac{1}{2}\times6^2\times2\theta-\frac{1}{2}\times6\times3\tan2\theta$

$=36\theta-9\tan2\theta$

따라서 $S(k)=3\pi-p\sqrt{3}$ 일 때, $\theta=\frac{\pi}{12}$ 이므로

정수 $p=3$ 이다.

231. $\sqrt{35}$



△ABD에서 외접원의 반지름을 R이라 할 때

$\frac{\overline{BD}}{\sin\alpha}=\frac{\overline{AD}}{\sin\beta}=2R$에서 $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{3}{4}=\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$

이므로 $\overline{AD}=3k$, $\overline{BD}=4k$ 로 놓을 수 있다.

이때 $\cos\beta=\frac{2k}{3k}=\frac{2}{3}$이므로

$\sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{3}{4}$이므로

$\sin\alpha=\frac{4}{3}\sin\beta=\frac{4\sqrt{5}}{9}$

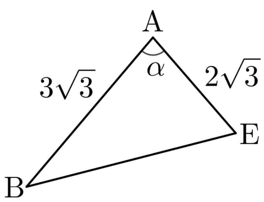
△BCD에서

$\frac{3\sqrt{3}}{\sin\gamma}=\frac{\overline{BD}}{\sin\alpha}=2R$ 이고 $\sin\gamma=\frac{\sqrt{5}}{3}$ 임을 이용하면

$(\because \sin C=\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha)$

$R=\frac{9\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$, $\overline{BD}=2R\sin\alpha=\frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\times\frac{4\sqrt{5}}{9}=4\sqrt{3}=4k$

∴



$\overline{BE}^2=(3\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2-2\cdot3\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}\cos\alpha$

$=27+12-36\cdot\frac{1}{9}=35$ $\left(\because \cos\alpha=\frac{1}{9}\right)$

∴ $\overline{BE}=\sqrt{35}$

232. ④

$\angle DBA=\theta$라 하면 $\cos\theta=\frac{\sqrt{14}}{4}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}$

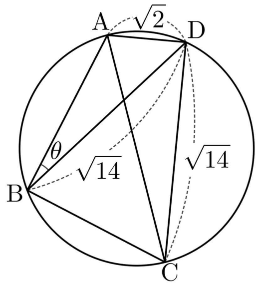
$\overline{AB}=x$라 하면 코사인 법칙에 의해

$\cos\theta=\frac{\sqrt{14}}{4}=\frac{x^2+14-2}{2\sqrt{14}x}$, $x^2+12=7x$

$(x-3)(x-4)=0$, $\overline{AC}>\overline{AB}$ 이므로

$\overline{AC}=4$, $\overline{AB}=3$, 코사인 법칙에 의해

$\cos(\angle BAD)=\frac{9+2-14}{2\times3\times\sqrt{2}}=\frac{-3}{6\sqrt{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$



원에서 $\angle BAD+\angle BCD=180^\circ$ 이므로 $\cos(\angle BCD)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

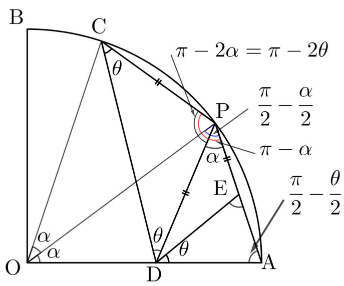
$\overline{BC}=y$라 하면 $\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{y^2+14-14}{2\sqrt{14}y}$, $y^2=\sqrt{7}y$, $y=\sqrt{7}$

□ABCD=△ABD+△BCD

$=\left(\frac{1}{2}\times3\times\sqrt{14}\times\frac{\sqrt{2}}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{7}\times\sqrt{14}\times\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\right)=\frac{5}{2}\sqrt{7}$

$p+q=7$

233. ④



$\begin{cases}\triangle PCD\\ \triangle PDA\end{cases}$는 이등변삼각형이므로

$\angle COP=\angle POD=\alpha$라 하면

$\angle PDA=\angle PAD=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$이므로

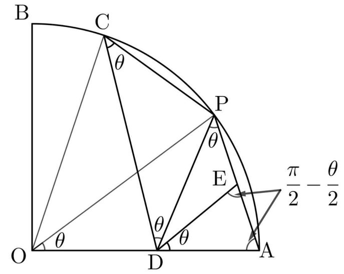
$\angle APD=\alpha$이고, $\angle CPD=\angle APC-\angle APD$

$\pi-2\theta=2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)-\alpha$

$\pi-2\theta=\pi-\alpha-\alpha$

이므로 $\theta=\alpha$이다.

이를 다시 정리하면



$\therefore$ $\triangle \mathrm{OAP} \backsim \triangle \mathrm{PDA} \backsim \triangle \mathrm{DAE}$이다.

$\triangle \mathrm{OAP}$에서

$\overline{\mathrm{AP}}^2 = 5^2 + 5^2 - 2\times 5\times 5\cos\theta$

$= 50 - 50 \cdot \frac{4}{5} = 10 \ \left(\because\ \cos\theta = \frac{4}{5}\right)$

$\therefore$ $\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{10}$

$\triangle \mathrm{OAP}$와 $\triangle \mathrm{ADP}$의 닮음비$=5:\sqrt{10}$ 이므로

$\overline{\mathrm{AD}} = 5\times\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2 = \frac{10}{5} = 2$

$\therefore$ $\triangle \mathrm{EDA}$의 넓이는

$S = \frac{1}{2}\times 2\times 2\times sin\theta = \frac{6}{5}$

234. ③

$\overline{AD}$와 $\overline{BC}$의 교점의 좌표를 E라 하자.
삼각형 ABE와 삼각형CDE가 AA닮음이고 닮음비는 $5:3$이므로
$\overline{BE} = 5k$, $\overline{DE} = 3k$, $\overline{AE} = 5t$, $\overline{CE} = 3t$라고 하자.
삼각형 CDE에서 코사인법칙을 쓰면

$\cos\alpha = \frac{6^2 + 9k^2 - 9t^2}{2\times 6\times 3k} = \frac{5}{14}$

식을 정리하면

$k^2 - t^2 + 4 = \frac{10k}{7}$

ABD, CBD의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때,
$S_1 : S_2 = 2:1$이므로

$\frac{1}{2}\times 10\times(3k+5t)\times \sin\angle BAD : \frac{1}{2}\times 6\times (3t+5k)\times\sin\angle BCD = 2:1$

를 정리하면

$15k = 7t$

$k^2 - t^2 + 4 = \frac{10k}{7}$식과 연립해서 k를 찾아보면

$t = \frac{15}{7}k$를 대입해보면

$88k^2 + 35k - 98 = 0$에서 양수인 k를 구해보면

$(8k-7)(11k+14) = 0$에서 $k = \frac{7}{8}$

$t = \frac{15}{8}$

삼각형 $ADC = \frac{1}{2}\times(3k+5t)\times 6\times sin\alpha$이므로

$\sin\alpha$는 $\cos\alpha = \frac{5}{14}$이므로 $\sin\alpha = \frac{3}{14}\sqrt{19}$

대입해보면

$ADC = \frac{1}{2}\times(3k+5t)\times 6\times sin\alpha = \frac{54}{7}\sqrt{19}$

따라서 $7S = 54\sqrt{19}$

235. ④

각 DCB가 $\frac{2\pi}{3}$이고 $\overline{\mathrm{BC}} = 6$, $\overline{\mathrm{CD}} = 4$ 이므로 $\overline{\mathrm{BD}}$를
코사인법칙을
이용해서 구하면 $\overline{\mathrm{BD}} = 2\sqrt{19}$
삼각형 BED를 사인법칙을 이용해서 정리하면

$\frac{2\sqrt{19}}{\sin\frac{2\pi}{3}} = \frac{2}{\sin\theta}$이므로 $\sin\theta = \frac{\sqrt{19}}{38}$

236. ⑤

삼각형 ABC의 넓이를 이용하면 $\frac{1}{2}\times 6\times 6\times\sin\theta = 12\sqrt{2}$

그러므로 $\sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos\theta = \frac{1}{3}$이므로 $\overline{\mathrm{BC}} = 4\sqrt{6}$
삼각형 ABC가 이등변 삼각형이므로 밑변이 수직이등분되므로
점A에서 내린 수선의 발을 H이라 할 때 $\overline{\mathrm{CH}} = 2\sqrt{6}$
사인법칙을 사용해서 외접원의 반지름은 $3\sqrt{3}$이 나오고 선분 OA의
$1:2$의 내분점D은 점 H와 일치하므로 $\overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{CH}} = 2\sqrt{6}$이다.

237. $\frac{27}{2}$

외접원의 반지름을 R이라 하면

$\triangle\mathrm{ABC}$에서 $\frac{9}{\sin 60^\circ} = 2\mathrm{R}$이므로 $\mathrm{R} = 3\sqrt{3}$이다.

$\triangle\mathrm{BCE}$에서 $\frac{\overline{\mathrm{BE}}}{\sin 30^\circ} = 2\mathrm{R} = 6\sqrt{3}$이므로 $\overline{\mathrm{BE}} = 3\sqrt{3}$이다.

한편 $\triangle\mathrm{ABE}$는 이등변삼각형이고 $\overline{\mathrm{AE}} = 3\sqrt{3}$이다.
$\triangle\mathrm{ACE}$에서 코사인법칙에 의해 $\overline{\mathrm{AC}} = k$라 하면

$27 = k^2 + k^2 - 2k^2\cos 30^\circ = 2k^2 - \sqrt{3}k^2$

$\Rightarrow$ $k^2(2-\sqrt{3}) = 27$

$\Rightarrow$ $k^2 = 27(2+\sqrt{3})$이다.

$S - T = \triangle\mathrm{ACE} - \triangle\mathrm{ABE}$이므로

$S - T = \frac{1}{2}k^2\sin 30^\circ - \frac{1}{2}\times 3\sqrt{3}\times 9\times sin 30^\circ$

$= \frac{1}{2}\times 27(2+\sqrt{3})\times\frac{1}{2} - \frac{27\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{27}{2}$이다.

238. (1) 12π (2) $4+2\sqrt{3}$
(1) 삼각형 AEC의 외접원과 삼각형 ABC의 외접원은 동일하므로 삼각형 ABC에서 사인법칙을 사용한다.
$\frac{6}{\sin 60^\circ}=2R$에서
$R=2\sqrt{3}$ 이므로
삼각형 AEC의 외접원의 넓이는 12π 이다.

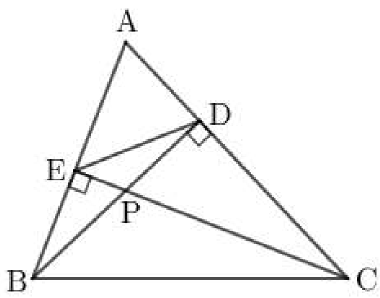
(2) 삼각형 AEC에서 사인법칙을 사용하면
$AE=2\sqrt{3}$
삼각형 AEC에서 각 C를 이용하여 코사인 법칙을 이용하면
$d^2=12(2+\sqrt{3})$
선분 AE와 선분 EB의 원주각이 같으므로 길이도 같다.
$P-Q=\triangle AEC-\triangle AEB=6$
따라서 $\frac{d^2}{P-Q}=\frac{12(2+\sqrt{3})}{6}=4+2\sqrt{3}$ 이다.

239. ①
$\overline{AB}=\sqrt{10}k$, $\overline{AC}=2k$라 하면 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\sqrt{5}k$
$\angle AOC=\theta$라 하면
$\cos\theta=\frac{5k^2+5k^2-4k^2}{2\times 5k^2}=\frac{3}{5}$, $\sin\theta=\frac{4}{5}$
사각형 ABOC에서 삼각형 BOC 넓이를 제외하면
$$\frac{5k^2}{2}+\frac{5k^2\times\sin\theta}{2}-\frac{5k^2\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{2}=6$$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$
$k^2=2$
삼각형 ABO의 넓이는
$S=\frac{1}{2}\times 5k^2=5$

240. $\frac{9\sqrt{39}}{2}$
각 BDA를 θ로 가정해서 사인법칙을 사용하면 $\frac{4\sqrt{3}}{\sin\theta}=16$에서
$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{4}$이다. 이때 점B에서 직선 AD에 내린 수선의 발을 H라 하면 $6\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\overline{BH}$ 이고 $6\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{13}}{4}=\overline{AH}$이므로
사각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 3\sqrt{26}\times\frac{3\sqrt{6}}{2}=\frac{9\sqrt{39}}{2}$ 이다.

241. ③
$\angle A=\frac{\pi}{4}$ 이므로 $\angle D=\frac{3}{4}\pi$ (원에 내접하는 사각형)
원의 반지름 $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 사인법칙 $\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\sqrt{10}$
$\overline{BC}=\sqrt{5}$
삼각형 BDC, $\sin(\angle BCD)=\frac{\sqrt{5}}{5}$
사인법칙 $\frac{\overline{BD}}{\frac{\sqrt{5}}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ $\overline{BD}=\sqrt{2}$
$\overline{DC}=x$ 코사인법칙
$\frac{-\sqrt{2}}{2}=\frac{x^2+2-5}{2\sqrt{2}x}$
$x^2+2x-3=(x-1)(x+3)=0$ $x=1$
삼각형 BDC 넓이 $\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times 1\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{1}{2}$

242. ①



$\overline{AD}=\overline{AB}\cos A=4\cos A$, $\overline{AE}=\overline{AC}\cos A=6\cos A$ …… ㉠
삼각형 ABC, 삼각형 ADE의 외접원의 반지름의 길이를 각각 R, r라 하면
$R^2-r^2=9$
삼각형 ABC, 삼각형 ADE에서 사인법칙에 의해
$R=\frac{\overline{BC}}{2\sin A}$, $r=\frac{\overline{DE}}{2\sin A}$
$R^2-r^2=\frac{\overline{BC}^2-\overline{DE}^2}{4\sin^2 A}=9$ …… ㉡
이다. 한편 사각형 BCDE는 원에 내접하므로 $\angle ABC=\angle ADE$이다. 따라서 삼각형 ABC와 삼각형 ADE는 닮음이고 닮음비는
$\overline{AB}:\overline{AD}=4:4\cos A=1:\cos A$
이다. 따라서
$\overline{DE}=\overline{BC}\times\cos A$
이고 ㉡에 대입하여 정리하면
$\overline{BC}^2=36$, $\therefore\overline{BC}=6$
이고 삼각형 ABC에서 코사인 법칙에 의해
$$\cos A=\frac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{AC}}=\frac{16+36-36}{2\times 4\times 6}=\frac{1}{3}$$

㉠에서

$\overline{AE}=2,\ \overline{BE}=2$

이고, $\angle A=\angle BPE$이므로

$\overline{PE}=\dfrac{2}{\tan\angle BPE}=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 삼각형 PBE의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore p+q=3$

243. ③

$\angle ABC=\theta$라 하자.

삼각형ABC에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos\theta$

이므로 $\overline{AC}^2=4^2+3^2-2\times4\times4\times\dfrac{17}{32}=\dfrac{7}{2}$

호 EA에 대한 원주각의 크기는 서로 같으므로

$\angle ACE=\angle ABE$

호 CE에 대한 원주각의 크기는 서로 같으므로

$\angle EAC=\angle EBC$

한편, $\angle ABE=\angle EBC$이므로 $\angle ACE=\angle EAC$

그러므로 삼각형 EAC는 $\overline{EA}=\overline{EC}$인 이등변삼각형이다.

삼각형 ABD에서 $\angle ADE=\angle DAB+\angle ABD$

한편, $\angle DAB=\angle CAD,\ \angle ABD=\angle EBC$

그러므로 $\angle ADE=\angle CAD+\angle EBC$

$=\angle CAD+\angle EAC$

$=\angle EAD$

즉, 삼각형 EAD는 $\overline{EA}=\overline{DE}$인 이등변삼각형이다.

삼각형 EAC에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{AC}^2=\overline{EA}^2+\overline{EC}^2-2\times\overline{EA}\times\overline{EC}\times\cos(\pi-\theta)$ 이고

$\overline{EA}=\overline{EC}$ 이므로

$\dfrac{49}{4}=2\times\overline{EA}^2-2\times\overline{EA}^2\times\left(-\dfrac{17}{32}\right)$, $\overline{EA}=2$ 따라서 $\overline{DE}=2$

사각형 ABCE가 원에 내접하므로 $\angle ABC=\angle CEF$

그러므로 삼각형FCE와 삼각형FAB는 $1:2$ 닮음이다.

(왜냐하면 $\overline{AB}=4,\ \overline{CE}=2$)

따라서 $\overline{EF}=a,\ \overline{CF}=b$라 하면 두 삼각형의 비례관계에 의해

$2a=3+b,\ 2b=2+a$

즉 $a=\dfrac{8}{3},\ b=\dfrac{7}{3}$

삼각형FCE에서 코사인법칙에 의해서

$$\cos\theta=\dfrac{\left(\dfrac{8}{3}\right)^2+\left(\dfrac{7}{3}\right)^2-2^2}{2\times\dfrac{8}{3}\times\dfrac{7}{3}}=\dfrac{11}{16}$$

따라서 $\sin^2\theta=1-\dfrac{121}{256}=\dfrac{135}{256}$

$\overline{DE}-\sin^2\theta=2-\dfrac{135}{256}=\dfrac{377}{256}$

$\therefore p-q=377-256=121$

244. ①

$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{3}\sin\dfrac{\beta}{2}$ 이므로 $\dfrac{\alpha}{2}=60^\circ$ $\dfrac{\beta}{2}=30^\circ$ 원 O의 반지름의 길이를 R이라 할 때 $\dfrac{\overline{AB}}{\sin120^\circ}=2R$ 이므로 $R=2$ O'의 반지름의 길이를 R'이라 할 때 $\dfrac{\overline{AB}}{\sin60^\circ}=2R'$ $R'=2\sqrt{3}$이다.

공통부분의 넓이는 두 활꼴의 넓이의 합과 같으므로

S_1=부채꼴 OAB의 넓이 - 삼각형OAB의 넓이

S_2=부채꼴 $O'AB$의 넓이 - 삼각형$O'AB$의 넓이

두 넓이의 합을 구하면 된다.

$S_1=\dfrac{1}{2}\times2^2\times\dfrac{2}{3}\pi-\dfrac{1}{2}\times2^2\times\sin120^\circ$

$S_2=\dfrac{1}{2}\times(2\sqrt{3})^2\times\dfrac{1}{3}\pi-\dfrac{1}{2}\times(2\sqrt{3})^2\times\sin60^\circ$

$S_1+S_2=\dfrac{10}{3}\pi+4\sqrt{3}$ $\dfrac{3}{8}ab=5$이다.

【검수자 다른풀이】

원O의 반지름:a

원O'의 반지름:b 하자.

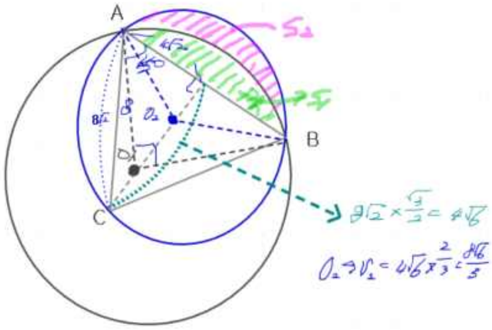
①$2a+2b=4+4\sqrt{3}$

$\therefore a+b=2+2\sqrt{3}$

②$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{a}$, $\cos\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{b}$

$\therefore\dfrac{\sqrt{3}}{a}=\dfrac{3}{b}\Rightarrow\therefore b=\sqrt{3}a$

245. ⑤



반지름의 길이가 8인 원O_1에서 S_1구하기

반지름의 길이가 8이고 현의 길이가 $8\sqrt{2}$이므로 중심각은 90°

S_1은 (사분원의 넓이) -(직각 이등변삼각형의 넓이)

$S_1 = 16\pi - 32$

이 있다.

원O_2에 내접하는 삼각형이 한변의 길이가 $8\sqrt{2}$인 정삼각형이므로 사인법칙에 의해 원O_2의 반지름

$r_2 = O_2A = \frac{8\sqrt{6}}{3}$ 이고 중심각 $\angle AO_2B = 120^\circ$ 이다.

부채꼴AO_2B의 넓이

$S = \frac{1}{2}\times\left(\frac{8\sqrt{6}}{3}\right)^2\times\frac{2\pi}{3} = \frac{128\pi}{9}$

$\triangle \mathrm{AO_2B} = \frac{1}{2}\times\left(\frac{8\sqrt{6}}{3}\right)^2\times\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{32\sqrt{3}}{3}$ 이므로

$S_2 =$ 부채꼴$O_2AB - S_1 - \triangle O_2AB$

$S_2 = \frac{128\pi}{9} - 16\pi + 32 - \frac{32\sqrt{3}}{3}$

$S_2 = \frac{128\pi}{9} - 16\pi + 32 - \frac{32\sqrt{3}}{3} = -\frac{16}{9}\pi + \frac{96-32\sqrt{3}}{3}$

원O_1과 O_2의 공통부분의 넓이는 $O_2 - S_2$

$O_2 - S_2 = \frac{128}{3}\pi - \left(-\frac{16}{9}\pi + \frac{96-32\sqrt{3}}{3}\right)$

$= -32 + \frac{32\sqrt{3}}{3} + \frac{400}{9}\pi$

$p = -32,\ q = \frac{32}{3},\ r = \frac{400}{9}$ 이다.

$\therefore p - q + r = -32 - \frac{32}{3} + \frac{400}{9} = \frac{16}{9}$

246. ③

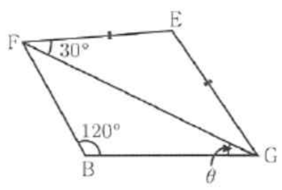
ㄱ. $\angle \mathrm{BGF} = \theta$이므로

$\angle \mathrm{BFG} = 180^\circ - (120^\circ + \theta) = 60^\circ - \theta$

$\therefore\ \angle \mathrm{BFE} = \angle \mathrm{BFG} + \angle \mathrm{EFG}$

$= (60^\circ - \theta) + 30^\circ$

$= 90^\circ - \theta$



$\cos(\angle BFE) = \sin\theta$------------[참]

ㄴ. $\overline{\mathrm{EF}} = \overline{\mathrm{EG}} = 4$인 이등변삼각형 EFG에서 점 E에서 $\overline{\mathrm{FG}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{FG}} = 2\times\overline{\mathrm{FH}} = 2(\overline{\mathrm{EF}}\cos 30^\circ)$

$= 2\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 4\sqrt{3}$

삼각형 BGF에서 사인법칙에 의하여

$\frac{4\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} = \frac{\overline{\mathrm{BF}}}{\sin\theta}$

이므로 $\frac{4\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} = \frac{\overline{\mathrm{BF}}}{\sin\theta}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BF}} = 8\sin\theta$ [거짓]

ㄷ. ㄱ, ㄴ의 결과를 이용하기 위해 삼각형 EFB에 코사인법칙을 적용한다.

$\overline{\mathrm{BE}}^2 = \overline{\mathrm{BF}}^2 + \overline{\mathrm{EF}}^2 - 2\times\overline{\mathrm{BF}}\times\overline{\mathrm{EF}}\times\cos(90^\circ - \theta)$

$= (8\sin\theta)^2 + 4^2 - 2\times 8\sin\theta\times 4\times sin\theta$

$= 64\sin^2\theta + 4^2 - 2\times 8\sin\theta\times 4\times sin\theta$

$64\sin^2\theta + 16 - 64\sin^2\theta$

$= 16$

즉, $\overline{\mathrm{BE}} = 4$ $(\because\ \overline{\mathrm{BE}} > 0)$으로 항상 일정하다. [참]

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

247. ③

ㄱ. $\triangle\mathrm{ABC}$에서 코사인법칙을 이용하면

$\cos B = \frac{12+81-39}{2\times 2\sqrt{3}\times 9} = \frac{54}{36\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\mathrm{B} = \frac{\pi}{6}$

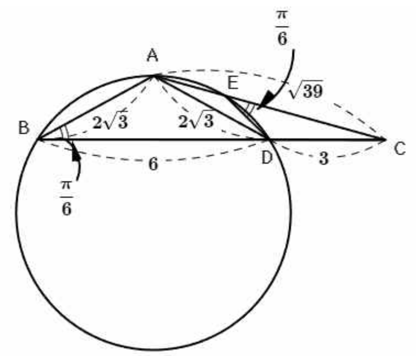
$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AD}} = 2\sqrt{3}$ 이므로

$\overline{\mathrm{BD}} = 2\times 2\sqrt{3}\times\cos\frac{\pi}{6} = 6$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BD}} : \overline{\mathrm{CD}} = 2 : 1$ (참)

ㄴ. ㄱ에 의해 $\overline{\mathrm{BD}} = 6,\ \overline{\mathrm{CD}} = 3$

□ABDE가 원에 내접하고 $\angle \mathrm{B} = \frac{\pi}{6}$이므로 $\angle \mathrm{DEC} = \frac{\pi}{6}$



$\triangle\mathrm{EDC}$의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면

$2R = \frac{3}{\sin\frac{\pi}{6}} = 6\ \therefore\ R = 3$ (참)

ㄷ. △ACD에서 코사인법칙을 이용하면

$\cos C = \dfrac{39+9-12}{2\times\sqrt{39}\times 3} = \dfrac{36}{6\sqrt{39}} = \dfrac{6}{\sqrt{39}} = \dfrac{2\sqrt{39}}{13}$

$\sin C = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{39}} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$

△ECD에서 사인법칙에 의해

$\dfrac{\overline{ED}}{\sin C} = \dfrac{3}{\sin\frac{\pi}{6}} = 6$

$\overline{ED} = \dfrac{6}{\sqrt{13}} = \dfrac{6\sqrt{13}}{13}$

$\overline{EC} = \overline{ED}\cos\dfrac{\pi}{6} + \overline{CD}\cos C = \dfrac{6\sqrt{13}}{13}\times\dfrac{1}{2} + 3\times\dfrac{2\sqrt{39}}{13} = \dfrac{9\sqrt{13}}{13}$

$\therefore\ \overline{AE} = \dfrac{4\sqrt{39}}{13}$ (거짓)

248. ⑤

ㄱ. 사인법칙에 따라

$\dfrac{3}{\sin 60^\circ} = \dfrac{b}{\sin B}$에서 $b = 2\sqrt{3}\sin B$ (참)

ㄴ. $c=5$일 때 $\overline{AP}=x$, $\overline{BP}=y$라 하면

코사인법칙에 의해

삼각형 ABC에서 $a^2 = b^2+25-5b$ ⋯ ①

삼각형 APB에서 $y^2 = x^2+25-5x$ ⋯ ②

①, ②에 의하여

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = x^2+y^2$

$= 2x^2-5x+25$이므로

$x = \dfrac{5}{4}$일 때 최솟값 $\dfrac{175}{8}$을 갖는다. (참)

ㄷ. 코사인법칙에 의해

$a^2 = b^2+c^2-2bc\times\cos 60^\circ = b^2+c^2-bc$ ⋯ ①

$\dfrac{c}{a+b} + \dfrac{b}{a+c} = 1$의 양변에 $(a+b)(a+c)$을 곱해서 정리하면

$a^2 = b^2+c^2-bc$ ⋯ ②

①, ②에 의하여 (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

249. ④

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해서

$2R = \dfrac{\overline{BC}}{\sin A}$, $\overline{BC}=6$

ㄱ. 사각형 ABDC가 원에 내접하므로 $\angle BDC = \dfrac{2}{3}\pi$이다.

$\sin(\angle BDC) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$이다. (거짓)

ㄴ. 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의해서

$2R = \dfrac{\overline{BD}}{\sin(\angle BCD)}$, $\overline{BD}=4$

이고, 또한 코사인법칙에 의해서 $\overline{CD}=x$라 하면

$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 - 2\times\overline{BD}\times\overline{CD}\times\cos\dfrac{2}{3}\pi$

$36 = 16+x^2+4x$

$x^2+4x-20=0,\ x=-2+2\sqrt{6}$

따라서 $\overline{CD} = 2\sqrt{6}-2$이다. (참)

ㄷ. 삼각형 BCD의 넓이가 최대가 되려면 점 D는 호 $\overset{\frown}{BC}$의 중점 일때 이다. $\overline{BC}=6$, $\angle BCD = \dfrac{\pi}{6}$이므로 $\overline{CD} = 2\sqrt{3}$이다.

따라서 삼각형 BCD의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times 6\times 2\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2} = 3\sqrt{3}$ 이다.

(참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

250. ③

$a_9 = 8+3\times 8 = 32$

251. ②

$a_6 = 3+(6-1)\times 5 = 28$

252. ④

$a_1=2,\ d=3$ 등차수열 $a_{12} = 2+33 = 35$

253. ⑤

$a_9 = a_1+4\times 8 = -35,\quad a_1 = -67$

$a_n = -67+4(n-1) = 4n-71 > 0,\quad n > \dfrac{71}{4}$ 18항부터.

254. ⑤

$a_2 = a+d = 6$

$a_5 = a+4d = 18$

$\therefore\ a=2,\ d=4$

$a_8 = 30$

255. ④

$d=4$

$a_1 = 2$

$a_8 = a_1+4d = 30$

256. ③

등차수열에서 $a_4 = \dfrac{a_3+a_5}{2} = \dfrac{10+16}{2} = 13$

257. ③

$a_7 = a_3+4d$ 이므로 $d=3$ 이다.

따라서 $a_8 = a_7+d = 21$ 이다.

258. ④

공차를 d라 하면

$a_{11}-a_5 = 6d = 18,\ d=3$

259. ③
$11=a_1+3\times3,\ \therefore a_1=2$
$a_{11}=a_1+3\times10=32$

260. ②
$a_{n+1}-a_n=-2$에서 공차가 -2인 등차수열 이다.
따라서 $a_3=a_2-2=23,\ \therefore a_2=25$

261. ①
a_5가 a_2와 a_8의 중항이므로 $a_8=22$

262. ③
$a_n=4+(n-1)\times3=3n+1$
$a_6=19$

263. ③
공차 $d=a_{n+1}-a_n=\{3(n+1)+7\}-(3n+7)=3$

264. ①
$a_1+3d-(a_1+d)=6$
$\therefore\ d=3$
$a_7=22$

265. ③
등차수열이므로 공차를 d라 하면
$a_2+a_4=2a_1+4d=12,\ a_7+a_{11}=2a_1+16d=36$이므로
연립하면
$12d=24\ \ d=2,\ a_1=2$
따라서 $a_{10}=2+(10-1)\cdot2=20$

266. ④
[풀이]
d를 등차수열의 공차라고 하자.
$a_3=a_1+2d$
$a_4=a_1+3d$
$a_6=a_1+5d$
$a_1=a_3+6=a_1+2d+6,\ d=-3$
$2a_4-3a_6=2a_1+6d-3a_1-15d=-a_1-9d=-8, a_1=35$
$a_n=35+(n-1)(-3)$
$a_k<0$이 되는 자연수 k의 최솟값은
$-3k+38<0$
$k>\dfrac{38}{3}$
$k=13$

267. ③
$2a+d=8,\ 3a+9d=42$ 이므로 $a=2,\ d=4$
$a_m=2+4(m-1)=70,\ m=18$

268. ③
[풀이]
등차중항의 성질을 이용
$2\times8=a+b$
$a+b=16$

269. ②
공차를 d라 하면
$3+3d=18$, $d=5$
$a=3+d=3+5=8$
$b=a+d=8+5=13$
$\therefore\ a+b=21$
[다른풀이]
등차중항에 의하여 $2a=3+b,\ 2b=a+18$ 연립
$4b-36=3+b$
$b=13,\ a=8$
[다른 풀이] 등차수열의 대칭성에 의해 $8+13=a+b$

270. ⑤
$a_3=a+2d=-12$
$a_7=a+6d=0$
연립하여 정리하면
$a=-18,\ d=3$
$S_{15}=\dfrac{15\{2\times(-18)+(15-1)\times3\}}{2}=45$

271. ⑤
$a_1=28,\ d=-3$이므로 양수인 항은
$a_n=28+(n-1)\cdot(-3)=31-3n>0\ \ n<\dfrac{31}{3}$으로 10항
따라서 S_n의 최댓값은
$S_{10}=\dfrac{10(2\cdot28+9\cdot(-3))}{2}=5(56-27)=5\cdot29=145$

272. ②
$4(3+4+\cdots+24)=1188$

273. ③
두 자리 자연수에 대해
3의 배수는 $12,\ 15,\ \cdots,\ 99$이고 개수는 $33-3=30$개이므로
$\dfrac{30(12+99)}{2}=15\cdot111=1665$
5의 배수는 $10,\ 15,\ \cdots,\ 95$이고 개수는 $20-2=18$개이므로
$\dfrac{18(10+95)}{2}=9\cdot105=945$
15의 배수는 $15,\ 30,\ 45,\ 60,\ 75,\ 90$으로 6개이므로
$\dfrac{6(15+90)}{2}=3\cdot105=315$

따라서 두 자리 자연수 중에서 3 또는 5로 나누어 떨어지는 수의 총합은

$1665+945-315=2295$

274. ②

[풀이]

$a_n=S_n-S_{n-1}$에서

$S_2-S_1=1$이므로 $a_2=1$

$S_{10}-S_8=S_{10}-S_9+S_9-S_8=a_{10}+a_9=7$

$a_2=a+d=1$

$a+9d+a+8d=7$

두 식을 연립하면

$a=\frac{2}{3}, d=\frac{1}{3}$

$a_n=\frac{1}{3}n+\frac{1}{3}$이므로

k를 대입해서 구해보면

$k=29$

275. ⑤

$S_6=\frac{6(2a+5d)}{2}=6a+15d=36$

$S_{12}=\frac{12(2a+11d)}{2}=12a+66d=80 \quad 6a+33d=40$

연립하면 $18d=4 \quad d=\frac{2}{9}, \ a=\frac{49}{9}$

따라서 $S_{18}=\frac{18(2a+17d)}{2}=9\cdot\left(2\cdot\frac{49}{9}+17\cdot\frac{2}{9}\right)=98+34=132$

276. ①

$a_1=S_1=8$

$a_9=S_9-S_8=9^2+4\times9+3-(8^2+4\times8+3)=21$

$\therefore a_9-a_1=13$

277. ③

a_n 등차수열

$a_6=17, a_{16}=11$

$a_6=a+5d=17, a_{16}=a+15d=11$

$d=-\frac{3}{5} \quad a_1=20$

a_n에서 자연수 항의 개수

$a_n=20-\frac{3}{5}(n-1)=\frac{103-3n}{5}$

$103-3n$은 5의 배수이면 값이 0보다 클때 자연수항이 된다.

$n=1, 6, 11, 16, 21, 26, 31$

278. ③

수열 $\{a_n\}$는 공차가 d인 등차수열

ㄱ. 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 공차가 $2d$인 등차수열이다.

$a_1, a_3, a_5, \cdots$는 공차가 $2d$인 등차수열 맞음 (참)

ㄴ. 수열 $\{a_n+2\}$는 공차가 $d+2$인 등차수열이다.

$a_1+2, a_2+2, a_3+2, \cdots$는 공차가 d인 등차수열이다 (거짓)

ㄷ. 수열 $\{a_{2n-1}-a_n\}$은 첫째항이 0이고, 공차가 d인 등차수열이다.

$a_1-a_1, a_3-a_2, a_5-a_3, \cdots$

$0, d, 2d, \cdots$

첫재항은 0 공차 d인 등차수열 (참)

279. 41개

$|a_n|^2+|a_n|-30\le 0, \ (|a_n|-5)(|a_n|+6)\le 0, \ 0\le |a_n|\le 5$

$-5\le a_n\le 5, \ -5\le -5+\frac{1}{4}(n-1)\le 5, \ 1\le n\le 41, \ 41$개

280. ③

$a_n=-35+3(n-1)=3n-38,$

$a_n>0, \ 3n-38>0$

$n=13$ 일 때, 처음으로 양수가 됨

281. ④

$|a_2-2|=|a_5-2|$ 에서

$a_2-2=a_5-2$ 이거나 $a_2-2=2-a_5$ 이다.

공차가 2 인 등차수열이므로 $a_2-2=2-a_5$ 이다.

즉, $(a_3-2)-2=2-(a_3+4)$ 이므로 $a_3=1$ 이다.

282. ④

두 수 1과 사이에 n개의 수를 넣어 만든 수열의 전체 항의 개수는 $(n+2)$이므로 이 수열의 공차를 d라 하면

$1+(n+1)d=125$에서 $d=\frac{124}{n+1}$

$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$이 자연수가 되려면 d가 자연수이어야 한다.

$124=2^2\times31$이므로 $n+1=2$ 또는 4 또는 31 또는 62 또는 124일 때 d가 자연수가 된다.

따라서 $n=1$ 또는 3 또는 30 또는 61 또는 123이고

모든 자연수 n의 값의 합은

$1+3+30+61+123=218$

283. ③

주어진 수열은 첫째항이 -10이고 제 12항이 111인 등차수열이므로

공차가 11이다.

따라서 $a_5=-10+11\times5=45$

284. ①

A_{2n+3}에서 공차 $d_1=\frac{1}{n+2}$

A_{n+1}에서 공차 $d_2=\frac{2}{n+2}$

$f(n)=\frac{(2n+5)(2+4)}{2}-\frac{(n+3)(2+4)}{2}=3n+6$

$f(9)=33$

285. ②

$A(-\sqrt{k},\ -k)$, $B(\sqrt{k},\ -k)$, $C(3\sqrt{2},\ k)$ 이므로
세 점 A, B, C의 x 좌표가 이 순서대로 등차수열을 이루려면
$-\sqrt{k}+3\sqrt{2}=2\sqrt{k}$ 에서 $3\sqrt{2}=3\sqrt{k}$
따라서 $k=2$ 이다.

286. ①

$1, a, b, c, 9$가 등차수열이면 $9=1+4d(d\text{는 공차}), d=2$
$a+b+c=3+5+7=15$

287. ④

세변의 길이는 $20,\ 20-d,\ 20-2d$이고 직각삼각형이므로
피타고라스 정리에 의해 $20^2=(20-d)^2+(20-2d)^2$
$400=400-40d+d^2+400-80d+4d^2$
$5d^2-120d+400=0,\ \ d^2-24d+80=0,\ (d-20)(d-4)=0$
$d=4$이고 세 변의 길이는 $20,\ 16,\ 12$ 넓이는 $\frac{1}{2}\times16\times12=96$

288. ⑤

$x^3+a^2x+2a=6x^2+8$
$x^3-6x^2+a^2x+2a-8=0$에서 서로 다른 세 근을
$\alpha-d,\ \alpha,\ \alpha+d\ (d>0)$라 하자.
따라서 $3\alpha=6$에서 $\alpha=2$
$(2^2-d^2)\cdot2=-2a+8$에서 $a=d^2$
$2(2-d)+2(2+d)+4-d^2=a^2$에서
$d^4+d^2-12=0$이고 $d^2=3$
따라서 $d=\sqrt{3}$

289. ②

풀이)
점 O에서 점 P 방향으로 설치된 n번째 가로등까지의 거리를 a_n이라 하면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 20,, 공차가 10인
등차수열이므로
$a_n=20+(n-1)\times10=10n+10$
점 O에서 점 Q 방향으로 설치된 n번째 가로등까지의 거리를 b_n이라 하면 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 40, 공차가 30,인
등차수열이므로
$b_n=40+(n-1)\times30=30n+10$
점 O에서 점 P까지 설치된 가로등의 개수가 점 O에서 점 Q까지
설치된 가로등의 개수의 4배이므로
점 O에서 점 Q까지 설치된 가로등의 개수를 n이라 하면
점 O에서 점P까지 설치된 가로등의 개수는 $4n$이다.

따라서 $\overline{OQ}=30n+10$, $\overline{OP}=40n+10$

$\overline{PQ}=190$이므로 코사인법칙에 의하여
$190^2=(40n+10)^2+(30n+10)^2-2(40n+10)(30n+10)\cos60^\circ$
$=100\{(4n+1)^2+(3n+1)^2-(4n+1)(3n+1)\}$
$=100(13n^2+7n+1)$
$13n^2+7n+1=361$
$13n^2+7n-360=0$
n은 자연수이므로 $n=5$
따라서 점 O에서 점 Q까지 설치된 가로등은 5개,
점 O에서 점 P까지 설치된 가로등은 20개이고 총 개수는 25개이다.

290. $\overline{\mathrm{BC}}=5$, 넓이 $5\sqrt{3}$

$\angle\mathrm{CAB}=\theta_1$, $\angle\mathrm{ABC}=\theta_2$, $\angle\mathrm{BCA}=\theta_3$ $(\theta_3<\theta_2<\theta_1)$인
삼각형 ABC $\theta_1, \theta_2, \theta_3$은 순서대로 등차수열
$2\theta_2=\theta_1+\theta_3$
삼각형 내각의 총합 180° $\theta_2=\frac{\pi}{3}$
$\overline{\mathrm{BC}}=x$ 코사인법칙
$21=16+x^2-8x\times cos\frac{\pi}{3}$
$x=5$
삼각형 ABC의 면적 $\frac{1}{2}\times4\times5\times sin\frac{\pi}{3}=5\sqrt{3}$

291. $n=10$

[풀이]
조건 (가), (나)에서
$(a_1+a_2+a_3)+(a_{n-2}+a_{n-1}+a_n)=-9+117=108$
수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로
$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}$이다. $\therefore\ a_1+a_n=36$
조건 (다)에서 $\frac{(a_1+a_n)\times n}{2}=180$. 따라서 $n=10$이다.

292. ④

$S_n=-2n^2+27n$이므로 $n=7$일 때 최대이다 (n이 자연수이므로) 최대는 91이 된다.

293. ⑤

풀이)
$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=an^2+bn-\{a(n-1)^2+b(n-1)\}$
$=2an-a+b$ (단, $n\geq2$) ...... ㉠
수열 $\{a_n\}$이 공차가 d인 등차수열이므로 첫째항을 a_1이라 할 때,
$a_n=a_1+(n-1)\times d=dn+a_1-d$ ...... ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $2a=d$, 즉 $a=\frac{d}{2}$이고 $b=a_1-d+a=a_1-\frac{d}{2}$

$S_2=4a+2b=2d+2a_1-d=2a_1+d=14$에서 $a_1=-\frac{d}{2}+7$

따라서 $b=a_1-\frac{d}{2}=-d+7$

$S_n=\frac{d}{2}n^2+(7-d)n$

$S_{20}=200d+(7-d)\times 20=180d+140$

294. ③

$f(p)=\frac{p\{a_2+4d(p-1)\}}{2}=360,\ g(p)=\frac{p\{a_4+4d(p-1)\}}{2}=380$

$g(p)-f(p)=2pd=40,\ pd=20\ \ p>d$이므로 $p=5,\ d=4$

$p+d=9$

295. (1) 10 (2) $m=27,\ M=135$

(1) $d=\frac{16-2}{n+1}=\frac{14}{n+1}$

a_n이 자연수 이므로 d는 자연수가 되어야 한다.

따라서 $n=1,6,13$이고 $d=1,2,7$

$\therefore$ d의 총합은 10

(2) $S_n=\frac{(n+2)(2+16)}{2}=9(n+2)$

따라서 S_n의 최댓값은 $9(13+2)=135$,

S_n의 최솟값은 $9(1+2)=27$

296. $n=8,d=2$

이 $n+2$ 개의 수열의 합이

$\frac{(n+2)(3+21)}{2}=12(n+2)=120$

이므로 $n=8$ 이다.

$21=3+9d$ 이므로 $d=2$ 이다.

297. ④

$\frac{(a+a+4d)\times 5}{2}=20$ …… ㉠

$\frac{(a+a+10d)\times 11}{2}=209$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=-6,\ d=5$이다.

따라서 $a_5=-6+4\times 5=14$

298. ①

$S_3=\frac{3(2a_1+3d)}{2}=51$에서

$a_1+d=17$ … ①

$S_6=24+S_3=75$ 이므로 $S_6=\frac{6\{2a_1+5d\}}{2}=75$에서

$2a_1+5d=25$ … ②

①, ②식을 빼서 정리하면

첫째항이 20이고 공차가 -3인 등차수열이다.

처음으로 음수가 되는 항은

$a_n=-3n+23<0$을 만족하는 최소의 자연수 n이므로

8항이다.

299. (1) $a_n=-4n+38$ (2) 162

(1) $S_6=\frac{6(a+a_6)}{2}=3(34+34+5d)=204+15d$

$S_{12}=\frac{12(a+a_{12})}{2}=6(34+34+11d)=408+66d$

$S_6=S_{12}$이므로

$204+15d=408+66d$

공차 $d=-4$이므로

$a_n=-4n+38$

(2)

$a_n=-4n+38$ 이므로 $S_n=(-2)n^2+36n$에서

$n=9$일 때 최댓값 $S_9=(-2)\times 81+36\times 9=162$

300. ⑤

S_n은 $n=6,\ n=7$에서 최솟값을 가지므로

$S_6=S_7,\ S_7-S_6=a_7=0$

S_n은 $n=6,\ n=7$에서 최솟값을 가지므로

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6$은 음수이고 $a_8,\ a_9\ \cdots$는 양수이다.

$|a_5|+|a_7|=|a_5|=6,\ a_5=-6$

수열의 공차를 d라 하면 $a_7-a_5=2d=6$

$\therefore\ d=3$

$S_{15}=\frac{15(a_1+a_{15})}{2}=\frac{15\times 2a_8}{2}=15a_8$

$=15(a_7+d)=45$

301. ④

첫째항이 -12 이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$

$|S_n+22|-S_n=22$

$|S_n+22|=S_n+22$가 모든 자연수 n에 대하여 성립하기

위해서는 임의의 자연수 n에 대하여 $S_n\geq -22$를

만족해야한다.

d가 4이하의 자연수이면 $S_n<-22$인 자연수 n이 존재하고

d가 5이상의 자연수이면 모든 자연수 n에 대하여

$S_n\geq -22$를 만족한다. 따라서 자연수 d의 최솟값은 5이다.

302. 225

$a_n=1+6(n-1)=6n-5$

$a_9=49$

$S_9=\frac{9(1+49)}{2}=225$

303. ⑤

등차수열에서 $|a_k|=|a_{k+8}|$ 이므로

$a_k=-a_{k+8}$, $a_k+a_{k+8}=0$, $2a_{k+4}=0$

$a_{k+4}=0$, $a_1=18$ 이므로 $18+(k+3)d=0$

$(k+3)d=-18 \quad \cdots$ ①

S_n+T_n의 최댓값은 $a_n \geq 0$ 인 항을 모두 더한 후 2배한 것과 값이 같다. $a_n \geq 0$ 인 항은 첫째항부터 a_{k+4} 항까지이므로

$a_1+a_2+\cdots+a_{k+3}+a_{k+4} \leq 100$

$a_1=18$, $a_{k+4}=0$을 이용하면

$\dfrac{(k+4)\times(18+0)}{2} \leq 100$

$k+4 \leq \dfrac{100}{9}$에서 $k \leq \dfrac{64}{9}=7.\times\times$

①에서 $k=-\dfrac{18}{d}-3$ 이므로 d는 18의 음의 약수이다.

따라서 이를 만족하는 $k=3,\ 6$

$\therefore\ 9$

304. ③

$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}=-4n+30$

$\therefore a_n=-4n+34 \geq 0$

$\therefore n \leq 8.\mathrm{xxx}$

S_n의 최댓값은 $S_8=\dfrac{8(30+2)}{2}=128$

305. ②

$\sqrt{S_{n-1}}+\sqrt{S_n}=\dfrac{1}{2}a_n\ (n \geq 2)$

$\sqrt{S_{n-1}}+\sqrt{S_n}=\dfrac{1}{2}(S_n-S_{n-1})\ (n \geq 2)$

$\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}=2\ (n \geq 2)\quad a_1=S_1=1$

$\sqrt{S_n}=b_n$이라고 하면 $b_n=2n-1\quad S_n=(2n-1)^2$

$a_{101}=S_{101}-S_{100}=(201)^2-(199)^2=(400)(2)=800$

306. ③

$S_n=(n+1)^2$

$n=1$ 대입 $a_1=S_1=4$

$S_{20}-S_{19}=21^2-20^2=(21+20)(21-20)=41$

$a_1+a_{20}=45$

307. ③

i) $n=1$

$a_1=S_1=2+1-1=2$

ii) $n \geq 2$

$a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2-2(n-1)^2+n-(n-1)$

$=4n-2+1=4n-1$

ㄱ. $a_n=4n-1\ (n \geq 2)$ (○)

ㄴ. $a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}$

$=4(6+7+8+9+10)-5$

$=160-5=155$ (○)

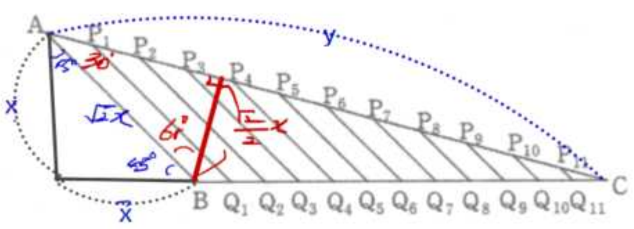
ㄷ. $a_1=2$, $a_3=11$이다.

a_{2n-1}은 a_1 때문에 공차가 8이 될 수 없다. (×)

$\therefore$ ㄱ, ㄴ

308. ①

$\overline{\mathrm{AC}}=y$라 하고.



$y^2=x^2+(x+12)^2\cdots$ ㉠

$y\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}x=x\times 12$ 에서 $y=12\sqrt{2}\cdots$ ㉡

㉠,㉡대입하여 연립하면

$(12\sqrt{2})^2=x^2+(x+12)^2$

$x^2+12x-72=0$

$x=6\sqrt{3}-6$

$\overline{\mathrm{AB}}=6(\sqrt{6}-\sqrt{2})$이므로

$\overline{AB}=\overline{P_0Q_0}$, $c=\overline{\mathrm{P}_{12}\mathrm{Q}_{12}}$ 라 하면 등차수열의 합에 의하여

$\overline{\mathrm{P}_0\mathrm{Q}_0}+\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1}+\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2}+\overline{\mathrm{P}_3\mathrm{Q}_3}+\cdots+\overline{\mathrm{P}_{12}\mathrm{Q}_{12}}=\dfrac{13}{2}\{6(\sqrt{6}-\sqrt{2})+0\}$

등차중항 성질에

의하여$2\overline{\mathrm{P}_6\mathrm{Q}_6}=\overline{\mathrm{P}_0\mathrm{Q}_0}+\overline{\mathrm{P}_{12}\mathrm{Q}_{12}}=\{0+6(\sqrt{6}-\sqrt{2})\}$

$\overline{\mathrm{P}_6\mathrm{Q}_6}=3(\sqrt{6}-\sqrt{2}),\overline{P_{12}Q_{12}}=0$

$\overline{P_{12}Q_{12}}-\overline{P_6Q_6}=6k=-3(\sqrt{6}-\sqrt{2})$이므로

$k=-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

$\overline{P_1Q_1}+\overline{P_2Q_2}+\overline{P_3Q_3}+\cdots+\overline{P_{11}Q_{11}}=\dfrac{78}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})-6(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

$\overline{P_1Q_1}+\overline{P_2Q_2}+\overline{P_3Q_3}+\cdots+\overline{P_{11}Q_{11}}=33(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

$\therefore 2\mathrm{k}+\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1}+\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2}+\overline{\mathrm{P}_3\mathrm{Q}_3}+\cdots+\overline{\mathrm{P}_{11}\mathrm{Q}_{11}}=32(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

[다른 풀이]

삼각형ABC에서 사인법칙을 이용하면

$\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin 135^\circ}=\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin 30^\circ}$ 이므로 $\overline{\mathrm{AC}}=12\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{AB}}=x$라 하고 삼각형ABC에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos 135°$ 에서
$x^2 + 12\sqrt{2}x - 144 = 0$ 이므로 $x = 6\sqrt{6} - 6\sqrt{2}$

즉 $\overline{AB} = 6\sqrt{6} - 6\sqrt{2}$
$a_n = \overline{P_n Q_n}$ 이라 하면
삼각형P_nQ_nC와 삼각형ABC는 $12 : 12-n$ 닮음이므로
$a_1 = \frac{11}{12}\overline{AB},\ a_2 = \frac{10}{12}\overline{AB},\ \cdots,\ a_{11} = \frac{1}{12}\overline{AB}$ 이다.
그러므로 수열 a_n은 공차가 $-\frac{1}{12}\overline{AB}$ 인 등차수열을 이룬다.
따라서 공차 $k = -\frac{1}{12}(6\sqrt{6} - 6\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$
수열의 합
$\overline{P_1Q_1} + \overline{P_2Q_2} + \overline{P_3Q_3} + \cdots + \overline{P_{11}Q_{11}} = \frac{11}{2}(a_1 + a_{11})$
$= \frac{11\left(\frac{11}{12}\overline{AB} + \frac{1}{12}\overline{AB}\right)}{2} = \frac{11\overline{AB}}{2} = 33(\sqrt{6} - \sqrt{2})$
그러므로
$\therefore 2k + \overline{P_1Q_1} + \overline{P_2Q_2} + \overline{P_3Q_3} + \cdots + \overline{P_{11}Q_{11}}$
$== -(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + 33(\sqrt{6} - \sqrt{2})$
$=32(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

309. ③
수열 a_n의 일반항:$a_n = a + (n-1)d$,
a는 정수 d는 유리수(첫째항이 정수)
수열 b_n의 일반항 $b_n = a_n + a_{n+2}$,
$= a + (n-1)d + a + (n+1)d = 2a + 2nd$
조건 (가)에서 $a_3 - a_1 = 2d > 0$ 이므로 $d > 0$
조건 (나)에서 $P_{12}(12,\ a+11d)$, $Q_{10}(10,\ 2a+20d)$,
$Q_k(k,\ 2a+2kd)$ 이므로
직선 $P_{12}Q_{10}$ 의 기울기$= \frac{(a+11d)-(2a+20d)}{12-10} = \frac{-1-9d}{2}$
직선 $Q_{10}Q_k$ 의 기울기$= \frac{(2a+2kd)-(2a+20d)}{k-10} = 2d$
두 기울기의 곱이 -1이므로 $2d \times \frac{-a-9d}{2} = -1$
$d(a+9d) = 1 \Leftrightarrow 9d^2 + ad - 1 = 0$에서 $d = \frac{-a+\sqrt{a^2+36}}{18}$
a_n은 모든 항이 유리수이므로 d는 유리수
a^2+36은 제곱수여야 함.
$a^2 + 36 = p^2$, (p는 정수)라고 할 수 있다.
$a^2 - p^2 = (a+p)(a-p) = -36$
a는 정수이며 $d > 0$인 유리수인 것은 다음과 같다.
$a = -8,\ d = 1$
$a = 0,\ d = \frac{1}{3}$
$a = 8,\ d = \frac{1}{9}$
이때
$b_n = 2a + 2nd$인데 $b_{10} = 2a + 20d$
$a = -8,\ d = 1$일 때, $b_{10} = 2(-8) + 20 \cdot 1 = 4$
$a = 0,\ d = \frac{1}{3}$일 때, $b_{10} = 2 \cdot 0 + 20 \cdot \frac{1}{3} = \frac{20}{3}$
$a = 8,\ d = \frac{1}{9}$일 때, $b_{10} = 2 \cdot 8 + 20 \cdot \frac{1}{9} = \frac{164}{9}$
$M = \frac{164}{9},\ m = 4$
$M + m = \frac{164}{9} + 4 = \frac{200}{9} = 20\left(1 + \frac{1}{9}\right)$
$p = 9,\ q = 1,\ p + q = 10$

310. ⑤
[풀이]
$\frac{n\{270 + (n-1)d\}}{2} = 180(n-2)$이므로 식을 정리하면
$n(n-1)d = 90(n-8)$
$n \geq 3$이므로 $90(n-8) > 0$이어야 하므로 $n \geq 9$
따라서 최솟값은 $n = 9$가 되고
볼록 다각형이므로
$a_n = 135 + (n-1)d < 180$이어야 하므로
$(n-1)d < 45$임을 알수 있고
$n(n-1)d = 90(n-8)$와 $(n-1)d < 45$를 연립해보면
$n(n-1)d < 45n$
$90(n-8) < 45n$
$n < 16$이므로
최댓값은 $n = 15$
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $15 + 9 = 24$

311. ④
$n(A-B) = n(A\cap B) = n(B-A)$이고
$n(B) = 10$ 이므로 $n(A-B) = n(A\cap B) = n(B-A) = 5$이다.
따라서 $n(A) = 10$이고 공차가 자연수이므로
$a_{10} = 8 + 8d \leq 32,\ d \leq 3$
$a_{11} = 8 + 9d > 32,\ 9d > 24,\ d > \frac{24}{9}$
$\therefore\ d = 3$ (d는 수열 $\{a_n\}$의 공차이다.)
$A = \{5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17,\ 20,\ 23,\ 26,\ 29,\ 32\}$
$n(A\cap B\cap C) = 2$ 이므로 $A,\ B,\ C$의 교집합은 $8,\ 32$이다.
$n(A\cap B) = 5$ 이므로 수열 $\{b_n\}$의 공차는 6이다.
따라서 $a_7 = 23,\ b_7 = 8 + 5\times 6 = 38$
$a_7 + b_7 = 61$

312. ①

6, 9, 12, $\cdots$, 90의 29개의 3의 배수 중에서 20개의 수를 택하여 더한 값이 집합 A의 원소이다. 집합 A의 원소 중에서 가장 값은 값을 x_1, 가장 큰 값은 x_n이라 하면

$$x_1=6+9+\cdots+63=3(2+3+\cdots+21)=3\times230$$

$$x_n=33+36+\cdots+90=3(11+12+\cdots+30)=3\times410$$

이다. 따라서 집합 A의 원소 x_1, x_2, $\cdots$, x_n은 첫째항이 3×230이고 제 n번째 항이 3×410, 공차가 3인 등차 수열이다. 따라서

$$3\times410=3\times230+(n-1)\times3$$

$$\therefore n=181$$

이므로 집합 A의 원소의 개수는 $n(A)=181$이다.

313. 3, -75

수열의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자

$a_3\geq0$ 이면 (가)에 의해 $a=d$ 이고 $a_3=3d$ 이므로 $d>0$

따라서 모든 n에 대하여 $a_n>0$ 이다.

$S_9=45d=135$ 이므로 $d=3$

이 때 $a_1=3$ 이다.

$a_3<0$ 이면 (가)에 의해 $a+5d=0$ 이고 $a_3=-3d$ 이므로 $d>0$

$S_9=-9d$ 이므로 $9d=135$ 이고 $d=15$,

이 때 $a_1=-75$ 이다.

314. ③

공차를 d라 하면

$a_1<0$이고 합의 절대값이 같은 항이 있으므로 $d>0$ 이다.

$$S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=9(a_1+4d)=9a_1+36d$$

$$S_{18}=\frac{18(a_1+a_{18})}{2}=9(2a_1+17d)=18a_1+153d$$

$$S_{11}=\frac{11(a_1+a_{11})}{2}=\frac{11}{2}(2a_1+10d)=11a_1+55d$$

$|9a_1+36d|=|18a_1+153d|=|11a_1+55d|+30$

$9a_1+36d=\pm(18a_1+153d)$에서 $a_1=-13d$ 또는 $a_1=-7d$

(ⅰ) $a_1=-13d$ 일 때

$|9a_1+36d|=|11a_1+55d|+30$에서

$|-81d|=|-88d|+30$ 이므로 $d=-\dfrac{30}{7}$ 공차가 양수라는 조건에 맞지 않다.

(ⅱ) $a_1=-7d$

$|9a_1+36d|=|11a_1+55d|+30$에서

$|-27d|=|-22d|+30$ 이므로 $d=6$ $a_1=-42$

$\therefore a_{10}=-42+9\times6=12$

[다른 풀이]

(ⅰ) $S_9=S_{18}$인 경우

등차수열 합 S_n을 n에 관한 이차함수라는 점을 생각하면 첫항이 음수이고 공차가 양수일 때 가능한 경우이며 S_9, S_{18} 모두 음수일 때만 같은 값을 가질 수 있다. 또한 이 때 $S_{11}<0$이다.

$$\frac{9(a_1+a_9)}{2}=\frac{18(a_1+a_{18})}{2}$$

$9a_5=9(a_1+a_{18})$

$a+4d=2a+17d$ 따라서 $a=-13d$ 이고

일반항 $a_n=(n-14)d$

첫항부터 제13항까지는 음수이다.

$|S_9|=|S_{11}|+30$ 에서

$-S_9=-S_{11}+30$, $S_{11}-S_9=30$, $a_{11}+a_{10}=30$

그런데 a_{11}, a_{10}항은 모두 음수이므로 모순

(ⅱ) $S_9<0$이고 $S_{18}>0$인 경우

$$-\frac{9(a_1+a_9)}{2}=\frac{18(a_1+a_{18})}{2}$$

$-9a_5=9(a_1+a_{18})$

$-(a+4d)=2a+17d$ 따라서 $a=-7d$ 이고

일반항 $a_n=(n-8)d$

$a_8=0$이므로 $a_1+a_{15}=0$이고 $S_{15}=0$ 따라서 $S_{11}<0$

$|S_9|=|S_{11}|+30$ 에서

$-S_9=-S_{11}+30$, $S_{11}-S_9=30$, $a_{11}+a_{10}=30$

따라서 $3d+2d=30$ $d=6$ $a_{10}=2d=12$

315. ④

S_{17}, S_{19} 가 모두 0 이상이거나 모두 0 이하이면

$|S_{17}+S_{19}|=|S_{17}|+|S_{19}|$ 이다.

즉, $|S_{17}+S_{19}|<|S_{17}|+|S_{19}|$ 에서 S_{17}, S_{19} 는 서로 다른 부호이며

첫째항이 52 로 양수이므로 공차 d는 음의 정수이다.

따라서 $S_{17}>0>S_{19}$ 이어야 한다.

$$S_{17}=\frac{17(104+16d)}{2}>0 \text{ 에서 } d>-\frac{13}{2} \quad \cdots ①$$

$$S_{19}=\frac{19(104+18d)}{2}<0 \text{ 에서 } d<-\frac{52}{9} \quad \cdots ②$$

①,②에서 정수 $d=-6$ 이다.

316. ③

$S_{k+1}-S_k>0$즉 $a_{k+1}>0$이러한 가장 작은 자연수 k가 존재하려면 공차는 양수여야 한다. $a_9=-2a_7$에서 $a_7<0$ $a_9>0$임을 알 수 있고 $a_7a_8a_9<0$이므로 $a_8>0$ 이다. 따라서 $k=7$임을 알 수 있다. $S_7=-154$ $a_9=-2a_7$이므로

$\dfrac{7}{2}(2a+6d)=-154$ $a+8d=-2(a+6d)$이를 연립하면

$a=-40$ $d=6$ $a_3=-40+12=-28$이다.

317. ⑤

$\frac{5(60+4d)}{2}=\frac{11(60+10d)}{2}$, $d=-4$

$S_n=\frac{n(64-4n)}{2}=-2n^2+32n$

$n=8$일 때, 최댓값 128을 갖는다.

$k+m=136$

318. 23

$a_{k+1}+a_{k+2}+a_{k+3}=0$, $a_{k+2}=a+(k+1)d=0$

$a=-(k+1)d$ ⋯㉠

$S_k=\frac{k\{2a+(k-1)d\}}{2}=k(k+3)$

$S_{k+3}=\frac{(k+3)\{2a+(k+2)d\}}{2}=k(k+3)$ 두 식을 연립하면

$-dk=2k$, $d=-2$

$S_{k+2}=\frac{(k+2)\{2a-2(k+1)\}}{2}=210$, $a=2(k+1)$ 대입하면

$(k+1)(k+2)=210$, $k=13$

$d=-2, k=13$을 ㉠식에 대입하면 $a=28$

$a_{10}=a+9d=28+9\times(-2)=10$이므로 $a_{10}+k=10+13=23$

319. ①

$a_k=S_k$

$3+(k-1)d=\frac{k\{6+(k-1)d\}}{2}$

$(k-1)\{6+(k-2)d\}=0$

$k-1>0$이므로

$d=-\frac{6}{k-2}$

$a_n<S_n$인 자연수 n의 개수는 9이므로 n은 2부터 10까지

$a_{10}<S_{10}$, $a_{11}\geq S_{11}$를 만족하는 공차 d의 범위는

$3+9d<\frac{10(6+9d)}{2}$

$-\frac{3}{4}<d$

$3+10d\geq\frac{11(6+10d)}{2}$

$d\leq-\frac{2}{3}$

$\therefore -\frac{3}{4}<d\leq-\frac{2}{3}$

$-\frac{3}{4}<-\frac{6}{k-2}\leq-\frac{2}{3}$

$10<k\leq 11$

자연수 k는 11, 공차 d는 $-\frac{2}{3}$

$a_n=-\frac{2}{3}n+\frac{11}{3}$

$\sum_{n=1}^{10}|a_n|$

$=(a_1+\cdots+a_5)-(a_6+\cdots+a_{10})$

$=\frac{5\left(3+\frac{1}{3}\right)}{2}-\frac{5\left(-\frac{1}{3}-5\right)}{2}$

$=\frac{50}{3}$

320. ③

$S_k=\frac{k\{2\cdot(-27)+(k-1)\cdot 6\}}{2}=k(3k-30)=3(k^2-10k)$

$=3(k-5)^2+45$

S_k는 $k=5$일 때, 최댓값 45을 갖는 이차함수이고 x절편이 0, 10이므로

$1\leq k\leq 5$일 때, S_k이 모두 다르므로 원소의 개수 $b_k=k$개

$6\leq k\leq 9$일 때, S_k는 기존과 동일하므로 원소의 개수 $b_k=5$

$k=10$일 때, $S_{10}=0$인 원소가 하나 추가되므로 $b_k=5+1=6$

따라서, $\sum_{n=1}^{10}b_n=(1+2+3+4+5)+4\cdot 5+6=15+20+6=41$

321. -63

첫째항이 200이고, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$은

$a_n=200+(n-1)d$

모든 자연수 n에 대하여 $S_{10}\geq S_n$을 만족을 만족하려면

$a_{10}=200+9d\geq 0$, $a_{11}=200+10d\leq 0$이어야 하므로

$-\frac{200}{9}\leq d\leq-20$이고

범의 내의 모든 정수 d의 값의 합은

$-22-21-20=-63$

322. ③

-48이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이므로

$a_n=-48+(n-1)d$ 이고, $\sum_{k=1}^{m}a_k=\frac{m\{-96+(m-1)d\}}{2}$ 이다.

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\neq 0$ 에서

$-48+(n-1)d\neq 0$ 이므로 $(n-1)d\neq 48$

(나) $\sum_{k=1}^{m}a_k=0$인 m이 존재하려면

$\frac{m\{-96+(m-1)d\}}{2}=0$ 에서 $-96+(m-1)d=0$ 이므로

$(m-1)d=96$ 이다.

$(n-1)d \neq 48,\ (m-1)d=96$ 을 만족하려면
$(n-1)d \neq 2^4 \times 3,\ (m-1)d=2^5\times 3$ 이므로

d가 자연수에서 $(m-1)d=2^5$ 또는 $2^5\times 3$ 이다.

d의 값은 32 또는 96 이므로 $32+96=128$ 이다.

323. 29

$a_n=(2k-1)+(-2)(n-1)=2k-1-2n+2=(2k+1)-2n$

$S_n=\dfrac{(2k-1)+(2k+1-2n)}{2}\times n=(2k-n)n=-n^2+2kn$

$b_n=b+4(n-1)$, b는 b_n의 초항

(가) $S_n=b_n \Rightarrow -n^2+2kn=b+4n-4$

$n^2+(4-2k)n+b-4=0$

$n=k-2\pm\sqrt{(k-2)^2+4-b}$

$k^2-4k+8-b=$제곱수

하나의 자연수 해를 가지려면 $\sqrt{\ }$가 사라져야 한다.

$k^2-4k+8-b=0$ 일 때, $n=k-2$

$=1\ \ n=k-1$ or $k-3$

$=4\ \ n=k$ or $k-4$

$=9\ \ n=k+1$ or $k-5$

⋮ ⋮

(나) $f(3)=1,\ g(3)=2$

$f(4)=2,\ g(4)=4$

$f(5)=3,\ g(5)=6$

⋮

$f(k)=k-2,\ g(k)=2k-4$

(다) $\overline{AB}=4^{k-2}=2^{2k-4}$, $\overline{AC}=2^{-2k+4}$, $\angle A=(3k-6)^\circ$

$T(k)=\dfrac{1}{2}\cdot 2^{2k-4}\cdot 2^{-2k+4}\cdot \sin(3k-6)^\circ=\dfrac{1}{2}\sin(3k-6)^\circ$

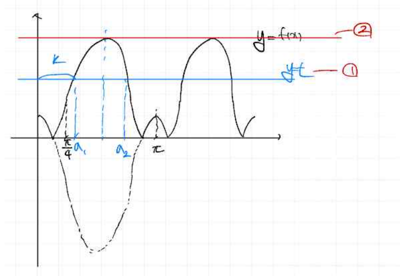
$8\displaystyle\sum_{k=3}^{31}\{T(k)\}^2=2\sum_{k=3}^{31}\sin^2(3k-6)^\circ$

$=2(\sin^2 3^\circ+\sin^2 6^\circ+\cdots+\sin^2 84^\circ+\sin^2 87^\circ)$

$=2\left(14+\sin^2 45^\circ\right)=2\left(14+\dfrac{1}{2}\right)=29$

$\left(\because\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta,\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=\sin^2+\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=1\right)$

324. ②



$f(0)<f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, $p+q<-q,\qquad 2q<-p$

① $a_1=k\ \ a_2=\pi-k,\ \ a_3=\pi+k$

$\pi-2k=2k,\ k=\dfrac{\pi}{4}$(공차)

$k=\dfrac{\pi}{4}$라고 했을 때, $\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$

이때, $\alpha=-p\cos 2\times\dfrac{\pi}{4}-q=-q$

② $\beta=p-q$이면

$b_1=\dfrac{\pi}{2},\ \ b_2=\dfrac{3}{2}\pi,\ \ b_3=\dfrac{5}{2}\pi$

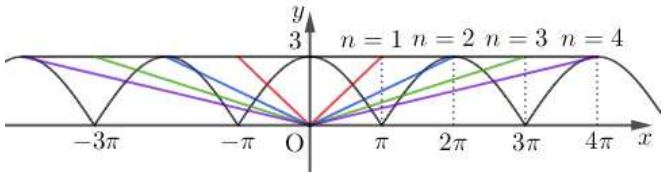
$\alpha+\beta\equiv q+(p-q)=p-2q=8$

$\dfrac{f(a_3)}{b_2}=\dfrac{-q}{\frac{3}{2}\pi}=\dfrac{2}{\pi},\ q=-3,\ p=2$

$5p+2q=5\cdot 2+2(-3)=4$

325. ②

$y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$a_1=3$

$a_2=7$

$a_3=9$

$a_4=13$

$a_5=15$

⋮

홀수 번째 항은 $a_1=3$이고 공차가 6인 등차수열,
짝수 번째 항은 $a_2=7$이고 공차가 6인 등차수열을 이룬다.
따라서

$a_{2n-1}=6n-3,\ a_{2n}=6n+1$

$\therefore a_{100}+a_{99}=301+297=598$

326. (1-1) 3 (1-2) $\dfrac{8+3\sqrt{21}}{5}$

(1-1) 반지름의 길이가 $\frac{5}{2}$이고 $\overline{BD}=5$이므로 $\overline{BD}$는 지름이다.

따라서 $\angle BCD=90^{\circ}$이다. $\overline{BC}=a$, $\overline{CD}=b$라 하면

$$a^2+b^2=25,\ 2a=b+5$$

에서 연립하여 풀면 $a=4$, $b=3$, 따라서 $\overline{CD}=3$

(1-2) $\overline{AC}=x$라 하고 $\angle CAD=\angle CBD$(원주각) 이므로 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{CD}^2=\overline{AC}^2+\overline{AD}^2-2\times\overline{AC}\times\overline{AD}\times\cos(\angle CAD)$$

$$9=x^2+4-2\times x\times 2\times\frac{4}{5}$$

$$5x^2-16x-25=0$$

$$x=\frac{8+3\sqrt{21}}{5}$$

327. ②

$2|x-a_n|\geq 3|x-a_{n+1}|\ (n\geq 1)$

공차가 5이므로 $a_n<a_{n+1}$이 된다. 뜨라서 주어진 부등식을 풀면

$x_n\geq\frac{2a_n+3a_{n+1}}{5}$ $b_n=\frac{2a_n+3a_{n+1}}{5}$

ㄱ. $5b_1=2a_1+3a_2$이므로 거짓

ㄴ. $a_n=5n-4$이므로 대입해서 정리하면 $b_n=5n-1$이므로 공차는 5이다.(참)

ㄷ. $\sum_{k=1}^{10}b_k=\sum_{k=1}^{10}(5k-1)=270$이므로 거짓

328. ⑤

첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$$ar=6,\ ar^4=-48$$

따라서, $r=-2$

329. ②

$a_n=r^{n-1}$

$a_4=r^3=8$

$r=2$

$a_6=2^5=32$

330. ②

$a_4=\frac{2}{3}\times 3^3=18$ 이다.

331. ③

$a_2=a_1r=3$, $a_5=a_1r^4=24$을 연립하면 $r^3=8$이므로 $r=2$

따라서 $a_4+a_6=a_2(r^2+r^4)=3\cdot(2^2+2^4)=3\cdot 20=60$

332. ③

$\frac{a_4}{a_3}=r=3$

$a_3=a_1r^2=45$

333. ④

$a_2=3$, $a_3+a_4=36$에서 첫째항을 a라 하면

$ar=3$, $ar^2(1+r)=36$이므로 연립하여 정리하면

$r^2+r-12=0$이고, 모든 항이 양수이므로

공비는 3

334. ④

a, 3, b가 등차수열을 이루고 있으므로

$a+b=6$

a, 2, b가 등비수열을 이루고 있으므로

$ab=4$

따라서 $a^3+b^3=6^3-3\times 4\times 6=144$

335. ②

a, b의 등차중항이 4이므로 $a+b=8$

a, b의 등비중항이 2이므로 $ab=4$

$\therefore\ a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=64-8=56$

336. ⑤

$a+b=12$, $ab=20$ 이므로

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=12^2-40=104$

337. ②

세 수 9, a, 15은 이 순서대로 등차수열

$2a=24$, $a=12$

세 수 a, b, 3은 이 순서대로 등비수열

$b^2=36$, $b=6\ (b>0)$

$a+b=18$

338. ①

$b^2=8\times 72,\quad b=24$

339. ⑤

$$S_5=\frac{16\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)}{1-\frac{1}{2}}=31$$

340. ③

$$S_5=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{16}=\frac{31}{16}$$

341. ④

[풀이]

$a_n=3\times 2^{n-1}$

$a_3=3\times 2^2=12$

$S_3=\dfrac{3(2^3-1)}{2-1}=21$

$a_3+S_3=33$

342. ④

$S_k=\dfrac{a(r^k-1)}{r-1}=20$

$S_{2k}=\dfrac{a(r^{2k}-1)}{r-1}=80$

$\dfrac{S_{2k}}{S_k}=4=r^k+1 \quad \therefore r^k=3$

$\therefore \dfrac{a}{r-1}=10$

$\therefore S_{3k}=\dfrac{a}{r-1}(r^{3k}-1)=260$

343. ③

수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$a_2+a_3=2(r+r^2)=24,\ r^2+r-12=0$

$(r+4)(r-3)=0,\ r>0$ 이므로 $r=3$

$5a_n-a_{n+1}=5\cdot 2\cdot 3^{n-1}-2\cdot 3^n=2\cdot 3^{n-1}(5-3)=4\cdot 3^{n-1}$

$\sum_{k=1}^{8}4\cdot 3^{k-1}=\dfrac{4(3^8-1)}{3-1}=2(3^8-1)$

344. ③

등비수열의 공비를 r이라 하면

$S_6-S_2=a_6+a_5+a_4+a_3=(a_3+a_5)+(a_4+a_6)$

$=r^2(a_1+a_3)+r^3(a_1+a_3)=4(r^2+r^3)=144$

$r^2+r^3=36,$

$r^3+r^2-36=(r-3)(r^2+4r+12)=0$

$\therefore\ r=3,\ a_3+a_5=r^2(a_1+a_3)=9\times 4=36$

345. ⑤

$a_n=a\cdot r^{n-1}$에서

$S_{10}=8=\dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1}$

$S_{30}=248=\dfrac{a(r^{30}-1)}{r-1}$

따라서 $31=r^{20}+r^{10}+1$이고 $r^{10=5}$

$\dfrac{a}{r-1}=2$

$S_{20}=\dfrac{a(r^{20}-1)}{r-1}=48$

346. ③

${a_4}^3=1,\ a_4=1,\ a_2=\dfrac{1}{4},\ r^2=4,\ r=-2$

$|a_7|=|a_4r^3|=8$

347. ④

등비중항의 성질에 의하여

$a_2^2=a_1a_3=9 \quad \therefore a_2=3 \ (a_2>0)$

348. ③

$a_n=\dfrac{1}{4}r^{n-1}$

$a_2+a_3=3$

$\dfrac{1}{4}r+\dfrac{1}{4}r^2=3$

$(r+4)(r-3)=0$

$r=3 \ (\because a_4>0)$

$S_4=\dfrac{\frac{1}{4}(3^4-1)}{3-1}=10$

349. 144

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 하면

$\dfrac{a_3+a_5+a_7}{a_1+a_3+a_5}=\dfrac{(a_1+a_3+a_5)r^2}{a_1+a_3+a_5}=r^2=12$ 이므로

$\dfrac{a_{100}-a_{98}}{a_{96}-a_{94}}=\dfrac{(a_{96}-a_{94})r^4}{a_{96}-a_{94}}=r^4=12^2=144$ 이다.

350. 11

[풀이] 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r(r>0)$이라 하면

$\dfrac{a_2-a_6}{a_4}=\dfrac{a_2(1-r^4)}{a_2\times r^2}=\dfrac{1-r^4}{r^2}$

$\dfrac{1-r^4}{r^2}=\dfrac{3}{2}$에서 $2r^4+3r^2-2=0$

$(2r^2-1)(r^2+2)=0$

$r>0$이므로 $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

따라서 $a_n=160\times\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$이고

$a_{11}=160\times\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{10}=2^5\times 5\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^5=5$이므로

a_n의 값이 정수가 되도록 하는 n의 최댓값은 11이다.

351. ③

$a_1=\dfrac{a_{n+1}}{a_n},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}a_{n+1}=a_n$에서

$a_n=(\sqrt{2})^n$이므로

$a_5=4\sqrt{2}$

352. ③

$a_n = 12 \cdot r^{n-1}$

$12+12r+12r^2=21$에서

$4+4r+4r^2=7$, $4r^2+4r-3=0$

$(2r+3)(2r-1)=0$

$\therefore\ r=-\dfrac{3}{2}\ (r<0)$

$a_5 = 12 \cdot \left(-\dfrac{3}{2}\right)^4 = \dfrac{243}{4}$

따라서 $p+q=247$

353. ②

$a_1+a_2+a_3=7$, $a_2+a_3+a_4=14$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$a_2+a_3+a_4=(a_1+a_2+a_3)r$ 이므로 $r=2$

$a_1+a_2+a_3=(1+2+4)a_1=7$ 이므로 $a_1=1$

따라서 $a_5=2^4=16$ 이다.

354. ①

$\dfrac{1}{2}, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, 32$

항의 개수 $n+2$ 첫항 $\dfrac{1}{2}$ 공비 $r\,(r>0)$ 인 등비수열

모든항의 곱은

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+2}(r)^{1+2+\cdots+n+1}=2^{12}\ \cdots\ (1)$

$32=\dfrac{1}{2}r^{n+1}\ \cdots\ (2)$

$r^{n+1}=64$

(1)식에 (2)대입

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+2}(r)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+2}\left(r^{n+1}\right)^{\frac{n+2}{2}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+2}(2)^{3(n+2)}$

$2^{2n+4}=2^{12}$

$n=4$

$r^5=2^6$

$n+r^5=68$

355. ⑤

$a+6\ \ a+12\ \ a+36$이 등비수열이므로

$(a+12)^2=(a+6)(a+36)$ 이를 전개하면 $a=-4$이다

따라서 $a_{10}=a+27=23$

356. ①

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

$a_2 \times a_7 = {a_4}^2$, $(a+d)(a+6d)=(a+3d)^2$

$a^2+7da+6d^2=a^2+6da+9d^2$

$da=3d^2$, $a=3d\ (\because\ d\neq 0)$

$\dfrac{a_{28}}{a_2}=\dfrac{a+27d}{a+d}=\dfrac{30d}{4d}=\dfrac{15}{2}$

357. ②

공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$

(가) $2a_p=a_6+a_q$

$2a_1+2(p-1)d=a_1+5d+a_1+(q-1)d$

$(2p-q-6)d=0\ \ 2p-q=6\ \ 2p=q+6$

(나) 세 수 $7p, 14\sqrt{5}, q$가 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

$14^2\times 5=7pq\ \ pq=140$

$pq=\dfrac{q+6}{2}\times q=140$

$q^2+6q-280=(q+20)(q-14)=0$

$q=14\ \ p=10$

$\dfrac{a_{30}-a_q}{a_{18}-a_p}=\dfrac{a_{30}-a_{14}}{a_{18}-a_{10}}=\dfrac{16d}{8d}=2$

358. ③

$a_n=a+(n-1)d$에서

$\dfrac{a_3}{a_1}=\dfrac{a_{13}}{a_3}$ 이므로 $\dfrac{a+2d}{a}=\dfrac{a+12d}{a+2d}$

따라서 $d=2a$

$\therefore\ \dfrac{a_8}{a_2}=\dfrac{a+14a}{a+2a}=5$

359. ②

$\{a_n\}$ 공차가 9인 등차수열이므로 첫째항을 a라 하면

$a_n=a+9(n-1)$

a_2, a_{10}의 등차중항이 a_k이므로 $k=6$

a_1과 a_6의 등비중항이 a_2이므로

$(a+9)^2=a(a+45)$에서 $a=3$

따라서 $a_k=a_6=3+5\times 9=48$

360. ③

[풀이]

$\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}$가 등차수열을 이루므로 $\dfrac{2}{b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}$

a, c, b가 차례로 등비수열을 이루므로 $c^2=ab$

$\dfrac{2}{b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}$을 $\dfrac{1}{c}=\dfrac{2}{b}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{2a-b}{ab}=\dfrac{2a-b}{c^2}$으로 두면

$c=2a-b$가 된다.

$c^2=ab$에서 $(2a-b)^2=ab$, $4a^2-5ab+b^2=0$에서

$(4a-b)(a-b)=0$이므로 $4a=b$또는 $a=b$. 공비가 1이 아니므로

$b=4a$, $c=2a-b=-2a$

$f(x)=ax^2+bx+c=ax^2+4ax-2a=a(x+2)^2-6a$에서

최솟값은 $-6a=-12$에서 $a=2$

$f(x)=2(x+2)^2-12$에서 $f(2)=20$

[다른풀이]

$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$에서 등차중항의 성질에 의해

$\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$, $2ac = ab + bc$

a, c, b에서 등비중항의 성질에 의해

$c^2 = ab$

구해진 두 식을 연립해보면

$2ac = c^2 + bc$, $2a = c + b$

$2a = c + b$에서

c, a, b가 등차수열이 되므로 공차를 d라 하자.

$b = a - d$, $c = a + d$라 되고

$c^2 = ab$에 대입하면

$d(3a + d) = 0$인데 $d = 0$이면 공비가 1이 되므로 모순

$d = -3a$

$b = 4a$, $c = -2a$

$f(x) = ax^2 + 4ax - 2a = a(x+2)^2 - 6a$에서 최솟값은 $-6a$이고

이 값이 -12이므로 $a = 2$

$f(x) = 2x^2 + 8x - 4$

$f(2) = 20$

361. $a = 2, b = 1, c = -4$

나머지정리에 의하여

$p = c$, $q = a + b + c$, $r = 4a - 2b + c$ 이다.

(가)에서 $a + b = 3$, $3a - 3b = 3$ 이므로 $a = 2$, $b = 1$ 이다.

또한 $p = c$, $q = 3 + c$, $r = 6 + c$ 이다.

(나)에서 $r^2 = pq$ 즉, $(6+c)^2 = c(3+c)$ 이므로 $c = -4$ 이다.

362. ②

$x^3 - 2x^2 + x - k = 0$의 세 근을 a, ar, ar^2라 두면

근과 계수와의 관계에 의해

$a(1 + r + r^2) = 2$, $a^2 r + a^2 r^2 + a^2 r^3 = a^2 r(1 + r + r^2) = 1$, $a^3 r^3 = k$

$ar = \frac{1}{2}$, $k = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

363. ⑤

[풀이]

$108 = 2^2 \times 3^3$에서 양의 약수의 개수는 $3 \times 4 = 12$개 이다.

공비	항수
3^1	$3^3 \times 2^2 + 1 = 109$
3^2	$2 \times 3^3 + 1 = 55$
3^{2^2}	$3^3 + 1 = 28$
3^3	$3^2 \times 2^2 + 1 = 37$
3^{3^2}	$3 \times 2^2 + 1 = 13$
3^{3^3}	$2^2 + 1 = 5$
2×3	$2 \times 3^2 + 1 = 19$
2×3^2	$2 \times 3 + 1 = 7$
2×3^3	$2 + 1 = 3$
$2^2 \times 3$	$3^2 + 1 = 10$
$2^2 \times 3^2$	$3 + 1 = 4$
$2^2 \times 3^3$	$1 + 1 = 2$

항수를 다 더하면 292

364. ②

$$\frac{S_6}{S_3} = \frac{\frac{a_1(r^6 - 1)}{r - 1}}{\frac{a_1(r^3 - 1)}{r - 1}} = r^3 + 1 = 126$$

$r^3 = 125$, $r = 5$

$S_3 = \frac{(5^3 - 1)}{5 - 1} = 31$

365. ③

$2S_2 = S_3 + S_4$ 에서

$2(a_1 + a_2) = 2(a_1 + a_2 + a_3) + a_4$

$2a_3 + a_4 = a_1 r^2 (2 + r) = 0$

이므로 $r = -2$ 이다. ($a_1 > 0$ 이므로 $r \neq 0$)

$r^2 = 144a_1^2$ 에서 $r = \pm 12a_1 = -2$ 이므로

$a_1 = \frac{1}{6}$ ($\because a_1 > 0$)

따라서 $a_5 = a_1 r^4 = \left(\frac{1}{6}\right) \times (-2)^4 = \frac{8}{3}$ 이다.

366. ④

$S_3 = \frac{a_1(r^3 - 1)}{r - 1} = 3$이고

$S_6 = \frac{a_1(r^6 - 1)}{r - 1} = \frac{a_1(r^3 - 1)}{r - 1}(r^3 + 1) = 3 \cdot (r^3 + 1) = 12$

$r^3 + 1 = 4$이므로 $r^3 = 3$이고 $\frac{a_1}{r - 1} = \frac{3}{2}$

$S_{30} = \frac{a_1(r^{30} - 1)}{r - 1} = \frac{a_1}{r - 1} \cdot \{(r^3)^{10} - 1\} = \frac{3}{2}(3^{10} - 1)$

따라서 $2S_{30} = 3(3^{10} - 1) = 3^{11} - 3$

367. ④

$a_1 + a_2 + a_3 = S_3 = 5$,

$a_4 + a_5 + a_6 = (a_1 + a_2 + a_3) r^3 = S_6 - S_3 = 25$, $r^3 = 5$

$a_7 + a_8 + a_9 = (a_4 + a_5 + a_6) r^3 = S_9 - S_6 = 125$

이므로 $S_9 = 125 + S_6 = 155$ 이다.

368. ②

$a_n = a \cdot r^{n-1} < 0$ 이므로 $a < 0$, $r > 0$

$$\frac{S_5 - S_1}{S_4 - S_2} = \frac{\frac{a(r^5 - 1)}{r - 1} - a}{\frac{a(r^4 - 1)}{r - 1} - \frac{a(r^2 - 1)}{r - 1}} = \frac{r^5 - 1 - r + 1}{r^4 - 1 - r^2 + 1} = \frac{r(r^4 - 1)}{r^2(r^2 - 1)}$$

$$=\frac{r^2+1}{r}=\frac{5}{2}$$

$2r^2-5r+2=0 \quad \therefore r=\frac{1}{2},\ 2$

$|a_m|>|a_{n+1}|$ 이므로 $\quad r=\frac{1}{2}$

$$\therefore \frac{a^4}{a^5+a^1}=\frac{a\left(\frac{1}{2}\right)^3}{a\left(\left(\frac{1}{2}\right)^4+1\right)}=\frac{2}{17}$$

369. ③

$S_{10}=244S_5$

$\frac{r^{10}-1}{r-1}=244\times\frac{r^5-1}{r-1}$

$(r^5-1)(r^5-243)=0$

$r=3\ (\because r\neq 1)$

$S_3=\frac{3^3-1}{3-1}=13$

370. 1) $a_n=7n$, 2) 1470

1) $a_2=a_1+7,\ a_5=a_1+28,\ a_k=a_1+7(k-1)$

등차중항에 의하여 $2(a_1+28)=(a_1+7)+\{a_1+7(k-1)\}$

$k=8$

$a_2=a_1+7,\ a_4=a_1+21,\ a_8=a_1+49$, 등비중항에 의하여

$(a_1+21)^2=(a_1+7)\times(a_1+49),\ a_1=7,\ a_n=7n$

2) $a_n=7n,\ \sum_{n=1}^{20}7n=1470$

371. ③

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

$a_k=a\times 2^{k-1}=12 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$S_{k+5}=\frac{a(2^{k+5}-1)}{2-1}=765 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=3,\ k=3$

따라서 $S_3=a_1+a_2+a_3=3+6+12=21$

372. 259

풀이)

$\{a_n\}$이 등비수열 이므로 $a_n=ar^{n-1}$

$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$ 에서

$S_{10}=\frac{a(r^{10}-1)}{r-1},\ S_5=\frac{a(r^5-1)}{r-1}$

$\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}=7\times\frac{a(r^5-1)}{r-1}$

$\frac{a(r^5-1)(r^5+1)}{r-1}=7\times\frac{a(r^5-1)}{r-1}$

$(r^5+1)=7$ 이므로 $\therefore\ r^5=6$ 이다.

$S_{20}=kS_5$ 에서

$S_{20}=\frac{a(r^{20}-1)}{r-1},\ S_5=\frac{a(r^5-1)}{r-1}$

$\frac{a(r^{20}-1)}{r-1}=k\times\frac{a(r^5-1)}{r-1}$

$\frac{a(r^5-1)(r^5+1)(r^{10}+1)}{r-1}=k\times\frac{a(r^5-1)}{r-1}$

$(r^5+1)(r^{10}+1)=k$

$r^5=6$ 에서 $(r^5+1)(r^{10}+1)=(6+1)(36+1)=259$ 이다.

373. ③

$a_n=r^{n-1},b_n=(r^2)^{n-1}$

$S_n=\frac{(r^n-1)}{r-1},\ T_n=\frac{(r^{2n}-1)}{r^2-1}$

$2\times\frac{r^{20}-1}{r-1}=k\times\frac{r^{20}-1}{r-1}$

$\frac{2}{r-1}=\frac{k}{(r-1)(r+1)}$

$2r+2=k$

$$\frac{S_6}{T_2}=\frac{\frac{r^6-1}{r-1}}{\frac{r^4-1}{r^2-1}}=\frac{21}{40}k$$

$\frac{(r^6-1)(r^2-1)}{(r-1)(r^4-1)}=\frac{(r^2+r+1)(r^3+1)}{r^2+1}=\frac{21}{40}k$

$\frac{(r^3+1)(r^2+r+1)}{r^2+1}=\frac{21}{40}\times 2(r+1)$

$20(r^2+r+1)(r^2-r+1)=21(r^2+2)$

$20r^4-r^2-1=0$

$(4r^2-1)(5r^2+1)=0$

$r^2=\frac{1}{4}\quad r=\frac{1}{2}\quad k=3$

$r+k=\frac{7}{2}$

374. ④

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=5$

$r^{10}(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})=(a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{20})=30$

$r^{10}=6,\ r^{20}=36$

$a_{21}+a_{22}+a_{23}+\cdots+a_{30}=r^{20}(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})=180$

375. ⑤

$a+ar=a(1+r)=9 \quad \cdots$①

$\dfrac{a(r^4-1)}{r-1}=36 \quad \cdots ②$

①, ②를 연립하면

$\dfrac{9}{1+r}\times\dfrac{r^4-1}{r-1}=9(r^2+1)=36$

$r^2=3$

$\therefore\ S_8=\dfrac{a(r^8-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^4-1)}{r-1}\times(r^4+1)=36\times10=360$

376. ③

$a_1+a_2+a_3=8,\ a_4+a_5+a_6=88$ 등비수열의 합은 등비수열이므로

$a_7+a_8+a_9=88\times11=968$

$S_9=96+968=1064$

377. ⑤

첫 번째 시행 후 색칠된 삼각형의 넓이 $a_1=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times2^2=\sqrt{3}$

첫 번째 시행 후 만들어진 삼각형과 두 번째 시행 후 만들어진 삼각형은 닮음 도형이고 닮음비는 $2:1$이므로 넓이 비는 $4:1$이다. 따라서 두 번째 시행 후 색칠된 삼각형의 넓이는 $a_2=\sqrt{3}\times\dfrac{3}{4}$이다.

첫째항이 $\sqrt{3}$이고 공비가 $\dfrac{3}{4}$인 등비수열이므로 색칠한 부분의 넓이의 합은

색칠한 부분의 넓이의

합$=\dfrac{\sqrt{3}\left(1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^5\right)}{1-\dfrac{3}{4}}=4\sqrt{3}\left(1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^5\right)$

따라서 $p=4\sqrt{3},\ q=\dfrac{3}{4},\ p\times q=\sqrt{3}$

378. ⑤

5회 반복 후 색칠한 부분의 넓이는

$1+\dfrac{8}{9}+\left(\dfrac{8}{9}\right)^2+\left(\dfrac{8}{9}\right)^3+\left(\dfrac{8}{9}\right)^4$

$=9-9\left(\dfrac{8}{9}\right)^5$

따라서 색칠한 부분을 제외한 넓이는 $8\left(\dfrac{8}{9}\right)^4$

$\therefore\ 2p+q=25$

379. ④

$x^{11}+x^{10}+x^9+\cdots+x^2+x+2=(x-1)f(x)+13$ 이고,

$f(x)=\dfrac{x^{11}+x^{10}+x^9+\cdots+x^2+x-11}{x-1}$

$f(3)=\dfrac{3^{11}+3^{10}+3^9+\cdots+3^2+3-11}{2}=\dfrac{\dfrac{3(3^{11}-1)}{2}-11}{2}=\dfrac{3^{12}-25}{4}$

380. ④

$a_{2n-1}=2+(n-1)3=3n-1$

$S_{2n-1}=2\times2^{n-1}=2^n$

$S_{13}=S_{11}+a_{12}+a_{13}$이므로 $2^7=2^6+a_{12}+20$

$\therefore\ a_{12}=44$

381. ②

2023년 1월 초부터 2년 간 매달 초에 복리로 10,000원씩 적립할 때 2024년 12월 말 적립금의 원리합계금은

$10000(1+0.04)+10000(1+0.04)^2+\cdots 10000(1+0.04)^{24}$

$=\dfrac{10000\times1.04\times(1.04^{24}-1)}{1.04-1}$

$=\dfrac{10000\times1.04\times1.56}{0.04}=405600$

382. ⑤

$S_{10}=\dfrac{10(1.04)\{1.04^{10}-1\}}{1.04-1}=130$

383. ③

연이율 5%, 1 년마다 복리로 매년 말에 100 만 원씩 적립했으므로

10 년 째 말의 원리합계는

$100\times1.05^9+100\times1.05^8+100\times1.05^7+\cdots+100$

$=100\times(1+1.05+\cdots+1.05^9)$

$=100\times\dfrac{1.05^{10}-1}{1.05-1}$

$=100\times\dfrac{1.6-1}{0.05}$

$=1200$ (만원)

384. ③

$\dfrac{1.06a\{(1.06)^{10}-1\}}{1.06-1}=3180,\ \dfrac{1.06\times0.8a}{0.06}=3180,\ a=225$

385. ②

수열 $\{a_n\}$은 등비수열이므로

$a_n=a_1r^{n-1}$

$a_1\times a_3=a_5$에서 $(a_1r)^2=a_1r^4$

$a_1=r^2,\ a_1r=r^3 \cdots ①$

$S_3=18$에서 $\log_2(a_1r)^3=18 \quad \cdots ②$

① , ②에 의하여

$a_1=16=2^4,\ r=4=2^2$에서

$a_n=2^{2n+2}$
따라서
$S_{2n}=\log_2 2^{\frac{2n(4n+6)}{2}}$
$=\frac{2n(4n+6)}{2}>238$에서
$n(2n+3)>119$이 되므로
$2n^2+3n-119>0,\ (n-7)(2n+17)>0$
따라서 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 8

386. ②
$S_1=2+k$
$S_n-S_{n-1}=\frac{1}{2}4^n+k-\left(\frac{1}{2}4^{n-1}+k\right)=a_n$
$a_n=\frac{3}{8}\cdot 4^n,\ a_1=\frac{3}{2},\ 2+k=\frac{3}{2},\ k=-\frac{1}{2}$
$a_2=6,\ k\times a_2=-3$

387. ②
(나)에서 ${a_k}^2=a_2a_{4k-1}$
$\{a_1+(k-1)d\}^2=(a_1+d)\{a_1+(4k-2)d\}$
${a_1}^2+2a_1(k-1)d+(k-1)^2d^2={a_1}^2+(4k-1)a_1d+(4k-2)d^2$
정리 후 $\div d$ 하면
$a_1(2k+1)=(k^2-6k+3)d\cdots$ ①
$\le(2k+1)d$ ($\because$ (가))
$k^2-6k+3>0$과 $k^2-6k+3\le 2k+1$를 동시에 만족하는 k는
$3+\sqrt{6}<k\le 4+\sqrt{14}$
k는 자연수 이므로 6 or 7이다. $\cdots$②
$100\le a_{19}\le 120$에서
$100\le a_1+18d\le 120$
$18d<a_1+18d\le 19d$ ($\because$ (가))이므로
$18d<120,\ 100\le 19d$이다.
d는 자연수 이므로 $d=6\cdots$③
①, ②, ③에서 $a_1(2k+1)=(k^2-6k+3)\cdot 6$
i) $k=6$일 때
$a_1=\left(\frac{36-36+3}{13}\right)6=\frac{6}{13}$ (×)
ii) $k=7$일 때
$a_1=\left(\frac{49-42+3}{15}\right)\cdot 6=4$
$\therefore\ a_k=a_7=a_1+6d=4+6\times 6=40$

[다른 풀이]
k는 자연수이므로 6 or 7이다. $\cdots$②
①에서 $a_1=\frac{(k^2-6k+3)}{(2k+1)}d$이므로
$k=6$일 때 $a_1=\frac{3}{13}d$이므로 공비$=\frac{a_k}{a_2}=\frac{a_6}{a_2}=\frac{\frac{68}{13}d}{\frac{16}{13}d}=\frac{17}{4}$ (×)
$k=7$일 때 $a_1=\frac{2}{3}d$이므로 공비$=\frac{a_k}{a_2}=\frac{a_7}{a_2}=\frac{\frac{20}{3}d}{\frac{5}{3}d}=4$
(자연수)
따라서 $a_{19}=a_1+18d=\frac{56}{3}d$이고 $100\le a_{19}\le 120$이므로
$\frac{300}{56}\le d\le\frac{360}{56}$
d는 자연수이므로 $d=6,\ a_1=4$
$\therefore\ a_k=a_7=4+6\times 6=40$

388. ④
$a_k,\ a_{k+1},\ a_{13}$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 공비를 r이라 하면
$a_{k+1}=ra_k$
$a_{k+1}-a_k=(r-1)a_k=d$
$a_k=\frac{d}{r-1}$ $\cdots$①
$a_{13}=r^2a_k$ $\cdots$②
$a_{13}-a_k=(r^2-1)a_k=(r+1)d$ $\cdots$③
$a_{13}-a_k=(a+12d)-\{a+(k-1)d\}=(13-k)d$ $\cdots$④
③, ④에서 $d>0$이므로
$r+1=13-k$
$k=12-r$ $\cdots$⑤
②에서
$a_{13}=r^2a_k=432=2^4\times 3^3$
수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 정수이고, ⑤에서 k는 자연수이므로
i) $r=1$일 때
$k=11,\ a_k=432$
이는 $a_k=a_{k+1}$이므로 $d>0$을 만족하지 않는다.
ii) $r=2$일 때
$k=10,\ a_k=2^2\times 3^3=108$
iii) $r=3$일 때
$k=9,\ a_k=2^4\times 3=48$
iv) $r=2^2$일 때
$k=8,\ a_k=3^3=27$
v) $r=2\times 3$일 때
$k=6,\ a_k=2^2\times 3=12$
따라서 만족하는 k의 값의 합은 $6+8+9+10=33$

389. ⑤
$S_1=a_1=1$

$S_{12}=6S_6$

$\frac{r^{12}-1}{r-1}=6\times\frac{r^6-1}{r-1}$

$r^6+1=6, r^6=5$

$a_n=\left(5^{\frac{1}{6}}\right)^{n-1}=5^{\frac{n-1}{6}}$

이때 a_n이 정수가 되게 하는 100이하의 자연수 n의 값은

$n=1,\ 7,\ 13,\ \cdots,\ 97$이므로

자연수 n의 값의 합은 $\frac{1+97}{2}\times 17=833$

390. 162

첫째항이 2이고 공비가 정수인 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

조건 (가) $12<2r+2r^2\le 24$

$6<r(r+1)\le 12$

이때 $r(r+1)$은 연속하는 두 정수의 곱이므로 $7, 8, 9, 10, 11$가 될 수 없다.

따라서 $r(r+1)=12\ \ r=3,\ -4$

(1) $r=3$일 때

조건 (나)에서

$\sum_{k=1}^{m}a_k=\frac{2(3^m-1)}{3-1}=3^m-1=242$

$3^m=243\ \ m=5$

(2) $r=-4$일 때

조건 (나)에서

$\sum_{k=1}^{m}a_k=\frac{2\{(-4)^m-1\}}{-5}=242$

$(-4)^m=-606$

이를 만족시키는 자연수 m은 존재하지 않는다

$a_5=2\times 3^4=162$

391. ④

$S_{2n-1}=\alpha 3^{n-1},\ \ S_{2n}=\beta 3^{n-1}$

$a_{2n}=S_{2n}-S_{2n-1}=(\beta-\alpha)3^{n-1}\ \ a_6=(\beta-\alpha)3^2$

$a_{2n+1}=S_{2n+1}-S_{2n}=(3\alpha-\beta)3^{n-1}\ \ a_7=(3\alpha-\beta)3^2$

$a_6=a_7,\ \ \beta=2\alpha\ \ S_1=a_1=\alpha=2$

$S_{10}+S_{12}=4\times 3^4+4\times 3^5=4\times 3^4(1+3)=16\times 81=1296$

392. ①

총 항의 개수는 22개이므로 공비를 r이라 하면

$2r^{21}=50\ \ r^{21}=25$

$2+a_1+a_2+\ \cdots\ +a_{20}+50=\frac{2(1-r^{22})}{1-r}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ \cdots\ +\frac{1}{a_{20}}+\frac{1}{50}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^{22}}-1\right)}{\frac{1}{r}-1}$

$=\frac{r(1-r^{22})}{2r^{22}(1-r)}=\frac{1-r^{22}}{2r^{21}(1-r)}=\frac{1}{4r^{21}}\cdot\frac{2(1-r^{22})}{1-r}=\frac{1}{100}\cdot\frac{2(1-r^{22})}{1-r}$

$$\begin{aligned}2+a_1+a_2+\ \cdots\ +a_{20}+50&=100\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ \cdots\ +\frac{1}{a_{20}}+\frac{1}{50}\right)\\&=k\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ \cdots\ +\frac{1}{a_{20}}+\frac{1}{50}\right)\end{aligned}$$

따라서 $k=100$

393. ④

a_5, a_7, a_k가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a_5\times a_k=a_7{}^2$,

$(a+4d)(a+(k-1)d)=(a+6d)^2$

이를 정리하면 $a=\frac{-4(k-10)d}{k-9}$

$a_k=\frac{-4(k-10)d}{k-9}+(k-1)d=\frac{(k-7)^2d}{k-9}=256$

수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 정수이므로

공차 d는 자연수이고, 자연수 $k>9$이다.

부정방정식 $(k-7)^2d=256(k-9)$를 만족하는 경우는

$k=11$일 때, $d=32$

$k=15$일 때, $d=24$

$k=23$일 때, $d=14$이다.

따라서 $a_k=256$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은

$11+15+23=49$이다.

394. ①

삼각형의 넓이는 $\frac{1}{8}$배 개수는 2배

공비 $\frac{1}{4}$

$P_1=2+\frac{1}{2}$

$P_2=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$

$\vdots$

$P_{10}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\ \cdots\ +\frac{1}{2^{19}}$

$=\frac{2\left(1-\frac{1}{4^{11}}\right)}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}\left(8-\frac{1}{2^{19}}\right)$

395. ⑤

점 $A(3^{81}, 81)$

P_1 의x좌표는 3^{81} y 좌표는 $\frac{81}{3}=3^{4-1}=3^3$

P_2 의x좌표는 3^9 y 좌표는 $\frac{3^4}{3^2}=3^{4-2}=3^2$

P_3 의x좌표는 3^3 y 좌표는 $\frac{3}{3}=1$

⋮

P_n의 y 좌표는$P_n=y_n=\frac{3^4}{3^n}=3^{4-n}$

$y_n=3^{4-n}<\frac{1}{k}$

$3^{n-4}>k$를 만족하는 n의 최솟값이 8이므로

$3^3\le k<3^4$을 만족한다.따라서

자연수 k의 개수는 $3^4-3^3=3^3(3-1)=54$

396. ④

$\sum_{k=1}^{9}a_k+\sum_{k=2}^{8}a_{k+1}=48$

$\sum_{k=2}^{8}a_{k+1}+a_1+a_2=\sum_{k=1}^{9}a_k$

$2\sum_{k=1}^{9}a_k=48+a_1+a_2=52$

$\sum_{k=1}^{9}a_k=26$

397. ⑤

$\sum_{k=1}^{20}\left(2a_k+b_k+\frac{1}{2}\right)$

$=\sum_{k=1}^{20}2a_k+\sum_{k=1}^{20}b_k+\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{2}$

$=2\times10+20+\frac{1}{2}\times20=50$

398. ④

$2\times20-3\times(-10)=70$

399. ①

$\sum_{k=1}^{10}(-3a_k+b_k-1)$

$=-3\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}b_k-\sum_{k=1}^{10}1$

$=-45+60-10$

$=5$

400.

400. ③

$\sum_{k=1}^{10}(3a_k+2b_k)=3\sum_{k=1}^{10}a_k+2\sum_{k=1}^{10}b_k=60+10=70$ 이다.

401. ②

$\sum_{k=1}^{7}a_k=-20$이므로

$\sum_{k=1}^{7}(-4a_k+5b_k+3)=-4\sum_{k=1}^{7}a_k+5\sum_{k=1}^{7}b_k+3\cdot7$

$=-4\cdot(-20)+5\sum_{k=1}^{7}b_k+21=5\sum_{k=1}^{7}b_k+101=301$

따라서 $5\sum_{k=1}^{7}b_k=200$이므로 $\sum_{k=1}^{7}b_k=40$

402. ①

$\sum_{k=1}^{20}(3a_k-2)=3\sum_{k=1}^{20}a_k-40=3\times31-40=53$

403. ①

$\sum_{k=1}^{10}(2a_k-1)=2\sum_{k=1}^{10}a_k-10=0$ 이다.

404. ④

풀이)

$\sum_{k=1}^{8}a_k=\alpha,\ \sum_{k=1}^{8}b_k=\beta$라 하면

$\sum_{k=1}^{8}(3a_k-b_k)=5$에서

$3\alpha-\beta=5$ ⋯⋯㉠

$\sum_{k=1}^{8}(2a_k+4b_k)=22$에서

$2\alpha+4\beta=22$ ⋯⋯㉡

㉠×4+㉡을 하면

$14\alpha=42$

$\alpha=3,\ \beta=4$

즉, $\sum_{k=1}^{8}a_k=3,\ \sum_{k=1}^{8}b_k=4$

따라서

$\sum_{k=1}^{8}(a_k+2b_k+2)=3+2\times4+16=27$

405. ①

준식$=\sum_{k=1}^{15}\left(2a_k^2+2\right)=90$

406. ④

[풀이]

$\sum_{k=1}^{10}(3a_k-1)^2=\sum_{k=1}^{10}\left(9a_k^2-6a_k+1\right)=54-18+10=46$

407. ①

근과 계수와의 관계에서 $a_n+b_n=2n,\ a_n\cdot b_n=2n-3$

$\sum_{k=1}^{5}(a_k{}^2+b_k{}^2)=\sum_{k=1}^{5}\{(a_k+b_k)^2-2a_k\cdot b_k\}=\sum_{k=1}^{5}(4k^2-4k+6)=190$

408. ②

$a_3=a+2d=2,\ a_5=a+4d=6$

$d=2$

준식 $=\sum_{k=1}^{50}(a_{2k}-a_{2k-1})=50\times d=100$

409. ②

$\sum_{k=1}^{5}(2^k+2k)=\sum_{k=1}^{5}2^k+\sum_{k=1}^{5}2k$

$=\frac{2(2^5-1)}{2-1}+2\times\frac{5\times 6}{2}=62+30=92$

410. (1) 3 (2) 155

(1) $a_n=2+(n-1)d$

$3a_{n+1}-a_n=6+3dn-2-(n-1)d=2dn+4+d$

$\therefore\ 2d=6,\ d=3$

(2) $\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(3k-1)=155$

411. ③

$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=\frac{a(1-r^{10})}{1-r}=10$ (등비수열의 합)

$a_{21}+a_{22}+a_{23}+\cdots+a_{30}=(a_1+a_2+\cdots+a_{30})-(a_1+a_2+\cdots+a_{20})$

$=\frac{a(1-r^{40})}{1-r}-\frac{a(1-r^{20})}{1-r}$

$=\frac{a(1-r^{10})(1+r^{10}+r^{20})}{1-r}-\frac{a(1-r^{10})(1+r^{10})}{1-r}$

$=\frac{a(1-r^{10})}{1-r}(r^{20}+r^{10}+1-1-r^{10})=40$

$r^{20}=4$

$\sum_{n=1}^{60}a_n=\frac{a(1-r^{60})}{1-r}=\frac{a(1-r^{20})(1+r^{20}+r^{40})}{1-r}$

$=\frac{a}{1-r}(1-4)(1+4+4^2)$

여기서 $\frac{a}{1-r}$ 구하기 위해 맨처음 구해둔 $\frac{a(1-r^{10})}{1-r}=10$ 을 보면,

$r^{10}=2$ ($r^{20}-4$ 인데 모든 항이 양수이기 때문)

$\frac{a}{1-r}=-10\ \Rightarrow\ \frac{a}{1-r}(-3)(21)=630$

412. ④

$\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}2=55-20=35$

413. ①

$\sum_{k=1}^{10}(2k+1)^2-4\sum_{k=1}^{10}k(k+1)$

$=\sum_{k=1}^{10}1=10$

414. ①

$\sum_{k=1}^{8}\frac{2k^3}{k+1}-\sum_{i=1}^{8}\frac{i^3-1}{i+1}=\sum_{k=1}^{8}\frac{k^3+1}{k+1}=\sum_{k=1}^{8}k^2-k+1$

$=\frac{8\times 9\times 17}{6}-\frac{8\times 9}{2}+8$

$=204-36+8=176$

415. ①

$\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$

$=\frac{n(n+1)}{6}(2n+4)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}=30n$

$\therefore (n+1)(n+2)=90=9\cdot 10$

$\therefore n=8$

416. ⑤

ㄱ. $\sum_{k=1}^{5}(2k-1)^2+\sum_{k=1}^{5}(2k)^2=\sum_{k=1}^{10}k^2$

$1^2+3^2+5^5+7^2+9^2+2^2+4^2+6^2+8^2+10^2=\sum_{k=1}^{10}k^2$ (참)

ㄴ. $\sum_{k=1}^{19}(k+1)^2=\sum_{j=2}^{20}j^2$

좌변=우변 (참)

ㄷ. $-1+1-1+1-1+1=\sum_{k=1}^{6}(-1)^{k+2}$

좌변=우변 (참)

417. ⑤

$\sum_{k=1}^{10}k(k+2)=495$

418. ③

[풀이]

$\sum_{k=1}^{n}\log_3\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\log_3\left(\frac{k+1}{k}\right)$에서 $k=1$부터 n까지 대입해보면

$\log_3\frac{2}{1}+\log_3\frac{3}{2}+\ \cdots\ +\log_3\frac{n+1}{n}$

$=\log_3\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\frac{n+1}{n}=\log(n+1)$

$\log_3(n+1)=4$에서

$n+1=3^4,\ n=80$

419. ⑤

$\sum_{k=1}^{11}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{11}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$ 이다.

420. ④

$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)=\frac{10}{11}$

421. ②

[풀이]

$S_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ 에서

$\sum_{k=1}^{10}S_k=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)=\frac{10}{11}$

$\sum_{k=1}^{5}k^2=\frac{5\times6\times11}{6}=55$

$\sum_{k=1}^{10}S_k\times\sum_{k=1}^{5}k^2=50$

422. $\frac{10}{21}$

$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left\{\frac{1}{(2k-1)}-\frac{1}{(2k+1)}\right\}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{10}{21}$

423. ③

$\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=3\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$

$=3\left(\sqrt{n+1}-1\right)=9$

이므로 $n=15$ 이다.

424. ②

$\sum_{k=2}^{11}a_{k-1}-\sum_{k=1}^{8}a_{k+1}$

$=a_1+a_{10}=10,\ a_1=1$이므로

$a_{10}=9$

425. ③

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)(a_k-1)=0$에서

$\sum_{k=1}^{10}{a_k}^2=10$

$\sum_{k=1}^{10}(2a_k-1)^2=26$에서

$4\sum_{k=1}^{10}a_k^2-4\sum_{k=1}^{10}a_k+10=26$이므로

$\sum_{k=1}^{10}a_k=6$

426. ①

$\sum_{k=1}^{10}(2a_k-3)=2\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}3=\frac{9}{4}\cdot\frac{4\cdot5\cdot9}{6}-\frac{4\cdot5}{2}$

$=2\times20-30=10$

427. ③

$a_1=2,\ a_2=4,\ a_3=8,\ a_4=2,\ a_5=4,\ a_6=8,\ \cdots$

수열 $\{a_n\}$은 2, 4, 8이 반복되는 수열이다.

$\sum_{k=1}^{10}a_k=(a_1+a_2+a_3)\times3+a_1=14\times3+2=44$

428. ②

$12d=72,\ d=6$

$(a_2+a_4+a_6+\cdots a_{400})-(a_1+a_3+a_5+\cdots a_{399})=200d=1200$

429. ④

$\sum_{k=1}^{19}a_{k+1}+\sum_{k=2}^{20}a_{k-1}+a_1-a_{20}=58+10-30$ 에서

$2S_{19}=19(a_1+a_{19})=38$

즉, $a_1+a_{19}=2$ 이다.

따라서 $a_{10}=\frac{a_1+a_{19}}{2}=1$ 이다.

430. ⑤

이 등차수열의 공차를 d 라 하면

$S_{20}=\frac{20(a_1+a_{20})}{20}=\frac{20\{(27-d)+(-15+d)\}}{2}=120$ 이다.

431. ⑤

$a_2=6,\ \frac{a_5}{a_3}=4$에서 첫째항을 a라 하면

$ar=6,\ r^2=4$이고 모든 항이 양수이므로

첫째항이 3이고 공비가 2인 등비수열이다.

따라서 $\sum_{k=1}^{7}a_k=3(2^7-1)=381$

432. ⑤

$\overline{P_nQ_n}=a_n=2^n-n$

$\therefore\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}(2^n-n)=2(2^{10}-1)-55$

$=2^{11}-57=1991$

433. ②

$\sum_{n=1}^{4}\frac{(a_{n+1})^2}{a_{n+1}}=\sum_{n=1}^{4}a_{n+1}=\sum_{n=1}^{4}a3^n=\frac{3a(3^4-1)}{2}=12\quad a=\frac{1}{10}$

$\frac{1}{a_1}=10$

434. ⑤

a_{n+1}이 이차방정식 $x^2+(2-3a_n)x-6a_n=0$의 근이므로
$a_{n+1}^2+(2-3a_n)a_{n+1}-6a_n=0$이 성립하므로
인수분해하면
$(a_{n+1}-3a_n)(a_{n+1}+2)=0$이고
각 항이 양의 정수이므로
$a_{n+1}=3a_n$을 만족한다.
$\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 3인 등비수열이므로
$\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 1, 공비가 9인 등비수열이 된다.
따라서 $\sum_{k=1}^{10} a_{2k-1}=\frac{9^{10}-1}{9-1}=\frac{3^{20}-1}{8}$에서
$\alpha+\beta=28$

435. ④
$\sum_{k=1}^{3} a_k=\frac{a_1(1-r^3)}{1-r}=1 \quad \cdots ①$
$\sum_{k=1}^{6} a_k=\frac{a_1(1-r^3)(1+r^3)}{1-r}=28 \quad \cdots ②$
① , ②에 의하여
$r^3=27$이므로
$\sum_{k=7}^{12} a_k=\frac{a_1 r^6(1-r^6)}{1-r}=3^6\times 28=2^2\times 3^6\times 7^1$이다.
따라서 $u+v+w=9$

436. ②
풀이)
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 1이고 공차가 3이므로
$a_n=1+(n-1)\times 3 \ =3n-2$
$b_n=7\times 2^{3n-2} \ =14\times 2^{3(n-1)}$
$=14\times 8^{n-1}$ 에서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 14이고 공비가 8인
등비수열이므로 $S=\sum_{k=1}^{3} b_k=\frac{14(8^3-1)}{8-1}=2\times 511=1022$

$c_n=\log(7\times 2^{3n-2})$
$=\log 7+(3n-2)\log 2$
$=\log 7+\log 2+(3n-3)\log 2$
$=\log 14+(n-1)\log 8$
에서 수열 $\{c_n\}$은 첫째항이 $\log 14$이고 공차가 $\log 8$인
등차수열이다.
$T=\frac{4(2\log 14+3\log 8)}{2}=2(2\log 7+2\log 2+9\log 2)$
$=2(2\log 7+11\log 2)$
따라서
$\frac{T}{S}=\frac{2(2\log 7+11\log 2)}{1022}$
$=\frac{2\log 7+11\log 2}{511}$

437. ⑤
첫째항이 음수이고 공비가 -2인 등비수열 $\{a_n\}$
$a_n=(a)(-2)^{n-1} \ (r<0)$
수열 a_n은 음수항 양수항 번갈아서 나오는 수열
$|a_k|+a_k$은 음수항은 소거 양수항만 남는다
$\sum_{k=1}^{10}(|a_k|+a_k)=\sum_{k=1}^{5} 2a_{2k}=2\sum_{k=1}^{5}(a)(-2)^{2k-1}=440$
$2a\sum_{k=1}^{5}(-2)^{2k-1}=2a\times\frac{(-2)((4)^5-1)}{4-1}=440$
$a=-\frac{220}{682}=-\frac{10}{31}$

438. ④
$a_n=a+(n-1)d$
$b_8=a_8-|a_8|=a_8, \quad a_8=a+7d=0, \quad a=-7d$
$S_5=b_1+b_2+b_3+b_4+b_5=\{a_1-|a_1|\}+\{a_2-|a_2|\}+\cdots+\{a_5-|a_5|\}$
$=-100$
$\sum_{n=1}^{5} b_n=-100$ 음수이므로 $n=1$부터 $n=7$까지 $a_n<0$
$S_5=2(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)=-100$
$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=5a+10d=-25d=-50$
$d=2, a=-14$
b_n은 $n=8$ 이상부터는 $b_n=a_n-a_n=0$이다.
$n=7$일 때, S_n은 최솟값을 가지므로
$m=S_7=2\times\frac{7\{2\times(-14)+6\times 2\}}{2}=-112$
$n=1$일 때, S_n은 최댓값을 가지므로
$M=S_1=2\times(-14)=-28$
$\therefore \ M+m=-28-112=-140$

439. ⑤
$\sum_{k=1}^{15}\{k^2+(3+p)k+3p\}=115$
$\frac{15\times 16\times 31}{6}+(3+p)\frac{15\times 16}{2}+45p=115$
$1240+(3+p)120+45p=115, \ 1485=-165p, \ p=-9$

440. ⑤
근과 계수와의 관계에 따라 $a_n+b_n=2n+1, \ a_nb_n=n(n-1)$
$(a_k-1)(b_k-1)=a_kb_k-(a_k+b_k)+1$
$=k(k-1)-(2k+1)+1=k^2-3k$
따라서
$\sum_{k=1}^{10}(a_k-1)(b_k-1)=\sum_{k=1}^{10}(k^2-3k)$
$=\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}-3\cdot\frac{10\cdot 11}{2}=385-165=220$

441. ①

$1\times20+3\times18+5\times16+\cdots+17\times4+19\times2$

$=\sum_{k=1}^{10}(2k-1)(22-2k)$

$=\sum_{k=1}^{10}(-4k^2+46k-22)$

$=-4\times\frac{10\times11\times21}{6}+46\times\frac{10\times11}{2}-22\times10$

$=770$

442. ②

$a_7=S_7-S_6=\sum_{k=1}^{8}(k^2+1)-\sum_{k=1}^{7}(k^2-1)-\sum_{k=1}^{7}(k^2+1)+\sum_{k=1}^{6}(k^2-1)$

$=8^2+1-(7^2-1)=65-48=17$

$a_1=1^2+1+2^2+1=7 \quad a_7-a_1=10$

443. ④

$\sum_{i=1}^{5}\left(\sum_{k=1}^{i}ik\right)=\sum_{i=1}^{5}i\left(\sum_{k=1}^{i}k\right)$

$=\sum_{i=1}^{5}i\left(\frac{i(i+1)}{2}\right)$

$=\sum_{i=1}^{5}\left(\frac{i^2+i^3}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{5\times6\times11}{6}+\left(\frac{5\times6}{2}\right)^2\right)$

$=140$

444. ②

$\sum_{j=1}^{5}\left\{\sum_{k=1}^{5}(j^2+k^3)\right\}=\sum_{j=1}^{5}\{5j^2+225\}=5\times\frac{5\times6\times11}{6}+225\times5$

$=25\times11+225\times5=1400$

445. $p=5$, $q=-125$

$\sum_{x=1}^{10}\left(\sum_{i=1}^{k}(i-x)\right)=\sum_{x=1}^{10}\left(\frac{k(k+1)}{2}-xk\right)=5\cdot k(k+1)-55k=5k^2-50k$

$=5(k^2-10k)=5(k-5)^2-125$

따라서 $k=5=p$일 때, 최솟값 $q=-125$

446. ①

$\sum_{m=1}^{15}\left\{\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{l}2\right)\right\}$

$=\sum_{m=1}^{15}\left\{\sum_{l=1}^{m}(2l)\right\}$

$=\sum_{m=1}^{15}(m^2+m)$

$=\frac{15\times16\times31}{6}+\frac{15\times16}{2}$

$=1360$

447. ④

$\sum_{n=1}^{12}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k}{n+2}\right)$

$=\sum_{n=1}^{12}\left(\frac{1}{n+2}\times\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{12(2+13)}{2}=45$

448. ③

풀이)

$y=x^2-3x+1$과 $y=5x-3-n$을 연립하면

$x^2-3x+1=5x-3-n$

$x^2-8x+n+4=0$

$\frac{D}{4}=16-(n+4)$

$=-n+12$

$n<12$일 때, 직선 $y=5x-3-n$이 곡선 $y=x^2-3x+1$과 서로 다른 두 점에서 만나므로

$f(n)=2$

$n=12$일 때, 직선 $y=5x-3-n$이 곡선 $y=x^2-3x+1$에 접하므로

$f(n)=1$

$n>12$일 때, 직선 $y=5x-3-n$이 곡선 $y=x^2-3x+1$과 만나지 않으므로

$f(n)=0$

$\sum_{k=1}^{20}f(k)-\sum_{k=1}^{10}f(2k-1)$

따라서 $\sum_{k=1}^{20}f(k)=2\times12+1\times1+0\times8=25$ 이고,

$\sum_{k=1}^{10}f(2k-1)=2\times6+0\times4=12$ 이므로

$\sum_{k=1}^{20}f(k)-\sum_{k=1}^{10}f(2k-1)=25-12=13$

449. ②

$|a_1|=3$이고 $|a_{n+1}|=|a_n|$이므로

모든 자연수 n에 대해 $|a_n|=3$이다.

$\sum_{k=1}^{20}b_k=\sum_{k=1}^{20}|a_k|-\sum_{k=1}^{20}a_k=60-6=54$

450. ②

자석 블록은 $n=1$일 때 삼각형 하나, $n=2$일 때 세 개,

$n=3$일 때 6개로 늘어난다.

$a_{n+1}-a_n=3(n+1)$

$a_{10}=a_9+3\times10=a_8+3\times10+3\times9$

$=\cdots=a_1+3(10+9+\cdots+2)$

$=3(10+9+\cdots+2+1)$

$=3\times55=165$

451. ⑤

중심이 P_n인 원의 방정식은 $(x-a_n)^2+y^2=a_n{}^2$

$y=\sqrt{x}$와 교점 Q_n은 $(x-a_n)^2+y^2=(x-a_n)^2+(\sqrt{x})^2=a_n{}^2$

$x^2-2a_nx+x=0,\ xx-(2a_n-1)=0$

$x=b_n=2a_n-1$ (가) 2

$a_{n+1}=b_n+(b_n-a_n)=2b_n-a_n=2b_n-a_n=2(2a_n-1)-a_n=3a_n-2$

(나) 3

$S_n=\frac{1}{2}\times2\times\overline{P_nA}=a_n-1$

$S_n=\frac{1}{2}\times2\times\overline{P_nA}=3a_n-3,\ \frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{3(a_n-1)}{a_n-1}=3$으로 일정

$S_1=a_1-1=3-1=2$

S_n은 공비가 3이고 초항이 2인 등비수열, $f(n)=2\cdot3^{n-1}$

$p+q+\sum_{n=1}^{4}f(n)=2+3+\sum_{n=1}^{4}2\cdot3^{n-1}=5+\frac{2(3^4-1)}{3-1}=85$

452. ②

[풀이]

$a_{n+1}=(n+1)a_n\quad(n=1,2,3,\cdots)$

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=n+1$에 $n=1$부터 $n-1$까지 대입해서 곱해보면

$\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}=2\times3\times\cdots\times n$

$\frac{a_n}{2}=n!$

$a_n=2\times n!$

$\sum_{k=1}^{100}a_k=2(1!+2!+3!+4!+5!+\cdots+100!)$에서

$5!$이상은 10의 배수가 되어 일의 자리에 영향을 주지 않으므로

$2(1+2+6+24)=66$의 일의자리만 알아봐도 되므로 6임을 알 수 있다.

453. ⑤

[풀이]

$S_n=\frac{1}{n}(S_1+S_2+\cdots+S_{n-1})+3-a_n$ 의 양변에 n을 곱하면

$nS_n=(S_1+S_2+\cdots+S_{n-1})+3n-na_n$

$S_{n+1}=\frac{1}{n+1}(S_1+S_2+\cdots+S_{n-1}+S_n)+3-a_{n+1}$의 양변에 $n+1$을 곱하면

$(n+1)S_{n+1}=(S_1+S_2+\cdots+S_{n-1}+S_n)+3(n+1)-(n+1)a_{n+1}$

두 식을 연립하여 정리하면

$(n+1)(S_{n+1}-S_n)=3-(n+1)a_{n+1}+na_n,$

$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$이므로

$2(n+1)a_{n+1}=3+na_n$이다. 여기서 $na_n=b_n$으로 치환하면

$2b_{n+1}=3+b_n$이 되고

$b_{n+1}-3=\frac{1}{2}(b_n-3)$으로 변형하면

$\{b_n-3\}$은 첫째항은 $b_2-3\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$, 공차는 $\frac{1}{2}$인 등비수열이 된다.

$S_2=\frac{1}{2}(S_1)+3-a_2$에서 $a_2=\frac{1}{2}$

$b_2=2a_2=1$이므로 $b_2-3=-2$

$b_n-3=(-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$에서 $n=6$을 대입하면

$b_6-3=(-2)\left(\frac{1}{2}\right)^4,\ b_6=6a_6=\frac{23}{8},\ a_6=\frac{23}{48}$

454. ⑤

함수 $y=\tan2nx$ 의 주기는 $\frac{\pi}{2n}$ 이므로

$f(1)=4,\ f(2)=8,\ f(3)=12,\ \cdots$ 로

$f(n)$ 은 공차가 4 인 등차수열이다.

$\sum_{n=1}^{20}f(n)=\sum_{n=1}^{20}4n=4\times\frac{20\times21}{2}=840$ 이다.

455. ④

$S_n=2n^2+2n,\ a_n=4n$

$\sum_{k=1}^{10}a_k{}^2=\sum_{k=1}^{10}16k^2=16\frac{10\times11\times21}{6}=6160$

456. ②

$S_n=n^2+4n+3,\ a_n=2n+3\ (n\geq2)$

$\sum_{k=1}^{20}a_{2k}=\sum_{k=1}^{20}(4k+3)=2\times20\times21+60=900$

457. ②

$\sum_{k=2}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k=a_n-a_1=2n^2+1\ (n\geq2)$

$a_2-a_1=9$이므로 $a_1=-1,\ a_2=8$

$a_n=2n^2\ (n\geq2),\ a_1=-1$

따라서 $\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}2k^2-3=767$

458. ②

$a_{2n-1}=1+(n-1)\cdot 3=3n-2$

$S_{2n-1}=2^{n-1}$

$S_{2n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{n}a_{2k}$

$2^n=\frac{(n+1)(3n+2)}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_{2k}$

$\sum_{k=1}^{n}a_{2k}=2^n-\frac{(n+1)(3n+2)}{2}>0$ 인 자연수 n은 7 이상이다.

459. ⑤

$S_n=2n^2-37n$ 이므로

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2n^2-37n-2(n-1)^2+37(n-1)$

$=2n^2-37n-2n^2+4n-2+37n-37$

$=4n-39$

$S_1=a_1=-35$ 이므로 $a_n=4n-39\ (n\ge 1)$

수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 -35, 공차가 4인 등차수열이다.

ㄱ. $\sum_{k=1}^{50}(a_{2k-1})^2-\sum_{k=1}^{50}(a_{2k})^2=\sum_{k=1}^{50}(a_{2k-1}-a_{2k})(a_{2k-1}+a_{2k})$

$=-4\sum_{k=1}^{50}(a_{2k-1}+a_{2k})$

$=-4S_{100}$ (참)

ㄴ. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 -35, 공차가 4인 등차수열이므로

$a_{n+1}-a_n=4$ (참)

ㄷ. $|a_n|=|4n-39|$

$n=10$일 때 최솟값 1을 갖는다. (참)

460. ①

이 수열의 일반항 $a_n=\frac{2}{n(n+1)}$ 이다.

$\sum_{k=1}^{30}\frac{2}{k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{30}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{30}-\frac{1}{31}\right)$

$=\frac{60}{31}$

461. ③

주어진 식의 $a_n=\left\{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right\}\times(n+1)$이고

$1\times2+(1+3)\times3+(1+3+5)\times4+\ \cdots\ +(1+3+5+\ \cdots\ +19)\times11$

$=\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}\frac{k(2k)}{2}(k+1)=\sum_{k=1}^{10}k^2(k+1)=\sum_{k=1}^{10}(k^3+k)$

$=\left(\frac{10\times11}{2}\right)^2+\frac{10\times11\times21}{6}=3410$

462. ①

$\frac{a_n}{n}=2n^2+10n-\{2(n-1)^2+10(n-1)\}\quad(n\ge2)$

$=4n+8$

$\therefore a_n=4n^2+8n\ (n\ge2)$

$a_1=12$

$\therefore a_m=4n^2+8n\ (n\ge1)$

$\sum_{k=1}^{8}\frac{45}{k(k+2)}=\frac{45}{2}\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\frac{45}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)=29$

463. ②

$\sum_{k=1}^{n}\frac{3k-1}{a_k}=\frac{3}{2}n^2+\frac{7}{2}n$

$-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{3k-1}{a_k}=\frac{3}{2}n^2+\frac{7}{2}n$에서 $\frac{3n-1}{a_n}=3n+2$이고

$a_n=\frac{3n-1}{3n+2}$

$a_5a_6a_7=\frac{14}{17}\times\frac{17}{20}\times\frac{20}{23}=\frac{14}{23}$ $2p-q=32$이다.

【검수자 다른풀이】

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$\frac{3n-1}{a_n}=\frac{3n^2}{2}+\frac{7n}{2}-\left\{\frac{3}{2}(n-1)^2+\frac{7}{2}(n-1)\right\}$

$\therefore a_n=\frac{3n+2}{3n-1}$

464. ②

$n^2a_n=\sum_{k=1}^{n}k^2a_k-\sum_{k=1}^{n-1}k^2a_k=2n$

$\therefore\ a_n=\frac{2}{n}$

$\sum_{k=3}^{8}\frac{2}{k(k+1)}=2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\right)=\frac{4}{9}$

465. ①

$1-\frac{1}{k^2}=\frac{k^2-1}{k^2}=\frac{k-1}{k}\cdot\frac{k+1}{k}$

$\sum_{k=2}^{200}\log\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\log\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)+\log\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)+\ \cdots\ +\log\left(\frac{199}{200}\cdot\frac{201}{200}\right)$

$=\log\left\{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\cdot\ \cdots\ \cdot\left(\frac{199}{200}\cdot\frac{201}{200}\right)\right\}=\log\frac{201}{400}=\log\frac{p}{q}$

따라서 $p=201,\ q=400$이므로 $2q-p=2\cdot201-400=2$

466. ②

$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n^2+3n}{2}$ 일 때,

$a_1 = S_1 = 2$,

$n \geq 2$ 일 때, $a_n = S_n - S_{n-1} = n+1$

$\sum_{k=1}^{5}(2k-1)a_{2k} = \sum_{k=1}^{5}(2k-1)(2k+1)$

$= \sum_{k=1}^{5}(4k^2-1)$

$= 220-5 = 215$ 이다.

467. ④

$\sum_{k=1}^{4}(k-p)^2 = 4p^2-20p+30 = 6$ 에서

$4p^2-20p+24 = 0$ 이므로

상수 p 의 값의 곱은 $\frac{24}{4} = 6$ 이다.

468. ④

$a_1 = S_1 = 9$,

$n \geq 2$ 일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1} = (n+1)(3n+1)$

$a_k = 7a_1+2$ 이려면 $k \neq 1$ 이므로

$(k+1)(3k+1) = 65$ 에서

$3k^2+4k-64 = (k-4)(3k+16) = 0$

에서 자연수 $k = 4$ 이다.

469. $\frac{4}{49}$

$S_n = n^2+4n+2$

$S_n - S_{n-1} = (n^2+4n+2)-(n^2-2n+1+4n-4+2) = 2n+3$

$a_n = 2n+3\ (n \geq 2)$, $a_1 = 7$이므로

$a_n = \begin{cases} 7 & (n=1) \\ 2n+3 & (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots) \end{cases}$

$\sum_{k=1}^{22}\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{a_1 a_2} + \sum_{k=2}^{22}\frac{1}{a_k a_{k+1}}$

$= \frac{1}{7 \cdot 7} + \sum_{k=1}^{22}\frac{1}{(2k+3)(2k+5)}$

$= \frac{1}{49} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{22}\left(\frac{1}{2k+3} - \frac{1}{2k+5}\right)$

$= \frac{1}{49} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{49}\right)$

$\frac{1}{49} + \frac{3}{49} = \frac{4}{49}$

470. ④

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)a_k} = \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n$

$\frac{1}{(3n-2)a_n} = \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n - \frac{3}{2}(n-1)^2 - \frac{5}{2}(n-1)$

$= 3n+1$

$a_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

$\sum_{n=1}^{9}a_n = \sum_{n=1}^{9}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)$

$= \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{28}\right)\right\}$

$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{28}\right)$

$= \frac{9}{28}$

471. ②

$a_{n+1} - a_n = 2$, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3, 공차가 2인 등차수열이다.

$a_n = 2n+1$

$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{15}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \sum_{k=1}^{15}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots - \frac{1}{33}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{33}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{10}{33} = \frac{5}{33}$

472. ⑤

$a_n + b_n = -\frac{1}{2n}$, $a_n b_n = -n+1$

$\frac{2}{a_k} + \frac{2}{b_k} = 2\left(\frac{a_k + b_k}{a_k b_k}\right) = \frac{2}{2n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$

$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{59} - \frac{1}{60}\right) = \frac{59}{60}$

473. ①

$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k+1} = n(n+1)$

$b_k = \frac{a_k}{k+1}$

$S_n = \sum_{k=1}^{n}b_k = n(n+1)$

$S_n - S_{n-1} = n(n+1) - (n-1)n = 2n$

$2n = \frac{a_n}{n+1}$

$a_n = 2n^2 + 2n$

$\sum_{k=1}^{10}2k^2 + 2k = 880$

474. ⑤

$S_n = n^2 + 4n$

$S_n - S_{n-1} = n^2 + 4n - (n-1)^2 - 4(n-1) = 2n+3\ (n \geq 2)$

$S_1 = a_1$이므로 $a_n = 2n+3$

$$\sum_{k=1}^{25}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{25}\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{53}-\frac{1}{55}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{55}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{10}{55}=\frac{1}{11}$$
$p+q=12$

475. ③
$h(n)=9n(n+1)$
$$\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{9n(n+1)}=\frac{1}{9}\times\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{9}\times\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{9}\times\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)$$
$$=\frac{1}{9}\times\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{m+1}\right)$$
$$=\frac{1}{9}\times\frac{m}{m+1}=\frac{2}{19}$$
$\therefore m=18$

476. ①
$$\sum_{k=1}^{10}\frac{2k}{(2k-1)^2(2k+1)^2}=\sum_{k=1}^{10}\frac{2k}{(4k^2-4k+1)(4k^2+4k+1)}$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{10}\left\{\frac{1}{(2k-1)^2}-\frac{1}{(2k+1)^2}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{19^2}-\frac{1}{21^2}\right)=\frac{1}{4}\times\frac{440}{441}=\frac{110}{441}$$

477. 1429

[풀이] $S_n=\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n}=2n^2-1$ 이라 하면

$a_1=S_1=2\times1^2-1=1$

$S_{n-1}=\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{n-1}=2(n-1)^2-1\ (n\ge2)$에서

$S_n-S_{n-1}=\frac{a_n}{n}=4n-2$

즉, $a_n=n(4n-2)\ (n\ge2)$

따라서
$$\sum_{k=1}^{10}a_k=a_1+\sum_{k=2}^{10}k(4k-2)=1+\sum_{k=2}^{10}(4k^2-2k)$$
$$=1+\left\{\sum_{k=1}^{10}(4k^2-2k)-(4-2)\right\}=-1+4\sum_{k=1}^{10}k^2-2\sum_{k=1}^{10}k$$
$$=-1+4\times\frac{10\times11\times21}{6}-2\times\frac{10\times11}{2}=1429$$

478. ①
$S_n=n^2+n,\ S_{n-1}=n^2-n$

$S_n-S_{n-1}=2n$

$\frac{a_n}{n+1}=2n,\ a_n=2n(n+1)$
$$\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{2n(n+1)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{20}-\frac{1}{21}\right)=\frac{10}{21}$$

479. ④
[풀이]
$a_n=4+(n-1)d$라 하자
$$\sum_{k=1}^{13}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{13}\frac{1}{a_{k+1}-a_k}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$a_{k+1}-a_k=d$이므로 위의 식에 대입해 보면
$$\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{13}}-\frac{1}{a_{14}}\right)=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a_{14}}\right)$$
$$\frac{1}{d}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4+13d}\right)=\frac{13}{42}$$
$d=\frac{1}{2}$

$a_n=4+\frac{1}{2}(n-1)$에서

$a_{10}=\frac{17}{2}$

480. ④
$S_n-S_{n-1}=a_n\,(n\ge2)\,a_n=2n+2\,(n\ge2)$ $a_1=5$이다
$$\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{a_1a_2}+\sum_{k=2}^{8}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{a_1a_2}+\sum_{k=2}^{8}\frac{1}{(2k+2)(2k+4)}$$
$$=\frac{1}{30}+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{8}\left(\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{2k+4}\right)=\frac{1}{30}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{20}\right)=\frac{11}{120}$$

481. 22
풀이)
$$\sum_{k=1}^{10}\frac{k^4+2k^3+k^2+a}{k(k+1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{k^2(k^2+2k+1)+a}{k(k+1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\left\{k(k+1)+\frac{a}{k(k+1)}\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\left\{k^2+k+\frac{a}{k(k+1)}\right\}$$
$$=\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{10\times11}{2}+a\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=385+55+a\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$
$$=440+a\left(1-\frac{1}{11}\right)$$
$$=440+\frac{10a}{11}$$

$440+\frac{10a}{11}=460$이므로 $a=22$

482. $\dfrac{10}{21}$

ⅰ) $n=1$

$\dfrac{1}{2a_1}=2,\ a_1=\dfrac{1}{4}$

ⅱ) $n\geq 2$

$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(k+1)a_k}-\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{(k+1)a_k}=n^2-(n-1)^2+n-(n-1)$

$\dfrac{1}{(n+1)a_n}=2n-1+1=2n,\ a_n=\dfrac{1}{2n(n+1)}$

$n=1$일 때도 $a_n=\dfrac{1}{2n(n+1)}$이 만족한다.

따라서 $a_n=\dfrac{1}{2n(n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\ (n\geq 1)$이므로

$\sum_{n=1}^{20}a_n=\sum_{n=1}^{20}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{21}\right)=\dfrac{10}{21}$

483. $\dfrac{25}{21}$

점 $\mathrm{A}_n(n,\ 2n^2)$을 지나고 $y=2nx$에 수직인 직선은

$y=-\dfrac{1}{2n}(x-n)+2n^2$

$y=-\dfrac{1}{2n}x+\dfrac{1}{2}+2n^2$

x축과 만나는 점 $\mathrm{B}_n(4n^3+n,\ 0)$

$\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{OB}_n$의 넓이 $S_n=\dfrac{1}{2}\times(4n^3+n)\times 2n^2=4n^5+n^3$

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{6}\frac{8n^3}{S_n-5n^3}&=\sum_{n=2}^{6}\frac{8n^3}{4n^5-4n^3}\\&=\sum_{n=2}^{6}\frac{2}{n^2-1}\\&=\sum_{n=2}^{6}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\\&=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\\&=\frac{42+21-7-6}{42}\\&=\frac{25}{21}\end{aligned}$$

484. ①

$S_n=n^2$에서 $n=1$일 때,

$a_1=S_1=1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡에 $n=1$을 대입한 결과가 ㉠과 같으므로

$a_n=2n-1$

이다.

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{24}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}\\&=\sum_{k=1}^{24}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{a_{k+1}-a_k}=\frac{1}{2}\times\sum_{k=1}^{24}\left(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}\right)\\&=\frac{1}{2}\times\left(\sqrt{3}-\sqrt{1}+\sqrt{5}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{49}-\sqrt{47}\right)\\&=\frac{1}{2}\times(7-1)=3\end{aligned}$$

485. ③

$a_n=2n+2$

$\dfrac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}=\dfrac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{a_{k+1}-a_k}=\dfrac{\sqrt{2k+4}-\sqrt{2k+2}}{2}$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{30}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{30}\sqrt{2k+4}-\sqrt{2k+2}\\&=\frac{1}{2}\left(\sqrt{6}-\sqrt{4}+\sqrt{8}-\sqrt{6}+\ \cdots\ +\sqrt{64}-\sqrt{62}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\sqrt{64}-\sqrt{4}\right)=3\end{aligned}$$

486. ④

풀이) $\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)=\sqrt{n+2}$에서

$a_n+\dfrac{1}{a_n}=2\sqrt{n+2}$

$(a_n)^2-2\sqrt{n+2}\,a_n+1=0$

$a_n=\sqrt{n+2}\pm\sqrt{(n+2)-1}$

$=\sqrt{n+2}\pm\sqrt{n+1}$

따라서 $a_n=\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}$ 또는 $a_n=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$

$0<a_n<1$이므로

$a_n=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$

$\sum_{k=3}^{m}a_k=4$

$\sum_{k=3}^{m}a_k=\sum_{k=3}^{m}\left(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}\right)$

$=\left(\sqrt{5}-\sqrt{4}\right)+\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)+\cdots+\left(\sqrt{m+2}-\sqrt{m+1}\right)$

$=\left(\sqrt{m+2}-\sqrt{4}\right)=4$

$\therefore \sqrt{m+2}=6$

$\therefore m=34$

487. ②

$\sum_{k=4}^{n}\dfrac{10}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

$=10\sum_{k=4}^{n}\{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\}$

$=10\{\sqrt{n+1}-\sqrt{4}\}=40$에서

$n=35$

488. ③

a_n은 $a_1=3$이고 $d=1$인 등차수열이므로

$a_n=n+2$

$\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}}=-\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}$

$\sum_{k=1}^{24}(-\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3})=-\sqrt{3}+\sqrt{4}-\sqrt{4}+\sqrt{5}-\cdots-\sqrt{26}+\sqrt{27}$

$=2\sqrt{3}$

489. 3

[풀이] 점 $A(0,\ -1)$에서 함수 $y=\frac{1}{n}x^2$의 그래프에 그은 접선의 기울기를 $m(m>0)$이라 하면 접선의 방정식은 $y=mx-1$이다.

$y=\frac{1}{n}x^2$, $y=mx-1$을 연립하여 풀면

$\frac{1}{n}x^2=mx-1$

$\frac{1}{n}x^2-mx+1=0$ ****①

이차방정식 ①의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 하므로

$D=m^2-\frac{4}{n}=0,\ m^2=\frac{4}{n}$

$m>0$이므로 $m=\frac{2}{\sqrt{n}}$

따라서 접선의 방정식은 $y=\frac{2}{\sqrt{n}}x-1$이고

접점의 x좌표 x_n은 ①에서

$\frac{1}{n}x^2-\frac{2}{\sqrt{n}}x+1=0$

$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}x-1\right)^2=0$

$\therefore x_n=\sqrt{n}$

이때 $y_n=1$이므로 접점은 $P(\sqrt{n},1)$이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{15}\frac{y_n}{x_n+x_{n+1}}=\sum_{n=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sum_{n=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$\sum_{n=1}^{15}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{16}-\sqrt{15})$

$=-1+\sqrt{16}=-1+4=3$

490. ⑤

$\sum_{k=1}^{9}ak=\frac{2}{\sqrt{9}+\sqrt{7}}+\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{1}}$

$+\frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}+\frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{9}}$

$=1+2\{\sqrt{3}-1+\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{5}+\sqrt{9}-\sqrt{7}\}$

$=5$

491. ③

초항을 a_1라고 하면,

$|a_3|=|a_6|,\ |a+2\times2|=|a+2\times5|$

$-a_1-4=a_1+10,\quad a_1=-7$

$\sum_{k=1}^{6}(\sqrt{|a_{k+3}|}-\sqrt{|a_k|})=$

$(\sqrt{|a_4|}+\sqrt{|a_5|}+\sqrt{|a_6|}+\cdots+\sqrt{|a_9|})$

$-(\sqrt{|a_1|}+\sqrt{|a_2|}+\cdots+\sqrt{|a_6|})$

$=(\sqrt{|a_9|}+\sqrt{|a_8|}+\sqrt{|a_7|})-(\sqrt{|a_1|}+\sqrt{|a_2|}+\sqrt{|a_3|})$

$(\sqrt{|9|}+\sqrt{|7|}+\sqrt{|5|})-(\sqrt{|-7|}+\sqrt{|-5|}+\sqrt{|-3|})$

$=3-\sqrt{3},\ a=3,\ b=1,\ a+b=4$

492. ①

제 n행에 나열된 수의 합을 S_n이라 하면

$S_1=2$

$S_2=3(1+2)$

$S_3=4(1+2+3)$

$\vdots$

$S_n=(n+1)(1+2+3+\cdots+n)=\frac{n(n+1)^2}{2}=\frac{n^3+2n^2+n}{2}$

$S=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2}(k^3+2k^2+k)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{10\times11}{2}\right)^2+2\times\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{10\times11}{2}\right\}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{10\times11}{2}\times\left(\frac{10\times11}{2}+\frac{2\times21}{3}+1\right)$

$=\frac{1}{2}\times55\times70$

$\therefore\ \frac{S}{55}=35$

493. ④

직선이 원과 접하므로

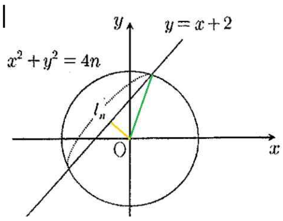
원의 중심 $(4,\ 0)$에서 직선 $ax-y=0$까지의 거리가 반지름 $\frac{2}{n}$와 같아야 한다.

$\frac{|4a|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{2}{n}$에서

$\{f(n)\}^2=a^2=\frac{1}{4n^2-1}$이다.

$$\sum_{k=1}^{10}\{f(n)\}^2=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left\{\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1}-\frac{1}{20+1}\right\}=\frac{10}{21}$$

494. $\frac{25}{32}$



원의 중심 $(0,\ 0)$에서 $x-y+2=0$까지 거리를 d라 하면

$$d=\frac{|2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

원의 반지름이 $2\sqrt{n}$ 이므로 피타고라스 정리에 따라

$\frac{l_n}{2}=\sqrt{(2\sqrt{n})^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{4n-2}$ 이므로 $l_n=2\sqrt{4n-2}$

${l_n}^2=8(2n-1)$이고 ${l_{n+1}}^2=8(2n+1)$이므로 부분분수에 따라

$$\frac{101}{{l_n}^2\cdot{l_{n+1}}^2}=\frac{101}{64(2n-1)(2n+1)}=\frac{101}{128}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{50}\frac{101}{{l_n}^2\cdot{l_{n+1}}^2}=\frac{101}{64}\sum_{n=1}^{50}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=\frac{101}{128}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{101}\right)\right\}$$
$$=\frac{101}{128}\left(1-\frac{1}{101}\right)=\frac{101}{128}\cdot\frac{100}{101}=\frac{100}{128}=\frac{25}{32}$$

495. ①

C_1 의 중심을 O_1 이라 하면 O_1 의 반지름은 1 이고,

선분 OO_1 의 길이는 4 이므로 직각삼각형 OP_1O_1 에서

선분 OP_1 의 길이는 $\sqrt{15}$

C_2 의 중심을 O_2 라 하면 O_2 의 반지름을 x 로 두면

직각삼각형 OO_2P_2 에서 피타고라스 정리에 의하여

$(\sqrt{15}-x)^2=3^2+x^2$ 에서 $x=\frac{3}{\sqrt{15}}$ 이다.

여기서 반복되는 직각삼각형들의 닮음비는 $\frac{3}{\sqrt{15}}$ 이므로

넓이의 비는 $\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$ 이 된다.

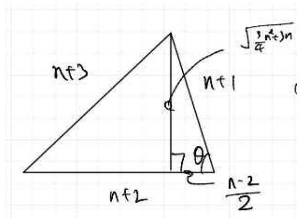
O_2 의 넓이는 $\frac{3}{5}\pi$, O_3 의 넓이는 $\left(\frac{3}{5}\right)^2\pi$, $\cdots$

$\frac{25}{24}\sum_{n=2}^{5}S_n=\frac{a}{b}\pi$ 에서

$$\frac{25}{24}\times\left(\frac{\frac{3}{5}\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^4\right)}{1-\frac{3}{5}}\right)\pi=\frac{25}{24}\times\frac{3}{2}\times\frac{544}{625}\pi=\frac{34}{25}\pi \text{ 이다.}$$

그러므로 $a+b=59$

496. ②



$(n+1)+(n+2)>n+3,\ 2n+3>n+3$

$(n+3)^2=(n+1)^2+(n+2)^2-2(n+1)(n+2)\cos\theta$

$n^2+6n+9=2n^2+6n+5-2(n+1)(n+2)\cos\theta$

$2(n+1)(n+2)\cos\theta=n^2-4=(n+2)(n-2),\quad \cos\theta=\frac{n-2}{2(n+1)}$

피타고라스 공식을 이용해 밑변을 $n=2$인 삼각형의 높이를 구하면

$$\sqrt{(n+1)^2-\frac{(n-2)}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}n^2+3n}$$

삼각형의 넓이 $S_n=\frac{1}{2}\times(n+2)\times\sqrt{\frac{3}{4}n^2+3n}$,

$a_n=\frac{4\sqrt{3}\,S_n}{3(n+2)}=\sqrt{n^2+4n}$ (앞에 구한 S_n을 대입)

$\sum_{k=1}^{n}b_k=(a_n)^2,\ b_{10}=\sum_{k=1}^{10}b_k-\sum_{k=1}^{9}b_k={a_{10}}^2-{a_9}^2=140-117=23$

497. ⑤

곡선과 직선의 교점은 $x^2=x+n$ 의 두 근과 같고

$x^2-x-n=0$ 의 두 근을 α_n , β_n 으로 두면

$\alpha_n+\beta_n=1$, $\alpha_n\times\beta_n=-n$

한편 $A(\alpha_n,\ {\alpha_n}^2)$, $B(\beta_n,\ {\beta_n}^2)$, $C(a_n,\ {a_n}^2)$ 으로 두자.

직선 A_nC_n 의 기울기는

$\frac{{a_n}^2-{\alpha_n}^2}{a_n-\alpha_n}=a_n+\alpha_n$ 이고

직선 B_nC_n 의 기울기는

$\frac{{a_n}^2-{\beta_n}^2}{a_n-\beta_n}=a_n+\beta_n$ 이다.

이때 직선 A_nB_n 은 원의 지름이고

직선 A_nC_n 과 직선 B_nC_n 은 서로 수직이므로

$(a_n+\alpha_n)\times(a_n+\beta_n)=-1$ 이고

${a_n}^2+(\alpha_n+\beta_n)a_n+\alpha_n\times\beta_n=-1$ 에서

$\alpha_n+\beta_n=1$, $\alpha_n\times\beta_n=-n$ 이므로

${a_n}^2+a_n-n=-1$ 에서

${a_n}^2+a_n-2=n-3$.

$\sum_{n=11}^{20}(a_n^2+a_n-2)=\sum_{n=11}^{20}(n-3)$

$\sum_{n=11}^{20}(n-3)=\sum_{n=1}^{20}(n-3)-\sum_{n=1}^{10}(n-3)=150-25=125$ 이다.

498. ⑤

(i) n이 홀수이면 $f(n)=1$

(ii) n이 짝수

① $n \geq 6$이면 $f(n)=2$

② $2 \leq n \leq 4$이면 $f(n)=0$

따라서 $f(2)+f(3)+\cdots+f(m)=13$이기 위한 $m=12$

499. ⑤

[풀이]

$|S_l|=|S_{l+5}|=|S_m|$를 만족하려면 공차 d가 음수여야 한다.

그러므로 $S_l=S_{l+5}>0$, $S_m<0$에서 $S_l=-S_m$이다.

$S_l=S_{l+5}$에서

$$\frac{l\{96+(l-1)d\}}{2}=\frac{(l+5)\{96+(l+4)d\}}{2}$$

$(-l-2)d=48$에서 d가 음의 정수이므로 $l+2$는 48의 약수이다.

$5<l<14$에서 $7<l+2<16$에서 $l+2=8$ 또는 $l+2=12$

(1) $l+2=8$, $d=-6$일 때,

$$S_l=S_6=\frac{6\{96+5(-6)\}}{2}=198$$

$S_m=\dfrac{m\{96+(m-1)(-6)\}}{2}=-198$을 정리하면

$m^2-17m-66=0$을 만족 하는 자연수는 없다.

(2) $l+2=12$, $d=-4$일 때,

$$S_l=S_{10}=\frac{10\{96+9(-4)\}}{2}=300$$

$S_m=\dfrac{m\{96+(m-1)(-4)\}}{2}=-300$을 정리하면

$m^2-25m-150=0$, $(m-30)(m+5)=0$에서 자연수 $m=30$

그러므로 $l+m=40$

[다른풀이]

$S_n=\dfrac{n\{2\times48+(n-1)d\}}{2}$를 n에 대해 내림차순하면

$$S_n=\frac{d}{2}n^2+\frac{96-d}{2}n$$

위의 조건을 만족하려면 이 식을 이차함수로 생각해보면 위로 볼록이어야 절댓값을 취했을 때 서로다른 세 개의 값이 같은 점을 찾아낼 수 있다.

$S_n=0$으로 만드는 근을 찾아보면

$$n=0,\ \frac{d-96}{d}$$

세 식의 값이 갖게되는 함수값을 t라 할 때 그 값을 갖게되는 첫 번째 값이 l이므로 $l+5$에서 l만큼 더해지면 $2l+5$가 $S_n=0$의 두 근임을 알 수 있다.

따라서 $2l+5=\dfrac{d-96}{d}$

식을 전개하면

$d(l+2)=-48$에서

l은 자연수이고 d는 정수이므로

$d=-4$일 때 $l=10$일 때 문제의 조건에 만족하므로

$m=30$

$l+m=40$

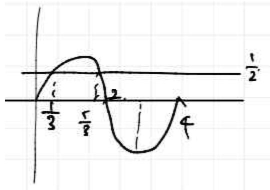
500. ⑤

$$2\sin^2\frac{\pi x}{2}<1-\sin\frac{\pi x}{2}$$

$$2\sin^2\frac{\pi x}{2}+\sin\frac{\pi x}{2}-1<0$$

$$(2\sin^2\frac{\pi x}{2}-1)(\sin\frac{\pi x}{2}+1)<0$$

$$-1<\sin\frac{\pi x}{2}<\frac{1}{2}$$



$x=1,3,5,\cdots,2n-1 \Rightarrow f(x)=-1$

$x=2,4,\cdots,2n \Rightarrow f(x)=2$

$$\sum_{k=1}^{15}4kf(4k)=4f(4)+8f(4)+12f(12)+\cdots+60f(60)$$

$$=2\times(4+8+\cdots+60)=2\times\frac{4+60}{2}\times15=960$$

$$\sum_{k=1}^{m}kf(k)\leq\sum_{k=1}^{15}4kf(4k)=960$$

$$\sum_{k=1}^{m}kf(k)=1f(1)+2f(2)+3f(3)+4f(4)+\cdots+mf(m)$$

(i) $m=2n+1$(n은 자연수라고 하자. m은 홀수)인 경우

$\{2f(2)+4f(4)+\cdots+2nf(2n)\}$

$+\{1f(1)+3f(3)+\cdots+(2n+1)f(2n+1)\}$

$=2(2+4+6+\cdots+2n)+(-1)\times\{1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)\}$

$=2\times\dfrac{n(2+2n)}{2}+(-1)\times\dfrac{(n+1)\{1+(2n+1)\}}{2}$

$=2n(n+1)-(n+1)^2$

$=(n+1)(2n-n-1)=(n+1)(n-1)=n^2-1\leq960$

$n=31$, $m=63$

(ii) $m=2n$ (n은 자연수, m은 짝수)인 경우

$\{2f(2)+\cdots+2nf(2n)\}$

$+\{1f(1)+3f(3)+\cdots+(2n-1)f(2n-1)\}$

$=2(2+4+6+\cdots+2n)+(-1)\times\{1+3+5+\cdots+(2n-1)\}$

$=2\times\dfrac{n(2+2n)}{2}-\dfrac{n\{1+(2n-1)\}}{2}$

$=2n(n+1)-n^2$

$=n^2+2n\leq960$

$n=30, m=60$

(i), (ii)에서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{M}kf(k)-M=\sum_{k=1}^{63}kf(k)-63=960-63=897$

501. ①

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d, $\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$이라 하자.

조건 (나)에서 모든 자연수 n에 대하여 $S_{10} \le S_n$이므로

$S_{10} \le S_9$에서 $a_{10} \le 0$

$S_{10} \le S_{11}$에서 $a_{11} \ge 0$

이다. $a_{10} = a_5 + 5d = -26 + 5d$, $a_{11} = a_5 + 6d = -26 + 6d$

$-26 + 5d \le 0$, $-26 + 6d \ge 0$

에서

$\frac{26}{6} \le d \le \frac{26}{5}$, $d = 5$

이고

$-26 = a_1 + 4d$, $a_1 = -46$

$\therefore a_n = 5n - 51$

$$\sum_{k=1}^{30} |a_k| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{10}| + |a_{11}| + \cdots + |a_{30}|$$
$$= -a_1 - a_2 - a_3 - \cdots - a_{10} + a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{30}$$
$$= (46 + 41 + \cdots + 1) + (4 + 9 + \cdots + 99)$$
$$= 235 + 1030 = 1265$$

502. ④

$a_n > 1$이고, $a_n + \frac{1}{a_n} = 2\sqrt{n+2}$의 양변에 a_n을 곱해서

정리하면

$(a_n)^2 - 2\sqrt{n+2}\, a_n + 1 = 0$

$a_n = \sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}$

$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$

따라서

$$\sum_{k=1}^{96} \frac{1}{a_k} = \sqrt{98} - \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

503. (1) 10 (2) $\frac{1}{39}$

(1) (가)에서의 수열의 공차를 d라 하면

$(n+1)d = 10$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = (3+d) + (3+2d) + \cdots + (3+nd)$$
$$= \frac{1}{2}n \times (6 + (n+1)d) = \frac{1}{2}n \times 16$$
$$= 8n = 80 \qquad \therefore\ n = 10$$

(2) (나)에서의 수열의 공비를 r이라 하면

$r^{m+1} = \frac{13}{3}$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{b_i} = \frac{\frac{1}{3r}\left(1 - \frac{1}{r^m}\right)}{1 - \frac{1}{r}} = \frac{1 - \frac{1}{r^m}}{3(r-1)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_i = \frac{3r(r^m - 1)}{r - 1}$$

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{b_i}}{\sum_{i=1}^{m} b_i} = \frac{1 - \frac{1}{r^m}}{3 \times 3r(r^m - 1)}$$

$$= \frac{(r^m - 1) \times \frac{1}{r^m}}{9r(r^m - 1)} = \frac{1}{9 \cdot r^{m+1}} = \frac{1}{39}$$

$\therefore\ k = \frac{1}{39}$

504. ③

$$\frac{1}{h(k)} = \frac{1}{f(g(k))}$$

$= \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{30} \frac{1}{h(k)}$$
$$= \sum_{k=1}^{30} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{30} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right)$$
$$= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{61} - \frac{1}{63} \right) \right\}$$
$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{63} \right\} = \frac{10}{63}$$

따라서 $p + q = 73$

505. ③

$$2 \times (n+1) + 4 \times (n+2) + 6 \times (n+3) + \cdots + 2 \times (n-1) \times (2n-1)$$
$$+ 2n \times 2n = \sum_{k=1}^{n} 2k(n+k)$$
$$= 2n \sum_{k=1}^{n} k + 2 \sum_{k=1}^{n} k^2$$
$$= \frac{3n^2(n+1)}{3} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$$

$= \frac{n(n+1)(5n+1)}{3}$ 이므로

$f(n) = 5n + 1$에서

$f(20) = 101$

506. ②

$$\sum_{i=1}^{n} (i^2 + i) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} \times \left(\frac{2n+1}{3} + 1 \right)$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+4)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} i(i+1)} = \frac{3\sum_{i=1}^{n} a_i}{n(n+1)(n+2)} = \frac{3b_n}{n(n+2)}$$

$$b_n = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

ㄱ. $m=1, n=2$일 때 $a_1=10, a_2=1$이면

$b_1 = \frac{10}{1+1} = 5,\ b_2 = \frac{11}{2+1} = \frac{11}{3}$

$b_1 > b_2 \Rightarrow b_m > b_n$ ....(X)

ㄴ.

$$\begin{array}{rl} & a_1+a_2+\cdots+a_n = (n+1)b_n = 3n(n+1) \\ - & a_1+a_2+\cdots+a_{n-1} = nb_{n-1} = n(3n-3) \\ \hline \end{array}$$

$a_n = 6_n$

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{6k \times 6(k+1)} = \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k(k+1)}$$

$\frac{1}{36}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{36}\left(1-\frac{1}{11}\right) = \frac{5}{198}$ ....(O)

ㄷ. $b_n = b+(n-1)d$라고 하자.

$$\begin{array}{rl} & a_1+a_2+\cdots+a_n = (n+1)b_n \\ - & a_1+a_2+\cdots+a_{n-1} = nb_{n-1} \\ \hline \end{array}$$

$a = (n+1)b_n - nb_n - 1$

$= (n+1)(b+(n-1)d) - n(b+(n-2)d)$

$= (nb+n^2d-nd+b+nd-d) - (nb-n^2d+2nd)$

$= b+d(2n^2-2n-1)$ 등차수열(x) ....(X)

(ㄷ의 다른 풀이) $b_n = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} a_i$에서 $b_n = n-1$이면

$\sum_{i=1}^{n} a_i = (n+1)^2 = n^2+2n+1$ 이 되어

제n항까지의 합에서 상수항에 0 아닌 값이 존재하므로 수열 $\{a_n\}$은 두 번째 항부터 등차수열을 이룬다. 따라서 등차수열이 아니다.

507. ⑤

$b_n = 2\sqrt{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \sqrt{2}n(n+1)$

$\log_{b_n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k{}^3\right) = 2$

$b_n{}^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k{}^3$

$b_n{}^2 = 2n^2(n+1)^2$

$a_n{}^3 = \sum_{k=1}^{n} a_k{}^3 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k{}^3 = b_n{}^2 - b_{n-1}{}^2 = 2n^2(n+1)^2 - 2(n-1)^2n^2$

$= 2n^2\{(n^2+2n+1)-(n^2-2n+1)\} = 2n^2 \cdot 4n = 8n^3$

$a_n = \sqrt[3]{a_n{}^3} = \sqrt[3]{8n^3} = 2n$

$\frac{1}{22}\sum_{k=1}^{8} a_k a_{k+1} a_{k+2} = \frac{1}{22}\sum_{k=1}^{8} 2k(2k+2)(2k+4)$

$= \frac{\pi}{4}\left(\left(\frac{8\cdot 9}{2}\right)^2 + 3\times\frac{8\cdot 9\cdot 17}{6} + 2\times\frac{8\cdot 9}{2}\right) = 720$

508. 822

10의 배수 $10 \le 10n < 100$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

12의 배수 $10 \le 12m < 100$ $(m=1, 2, 3, \cdots)$

10의 배수 + 12의 배수 $-$(10의 배수~12의 배수)

$\sum_{n=1}^{9} 10n + \sum_{m=1}^{8} 12m - 60$

$= 10\times\frac{9\times 10}{2} + 12\times\frac{8\times 9}{2} - 60 = 822$

509. ⑤

$\sum_{k=1}^{7}(|a_k|+a_k) = 205$이므로

첫항이 양수이고 공비가 음수인 등비수열이므로

$a_{2n-1} > 0,\ a_{2n} < 0$

따라서

$|a_n| + a_n = \begin{cases} 2a_n & (n\text{이 홀수}) \\ 0 & (n\text{이 짝수}) \end{cases}$

$\sum_{k=1}^{7}(|a_k|+a_k) = 2(a_1+a_3+a_5+a_7) = 2\frac{a_1(9^4-1)}{9-1} = 205$

$\therefore a_1 = \frac{205}{1640} = \frac{1}{8}$

510. ③

모든 항이 정수이면 양수인 공차 d는 자연수가 되어야 한다.

$\sum_{k=1}^{5} a_k \times \sum_{k=1}^{5} |a_k| = 255 = 3\times 5\times 17$

① $\sum_{k=1}^{5} a_k = \frac{5(2a+4d)}{2} = 5(a+2d)$이므로 5의 배수

i) $\sum_{k=1}^{5} a_k = 5$ 일 때

$a+2d = 1$이므로 $\sum_{k=1}^{5} |a_k| \ne 51$

ii) $\sum_{k=1}^{5} a_k = 15$ 일 때

$5(a+2d) = 15$

$a = 3-2d$

$a_1 = 3-2d, a_2 = 3-d, a_3 = 3, a_4 = 3+d, a_5 = 3+2d$

$d=1$ 인 경우 불가능

$d=2$ 인 경우 : $-1,1,3,5,7$ $\sum_{k=1}^{5} a_k=15$, $\sum_{k=1}^{5}|a_k|=17$ 가능

$d \geq 3$ 인 경우 : $\sum_{k=1}^{5}|a_k| \neq 17$

② $\sum_{k=1}^{14} a_k=\frac{14(-2+13\times2)}{2}=168$

511. ①

$a_n=S_n-S_{n-1}=(pn^2+qn)-\{p(n-1)^2+q(n-1)\}$

$=2pn+q-p\ \ (n \geq 2)$이고

$a_1=S_1=p+q$이므로

$a_n=2pn+q-p$

$a_{15}+a_{16}=60p+2q=130$

$30p+q=65$ (p,q는 소수)에서 $p=2,\ q=5$

$a_n=4n+3$이다.

따라서 $a_1+a_3=22$

512. ③

[풀이]

$f(x)=\frac{x+4n}{4x-2p}=\frac{\frac{p}{2}+4n}{4x-2p}+\frac{1}{4}$

$f(2)<f(6)<f(4)$ 조건을 만족하려면

점근선의 $x=\frac{p}{2}$를 기준으로 $2<\frac{p}{2}<4$를 만족하여야 하므로

p의 최솟값은 5이고 $m=5$이다.

$g(x)=\frac{2x+n}{x+q}=\frac{n-2q}{x+q}+2$에서

$g(f(6))<g(f(4))<g(f(2))$ 만족하려면

$f(2)<f(6)<f(4)$이므로

$g(x)$의 그래프의 개형이 $n-2q<0$이 되어야 $x=-q$를

기준으로 $g(f(6))<g(f(4))<g(f(2))$을 만족할 수 있으므로

$f(2)<-q<f(6)$

$f(2)=-1-2n,\ f(6)=\frac{6+4n}{14}$

$-1-2n<-q<\frac{6+4n}{14}$, q는 자연수 조건과 $n-2q<0$

조건을 다 합쳐보면

$n<2q$이고 $2n+1>q$인 자연수 q의 개수를 n에 값에 따라

찾아보자. $\frac{n}{2}<q<2n+1$에서

$n=1$일 때 $\frac{1}{2}<q<3$이므로 $q=1,2,\ a_1=2$

$n=2$일 때 $1<q<5$이므로 $q=2,3,4,\ a_2=3$

$n=3$일 때 $\frac{3}{2}<q<7$이므로 $q=2,3,4,5,6,\ a_3=5$

$n=4$일 때 $2<q<9$이므로 $q=3,4,5,6,7,8,\ a_4=6$

$a_1,a_3,\cdots,a_{21}$은 항의 개수가 12이고 공차가 3인 등차수열의

합이므로 $\frac{37\times12}{2}=222$이고

$a_2,a_4,\cdots,a_{24}$은 항의 개수가 12이고 공차가 3인 등차수열의

합이므로 $\frac{39\times12}{2}=234$

$m+\sum_{k=1}^{24} a_k=5+222+234=461$

513. ①

k행에 나열되는 수들의

합을 a_k이라 하면

$a_k=k^2(1+2+3+\cdots+k)=\frac{k^4+k^3}{2}$

$\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{k^4+k^3}{2k}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{8}(k^3+k^2)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{8\times9}{2}\right)^2+\left(\frac{8\times9\times17}{6}\right)\right\}$

$=750$

514. ④

$a_{2n-1}=3n-2,\ a_{2n}=n+2$에 대해

$\sum_{k=1}^{20}(-1)^{k+1}a_k=\sum_{k=1}^{10}(a_{2k-1}-a_{2k})=\sum_{k=1}^{10}\{(3n-2)-(n+2)\}$

$=\sum_{k=1}^{10}(2n-4)=2\cdot\frac{10\cdot11}{2}-4\cdot10=110-40=70$

$\sum_{k=1}^{19}(a_k+a_{k+1})=(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{19}+a_{20})$

$=2(a_1+a_2+\cdots+a_{20})-(a_1+a_{20})$

$=2\sum_{k=1}^{10}(a_{2k-1}+a_{2k})-(1+12)=2\sum_{k=1}^{10}\{(3k-2)+(k+2)\}-13$

$=2\sum_{k=1}^{10}4k-13=8\cdot\frac{10\cdot11}{2}-13=440-13=427$

따라서 $\sum_{k=1}^{20}(-1)^{k+1}a_k+\sum_{k=1}^{19}(a_k+a_{k+1})=70+427=497$

515. ④

$a_1=a>0,\ a_2=b<0,\ a_3=b-a<0,\ a_4=(b-a)-b=-a<0$

$a_5=-a-(b-a)=-b>0,\ a_6=-b-(-a)=-b+a>0$

$a_7=(-b+a)-(-b)=a>0\ \ a_1=a_7$이므로 주기가 6

$a_{30}=a_6=-b+a=100$

$\sum_{k=1}^{6}|a_k|=a-b-(b-a)-(-a)+(-b)+(-b+a)=4(a-b)$

따라서 $\sum_{k=1}^{20}|a_k|=3\{4\cdot(a-b)\}+(a-b)=13(a-b)=13\cdot100=1300$

516. ④

$a_n=\pm2^{n+2}$꼴이므로 (다) 조건을 만족하려면 음수인 항이 어떤

항이 되는지를 찾아내면 된다. 이 때 a_1부터 a_9까지의 합이 양수이고 a_{10}이 음수인 경우의 합이 -8임을 이용하면 음수인 항을 금방 찾을 수 있다. -88을 만드려면 -80이 더 필요한데 $+$에서 $-$로 바뀌게 될 때 예를 들어 a_1이 8에서 -8로 바뀐다고 생각하면 -16이 빠지게 되므로 -80을 만들려면 2의 거듭제곱의 합이 40이 되는 항들을 찾아내면 된다. $2^3=8$ $2^5=32$이므로 a_1과 a_3가 음수인 항이 되면 된다.

$\sum_{n=1}^{5} a_n = -8+16-32+64+128=168$이다.

517. ③

$S_m = \frac{1}{2}\log_3\left(\frac{3\times1}{2}\times\frac{3\times2}{3}\times\frac{3\times3}{4}\times\ \cdots\ \times\frac{3m}{(m+1)}\right)\le 1000$

$=\frac{1}{2}\log_3 3^m\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\ \cdots\ \times\frac{m}{(m+1)}\right)\le 1000$

$=\frac{1}{2}\log_3\frac{3^m}{m+1}\le 1000$

자연수가 되려면 $\log_3\frac{3}{m+1}$의 값은 짝수가 되어야 한다.

$m+1=3^t$꼴을 만족해야 자연수가 될 수 있으므로

$\log_3 3^{m-t}\le 2000$

$m-t\le 2000,\ \ m-t=$짝수

$m=3^t-1$ 대입하면

$3^t-1-t\le 2000,\ 3^t-1=$짝수, $\therefore\ t=$짝수

$t=2\ \Rightarrow\ m=8$

$t=4\ \Rightarrow\ m=80$

$t=6\ \Rightarrow\ m=728$

$t\ge 8$일 때는 2000이하의 자연수를 만족하지 않는다.

따라서 $8+80+728=816$

518. 3

수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

(가)에 의해 $b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{99}=50$

$\Rightarrow\ 50\log_3 a_1+(2+4+6+\cdots+98)\log_3 r=50$

$\Rightarrow\ 50\log_3 a_1+49\times50\log_3 r=50$

$\Rightarrow\ \log_3 a_1+49\log_3 r=1\cdots$㉠

(나)에 의해

$b_2+b_4+b_6+\cdots+b_{100}=150$

$\Rightarrow\ 50\log_3 a_1+(1+3+5+\cdots+99)\log_3 r=150$

$\Rightarrow\ 50\log_3 a_1+50\times50\log_3 r=150$

$\Rightarrow\ \log_3 a_1+50\log_3 r=3\cdots$㉡

㉠과 ㉡을 연립하면 $\log_3 r=2$이므로 $r=9$이다.

$\log_3 a_1=-97$이므로

$b_{51}=\log_3 a_{51}=\log_3 a_1\times r^{50}$

$=\log_3 a_1+50\log_3 r$

$=-97+100=3$이다.

519. ②

$a_{2n}=a_n+1,\ a_{2n+1}=a_n-1,\ a_1=a$

$\begin{cases}a_2=a+1\\a_3=a-1\end{cases}$

$\begin{cases}a_4=a+2\\a_5=a\\a_6=a\\a_7=a-2\end{cases}$

$\begin{cases}\underline{a_8=a+3}\\a_9=a+1\\a_{10}=a+1\\a_{11}=a-1\\a_{12}=a+1\\a_{13}=a-1\\a_{14}=a-1\\\underline{a_{15}=a-3}\end{cases}$

$\vdots$

이므로

$b_2=a+(a+1)$

$b_2=(a-1)+(a+1)$

$\begin{cases}b_4=(a-1)+(a+2)\\b_5=(a-1)+(a+2)\\b_6=(a-1)+(a+2)\end{cases}$

$b_7=(a-2)+(a+2)$

$\begin{cases}b_8=(a-2)+(a+1)\\b_9=(a-2)+(a+1)\\\vdots\\b_{14}=(a-2)+(a+1)\end{cases}$

$\vdots$

$\sum_{k=2}^{127} b_n = b_2+b_3+3\times b_4+b_7+7\times b_8+b_{15}+15\times b_{16}+\cdots+63b_{64}+b_{127}$

$=252a+120=246$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

520. ⑤

$i\ne j$인 두 자연수 $i,\ j$에 대하여

$S_i-S_j=pi^2-18i+q-pj^2+18j-q$

$=p(i-j)(i+j)-18(i-j)$

$=(i-j)\{p(i+j)-18\}\ne 0$

$i+j\ne\frac{18}{p}$

$p=1$일 때 $i+j=18$을 만족하는 서로 다른 두 자연수가 존재한다.

$p=2$일 때 $i+j=9$를 만족하는 서로 다른 두 자연수가 존재한다.

$p=3$일 때 $i+j=6$을 만족하는 서로 다른 두 자연수가 존재한다.

$p=4$일 때 $i+j=\dfrac{9}{2}$를 만족하는 서로 다른 두 자연수가 존재하지 않으므로 p의 최솟값 $p_1=4$

$S_n=4n^2-18n+q$

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=4n^2-18n+q-4(n-1)^2+18(n-1)-q$

$=4n^2-18n-4n^2+8n-4+18n-18$

$=8n-22$

$a_n=\begin{cases}8n-22 & (n\ge 2)\\ q-14 & (n=1)\end{cases}$

$a_2=-6,\ a_3=2,\ a_4=10,\ a_5=18,\ \cdots$

$|a_k|<a_1$를 만족하는 자연수 k의 개수가 3개이므로

$10<q-14\le 18$

$24<q\le 32$

따라서 만족하는 모든 q의 값의 합은

$25+26+27+\cdots+32=\dfrac{8(25+32)}{2}=228$

521. ③

$\dfrac{S_{n+1}}{S_n}=\dfrac{2n}{n+1}$ $S_1=4$ $S_9=\dfrac{S_2}{S_1}\times\cdots\times\dfrac{S_9}{S_8}=2^8\times4\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{1024}{9}$

$S_8=\dfrac{S_2}{S_1}\times\cdots\times\dfrac{S_8}{S_7}=2^7\times4\times\dfrac{1}{8}=64$

$a_9=S_9-S_8=\dfrac{448}{9}$ $p+q=457$

【검수자 다른풀이】

① $\dfrac{S_2}{S_1}\cdot\dfrac{S_3}{S_2}\cdot\dfrac{S_4}{S_3}\cdot\dfrac{S_5}{S_4}\cdot\dfrac{S_6}{S_5}\cdot\dfrac{S_7}{S_6}\cdot\dfrac{S_8}{S_7}=\dfrac{2}{2}\dfrac{4}{3}\dfrac{6}{4}\dfrac{8}{5}\dfrac{10}{6}\dfrac{12}{7}$

$\therefore S_8=64$

②

$\dfrac{S_2}{S_1}\cdot\dfrac{S_3}{S_2}\cdot\dfrac{S_4}{S_3}\cdot\dfrac{S_5}{S_4}\cdot\dfrac{S_6}{S_5}\cdot\dfrac{S_7}{S_6}\cdot\dfrac{S_8}{S_7}\cdot\dfrac{S_9}{S_8}=\dfrac{2}{2}\dfrac{4}{3}\dfrac{6}{4}\dfrac{8}{5}\dfrac{10}{6}\dfrac{12}{7}\dfrac{14}{8}$

$\therefore S_9=\dfrac{1024}{9}$

522. ②

풀이)

$a_k=\begin{cases}0 & \left(\cos^2\dfrac{n}{6}\pi<\dfrac{1}{2}\right)\\ 1 & \left(\dfrac{1}{2}\le\cos^2\dfrac{n}{6}\pi\right)\end{cases}$ 에서

$n=1$일 때, $\cos^2\dfrac{\pi}{6}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$이므로 $a_1=1$

$n=2$일 때, $\cos^2\dfrac{\pi}{3}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$이므로 $a_2=0$

$n=3$일 때, $\cos^2\dfrac{\pi}{2}=0^2=0$이므로 $a_3=0$

$n=4$일 때, $\cos^2\dfrac{2\pi}{3}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$이므로 $a_4=0$

$n=5$일 때, $\cos^2\dfrac{5\pi}{6}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$이므로 $a_5=1$

$n=6$일 때, $\cos^2\pi=(-1)^2=1$이므로 $a_6=1$

$\vdots$

$\cos^2(2m\pi+\theta)=\cos^2\theta$($m$은 정수)이므로 자연수 k에 대하여

$n=12k+1$일 때, $a_{12k+1}=1$

$n=12k+2$일 때, $a_{12k+2}=0$

$n=12k+3$일 때, $a_{12k+3}=0$

$n=12k+4$일 때, $a_{12k+4}=0$

$n=12k+5$일 때, $a_{12k+5}=1$

$n=12k+6$일 때, $a_{12k+6}=1$

$\vdots$

에서 나머지는 반대로 되어 있으므로

1 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 1 이 반복된다.

$\sum_{k=1}^{100}a_k=\sum_{k=1}^{96}a_k+a_{97}+a_{98}+a_{99}+a_{100}$

$=16\times(3)+1+0+0+0$

$=49$

523. ③

조건 (나)에서 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5\ge 0$인 경우

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2(a_1+a_2+\cdots+a_{10})$

$a_1+a_2+\cdots+a_5+2(a_6+a_7+\cdots+a_{10})=0$ …… ㉠

에서 공차가 양수이고 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5\ge 0$이므로

$a_6+\cdots+a_{10}>0$이다. 따라서 ㉠은 모순이다. 따라서

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5<0$

이다.

$-(a_1+\cdots a_5)=2(a_1+\cdots a_{10})$

$-\dfrac{(2a+4d)\times5}{2}=2\times\dfrac{(2a+9d)\times10}{2}$

$\therefore a=-4d$

$a_n=dn-5d$에서 $\sum_{k=1}^{n}a_k$의 최솟값은 $n=4$또는 $n=5$일 때 최소이다.

$-4d-3d-2d-d=-10d=-20$

$\therefore d=2,\ a=-8,\ a_n=2n-10$

$S_n=n^2-9n$에서

$|S_1|=|S_8|=8$

$|S_2|=|S_7|=14$

$|S_3|=|S_6|=18$

$|S_4|=|S_5|=20$

$S_9=0,\ S_{10}=10,\ S_{11}=22,\ \cdots$

따라서 모든 t의 값의 합은 $8+14+18+20=60$

524. ②

$a_n=b+(n-1)(-4)$

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|=|S_n|=\left|\frac{n\{2b+(n-1)(-4)\}}{2}\right|\geq 15$$

$a_1=S_1=b\geq 15$

한편, b가 짝수이면 $n=\dfrac{b+2}{2}$ 는 자연수이므로 $S_n=0$ 이 존재한다.

따라서 b는 홀수이고 $b=2k-1$ (k는 자연수)이라 하자.

(i) $n=k$ 일 때,

$|S_n|=|k(b+2-2k)|=k\geq 15$

(ii) $n=k+1$ 일 때,

$|S_n|=|(k+1)(b-2k)|=|(k+1)(-1)|=k+1\geq 15$

$\therefore\ k\geq 14$

따라서 $k\geq 15$이고 이때 $b=2k-1$ 이므로

수열 $\{b_m\}$은 $29,31,33,35,\cdots$

$$\sum_{m=1}^{15}b_m=29+31+33+\cdots+57=\frac{15(29+57)}{2}=645$$

525. ④

풀이)

$\{a_n\}$ 첫째항이 b, 공차가 -4인 등차수열 이므로

$a_n=b-4(n-1)$,

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n\{2b-4(n-1)\}}{2}=b(b+2-2n)$ 이다.

모든 자연수 n에 대하여 $|b(b+2-2n)|\geq 15$을 만족시키려면

$b=1$ 일 때,

$|(3-2n)|\geq 15,\ n=1$을 대입하면 성립하지 않는다.

$b=2$ 일 때,

$|2(4-2n)|\geq 15,\ n=1$을 대입하면 성립하지 않는다.

$b=3$ 일 때,

$|3(5-2n)|\geq 15,\ n=1$을 대입하면 성립하지 않는다.

$b=4$ 일 때,

$|4(5-2n)|\geq 15,\ n=1$을 대입하면 성립하지 않는다.

$b=4$ 일 때,

$|4(5-2n)|\geq 15,\ n=1$을 대입하면 성립하지 않는다.

$b=5$ 일 때,

$|5(7-2n)|\geq 15,\ n=1$을 대입하면 성립하나 $n=3$을 대입하면 성립하지 않는다.

⋮

$b=28$ 일 때, $|28(30-2n)|\geq 15,\ n=15$를 대입하면 모든 자연수 n에 대하여 성립하지 않는다.

$b=29$ 일 때, $|29(31-2n)|\geq 15$, 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

$b=30$ 일 때, $|30(32-2n)|\geq 15,\ n=16$를 대입하면 모든 자연수 n에 대하여 성립하지 않는다.

$b=31$ 일 때, $|31(33-2n)|\geq 15$, 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

⋮

그러므로 $b=29$부터 홀수인 수만 성립한다.

$\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k\right|\geq 15$를 만족시키는 모든 b의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, m번째 수를 b_m이라하면 $b_1=29$, $b_2=31,\ \cdots$ 이므로

$\displaystyle\sum_{m=1}^{10}b_m$의 값은 공차가 2인 등차수열이므로

$\dfrac{10(2\times 29+2\times 9)}{2}=380$ 이다.

526. ①

$S_1=a_1=b\geq 20$ 이다.

첫째항은 b (b는 자연수)이고 공차가 -4 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 n 번째 항까지의 합은

$$S_n=\frac{n\{2b+(n-1)(-4)\}}{2}=-2n\left(n-\frac{b+2}{2}\right)$$

b가 짝수이면 $\dfrac{b+2}{2}$ 가 자연수이므로

$S_{\frac{b+2}{2}}=0$ 으로 문제의 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 자연수 b는 20 이상의 홀수이다.

모든 자연수 n 에 대하여 $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k\right|\geq 20$ 을 만족시키려면

모든 자연수 n 에 대하여 $S_n\geq 20$ 또는 $S_n\leq -20$ 이어야 한다.

$|S_n|=\left|-2n\left(n-\dfrac{b+2}{2}\right)\right|$ 의 절댓값이 가장 작은 순간은

$\frac{b+2}{2}$ 근방에서 발생하며, 자연수 b 가 홀수이므로

$S_{\frac{b+1}{2}} = (-2)\times\frac{b+1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{b+1}{2} \geq 20$ 에서

$b \geq 39 \cdots$ ①

$S_{\frac{b+3}{2}} = (-2)\times\frac{b+3}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{b+3}{2} \leq -20$ 에서

$b \geq 37 \cdots$ ②

①,②에서 자연수 b 는 39 이상의 홀수이다.

따라서 $b_m = 39+2(m-1) = 2m+37$

$\sum_{m=1}^{10} b_m = \sum_{m=1}^{10}(2m+37) = 480$ 이다.

527. ③

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8$의 합은

첫째항이 $2+4+6+\cdots+16=72$,

마지막 항이 $36+38+40+\cdots+50=344$

공차가 2인 등차수열이므로

집합 A의 원소의 개수는 이 수열의 항수와 같다.

따라서 원소의 개수는

$\frac{344-72}{2}+1=137$

528. ①

풀이)

(i) $n=1$일 때,

$-x+\frac{3}{2}<y<2+\frac{1}{x-2}$ 이고 이를 만족시키는 1이하의 자연수 x, y는 존재하지 않는다.

따라서 $A_1=0$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$x=1$일 때, $n-\frac{1}{n+1}<y<n+1-\frac{1}{n}$ 이므로 조건을 만족시키는 순서쌍 (x,y)는 $(1,n)$

$x=2$일 때, $n-1-\frac{1}{n+1}<y<n+1-\frac{1}{n-1}$ 이므로 조건을 만족시키는 순서쌍 (x,y)는 $(2,n-1),(2,n)$

$x=3$일 때, $n-2-\frac{1}{n+1}<y<n+1-\frac{1}{n-1}$ 이므로 조건을 만족시키는 순서쌍 (x,y)는 $(3,n-2),(3,n-1),(3,n)$

⋮

$x=n-2$일 때, $3-\frac{1}{n+1}<y<n+\frac{2}{3}$ 이므로 조건을 만족시키는 순서쌍 (x,y)는

$(n-2,3),(n-2,4),(n-2,5),\cdots,(n-2,n)$

$x=n-1$일 때, $2-\frac{1}{n+1}<y<n+\frac{2}{3}$ 이므로 조건을 만족시키는 순서쌍 (x,y)는

$(n-2,3),(n-2,4),(n-2,5),\cdots,(n-1,n)$

$x=n$일 때, $1-\frac{1}{n+1}<y<n$이므로 조건을 만족시키는 순서쌍 (x,y)는 $(n,1),(n,2),(n,3),\cdots,(n,n-1)$

따라서

$A_n = 1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+(n-1)$

$=\frac{(n-1)n}{2}+(n-1)$

$=\frac{n^2+n-2}{2}(n\geq 2)$

이때 $A_1=0$이 성립하므로 $A_n=\frac{n^2+n-2}{2}(n\geq 1)$

$\sum_{n=1}^{15}A_n=\sum_{n=1}^{15}\frac{n^2+n-2}{2}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{15\times16\times31}{6}+\frac{15\times16}{2}-30\right)$

$=\frac{1}{2}(1240+120-30)$

$=665$

529. 3

$\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+4n+3$

$\sum_{k=1}^{n-1}a_k=(n-1)^2+4(n-1)+3$에서

두 식을 빼서 정리하면

$a_n=2n+3\ (n\geq 2),\quad a_1=8$

$\sum_{k=1}^{30}ka_{3k-2}$

$=\sum_{k=1}^{30}k(6k-1)-5+8$

$=\sum_{k=1}^{30}(6k^2-k)+3$

$=30\times31\times61-15\times31+3$

$=31\times(30\times61-15)+3$

$=31\times15\times(122-1)+3$

$=31\times15\times11^2+3$

따라서 11로 나눈 나머지는 3이다.

530. ⑤

공차 $d>1$이고 $a_2+a_4=2$이므로 $a_2<0$

$a_2+a_4=a+d+a+3d=2$에서 $a_3=a+2d=1$

$a_n=a+(n-1)d=1-2d+(n-1)d=dn-3d+1$

준식 $=\sum_{k=1}^{5}(a_k^{\ 2}-12|a_k|)$

$=\sum_{k=1}^{5}(dk-3d+1)^2-12\sum_{k=1}^{5}|dk-3d+1|$

$=\{(2d-1)^2+(d-1)^2+1+(d+1)^2+(2d+1)^2\}-12(1+6d)$

$=\{5+10d^2\}-72d-12$

$=10d^2-72d-7=10\left(d-\frac{18}{5}\right)^2+\cdots$

따라서 주어진 식이 최소가 되는 공차 $d=\frac{18}{5}$

531. ⑤

n이 홀수이면 직사각형을 만들 수가 없으므로 n은 짝수이다.
또한 n이 짝수일 때 네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형이 직사각형이 되려면 네 점 중에서 두 점이 각각 지름의 양 끝점이 되어야 한다.
따라서

$$S_{2k+2}={}_{k+1}\mathrm{C}_2=\frac{k(k+1)}{2}\ \ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$\sum_{n=4}^{26}S_n=\sum_{k=1}^{12}S_{2k+2}=\frac{1}{2}\times\sum_{k=1}^{12}(k^2+k)$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{12\times13\times25}{6}+\frac{12\times13}{2}\right)=364$

532. ①

두 함수 $y=\cos x$, $y=\frac{1}{(2n-1)\pi}x\ (n=1,2,3,\cdots)$ 의 그래프의 양수에서의 교점의 개수가 $f(n)$ 이므로

$f(1)=1$, $f(2)=3$, $f(3)=5$, $\cdots$, $f(k)=2k-1$, $\cdots$

$\sum_{k=1}^{10}\frac{\{f(k)+1\}^2}{11}=\sum_{k=1}^{10}\frac{(2k)^2}{11}=\frac{4}{11}\times\frac{10\times11\times21}{6}=140$ 이다.

533. (1) $a_1=2$, $a_2=3$, $a_3=6$, $a_4=7$ (2) 10050

(1)

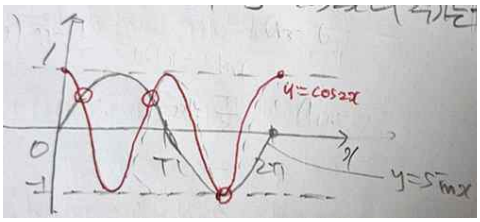
(i) $n=1$ 일 때

$\cos x=\sin x$ 의 교점의 개수는 2개다.

$\therefore\ a_1=2$

(ii) $n=2$ 일 때

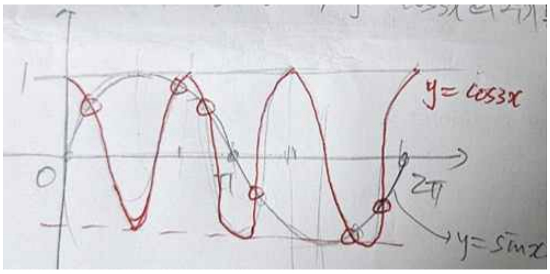
$\cos 2x=\sin x$ 에서 $y=\cos 2x$ 의 주기는 π 이고 그래프에서 두 곡선의 교점의 개수는 3개다.



$\therefore\ a_2=3$

(ii) $n=3$ 일 때

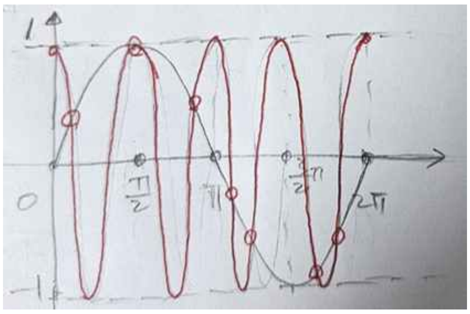
$\cos 3x=\sin x$ 에서 $y=\cos 3x$ 의 주기는 $\frac{2}{3}\pi$ 이고 그래프에서 두 곡선의 교점의 개수는 6개다.



$\therefore\ a_3=6$

(ii) $n=4$ 일 때

$\cos 4x=\sin x$ 에서 $y=\cos 4x$ 의 주기는 $\frac{1}{2}\pi$ 이고 그래프에서 두 곡선의 교점의 개수는 7개다.



$\therefore\ a_4=7$

(2)

(i) n 이 홀수일 때

$a_1=2$, $a_3=6$, $a_5=10$, $\cdots$

$y=\cos nx$ 의 대칭성을 이용하여 규칙을 찾으면

$a_n=2n$

따라서 $a_{2k-1}=4k-2$ (k는 자연수)

(ii) n 이 짝수일 때

$a_2=3$, $a_4=7$, $a_6=11$, $\cdots$

$y=\cos nx$ 의 그래프는 $x=\frac{\pi}{2}$ 와 $x=\frac{3}{2}\pi$ 에서 n 의 값에 따라 번 갈아가면서 $y=\sin x$ 와 접하게 된다. 즉 그 점에서 교점이 1 개씩 생기고 전체에서는 1 개가 줄어든다.

따라서 $a_n=2n-1$

$a_{2k}=4k-1$

그러므로 $S_{100}=\sum_{k=1}^{50}(a_{2k-1}+a_{2k})=\sum_{k=1}^{50}(8k-3)=10050$

534. ①

a_n은 등차수열이므로 $a_1=10$, $d=a_2-a_1=-3$이다.

따라서 $a_6=10+5\times(-3)=-5$

535. ⑤

a_n 이 등비중항을 만족하므로 등비수열이다.

$a_n=6\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 6 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{9}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}$$

536. ④

$a_3 = \frac{4}{3}$

537. ⑤

$a_1 + a_2 = 2a_1 - 1,\ a_3 + a_4 = 2a_2 - 1$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2(a_1 + a_2) - 2 = 2(2a_1 - 1) - 2$

$= 4a_1 - 4 = 12 - 4 = 8$

538. ⑤

주어진 관계식 $a_{n+1} = a_n + 2n\ (n = 1,2,3\cdots)$ 에 의하여

$a_3 = a_2 + 4$

$a_4 = a_3 + 6$

$a_5 = a_4 + 8$

$a_6 = a_5 + 10$

$a_7 = a_6 + 12$

변변 더해서 정리하면

$a_7 = a_2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12$ 이므로 $a_7 - a_2 = 40$ 이다.

539. ②

$a_2 = \frac{1}{3}21 + 2 = 9,\ a_3 = \frac{1}{3}9 + 2 = 5,\ a_3 = \frac{1}{3}5 + 2 = \frac{11}{3}$

540. ②

$a_{n+2} + a_n = 2a_{n+1}$이므로 a_n은 등차수열

$a_{n+4} - a_n = 16$

$\therefore d = \frac{16}{4} = 4$

$\therefore a_{15} = 3 + 14 \times 4 = 59$

541. ⑤

$a_{n+1} = \frac{5}{a_n},\ a_2 = 1,\ a_3 = 5,\ a_4 = 1,\ a_5 = 5,\ a_6 = 1,\ a_7 = 5$

542. ③

$a_{n+1} = a_n + 2(n+2)$

$\therefore\ f(n) = 2n + 4$

$f(10) = 24$

543. ⑤

$a_1 = 2000 \times \frac{3}{4} + 200 = 1700$

$\therefore a_2 = 1700 \times \frac{3}{4} \times 200 = 1475$

544. ⑤

(우변)$= \left\{\frac{1}{2} \times 1 \times 2\right\}^2 = 1$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \left\{\frac{1}{2}k(k+1)\right\}^2$의 양변에 $\boxed{(k+1)^3}$을 더하면

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + \boxed{(k+1)^3}$

$= \left\{\frac{1}{2}k(k+1)\right\}^2 + \boxed{(k+1)^3}$

$= \boxed{\left\{\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\right\}^2}$

따라서 $p = 1,\ f(k) = (k+1)^3,\ g(k) = \left\{\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\right\}^2$

$p + f(1) + g(1) = 9$

545. ④

(i) $n = 1$일 때, (좌변)$= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1}}{\sqrt{2}}$, (우변)$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n = m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{m+1}}$$

이다. $n = m+1$일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}} + \frac{\sqrt{m+2} - \sqrt{m+1}}{\sqrt{\boxed{(m+1)(m+2)}}}$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{m+1}} + \frac{\sqrt{m+2} - \sqrt{m+1}}{\sqrt{\boxed{(m+1)(m+2)}}}$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{m+1}} + \frac{1}{\sqrt{m+1}} - \frac{1}{\sqrt{m+2}}$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{\boxed{m+2}}}$$

이다. 따라서 $n = m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

이다. 따라서 $f(m) = (m+1)(m+2),\ g(m) = m+2$

$\therefore f(1) + g(2) = 10$

546. ④

$f(k),\ g(k),\ h(k)$라 할 때,

$\frac{g(11) \times h(11)}{f(11)}$

$f(k) = \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$

$g(k) = \frac{k}{2k+1}$

$h(k) = \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}$
이므로

$\frac{g(11)\times h(11)}{f(11)} = \frac{\frac{11}{23}\times\frac{12}{25}}{\frac{1}{23\times 25}} = 11\times 12 = 132$

547. ②
$9\times 3^{2k}-1 = 9(8m+1)-1 = 8(9m+1)$
가:8

548. ①
[풀이]
$a_n + a_{n+1} = A_n$이라 하자
$A_{n+1} = a_{n+1} + a_{n+2}$
두 식을 빼면
$a_{n+2} - a_n = 3$
$a_1, a_3, \cdots$은 공차가 3인 등차수열이므로
$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{19} = \frac{10(2+9\times 3)}{2} = 145$
$a_2, a_4, \cdots$마찬가지로 공차가 3이고 $a_{20} = 15$이므로
일반항을 찾아보면
$a_{2n} = a_2 + (n-1)3$
$n=10$을 대입해 보면
$a_{20} = a_2 + 27 = 15$에서
$a_2 = -12$
$a_2 + a_4 + \cdots + a_{20} = \frac{10(-24+9\times 3)}{2} = 15$
$\sum_{k=1}^{20} a_k = 145 + 15 = 160$

549. ①
$(a_{n+1})^3 - (a_n)^3 = 3a_{n+1}a_n(a_{n+1} - a_n) - 27$
$(a_{n+1})^3 - 3(a_{n+1})^2 a_n + 3a_{n+1}(a_n)^2 - (a_n)^3 = -27$
$(a_{n+1} - a_n)^3 = (-3)^3$
$a_{n+1} - a_n = -3$
a_n은 첫째항이 50, 공차가 -3인 등차수열
$a_{16} = 50 + (16-1)\times(-3) = 5$

550. ②
$\{a_{n+1}\}^2 = a_{n+2}\cdot a_n$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

$\log_3 a_5 = \frac{4}{3}$, $a_5 = 3^{\frac{4}{3}} = 3r^4$

$\therefore r^4 = 3^{\frac{1}{3}}$

$\therefore a_{13} = 3\times r^{12} = 3\times(r^4)^3 = 3\times\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 9$

551. ④

$a_2 = a_1 + 2\times 1 - 1$
$a_3 = a_2 + 2\times 2 - 1$
$\vdots$
$a_n = a_{n-1} + 2(n-1) - 1$
각 변을 더하여 정리하면
$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$
$= n^2 - 2n + 2$
$a_5 = 17$

552. ③
$a_1 = -1$, $a_{n+1} = (n+1)a_n + 3$ 에서
$a_2 = 2\times(-1) + 3 = 1$
$a_3 = 3\times 1 + 3 = 6$
$a_4 = 4\times 6 + 3 = 27$이므로
$a_3 + a_4 = 33$

553. ③
$a_1 = 2, a_2 = 8$ 이고 모든 자연수 n 에 대하여
$a_{n+2} = \frac{3n+4}{3n-2}a_n$ 에서
$a_8 = \frac{22}{16}\times a_6 = \frac{22}{16}\times\frac{16}{10}\times a_4 = \frac{22}{16}\times\frac{16}{10}\times\frac{10}{4}\times a_2 = 44$
$a_7 = \frac{19}{13}\times a_5 = \frac{19}{13}\times\frac{13}{7}\times a_3 = \frac{19}{13}\times\frac{13}{7}\times\frac{7}{1}\times a_1 = 38$
이므로 $\frac{a_8}{a_7} = \frac{22}{19}$ 이다.

554. $a_6 = 3$
$a_n + a_{n+1} = 2n - 1$
① $n=3$
$a_3 + a_4 = 5$
$a_3 - a_4 = 3$
$\therefore a_3 = 4, a_4 = 1$
② $n=4$
$a_4 + a_5 = 7, a_5 = 6$
③ $n=5$
$a_5 + a_6 = 9$
$\therefore a_6 = 3$

555. ①
(나)조건에 의해 $a_k - a_{k+1} = 12$(단, 어떤 k에 대해서 성립)
(가)조건에 의해 $a_k + a_{k+1} = 4k$

(가)와 (나)를 연립하면 $2a_k=4k+12$이므로 $a_k=2k+6$

$a_{k+1}=4k-(2k+6)=2k-6$의 결과식에서

k는 홀수이거나 짝수이다.

i) k가 홀수이면

$k=2m-1$에서 $a_{2m-1}=4m+4$

즉 홀수항끼리는 4씩 증가함을 알 수 있다.

그런데 (가)조건에 의해 홀수항 간이나 짝수항 간에는

공차가 4인 등차수열이 형성되므로

a_5의 값은 $m=3$일 때 16이 된다.

또한 m이 3이 아니여도 a_5는 16이 될 수 밖에 없다.

ii) k가 짝수이면

$k=2m$에서 $a_{2m}=4m+6$

어떤 짝수항은 10에서 4씩 증가하는 값을 갖게 되고

(가)조건에 의해 모든 짝수항은 공차가 4인 등차수열이다.

그러므로 $m=2$일 때 $a_4=14$이고

(가)조건에서 $a_4+a_5=16$이므로 $a_5=2$이다.

이상 a_5가 될 수 있는 모든 수의 합은 $16+2=18$이다.

556. 381

[풀이]

$a_{21}=a_{10}+2=(a_5-2)+2=a_5=a_2+2=(a_1-2)+2=a_1$,

$\therefore\ a_1=3$

$a_{2n}+a_{2n+1}=(a_n-2)+(a_n+2)=2a_n$에서

$$\sum_{k=2}^{2n+1}a_k=\sum_{k=1}^{n}(a_{2k}+a_{2k+1})=2\sum_{k=1}^{n}a_k$$

$a_2+a_3=2a_1=6$,

$$\sum_{k=2}^{7}a_k=2\sum_{k=1}^{3}a_k=2\left(a_1+\sum_{k=2}^{3}a_k\right)=2(3+6)=18$$

$$\sum_{k=2}^{15}a_k=2\sum_{k=1}^{7}a_k=2\left(a_1+\sum_{k=2}^{7}a_k\right)=2(3+18)=42$$

$$\sum_{k=2}^{31}a_k=2\sum_{k=1}^{15}a_k=2\left(a_1+\sum_{k=2}^{15}a_k\right)=2(3+42)=90$$

$$\sum_{k=2}^{63}a_k=2\sum_{k=1}^{31}a_k=2\left(a_1+\sum_{k=2}^{31}a_k\right)=2(3+90)=186$$

$$\sum_{k=2}^{127}a_k=2\sum_{k=1}^{63}a_k=2\left(a_1+\sum_{k=2}^{63}a_k\right)=2(3+186)=378$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{137}a_k=a_1+\sum_{k=2}^{137}a_k=3+378=381$$

557. ①

$$\begin{cases}a_{3n-1}=2a_n+1\\ a_{3n}=-a_n+2\\ a_{3n+1}=a_n+1\end{cases}$$

$a_1=1, a_2=3, a_3=1, a_4=2$

$a_{3n-1}+a_{3n}+a_{3n+1}=2a_n+4$

$$\sum_{k=2}^{13}a_k=(a_2+a_3+a_4)+(a_5+a_6+a_7)+\cdots+(a_{11}+a_{12}+a_{13})$$

$=(2a_1+4)+(2a_2+4)+(2a_3+4)+(2a_4+4)$

$=2(a_1+a_2+a_3+a_4)+16$

$=30$

558. ②

$a_3>0$일 때, $2=a_3-6+1,\ a_3=7$

$a_3\le 0$일 때, $2=a_3+6-1,\ a_3=-3$

1) $a_3=7$인 경우

$a_2>0$일 때, $7=a_2-4+1,\ a_2=10$

$a_2\le 0$일 때, $7=a_2+4-1,\ a_2=4$ ($a_2\le 0$이므로 모순)

2) $a_3=-3$인 경우

$a_2>0$일 때, $-3=a_2-4+1,\ a_2=0$ ($a_2>0$이므로 모순)

$a_2\le 0$일 때, $-3=a_2+4-1,\ a_2=-6$

따라서 모든 a_2의 값은 $10,\ -6$이고 그 합은 4이다.

559. ④

$0<a_1<2$ 이므로 $a_2=a_1-2<0,\ a_3=-a_2=2-a_1$

$a_3>0$ 이므로 $a_4=a_3-2=-a_1<0$

$\therefore a_5=-a_4=a_1>0$

$\therefore a_1=a_5$ $\qquad\therefore a_n=a_{n+4}$

$a_1+a_2+a_3+a_4=a_1+(a_1-2)+(2-a_1)-a_1=0$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{30}ak=a_1+a_2=a_1+a_1-2=\frac{3}{2}$$

$$\therefore a_1=\frac{7}{4}$$

560. ③

[풀이]

주어진 조건에 맞게 직접 구해보면

$a_1=\frac{2}{5}$

$a_2=\frac{4}{5}$

$a_3=\frac{8}{5}$

$a_4=\frac{2}{5}$

주기가 3임을 알 수 있다.

$a_4+a_{17}=a_1+a_2=\frac{2}{5}+\frac{4}{5}=\frac{8}{5}$

561. ①

a_6부터 a_1까지 역으로 계산해봤을 때 각 항은 다음과 같다.

a_1 9

a_2 $-\frac{1}{9}$

a_3 $\frac{1}{3}$

a_4 -3

a_5 9

a_6 $-\frac{1}{9}$

따라서 $9,\ -\frac{1}{9},\ \frac{1}{3},\ -3$ 의 네 개의 수가 반복된다.

$\sum_{k=1}^{35} a_k = 9\left(9-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}-3\right)-(-3)=59$

562. ②

$a_1=7$

$a_2=9$

$a_3=3$

$a_4=1$이므로 네 번마다 순환한다.

$\therefore\ a_{2023}=a_3=3$

563. ③

$a_n=2\cos\frac{n\pi}{6}$

$a_1=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$a_2=2\times\frac{1}{2}=1$

$a_3=2\times 0=0$

$a_4=2\times-\frac{1}{2}=-1$

$a_5=2\times-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$

$a_6=2\times-1=-2$

$a_7=2\times-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$

⋮

a_n은 $\cos\frac{n\pi}{6}$의 값에 따라 변하고 주기 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}}=12$

a_n수열 주기 12 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{12}=0$

$S_{30}=S_6=-2$

$a_4+S_{30}=-3$

564. ④

$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$

$(S_{n+1}-S_n)^2=3(S_{n+1}+S_n)$

${a_{n+1}}^2=3(a_{n+1}+2S_n)$

${a_{n+1}}^2-3a_{n+1}=6S_n$

$n\ge 2$일 때

$6S_n-6S_{n-1}=6a_n={a_{n+1}}^2-3a_{n+1}-({a_n}^2-3a_n)$

${a_{n+1}}^2-3a_{n+1}={a_n}^2+3a_n$

${a_{n+1}}^2-{a_n}^2=3(a_{n+1}+a_n)$

$a_{n+1}-a_n=3$ ($\because$ 수열 $\{a_n\}$은 모든 항이 양수, $a_{n+1}+a_n\neq 0$)

$a_1=S_1=9$

${a_2}^2-3a_2=6S_1=54$

${a_2}^2-3a_2-54=0,\ (a_2+6)(a_2-9)=0$

$a_2=9$ ($\because\ a_2>0$)

$a_1+\sum_{k=1}^{10}a_{2k}=a_1+(a_2+a_4+\cdots+a_{20})$

$=9+(9+15+21+\cdots+63)$

$=9+72\times10\times\frac{1}{2}=9+360=369$

565. ④

[풀이]

문제의 조건에 맞게 구해보면 P가 움직인 거리를 알아보면

$A_1=\frac{1}{25}$

$A_2=\frac{3}{25}$

$A_3=\frac{5}{25}$

따라서 P가 움직인 거리의 총합은 초항이 $\frac{1}{25}$이고 공차가 $\frac{2}{25}$인 등차수열이 되므로 A_n이 움직인 거리의 총합을 구해보면

$\frac{n^2}{25}$임을 알 수 있다.

$y=2x$위에 위치하려면 $(1+2)+(1+2)+\cdots$와 같이 3의 배수배만큼 총 길이가 되어야 위에 있을수 있다.

$\frac{n^2}{25}=3k$일 때 이므로

$n^2=3k\times25$에서 두 번째 위치한 점의 좌표를 알아봐야 하므로

$k=3\times4$를 대입하면

$n=30$임을 알 수 있다.

따라서

총이동거리가 $\frac{30^2}{25}=36$이므로 3이 12번 나오므로 세로로 2씩 12번 움직였으므로 y좌표 $\alpha=24$이다.

566. ②

점 $\mathrm{P}_n(\mathrm{a_n},\ \mathrm{b_n})$이라 하면 (나)에 의해

$\left(\frac{a_n+a_{n+1}}{2},\ \frac{b_n+b_{n+1}}{2}\right)=\left(\frac{a_{n+2}+a_{n+3}}{2},\ \frac{b_{n+2}+b_{n+3}}{2}\right)$

$a_{n+3}=a_n+a_{n+1}-a_{n+2}$

$b_{n+3}=b_n+b_{n+1}-b_{n+2}$

$a_1=1,\ a_2=-1,\ a_3=-1,\ a_4=1$이므로

$a_5=-3,\ a_6=3,\ a_7=-5,\ a_8=5,\ a_9=-7,\ a_{10}=7$

$b_1=0,\ b_2=2,\ b_3=4,\ b_4=-2$이므로

$b_5+b_6=b_7+b_8=b_9+b_{10}=2$

$\sum_{k=1}^{10}|a_k|=4\times1+2\times3+2\times5+2\times7=34$

$\sum_{k=1}^{10}b_k=2\times5=10$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}(|a_k|-b_k)=34-10=24$

567. ④

$[n$단계]까지 잘라낸 정삼각형의 개수가 a_n 일 때

$[n+1$단계]일 때 잘라낸 정삼각형의 개수는

직전까지 잘라낸 개수의 3배에 가운데 1개를 더한

개수이므로

$a_{n+1}=3a_n+1$

$p=3,\ q=1$

$\therefore\ 10p+q=31$

568. ⑤

$[n$단계]까지 잘라낸 정삼각형의 개수가 a_n 일 때

$[n+1$단계]일 때 잘라낸 정삼각형의 개수는

직전까지 잘라낸 개수의 3배에 가운데 1개를 더한

개수이므로

$a_{n+1}=3a_n+1$을 만족한다.

$a_1=1,\ a_2=4,\ a_3=13,\ a_4=40,\ a_5=121$이므로

$a_6=364$이다.

569. ③

단계별 공의 개수를 a_n라 하면

$a_1=1+2^2$

$a_2=1+2+3^2$

$a_3=1+2+3+4^2$이므로

$a_6=1+2+3+4+5+6+7^2=70$

570. ③

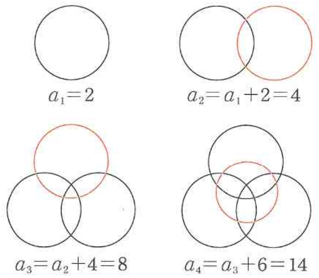
풀이)

n개의 원으로 나누어진 영역의 개수는 a_n이고 n개의 원에

$(n+1)$번째 원을 그리면 $(n+1)$번째 원은 기존의 n개의 원과

각각 서로 다른 두 점에서 만나므로 $2n$개의 영역이 새로

나누어진다.



즉 $(n+1)$개의 원으로 나누어진 영역의 개수는 n개의

원으로 나누어진 영역보다 $2n$개가 많으므로

$a_{n+1}=a_n+2n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$a_1=2$

$a_2-a_1=2\times1$

$a_3-a_2=2\times2$

$a_4-a_3=2\times3$

$a_5-a_4=2\times4$

$\vdots$

$a_{n-1}-a_{n-2}=2\times(n-2)$

$a_n-a_{n-1}=2\times(n-1)$

변끼리 더하면 $a_n-a_1=n(n-1)$ 이다.

$\therefore\ a_n=2+n(n-1)$

$a_n+a_{n+1}=2+n(n-1)+2+n(n+1)=102$ 이므로

$n=7$ 이다.

571. ②

[풀이]

$k(k-2)a_{k+1}=\sum_{i=1}^{k}a_i$

위의 식에 k대신에 $k-1$을 대입하면 $\sum_{i=1}^{k-1}a_i$을 의미하므로

가: $(k-1)(k-3)$

$=a_k+\boxed{(가)}\,a_k$에 $(k-1)(k-3)$을 대입해서 정리해보면

$a_k(1+k^2-4k+3)=a_k(k-2)^2$이므로

준식에 k를 대입하면

$a_k=\frac{8}{(k-1)(k-2)}$

$a_k(k-2)^2=\frac{8(k-2)^2}{(k-1)(k-2)}=\frac{8(k-2)}{k-1}$

따라서

나:$8(k-2)$

$a_{k+1}=\frac{1}{k(k-2)}\times\frac{\boxed{(나)}}{k-1}=\frac{8}{\boxed{(다)}}$ 식에 나에

$8(k-2)$대입해서 정리하면

다:$k(k-1)$

$f(k)=(k-1)(k-3)$

$g(k)=8(k-2)$

$h(k)=k(k-1)$

$\dfrac{f(10)\times g(12)}{h(8)}=\dfrac{9\times7\times8\times10}{8\times7}=90$

572. ⑤

(가) = $\dfrac{3}{2}$

(나) = 2^{k+1}

(다) = $k+3$

$3+8+7=18$

573. ⑤

풀이)

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=-1^2=-1$,(우변)$=\dfrac{-1\times1\times2}{2}=-1$이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때,

(*)이 성립한다고 가정하면

$-1^2+2^2-3^2+4^2-\cdots+(-1)^k k^2=\dfrac{(-1)^k k(k+1)}{2}$ 이다.

위의 등식의 양변에 $(-1)^{k+1}(k+1)^2$을 더하여 정리하면

$-1^2+2^2-3^2+4^2-\cdots+(-1)^{k+1}(k+1)^2$

$=\dfrac{(-1)^k k(k+1)}{2}+(-1)^{k+1}(k+1)^2$

$\dfrac{(-1)^k(k+1)}{2}\{k-2(k+1)\}$

$=\dfrac{(-1)^k(k+1)}{2}\times(\boxed{-k-2})$

$=\dfrac{(-1)^{k+1}(k+1)(k+2)}{2}$

그러므로 $n=k+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

따라서 $f(k)=-k-2$이므로

$\sum_{k=1}^{10}\{f(k)\}^2=\sum_{k=1}^{10}(k+2)^2=\sum_{k=1}^{10}(k^2+4k+4)$

$=\left(\dfrac{10\times11\times21}{6}+4\times\dfrac{10\times11}{2}+40\right)$

$=(385+220+40)$

$=645$

574. ③

(i) $n=2$일 때

(좌변)$=\boxed{1+\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{5}{4}}$, (우변)$=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=k$ $(k\geq2)$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{k^2}<2-\dfrac{1}{k}$ 이다.

이 부등식의 양변에 $\boxed{\dfrac{1}{(k+1)^2}}$을(를) 더하면

$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{k^2}+\boxed{\dfrac{1}{(k+1)^2}}<2-\dfrac{1}{k}+\boxed{\dfrac{1}{(k+1)^2}}$

이때, $2-\dfrac{1}{k}+\boxed{\dfrac{1}{(k+1)^2}}-\boxed{\left(2-\dfrac{1}{k+1}\right)}=\dfrac{-1}{k(k+1)^2}$ 이고

$\dfrac{-1}{k(k+1)^2}<0$ 이므로

$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{k^2}+\boxed{\dfrac{1}{(k+1)^2}}<\boxed{2-\dfrac{1}{k+1}}$ 이다.

따라서 $n=k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n\geq2$인 모든 자연수 n에 대하여

$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}<2-\dfrac{1}{n}$ 이 성립한다.

$p=\dfrac{5}{4}$, $f(k)=\dfrac{1}{(k+1)^2}$, $g(k)=2-\dfrac{1}{k+1}$

$f(1)=\dfrac{1}{4}$, $g(1)=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ p+f(1)+g(1)=\dfrac{5}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{2}=3$

575. ②

$\boxed{(가)}=3=p$

$\boxed{(나)}=k+1=f(k)$

$\boxed{(다)}=(k+1)^2+1=g(k)$

$p\times\dfrac{g(6)}{f(9)}=3\times\dfrac{50}{10}=15$

576. i) $n=5$

$2^5>5^2$임은 자명하다.

ii) $n\geq6$

$2^n>n^2$이라고 가정하자.

$2^{n+1}>2n^2$,

$2n^2-(n+1)^2=n^2-2n-1=(n-1)^2-2>0$ ($n\geq6$인 범위)

$2n^2>(n+1)^2$

$2^{n+1}>2n^2>(n+1)^2$이므로

$2^{n+1}>(n+1)^2$

$2^n>n^2$일 때 $2^{n+1}>(n+1)^2$이므로

수학적 귀납법에 의해 $n\geq5$인 모든 자연수 n에 대하여

부등식 $2^n>n^2$이 성립한다.

577. ①

(가) $\dfrac{k}{2k+1}$

(나) $(2k+1)(2k+3)$

$\dfrac{k}{2k+1}+\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\dfrac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}=\dfrac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)}=\dfrac{k+1}{2k+3}$

(다) $k+1$

$$\frac{f(2)g(2)}{h(6)}=\frac{\frac{2}{5}\times5\times7}{7}=2$$

578. ⑤

(가) 6

(나) 3

(다) 2

$p-q+r=6-3+2=5$

579. ⑤

[풀이]

$k(k-2)a_{k+1}=\sum_{i=1}^{k}a_i$

위의 식에 k대신에 $k-1$을 대입하면 $\sum_{i=1}^{k-1}a_i$을 의미하므로

$a_k(1+k^2-4k+3)=a_k(k-2)^2$이므로

가:$(k-2)^2$

준식에 k를 대입하면

$a_k=\frac{8}{(k-1)(k-2)}$

$a_k(k-2)^2=\frac{8(k-2)^2}{(k-1)(k-2)}=\frac{8(k-2)}{k-1}$

따라서

나:$8(k-2)$

$a_{k+1}=\frac{1}{k(k-2)}\times\frac{\boxed{(나)}}{k-1}=\frac{8}{\boxed{(다)}}$ 식에 나에

$8(k-2)$대입해서 정리하면

다:$k(k-1)$

$f(k)=(k-2)^2$

$g(k)=8(k-2)$

$h(k)=k(k-1)$

$$\frac{f(12)\times g(11)}{h(10)}=\frac{10^2\times72}{90}=80$$

580. ⅰ) $n=2$일 때,

(좌변)$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, (우변)$=\frac{2\times2}{2+1}=\frac{4}{3}$

이때 $\frac{3}{2}>\frac{4}{3}$이므로 ①이 성립한다.

ⅱ) $n=k(k\ge2)$일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{k}>\frac{2k}{k+1}$이므로

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}>\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}=\frac{2k+1}{k+1}$

이때 $k\ge2$에서

$$\frac{2k+1}{k+1}-\frac{2(k+1)}{k+2}=\frac{(2k+1)(k+2)-2(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{(2k^2+5k+2)-(2k^2+4k+2)}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{(k+1)(k+2)}>0$$

즉, $\frac{2k+1}{k+1}>\frac{2(k+1)}{k+2}$이므로

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}>\frac{2(k+1)}{k+2}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식 ①이 성립한다.

ⅰ), ⅱ)에 의하여 $n\ge2$인 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다.

581. ①

(가) $\frac{1}{2}$, (나) $\frac{m}{2}$, (다) $\frac{1}{m+2}$

따라서 $f(m)=\frac{m}{2}$, $g(m)=\frac{1}{m+2}$

$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{10}$

582. ②

$f(k)=k$,

$g(k)=k(k+1)(2k+1)$,

$h(k)=k(k-1)+2(2k+1)=k^2+3k+2=(k+1)(k+2)$

이므로

$\frac{g(4)}{f(3)h(5)}=\frac{4\times5\times9}{3\times6\times7}=\frac{10}{7}$ 이다.

583. ⑤

(ⅰ) $n=1$일 때,

$2^{3\times1-2}+3^1=5$이므로$2^{3\times1-2}+3^1$은 5의 배수이다.

(ⅰ) $n=k$일 때, $2^{3k-2}+3^k$이 5의 배수라고 가정하면

자연수 N에 대하여 $2^{3k-2}+3^k=5N$으로 놓을 수 있다.

$2^{3(k+1)-2}+3^{k+1}$

$=8(2^{3k-2}+3^k)-5\times3^k$

$=40\times N-5\times3^k$

이때 $40\times N$ 과 5×3^k이 모두 5의 배수이므로

$2^{3(k+1)-2}+3^{k+1}$도 5의 배수이다.

(ⅰ),(ⅰ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $2^{3n-2}+3^n$은 5의 배수이다.

(가) 5

(나) 40

(다) k $(f(k)=k)$

따라서 $p+q+f(4)=5+40+4=49$

584. ①

$f(k)=\frac{k+2}{2}$, $g(k)=\frac{k+1}{k}$ 이므로

$\dfrac{f(3)}{g(4)} = \dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{4}} = 2$ 이다.

585. ③

$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k+1} > \dfrac{2k}{k+1}+\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{(가)}{k+1}$

가: $2k+1$

$\dfrac{2k+1}{k+1}-\dfrac{(나)}{k+2}=\dfrac{k}{(k+1)(k+2)}$

나: $2k+2$

$f(5)=11,\ g(4)=10$

586. ②

(가)는 $n=1$을 대입하면 6

(나)와 다)는 식을 조건에 맞게 정리를 하면

$(k^3+3k^2+2k)+3(k+2)(k+1)$이므로

(나)는 3 (다)는 2이다.

따라서 $6\times3\times2=36$

587. ④

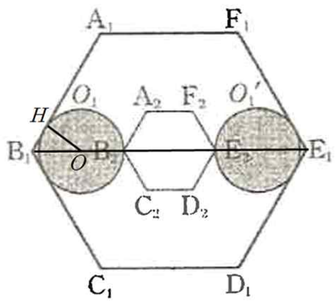
$P_1(1,\ 1),\ P_2(1,\ 2),\ P_3(1,\ 3)$, 3개

$P_4(2,\ 1),\ P_5(2,\ 2),\ P_6(2,\ 3),\ \cdots,\ P_{12}(2,\ 9)$, 3^2개

$3+3^2+\cdots+3^7=\dfrac{3(3^7-1)}{2}=\dfrac{3^8-3}{2}$

588. ②

[풀이]



R_1

O_1의 중심을 O라 하자.

$OH=x$라 하자.

$\angle HB_1O=60^\circ$

$OB_1=\dfrac{2x}{\sqrt{3}}$

$B_1E_1=4$이므로

$\dfrac{4x}{\sqrt{3}}+4x=4$

$x=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

정육각형 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$에서 한변의 길이가 $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$이므로

이 정육각형에 내접하는 원의 반지름을 구해보면

닮음을 이용하여

$2:\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}:y$

$y=\dfrac{6-3\sqrt{3}}{4}$

반지름의 비를 이 수열의 공비로 생각해보자.

반지름의 비를 구해보면

$\dfrac{6-3\sqrt{3}}{4}\div\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$

둘레의 길이의 합을 알아보면

반지름을 알고 있으므로

$L_4=\dfrac{a(1-r^4)}{1-r},\ L_2=\dfrac{a(1-r^2)}{1-r}$로 되므로

$\dfrac{L_4}{L_2}=1+r^2=1+\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}\right)^2=\dfrac{14-3\sqrt{3}}{8}$

589. ①

① 등차수열 a_n에 대하여 일반항을 $a_n=a+(n-1)d$,

$\sum_{k=1}^{n}a_k=S_n$라 하자.

$b_n=a_n+2n+1$에서 양변에 시그마를 취하면

$f(n)=S_n+\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=S_n+n(n+2)$

$f(12)-f(1)=55$

$S_{12}-S_1=-110$

$\dfrac{12(2a+11d)}{2}-a=-110$

$a+6d=-10$

② $1\le k\le 4$

$f(5-k)=f(5+k)$

$f(1)=f(9)$

$S_1+3=S_9+99$

$\therefore 2a+9d=-24$

③ $\begin{cases}a+6d=-10\\2a+9d=-24\end{cases}$

$a=-18,\ d=\dfrac{4}{3}$

④ $a_n=-18+\dfrac{4}{3}(n-1)>0$

$4n-58>0$

$n>14$.xx

$\therefore 15$

590. ④

$T_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1}\right)a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}-\frac{1}{n+1}S_n$

$T_n-T_{n-1}=\frac{a_n}{n}-\frac{1}{n+1}S_n+\frac{1}{n}S_{n-1}=\frac{a_n}{2}\ \ (n\geq 2)$이므로

$2(n+1)a_n-2nS_n+2(n+1)S_{n-1}=n(n+1)a_n$

$2(n+1)a_n-2n(S_n-S_{n-1})+2S_{n-1}=n(n+1)a_n$

$(n^2+n-2)a_n=2S_{n-1}$

$(n-1)(n+2)a_n=2S_{n-1}\ \ (n\geq 2)\ \cdots$①

$n(n+3)a_{n+1}=2S_n\qquad \cdots$②

②−①하면

$n(n+3)a_{n+1}-(n-1)(n+2)a_n=2a_n$

$n(n+3)a_{n+1}=n(n+1)a_n$

$a_{n+1}=\frac{n+1}{n+3}a_n\ \ (n\geq 2)\ \cdots$③

①에 $n=2$를 대입하면

$4a_2=2S_1=2a_1=4$

$a_2=1$

③에서

$n=2$를 대입하면 $a_3=\frac{3}{5}\times a_2=\frac{3}{5}$

$n=3$을 대입하면 $a_4=\frac{4}{6}\times a_3=\frac{2}{5}$

591. ②

매일 전날 물의 양 중 $\frac{2}{3}$가 남고, $8\mathrm{L}$의 물을 새로 넣는 과정을 반복하므로

$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+8$이 성립한다.

식을 $a_{n+1}-24=\frac{2}{3}(a_n-24)$로 변형하고

$a_{n+1}-24=b_{n+1}$, $a_n-24=b_n$으로 치환하면

수열 $\{b_n\}$은

첫째항이 $b_1=a_1-24=28-24=4$, 공비가 $\frac{2}{3}$인

등비수열이므로

$a_n-24=b_n=4\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$이 되므로

$a_{10}=24+4\left(\frac{2}{3}\right)^9=4\left\{6+\left(\frac{2}{3}\right)^9\right\}$이다.

592. ①

[풀이]

$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

$b_n=\frac{1}{2}+\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

$T_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{a(r^k-1)}{r-1}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{r-1}\right)+\frac{a}{r-1}\sum_{k=1}^{n}r^k$

$=\frac{1}{2}n-\frac{an}{r-1}+\frac{a}{r-1}\times\frac{r(r^n-1)}{r-1}$

$c_n=\frac{3}{4}+T_n=\frac{1}{2}n-\frac{an}{r-1}+\frac{a}{r-1}\times\frac{r(r^n-1)}{r-1}+\frac{3}{4}$

$=\frac{1}{2}n-\frac{an}{r-1}+\frac{ar^{n+1}}{(r-1)^2}-\frac{r}{(r-1)^2}+\frac{3}{4}$

위의 식이 등비수열이 되기 위한 조건을 알아보면 공비와 초항 모양을 제외하고는 없어져야 하므로

$=\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{r-1}\right)n+\frac{ar^{n+1}}{(r-1)^2}-\frac{r}{(r-1)^2}+\frac{3}{4}$

에서

$\frac{1}{2}-\frac{a}{r-1}=0$이고 $\frac{3}{4}-\frac{r}{(r-1)^2}=0$이어야 한다.

연립하면

$\frac{3}{4}-\frac{r}{(r-1)^2}=0$을 풀면 $r=3,\frac{1}{3}$

$r=3$이면 $a=1, r=\frac{1}{3}$이면 $a=-\frac{1}{3}$

$2a+r=2\times1+3=5$

593. ④

$a_5=12=a_1\times m^2$에서 $m=1$이면 $a_1=a_2=12$이므로

$m\neq 1$이다.

따라서 $m=2$, $a_1=3$

$a_6=14=a_2+2m$에서 $a_2=10$

$a_7+a_8=24+16=40$

594. ④

$a_n=a\cdot r^{n-1}\ (a<0,\ r<-1)$이라 하면 $b_n=a^n\cdot r^{\frac{n(n-1)}{2}}$

(i) $n=4k$ (k는 자연수)인 경우

$b_n=a^{4k}\cdot r^{2k(4k-1)}>0$이고 $c_n=n$

(i) $n=4k-1$ (k는 자연수)인 경우

$b_n=a^{4k-1}\cdot r^{(4k-1)(2k-1)}>0$이고 $c_n=n$

(i) $n=4k-2$ (k는 자연수)인 경우

$b_n=a^{4k-2}\cdot r^{(2k-1)(4k-3)}<0$이고 $c_n=0$

(i) $n=4k-3$ (k는 자연수)인 경우

$b_n=a^{4k-3}\cdot r^{2(4k-3)(k-1)}<0$이고 $c_n=0$

따라서 $n=4k$와 $n=4k-1$에서 $b_n>0$이 된다.

$(3+4)+(7+8)+\cdots+\{(4k-1)+4k\}\leq 715$에서

$k(3+4k)\leq 715$이고 $k\leq 13$이고 $b_{52}>0$, $b_{53}<0$,

$b_{54}<0$이므로

주어진 조건을 만족하는 m의 값은 $52, 53, 54$이다. 따라서 자연수 m의 최댓값은 54이다.

595. 23

$a_n = \dfrac{3S_n^2}{3S_n - 1} = S_n - S_{n-1}$ (단, $n \geq 2$)이므로

$3S_n^2 = (3S_n - 1)(S_n - S_{n-1})$

$S_n - S_{n-1} = -3S_{n-1}S_n$

이를 정리하면

$\dfrac{1}{S_n} = \dfrac{1}{S_{n-1}} + 3$ 이다.

$S_1 = a_1 = 1$ 이므로

$\dfrac{1}{S_8} = \dfrac{1}{S_1} + 3 \times 7 = 22$ 에서 $S_8 = \dfrac{1}{22}$ 이다.

따라서 $p+q = 23$ 이다.

596. ③

$n=1, a_{10} = \dfrac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9}{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9 - 1} = 10$

$n=2, a_{11} = \dfrac{a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}}{a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10} - 1} = 1$

$n=3, a_{11} = \dfrac{a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}}{a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}a_{11} - 1} = 1$

⋮

$n=10, a_{19} = \dfrac{a_{10}+a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}+a_{16}+a_{17}+a_{18}}{a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}a_{16}a_{17}a_{18} - 1} = 2$

$n=11, a_{20} = 10$

$a_{10} \sim a_{19}$ 은 $10, 1, 1 \cdots 1, 2$ 로써 이후로 주기가 10으로 반복됨

$$\therefore a_n = \begin{cases} 1 & (n \leq 8)(11 \leq n \leq 18) \ldots\ldots \\ 2 & (n = 9, 19, 29, \ldots\ldots) \\ 10 & (n = 10, 20, 30, \ldots\ldots) \end{cases}$$

규칙적으로 이루어진 수열

$a_{20} + a_{202} + a_{2023} = 10 + 1 + 1 = 12$

597. ①

$a_1 = \dfrac{1}{2}\left(a_1 + \dfrac{1}{a_1}\right)$ 에서 $a_1 = 1$

$a_n = S_n - S_{n-1}$ $(n \geq 2)$

$S_n = \dfrac{1}{2}\left(S_n - S_{n-1} + \dfrac{1}{S_n - S_{n-1}}\right)$

따라서 $S_n^2 = S_{n-1}^2 + 1$ $(n \geq 2)$

${S_n}^2$ 이 등차수열이므로 ${S_n}^2 = {S_1}^2 + (n-1) = n$

$\therefore S_n = \sqrt{n}$

$a_{100} = S_{100} - S_{99} = 10 - \sqrt{99} = 10 - 3\sqrt{11}$

$p+q = 10+3 = 13$

598. [1-1] $a_1 = 2$ [1-2] $a_n - a_{n-1} = 4$ [1-3] $m = 8$

$[1-1]$

$S_n = \dfrac{1}{8}(a_n + 2)^2$ 에 $n=1$을 대입하면

$a_1 = \dfrac{1}{8}(a_1 + 2)^2$

$8a_1 = {a_1}^2 + 4a_1 + 4$

${a_1}^2 - 4a_1 + 4 = 0$에서

$a_1 = 2$이다.

$[1-2]$

$8S_n = (a_n + 2)^2$ $\cdots$ ①

$8S_{n-1} = (a_{n-1} + 2)^2$ $\cdots$ ②

①, ②식을 빼서 정리하면

${a_n}^2 - 4a_n - a_{n-1}^2 - 4a_{n-1} = 0$

$(a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1} - 4) = 0$에서 $\{a_n\}$은 모든 항이 양수이므로

$a_n - a_{n-1} = 4$

$[1-3]$

위의 결과에 따라 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 4인 등차수열이므로

$a_n = 4n - 2$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k = \frac{m(4m)}{2} = 2m^2 = 128$에서

$m = 8$

599. ④

$n=1$

$a_2 = a_1 + 2$, $a_3 = a_2 \times a_4$

$n=2$

$a_4 = a_2 + 2, a_5 = a_4 \times a_6$

$a_4 = a_1 + 4$

$a_3 = a_2 \times a_4 = (a_1 + 2)(a_1 + 4) = 24$

$a_1^2 + 6a_1 - 16 = (a_1 + 8)(a_1 - 2) = 0$

$a_1 > 0, a_1 = 2$

$a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 24, a_4 = 6$

$n=3$

$a_6 = a_3 + 2 = 26, a_7 = a_6 \times a_8$

$a_5 = a_4 \times a_6 = 6 \times 26 = 156$

$a_{10} = a_5 + 2 = 158$

$a_{12} = a_6 + 2 = 28$

$a_{11} = a_{10} \times a_{12} = 158 \times 28 = 4424$

600. ②

풀이)

$a_1=a$라 하면 a는 1이 아닌 양의 실수

$a_{2n-1}+a_{2n}=1,\ a_{2n}\times a_{2n+1}=1$에서

$n=1$일 때, $a_1+a_2=1$ 이고, $a_2\times a_3=1$

$a_1=a$ 이고, $a_2=1-a,\ a_3=\dfrac{1}{1-a}$

$n=2$일 때, $a_3+a_4=1$ 이고, $a_4\times a_5=1$

$a_3=\dfrac{1}{1-a}$이고, $a_4=\dfrac{a}{a-1},\ a_5=\dfrac{a-1}{a}$

$n=3$일 때, $a_5+a_6=1$ 이고, $a_6\times a_7=1$

$a_5=\dfrac{a-1}{a}$이고, $a_6=\dfrac{1}{a},\ a_7=a$

⋮

이므로 n이 6의 배수 값으로 순환된다.

(i) $0<a<1$ 일 때,

$a_1>0,\ a_2>0,\ a_3>0,\ a_4<0,\ a_5<0,\ a_6>0$ 이므로

$\sum_{n=1}^{15}(|a_n|-a_n)=(|a_1|-a_1)+(|a_2|-a_2)+(|a_3|-a_3)+$

$+(|a_4|-a_4)+(|a_5|-a_5)+(|a_6|-a_6)+\ \cdots$

$=0+0+0+(-2a_4)+(-2a_5)+\ \cdots\ +(-2a_{10})+(-2a_{11})+0\cdots$

$=(-4)\times\dfrac{a}{a-1}+(-4)\times\dfrac{a-1}{a}=10$ 에서

$\dfrac{a-1}{a}=t$ 라 하면

$t+\dfrac{1}{t}=-\dfrac{5}{2}$이고, $2t^2+5t+2=0$ 이므로

$t=-\dfrac{1}{2}$ 또는 -2 이다.

$\dfrac{a-1}{a}=-\dfrac{1}{2}$ 또는 -2 이므로 $\therefore\ a=\dfrac{1}{3}$ 또는 $\dfrac{2}{3}$ 이다.

(ii) $a>1$ 일 때,

$a_1>0,\ a_2<0,\ a_3<0,\ a_4>0,\ a_5>0,\ a_6>0$ 이므로

$\sum_{n=1}^{15}(|a_n|-a_n)=(|a_1|-a_1)+(|a_2|-a_2)+(|a_3|-a_3)+$

$+(|a_4|-a_4)+(|a_5|-a_5)+(|a_6|-a_6)+\ \cdots$

$=0+(-2a_2)+(-2a_3)+\ \cdots\ +(-2a_8)+(-2a_9)+0\cdots$

$=(-6)\times(1-a)+(-6)\times\dfrac{1}{1-a}=10$ 에서

$1-a=t$ 라 하면

$t+\dfrac{1}{t}=-\dfrac{5}{3}$이고, $3t^2+5t+3=0$ 이므로 해가 존재하지 않는다.

모든 a의 합은 $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}=1$ 이다.

601. $\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{3},\ 2$

(나)에서 $a_{2n}=1-a_{2n-1},\ a_{2n+1}=\dfrac{1}{a_{2n}}$

$a_1=a\ \ (a>0,\ a\neq 1)$이라 하면

$a_2=1-a$

$a_3=\dfrac{1}{1-a}$

$a_4=1-\dfrac{1}{1-a}=\dfrac{a}{a-1}$

$a_5=\dfrac{a-1}{a}$

$a_6=1-\dfrac{a-1}{a}=\dfrac{1}{a}$

$a_7=a$

$$\therefore\ a_n=\begin{cases} a & (n=6k-5)\\ 1-a & (n=6k-4)\\ \dfrac{1}{1-a} & (n=6k-3)\\ \dfrac{a}{a-1} & (n=6k-2)\\ \dfrac{a-1}{a} & (n=6k-1)\\ \dfrac{1}{a} & (n=6k)\end{cases}$$

$|a_n|+a_n=\begin{cases}2a_n & (a_n\geq 0)\\ 0 & (a_n<0)\end{cases}$이므로

i) $0<a<1$일 때

$a>0,\ 1-a>0,\ \dfrac{1}{1-a}>0,\ \dfrac{a}{a-1}<0,\ \dfrac{a-1}{a}<0,\ \dfrac{1}{a}>0$

$\sum_{n=1}^{14}(|a_n|+a_n)=6a+6(1-a)+\dfrac{4}{1-a}+\dfrac{4}{a}$

$=6+\dfrac{4}{1-a}+\dfrac{4}{a}=24$

$\dfrac{2}{1-a}+\dfrac{2}{a}=9$

$2a+2-2a=9a(1-a)$

$9a^2-9a+2=0$

$(3a-1)(3a-2)=0$

$a=\dfrac{1}{3}$ 또는 $a=\dfrac{2}{3}$

ii) $a>1$일 때

$a>0,\ 1-a<0,\ \dfrac{1}{1-a}<0,\ \dfrac{a}{a-1}>0,\ \dfrac{a-1}{a}>0,\ \dfrac{1}{a}>0$

$$\sum_{n=1}^{14}(|a_n|+a_n)=6a+\frac{4a}{a-1}+\frac{4(a-1)}{a}+\frac{4}{a}$$

$$=6a+\frac{4a}{a-1}+4=24$$

$3a+\dfrac{2a}{a-1}=10$

$3a(a-1)+2a=10(a-1)$

$3a^2-11a+10=0$

$(3a-5)(a-2)=0$

$a=\dfrac{5}{3}$ 또는 $a=2$

ⅰ), ⅱ)에 의해 $\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{3},\ 2$

602. (1) $a_1=a$ 라 하면 $a_1+a_2=-1$ 이므로 $a_2=-a-1$ 이고

$a_1=a>0$ 이므로 $a_2<0$ 이다.

$a_3=-\dfrac{1}{a+1}$ 이고 $a_3<0$ 이다.

$a_4=-1+\dfrac{1}{a+1}=-\dfrac{a}{a+1}$ 이고 $a_4<0$ 이다.

$a_5=-\dfrac{a+1}{a}$ 이고 $a_5<0$ 이다.

$a_6=-1+1+\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{a}$ 이고 $a_6>0$ 이다.

$a_7=\dfrac{1}{a_6}=a$ 이고 $a_7>0$ 이다.

(2) $a=\dfrac{1}{3}$, 2

(1) $a_1=a$ 라 하면 $a_1+a_2=-1$ 이므로 $a_2=-a-1$ 이고

$a_1=a>0$ 이므로 $a_2<0$ 이다.

$a_3=-\dfrac{1}{a+1}$ 이고 $a_3<0$ 이다.

$a_4=-1+\dfrac{1}{a+1}=-\dfrac{a}{a+1}$ 이고 $a_4<0$ 이다.

$a_5=-\dfrac{a+1}{a}$ 이고 $a_5<0$ 이다.

$a_6=-1+1+\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{a}$ 이고 $a_6>0$ 이다.

$a_7=\dfrac{1}{a_6}=a$ 이고 $a_7>0$ 이다.

(2) 위의 결과에 의하여 $a_1=a_7$ 이므로

$a_k=a_{k+6}\ (k=1,2,3,4,\cdots)$ 이 성립한다.

$|a_k|+a_k=\begin{cases}2a_k & (a_k\ge 0)\\ 0 & (a_k<0)\end{cases}$ 이므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{15}(|a_n|+a_n)=2a_1+2a_6+2a_7+2a_{12}+2a_{13}=6a+\frac{4}{a}$ 이다.

$6a+\dfrac{4}{a}=14 \Rightarrow 3a^2-7a+2=(3a-1)(a-2)=0$

따라서 $a=\dfrac{1}{3}$, 2 이다.

603. ①

$b_n=a_n+a_{n+2}$이고 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로

$b_n=2a_{n+1}$이다.

집합 A의 원소는 첫째항이 a_1이고 공차가 d인 등차수열이고

집합 B의 원소는 첫째항이 $2a_2$이고 공차 $2d$인 등차 수열이다.

따라서

$$A\cap B=\{a_1,\ a_3,\ a_5,\ a_7\}$$

이어야 한다.

$$B=\{2a_2,\ 2a_3,\ 2a_4,\ 2a_5,\ 2a_6,\ 2a_7,\ 2a_8\}$$

에서 가능한 경우는 $a_1=2a_2,\ a_1=2a_3,\ a_1=2a_4,\ a_1=2a_5$이고,

각각의 경우에 대한 공차를 구해보면 $a_3=-6$이므로

$-6-2d=2(-6-d),\ -6=-12$이므로 모순

$-6-2d=-12,\ d=3,\ a_9=-6+6d=12$

$-6-2d=2(-6+d),\ d=\dfrac{3}{2},\ a_9=-6+6d=3$

$-6-2d=2(-6+2d),\ d=1,\ a_9=-6+6d=0$

따라서 a_9의 값의 합은 $12+3+0=15$이다.

604. ④

$a_4=k$라고 가정하면 $a_5=3-k(k\le 0)$ 또는 $a_5=k-1(k>0)$

$a_4+a_5=7$이므로 식을 정리하면 조건에 모순되지않는

$k=4$이다.

$a_4=4$일 때 점화식에 만족하는

$a_3=-1$ 또는 5가되고$a_2=-2$또는 6이된다.

또한 조건에 모순되지 않도록

a_1을 점화식을 이용해서 구하면 -3또는 7이 된다.

그러므로 a_1값의 합은 4이다.

605. ②

(나)조건에 의해 $a_m=0$이면 점화식조건에 의해

$a_{m+1}=2m$이고

$a_{m+2}=4m+2\ (2m<m+1)$ m은 자연수이므로 모순

$a_{m+2}=2m-p\ (2m\ge m+1)$

$a_{m+3}=4m+4-p\ (2m-p<m+2)$

$a_{m+3}=0$이고 m이 자연수이므로 $p=4(m+1)$

이때 p는 15 이하의 자연수이므로 $p=8,\ 12$ 이다.

(참고)

$a_{m+3}=2m-2p\ (2m-p\ge m+2)$은 $m=p$일 때

$2m-p\ge m+2$ 이므로 조건에 모순된다.

606. $-\dfrac{14}{3}$

$-6<a_1<-3$이므로 $a_1<0$

$a_2 = a_1 + 3$따라서 $-3 < a_2 = a_1 + 3 < 0$

$a_3 = a_2 + 3$따라서 $0 < a_3 = a_2 + 3 < 3$

$a_4 = a_3 \times -3$따라서 $-9 < a_4 = a_3 \times -3 < 0$

$a_5 = a_4 + 3$따라서 $-6 < a_5 = a_4 + 3 < 3$

$a_6 = 2$ 이므로

(i) $a_5 < 0$ 일 때

$a_6 = a_5 + 3 = 2$

이므로

$a_5 = -1$

$a_4 = -4$

$a_3 = \frac{4}{3}$

$a_2 = -\frac{5}{3}$

$a_1 = -\frac{14}{3}$

(ii)$a_5 > 0$ 일 때

$a_6 = a_5 \times -3 = 2$

이므로

$a_5 = -\frac{2}{3}$

이므로 성립하지 않는다.

$\therefore a_1 = -\frac{14}{3}$

607. ③

$a_n = 1$ 이기 위해서는 $a_{n-1} = 2$ 이고 $a_n = 2$ 이기 위해서는

$a_{n-1} = 4$ 또는 1 이어야 한다.

따라서 $a_m = 1$ 의 개수가 3 개가 되기 위해서는

10 이하의 자연수 m 에 대하여 마지막 5 개 항의 값은

$1 \to 2 \to 1 \to 2 \to 1$ 꼴의 형태가 되어야 한다.

한편, 제5 항의 값은 2 가 되어야 하고, 초항부터 제5 항까지의 값은 거꾸로 쓰면 다음과 같다.

$a_5 = 2$

$a_4 = 4$

$a_3 = 5,\ 8$

$a_2 = 7,\ 10,\ 13,\ 16$

$a_1 = 11,\ 14,\ 17,\ 20,\ 23,\ 26,\ 29,\ 32$

따라서 a_1 의 최댓값은 32가 된다.

[보충풀이]

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
11 ↘				
	7 ↘			
14 ↗				
		5 ↘		
17 ↘				
	10 ↗			
20 ↗				
			4 −	2 −
23 ↘				
	13 ↘			
26 ↗				⋯
		8 ↗		
29 ↘				
	16 ↗			
32 ↗				⋯
				⋯
				⋯
				⋯
a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}

1 ↘				
	2 −	1 ↘		
4 ↗				
			2 −	1
7 ↘				
	5 ↘			
10 ↗				
		4 ↗		
13 ↘				
	8 ↗			
16 ↗				

608. $\frac{125}{2}$

$a_n > 0\ (n \geq 2)$이다. 즉 $a_n \leq 0$ 이더라도 $a_{n+1} > 0$ 이 된다.

(i) $m = 2$ 일 때,

$a_6 = 2^2$에서 $a_5 = 2,\ a_4 = 1,\ a_3 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{4} = 2^{-2}$

따라서 $a_1 = \frac{1}{8},\ -2$

$\therefore P(2) = \frac{1}{8} \times (-2) = -\frac{1}{4}$

(ii) $m = 3$ 일 때,

$a_6 = 2^3$에서 $a_5 = 2^2$이므로 $a_1 = \frac{1}{4},\ -1$

$\therefore P(3) = \frac{1}{4} \times (-1) = -\frac{1}{4}$

(iii) $m = 4$ 일 때,

$a_6 = 2^4$에서 $a_5 = 2^3$이므로 $a_1 = \frac{1}{2},\ 0$

$\therefore P(3) = \frac{1}{2} \times (0) = 0$

한편, $m \geq 5$ 이상이면, a_1 은 2 배씩 증가해서 $a_6 = 2^m$ 이 되어야 하기 때문에 $a_1 = 2^{m-5}$ 만 된다. 즉, $P(m) = 2^{m-5}$

$P(5) = 2^0,\ P(6) = 2^1,\ P(7) = 2^2,\ P(8) = 2^3,\ P(9) = 2^4,\ P(10) = 2^5$

따라서

$$\sum_{m=2}^{10} P(m) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 0 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = \frac{125}{2}$$

[보충풀이]

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
2^{-3}					
	2^{-2}				
-2					
		2^{-1}			
	-1		2^0	2^1	2^2
		0			
2^{-2}					
	2^{-1}				
-1		2^0	2^1	2^2	2^3
	0				
2^{-1}					
	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4
0					
$\mathbf{2^0}$	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5
$\mathbf{2^1}$	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
$\mathbf{2^2}$	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
$\mathbf{2^3}$	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
$\mathbf{2^4}$	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9
$\mathbf{2^5}$	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}

609. ④

$a_1 = 5$

$a_2 = a_1 - 1 = 4$

$a_3 = 2a_1 - 3 = 7$

$a_4 = a_2 - 1 = 3$

$a_5 = 2a_2 - 3 = 5$

$a_6 = a_3 - 1 = 6$

$\vdots$

에서 $3 \le n \le 5$ 일 때, $3 \le a_n \le 7$ 이고

$a_{2n} = a_n - 1$, $a_{2n+1} = 2a_n - 3$ 이므로

$6 \le n \le 11$ 일 때, $2 \le a_n \le 11$, $a_{12} = a_6 - 1 = 5$ 이므로

$6 \le n \le 12$ 일 때, $2 \le a_n \le 11$ 이다.

또한, $a_{2n} = a_n - 1$, $a_{2n+1} = 2a_n - 3$ 이므로

$12 \le n \le 25$ 일 때, $1 \le a_n \le 19$ 이고

$24 \le n \le 51$ 일 때, $-1 \le a_n \le 35$

$50 \le n \le 101$ 일 때, $-5 \le a_n \le 67$ 이므로

$A = \{a_n \mid n$ 은 70 이하의 자연수$\}$ 의 최댓값은 67 이다.

610. 7

$a_1 = k > 0$, $a_2 = -k + 1 - 2k = 1 - 3k$

k는 자연수이므로 $1 - 3k < 0$

$a_3 = 1 - 3k + 2 + 2k = 3 - k$

i) $3 - k \le 0$

$a_4 = 3 - k + 3 + 2k = 6 + k > 0$

$a_5 = -6 - k + 4 - 2k = -2 - 3k$

ii) $3 - k > 0$

$a_4 = -3 + k + 3 - 2k = -k < 0$

$a_5 = -k + 4 + 2k = k + 4$

$a_5 = -17 < 0$ 이면 $-2 - 3k = -17$ 에서 $k = 5 = \alpha$

$a_5 = 6 > 0$ 이면 $k + 4 = 6$ 에서 $k = 2 = \beta$

$\therefore\ \alpha + \beta = 5 + 2 = 7$

611. ①

$a_1 = a$ 라 하면 $2 < a < 3$

$a_2 = a - 3 < 0$

$a_3 = -3(a-3) = 3(3-a) > 0$

$a_4 = 3(3-a) - 3 = 3(2-a) < 0$

$a_5 = -9(2-a) = 9(a-2) > 0$

$a_6 = 9(a-2) - 3 = 3(3a-7)$

i) $2 < a < \frac{7}{3}$ 일 때

$a_6 = 3(3a-7) < 0$

$a_7 = -9(3a-7) = 9(7-3a) > 0$

$a_8 = 9(7-3a) - 3 = 60 - 27a = 2$

$a = \frac{58}{27}$ ($2 < \frac{58}{27} < \frac{7}{3}$ 이므로 성립)

ii) $\frac{7}{3} \le a < 3$ 일 때

$a_6 = 3(3a-7) \ge 0$

$a_7 = 3(3a-7) - 3 = 3(3a-8)$

① $\frac{7}{3} \le a < \frac{8}{3}$ 일 때

$a_7 = 3(3a-8) < 0$

$a_8 = -9(3a-8) = -27a + 72 = 2$

$a = \frac{70}{27}$ ($\frac{7}{3} \le \frac{70}{27} < \frac{8}{3}$ 이므로 성립)

② $\frac{8}{3} \le a < 3$ 일 때

$a_7 = 3(3a-8) \ge 0$

$a_8 = 3(3a-8) - 3 = 9a - 27 = 2$

$a = \frac{29}{9}$ ($\frac{29}{9} > 3$ 이므로 성립하지 않음)

i), ii)에 의해 만족하는 a_1 의 값의 합은 $\frac{58}{27} + \frac{70}{27} = \frac{128}{27}$

612. ①

$$a_{n+1} = \begin{cases} 3a_n - 1 & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{a_n}{2} + 1 & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

$a_1 = 3$ (홀수)

$a_2 = 3a_1 - 1 = 8$ (짝수)

$a_3 = \dfrac{a_2}{2} + 1 = 5$ (홀수)

$a_4 = 3a_3 - 1 = 14$ (짝수)

$a_5 = \dfrac{a_4}{2} + 1 = 8$ (짝수)

$a_6 = 3a_5 - 1 = 5$ (홀수)

수열 a_n은 2번째 항부터 주기가 3인 수열 ($8, 5, 14$ 반복)

$\sum_{k=1}^{16} a_k = a_1 + \sum_{k=2}^{16} a_k = 3 + 5(8+5+14) = 138$

613. ②

a_n이 2의 배수이면 $a_n = 2a_{n+1}$

a_n이 2의 배수가 아니면 $a_n = a_{n+1} - 1$ (a_n은 자연수)

<table>
<tr><th>a_6</th><th>a_5</th><th>a_4</th><th>a_3</th><th>a_2</th><th>a_1</th></tr>
<tr><td rowspan="8">1</td><td rowspan="8">2</td><td rowspan="5">4</td><td rowspan="3">8</td><td rowspan="2">16</td><td>32</td></tr>
<tr><td>15</td></tr>
<tr><td>7</td><td>14</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">6</td><td>12</td></tr>
<tr><td>5</td></tr>
<tr><td rowspan="3">1</td><td rowspan="3">2</td><td rowspan="2">4</td><td>8</td></tr>
<tr><td>3</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
</table>

614. ④

주어진 점화식에 맞추어 수열을 추론하면

$a_{11} = (k^3+1)a_5,\ a_6 = ka_5$ 이므로 $k = -2$ ($\because\ k \neq 1$)

$\dfrac{a_{16}}{a_7} = k^5 + k$ ($a_{16} = k^9 + k^8 + \cdots + k^2,\ a_7 = k^4 + k^3 + k^2 + k$)

따라서 -34 이다.

615. ④

$a_5 = k$ 로 가정하면 $k + 2^{k-2} = 1 (k < 1)$ 또는

$k + \log_2 k = 1 (k \geq 1)$

조건에 모순되지않는 k값은 1이므로

$a_6 = 0, a_5 = 1$이다

점화식 조건에 모순되지 않도록 $a_4 = 2,\ a_3 = 4,\ a_2 = 16$을

구한다.

a_7은 로그의 진수조건에 의해 $a_7 = 16$이다.

그러므로 $\sum_{k=2}^{7} a_k = 39$

616. ③

a_1 k

a_2 8

a_3 a

a_4

a_5 8

$a_3 = a$라 하자.

i) $a > 8,\ a_4 = a - 8,\ a_3 > a_4$ 이므로

$a_5 = 8 = \dfrac{a}{2} - (a-8) = -\dfrac{a}{2} + 8,\ a = 0$

모순이다.

ii) $a \leq 8,\ a_4 = 4 - a$

ii-1) $4 - a > a,\ a < 2,\ -a + 4 - a = 8,\ a = -2$

ii-2) $4 - a \leq a,\ a \geq 2,\ \dfrac{a}{2} - (4-a) = 8,\ a = 8$

따라서 a로 가능한 값은 $-2,\ 8$이다.

$a_1 = k$라 하면

① $a = -2$일 때,

①-1] $k < 8$

$-k + 8 = -2,\ k = 10$ ×

①-2] $k \geq 8$

$\dfrac{k}{2} - 8 = -2,\ k = 12$ ○

② $a = 8$일 때,

②-1] $k < 8$

$-k + 8 = 8,\ k = 0$ ○

②-2] $k \geq 8$

$\dfrac{k}{2} - 8 = 8,\ k = 32$ ○

$\therefore\ 0 + 12 + 32 = 44$

617. ③

$a_5 = 1$일 때 가능한 a_4는 $a_4 = -2$ 또는 $a_4 = 3$이고,

$a_4 = -2$일 때 가능한 a_3은 $a_3 = 4$ 또는 $a_3 = 9$

$a_4 = 3$일 때 가능한 a_3은 $a_3 = -6$ 또는 $a_3 = -1$

$a_3 > 7$이므로 $a_3 = 9$이고, 이 때 가능한 a_2는 $a_2 = -18$ 또는

$a_2 = -13$이다.

$a_2 = -18$일 때, $a_1 = 36$ 또는 $a_1 = 41$

$a_2 = -13$일 때, $a_1 = 26$ 또는 $a_1 = 31$

따라서 $M = 41,\ m = 26,\ \therefore M + m = 67$

618. ①

[풀이]

$a_6 = 3k$ (k는 자연수), $3k+1$ (k는 음이 아닌 정수),

$3k+2$ (k는 음이 아닌 정수) 일 때 각각의 경우에 대해서

알아보자

$a_6 = 3k$일 때 $a_7 = 20$이므로 $a_6 = 60$

$a_8 = a_7 + a_6 = 20 + 60 = 80$

$a_9 = a_8 + a_7 = 80 + 20 = 100$

$a_{10} = a_9 + a_8 = 100 + 80 = 180$

$a_{11}=\frac{1}{3}a_{10}=60$이 된다.

$a_6=3k+1$일 때 알아보면
$k=0$이면 $a_6=1$
$a_5=19$, a_4는 존재하지 않는다.
$k=1$이면 $a_6=4$
$a_5=16$, a_4는 존재하지 않는다.
$k=2$이면 $a_6=7$
$a_5=13$, a_4는 존재하지 않는다.
계속 알아보면 $a_6=3k+1$일때는 a_4가 존재하지 않는다.

$a_6=3k+2$일 때 알아보면
$k=0$이면 $a_6=2$
$a_5=18$이어야 하는데 $a_6=\frac{1}{3}a_5=6$이어 하므로 모순
$k=1$이면 $a_6=5$
$a_5=15$이고 $a_6=\frac{1}{3}a_5=5$라는 조건에 맞게 된다.
이 경우에 뒷부분을 알아보면
$a_8=25, a_9=45, a_{10}=15, a_{11}=5$가 나온다.
$k=2$이면 $a_6=8$
$a_5=12$에서 $a_6=\frac{1}{3}a_5=4$이어야 하므로 모순
$k=3$이면 $a_6=11$
$a_5=9$이고 $a_6=\frac{1}{3}a_5=3$이어야 하므로 모순
이 경우도 $k=1$일 때 밖에 안됨을 확인할수 있다.
따라서 최댓값은 60, 최솟값은 5가 되어
$M-m=60-5=55$

619. 610 , 72
$T_{20}=T_{21}$이므로
$\left|\frac{20(160+19d)}{2}\right|=\left|\frac{21(160+20d)}{2}\right|$
$T_{19}<T_{20}$조건에 만족하기위해 $d=-4$이므로
$T_n=\left|-2n^2+82n\right|$이고 $a_n=-4n+84$이다
$T_n>T_{n+1}$에 만족하는 n값들의 합은
$21+22+23+\cdots+40=610$, 이고 $a_3=72$이다.

620. ④
(가)식의 항은 7개, (나)식의 항은 11개의 합이고
(나)-(가) $=a_{n+7}+a_{n+8}+a_{n+9}+a_{n+10}=2\ (1\le n\le 6)$
$a_1+a_2+\cdots+a_{11}=1$ 과 $a_5+a_6+\cdots+a_{11}=-1$ 에서
$\therefore\ a_1+a_2+a_3+a_4=2$
$a_2+a_3+\cdots+a_{12}=1$ 과 $a_6+a_7+\cdots+a_{12}=-1$ 에서
$\therefore\ a_2+a_3+a_4+a_5=2$
$a_3+a_4+\cdots+a_{13}=1$ 과 $a_7+a_8+\cdots+a_{13}=-1$ 에서
$\therefore\ a_3+a_4+a_5+a_6=2$
$a_4+a_5+\cdots+a_{14}=1$ 과 $a_8+a_9+\cdots+a_{14}=-1$ 에서
$\therefore\ a_4+a_5+a_6+a_7=2$
$a_5+a_6+\cdots+a_{15}=1$ 과 $a_9+a_{10}+\cdots+a_{15}=-1$ 에서
$\therefore\ a_5+a_6+a_7+a_8=2$
$a_6+a_7+\cdots+a_{16}=1$ 과 $a_{10}+a_{11}+\cdots+a_{16}=-1$ 에서
$\therefore\ a_6+a_7+a_8+a_9=2$
각각의 식을 연립하여 계산하면
$a_1=a_5,\ a_2=a_6,\ a_3=a_7,\ a_4=a_8,\ a_5=a_9$
한편, (가)에서 $1\le n\le 9$일 때,
$a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+6}=-1$ 과
$a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+7}=-1$ 을 연립하여 계산하면
$a_n=a_{n+7}\ (1\le n\le 9)$
같은 방법으로 (나)에서 $1\le n\le 5$ 일 때,
$a_n=a_{n+11}\ (1\le n\le 5)$
따라서
$a_1=a_2=a_4=a_5=a_6=a_8=a_9=a_{11}=a_{12}=a_{13}=a_{15}=a_{16}$
이고
$a_3=a_7=a_{10}=a_{14}$
$\therefore\ a_1+a_2+\cdots+a_7=-1$ 에서 $5a_1+2a_3=-1$
$a_1+a_2+\cdots+a_{11}=1$ 에서 $8a_1+3a_3=1$
$\therefore\ a_1=5,\ a_3=-13$
$\sum_{k=1}^{16}\left|a_k\right|=5\times 12+13\times 4=112$

621. ⑤
[풀이]
$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$의 변형하여 계산해보면
$a_1=9,\ a_2=3,\ a_3=-6,\ a_4=-9,\ a_5=-3,\ a_6=6$
$a_7=9,\ a_8=3$
계산하면 주기가 6임을 알 수 있다.
$\sum_{k=1}^{30}(a_{2k-1}+a_{2k+1})$
$=a_1+2(a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11}+\cdots+a_{59})+a_{61}$
$=2(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11}+\cdots+a_{59})+a_{61}-a_1$
$a_1+a_3+a_5=\cdots=0$ (3개씩 묶음)이고 $a_{61}=a_1$ 이므로
$\sum_{k=1}^{30}(a_{2k-1}+a_{2k+1})=0$이 된다.

200이하의 자연수 중 절댓값이 9가 나오는 경우는 주기 6안에서 2개씩 생기므로 200을 6으로 나눠보면 33과

나머지가 2이므로
$33\times2+1=67$개 만큼 생기게 된다.

622. ②

$\sum_{k=1}^{m+1}(2k-1)(2m+3-2k)^2$

$=\sum_{k=1}^{m}(2k-1)(2m+3-2k)^2+2m+1$이므로

(가)$=f(m)=2m+1$이고

$\sum_{k=1}^{m}(2k-1)(2m+1-2k)^2+8\times\sum_{k=1}^{m}(2k-1)\{m-(k-1)\}$

$+2m+1 = \dfrac{(m+1)^2\{2(m+1)^2+1\}}{3}$에서

(나)$=a=8$, (다)$=g(k)=k-1$이다.

따라서

$f(3)+a+g(5)=7+8+4=19$

623. ③

(i) $n=1$일 때,

$a_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$에서 $a_1=1$, $a_2=1+\dfrac{1}{2}$이므로

(좌변)$=a_1$

(우변)$=\dfrac{1\times2}{4}(2a_2-1)=a_2-\boxed{\dfrac{1}{2}}=1=a_1$

이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+ma_m=\dfrac{m(m+1)}{4}(2a_{m+1}-1)$이다.

$n=m+1$일 때, $(*)$이 성립함을 보이자.

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+ma_m+(m+1)a_{m+1}$

$=\dfrac{m(m+1)}{4}(2a_{m+1}-1)+(m+1)a_{m+1}$

$=\dfrac{m(m+1)}{2}a_{m+1}-\dfrac{m(m+1)}{4}+(m+1)a_{m+1}$

$=(m+1)a_{m+1}\times\boxed{\left(\dfrac{m}{2}+1\right)}-\dfrac{m(m+1)}{4}$

$a_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$에서 $a_{m+1}=a_{m+2}-\dfrac{1}{m+2}$을 이용하면

$=\dfrac{(m+1)(m+2)}{2}\left(a_{m+2}-\boxed{\dfrac{1}{m+2}}\right)-\dfrac{m(m+1)}{4}$

$=\dfrac{(m+1)(m+2)}{4}\left(2a_{m+2}-\dfrac{2}{m+2}-\boxed{\dfrac{m}{m+2}}\right)$

$=\dfrac{(m+1)(m+2)}{4}(2a_{m+2}-1)$

따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=\dfrac{n(n+1)}{4}(2a_{n+1}-1)$

이 성립한다.

$p=\dfrac{1}{2}$, (나) $\dfrac{m+2}{2}$, (다) $\dfrac{1}{m+2}$, (라) $\dfrac{m}{m+2}$이므로

$\dfrac{f(1)\times g(1)}{h(1)}=\dfrac{\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{3}}{\dfrac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}$

624. ⑤

(i) $n\geq2$이므로 (가)$=2$

(ii) $n=k$ $(k\geq2)$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{k^2}<2-\dfrac{1}{k}$이다.

이 부등식의 양변에 $\dfrac{1}{(k+1)^2}$을 더하면

$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{1}{(k+1)^2}<2-\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{(k+1)^2}$이므로

$\dfrac{1}{\boxed{(\text{나})}}=\dfrac{1}{(k+1)^2}$에서 (나)$=(k+1)^2$

이때, $2-\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{(k+1)^2}-\left(2-\dfrac{1}{k+1}\right)=\dfrac{-1}{k(k+1)^2}<0$이므로

(다)$=(k+1)$

따라서 $a=2$, $f(k)=(k+1)^2$, $g(k)=k+1$

$a+\dfrac{f(5)}{g(3)}=2+\dfrac{36}{4}=11$