[목 차]

[확 인]

일차	출 처	학습일	확인
01일차	27학년도 EBS 파이널 1회		
02일차	27학년도 EBS 파이널 2회		
03일차	27학년도 EBS 파이널 3회		
04일차	27학년도 EBS 파이널 4회		
05일차	27학년도 EBS 파이널 5회		
06일차	26학년도 EBS 파이널 1회		
07일차	26학년도 EBS 파이널 2회		
08일차	26학년도 EBS 파이널 3회		
09일차	26학년도 EBS 파이널 4회		
10일차	26학년도 EBS 파이널 5회		
11일차	26학년도 EBS 파이널 6회		
12일차	26학년도 EBS 파이널 7회		
13일차	26학년도 EBS 만점마무리 시즌1 1회		
14일차	26학년도 EBS 만점마무리 시즌1 2회		
15일차	26학년도 EBS 만점마무리 시즌1 3회		
16일차	26학년도 EBS 만점마무리 시즌2 1회		
17일차	26학년도 EBS 만점마무리 시즌2 2회		
18일차	26학년도 EBS 만점마무리 시즌2 3회		
19일차	26학년도 EBS 버티컬 시즌1		
20일차	26학년도 EBS 버티컬 시즌2		
21일차	26학년도 EBS 버티컬 시즌3		
22일차	26학년도 EBS 버티컬 시즌4		
23일차	26학년도 EBS 만점 고난도 1회		
24일차	26학년도 EBS 만점 고난도 2회		
25일차	26학년도 EBS 직전 클리어		
26일차	26학년도 EBS 수능완성 실전 1회		
27일차	26학년도 EBS 수능완성 실전 2회		
28일차	26학년도 EBS 수능완성 실전 3회		
29일차	26학년도 EBS 수능완성 실전 4회		
30일차	26학년도 EBS 수능완성 실전 5회		
31일차	25학년도 EBS 만점마무리 시즌1 1회		
32일차	25학년도 EBS 만점마무리 시즌1 2회		
33일차	25학년도 EBS 만점마무리 시즌1 3회		
34일차	25학년도 EBS 만점마무리 시즌2 1회		
35일차	25학년도 EBS 만점마무리 시즌2 2회		
36일차	25학년도 EBS 만점마무리 시즌2 3회		
37일차	25학년도 EBS 파이널 1회		
38일차	25학년도 EBS 파이널 2회		
39일차	25학년도 EBS 파이널 3회		
40일차	25학년도 EBS 파이널 4회		
41일차	25학년도 EBS 파이널 5회		
42일차	25학년도 EBS 파이널 6회		
43일차	25학년도 EBS 파이널 7회		
44일차	25학년도 EBS 수능완성 실전 1회		
45일차	25학년도 EBS 수능완성 실전 2회		
46일차	25학년도 EBS 수능완성 실전 3회		
47일차	25학년도 EBS 수능완성 실전 4회		
48일차	25학년도 EBS 만점 Black 1회		
49일차	25학년도 EBS 만점 Black 2회		

일일학습 27학년도 EBS 파이널 1회

01 일차 : 26년 월 일

1. 문자 $a,\ b,\ c,\ d$ 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 문자열 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 한 문자만 2개 이상 포함되고 같은 문자끼리는 서로 이웃하는 문자열이 선택될 확률은? [3점]

① $\dfrac{21}{64}$　② $\dfrac{23}{64}$　③ $\dfrac{25}{64}$　④ $\dfrac{27}{64}$　⑤ $\dfrac{29}{64}$

2. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 X에서 X로의 함수 f의 개수는? [4점]

(가) $f(2)\times f(3)=12,\ f(2)<f(3)$이다.
(나) $f(1)\leq f(3)\leq f(5)\leq f(7)$
(다) $f(3)\leq f(4),\ f(3)\leq f(6)$

① 700　② 712　③ 724　④ 736　⑤ 748

3. A가게에서 판매하는 음료 1병의 용량을 확률변수 X, B가게에서 판매하는 음료 1병의 용량을 확률변수 Y라 하자. 두 확률변수 X, Y는 정규분포를 따르고 다음 조건을 만족시킨다.

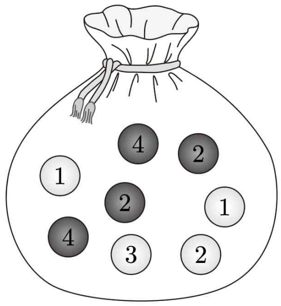
(가) $\mathrm{P}(X \leq 174) = \mathrm{P}(X \geq 206)$
(나) $\mathrm{E}(2X) = \mathrm{E}(Y+140)$, $\mathrm{V}(4X) = \mathrm{V}(Y)$

A가게에서 판매하는 음료 중에서 임의추출한 16병의 용량의 표본평균을 $\overline{X}$, B가게에서 판매하는 음료 중에서 임의추출한 n병의 용량의 표본평균을 $\overline{Y}$라 하자. $\mathrm{P}(\overline{X} \leq 193) = 0.9772$, $\mathrm{P}(Y \leq 236) = 0.0668$일 때, 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 자연수 n의 값을 구하시오. (단, 용량의 단위는 mL이다.) [4점]

〈표준정규분포표〉

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

4. 주머니에 숫자 1, 1, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 흰 공 4개와 숫자 2, 2, 4, 4가 하나씩 적혀 있는 검은 공 4개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내는 시행을 한다. 이 시행을 한 번 한 후 꺼낸 세 공에 적혀 있는 수를 작거나 같은 순부터 크기순으로 a, b, c라 하자. $a+b=c$일 때, 꺼낸 세 공이 모두 같은 색일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



일일학습 | 27학년도 EBS 파이널 2회

02 일차 : 26년 월 일

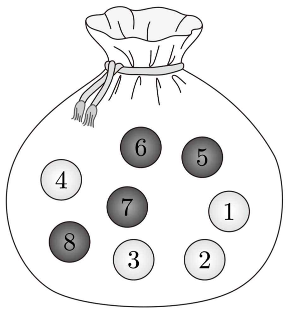
5. 3보다 큰 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 n이 최소일 때, $a+k$의 값은? [3점]

> 두 자연수 a, k에 대하여
> 다항식 $(x^2+a)^n$의 전개식에서 x^4의 계수와 x^8의 계수가 k로 같다.

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

6. 숫자 $1,\ 2,\ 3,\ 4$가 하나씩 적혀 있는 흰 공 4개와 숫자 $5,\ 6,\ 7,\ 8$이 하나씩 적혀 있는 검은 공 4개가 들어 있는 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼낸다. 꺼낸 4개의 공에 적힌 수의 합이 4의 배수일 때, 꺼낸 공 중 흰 공의 개수가 검은 공의 개수보다 많을 확률은? [4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{7}{36}$ ③ $\frac{2}{9}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{5}{18}$



7. 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to Y$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \le f(x_2)$이다.
> (나) $(f(2)-1)(f(4)-4) \ne 0$
> (다) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3 이하이다.

8. 8개의 문자 a, a, b, b, b, c, c, c를 일렬로 나열할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. [4점]

> (가) 양 끝에는 서로 다른 문자를 나열한다.
> (나) a끼리는 서로 이웃하지 않는다.
> (다) b끼리는 서로 이웃하지 않는다.

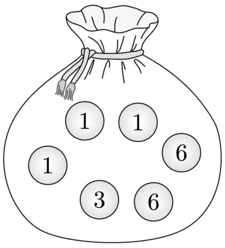
일일학습

27학년도 EBS 파이널 3회

03 일차 : 26년 월 일

9. 숫자 $1,\ 1,\ 1,\ 3,\ 6,\ 6$이 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 두 수의 차를 확률변수 X라 하자. 확률변수 X가 가질 수 있는 값 중 최댓값을 a라 할 때, $\mathrm{V}(a(X+1))$의 값은? [3점]

① 96 ② 100 ③ 104
④ 108 ⑤ 112



10. 빨간색 카드 8장, 파란색 카드 4장, 노란색 카드 2장이 있다. 이 14장의 카드를 네 학생 $\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C},\ \mathrm{D}$에게 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? [4점]

> (가) 노란색 카드는 2명의 학생에게 1장씩 나누어 주고, 노란색 카드를 받지 못한 학생은 1장 이상의 파란색 카드를 받는다.
> (나) 모든 학생은 각각 2장 이상의 카드를 받고, 가장 많은 카드를 받은 학생의 카드 개수와 가장 적은 카드를 받은 학생의 카드 개수의 차는 2 이하이다.

① 762 ② 780 ③ 798
④ 816 ⑤ 834

11. 세 집합

$$A=\{2,\ 4\},\ B=\{3,\ 5,\ 6,\ 7\},$$
$$C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$$

에 대하여 다음 시행을 한다.

> 한 개의 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가
> 2 이하이면 집합 A의 원소 중에서 임의로 하나를 선택하여 a,
> 집합 C의 원소 중에서 임의로 하나를 선택하여 b라 하고,
> 3 이상이면 집합 B의 원소 중에서 임의로 하나를 선택하여 a,
> 집합 C의 원소 중에서 임의로 하나를 선택하여 b라 한다.
> 이때 $\log_a b$의 값이 자연수이면 1점을 얻고
> 그렇지 않으면 0점을 얻는다.

이 시행을 18000번 반복하여 얻은 점수의 합을 확률변수 X라 하자. $\mathrm{P}(X \geq 3075)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 값이 k이다. $10000 \times k$의 값을 구하시오. [4점]

〈표준정규분포표〉

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

12. 두 집합 $X=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$, $Y=\{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에 대하여 $f : X \to Y$인 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택하는 시행을 한다. 이 시행에서 선택한 함수 f가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)=0$일 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

> (가) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.
> (나) $|f(x)|=x$인 x가 적어도 하나 존재한다.

일일학습 27학년도 EBS 파이널 4회

04 일차 : 26년 월 일

13. 이산확률변수 X가 가지는 값이 $-3,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2$이고

$$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{a} & (x=-3,\ -2,\ -1,\ 1) \\ \dfrac{8}{a^2} & (x=2) \end{cases}$$

일 때, $\mathrm{E}(8X+12)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

14. 좌표평면 위의 원점에 있는 점 P와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 4번 반복한다.

주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 1이면 점 P를 x축의 방향으로 1만큼 이동시키고, 2 또는 3이면 점 P를 y축의 방향으로 1만큼 이동시키고, 4 또는 5 또는 6이면 점 P를 y축의 방향으로 -1만큼 이동시킨다.

이 시행을 n $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$번 반복한 후 점 P의 좌표를 $(x_n,\ y_n)$이라 할 때, $y_2,\ y_3$은 모두 0 이상이고 $y_4=0$일 확률은? [4점]

① $\dfrac{149}{1296}$ ② $\dfrac{151}{1296}$ ③ $\dfrac{17}{144}$
④ $\dfrac{155}{1296}$ ⑤ $\dfrac{157}{1296}$

15. 숫자 $1,\ 2,\ 3,\ 4$가 하나씩 적혀 있는 4장의 카드가 들어 있는 주머니 U와 흰 공 1개, 검은 공 2개가 들어 있는 상자 A, 흰 공 1개와 검은 공 5개가 들어 있는 상자 B가 있다. 주머니 U와 두 상자 $\mathrm{A},\ \mathrm{B}$를 이용하여 상수 $k(k=1,\ 2,\ 3)$에 대하여 다음 시행을 한다.

> 주머니 U에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 확인한 후 다시 넣는다.
> 확인한 수가 k 이하이면 상자 A에서 임의로 공을 한 개 꺼내고 확인한 수가 k보다 크면 상자 B에서 임의로 공을 한 개 꺼낸다.

이 시행을 1200번 반복하여 흰 공이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{V}(X)=225$일 때, $\mathrm{P}(X \geq 330)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 값이 a이다. $k+1000\times a$의 값을 구하시오. [4점]

〈표준정규분포표〉

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.341
1.5	0.433
2.0	0.477
2.5	0.494
3.0	0.499

16. 세 명의 학생 $\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C}$에게 세 종류의 간식인 초콜릿 2개, 젤리 3개, 마카롱 5개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 초콜릿끼리, 젤리끼리, 마카롱끼리는 서로 구분하지 않는다.) [4점]

> (가) 모든 학생은 적어도 1개의 마카롱을 받는다.
> (나) 학생 A가 받은 간식의 개수는 2 이하이다.

일일학습

27학년도 EBS 파이널 5회

05 일차 : 26년 월 일

17. 확률변수 X가 평균이 m이고 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다. $\mathrm{P}(x \le X \le x+2\sigma^2)$의 값이 최대가 되도록 하는 x의 값이 6이고, 그 최댓값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것이 0.9544일 때, $m+\sigma$의 값은? [3점]

〈표준정규분포표〉

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 10 ② $\frac{21}{2}$ ③ 11 ④ $\frac{23}{2}$ ⑤ 12

18. 집합

$$X=\{x \mid x\text{는 } 6 \text{ 이하의 자연수}\}$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수는? [4점]

(가) $2f(1)+f(6)=7$
(나) $n\in\{1,\ 2\}$일 때
$f(2n-1) \le f(2n+1),\ f(2n) \le f(2n+2)$

① 415 ② 420 ③ 425 ④ 430 ⑤ 435

19. 어느 모집단의 이산확률변수 X가 가지는 값이 1부터 6까지의 자연수이고

$$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases}\left|\dfrac{x}{10}-k\right| & (x=1,\ 2,\ 3)\\ k & (x=4,\ 5,\ 6)\end{cases}$$

이다. 이 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $400\times\mathrm{P}(\overline{X}\le 2)$의 값을 구하시오. (단, $k>0$) [4점]

20. 숫자 1, 1, 2, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어 있는 주머니 A와 숫자 1, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 3개의 공이 들어 있는 주머니 B가 있다. 두 주머니 A, B와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져서
> 나온 눈의 수가 3 이상이면
> 주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 주머니 B에 넣고,
> 나온 눈의 수가 2 이하이면
> 주머니 A에서 임의로 2개의 공을 꺼내어 주머니 B에 넣는다.

이 시행을 한 번 한 후, 주머니 B에서 임의로 1개의 공을 꺼냈더니 이 공에 적힌 숫자가 3일 때, 주머니 A에 들어 있는 모든 공에 적힌 수의 합이 6일 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

일일학습 26학년도 EBS 파이널 1회

06 일차 : 26년 월 일

21. 2이상의 자연수 n에 대하여 숫자 $1,\ 1,\ 1,\ 1,\ n,\ n,\ 2n,\ 2n$이 각각 하나씩 적혀 있는 8장의 카드가 들어 있는 상자에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 카드에 적힌 수를 확인한 후 꺼낸 상자에 다시 넣는다. 이와 같은 시행을 4번 반복하여 확인한 네 수의 합을 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)=20$일 때, n의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

22. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m_1,\ \sigma^2\right)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m_2,\ \sigma^2\right)$을 따르고 두 확률변수 X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$와 $g(x)$이다. $f(6)=f(14)=g(22)$이고

$$\mathrm{P}(X\le 8)+\mathrm{P}(Y\le 24)=0.6170$$

일 때, $\mathrm{P}(20\le Y\le 24)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, $\sigma>0$) [4점]

〈표준정규분포표〉

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.1336 ② 0.2417 ③ 0.3174 ④ 0.4081 ⑤ 0.5328

23. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $f(1) \le f(2) \le f(3) < f(4) \le f(5) \le f(6)$
(나) $f(2)f(4) = 12$

24. 주머니 A에는 숫자 1, 1, 1, 2, 2가 각각 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어 있고, 주머니 B에는 숫자 1, 2, 3, 4가 각각 하나씩 적혀 있는 4개의 공이 들어 있다. 두 주머니 A, B와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져
6의 약수의 눈이 나오면 주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 주머니 B에 넣은 후 주머니 B에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내고,
6의 약수가 아닌 눈이 나오면 주머니 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어 주머니 B에 넣은 후 주머니 B에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낸다.

이 시행을 한 번 하여 주머니 B에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 곱이 홀수일 때, 주사위에서 나온 눈의 수가 6의 약수일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

일일학습

26학년도 EBS 파이널 2회

07 일차 : 26년 월 일

25. 숫자 4, 5, 6, 7이 하나씩 적혀 있는 4개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 더한 값을 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 4번 반복하여 확인한 네 값의 평균을 $\overline{X}$라 하자. $\sigma(a\overline{X}-7)=\sqrt{15}$일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

26. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수는? [4점]

(가) 함수 f의 치역을 Y라 할 때, $f(1)=n(Y)$이다. (나) $f(1)\le f(2)< f(3)\le f(4)\le f(5)\le f(6)$

① 14 ② 16 ③ 18
④ 20 ⑤ 22

27. 정규분포 $\mathrm{N}(m_1,\ \sigma_1^2)$을 따르는 확률변수 X와 정규분포 $\mathrm{N}(m_2,\ \sigma_2^2)$을 따르는 확률변수 Y가 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 실수 x에 대하여
> $$\mathrm{P}(X \le 3x+70)+\mathrm{P}(Y \ge 2x+90)=1$$
> 이다.

오른쪽 표준정규분포표에서

$$\mathrm{P}(25 \le X \le m_1)=0.3413,$$
$$\mathrm{P}(m_1 \le X \le 70)=0.4772$$

일 때, $m_2+\sigma_2$의 값을 구하시오.
(단, σ_1과 σ_2는 양수이다.) [4점]

〈표준정규분포표〉

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

28. 눌림 스위치와 전기등으로 이루어진 동일한 전기등 세트 두 개가 나란히 놓여 있다. 스위치를 누를 때마다 각 전기등은

'주광색으로 켜짐, 주백색으로 켜짐, 온백색으로 켜짐, 꺼짐'

의 네 가지 상태가 순서대로 반복된다. 현재 왼쪽의 전기등은 주백색으로 켜져 있고, 오른쪽의 전기등은 꺼져 있다. 이 2개의 전기등 세트와 한 개의 주사위를 이용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져서 나온 수가 k일 때,
> $k \le 2$이면 왼쪽 전기등 세트의 스위치를 k번 누른다.
> $k \ge 3$이면 오른쪽 전기등 세트의 스위치를 k번 누른다.

위의 시행을 3번 반복한 후, 이 2개의 전기등이 서로 같은 상태에 있을 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

일일학습 | 26학년도 EBS 파이널 3회

08 일차 : 26년 월 일

29. 숫자 1이 적혀 있는 카드 1장, 숫자 3이 적혀 있는 카드 2장, 숫자 5가 적혀 있는 카드 3장이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 1장의 카드를 꺼내어 카드에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 3번 반복하여 확인한 3개의 수의 평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{V}(a\overline{X}+1)=60$일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

30. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수는? [4점]

(가) $f(1)\times f(8)=4$
(나) 6 이하의 모든 자연수 x에 대하여 $f(x)\leq f(x+2)$이다.

① 2771 ② 2773 ③ 2775 ④ 2777 ⑤ 2779

31. 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 6^2)$을 따르는 확률변수 X와 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 Y가 두 상수 $a(a>0)$, b에 대하여 $Y=aX+b$인 관계를 만족시킨다. $\mathrm{P}(X\le 39)$와 $\mathrm{P}(Y\ge 53)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것이 각각 0.9332, 0.1587일 때, $10(a+b)$의 값을 구하시오. (단, $\sigma>0$) [4점]

〈표준정규분포표〉

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

32. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{n+7}=a_n$　　(나) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\in\left\{\dfrac{1}{3},\ 1,\ 3\right\}$

서로 다른 순서쌍 $(a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7)$의 개수를 구하시오. [4점]

일일학습

26학년도 EBS 파이널 4회

09 일차 : 26년 월 일

33. 어느 회사에서 생산하는 제품 1개의 무게는 평균이 m, 표준편차가 6인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사가 생산한 제품 중에서 임의추출한 9개의 제품의 무게의 표본평균이 200 이상일 확률과 a 이하일 확률은 모두 0.9938로 서로 같을 때, 상수 a의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 무게의 단위는 g이다.) [3점]

〈표준정규분포표〉

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 205 ② 210 ③ 215 ④ 220 ⑤ 225

34. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는? [4점]

(가) $a+b+c+d=9$
(나) $(a-3)(b-3)(c-3)(d-3) \neq 0$

① 128 ② 132 ③ 136 ④ 140 ⑤ 144

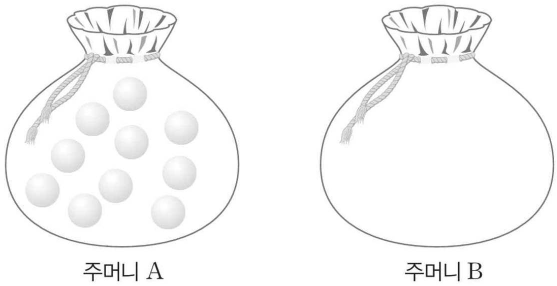
35. 흰 공 10개가 들어 있는 주머니 A와 비어 있는 주머니 B가 있다. 두 주머니 A, B와 주사위 한 개를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 2 이하이면 주머니 A에서 한 개의 공을 꺼내 주머니 B에 넣고, 눈의 수가 3 이상이면 주머니 A에서 두 개의 공을 꺼내 주머니 B에 넣는다.

위의 시행을 반복하여 주머니 B에 들어 있는 공의 개수가 처음으로 6보다 크거나 같을 때, 주사위를 던진 횟수를 확률변수 X라 하자.

$\mathrm{P}(4 \le X \le 5)=\dfrac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



36. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $\{f(1)f(2)f(3)-2\}\times\{f(1)f(2)f(3)-3\}=0$
> (나) $x \in X$에 대하여 $f(x)=x$를 만족시키는 모든 x의 개수는 2이다.

일일학습

26학년도 EBS 파이널 5회

10 일차 : 26년 월 일

37. 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 짝수의 눈이 나오는 사건을 A라 하자. 이 시행의 표본공간의 부분집합인 사건 B에 대하여 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$일 때, 사건 A와 서로 독립인 사건 B의 개수는? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

38. 흰 공 9개와 검은 공 17개를 같은 종류의 주머니 3개에 남김없이 나누어 넣으려고 한다. 다음 조건을 만족시키도록 나누어 넣는 경우의 수는? (단, 같은 색의 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

> (가) 각 주머니에 흰 공을 1개 이상씩 넣는다.
> (나) 각 주머니에 넣는 흰 공의 개수는 서로 다르다.
> (다) 각 주머니에 넣는 공의 개수는 짝수이다.

① 120 ② 126 ③ 132
④ 138 ⑤ 144

39. 자연수 m에 대하여 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(9) < f(21)$ (나) $f(6) > f(28)$

정규분포 $\mathrm{N}\left(2m,\ \dfrac{\sigma^2}{4}\right)$을 따르는 확률변수 Y와 두 실수 a, b에 대하여

$$\mathrm{P}(X \geq a) = \mathrm{P}(Y \leq b)$$

가 성립하고 $\mathrm{P}\left(\dfrac{a}{2} \leq X \leq a+b\right)$의 값이 최대일 때, $b-a$의 값을 구하시오. (단, $\sigma > 0$, $a+2b > 0$) [4점]

40. 자연수 n에 대하여 집합 $S = \{x \mid x$는 $2n$ 이하의 자연수$\}$의 부분집합이고, 원소의 개수가 2인 모든 집합 중에서 임의로 하나를 선택한다. 선택한 집합의 모든 원소의 합이 $2n$보다 클 때, 그 합이 홀수일 확률이 $\dfrac{11}{20}$이 되도록 하는 n의 값을 구하시오. [4점]

일일학습 26학년도 EBS 파이널 6회

11 일차 : 26년 월 일

41. 주머니 A에는 반지름의 길이가 1인 반원 모양의 퍼즐 조각이 12개 들어 있고, 주머니 B에는 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $60°$인 부채꼴 모양의 퍼즐 조각이 12개 들어 있다. 동전 한 개와 주사위 한 개를 동시에 던져서 동전의 앞면이 나오면 나온 주사위의 눈의 수만큼 주머니 A에서 임의로 퍼즐 조각을 꺼내고, 뒷면이 나오면 나온 주사위의 눈의 수만큼 주머니 B에서 임의로 퍼즐 조각을 꺼낸다. 두 번의 시행에서 꺼낸 모든 퍼즐 조각을 남김없이 사용하여 넓이가 π인 원 모양의 퍼즐을 1개 만들 수 있을 때, 이 퍼즐 조각들이 모두 중심각의 크기가 $60°$인 부채꼴 모양일 확률은? (단, 넓이가 π인 원 모양의 퍼즐을 구성하는 퍼즐 조각의 위치는 구분하지 않는다.) [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

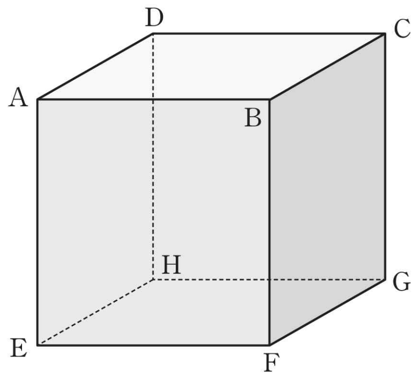
42. 주머니에 1부터 6까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 카드 6장이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 2장의 카드를 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 카드 중에서 6과 서로소인 자연수가 적힌 카드의 장수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{V}(aX+1)=16$일 때, a^2의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 41 ② 42 ③ 43
④ 44 ⑤ 45

43. 다음 조건을 만족시키는 10이하의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $a \le b \le c \le d$
> (나) $a+b+c+d$는 3의 배수이다.

44. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 1인 정육면체 $\mathrm{ABCD-EFGH}$가 있다. 점 P는 이 정육면체의 꼭짓점 A에서 출발하여 각 모서리를 따라 다른 꼭짓점으로 이동하며, 한 꼭짓점에서 모서리를 따라 1만큼 이동하여 도달할 수 있는 3개의 점 중 하나로 이동할 확률은 모두 같다. 이동한 모서리의 길이의 합이 7이고 이때 점 P가 꼭짓점 G에 있을 확률을 $\dfrac{q}{p}$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



일일학습

26학년도 EBS 파이널 7회

12 일차 : 26년 월 일

45. 확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 4인 정규분포를 따른다. 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$와 양수 k에 대하여 $f(k)=f(3k)$이고

$$P(0 \leq X \leq 2k)=0.4332$$

일 때, $m+k$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

〈표준정규분포표〉

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 6 ② $\frac{15}{2}$ ③ 9 ④ $\frac{21}{2}$ ⑤ 12

46. 그림과 같이 책상 위에 4개의 동전이 앞면이 보이도록 놓여 있고, 3개의 동전이 뒷면이 보이도록 놓여 있다.

A가 임의로 3개의 동전을 선택하여 뒤집은 후, B가 임의로 2개의 동전을 선택하여 뒤집을 때, 앞면이 보이도록 놓여 있는 동전의 개수가 1일 확률은? [4점]

① $\frac{22}{245}$ ② $\frac{24}{245}$ ③ $\frac{26}{245}$ ④ $\frac{4}{35}$ ⑤ $\frac{6}{49}$

47. 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 3이 각각 하나씩 적힌 6개의 공이 들어 있는 상자를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 상자에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어 꺼낸 공에 적힌 두 수를 확인한 후 다시 상자에 넣는다.
> 확인한 두 수가 서로 같으면 두 수의 합을 기록하고,
> 확인한 두 수가 서로 다르면 두 수의 차를 기록한다.

이 시행을 3번 반복하여 기록한 모든 수의 평균을 확률변수 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X}=2)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

48. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f:X\to X$의 개수를 구하시오. [4점]

> 5 이하의 모든 자연수 x에 대하여
> $$f(x)\le f(x+1),\ (f\circ f)(x+1)<f(6)$$
> 이다.

일일학습 | 26학년도 EBS 만점마무리 시즌1 1회

13 일차 : 26년 월 일

49. 어느 기관의 자격증 시험에 응시한 수험생의 시험 점수는 평균이 70점, 표준편차가 10점인 정규분포를 따른다고 한다. 이 자격증 시험에 응시한 수험생 중 임의로 선택한 수험생 25명의 시험 점수의 평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(68 \leq \overline{X} \leq a) = 0.8185$이기 위한 상수 a의 값을 위의 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

〈표준정규분포표〉

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 71　② 74　③ 77　④ 80　⑤ 83

50. 집합 $X=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 f 중 다음 조건을 만족시키는 함수의 개수는? [4점]

(가) $f(4) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(1) \leq f(0)$
(나) 함수 f의 치역의 모든 원소의 합은 5이다.

① 18　② 20　③ 22　④ 24　⑤ 26

51. 좌표평면 위를 움직이는 점 P가 원점을 출발하여 다음 규칙에 따라 이동한다.

> 한 개의 주사위를 던져서 홀수의 눈이 나오면 x축의 양의 방향으로 1만큼, 짝수의 눈이 나오면 y축의 양의 방향으로 1만큼 움직인다.

주사위를 6번 던졌을 때, 점 P가 중심이 $(4,\ 3)$이고 반지름의 길이가 2인 원의 내부에 있을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

52. 두 상자 A, B와 자연수 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$이 하나씩 적힌 6개의 공이 있다. 6개의 공 모두를 두 상자 A, B에 임의로 나누어 넣었을 때, 상자 A 속의 공에 적혀 있는 수 중에서 가장 작은 수와 상자 B 속의 공에 적혀 있는 수 중에서 가장 작은 수의 곱을 k라 하자. k의 양의 약수의 개수를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{P}(X^3-2X^2>0)$의 값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이고 비어 있는 상자는 없다.) [4점]

일일학습 | 26학년도 EBS 만점마무리 시즌1 2회

14 일차 : 26년 월 일

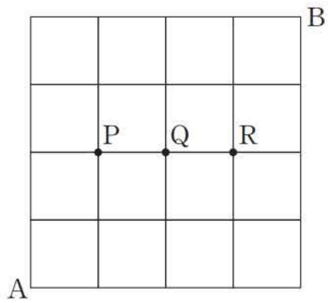
53. 주머니에 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$의 숫자가 각각 하나씩 적힌 5개의 공이 들어 있다. 이 주머니 안의 5개의 공을 이용하여 다음과 같은 시행을 한다.

> 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적힌 수가 짝수이면 한 개의 주사위와 두 개의 동전을 동시에 던지고, 꺼낸 공에 적힌 수가 홀수이면 한 개의 주사위와 세 개의 동전을 동시에 던진다.

이 시행을 한 번 하였을 때, 주사위를 던져서 나온 눈의 수와 동시에 던져진 동전 중 앞면이 나온 동전의 개수의 곱이 홀수일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{5}$　⑤ $\frac{1}{6}$

54. 그림과 같이 정사각형 모양의 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 B지점까지 최단거리로 이동하려고 한다. 세 점 P, Q, R중 지나는 서로 다른 점의 개수를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{P}(X^2-3X+2=0)$의 값은? [4점]



① $\frac{43}{70}$　② $\frac{9}{14}$　③ $\frac{47}{70}$　④ $\frac{7}{10}$　⑤ $\frac{51}{70}$

55. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 집합 X에서 집합 X로의 모든 함수 f 중에서 선택한 하나의 함수 f가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)+f(4)=5$일 확률이 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(가) $f(1)\times f(2)\times f(3)=8$
(나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 홀수이다.

56. 서로 같은 연필 7자루와 서로 다른 볼펜 3자루를 네 명의 학생에게 다음의 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 연필이나 볼펜을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

(가) 네 명의 학생 중 한 명이 받은 연필의 개수와 볼펜의 개수가 같고 그 개수는 각각 2이상이다.
(나) 각 학생이 받은 연필의 개수는 받은 볼펜의 개수보다 크거나 같다.

일일학습 | 26학년도 EBS 만점마무리 시즌1 3회

15 일차 : 26년 월 일

57. 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나온 두 눈의 수 중 작지 않은 수를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{E}(36X-1)$의 값은? [3점]

① 160 ② 165 ③ 170 ④ 175 ⑤ 180

58. 숫자 $1,\ 2,\ 3$이 하나씩 적혀 있는 흰 공 3개와 숫자 $4,\ 5,\ 6,\ 7$이 하나씩 적혀 있는 검은 공 4개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

(가) 꺼낸 3개의 공 중에 흰 공과 검은 공이 모두 있다.
(나) 꺼낸 3개의 공에 적힌 모든 숫자의 곱이 짝수이다.

① $\dfrac{23}{35}$ ② $\dfrac{24}{35}$ ③ $\dfrac{5}{7}$ ④ $\dfrac{26}{35}$ ⑤ $\dfrac{27}{35}$

59. 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma_1^2)$을 따르는 확률변수 X와 정규분포 $\mathrm{N}(2m-1,\ \sigma_2^2)$을 따르는 확률변수 Y의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 할 때, 확률변수 X와 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=g(x+6)$
> (나) $\mathrm{P}(X\le 9)=0.8413$

$m+\sigma_2$의 값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$으로 계산한다.) [4점]

60. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f:X\to Y$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $\sqrt{f(1)f(3)}$의 값이 자연수이다.
> (나) 함수 $f(x)$의 치역의 원소의 개수는 3 이상이다.

일일학습 | 26학년도 EBS 만점마무리 시즌2 1회

16 일차 : 26년 월 일

61. 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$2a$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	a	$\frac{1}{10}$	1

이 모집단에서 크기가 3인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{V}\left(\frac{1}{a}\overline{X}-1\right)$의 값은? (단, $a>0$) [3점]

① 25 ② $\frac{80}{3}$ ③ $\frac{85}{3}$
④ 30 ⑤ $\frac{95}{3}$

62. 한 개의 주사위를 세 번 던져서 나온 눈의 수를 차례대로 a_1, a_2, a_3이라 하자.

$$m=|1-a_1|+|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+|a_3-6|$$

이라 할 때, m의 값이 5가 되도록 하는 모든 순서쌍 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$의 개수는? [4점]

① 44 ② 48 ③ 52
④ 56 ⑤ 60

63. $n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$일 때 좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}_n(x_n,\ y_n)$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 A_0은 원점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$과 일치한다.
(나) $n=0,\ 1,\ 2,\ 3$에 대하여 점 $\mathrm{A}_{n+1}(x_{n+1},\ y_{n+1})$의 좌표는 한 개의 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수를 k라 할 때,

$$x_{n+1}=x_n+\cos\frac{\pi}{3}k,\ y_{n+1}=y_n+\sin\frac{\pi}{3}k$$

이다.

한 개의 주사위를 네 번 던져서 차례로 $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_3,\ \mathrm{A}_4$의 좌표를 정할 때, 점 A_4가 원점 O와 일치할 확률을 $\frac{q}{p}$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

64. 정규분포를 따르는 두 확률변수 X와 Y가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(X\le 2)+\mathrm{P}(X\le 6)=1$
(나) 모든 실수 x에 대하여

$$\mathrm{P}(Y\le x)=\mathrm{P}(X\le x+1)$$

이다.

$\mathrm{P}(X\le 8)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것이 0.9772일 때, $\mathrm{E}(2X-1)+\mathrm{V}(10Y)$의 값을 구하시오. [4점]

〈표준정규분포표〉

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

일일학습

26학년도 EBS 만점마무리 시즌2 2회

17 일차 : 26년 월 일

65. 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 5^2)$을 따르는 모집단에서 크기 98^2인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균 $\overline{x_1}$를 이용하여 구한 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le m \le b$이다. 이 모집단에서 크기 n^2인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균 $\overline{x_2}$를 이용하여 구한 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $c \le m \le d$이다. $b-a=d-c$이고 $d-a=\dfrac{101}{5}$일 때, $n+\overline{x_2}-\overline{x_1}$의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58)=0.99$로 계산한다.) [3점]

① 143 ② 145 ③ 147
④ 149 ⑤ 151

66. 수직선 위에 두 점 $\mathrm{A}(0)$, $\mathrm{B}(3)$이 있다. 한 개의 주사위를 이용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가
> 1 또는 2이면 점 A를 양의 방향으로 2만큼 이동시키고,
> 3 또는 4이면 점 B를 음의 방향으로 1만큼 이동시키며,
> 5 또는 6이면 두 점 모두 이동시키지 않는다.

이 시행을 4번 반복한 후 두 점 A와 B가 처음으로 같은 위치에 있게 되었을 때, 두 점 A와 B의 좌표가 2일 확률은? [4점]

① $\dfrac{9}{16}$ ② $\dfrac{5}{8}$ ③ $\dfrac{11}{16}$
④ $\dfrac{3}{4}$ ⑤ $\dfrac{13}{16}$

67. 좌표평면의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 동전을 사용하여 다음 시행을 한다.

> 동전을 두 번 던져 앞면이 나온 횟수가 2이면 점 P를 x축의 양의 방향으로 $\sqrt{3}$만큼 이동시키고, 0 또는 1이면 점 P를 y축의 양의 방향으로 1만큼 이동시킨다.

이 시행을 432번 반복하여 이동된 점 P와 원점 사이의 거리를 d라 할 때, $d^2 \le \frac{3\times 432^2}{4}+1296$일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 값을 k라 하자. $1000k$의 값을 구하시오. [4점]

〈표준정규분포표〉

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.341
1.5	0.433
2.0	0.477
2.5	0.494

68. 빨간 공 3개, 파란 공 3개, 노란 공 3개를 세 명의 학생 A, B, C에게 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않고, 공을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

> (가) 학생 A가 받는 공의 개수는 0 이상 2 이하이다.
> (나) 학생 B가 받는 공의 개수는 3 이상이다.

일일학습 | 26학년도 EBS 만점마무리 시즌2 3회

18 일차 : 26년 월 일

69. 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구한 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le m \le b$일 때, $b-a=9.8$이다. 같은 표본을 이용하여 구한 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $c \le m \le d$일 때, $d-c$의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58)=0.99$로 계산한다.) [3점]

① 12.7 ② 12.9 ③ 13.1
④ 13.3 ⑤ 13.5

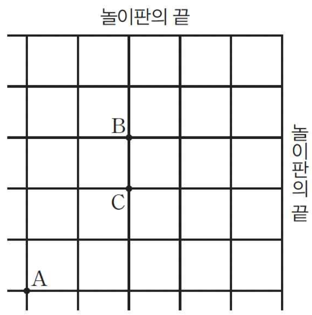
70. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수는? [4점]

(가) 모든 $x \in X$에 대하여 $xf(x)=x$ 또는 $xf(x)$는 짝수이다.
(나) $f(1) < f(2) \le f(4) \le f(6) < f(5)$

① 138 ② 140 ③ 142
④ 144 ⑤ 146

71. 동전 32개를 동시에 던져서 앞면이 나오는 동전의 개수를 확률변수 X라 할 때, 두 자연수 12^X, 8^X의 양의 약수의 개수의 차를 확률변수 Y라 하자. $\mathrm{E}(Y)$의 값을 구하시오. [4점]

72. 그림과 같이 정사각형 모양의 격자로 이루어진 놀이판 위에 세 지점 A, B, C를 정한다. 지점 A 위에 바둑돌을 하나 올려놓고 이 바둑돌과 한 개의 주사위를 사용하여 다음 규칙에 따라 바둑돌을 이동시키는 시행을 한다.



> [규칙 1] 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 1이면 바둑돌을 오른쪽으로 한 칸 이동시키고, 6이면 바둑돌을 위로 한 칸 이동시키고, 그 외의 경우에는 바둑돌을 이동시키지 않는다.
> [규칙 2] 바둑돌이 놀이판의 끝에 도달했을 때, [규칙 1]에 따라 이동시킬 수 없으면 이동시키지 않는다.

이 시행을 6번 반복한 후 바둑돌이 도착한 위치를 P라 하자. $\overline{\mathrm{AB}} < \overline{\mathrm{AP}}$일 때, 바둑돌이 지점 C를 지났을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

일일학습 | 26학년도 EBS 버티컬 시즌1

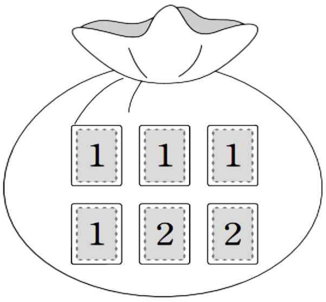
19 일차 : 26년 월 일

73. 숫자 $1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2$가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 들어있는 주머니가 있다. 이 주머니와 한 개의 동전을 사용하여 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다.

> 동전을 한 번 던져 앞면이 나오면 주머니에서 임의로 2장의 카드를 꺼내어 꺼낸 카드에 적혀 있는 두 수의 합을 점수로 얻고, 뒷면이 나오면 주머니에서 임의로 3장의 카드를 꺼내어 꺼낸 카드에 적혀 있는 세 수의 합을 점수로 얻는다.

이 시행을 한 번 하여 얻은 점수를 X라 할 때, $\mathrm{E}(X)$의 값은? [3점]

① $\frac{14}{5}$ ② $\frac{44}{15}$ ③ $\frac{46}{15}$ ④ $\frac{16}{5}$ ⑤ $\frac{10}{3}$



74. 세 제품 A, B, C만을 판매하고 있는 어느 회사가 있다. 이 회사의 세 가지 제품에 대한 선호도를 조사한 결과 제품 A에 대한 선호도가 가장 높게 나타났고, 제품 B에 대한 선호도는 제품 C에 대한 선호도의 2배로 나타났다. 조사에 참여한 고객 중에서 임의로 100명의 고객을 선택할 때, 제품 A를 선호하는 고객이 40명 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 값이 0.977이다. 조사에 참여한 고객 중에서 임의로 16200명의 고객을 선택할 때, 제품 B를 선호하는 고객이 5520명 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 조사에 참여한 모든 고객은 세 제품 A, B, C 중에서 반드시 한 가지 제품을 선호한다.) [4점]

〈표준정규분포표〉

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.192
1.0	0.341
1.5	0.433
2.0	0.477
2.5	0.494

① 0.006 ② 0.023 ③ 0.067 ④ 0.159 ⑤ 0.308

75. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a+b+c+d=12$
(나) 서로 다른 세 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{B}(b,\ c)$, $\mathrm{C}(c,\ d)$는 모두 직선 $y=x$ 위에 있지 않다.
(다) 서로 다른 세 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{B}(b,\ c)$, $\mathrm{C}(c,\ d)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심은 직선 $y=x$ 위에 있다.

76. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 X에서 X로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택한다. 선택한 함수 f가 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 f의 치역의 원소의 개수가 3일 확률을 $\frac{q}{p}$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

함수 $f \circ f$의 치역의 원소 중 홀수의 개수는 3이다.

일일학습 26학년도 EBS 버티컬 시즌2

20 일차 : 26년 월 일

77. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르고 다음 조건을 만족시킬 때, $\mathrm{E}(X^2)$의 값은? [3점]

> (가) $\mathrm{P}(X=n-1)=100\mathrm{P}(X=n)$
> (나) $\mathrm{E}(X)=5$

① 25 ② 26 ③ 27 ④ 28 ⑤ 29

78. 다음 조건을 만족시키는 자연수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는? [4점]

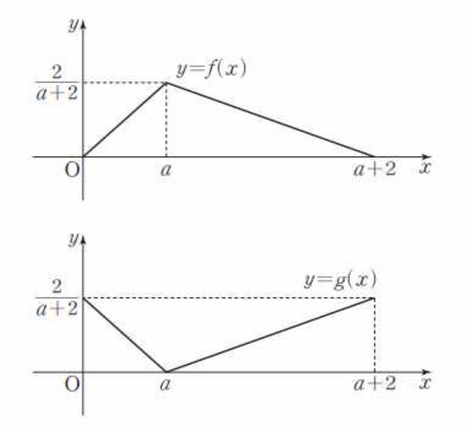
> (가) $a\times b\times c\times d=192$
> (나) $a+b+c+d$는 홀수이다.

① 176 ② 178 ③ 180 ④ 182 ⑤ 184

79. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$이 있다. 집합 X에서 X로의 모든 함수 중에서 임의로 선택한 한 함수 f가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)=4$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(가) $f(2)<f(4)<f(6)$이고, $f(1)\le f(3)\le f(5)\le f(7)$이다.
(나) $f(f(2))=4$

80. $0<a<2$인 상수 a에 대하여 두 연속확률변수 X와 Y가 갖는 값의 범위는 $0\le X\le a+2$, $0\le Y\le a+2$이고, X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이다. 두 확률밀도함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$0<k\le a+2$에서 정의된 함수 $h(k)$를

$$h(k)=|\mathrm{P}(0\le X\le k)-\mathrm{P}(0\le Y\le k)|$$

라 하자. 함수 $h(k)$의 최댓값이 $\frac{5}{14}$일 때, $a=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

일일학습

26학년도 EBS 버티컬 시즌3

21 일차 : 26년 월 일

81. 모평균이 m, 모표준편차가 4인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 25인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{x_1}$를 이용하여 모평균 m에 대한 신뢰도 $95\,\%$의 신뢰구간을 구하면 $a \le m \le b$이다. 이 모집단에서 크기가 400인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{x_2}$를 이용하여 모평균 m에 대한 $95\,\%$의 신뢰구간을 구하면 $c \le m \le d$이다. $a+b=70$, $\overline{x_1}+\overline{x_2}=72$일 때, $d-a$의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$로 계산한다.) [3점]

① 3.95　② 3.96　③ 3.97　④ 3.98　⑤ 3.99

82. 여학생 A를 포함한 여학생 3명과 남학생 B를 포함한 남학생 3명에게 같은 종류의 사탕 10개를 남김없이 나누어 주려고 한다. 모든 여학생이 적어도 한 개의 사탕을 받고, 여학생 A와 남학생 B가 받은 사탕의 개수의 합이 4의 배수가 되도록 나누어 주는 경우의 수는? [4점]

① 140　② 142　③ 144　④ 146　⑤ 148

83. 두 자연수 m, σ에 대하여 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X와 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(20) < f(6) < f(12)$
(나) $\mathrm{P}(|X-m| \geq 3) \leq 0.1336$

$m+\sigma$의 최댓값과 최솟값의 합을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. [4점]

〈표준정규분포표〉

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

84. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$의 부분집합 중에서 중복을 허락하여 임의로 택한 두 집합을 A, B라 할 때,

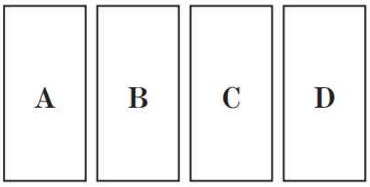
$n(A\cap B)=2$ 또는 $n(A\cup B)=4$

일 확률은 $\dfrac{15}{2^{12}}\times k$이다. 자연수 k의 값을 구하시오. [4점]

일일학습 26학년도 EBS 버티컬 시즌4

22 일차 : 26년 월 일

85. 그림과 같이 문자 A, B, C, D가 하나씩 적힌 4개의 직사각형에 빨간색, 파란색, 노란색의 3가지 색을 사용하여 임의로 칠하는 시행을 한다. 4개의 직사각형에 칠한 색의 종류의 수를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{E}\left(\frac{9}{5}X-2\right)$의 값은? (단, 한 직사각형에는 한 가지 색만을 칠하고 4개의 직사각형에 모두 칠한다.) [3점]



① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$
④ 2 ⑤ $\frac{7}{3}$

86. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m_1,\ \sigma_1^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m_2,\ \sigma_2^2)$을 따르고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$와 확률변수 Y의 확률밀도함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=f(-x)$이다.
> (나) $g(1)=f(9)$

확률변수 X의 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하고, 확률변수 Y의 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{Y}$라 하자.

$$\mathrm{P}(\overline{X}\le 3)=\mathrm{P}(\overline{Y}\ge -1)$$

일 때, 자연수 n의 값은? [4점]

① 121 ② 144 ③ 169
④ 196 ⑤ 225

87. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에서 X로의 모든 일대일대응 중 임의로 선택한 하나의 함수를 f라 할 때, 함수 f가 다음 조건을 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(가) $f(1)f(2)$의 값이 4의 약수이거나 $f(2)f(5)$의 값이 6의 배수이다. (나) $f(1)<f(5)$

88. 같은 종류의 공책 12권을 여학생 A, B를 포함한 세 명의 여학생과 1명의 남학생에게 모든 학생이 적어도 한 권의공책을 받도록 남김없이 나누어 주려고 한다. 여학생 A, B가 받은 공책의 수의 곱이 4의 배수이고, 남학생이 받은 공책의 수가 짝수가 되도록 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. [4점]

일일학습

26학년도 EBS 만점 고난도 1회

23 일차 : 26년 월 일

89. 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르는 확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=\frac{n^2}{48},\ \mathrm{V}(X)=\frac{n(3-p)}{10}$$

일 때, $\sigma(X)$의 값은? (단, n은 자연수이고, $0<p<1$이다.) [3점]

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

90. 어느 고등학교의 8명의 학생이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 2학년과 3학년 학생 수는 각각 2 이상이다.
(나) 2학년과 3학년 학생 수는 각각 1학년 학생 수보다 크지 않다.

그림과 같이 일렬로 나열된 8개의 의자에 8명의 학생을 임의로 앉히는 시행을 한다. 이 시행에서 1번과 8번 의자에는 1학년 학생이 앉아 있고 1학년 학생끼리는 서로 이웃하지 않는 의자에 앉아 있을 때, 2학년 학생 중 적어도 2명의 학생이 서로 이웃한 의자에 앉아있을 확률은? (단, 각 의자에는 1명의 학생만 앉는다.) [4점]

① $\frac{19}{52}$ ② $\frac{5}{13}$ ③ $\frac{21}{52}$
④ $\frac{11}{26}$ ⑤ $\frac{23}{52}$

91. 두 사건 A, B가 서로 배반사건이고

$$\mathrm{P}(A^C \cup B)=\frac{2}{5},\ \mathrm{P}(A^C \cap B)=2\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A^C \cap B^C)$$

을 만족시킬 때, $20\mathrm{P}(A \cup B)$의 값을 구하시오. [4점]

92. 두 집합

$$X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\},\ Y=\{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f : X \to Y$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $f(1)+f(3)+f(5) \geq 5$
(나) $f(2) \leq f(4) \leq f(6)$
(다) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 4이다.

일일학습 | 26학년도 EBS 만점 고난도 2회

24 일차 : 26년 월 일

93. 어느 회사의 구내식당에서는 다음 달의 1일부터 5일까지 5일간 세 종류의 한식과 두 종류의 양식 중 임의로 하루에 한 가지씩 다른 날과 중복되지 않게 점심 식사로 준비하기로 하였다. 한식이 처음으로 나오는 날짜가 다음 달 X일 일 때, 확률변수 X ($X=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$)에 대하여 $\mathrm{V}(2X+3)$의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{7}{5}$ ④ $\frac{8}{5}$ ⑤ $\frac{9}{5}$

94. 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 모집단의 확률변수 X와 이 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 두 확률변수 X, $\overline{X}$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(X \geq 12)+\mathrm{P}(\overline{X} \geq 12)=1$
(나) $\mathrm{P}(X \geq 18)+\mathrm{P}(\overline{X} \geq 10)=1$
(다) $\mathrm{P}(\overline{X} \geq 11)=0.9332$

$\mathrm{P}(10 \leq X \leq 14)+\mathrm{P}(\overline{X} \geq 13)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

〈표준정규분포표〉

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6915 ② 0.7494 ③ 0.7745 ④ 0.8413 ⑤ 0.9104

95. 어느 고등학교의 동아리 발표회에 1학년 3명, 2학년 5명, 3학년 4명이 참가하여 임의로 순서를 정해서 한 명씩 발표한다고 한다. 3학년 학생 중 어느 2명도 연속해서 발표하지 않을 때, 1학년 학생 중 어느 2명도 연속해서 발표하지 않을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

96. 상자에 1부터 10까지의 숫자가 하나씩 적혀 있는 10장의 카드가 들어 있다. 이 중에서 임의로 한 장을 꺼내어 숫자를 확인한 후 다시 넣는 시행을 3회 반복할 때, 꺼낸 카드에 적힌 숫자를 차례로 a, b, c 라 하자. 다음 조건을 만족시키는 a, b, c의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a+b+c \leq 15$
(나) abc는 10의 배수이다.

일일학습

26학년도 EBS 직전 클리어

25 일차 : 26년 월 일

97. 문자 a, a, b, b, c, c가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열하려고 한다. a가 적힌 카드끼리 서로 이웃할 때, b가 적힌 카드가 서로 이웃하지 않을 확률은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$
④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

98. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m_1,\ 8^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m_2,\ 8^2)$을 따른다. 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$와 확률변수 Y의 확률밀도함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(142-x)$이다.
(나) $f(51)<g(51)$, $f(58)>g(58)$

m_2가 정수일 때, $\mathrm{P}(Y\leq 36)$의 최댓값과 최솟값의 합을 아래쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하면?

〈표준정규분포표〉

z	$\mathrm{P}(0\leq Z\leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.7143 ② 0.7583 ③ 0.8502
④ 0.8541 ⑤ 0.9081

99. 1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 5개의 공을 세 상자 A, B, C에 남김없이 나누어 넣으려고 한다. 상자 A에 넣은 공의 개수가 2 이상이고, 상자 A에 넣은 모든 공에 적힌 수의 곱이 짝수인 경우의 수를 구하시오. (단, 공을 넣지 않는 상자가 있을 수 있다.)

100. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 X에서 X로의 모든 일대일 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은 $\dfrac{q}{p}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

집합 X의 어떤 원소 x에 대하여 $x\times\{f(x)+f^{-1}(x)\}$는 홀수이다.

일일학습 | 26학년도 EBS 수능완성 실전 1회

26 일차 : 26년 월 일

101. 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 20^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 25인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균이 $\overline{x}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le m \le b$이다. $b-a=4\overline{x}$일 때, $\overline{x}$의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$로 계산한다.) [3점]

① 0.98 ② 1.96 ③ 2.94
④ 3.92 ⑤ 4.9

102. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$을 따르고 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m+1,\ \sigma^2)$을 따른다. $m \ne 3$이고

$$\{\mathrm{P}(X \ge 3)\}^2 - \mathrm{P}(X \ge 3) = \{\mathrm{P}(Y \ge 4)\}^2 - \mathrm{P}(Y \ge 4)$$

일 때, $\mathrm{P}(1 \le Y \le 3)$의 최댓값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, $\sigma > 0$) [4점]

〈표준정규분포표〉

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.3413 ② 0.3830
③ 0.4332 ④ 0.4772
⑤ 0.6826

103. 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 순서쌍 $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$를 만들 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 순서쌍의 개수를 구하시오. [4점]

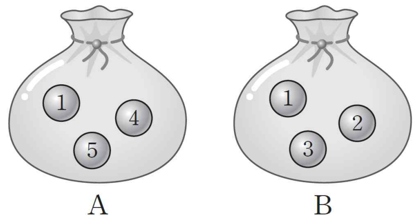
> (가) $\sum_{n=1}^{4} a_n$의 값은 짝수이다.
>
> (나) $a_n \times a_{n+1} \neq 3$ $(n=1,\ 2,\ 3)$

104. 주머니 A에는 숫자 1, 4, 5가 하나씩 적혀 있는 3개의 공이 들어 있고, 주머니 B에는 숫자 1, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 3개의 공이 들어있다. 두 주머니 A, B를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 두 주머니 A, B에서 임의로 각각 1개씩 공을 꺼내어
> 주머니 A에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 주머니 B에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수보다 크면 이 2개의 공을 모두 주머니 B에 넣고,
> 주머니 A에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 주머니 B에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수보다 작거나 같으면 이 2개의 공을 꺼냈던 주머니에 각각 다시 넣는다.

이 시행을 두 번 반복한 후 주머니 A에 들어 있는 공의 개수가 2 이상일 때, 첫 번째 시행 후 주머니 B에 들어 있는 공의 개수가 4일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



일일학습

26학년도 EBS 수능완성 실전 2회

27 일차 : 26년 월 일

105. 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 5^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균이 $\overline{x}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le m \le b$이다. 같은 모집단에서 크기가 $4n$인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균이 $\overline{x}+2$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $c \le m \le d$이다. $b-a=2.8$, $b+d=192.1$일 때, c의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$로 계산한다.) [3점]

① 94.9　② 95.3　③ 95.7
④ 96.1　⑤ 96.5

106. 양수 t에 대하여 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(2,\ 4t^2)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(X \ge 3t - t^2) \le \frac{1}{2}$$

이 되도록 하는 모든 양수 t에 대하여 $\mathrm{P}(t^2-2t+2 \le X \le t^2+2t+2)$의 최댓값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

〈표준정규분포표〉

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5328　② 0.6247　③ 0.6687
④ 0.7745　⑤ 0.8185

107. 숫자 0, 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 5개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수 N의 만의 자리, 천의 자리, 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 수를 각각 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 N의 개수를 구하시오. [4점]

$a_1 \geq a_3 \geq a_4$이고 $a_5 \geq a_2 \times a_4$이다.

108. A, B 두 사람이 가위바위보를 하여 다음과 같은 규칙에 따라 점수를 얻는 게임을 한다.

(ⅰ) 가위를 내어 이기면 이긴 사람이 3점을 얻는다. (ⅱ) 바위나 보를 내어 이기면 이긴 사람이 2점을 얻는다. (ⅲ) 비기면 두 사람 모두 1점을 얻는다. (ⅳ) 진 사람은 점수를 얻지 않는다.

이 게임을 4번 반복한 후 A가 얻은 점수가 6점일 때, B가 얻은 점수가 3점일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. 서로소인 두 자연수 p, q에 대하여 $p+q$의 값을 구하시오. (단, 가위, 바위, 보를 낼 확률은 모두 같다.) [4점]

일일학습

26학년도 EBS 수능완성 실전 3회

28 일차 : 26년 월 일

109. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는? [3점]

(가) $a \times b = 2^7 \times 3^6 \times 5^5 \times 7^4$
(나) $b = k \times a$를 만족시키는 자연수 k가 존재한다

① 96 ② 120 ③ 144
④ 168 ⑤ 192

110. 두 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 X에서 Y로의 모든 일대일함수 f중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

(가) $f(1) < f(2) < f(3)$
(나) $f(3) + f(4) \leq 10$

① $\frac{13}{120}$ ② $\frac{7}{60}$ ③ $\frac{1}{8}$
④ $\frac{2}{15}$ ⑤ $\frac{17}{120}$

111. 어느 음료 회사에서 생산하는 음료수 1팩의 무게는 평균이 $120\,g$, 표준편차가 $8\,g$인 정규분포를 따른다고 한다. 이 음료 회사에서는 생산된 음료수를 임의로 4팩씩 한 상자에 담아 판매한다고 한다. 4팩의 음료수를 담은 상자 중에서 임의로 한 상자를 택했을 때, 상자의 무게가 $494.4\,g$ 이상이고 $507.2\,g$ 이하일 확률을 아래 표준정규분포표를 이용하여 구한 값을 k라 하자. $1000\times k$의 값을 구하시오. (단, 4팩의 음료수를 담은 상자는 충분히 많고, 상자의 무게는 고려하지 않는다.) [4점]

〈표준정규분포표〉

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.192
0.9	0.316
1.3	0.403
1.7	0.455
2.1	0.482

112. 9개의 숫자 $1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3$을 같은 숫자끼리는 이웃하지 않도록 일렬로 나열한 것 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 선택한 것이 다음 조건을 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

> $1,\ 3,\ \underline{1,\ 2},\ 3,\ 2,\ 3,\ 2,\ 3$과 같이 어떤 2개의 3사이에 나열된 숫자가 2개인 경우가 존재한다.

일일학습 26학년도 EBS 수능완성 실전 4회

29 일차 : 26년 월 일

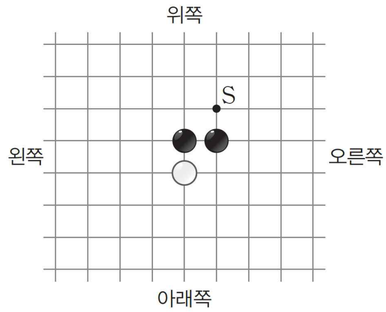
113. 어느 공장에서 생산하는 제품 A의 길이는 평균이 100, 표준편차가 6인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산한 제품 A 중에서 n개를 임의추출하여 얻은 길이의 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, 표본평균 $\overline{X}$와 모평균의 차가 1 이상이면 제품의 생산과정을 멈추고 점검하기로 하였다. 제품의 생산과정을 멈추고 점검하게 될 확률이 10% 이상이 되도록 하는 자연수 n의 최댓값을 아래 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 길이의 단위는 mm이다.) [3점]

〈표준정규분포표〉

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.44	0.425
1.65	0.450
1.96	0.475
2.58	0.495

① 92 ② 94 ③ 96 ④ 98 ⑤ 100

114. 그림과 같이 바둑판의 중앙에 흰 바둑돌 1개와 검은 바둑돌 2개가 놓여 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

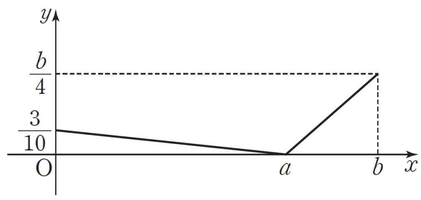


> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 1 또는 2이면 흰 바둑돌을 왼쪽으로 1칸 이동시키고, 3 또는 4 또는 5이면 흰 바둑돌을 아래쪽으로 1칸 이동시키고, 6이면 흰 바둑돌을 오른쪽으로 1칸, 위쪽으로 1칸 이동시킨다.
> 이때 흰 바둑돌이 이동하여 도착할 위치에 검은 바둑돌이 있으면 흰 바둑돌을 이동시키지 않는다.

예를 들어 첫 번째 시행에서 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 6인 경우 흰 바둑돌이 이동하여 도착할 위치에 검은 바둑돌이 있으므로 흰 바둑돌을 이동시키지 않는다. 이 시행을 7번 반복한 결과 흰 바둑돌이 7번째 시행 후 처음으로 S지점에 도착했을 때, 두 번째 시행까지 던진 주사위에서 나온 눈의 수가 모두 2 이하일 확률은? [4점]

① $\frac{5}{16}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{7}{16}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{9}{16}$

115. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le b$이고, X의 확률 밀도함수의 그래프가 그림과 같다.



$\dfrac{\mathrm{P}(X \ge a)}{\mathrm{P}(X \le a)} = \dfrac{4}{3}$일 때, $7(a+b)$의 값을 구하시오.
(단, a, b는 상수이다.) [4점]

116. 다음 조건을 만족시키는 자연수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 구하시오. [4점]

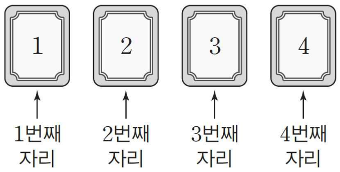
(가) $a \le b$이고, $a+b+c+d=8$이다. (나) 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(a,\ 0)$, $\mathrm{B}(b,\ 0)$에 대하여 직선 AB는 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점을 지나지 않는다.

일일학습

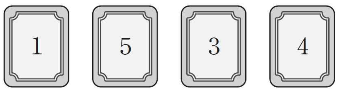
26학년도 EBS 수능완성 실전 5회

30 일차 : 26년 월 일

117. 앞면에는 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있고 뒷면에는 모두 숫자 5가 하나씩 적혀 있는 4장의 카드가 있다. 그림과 같이 탁자 위에 n번째 자리에 앞면에 적혀 있는 숫자가 n인 카드가 앞면이 보이도록 일렬로 놓여 있다.



4개의 동전을 동시에 한 번 던져 나오는 앞면의 개수가 k이면 k번째 자리에 놓여 있는 카드 한 장을 뒤집고, 4개의 동전이 모두 뒷면이 나오면 카드를 뒤집지 않는 시행을 한다. 예를 들어 4개의 동전을 동시에 한 번 던져 나오는 앞면의 개수가 2이면 2번째 자리에 놓여 있는 카드 한 장을 뒤집는다. 이때 4장의 카드에서 보이는 면에 적혀 있는 모든 수는 차례로 1, 5, 3, 4이다.



이 시행을 3번 반복할 때, 3번째 시행 후 4장의 카드에서 보이는 면에 적혀 있는 모든 수의 곱이 홀수일 확률은? (단, n과 k는 4 이하의 자연수이다.) [3점]

① $\frac{27}{2^{10}}$　② $\frac{45}{2^{10}}$　③ $\frac{63}{2^{10}}$　④ $\frac{81}{2^{10}}$　⑤ $\frac{99}{2^{10}}$

118. 숫자 1, 3, 5가 하나씩 적혀 있는 3개의 공이 들어 있는 상자가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수를 3으로 나눈 나머지가 0이면 상자에서 1이 적혀 있는 공 1개와 3이 적혀 있는 공 1개를 꺼내고, 나온 눈의 수를 3으로 나눈 나머지가 1이면 상자에서 1이 적혀 있는 공 1개와 5가 적혀 있는 공 1개를 꺼내고, 나온 눈의 수를 3으로 나눈 나머지가 2이면 상자에서 3이 적혀 있는 공 1개와 5가 적혀 있는 공 1개를 꺼낸다. 상자에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 합을 기록한 후, 꺼낸 공을 상자에 다시 넣는다.

이 시행을 2번 반복하여 기록한 두 수의 평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{E}(\overline{X})=a$, $\mathrm{V}(\overline{X})=b$라 하자. $\mathrm{P}(3b \le \overline{X} \le a)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{4}{9}$　③ $\frac{5}{9}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{7}{9}$

119. 집합 $X=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 X에서 X로의 모든 함수 f중에서 임의로 하나를 선택하는 시행을 한다. 이 시행에서 선택한 함수 f가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)=f(4)$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(가) $f(3)$과 $f(4)$의 값은 모두 4의 약수이다. (나) $f(2)\leq f(3)\leq f(4)\leq f(5)\leq f(6)$

120. 다음 조건을 만족시키는 자연수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍$(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a+b+c+d=20$ (나) $c\times d$는 홀수이다.

일일학습 | 25학년도 EBS 만점마무리 시즌1 1회

31 일차 : 26년 월 일

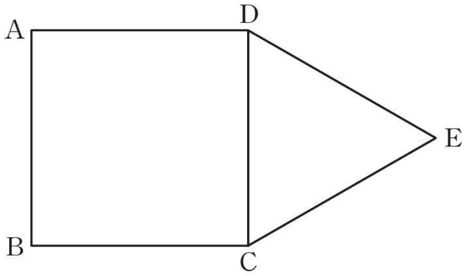
121. 네 개의 숫자 $1,\ 3,\ 5,\ 7$ 중에서 중복을 허용하여 6개를 택하여 여섯 자리 자연수를 만들 때, 한 숫자는 최대 2회 사용하고 같은 숫자끼리는 서로 이웃하지 않는 경우의 수는? [3점]

① 612 ② 616 ③ 620
④ 624 ⑤ 628

122. 주머니 A에 숫자 $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9$가 하나씩 적힌 공 5개가 들어 있고, 주머니 B에 숫자 $2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9$가 적힌 공 5개가 들어 있다. 두 주머니 A, B에서 각각 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 6개의 공에 적힌 공 중에 같은 숫자가 적힌 공의 쌍의 수를 확률변수 X라 하자. $X=1$ 또는 $X=2$일 때, 주머니 A에서 꺼낸 공에 숫자 1이 포함될 확률은? [4점]

① $\dfrac{8}{15}$ ② $\dfrac{3}{5}$ ③ $\dfrac{2}{3}$
④ $\dfrac{11}{15}$ ⑤ $\dfrac{4}{5}$

123. 그림과 같이 한 평면 위에 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD의 변을 따라 움직이는 점 P와 한 변의 길이가 1인 정삼각형 CED의 변을 따라 움직이는 점 Q가 있다.



한 개의 주사위를 한 번 던져 두 점 P, Q를 다음과 같은 규칙으로 이동시키는 시행을 한다.

> (가) 2 이하의 눈이 나오면
> 점 P를 시곗바늘이 도는 방향으로 2만큼,
> 점 Q를 시곗바늘이 도는 방향으로 1만큼
> 이동시킨다.
> (나) 2 이상의 눈이 나오면
> 점 P를 시곗바늘이 도는 반대 방향으로 1만큼,
> 점 Q를 시곗바늘이 도는 반대 방향으로 1만큼
> 이동시킨다.

점 A에 있는 점 P와 점 E에 있는 점 Q가 이 시행을 6번 반복한 후 두 점 P, Q 사이의 거리가 1일 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

124. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to Y$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $f(1)\times f(2)\times f(5)=10$
> (나) X의 서로 다른 임의의 두 원소 a, b $(a<b)$에 대하여
> $f(a)>f(b)$
> 인 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 1이다.

일일학습 25학년도 EBS 만점마무리 시즌1 2회

32 일차 : 26년 월 일

125. 어느 공장에서 생산하는 음료수 한 병의 무게는 평균이 $m\,\mathrm{g}$, 표준편차가 $2\,\mathrm{g}$인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산한 음료수 중 n병을 임의추출하여 얻은 표본평균이 $\overline{x}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le m \le b$이다. $a+b=120$, $100(b-a)=49$일 때, $n+\overline{x}$의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$로 계산한다.) [3점]

① 312 ② 314 ③ 316 ④ 318 ⑤ 320

126. 모집단의 확률변수 X는 자연수 m에 대하여 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 4^2)$을 따르고 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\mathrm{P}(X \ge 10) \le \mathrm{P}(X \le 15)$
> (나) $\mathrm{P}(X \le 14) \le \mathrm{P}(X \ge 9)$

이 모집단에서 크기가 36인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X_1}$, 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X_2}$라 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X_1} \le m-1)+\mathrm{P}(\overline{X_2} \ge 25-m)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

〈표준정규분포표〉

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.3753 ② 0.4328 ③ 0.5328 ④ 0.6170 ⑤ 0.6826

127. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f\ :\ X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $f(2)+f(4)=5$
> (나) 집합 X의 두 원소 $a,\ b$에 대하여 $a<b$이면 $f(a) \leq f(b)$이다.

128. 같은 종류의 공 23개가 있다. 상자 A에 5개, 상자 B에 4개의 공을 먼저 넣고 주사위를 이용하여 두 상자 $\mathrm{A},\ \mathrm{B}$에 추가로 공을 넣는 다음 시행을 한다.

> 한 개의 주사위를 한 번 던져
> 3의 배수의 눈이 나오면 상자 A에 공 2개를 넣고,
> 3의 배수가 아닌 눈이 나오면 상자 B에 공 1개를 넣는다.

7번째 시행 후 두 상자에 들어 있는 공의 개수가 같아질 때, 이전 시행에서 두 상자의 공의 개수가 같아지는 경우는 단 한번만 있었을 확률을 $\dfrac{q}{p}$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, $p,\ q$는 서로소인 자연수이다.) [4점]

일일학습

25학년도 EBS 만점마무리 시즌1 3회

33 일차 : 26년 월 일

129. 2개의 주사위를 동시에 던져서 나온 두 눈의 수의 합의 약수의 개수를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{E}(X)$의 값은? [3점]

① $\frac{101}{36}$ ② $\frac{103}{36}$ ③ $\frac{35}{12}$
④ $\frac{107}{36}$ ⑤ $\frac{109}{36}$

130. 다음 조건을 만족시키는 7 이하의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$ 중에서 임의로 하나를 선택할 때, $a \le b \le c \le d$일 확률은? [4점]

(가) $a \times b$는 홀수이다. (나) $c + d$는 짝수이다.

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{3}{16}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{5}{16}$

131. 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 81인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 m에 대한 99%의 신뢰구간이 $a \le m \le b$이고, 크기가 n인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 m에 대한 99%의 신뢰구간이 $c \le m \le d$이다.

$b-a=\dfrac{8}{3}(d-c)$일 때, n의 값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|\,\mathrm{Z}\,| \le 2.58)=0.99$로 계산한다.) [4점]

132. 다음 조건을 만족시키는 집합

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$의 두 부분집합 $A,\ B$의 모든 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) 두 집합 $A \cup B,\ A \cap B$의 모든 원소의 합은 각각 $17,\ 3$이다. (나) 두 집합 $A,\ B$의 원소의 개수는 모두 2이상이다.

일일학습

25학년도 EBS 만점마무리 시즌2 1회

34 일차 : 26년 월 일

133. 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$에 대하여 X에서 Y로의 모든 일대일함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은? [3점]

(가) $f(1)+f(2)+f(3)$은 짝수이다.
(나) $f(1)<f(2)<f(3)$

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

134. $1,\ 3,\ 5,\ 7$의 숫자가 하나씩 적혀 있는 4개의 공이 들어 있는 주머니와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

한 개의 주사위를 던져서 짝수의 눈이 나오면
주머니에서 두 개의 공을 동시에 꺼내어 공에 적혀 있는
두 수를 합하여 기록하고, 홀수의 눈이 나오면
주머니에서 두 개의 공을 동시에 꺼내어 공에 적혀 있는
두 수 중 작은 수를 기록한다.

위의 시행을 2번 반복하여 기록한 두 수의 평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X}=4)$의 값은?
(단, 각 시행에서 꺼낸 공은 주머니에 다시 넣는다.) [4점]

① $\frac{1}{144}$ ② $\frac{1}{72}$ ③ $\frac{1}{48}$
④ $\frac{1}{36}$ ⑤ $\frac{5}{144}$

135. 검은 공 2개, 빨간 공 3개, 흰 공 4개가 있다. 이 9개의 공을 임의로 일렬로 나열하려고 한다. 검은 공 2개가 서로 이웃하지 않았을 때, 빨간 공 3개가 모두 서로 이웃하지 않을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이고, 같은 색의 공끼리는 서로 구분되지 않는다.) [4점]

136. 다음 조건을 만족시키는 자연수 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a \leq b \leq c \leq 5,\ 6 \leq d \leq e \leq 10$ (나) $a+b+c$는 홀수이고, $d \times e$는 짝수이다.

일일학습 | 25학년도 EBS 만점마무리 시즌2 2회

35 일차 : 26년 월 일

137. 7개의 자연수 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$ 중에서 임의로 택한 서로 다른 세 수의 합이 2의 배수 또는 3의 배수일 확률은? [3점]

① $\frac{3}{7}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{4}{7}$　④ $\frac{9}{14}$　⑤ $\frac{5}{7}$

138. 숫자 1이 하나씩 적혀 있는 카드 3장과 숫자 2가 하나씩 적혀 있는 카드 3장이 있다. 이 6장의 카드를 일렬로 나열하여 만든 6자리 자연수 중에서 임의로 택한 수가 120000보다 클 때, 이 수가 짝수일 확률은? [4점]

① $\frac{5}{16}$　② $\frac{3}{8}$　③ $\frac{7}{16}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{9}{16}$

$\boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{2}$

139. 두 학생 A, B는 같은 종류의 사탕을 각각 10개씩 가지고 있고, A와 B가 가지고 있는 것과 같은 종류의 사탕이 들어 있는 바구니가 있다. A와 B는 다음 규칙에 따라 사탕을 바구니에서 가져가거나 바구니에 넣는 게임을 반복한다.

1회의 게임에서 이긴 사람은 바구니에서 사탕을 2개 꺼내어 가져가고, 진 사람은 가지고 있던 사탕 중 1개를 바구니에 넣으며, 비기면 누구도 바구니에서 사탕을 가져가지 않고, 바구니에 넣지 않는다.

10회의 게임 후 A가 이긴 횟수가 비긴 횟수보다 크지 않고, A가 가진 사탕의 개수가 16인 경우의 수를 k라 할 때, $\frac{k}{10}$의 값을 구하시오. (단, 바구니에는 사탕이 20개 이상 들어 있고, 같은 종류의 사탕끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

140. 정규분포 $\mathrm{N}(5,\ 4^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수는 $f(x)$이고, 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 4^2)$을 따르는 확률변수 Y의 확률밀도함수는 $g(x)$이다. 양수 a가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+m$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $f(3+a)=g(3-a)$ (나) 실수 t에 대하여 $\mathrm{P}(t \le Y \le t+4)$의 값은 $t=a$일 때, 최대이다.

일일학습

25학년도 EBS 만점마무리 시즌2 3회

36 일차 : 26년 월 일

141. 정규분포를 따르는 확률변수 X가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(112 \le X \le 140) = \mathrm{P}(118 \le X \le 146)$
(나) $\mathrm{P}(X \le 113) + \mathrm{P}(139 \le X \le 145) = 0.0062$

$\mathrm{P}(X \le 133)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

〈표준정규분포표〉

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.8413 ② 0.8664 ③ 0.9332 ④ 0.9772 ⑤ 0.9938

142. 1보다 큰 자연수 n에 대하여 짝수 2, 4, 6. $\cdots$, $2n$이 하나씩 적혀 있는 n장의 카드가 있다. 이 카드 중에서 임의로 동시에 택한 서로 다른 2장의 카드에 적힌 두 수를 a, $b\,(a<b)$라 하고 $b-a$의 값을 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)=8$일 때, $n+\mathrm{V}(X)$의 값은? [4점]

① 31 ② 32 ③ 33 ④ 34 ⑤ 35

143. 좌표평면의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음과 같이 점 P를 평행이동시키는 시행을 반복한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 2 이하이면 점 P를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동시키고, 3 이상이면 점 P를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨다.

이 시행을 4번 반복할 때, 4번째 시행 후 점 P가 원 $(x-2)^2+(y-2)^2=2$위에 있을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

144. $n \geq 4$인 자연수 n에 대하여 네 학생 A, B, C, D에게 같은 종류의 연필 $2n$개를 다음 규칙에 따라 나누어 주는 경우의 수를 a_n이라 하자.

(가) 모든 학생은 1개 이상의 연필을 받는다. (나) 네 학생에게 연필을 나누어 준 후 남은 연필이 있을 수 있다. (다) 네 학생 중 임의로 선택한 두 학생이 받은 연필의 개수의 합은 항상 짝수이다.

$\sum_{n=4}^{10} \frac{n^2-n+4}{a_n} = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, 같은 종류의 연필끼리는 구분하지 않으며, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

일일학습

25학년도 EBS 파이널 1회

37 일차 : 26년 월 일

145. 네 자리의 자연수 중에서 각 자리의 숫자를 원소로 하는 집합의 원소의 개수가 2인 자연수의 개수는? [3점]

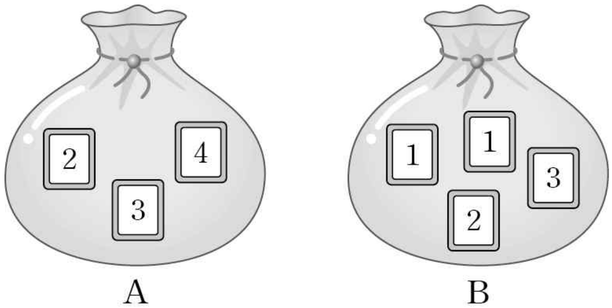
① 561 ② 563 ③ 565
④ 567 ⑤ 569

146. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는? [4점]

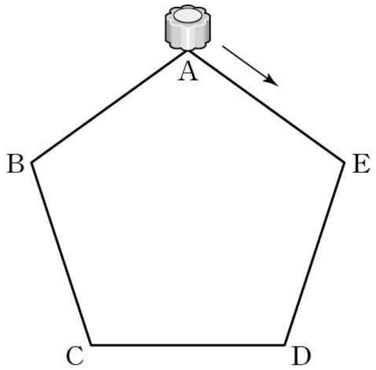
> (가) $a(b+c+d+e)=14$
> (나) $c \geq 3b$

① 271 ② 273 ③ 275
④ 277 ⑤ 279

147. 주머니 A에는 숫자 2, 3, 4가 하나씩 적힌 3장의 카드가 들어 있고, 주머니 B에는 숫자 1, 1, 2, 3이 하나씩 적힌 4장의 카드가 들어 있다. 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 6의 약수이면 주머니 A에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 카드에 적혀 있는 수를 X라 하고, 나온 눈의 수가 6의 약수가 아니면 주머니 B에서 임의로 두 장의 카드를 동시에 꺼내어 꺼낸 카드에 적혀 있는 두 수의 합을 X라 하자. 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(6X-4)$의 값을 구하시오. [4점]



148. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정오각형 ABCDE의 꼭짓점 A에 공깃돌 한 개가 놓여 있다. 빨간 공 3개, 파란 공 2개, 노란 공 1개가 들어 있는 상자에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 빨간 공이 나오면 1만큼, 파란 공이 나오면 2만큼, 노란 공이 나오면 3만큼 정오각형의 둘레를 따라 시계방향으로 공깃돌을 옮기고 꺼낸 공을 다시 상자에 넣는 시행을 한다. 5번의 시행 후에 공깃돌이 점 A에 놓여 있을 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



일일학습 | 25학년도 EBS 파이널 2회

38 일차 : 26년 월 일

149. 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 196σ인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $73.8 \le m \le 74.2$이다. $\sqrt{\sigma}$의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.) [3점]

① $\frac{8}{7}$ ② $\frac{9}{7}$ ③ $\frac{10}{7}$ ④ $\frac{11}{7}$ ⑤ $\frac{12}{7}$

150. 주머니에 $a,\ b,\ 0,\ 1,\ 1$이 각각 하나씩 적힌 6개의 공이 들어 있다. 주머니에서 하나의 공을 임의로 꺼내어 공에 적힌 문자 또는 숫자를 확인하여, 두 학생 $\mathrm{A},\ \mathrm{B}$는 다음과 같은 규칙에 따라 사탕을 받고, 꺼낸 공을 다시 주머니에 집어 넣는 시행을 한다.

> a가 적힌 공을 꺼내면 학생 A만 사탕을 2개 받는다.
> b가 적힌 공을 꺼내면 학생 B만 사탕을 2개 받는다.
> 0이 적힌 공을 꺼내면 두 학생 $\mathrm{A},\ \mathrm{B}$가 모두 사탕을 받지 않는다.
> 1이 적힌 공을 꺼내면 두 학생 $\mathrm{A},\ \mathrm{B}$가 모두 사탕은 1개씩 받는다.

이 시행을 3번 반복한 후 학생 A가 받은 사탕의 개수가 4일 때, 학생 B가 사탕을 받지 못했을 확률은? [4점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{11}$ ③ $\frac{1}{12}$ ④ $\frac{1}{13}$ ⑤ $\frac{1}{14}$

151. 다음 조건을 만족시키는 자연수 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a+b+c+d+=10$
(나) $d<e\ \leq 7$

152. 양수 t에 대하여 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(t,\ t)$를 따른다. 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 $0.726 \leq \mathrm{P}(X \leq 1.6t) \leq\ 0.885$를 만족시키는 모든 양수 t에 대하여 $\mathrm{P}(0 \leq\ X\ \leq\ t+\sqrt{t})$의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 하자. $100\times(m+M)$의 값을 구하시오. [4점]

〈표준정규분포표〉

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.6	0.226
1.0	0.341
1.2	0.385
1.5	0.433
2.0	0.477

일일학습

25학년도 EBS 파이널 3회

39 일차 : 26년 월 일

153. 확률변수 X는 평균이 10이고 표준편차가 2인 정규분포를 따르고, 확률변수 Y는 평균이 m이고 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다. 두 확률변수 X, Y가

$$\mathrm{P}(X \geq 12) = \mathrm{P}(Y \leq 12)$$

$$\mathrm{P}(6 \leq X \leq 10) + \mathrm{P}(Y \geq 21) = \frac{1}{2}$$

을 만족시킬 때, $\mathrm{P}\left(\frac{27}{2} \leq Y \leq 21\right)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

〈표준정규분포표〉

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

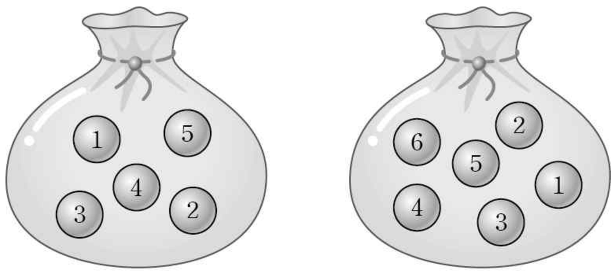
① 0.6687 ② 0.7745 ③ 0.8185
④ 0.9104 ⑤ 0.9544

154. 주머니 A에는 숫자 1, 2, 3, 4, 5가 하나씩 적힌 5개의 공이 들어 있고, 주머니 B에는 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적힌 6개의 공이 들어 있다. 주사위 한 개와 두 주머니 A, B를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져
> 나온 눈의 수가 6의 약수이면
> 주머니 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내고,
> 나온 눈의 수가 6의 약수가 아니면
> 주머니 B에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낸다.

이 시행을 한 번 하여 주머니에서 꺼낸 공에 적힌 모든 수의 합이 짝수일 때, 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 6의 약수일 확률은? [4점]

① $\frac{5}{13}$ ② $\frac{6}{13}$ ③ $\frac{7}{13}$
④ $\frac{8}{13}$ ⑤ $\frac{9}{13}$



A B

155. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 X에서 X로의 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $f(5)$는 3의 배수이다.
(나) $f(1)\leq f(3)\leq f(5)$
(다) $f(2)\times f(4)\times f(6)=f(5)$

156. 숫자 $1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3$이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 들어 있는 상자가 있다. 이 상자에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 카드에 적힌 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 n번 반복하여 확인한 n개의 수의 평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{5}{18}$일 때, $n\times \mathrm{P}\left(\dfrac{n+1}{2}\leq \overline{X}\leq \dfrac{n+2}{2}\right)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

일일학습 25학년도 EBS 파이널 4회

40 일차 : 26년 월 일

157. 두 연속확률변수 X와 Y가 갖는 값의 범위는 $-2 \leq X \leq 4$, $-2 \leq Y \leq 4$이고 X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이다. 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} ax(x+2) & (-2 \leq x \leq 0) \\ bx(x-4) & (0 < x \leq 4) \end{cases}$$

이고

$$\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{4} f(x)\,dx$$

를 만족시킬 때, $-2 \leq x \leq 4$인 모든 실수 x에 대하여

$$g(x)=k-\frac{1}{2}f(x)$$

이다. $\mathrm{P}(-4k \leq Y \leq 4k)$의 값은? (단, a, b, k는 상수이다.) [3점]

① $\frac{9}{32}$ ② $\frac{29}{96}$ ③ $\frac{31}{96}$ ④ $\frac{11}{32}$ ⑤ $\frac{35}{96}$

158. 주머니에 숫자 1, 2, 3, 4, 5가 하나씩 적혀 있는 빨간 공 5개와 숫자 4, 5, 6, 7, 8이 하나씩 적혀 있는 파란 공 5개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내는 시행에서 꺼낸 공에 적힌 수가 같은 것이 있을 때, 꺼낸 공이 모두 짝수이거나 모두 홀수일 확률은? [4점]

① $\frac{4}{55}$ ② $\frac{6}{55}$ ③ $\frac{8}{55}$ ④ $\frac{2}{11}$ ⑤ $\frac{12}{55}$

159. 숫자 $1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3$이 하나씩 적힌 카드 6장이 들어 있는 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 카드에 적힌 숫자를 확인한 후 다시 주머니에 넣는 시행을 반복한다. 꺼낸 카드에 적힌 모든 수의 합이 처음으로 4 이상이 될 때까지 주머니에서 카드를 꺼낸 횟수를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{E}\left(12X-\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오. [4점]

160. 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$을 따르고 확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)$일 때, 함수 $g(x)$는

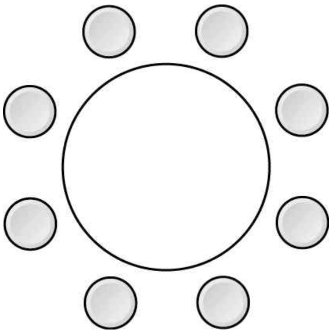
$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<5) \\ f(10-x) & (x\geq 5)\end{cases}$$

이다. 자연수 n에 대하여 x에 대한 방정식 $g(x)=g(n)$의 서로 다른 실근의 개수를 $h_m(n)$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{9} h_m(n)=21$을 만족시키는 자연수 m의 값을 구하시오. [4점]

일일학습 | 25학년도 EBS 파이널 5회

41 일차 : 26년 　　월 　　일

161. 그림과 같이 원탁의 둘레에 일정한 간격으로 8개의 의자가 놓여 있다. 여학생 3명과 A, B를 포함한 남학생 5명이 의자에 모두 앉을 때, A의 양 옆과 B의 양 옆에 모두 여학생이 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



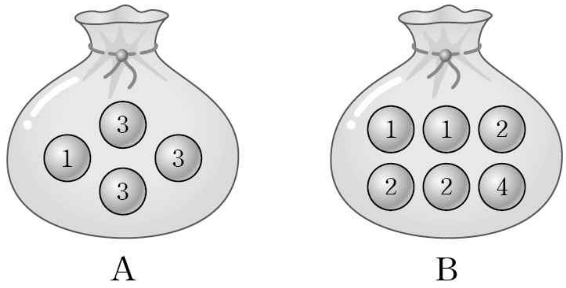
① 48 　② 54 　③ 60 　④ 66 　⑤ 72

162. 주머니 A에는 숫자 1, 3, 3, 3이 하나씩 적힌 4개의 공이 들어 있고, 주머니 B에는 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 4가 하나씩 적힌 6개의 공이 들어 있다. 두 주머니 A, B를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 두 주머니 A, B에서 임의로 각각 한 개의 공을 꺼내어 공에 적힌 수를 확인한 후 다시 꺼낸 주머니에 넣는다.
> 두 주머니 A, B에서 꺼내어 확인한 수를 각각 a, b라 할 때, $a \geq b$이면 $a-b$점을 얻고, $a < b$이면 b점을 얻는다.

이 시행을 2번 반복하여 얻은 점수의 합이 4일 때, 첫 번째 시행에서 얻은 점수와 두 번째 시행에서 얻은 점수가 같을 확률은? [4점]

① $\dfrac{72}{97}$ 　② $\dfrac{75}{97}$ 　③ $\dfrac{78}{97}$ 　④ $\dfrac{81}{97}$ 　⑤ $\dfrac{84}{97}$



163. 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 X에서 Y로의 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)\leq 17$
(나) 3 이하의 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)\leq f(n+1)$이다.

164. 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X와 정규분포 $\mathrm{N}(2m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 Y에 대하여 함수 $f(t)$를

$$f(t)=\mathrm{P}(X\leq t)+\mathrm{P}(Y\geq t)$$

라 하자. 함수 $f(t)$가 $t=9$에서 최댓값 1.866을 가질 때, $1000\times\mathrm{P}(8\leq Y\leq 13)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. (단, $m>0$, $\sigma>0$) [4점]

〈표준정규분포표〉

z	$\mathrm{P}(0\leq Z\leq z)$
0.5	0.192
1.0	0.341
1.5	0.433
2.0	0.477

일일학습

25학년도 EBS 파이널 6회

42 일차 : 26년 월 일

165. 남학생 4명, 여학생 5명으로 구성된 동아리에서 6명을 선택하고 선택된 이 6명이 일정한 간격으로 다음 조건을 만족시키며 원형의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는?
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다) [3점]

(가) 남학생의 수가 여학생의 수보다 크거나 같다.
(나) 여학생끼리는 서로 이웃하지 않는다.

① 800 ② 900 ③ 1000 ④ 1100 ⑤ 1200

166. 두개의 주사위를 동시에 던지는 시행을 288번 반복할 때, 던져서 나온 두 눈의 수의 합이 방정식 $(x-3)(x-5)(x-7)=0$의 해가 되는 횟수를 확률변수 X라 한다. $\mathrm{P}(100 \leq X \leq 108)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

〈표준정규분포표〉

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.2417 ② 0.2857 ③ 0.4332
④ 0.5328 ⑤ 0.6826

167. 주머니 A에는 숫자 $1,\ 2,\ 3,\ 4$가 하나씩 적혀 있는 4개의 공이 들어 있고, 주머니 B에는 숫자 $1,\ 3,\ 5,\ 7$이 하나씩 적혀 있는 4개의 공이 들어 있다. 주머니 A에서 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자를 a, 주머니 B 에서 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자를 b라 할 때, 확률변수 X를

$$X=\begin{cases} a+b & (a=b\text{인 경우}) \\ |a-b| & (a\neq b\text{인 경우}) \end{cases}$$

라 하자. $\mathrm{E}(8X+2)$의 값을 구하시오. [4점]

168. A, B, C 3명의 학생에게 세 종류의 학용품인 연필 2자루, 볼펜 3자루, 형광펜 4자루 중에서 7자루를 선택하여 다음 조건을 만족시키면서 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 연필끼리, 볼펜끼리, 형광펜끼리는 서로 구별하지 않으며 학용품을 한 개도 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

(가) 연필 2자루는 A 또는 B학생에게만 남김없이 나누어 준다. (나) 모든 학생은 5개 이하의 학용품을 받는다.

일일학습

25학년도 EBS 파이널 7회

43 일차 : 26년 월 일

169. 집합 $U=\{a,\ b,\ c,\ d\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여

$$n(A)>n(B)$$

를 만족시키는 두 집합 A, B의 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는? [3점]

① 85 ② 87 ③ 89
④ 91 ⑤ 93

170. 정수 m에 대하여 평균이 m, 표준편차가 12인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. 모집단의 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(-19)<f(13)\le f(-1)$$

을 만족시킬 때, $\mathrm{P}(|\overline{X}-2m|\le 2)$의 최댓값과 최솟값의 합을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

〈표준정규분포표〉

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5189 ② 0.7315 ③ 0.6273
④ 0.8476 ⑤ 0.9531

171. 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8개의 의자를 일정한 간격을 두고 임의로 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 합이 7보다 작지 않도록 배열할 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

172. 숫자 1, 2, 3이 하나씩 적힌 3개의 흰 공과 숫자 1, 2, 3, 4, 5가 하나씩 적힌 5개의 검은 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니를 사용하여 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 게임을 한다.

이 주머니에서 1개의 공을 꺼내어 꺼낸 공의 색과 적힌 수를 확인한 후 다시 넣는다. 흰 공을 꺼내면 꺼낸 공에 적힌 수를 점수로 얻고, 검은 공을 꺼내면 0점을 얻는다.

이 게임을 5번 반복하여 꺼낸 공에 적힌 수를 차례로 a, b, c, d, e라 할 때, 얻은 점수의 합이 11이 되는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수를 구하시오. [4점]

일일학습 | 25학년도 EBS 수능완성 실전 1회

44 일차 : 26년 월 일

173. 상자 A에는 흰 공 4개와 검은 공 6개가 들어 있고, 상자 B는 비어 있다. 상자 A에 들어 있는 공을 이용하여 다음 시행을 한다.

> 상자 A에서 임의로 3개의 공을 꺼내어
> 흰 공이 나오면 꺼낸 공 3개를 상자 B에 넣은 후
> 상자 A에서 임의로 2개의 공을 더 꺼내어 상자 B에 넣고,
> 흰 공이 나오지 않으면 꺼낸 공 3개만 상자 B에 넣는다.

이 시행 후 두 상자 A와 B에 들어 있는 검은 공의 개수가 서로 같을 확률은? [3점]

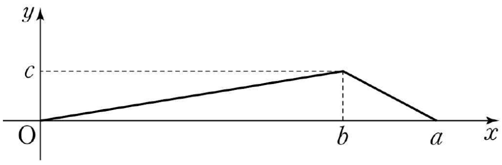
① $\frac{4}{7}$ ② $\frac{25}{42}$ ③ $\frac{13}{21}$
④ $\frac{9}{14}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

174. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에서 집합 $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$로의 함수 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는? [4점]

> 4 이하의 자연수 n에 대하여 집합 $\{x\,|\,f(x)=n,\ x\in X\}$의 원소의 개수를 a_n이라 하면 3 이하의 모든 자연수 k에 대하여 $a_k+a_{k+1}=3$이다.

① 320 ② 340 ③ 360
④ 380 ⑤ 400

175. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \leq X \leq a$이고, X의 확률밀도함수의 그래프가 그림과 같다.



$4\mathrm{P}\left(0 \leq X \leq \dfrac{b}{2}\right) = 3\mathrm{P}(b \leq X \leq a)$일 때, $\mathrm{P}\left(\dfrac{b}{2} \leq X \leq \dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, a, b, c는 상수이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

176. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a \times b \times c \times d = 192$ (나) $a+b+c+d$는 홀수이다.

일일학습

25학년도 EBS 수능완성 실전 2회

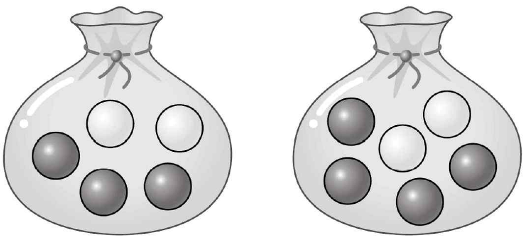
45 일차 : 26년 월 일

177. 주머니 A에는 흰 공 2개와 검은 공 3개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 공 2개와 검은 공 4개가 들어 있다. 두 주머니 A, B와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져
> 나오는 눈의 수가 홀수이면
> 주머니 A에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 주머니 B에 넣은 후 주머니 B에서 임의로 한 개의 공을 꺼내고,
> 나오는 눈의 수가 짝수이면
> 주머니 A에서 임의로 두 개의 공을 동시에 꺼내어 주머니 B에 넣은 후 주머니 B에서 임의로 한 개의 공을 꺼낸다.

이 시행을 한 번 할 때, 주머니 B에서 꺼낸 공이 흰 공일 확률은? [3점]

① $\frac{17}{56}$ ② $\frac{11}{35}$ ③ $\frac{13}{40}$ ④ $\frac{47}{140}$ ⑤ $\frac{97}{280}$



178. 양수 a에 대하여 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $-a \le X \le a+1$이고, X의 확률밀도함수 $f(x)$는 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases} x+a & (-a \le x < 0) \\ a & (0 \le x < a) \\ -a(x-a-1) & (a \le x \le a+1) \end{cases}$$

$\mathrm{P}(k \le X \le a)=\frac{1}{2}$을 만족시키는 상수 k의 값은? [4점]

① $\frac{-2+\sqrt{3}}{6}$ ② $\frac{-2+\sqrt{3}}{5}$ ③ $\frac{-2+\sqrt{3}}{4}$ ④ $\frac{-2+\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{-2+\sqrt{3}}{2}$

179. 어느 장난감 매장에서 오픈기념으로 장난감 2개를 넣어 포장한 럭키박스를 판매하려고 한다. 같은 종류의 인형 3개, 같은 종류의 피규어 3개, 같은 종류의 자석블록 2개 중에서 임의로 2개의 장난감을 택하여 럭키박스에 넣을 때, 넣은 2개의 장난감이 서로 다른 종류일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 럭키박스에 넣은 2개의 장난감의 순서는 구분하지 않고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

180. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에서 X로의 함수 $f : X \to X$ 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

3 이하의 자연수 n에 대하여 $f(n) > f(n+2)$인 n의 개수는 2이다.

일일학습 | 25학년도 EBS 수능완성 실전 3회

46 일차 : 26년 월 일

181. 모평균 m, 모표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $a \le m \le b$이다. 또 이 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $c \le m \le d$이다. $\dfrac{b-a}{d-c} \ge 4.3$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은?
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58) = 0.99$로 계산한다.) [3점]

① 91 ② 93 ③ 95
④ 97 ⑤ 99

182. 확률변수 X는 평균이 m_1, 표준편차가 4인 정규분포를 따르고, 확률변수 Y는 평균이 m_2, 표준편차가 4인 정규분포를 따른다고 한다. 두 확률변수 X, Y의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \le g(20)$이다.
(나) $f(16) = g(16)$

$\mathrm{P}(X \le 10) + \mathrm{P}(Y \ge 22)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, $m_1 \ne m_2$이고, Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.) [4점]

〈표준정규분포표〉

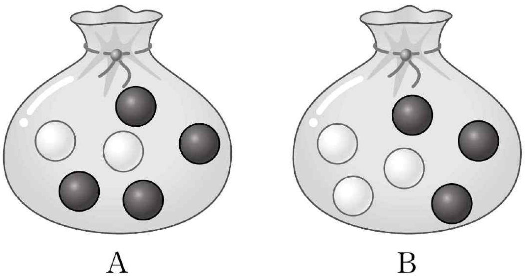
z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.1915 ② 0.3085
③ 0.4328 ④ 0.5328
⑤ 0.6170

183. 주머니 A에는 흰 공 2개와 검은 공 4개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 공 3개와 검은 공 3개가 들어 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 두 주머니 A, B에서 임의로 각각 한 개의 공을 동시에 꺼내어 두 공의 색이 같으면 주사위를 2번 던져 나온 두 눈의 수를 곱한 값을 점수로 받고,
> 두 공의 색이 다르면 주사위를 1번 던져 나온 눈의 수에 3을 곱한 값을 점수로 받는다.

이 시행을 한 번 하여 받은 점수가 6의 배수일 때, 주머니에서 꺼낸 두 공의 색이 서로 다를 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



184. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 같은 종류의 사과 2개와 같은 종류의 배 10개를 남김없이 나누어주려고 한다. 받은 사과의 개수와 배의 개수가 같은 학생이 단 한 명이 되도록 나누어주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 종류의 과일은 구별하지 않고, 모든 학생은 한 개 이상의 과일을 받는다.) [4점]

일일학습

25학년도 EBS 수능완성 실전 4회

47 일차 : 26년 월 일

185. 어느 지역에 살고 있는 회사원의 1일 출퇴근 시간을 확률변수 X라 하면 X는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르고

$$\mathrm{P}(m \le X \le 120) + \mathrm{P}(X \le 80) = 0.5$$

이다. 이 지역에 살고 있는 회사원 중에서 임의추출한 4명의 1일 출퇴근 시간의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$$\mathrm{P}(\overline{X} \le 90) = \mathrm{P}(\overline{X} \ge m + \sigma)$$

일 때, $\mathrm{P}(\overline{X} \le 95)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 출퇴근 시간의 단위는 분이다.) [3점]

〈표준정규분포표〉

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1587
④ 0.3085 ⑤ 0.3413

186. 3보다 큰 상수 k에 대하여 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le k$이고 X의 확률밀도함수 $f(x)$는 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} ax & (0 \le x \le 2) \\ 2a & (2 \le x \le k) \end{cases}$$

연속확률변수 Y가 갖는 값의 범위는 $0 \le Y \le 6$이고 Y의 확률밀도함수 $g(x)$가

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (0 \le x \le 3) \\ f(6-x) & (3 \le x \le 6) \end{cases}$$

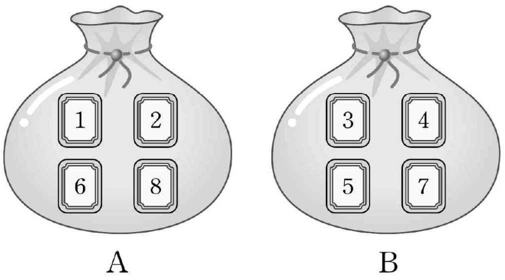
일 때, $\mathrm{P}\left(1 \le X \le \frac{2}{3}k\right)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① $\frac{7}{16}$ ② $\frac{11}{24}$ ③ $\frac{23}{48}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{25}{48}$

187. 주머니 A에는 숫자 $1,\ 2,\ 6,\ 8$이 하나씩 적혀 있는 4장의 카드가 들어 있고, 주머니 B에는 숫자 $3,\ 4,\ 5,\ 7$이 하나씩 적혀 있는 4장의 카드가 들어 있다. 두 주머니 $\mathrm{A},\ \mathrm{B}$와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져
> 나온 눈의 수가 6의 약수이면
> 주머니 A에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 주머니 B에 넣고,
> 나온 눈의 수가 6의 약수가 아니면
> 주머니 B에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 주머니 A에 넣는다.

이 시행을 두 번 반복한 후 주머니 A에 들어 있는 카드에 적혀 있는 수의 합이 주머니 B에 들어 있는 카드에 적혀 있는 수의 합 보다 클 때, 두 주머니 $\mathrm{A},\ \mathrm{B}$에 들어 있는 카드의 개수가 같을 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



188. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f:X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) 5 이하의 모든 자연수 x에 대하여 $f(x) \le f(x+1)$이다.
> (나) $3 \le x \le 4$일 때, $f(x)f(x+1)f(x+2)$의 값은 3의 배수이다.

일일학습

25학년도 EBS 만점 Black 1회

48 일차 : 26년 월 일

189. 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $H(t)$가

$$H(t)=\mathrm{P}(X \le t+2)-\mathrm{P}(X \ge t-2)$$

이다. $H(4)=0,\ H(6)=0.4332$일 때, $\mathrm{P}\left(\frac{4}{3} \le X \le \frac{20}{3}\right)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

〈표준정규분포표〉

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5328 ② 0.6826 ③ 0.7745 ④ 0.8664 ⑤ 0.9104

190. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수는? [4점]

(가) $k \in X$인 모든 k에 대하여 $k \times f(k)$는 짝수이다.
(나) $f(1) \le f(3) \le f(5)$
(다) $f(2)f(4)f(6)=f(5)$

① 65 ② 70 ③ 75 ④ 80 ⑤ 85

191. 세 개의 문자 a, b, c중에서 중복을 허락하여 5개를 택해 일렬로 나열할 때, 같은 문자끼리는 서로 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수를 구하시오. [4점]

192. 주머니에 숫자 1, 2, 3이 하나씩 적힌 공이 각각 2개씩 들어 있다. 이 주머니와 한 개의 동전을 사용하여 다음의 시행을 한다.

동전을 한 번 던져 앞면이 나오면 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 꺼낸 3개의 공에 적힌 수를 확인하고, 뒷면이 나오면 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어 꺼낸 2개의 공에 적힌 수를 확인한다. 단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.

위의 시행을 2번 반복한 후 첫 번째와 두 번째 시행에서 꺼낸 공들에 적힌 수의 합을 각각 a_1, a_2라 하자. $a_1+a_2=9$일 때, $|a_1-a_2|>1$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

일일학습

25학년도 EBS 만점 Black 2회

49 일차 : 26년 월 일

193. 숫자 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 6장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 원형으로 일정한 간격을 두고 임의로 배열할 때, 이웃한 카드에 적힌 두 수의 곱이 모두 짝수 또는 서로 마주 보는 카드에 적힌 두 수의 합이 모두 7일 확률은?
(단, 회전하여 일치하는 경우는 같은 것으로 본다.) [3점]

① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{3}{20}$
④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

194. 주머니에 숫자 $1,\ 2,\ 3,\ 4$가 하나씩 적힌 공 4개가 들어 있다. 이 주머니와 한 개의 주사위를 사용하여 다음의 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져
> 나온 눈의 수가 3의 배수이면 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어 공에 적힌 수의 곱의 양의 약수의 개수를 기록한 후 꺼낸 공은 다시 주머니에 넣고,
> 나온 눈의 수가 3의 배수가 아니면 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 공에 적힌 수의 양의 약수의 개수를 기록한 후 꺼낸 공은 다시 주머니에 넣는다.

이 시행을 2번 반복하여 기록한 두 수의 평균을 $\overline{X}$ 할 때,
$\mathrm{P}(\overline{X}=3)$의 값은? [4점]

① $\frac{4}{27}$ ② $\frac{5}{27}$ ③ $\frac{2}{9}$
④ $\frac{7}{27}$ ⑤ $\frac{8}{27}$

195. 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$\frac{1}{4}$	b	$\frac{1}{12}$	1

확률변수 Y가 가지는 값이 4이하의 모든 자연수일 때,

$$\mathrm{P}(Y=k)=\frac{k}{2}\times\mathrm{P}(X=k)\ (k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

가 성립한다. $\mathrm{E}(4Y+3)$의 값을 구하시오. [4점]

196. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에서 X로의 두 함수 $f,\ g$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 f는 일대일대응이다.
> (나) 함수 g의 치역의 원소의 개수는 2이다.

두 함수 $f,\ g$의 순서쌍 $(f,\ g)$중 임의로 하나를 택할 때, 함수 $f\circ g$의 치역의 모든 원소의 곱을 S_1, 함수 $g\circ f$의 치역의 모든 원소의 합을 S_2라 하자. $S_1=2S_2$일 확률을 p라 할 때, $120\times p$의 값을 구하시오. [4점]

[정답 및 해설]

1. 정답 ③

문자 a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 문자열의 개수는 서로 다른 4개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_4\Pi_4=4^4$

(ⅰ) 한 문자만 2개 포함될 때

문자 a, b, c, d 중에서 2개 포함되는 한 문자를 정하는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

같은 문자 2개가 서로 이웃해야 하므로 네 자리 중 같은 문자 2개를 서로 이웃하도록 나열하는 경우의 수는 3

★★□□, □★★□, □□★★

같은 문자 2개를 나열한 후 남은 2곳에 나머지 문자 중 서로 다른 2개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_3P_2=3\times2=6$

그러므로 이때의 확률은

$\dfrac{4\times3\times6}{4^4}=\dfrac{9}{32}$

(ⅱ) 한 문자만 3개 포함될 때

문자 a, b, c, d 중에서 3개 포함되는 한 문자를 정하는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

같은 문자 3개가 서로 이웃해야 하므로 네 자리 중 같은 문자 3개를 서로 이웃하도록 나열하는 경우의 수는 2

★★★□, □★★★

같은 문자 3개를 나열한 후 남은 1곳에 문자를 나열하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 1개를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_3C_1=3$

그러므로 이때의 확률은

$\dfrac{4\times2\times3}{4^4}=\dfrac{3}{32}$

(ⅲ) 한 문자만 4개 포함될 때

문자 a, b, c, d 중에서 4개 포함되는 한 문자를 정하는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

같은 문자 4개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

1

그러므로 이때의 확률은

$\dfrac{4\times1}{4^4}=\dfrac{1}{64}$

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 구하는 확률은

$\dfrac{9}{32}+\dfrac{3}{32}+\dfrac{1}{64}=\dfrac{25}{64}$

2. 정답 ②

조건 (가)에서

$f(2)\times f(3)=12$, $f(2)<f(3)$

이므로

$f(2)=2$, $f(3)=6$ 또는 $f(2)=3$, $f(3)=4$

(ⅰ) $f(2)=2$, $f(3)=6$일 때

조건 (나)에서 $f(1)$의 값은 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6중 하나이므로 $f(1)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_6C_1=6$

$f(5)$, $f(7)$의 값은 숫자 6, 7중에서 중복을 허락하여 2개를 택해 크기가 작거나 같은 순으로 나열한 후 $f(5)$, $f(7)$의 값으로 정하면 된다.

즉, $f(5)$, $f(7)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_2={}_{2+2-1}C_2={}_3C_2={}_3C_1=3$

조건 (다)에서 $f(4)$, $f(6)$의 값은 각각 숫자 6. 7 중 하나이다. 즉, $f(4)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_2=2^2=4$

그러므로 $f(2)=2$, $f(3)=6$일 때 함수 f의 개수는

$6\times3\times4=72$

(ⅱ) $f(2)=3$, $f(3)=4$

조건 (나)에서 $f(1)$의 값은 숫자 1, 2, 3, 4 중 하나이므로 $f(1)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

$f(5)$, $f(7)$의 값은 숫자 4, 5, 6, 7 중에서 중복을 허락하여 2개를 택해 크기가 작거나 같은 순으로 나열한 후 $f(5)$, $f(7)$의 값으로 정하면 된다.

즉, $f(5)$, $f(7)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_2={}_{4+2-1}C_2={}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

조건 (다)에서 $f(4)$, $f(6)$의 값은 각각 숫자 4, 5, 6, 7중 하나이다. 즉 $f(4)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_2=4^2=16$

그러므로 $f(2)=3$, $f(3)=4$일 때 함수 f의 개수는

$4\times10\times16=640$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는

$72+640=712$

3. 정답 81

조건 (가)에서

$P(X\le174)=P(X\ge206)$

이므로

$\mathrm{E}(X)=\dfrac{174+206}{2}=190$

조건 (나)에서

$\mathrm{E}(2X)=\mathrm{E}(Y+140)$

즉, $2\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(Y)+140$

이므로

$2\times190=\mathrm{E}(Y)+140$

$\mathrm{E}(Y)=240$

두 확률변수 X, Y의 표준편차를 각각 σ_1, σ_2라 하면 조건 (나)에서

$\mathrm{V}(4X)=\mathrm{V}(Y)$

즉, $16\mathrm{V}(X)=\mathrm{V}(Y)$

이므로 $4\sigma_1=\sigma_2$ …… ㉠

한편, $Z=\dfrac{\overline{X}-190}{\frac{\sigma_1}{4}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(\overline{X}\le193)=0.9772$에서

$$\mathrm{P}(\overline{X}\le193)=\mathrm{P}\left(\dfrac{\overline{X}-190}{\frac{\sigma_1}{4}}\le\dfrac{193-190}{\frac{\sigma_1}{4}}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{12}{\sigma_1}\right)$$
$$=0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{12}{\sigma_1}\right)$$

이므로

$$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{12}{\sigma_1}\right)=0.9772-0.5$$
$$=0.4772$$

표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le2)=0.4772$이므로

$\dfrac{12}{\sigma_1}=2$, $\sigma_1=6$

$\sigma_1=6$을 ㉠에 대입하면

$4\times6=\sigma_2$, $\sigma_2=24$

한편, $Z=\dfrac{\overline{Y}-240}{\frac{24}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(\overline{Y}\le236)=0.0668$에서

$$\mathrm{P}(\overline{Y}\le236)=\mathrm{P}\left(\dfrac{\overline{Y}-240}{\frac{24}{\sqrt{n}}}\le\dfrac{236-240}{\frac{24}{\sqrt{n}}}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z\le-\dfrac{\sqrt{n}}{6}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{\sqrt{n}}{6}\right)$$
$$=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{\sqrt{n}}{6}\right)$$

이므로

$$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{\sqrt{n}}{6}\right)$$
$$=05-0.0668$$
$$=0.4332$$

표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)=0.4332$이므로

$\dfrac{\sqrt{n}}{6}=1.5$

$\sqrt{n}=9$

따라서 $n=81$

4. 정답 24

이 시행을 한 번 한 후 $a+b=c$인 사건을 E, 꺼낸 세 공이 모두 같은 색인 사건을 F라 하면 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(F|E)=\dfrac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(E)}$$

이다.

이 시행을 한 번 할 때, 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는 서로 다른 8개에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_8\mathrm{C}_3$

이때 $a+b=c$를 만족시키는 세 수 a, b, c의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는

$(1,\ 1,\ 2)$, $(1,\ 2,\ 3)$, $(1,\ 3,\ 4)$, $(2,\ 2,\ 4)$

이다.

(ⅰ) $a=1$, $b=1$, $c=2$일 때

이 시행에서 꺼낸 세 공에 적혀 있는 세 수가 1, 1, 2일 확률은

$$\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_3}=\dfrac{1\times3}{56}=\dfrac{3}{56}$$

이 시행에서 꺼낸 세 공에 적혀 있는 세 수가 1, 1, 2이고 꺼낸 세 공이 모두 같은 색, 즉 흰 공일 확률은

$$\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_3}=\dfrac{1\times1}{56}=\dfrac{1}{56}$$

(ⅱ) $a=1$, $b=2$, $c=3$일 때

이 시행에서 꺼낸 세 공에 적혀 있는 세 수가 1, 2, 3일 확률은

$$\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_3}=\dfrac{2\times3\times1}{56}=\dfrac{3}{28}$$

이 시행에서 꺼낸 세 공에 적혀 있는 세 수가 1, 2, 3이고 꺼낸 세 공이 모두 같은 색, 즉 흰 공일 확률은

$$\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_3}=\dfrac{2\times1\times1}{56}=\dfrac{1}{28}$$

(ⅲ) $a=1$, $b=3$, $c=4$일 때

이 시행에서 꺼낸 세 공에 적혀 있는 세 수가 1, 3, 4일 확률은

$$\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_3}=\dfrac{2\times1\times2}{56}=\dfrac{1}{14}$$

이때 숫자 1과 숫자 3이 적혀 있는 공은 모두 흰 공이고, 숫자 4가 적혀 있는 공은 검은 공이므로 꺼낸 세 공이 모두 같은 색일

확률은 0이다.

(iv) $a=2$, $b=2$, $c=4$일 때

이 시행에서 꺼낸 세 공에 적혀 있는 세 수가 2, 2, 4일 확률은

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{3\times2}{56}=\frac{3}{28}$$

이 시행에서 꺼낸 세 공에 적혀 있는 세 수가 2, 2, 4이고 꺼낸 세 공이 모두 같은 색, 즉 검은 공일 확률은

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{1\times2}{56}=\frac{1}{28}$$

(ⅰ)~(iv)에 의하여

$$\mathrm{P}(E)=\frac{3}{56}+\frac{3}{28}+\frac{1}{14}+\frac{3}{28}=\frac{19}{56},$$

$$\mathrm{P}(E\cap F)=\frac{1}{56}+\frac{1}{28}+0+\frac{1}{28}=\frac{5}{56}$$

이므로

$$\mathrm{P}(F|E)=\frac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{5}{56}}{\frac{19}{56}}=\frac{5}{19}$$

따라서 $p=19$, $q=5$이므로

$p+q=19+5=24$

5. 정답 ③

다항식 $(x^2+a)^n$의 전개식의 일반항은

${}_n\mathrm{C}_r(x^2)^{n-r}a^r={}_n\mathrm{C}_r\,a^rx^{2n-2r}$ (단, $r=0$, 1, 2, $\cdots$, n)

x^4의 계수는 $2n-2r=4$, 즉 $r=n-2$일 때

${}_n\mathrm{C}_{n-2}a^{n-2}={}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}$

x^8의 계수는 $2n-2r=8$, 즉 $r=n-4$일 때

${}_n\mathrm{C}_{n-4}a^{n-4}={}_n\mathrm{C}_4a^{n-4}$

x^4의 계수와 x^8의 계수가 k로 같으므로

${}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}={}_n\mathrm{C}_4a^{n-4}=k$

${}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}={}_n\mathrm{C}_4a^{n-4}$에서

$$a^2=\frac{{}_n\mathrm{C}_4}{{}_n\mathrm{C}_2}=\frac{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}}{\frac{n(n-1)}{2!}}=\frac{(n-2)(n-3)}{12}$$

이때 a가 자연수이므로 $\frac{(n-2)(n-3)}{12}$이 어떤 자연수의 제곱이어야 한다.

$n=4$이면 $\frac{(4-2)(4-3)}{12}=\frac{1}{6}$

$n=5$이면 $\frac{(5-2)(5-3)}{12}=\frac{1}{2}$

$n=6$이면 $\frac{(6-2)(6-3)}{12}=1$

즉, $n=6$이면

$a^2=1$, $a=1$

이고

$$k={}_6\mathrm{C}_2 1^4=\frac{6\times5}{2\times1}=15$$

따라서 $a+k=1+15=16$

6. 정답 ③

꺼낸 4개의 공에 적힌 수의 합이 4의 배수인 사건을 A, 꺼낸 공 중 흰 공의 개수가 검은 공의 개수보다 많은 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}$이다.

1부터 8까지의 자연수를 4로 나눈 나머지에 따라

$X_0=\{4,\ 8\}$, $X_1=\{1,\ 5\}$, $X_2=\{2,\ 6\}$, $X_3=\{3,\ 7\}$이라 하자.

꺼낸 4개의 공에 적힌 수의 합이 4의 배수인 경우는 꺼낸 4개의 공에 적힌 수를 4로 나눈 나머지에 따라 다음과 같다.

4로 나눈 나머지가 0, 0, 1, 3인 경우는 X_0의 두 원소, X_1의 한 원소, X_3의 한 원소인 경우이므로

${}_2\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1=1\times2\times2=4$

4로 나눈 나머지가 0, 0, 2, 2인 경우는 X_0의 두 원소, X_2의 두 원소인 경우이므로

${}_2\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_2=1\times1=1$

4로 나눈 나머지가 0, 1, 1, 2인 경우는 X_0의 한 원소, X_1의 두 원소, X_2의 한 원소인 경우이므로

${}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1=2\times1\times2=4$

4로 나눈 나머지가 0, 2, 3, 3인 경우는 X_0의 한 원소, X_2의 한 원소, X_3의 두 원소인 경우이므로

${}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2=2\times2\times1=4$

4로 나눈 나머지가 1, 1, 3, 3인 경우는 X_1의 두 원소, X_3의 두 원소인 경우이므로

${}_2\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_2=1\times1=1$

4로 나눈 나머지가 1, 2, 2, 3인 경우는 X_1의 한 원소, X_2의 두 원소, X_3의 한 원소인 경우이므로

${}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1=2\times1\times2=4$

따라서

$n(A)=4+1+4+4+1+4=18$

한편, 모든 흰 공의 합 $(1+2+3+4=10)$은 4의 배수가 아니므로

$n(A\cap B)$는

숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 흰 공 4개 중 3개를 꺼내고 숫자 5, 6, 7, 8이 하나씩 적혀 있는 검은 공 4개 중 1개를 꺼냈을 때, 4개의 공에 적혀 있는 수의 합이 4의 배수인 경우의 수이다.

흰 공 3개에 적혀 있는 수가 $1,\ 2,\ 3$이고 검은 공 1개에 적혀 있는 수가 6인 경우,
흰 공 3개에 적혀 있는 수가 $1,\ 2,\ 4$이고 검은 공 1개에 적혀 있는 수가 5인 경우.
흰 공 3개에 적혀 있는 수가 $1,\ 3,\ 4$이고 검은 공 1개에 적혀 있는 수가 8인 경우,
흰 공 3개에 적혀 있는 수가 $2,\ 3,\ 4$이고 검은 공 1개에 적혀 있는 수가 7인 경우로 이 경우의 수는 4이다.
따라서 $n(A\cap B)=4$이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{4}{18}=\frac{2}{9}$$

7. 정답 28

조건 (나)의 $(f(2)-1)(f(4)-4)\neq 0$에서
$f(2)\neq 1,\ \ f(4)\neq 4$
이므로 $f(2)\geq 2,\ \ f(4)\leq 3$이다.
조건 (가) 에 의하여 $2\leq f(2)\leq f(3)\leq f(4)\leq 3$이므로
$f(2)=2,\ \ f(3)=2,\ \ f(4)=2$
또는 $f(2)=2,\ \ f(3)=2,\ \ f(4)=3$
또는 $f(2)=2,\ \ f(3)=3,\ \ f(4)=3$
또는 $f(2)=3,\ \ f(3)=3,\ \ f(4)=3$이다.

(i) $f(2)=2,\ \ f(3)=2,\ \ f(4)=2$인 경우
조건 (가)에 의하여 $f(1)\leq f(2)=2$이므로 $f(1)=1$ 또는 $f(1)=2$
또한 $2=f(4)\leq f(5)\leq f(6)$이므로 $f(5)$와 $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_3\mathrm{H}_2={}_{3+2-1}\mathrm{C}_2={}_4\mathrm{C}_2=\frac{4\times 3}{2\times 1}=6$$

이때 함수 f의 치역의 원소의 개수가 4인 함수의 개수는
$f(1)=1,\ \ f(2)=f(3)=f(4)=2,\ \ f(5)=3,\ \ f(6)=4$로 1개다.
따라서 이 경우 주어진 세 조건을 모두 만족시키는 함수 f의 개수는 $2\times 6-1=11$

(ii) $f(2)=2,\ \ f(3)=2,\ \ f(4)=3$인 경우
조건 (가)에 의하여 $f(1)\leq f(2)=2$이므로 $f(1)=1$또는 $f(1)=2$
또한 $3=f(4)\leq f(5)\leq f(6)$이므로 $f(5)$와 $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는
${}_2\mathrm{H}_2={}_{2+2-1}\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_1=3$
이때 함수 f의 치역의 원소의 개수가 4인 함수의 개수는
$f(1)=1,\ \ f(2)=f(3)=2,\ \ f(4)=3,\ \ f(5)=3,\ \ f(6)=4$ 또는
$f(1)=1,\ f(2)=f(3)=2,\ f(4)=3,\ f(5)=4,\ f(6)=4$로
2개다.
따라서 이 경우 주어진 세 조건을 모두 만족시키는 함수 f의 개수는
$2\times 3-2=4$

(iii) $f(2)=3,\ \ f(3)=3,\ \ f(4)=3$인 경우
조건 (가)에 의하여 $f(1)\leq f(2)=2$이므로 $f(1)=1$또는 $f(1)=2$
또한 $3=f(4)\leq f(5)\leq f(6)$이므로 $f(5)$와 $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는
${}_2\mathrm{H}_2=3$
이때 함수 f의 치역의 원소의 개수가 4인 함수의 개수는
$f(1)=1,\ \ f(2)=2,\ \ f(3)=f(4)=3,\ \ f(5)=3,\ \ f(6)=4$ 또는
$f(1)=1,\ \ f(2)=2,\ \ f(3)=f(4)=3,\ \ f(5)=4,\ \ f(6)=4$
로 2개다.
따라서 이 경우 주어진 세 조건을 모두 만족시키는 함수 f의 개수는
$2\times 3-2=4$

(iv) $f(2)=3,\ \ f(3)=3,\ \ f(4)=3$인 경우
조건 (가)에 의하여 $f(1)\leq f(2)=3$이므로
$f(1)=1$ 또는 $f(1)=2$ 또는 $f(1)=3$
또한 $3=f(4)\leq f(5)\leq f(6)$이므로 $f(5)$와 $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는
${}_2\mathrm{H}_2=3$
이때 함수 f의 치역의 원소의 개수가 항상 3 이하이다.
따라서 이 경우 주어진 세 조건을 모두 만족시키는 함수 f의 개수는
$3\times 3=9$

(i)~(iv)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는
$11+4+4+9=28$

8. 정답 118

먼저 $a,\ a,\ c,\ c,\ c$를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{5!}{2!3!}=10$
이 10가지 중 a끼리 서로 이웃하는 경우의 수는
$a,\ a,\ c,\ c,\ c$ 또는 $c,\ a,\ a,\ c,\ c$ 또는 $c,\ c,\ a,\ a,\ c$ 또는 $c,\ c,\ c,\ a,\ a$
로 4가지이고, a끼리 서로 이웃하지 않는 경우의 수는
$a,\ c,\ a,\ c,\ c$ 또는 $a,\ c,\ c,\ a,\ c$ 또는 $a,\ c,\ c,\ c,\ a$ 또는 $c,\ a,\ c,\ a,\ c$ 또는 $c,\ a,\ c,\ c,\ a$ 또는 $c,\ c,\ a,\ c,\ a$
로 6가지이다.

(i) $a,\ a,\ c,\ c,\ c$를 일렬로 나열할 때 a끼리 서로 이웃하는 경우
① 양 끝에 나열된 문자가 서로 다른 경우
$a,\ a,\ c,\ c,\ c$ 또는 $c,\ c,\ c,\ a,\ a$인 경우
문자 사이사이와 양 끝인 6곳 중 3곳에 3개의 문자 $b,\ b,\ b$를 하나씩 나열하여야 한다.
이때 a끼리 서로 이웃하지 않아야 하므로 a와 a사이에 1개의 문자 b를 반드시 나열하여야 하고, 양 끝 모두에 b를 나열하지 않아야 한다.
그러므로 이 경우의 수는

$2\times({}_{5}\mathrm{C}_{2}-1)=2\times\left(\frac{5\times4}{2\times1}-1\right)=18$

② 양 끝에 나열된 문자가 서로 같은 경우

$c,\ a,\ a,\ c,\ c$ 또는 $c,\ c,\ a,\ a,\ c$인 경우

문자 사이사이와 양 끝인 6곳 중 3곳에 3개의 문자 b, b, b를 하나씩 나열하여야 한다.

이때 a끼리 서로 이웃하지 않아야 하므로 a와 a사이에 1개의 문자 b를 반드시 나열하여야 하고, 양 끝 중 한 곳에만 b를 반드시 나열하여야 한다.

그러므로 이 경우의 수는

$2\times({}_{2}\mathrm{C}_{1}\times{}_{3}\mathrm{C}_{1})=2\times(2\times3)=12$

①, ②에 의하여 이 경우의 수는

$18+12=30$

(ii) $a,\ a,\ c,\ c,\ c$를 일렬로 나열할 때 a끼리 서로 이웃하지 않는 경우

③ 양 끝에 나열된 문자가 서로 다른 경우

$a,\ c,\ a,\ c,\ c$ 또는 $a,\ c,\ c,\ a,\ c$ 또는 $c,\ a,\ c,\ c,\ a$ 또는 $c,\ c,\ a,\ c,\ a$인 경우

양 끝 모두에 b를 동시에 나열하면 안되므로 문자 사이사이와 양 끝인 6곳 중 3곳에 3개의 문자 $b,\ b,\ b$를 나열하는 경우에서 양 끝 모두에 b를 나열한 경우를 제외해야 한다.

그러므로 이 경우의 수는

$4\times({}_{6}\mathrm{C}_{3}-{}_{4}\mathrm{C}_{1})=4\times\left(\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}-4\right)=64$

④ 양 끝에 나열된 문자가 서로 같은 경우

$a,\ c,\ c,\ c,\ a$ 또는 $c,\ a,\ c,\ a,\ c$인 경우

양 끝 중 한 곳에는 b를 반드시 나열하고, 문자 사이사이인 4곳 중 2곳에 2개의 문자 $b,\ b$를 나열하여야 한다.

그러므로 이 경우의 수는

$2\times({}_{2}\mathrm{C}_{1}\times{}_{4}\mathrm{C}_{2})=2\times\left(2\times\frac{4\times3}{2\times1}\right)=24$

③, ④에 의하여 이 경우의 수는

$64+24=88$

(i), (ii)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는

$30+88=118$

9. 정답 ③

6개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_{6}\mathrm{C}_{2}=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 $0,\ 2,\ 3,\ 5$이므로

$a=5$

(i) $X=0$인 경우

숫자 1이 적혀 있는 공을 2개 꺼내는 경우의 수는

${}_{3}\mathrm{C}_{2}=3$이고

숫자 6이 적혀 있는 공을 2개 꺼내는 경우의 수는

${}_{2}\mathrm{C}_{2}=1$이므로

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{4}{15}$

(ii) $X=2$인 경우

숫자 1이 적혀 있는 공을 1개, 숫자 3이 적혀 있는 공을 1개 꺼내는 경우의 수는

${}_{3}\mathrm{C}_{1}\times1=3$이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

(iii) $X=3$인 경우

숫자 3 적혀 있는 공을 1개, 숫자 6이 적혀 있는 공을 1개 꺼내는 경우의 수는

$1\times{}_{2}\mathrm{C}_{1}=2$이므로

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{2}{15}$

(iv) $X=5$인 경우

숫자 1이 적혀 있는 공을 1개, 숫자 6이 적혀 있는 공을 1개 꺼내는 경우의 수는

${}_{3}\mathrm{C}_{1}\times{}_{2}\mathrm{C}_{1}=6$이므로

$\mathrm{P}(X=5)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

(i)~(iv)에 의하여

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{4}{15}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{2}{15}+5\times\frac{2}{5}=\frac{14}{5}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{4}{15}+2^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{2}{15}+5^2\times\frac{2}{5}=12$

이므로 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=12-\left(\frac{14}{5}\right)^2=\frac{104}{25}$

따라서 $\mathrm{V}(a(X+1))=\mathrm{V}(aX+a)=a^2\times\mathrm{V}(X)$

$=25\times\frac{104}{25}=104$

10. 정답 ④

조건 (가)에 의하여 노란색 카드 2장을 네 학생 A, B, C, D 중 2명을 선택해 각각 1장씩 나누어 주는 경우의 수는

${}_{4}\mathrm{C}_{2}=6$

노란색 카드를 받은 2명의 학생을 A, B라 하고, 받지 못한 2명의 학생을 C, D라 하자.

조건 (가)에 의하여 학생 C, D에게 파란색 카드를 1장씩 먼저 나누어 주는 경우의 수는 1

이때 남은 카드는 빨간색 카드 8장, 파란색 카드 2장이고 A, B, C, D는 각각 1장의 카드를 가지고 있다.

조건 (나)에 의하여 모든 학생은 2장 이상의 카드를 받아야 하므로 남은 10장의 카드를 4명의 학생에게 각각 1장 이상씩 나누어 주어야 한다.

가장 많은 카드를 받은 학생의 카드 개수와 가장 적은 카드를 받은

학생의 카드 개수의 차는 2 이하이므로 네 학생 A, B, C, D가 최종적으로 받는 카드의 개수의 구성은 다음과 같다.

(ⅰ) $\{4,\ 3,\ 3,\ 3\}$인 경우

네 학생 A, B, C, D는 이미 1장씩 가지고 있으므로 추가로 더 받아야 하는 카드의 개수의 구성은 $\{3,\ 3,\ 2,\ 2\}$이다.

4명의 학생 중 3장을 더 받을 2명을 선택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2=6$

이때 남은 파란색 카드 2장을 4명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$

파란색 카드를 나누어 주면 빨간색 카드를 받는 학생은 자동으로 정해진다.

그러므로 이 경우의 수는

$6\times10=60$

(ⅱ) $\{5,\ 3,\ 3,\ 3\}$인 경우

네 학생 A, B, C, D는 이미 1장씩 가지고 있으므로 추가로 더 받아야 하는 카드의 개수의 구성은 $\{4,\ 2,\ 2,\ 2\}$이다.

4명의 학생 중 4장을 더 받을 1명을 선택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1=4$

(ⅰ)과 마찬가지로 파란색 카드 2장을 나누어 주는 경우의 수는

${}_4\mathrm{H}_2=10$

그러므로 이 경우의 수는

$4\times10=40$

(ⅲ) $\{4,\ 4,\ 2,\ 2\}$인 경우

네 학생 A, B, C, D는 이미 1장씩 가지고 있으므로 추가로 더 받아야 하는 카드의 개수의 구성은 $\{3,\ 3,\ 3,\ 1\}$이다.

4명의 학생 중 1장을 더 받을 1명을 선택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1=4$

이때 1장을 더 받는 학생은 파란색 카드 2장을 동시에 받을 수 없으므로 파란색 카드 2장을 나누어 주는 경우의 수는

${}_4\mathrm{H}_2-1=10-1=9$

그러므로 이 경우의 수는

$4\times9=36$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 남은 카드 10장을 나누어 주는 경우의 수는

$60+40+36=136$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times1\times136=816$

11. 정답 668

(ⅰ) 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 2 이하인 경우

한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 2 이하일 확률은

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이고

이때 전체 경우의 수는

집합 A에서 a를 임의로 하나 선택하고 집합 C에서 b를 임의로 하나 선택하므로

$2\times8=16$

한편, $\log_a b$가 자연수가 되려면 $b=a^k$ (k는 자연수) 꼴이어야 한다.

$a=2$일 때, $b\in\{2^1,\ 2^2,\ 2^3\}=\{2,\ 4,\ 8\}$이므로 3가지

$a=4$일 때, $b\in\{4^1\}=\{4\}$이므로 1가지

이므로 이 경우에서 주어진 시행을 한 번 하여 점수 1점을 얻을 확률은

$\frac{1}{3}\times\frac{4}{16}=\frac{1}{12}$

(ⅱ) 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3 이상인 경우

한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3 이상일 확률은

$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이고 이때 전체 경우의 수는

집합 B에서 a를 임의로 하나 선택하고 집합 C에서 b를 임의로 하나 선택하므로

$4\times8=32$

한편, 집합 B의 원소들은 집합 C의 원소 중에서 자신 외에 다른 거듭제곱수가 존재하지 않는다.

즉, $\log_a b$가 자연수가 되려면 $a=b$인 경우뿐이고 이는 4가지이므로 이 경우에서 주어진 시행을 한 번 하여 점수 1점을 얻을 확률은

$\frac{2}{3}\times\frac{4}{32}=\frac{1}{12}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 시행을 한 번하여 점수를 1점 얻을 확률은 $\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(18000,\ \frac{1}{6}\right)$을 따른다.

이때

$\mathrm{E}(X)=18000\times\frac{1}{6}=3000$

$\mathrm{V}(X)=18000\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=2500=50^2$

이고 18000은 충분히 큰 수 이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(3000,\ 50^2)$을 따른다.

따라서

$$\begin{aligned}k&=\mathrm{P}(X\ge3075)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{1075-3000}{50}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge1.5)\\&=0.5-0.4332\\&=0.0668\end{aligned}$$

이므로

$10000\times k=10000\times0.0668=668$

12. 정답 130

$f: X \to Y$인 모든 함수 f 중에서 임의로 선택한 함수 f가 조건을 만족시키는 사건을 A, $f(2)=0$을 만족시키는 사건을 B라 하면

구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$이다.

집합 $Y=\{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에서 치역의 원소가 될 세 수를 선택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_3=4$

집합 $X=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에서 공역의 원소 중 특정한 세 수로 대응되는 함수의 개수는

${}_3\Pi_5=3^5=243$

이 중에서 치역의 원소의 개수가 1인 경우의 수는 3

이 중에서 치역의 원소의 개수가 2인 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_2\times({}_2\Pi_5-2)=90$이므로

치역의 원소의 개수가 3인 함수 f의 개수는

$243-3-90=150$

따라서 조건 (가)를 만족시키는 함수의 개수는

$4\times150=600$

이제 각 치역의 경우에서 조건 (나)를 만족시키지 않는 여사건의 경우를 제외하여 구한다.

조건 (나)의 여사건은

$|f(0)|\neq0,\ |f(1)|\neq1,\ |f(2)|\neq2$이다.

(ⅰ) 치역이 $\{-1,\ 0,\ 1\}$인 경우

$|f(1)|\neq1$이므로 $f(1)=0$,

$|f(0)|\neq0$이므로 $f(0)=-1$ 또는 $f(0)=1$

① $f(0)=-1$인 경우

남은 $\{-2,\ -1,\ 2\}$를 치역 $\{-1,\ 0,\ 1\}$에 대응시키되, 1을 적어도 하나 대응시키는 경우의 수는

$3^3-2^3=19$

② $f(0)=1$인 경우

남은 $\{-2,\ -1,\ 2\}$를 치역 $\{-1,\ 0,\ 1\}$에 대응시키되, -1을 적어도 하나 대응시키는 경우의 수는

$3^3-2^3=19$

①, ②에 의하여 여사건의 경우의 수는

$19+19=38$

(ⅱ) 치역이 $\{-1,\ 0,\ 2\}$인 경우

$f(0)\in\{-1,\ 2\},\ f(1)\in\{0,\ 2\},\ f(2)\in\{-1,\ 0\}$에서

$S=\{f(0),\ f(1),\ f(2)\}$라 할 때,

① S의 원소가 3개인 경우

$(f(0),\ f(1),\ f(2))$는 $(-1,\ 2,\ 0),\ (2,\ 0,\ -1)$로 2가지

남은 $\{-2,\ -1\}$을 치역 $\{-1,\ 0,\ 2\}$에 대응시키는 경우의 수는

$3^2=9$

즉, $2\times9=18$

② S의 원소가 2개인 경우

$(f(0),\ f(1),\ f(2))$는 $(-1,\ 0,\ -1),\ (-1,\ 0,\ 0),$ $(-1,\ 2,\ -1),\ (2,\ 0,\ 0),\ (2,\ 2,\ -1),\ (2,\ 2,\ 0)$이므로 6가지

남은 $\{-2,\ -1\}$을 아직 대응이 안 된 치역의 원소 1개에 반드시 대응시키는 경우의 수는 $3^2-2^2=5$

즉, $6\times5=30$

①, ②에 의하여 여사건의 경우의 수는

$18+30=48$

(ⅲ) 치역이 $\{-1,\ 1,\ 2\}$인 경우

(ⅰ)과 같은 구조이므로 마찬가지 방법으로 구하면 38

(ⅳ) 치역이 $\{0,\ 1,\ 2\}$인 경우

(ⅱ)와 같은 구조이므로 마찬가지 방법으로 구하면 48

따라서 조건 (가), (나)를 만족하는 전체 경우의 수는

$600-(38+48+38+48)=428$ …… ㉠

한편, 위의 각 경우 중에서 $f(2)=0$을 만족하는 경우를 구한다.

(ⅰ) 치역이 $\{-1,\ 0,\ 1\}$인 경우

$\{-2,\ -1,\ 0,\ 1\}$에서 $\{-1,\ 0,\ 1\}$로 대응하되, $\{-1,\ 1\}$을 반드시 포함하는 경우의 수는

$3^4-(2^4+2^4-1^4)=81-31=50$

이 중 $f(0)\neq0,\ |f(1)|\neq1$을 만족하는 여사건의 경우의 수는

$5+5=10$

따라서 해당 경우의 수는

$50-10=40$

(ⅱ) 치역이 $\{-1,\ 0,\ 2\}$인 경우

$\{-2,\ -1,\ 0,\ 1\}$에서 $\{-1,\ 0,\ 2\}$로 대응하되, $\{-1,\ 2\}$를 반드시 포함하는 경우의 수는

$3^4-(2^4+2^4-1^4)=81-31=50$

이 중 $f(0)\in\{-1,\ 2\},\ f(1)\in\{0,\ 2\}$를 만족하는 여사건의 경우의 수 $9+15=24$

따라서 해당 경우의 수는

$50-24=26$

(ⅲ) 치역이 $\{-1,\ 1,\ 2\}$인 경우

$f(2)=0$이므로 해당 경우의 수는 0

(ⅳ) 치역이 $\{-1,\ 1,\ 2\}$인 경우

(ⅱ)와 같은 구조이므로 마찬가지 방법으로 구하면 26

따라서 $f(2)=0$을 만족하는 경우의 수는

$40+26+0+26=92$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$n(A)=428,\ n(A\cap B)=92$이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}=\dfrac{92}{428}=\dfrac{23}{107}$

따라서 $p=107,\ q=23$이므로

$p+q=130$

13. 정답 ①

확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=-3)+\mathrm{P}(X=-2)+\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$=\dfrac{|-3|}{a}+\dfrac{|-2|}{a}+\dfrac{|-1|}{a}+\dfrac{|1|}{a}+\dfrac{8}{a^2}$

$=\dfrac{7}{a}+\dfrac{8}{a^2}=1$

$a^2-7a-8=0,\ (a+1)(a-8)=0$

$a=-1$ 또는 $a=8$

그런데 확률은 음수가 될 수 없으므로

$a=8$ 따라서

$\mathrm{E}(X)=-3\times\dfrac{3}{8}+(-2)\times\dfrac{2}{8}+(-1)\times\dfrac{1}{8}+1\times\dfrac{1}{8}+2\times\dfrac{1}{8}$

$=-\dfrac{9}{8}-\dfrac{4}{8}-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{2}{8}$

$=-\dfrac{11}{8}$

이므로

$\mathrm{E}(8X+12)=8\mathrm{E}(X)+12$

$=8\times\left(-\dfrac{11}{8}\right)+12$

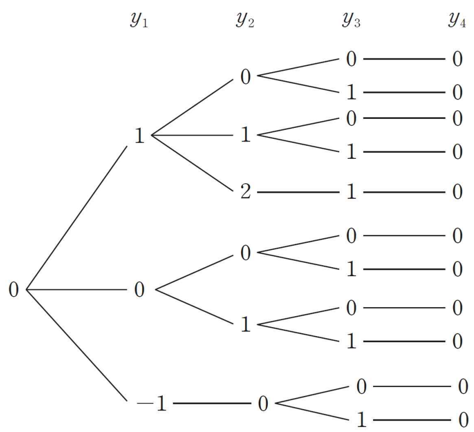
$=-11+12=1$

14. 정답 ②

점 P는 원점에 놓여 있으므로 y_1의 값은 -1 또는 0 또는 1이고

$y_3\geq 0$이고 $y_4=0$이므로 y_3의 값은 0 또는 1이다.

따라서 y_2의 값은 0 또는 1 또는 2이므로 $y_1,\ y_2,\ y_3\ y_4$의 값은 다음과 같다.



이때

$0\to0$ 또는 $1\to1$일 확률은 $\dfrac{1}{6}$,

$-1\to0$ 또는 $0\to1$ 또는 $1\to2$일 확률은 $\dfrac{2}{6}$,

$2\to1$ 또는 $1\to0$ 또는 $0\to-1$일 확률은 $\dfrac{3}{6}$

이므로 구하는 확률은

$\left(\dfrac{1}{6}\right)^4+7\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\times\dfrac{2}{6}\times\dfrac{3}{6}+3\times\left(\dfrac{2}{6}\right)^2\times\left(\dfrac{3}{6}\right)^2$

$=\dfrac{1+42+108}{6^4}$

$=\dfrac{151}{6^4}$

$=\dfrac{151}{1296}$

15. 정답 25

주머니 U에서 카드를 꺼내어 확인한 수를 N이라 하자. 이때 상자 A에서 흰 공이 나올 확률은 $\dfrac{1}{3}$, 상자 B에서 흰 공이 나올 확률은 $\dfrac{1}{6}$이다.

(i) $N\leq k$일 때

상자 A를 선택하여 흰 공이 나올 확률은

$\dfrac{k}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{k}{12}$

(ii) $N>k$일 때

상자 B를 선택하여 흰 공이 나올 확률은

$\dfrac{4-k}{4}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{4-k}{24}$

(i), (ii)에 의하여 1회의 시행에서 흰 공이 나올 확률은

$\dfrac{k}{12}+\dfrac{4-k}{24}=\dfrac{k+4}{24}$

그런데 이러한 시행을 1200번 반복하므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(1200,\ \dfrac{k+4}{24}\right)$를 따른다.

이때 $\mathrm{V}(X)=225$이므로

$1200\times\dfrac{k+4}{24}\times\left(1-\dfrac{k+4}{24}\right)=225$

$1200\times\dfrac{(k+4)(20-k)}{24\times24}=225$

$k^2-16k+28=0,\ (k-2)(k-14)=0$

이때 $1\leq k\leq 3$이므로

$k=2$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(1200,\ \dfrac{1}{4}\right)$을 따르고 1200은 충분히 큰 수 이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(300,\ 15^2)$을 따른다.

확률변수 $Z=\dfrac{X-300}{15}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(X\geq 330)=\mathrm{P}\left(Z\geq\dfrac{330-300}{15}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\geq 2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)$

$=0.5-0.477$

$=0.023$

이므로 $a=0.023$

따라서 $k+1000\times a=2+1000\times 0.023=25$

16. 정답 111

세 명의 학생 A, B, C가 받는 초콜릿의 개수를 각각 c_{A}, c_{B}, c_{C} 젤리의 개수를 각각 i_{A}, i_{B}, i_{C} 마카롱의 개수를 각각 m_{A}, m_{B}, m_{C}라 하면

$c_{\mathrm{A}}+c_{\mathrm{B}}+c_{\mathrm{C}}=2$ …… ㉠

$i_{\mathrm{A}}+i_{\mathrm{B}}+i_{\mathrm{C}}=3$ …… ㉡

$m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}+m_{\mathrm{C}}=5$ …… ㉢

이때 조건 (가)에 의하여 $m_{\mathrm{A}}\geq 1$, $m_{\mathrm{B}}\geq 1$, $m_{\mathrm{C}}\geq 1$이고 조건 (나)에 의하여 $c_{\mathrm{A}}+i_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{A}}\leq 2$ …… ㉣

이다.

그런데 $m_{\mathrm{A}}\geq 1$이므로 $m_{\mathrm{A}}=1$ 또는 $m_{\mathrm{A}}=2$이다.

(ⅰ) $m_{\mathrm{A}}=2$인 경우

㉣에서 $c_{\mathrm{A}}+i_{\mathrm{A}}\leq 0$ 이므로 $c_{\mathrm{A}}=0$, $i_{\mathrm{A}}=0$

㉠에서 $c_{\mathrm{B}}+c_{\mathrm{C}}=2$를 만족시키는 순서쌍 $(c_{\mathrm{B}},\ c_{\mathrm{C}})$의 개수는

${}_{2}\mathrm{H}_{2}={}_{2+2-1}\mathrm{C}_{2}={}_{3}\mathrm{C}_{2}=3$

㉡에서 $j_{\mathrm{B}}+j_{\mathrm{C}}=3$을 만족시키는 순서쌍 $(j_{\mathrm{B}},\ j_{\mathrm{C}})$의 개수는

${}_{2}\mathrm{H}_{3}={}_{2+3-1}\mathrm{C}_{3}={}_{4}\mathrm{C}_{3}=4$

㉢에서 $m_{\mathrm{B}}+m_{\mathrm{C}}=3$이고 $m_{\mathrm{B}}\geq 1$, $m_{\mathrm{C}}\geq 1$을 만족시키는 순서쌍 $(m_{\mathrm{B}},\ m_{\mathrm{C}})$의 개수는 $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$의 2개다.

따라서 이때의 경우의 수는 $3\times 4\times 2=24$

(ⅱ) $m_{\mathrm{A}}=1$인 경우

$c_{\mathrm{A}}+i_{\mathrm{A}}\leq 1$이므로 $c_{\mathrm{A}}=1$, $i_{\mathrm{A}}=0$ 또는 $c_{\mathrm{A}}=0$, $i_{\mathrm{A}}=1$ 또는 $c_{\mathrm{A}}=0$, $i_{\mathrm{A}}=0$

① $c_{\mathrm{A}}=1$, $i_{\mathrm{A}}=0$일 때

㉠에서 $c_{\mathrm{B}}+c_{\mathrm{C}}=1$을 만족시키는 순서쌍 $(c_{\mathrm{B}},\ c_{\mathrm{C}})$의 개수는

${}_{2}\mathrm{H}_{1}={}_{2+1-1}\mathrm{C}_{1}={}_{2}\mathrm{C}_{1}=2$

㉡에서 $i_{\mathrm{B}}+i_{\mathrm{C}}=3$을 만족시키는 순서쌍 $(i_{\mathrm{B}}\ i_{\mathrm{C}})$의 개수는

${}_{2}\mathrm{H}_{3}={}_{2+3-1}\mathrm{C}_{3}={}_{4}\mathrm{C}_{3}=4$

㉢에서 $m_{\mathrm{B}}+m_{\mathrm{C}}=4$이고 $m_{\mathrm{B}}\geq 1$, $m_{\mathrm{C}}\geq 1$을 만족시키는 순서쌍 $(m_{\mathrm{B},}\ m_{\mathrm{C}})$의 개수는 $(1,\ 3)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 1)$의 3개다.

따라서 이때의 경우의 수는 $2\times 4\times 3=24$

② $c_{\mathrm{A}}=0$, $i_{\mathrm{A}}=1$일 때

㉠에서 $c_{\mathrm{B}}+c_{\mathrm{C}}=2$를 만족시키는 순서쌍 $(c_{\mathrm{B}},\ c_{\mathrm{C}})$의 개수는

${}_{2}\mathrm{H}_{2}={}_{2+2-1}\mathrm{C}_{2}={}_{3}\mathrm{C}_{2}=3$

㉡에서 $j_{\mathrm{B}}+j_{\mathrm{C}}=2$를 만족시키는 순서쌍 $(i_{\mathrm{B}},\ i_{\mathrm{C}})$의 개수는

${}_{2}\mathrm{H}_{2}={}_{2+2-1}\mathrm{C}_{2}={}_{3}\mathrm{C}_{2}=3$

㉢에서 $m_{\mathrm{B}}+m_{\mathrm{C}}=4$이고 $m_{\mathrm{B}}\geq 1$, $m_{\mathrm{C}}\geq 1$을 만족시키는 순서쌍 $(m_{\mathrm{B}},\ m_{\mathrm{C}})$의 개수는 $(1,\ 3)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 1)$의 3개다.

따라서 이때의 경우의 수는 $3\times 3\times 3=27$

③ $c_{\mathrm{A}}=0$, $j_{\mathrm{A}}=0$일 때

㉠에서 $c_{B}+c_{C}=2$를 만족시키는 순서쌍 $(c_{\mathrm{B}},\ c_{\mathrm{C}})$의 개수는

${}_{2}\mathrm{H}_{2}={}_{2+2-1}\mathrm{C}_{2}={}_{3}\mathrm{C}_{2}=3$

㉡에서 $j_{\mathrm{B}}+i_{\mathrm{C}}=3$을 만족시키는 순서쌍 $(j_{\mathrm{B}},\ j_{\mathrm{C}})$의 개수는

${}_{2}\mathrm{H}_{3}={}_{2+3-1}\mathrm{C}_{3}={}_{4}\mathrm{C}_{3}=4$

㉢에서 $m_{\mathrm{B}}+m_{\mathrm{C}}=4$이고 $m_{\mathrm{B}}\geq 1$, $m_{\mathrm{C}}\geq 1$을 만족시키는 순서쌍 $(m_{\mathrm{B}},\ m_{\mathrm{C}})$의 개수는 $(1,\ 3)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 1)$의 3개다.

따라서 이때의 경우의 수는 $3\times 4\times 3=36$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$24+(24+27+36)=111$

17. 정답 ⑤

$\dfrac{x+(x+2\sigma^2)}{2}=m$일 때 $\mathrm{P}(x\leq X\leq x+2\sigma^2)$의 값이 최대이므로

$\dfrac{6+(6+2\sigma^2)}{2}=m$

즉, $m=\sigma^2+6$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(6\leq X\leq 6+2\sigma^2)&=\mathrm{P}\left(\frac{6-m}{\sigma}\leq Z\leq\frac{(6+2\sigma^2)-m}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{6-(\sigma^2+6)}{\sigma}\leq Z\leq\frac{(6+2\sigma^2)-(\sigma^2+6)}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}(-\sigma\leq Z\leq\sigma)\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(-2\leq Z\leq 2)=2\times\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)=2\times 0.4772=0.9544$

이고 $\mathrm{P}(6\leq X\leq 6+2\sigma^2)=0.9544$이므로

$\mathrm{P}(-\sigma\leq Z\leq\sigma)=\mathrm{P}(-2\leq Z\leq 2)$에서 $\sigma=2$

$m=\sigma^2+6=10$

따라서 $m+\sigma=10+2=12$

18. 정답 ①

조건 (가)에서 $2f(1)$이 짝수이고 7이 홀수이므로 $f(6)$은 홀수이고, $1\leq f(1)\leq 3$이므로

$f(1)=1$이면 $f(6)=5$

$f(1)=2$이면 $f(6)=3$

$f(1)=3$이면 $f(6)=1$

조건 (나)에서 $f(1)\leq f(3)\leq f(5)$, $f(2)\leq f(4)\leq f(6)$

(ⅰ) $f(1)=1$, $f(6)=5$일 때,

조건 (나)에서 $1\leq f(3)\leq f(5)$, $f(2)\leq f(4)\leq 5$

주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

${}_{6}\mathrm{H}_{2}\times{}_{5}\mathrm{H}_{2}={}_{7}\mathrm{C}_{2}\times{}_{6}\mathrm{C}_{2}=21\times 15=315$

(ⅱ) $f(1)=2$, $f(6)=3$일 때

조건 (나)에서 $2\leq f(3)\leq f(5)$, $f(2)\leq f(4)\leq 3$

주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

${}_{5}\mathrm{H}_{2}\times{}_{3}\mathrm{H}_{2}={}_{6}\mathrm{C}_{2}\times{}_{4}\mathrm{C}_{2}=15\times 6=90$

(iii) $f(1)=3$, $f(6)=1$일 때

조건 (나)에서 $3 \le f(3) \le f(5)$, $f(2) \le f(4) \le 1$

주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

${}_4\mathrm{H}_2 \times {}_1\mathrm{H}_2 = {}_5\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{C}_2 = 10 \times 1 = 10$

(i)~(iii)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는

$315+90+10=415$

19. 정답 22

$$\mathrm{P}(1 \le X \le 6) = \left|\frac{1}{10}-k\right| + \left|\frac{2}{10}-k\right| + \left|\frac{3}{10}-k\right| + 3k = 1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

(i) $0 < k \le \frac{1}{10}$일 때

$$\mathrm{P}(1 \le X \le 6) = \left(\frac{1}{10}-k\right) + \left(\frac{2}{10}-k\right) + \left(\frac{3}{10}-k\right) + 3k = \frac{3}{5}$$

이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $\frac{1}{10} < k \le \frac{2}{10}$일 때

$$\mathrm{P}(1 \le X \le 6) = \left(k-\frac{1}{10}\right) + \left(\frac{2}{10}-k\right) + \left(\frac{3}{10}-k\right) + 3k = 2k+\frac{2}{5}$$

$2k+\frac{2}{5}=1$에서 $k=\frac{3}{10}$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(iii) $\frac{2}{10} < k \le \frac{3}{10}$일 때

$$\mathrm{P}(1 \le X \le 6) = \left(k-\frac{1}{10}\right) + \left(k-\frac{2}{10}\right) + \left(\frac{3}{10}-k\right) + 3k = 4k$$

$4k=1$에서 $k=\frac{1}{4}$이므로 ㉠을 만족시킨다.

(iv) $k > \frac{3}{10}$일 때

$$\mathrm{P}(1 \le X \le 6) = \left(k-\frac{1}{10}\right) + \left(k-\frac{2}{10}\right) + \left(k-\frac{3}{10}\right) + 3k = 6k-\frac{3}{5}$$

$6k-\frac{3}{5}=1$에서 $k=\frac{4}{15}$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에 의하여 $k=\frac{1}{4}$

한편, $\overline{X} \le 2$에서 $\overline{X}=1$ 또는 $\overline{X}=\frac{3}{2}$ 또는 $\overline{X}=2$

ⓐ $\overline{X}=1$일 때

추출한 표본이 1, 1인 경우이고 1, 1을 나열하는 경우의 수가 1이므로 이때의 확률은

$$\mathrm{P}(\overline{X}=1) = (\mathrm{P}(X=1))^2 = \left|\frac{1}{10}-\frac{1}{4}\right|^2 = \left(\frac{3}{20}\right)^2 = \frac{9}{400}$$

ⓑ $\overline{X}=\frac{3}{2}$일 때

추출한 표본이 1, 2인 경우이고 1, 2를 나열하는 경우의 수가 2이므로 이때의 확률은

$$\mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{3}{2}\right) = 2 \times \mathrm{P}(X=1) \times \mathrm{P}(X=2)$$

$$= 2 \times \left|\frac{1}{10}-\frac{1}{4}\right| \times \left|\frac{2}{10}-\frac{1}{4}\right| = \frac{3}{200}$$

ⓒ $\overline{X}=2$일 때

추출한 표본이 2, 2 또는 1, 3인 경우이고, 2, 2를 나열하는 경우의 수가 1이고 1, 3을 나열하는 경우의 수가 2이므로 이때의 확률은

$$\mathrm{P}(\overline{X}=2) = (\mathrm{P}(X=2))^2 + 2 \times \mathrm{P}(X=1) \times \mathrm{P}(X=3)$$

$$= \left|\frac{2}{10}-\frac{1}{4}\right|^2 + 2 \times \left|\frac{1}{10}-\frac{1}{4}\right| \times \left|\frac{3}{10}-\frac{1}{4}\right| = \frac{7}{400}$$

ⓐ, ⓑ, ⓒ에서

$$\mathrm{P}(\overline{X} \le 2) = \mathrm{P}(\overline{X}=1) + \mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{3}{2}\right) + \mathrm{P}(\overline{X}=2) = \frac{11}{200}$$

따라서 $400 \times \mathrm{P}(\overline{X} \le 2) = 400 \times \frac{11}{200} = 22$

20. 정답 29

주어진 시행을 한 번 한 후, 주머니 B에서 꺼낸 1개의 공에 적힌 숫자가 3인 사건을 E, 주머니 A에 들어 있는 모든 공에 적힌 수의 합이 6인 사건을 F라 하자.

두 주머니 A, B에 들어 있는 모든 공에 적힌 수의 합이

$1+1+2+2+3+1+2+3=15$

이므로 주어진 시행을 한 번 한 후, 주머니 A에 들어 있는 모든 공의 적힌 수의 합이 6인 경우는 주머니 B에 드렁 있는 모든 공에 적힌 수의 합이 9인 경우와 같다.

즉, 주머니 A에서 꺼내 주머니 B에 넣은 모든 공에 적힌 수의 합이 3이므로 주머니 A에서 꺼낸 공의 개수가 2이면 이 공에 적힌 숫자는 각각 1, 2이고 저민 A에서 꺼낸 공의 개수가 1이면 이 공에 적힌 숫자는 3이다.

주어진 시행을 한 번 한 후, 주머니 B에서 꺼낸 1개의 공에 적힌 숫자가 3인 경우는 주머니 B에 들어 있는 모든 공에 적힌 수의 합이 9인 경우와 9가 아닌 경우의 두 가지이고, 각 경우에 대하여 주사위의 눈에 따라 다음과 같이 두 가지이다.

(i) 주머니 B에 들어 있는 모든 공에 적힌 수의 합이 9인 경우

① 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 3 이상인 경우

주머니 A에서 꺼낸 공의 개수가 1이므로 주머니 A에서 꺼낸 1개의 공에 적힌 숫자는 3이다.

한 개의 주사위를 한 번 던져서 3 이상의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$이고, 주머니 A에서 꺼낸 1개의 공에 적힌 수가 3일 확률은 $\frac{1}{5}$이다.

주머니 A에서 3이 적힌 공 1개를 주머니 B에 넣으면 주머니 B에 들어 있는 공에 적힌 수는 1, 2, 3, 3이므로 주머니 B에서 꺼낸 1개의 공에 적힌 숫자가 3일 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

따라서 확률의 곱셈정리에 의하여 이때의 확률은

$\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{15}$

② 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 2 이하인 경우

주머니 A에서 꺼낸 공의 개수가 2이므로 주머니 A에서 꺼낸 공에 적힌 숫자는 각각 1, 2이다.

한 개의 주사위를 한 번 던져서 2 이하의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이고, 주머니 A에서 꺼낸 2개의 공에 적힌 숫자가 각각 1, 2일 확률은 $\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{2}{5}$이다.

주머니 A에서 1, 2가 적힌 공 2개를 주머니 B에 넣으면 주머니 B에 있는 모든 공에 적힌 숫자는 1, 1, 2, 2, 3이므로 주머니 B에서 꺼낸 1개의 공에 적힌 수가 3일 확률은 $\frac{1}{5}$이다.

따라서 확률의 곱셈정리에 의하여 이때의 확률은

$\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{75}$

①, ②에서 확률의 덧셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(E\cap F)=\frac{1}{15}+\frac{2}{75}=\frac{7}{75}$ …… ㉠

(ii) 주머니 B에 들어 있는 모든 공에 적힌 수의 합이 9가 아닌 경우

③ 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 3 이상인 경우

주머니 A에서 꺼낸 공의 개수가 1이므로 주머니 A에서 꺼낸 1개의 공에 적힌 수는 1 또는 2이다.

한 개의 주사위를 한 번 던져서 3 이상의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$이고, 주머니 A에서 꺼낸 1개의 공에 적힌 수가 1 또는 2일 확률은 $\frac{4}{5}$이다.

주머니 A에서 1 또는 2가 적힌 공 1개를 주머니 B에 넣으면 주머니 B에 들어 있는 공에 적힌 수는 1, 1, 2, 3 또는 1, 2, 2, 3이므로 주머니 B에서 꺼낸 1개의 공에 적힌 숫자가 3일 확률은 $\frac{1}{4}$이다.

따라서 확률의 곱셈정리에 의하여 이때의 확률은

$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{15}$

④ 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 2 이하인 경우

주머니 A에서 꺼낸 공의 개수가 2이므로 주머니 A에서 꺼낸 공에 적힌 수의 합이 3이 아니어야 한다.

ⓐ 주머니 A에서 꺼낸 2개의 공 중 1개의 공에 3이 적힌 경우

주머니 A에서 꺼낸 2개의 공 중 1개의 공에 3이 적혀 있을 확률은 $\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{2}{5}$이다.

이때 주머니 B에 들어 있는 5개의 공 중에서 3이 적힌 공의 개수는 2이므로 주머니 B에서 꺼낸 1개의 공에 적힌 숫자가 3일 확률은 $\frac{2}{5}$이다.

ⓑ 주머니 A에서 꺼낸 2개의 공 모두 3이 적혀 있지 않은 경우

주머니 A에서 꺼낸 2개의 공에 적힌 숫자가 1, 1이거나 2, 2이므로 주머니 A에서 꺼낸 2개의 공에 모두 3이 적혀 있지 않을 확률은 $\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}+\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{5}$이다.

이때 주머니 B에 들어 있는 5개의 공 중에서 3이 적힌 공은 1개이므로 주머니 B에서 꺼낸 1개의 공에 적힌 숫자가 3일 확률은 $\frac{1}{5}$이다.

ⓐ, ⓑ에서 확률의 곱셈정리와 덧셈정리에 의하여 이때의 확률은

$\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\right)=1oer15$

③, ④에서 $\mathrm{P}(E\cap F^C)=\frac{2}{15}+\frac{1}{15}=\frac{1}{5}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(F|E)=\frac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(E\cap F)+\mathrm{P}(E\cap F^C)}$$

$$=\frac{\frac{7}{75}}{\frac{7}{75}+\frac{1}{5}}=\frac{7}{22}$$

따라서 $p=22$, $q=7$이므로 $p+q=29$

21. 정답 ③

상자에서 임의로 한 장의 카드를 꺼낼 때 꺼낸 카드에 적혀 있는 수를 확률변수 Y라 하자.

$\mathrm{P}(Y=1)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(Y=n)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(Y=2n)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

Y	1	n	$2n$	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$$\mathrm{E}(Y)=1\times\frac{1}{2}+n\times\frac{1}{4}+2n\times\frac{1}{4}$$

$$=\frac{3n+2}{4}$$

이 상자에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{Y}$라 하면

$\mathrm{E}(\overline{Y})=\mathrm{E}(Y)=\frac{3n+2}{4}$

한편, $\overline{Y}=\frac{X}{4}$, 즉 $X=4\overline{Y}$이므로

$$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(4\overline{Y})$$

$$=4\mathrm{E}(\overline{Y})$$

$$=4\times\frac{3n+2}{4}$$

$$=3n+2$$

이고 $\mathrm{E}(X)=20$이므로

$3n+2=20$

따라서

$n=6$

22. 정답 ②

$f(6)=f(14)$이므로

$m_1=\dfrac{6+14}{2}=10$

또, 두 확률변수 X, Y의 표준편차가 같고 $f(6)=f(22)$이므로

$|m_1-6|=|m_2-22|$

즉, $|10-6|=|m_2-22|$

$m_2-22=-4$ 또는 $m_2-22=4$

$m_2=18$ 또는 $m_2=26$

(ⅰ) $m_2=18$일 때

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ \sigma^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-10}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르고

$$\mathrm{P}(X\le 8)=\mathrm{P}\left(\frac{X-10}{\sigma}\le\frac{8-10}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le-\frac{2}{\sigma}\right)$$

확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(18,\ \sigma^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-18}{\sigma}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르고

$$\mathrm{P}(Y\le 24)=\mathrm{P}\left(\frac{Y-18}{\sigma}\le\frac{24-18}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{6}{\sigma}\right)$$

이때,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 8)+\mathrm{P}(Y\le 24)&=\mathrm{P}\left(Z\le-\frac{2}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z\le\frac{6}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{2}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z\le\frac{6}{\sigma}\right)\\&>1\end{aligned}$$

이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ⅱ) $m_2=26$일 때

(ⅰ)에 의하여 $\mathrm{P}(X\le 8)=\mathrm{P}\left(Z\le-\dfrac{2}{\sigma}\right)$

확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(26,\ \sigma^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-26}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르고

$$\mathrm{P}(Y\le 24)=\mathrm{P}\left(\frac{Y-26}{\sigma}\le\frac{24-26}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le-\frac{2}{\sigma}\right)$$

$\mathrm{P}(X\le 8)+\mathrm{P}(Y\le 24)=0.6170$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 8)+\mathrm{P}(Y\le 24)&=\mathrm{P}\left(Z\le-\frac{2}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z\le\frac{6}{\sigma}\right)\\&=2\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{2}{\sigma}\right)\\&=2\left\{0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{2}{\sigma}\right)\right\}\end{aligned}$$

이므로

$$2\left\{0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{2}{\sigma}\right)\right\}=0.6170$$

$$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{2}{\sigma}\right)=0.1915$$

한편, $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)=0.1915$이므로

$\dfrac{2}{\sigma}=0.5$, 즉 $\sigma=4$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $m_2=26$, $\sigma=4$

따라서

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(20\le Y\le 24)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{20-26}{4}\le\frac{Y-26}{4}\le\frac{24-26}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le-0.5)\\&=\mathrm{P}(0.5\le Z\le 1.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)\\&=0.4332-0.1915\\&=0.2417\end{aligned}$$

23. 정답 26

조건 (가)에서

$f(2)<f(4)$

이고, 조건 (나)에서

$f(2)f(4)=12$

이므로

$f(2)=2$, $f(4)=6$ 또는 $f(2)=3$, $f(4)=4$

(ⅰ) $f(2)=2$, $f(4)=6$일 때

$f(1)$의 값은 1 또는 2의 2가지 경우이다.

$f(3)$의 값은 2또는 3 또는 4 또는 5의 4가지이다.

$f(5)=f(6)=6$

이때, 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$2\times4\times1\times1=8$

(ⅱ) $f(2)=3$, $f(4)=4$일 때

$f(1)$의 값은 1 또는 2 또는 3의 3가지이다.

$f(3)=3$

$f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

이때, 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$3\times1\times6=18$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$8+18=26$

24. 정답 169

주어진 B에서 꺼낸 두 공에 적혀 있는 두 수의 곱이 홀수인 사건을 X, 주사위에서 나온 눈의 수가 6의 약수인 사건을 Y라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(Y|X)$이다.

(ⅰ) 주사위에서 나온 눈의 수가 6의 약수일 때

주사위를 한 번 던질 때 나온 눈의 수가 6의 약수일 확률은

$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 1개의 공에 적혀 있는 수가 1일 확률은

$\frac{3}{5}$

이고, 주머니 A에서 꺼낸 1이 적혀 있는 1개의 공을 주머니 B에 넣은 후 주머니 B에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공에 적힌 두 수의 곱이 홀수일 확률은

$\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$

주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 1개의 공에 적혀 있는 수가 2일 확률은

$\frac{2}{5}$

이고, 주머니 A에서 꺼낸 2가 적혀 있는 1개의 공을 주머니 B에 넣은 후 주머니 B에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공에 적힌 두 수의 곱이 홀수일 확률은

$\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$

이때,

$\mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{2}{3}\times\left(\frac{3}{5}\times\frac{3}{10}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{10}\right)=\frac{11}{75}$

(ⅱ) 주사위에서 나온 눈의 수가 6의 약수가 아닌 경우

주사위를 한 번 던질 때 나온 눈의 수가 6의 약수가 아닐 확률은

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

주머니 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼날 때, 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수가 각각 1, 1일 확률은

$\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$

이고, 주머니 A에서 꺼낸 1이 적혀 있는 2개의 공을 주머니 B에 넣은 후 주머니 B에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공에 적힌 두 수의 곱이 홀수일 확률은

$\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{2}{5}$

주머니 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수가 각각 1, 2일 확률은

$\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{5}$

이고, 주머니 A에서 꺼낸 1이 적혀 있는 1개의 공과 2가 적혀 있는 1개의 공을 주머니 B에 넣은 후 주머니 B에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공에 적힌 두 수의 곱이 홀수일 확률은

$\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{5}$

주머니 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수가 각각 2, 2일 확률은

$\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$

이고, 주머니 A에서 꺼낸 2가 적혀 있는 2개의 공을 주머니 B에 넣은 후 주머니 B에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공에 적힌 두 수의 곱이 홀수일 확률은

$\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{15}$

이때,

$$\mathrm{P}(X\cap Y^C)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{3}{10}\times\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\times\frac{1}{15}\right)=\frac{37}{450}$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X\cap Y)+\mathrm{P}(X\cap Y^C)}=\frac{\frac{11}{75}}{\frac{11}{75}+\frac{37}{450}}=\frac{66}{103}$$

따라서 $p=103$, $q=66$이므로

$p+q=103+66=169$

25. 정답 ③

주머니에서 두 개씩의 공을 동시에 꺼내어 공에 적힌 수를 더한 값을 확률변수 X라 하면, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	9	10	11	12	13	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$\mathrm{E}(X)=\frac{3}{2}+\frac{5}{3}+\frac{11}{3}+2+\frac{13}{6}=11$

$\mathrm{V}(X)=(9-11)^2\times\frac{1}{6}+(10-11)^2\times\frac{1}{6}+(11-11)^2\times\frac{1}{3}$

$\quad+(12-11)^2\times\frac{1}{6}+(13-11)^2\times\frac{1}{6}=\frac{5}{3}$

$\sigma(X)=\frac{\sqrt{15}}{3}$

시행을 4번 반복하므로

$\sigma(\overline{X})=\frac{1}{\sqrt{4}}\times\frac{\sqrt{15}}{3}=\frac{\sqrt{15}}{6}$

따라서 $\sigma(a\overline{X}-7)=a\sigma(\overline{X})=\frac{\sqrt{15}}{6}a=\sqrt{15}$에서

$a=6$

26. 정답 ②

(ⅰ) $f(1)=1$일 때

조건 (가)에 의하여 $n(Y)=1$이므로

조건 (나)를 만족시키는 함수 f는 존재하지 않는다.

(ⅱ) $f(1)=2$일 때

$n(Y)=2$이므로 $f(1)=f(2)=2$이고,

$f(3)=f(4)=f(5)=f(6)$이 될 수 있는 값은 3 또는 4 또는 5 또는 6이므로 조건을 만족하는 함수 f의 개수는 4이다.

(ⅲ) $f(1)=3$일 때

$n(Y)=3$이므로 집합 Y가 될 수 있는 집합은 $\{3,\ 4,\ 5\}$ 또는 $\{3,\ 4,\ 6\}$ 또는 $\{3,\ 5,\ 6\}$

집합 $Y=\{3,\ 4,\ 5\}$일 때

① $f(1)=f(2)=3$이면

$f(3),\ f(4),\ f(5),\ f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 두 수 $4,\ 5$중에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수에서 $f(3)=f(4)=f(5)=f(6)$일 때의 2가지 경우의 수를 빼주면 된다.

${}_2\mathrm{H}_4={}_5\mathrm{C}_4=5$

이므로

조건을 만족하는 함수 f의 개수는

$5-2=3$

② $f(1)=3,\ f(2)=4$이면

$f(3)=f(4)=f(5)=f(6)=5$이어야 하므로 조건을 만족하는 함수 f의 개수는 1

①, ②에서 조건을 만족하는 함수 f의 개수는 4이고, 집합 Y가 될 수 있는 집합이 3가지이므로 조건을 만족하는 함수 f의 개수는 $4\times3=12$

(ⅳ) $f(1)\geq4$일 때

조건 (가)에 의하여 $n(Y)\geq4$이므로

조건 (나)를 만족시키는 함수 f는 존재하지 않는다.

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$4+12=16$

27. 정답 80

주어진 식 $\mathrm{P}(X\leq3x+70)+\mathrm{P}(Y\geq2x+90)=1$을 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르는 확률변수 Z로 표현하면

$\mathrm{P}(X\leq3x+70)+\mathrm{P}(Y\geq2x+90)$

$=\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{3x+70-m_1}{\sigma_1}\right)+\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{2x+90-m_2}{\sigma_2}\right)=1$이므로

$\frac{3x+70-m_1}{\sigma_1}=\frac{2x+90-m_2}{\sigma_2}$

$\sigma_2(3x+70-m_1)=\sigma_1(2x+90-m_2)$ …… ㉠

항등식의 성질에 의하여

$2\sigma_1=3\sigma_2$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입한 후 상수항을 비교하면

$70-m_1=\frac{3}{2}(90-m_2)$

$140-2m_1=270-3m_2$

$3m_2-2m_1=130$ …… ㉢

$\mathrm{P}(25\leq X\leq m_1)=\mathrm{P}\left(\frac{25-m_1}{\sigma_1}\leq Z\leq0\right)=0.3413$에서

$\frac{25-m_1}{\sigma_1}=-1$이므로

$25-m_1=-\sigma_1$ …… ㉣

$\mathrm{P}(m_1\leq X\leq70)=\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{70-m_1}{\sigma_1}\right)=0.4772$에서

$\frac{70-m_1}{\sigma_1}=2$이므로

$70-m_1=2\sigma_1$ …… ㉤

㉣, ㉤을 연립하여 풀면

$\sigma_1=15,\ m_1=40$ …… ㉥

㉥을 ㉡, ㉢에 각각 대입하면

$m_2=70,\ \sigma_2=10$

따라서

$m_2+\sigma_2=70+10=80$

28. 정답 269

주사위를 던지는 매회의 사건이 서로 독립이므로 확률의 곱셈정리에 의하여 주사위를 3회 던져서 눈이 나오는 각각의 경우에 대한 확률은 $\left(\frac{1}{6}\right)^3$

시행을 3번 반복했을 때, 전기등이 서로 같은 상태에 있을 경우에 대한 주사위 눈의 구성을 고려해보자.

(ⅰ) 1 또는 2만 3번 나오는 경우

1 또는 2가 세 번 나와서 그 합이 6이 되어야 하므로 가능한 경우는 2가 3번 나와야 한다. 이 경우의 수는 1

(ⅱ) 1 또는 2가 2번 나오는 경우

① $1,\ 1$이 나오는 경우

3, 4, 5, 6 중에서 4가 나와야 한다.
주사위를 세 번 던져 1, 1, 4가 나오는 경우의 수는 3
② 1, 2가 나오는 경우
3, 4, 5, 6 중에서 5가 나와야 한다.
주사위를 세 번 던져 1, 2, 5가 나오는 경우의 수는 6
③ 2, 2가 나오는 경우
3, 4, 5, 6 중에서 6이 나와야 한다.
주사위를 세 번 던져 2, 2, 6이 나오는 경우의 수는 3
(ⅲ) 1 또는 2가 1번 나오는 경우
① 1이 나오는 경우
3, 4, 5, 6중에서 두 번 나와서 그 합이 7 또는 11이 되어야 한다.
주사위를 세 번 던져 1, 3, 4가 나오는 경우의 수는 6
주사위를 세 번 던져 1, 5, 6이 나오는 경우의 수는 6
② 2가 나오는 경우
3, 4, 5, 6 중에서 두 번 나와서 그 합이 8 또는 12가 되어야 한다.
주사위를 세 번 던져 2, 3, 5가 나오는 경우의 수는 6
주사위를 세 번 던져 2, 4, 4가 나오는 경우의 수는 3
주사위를 세 번 던져 2, 6, 6이 나오는 경우의 수는 3
(ⅳ) 1 또는 2가 한 번도 나오지 않는 경우
3, 4, 5, 6 중에서 세 번 나와서 그 합이 10 또는 14 또는 18이 되어야 한다.
주사위를 세 번 던져 3, 3, 4가 나오는 경우의 수는 3
주사위를 세 번 던져 3, 5, 6이 나오는 경우의 수는 6
주사위를 세 번 던져 4, 4, 6이 나오는 경우의 수는 3
주사위를 세 번 던져 4, 5, 5가 나오는 경우의 수는 3
주사위를 세 번 던져 6, 6, 6이 나오는 경우의 수는 1
(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 경우의 수는
$1+12+24+16=53$
따라서 구하는 확률은 $\frac{53}{216}$에서 $p=216$, $q=53$이므로
$p+q=269$

29. 정답 ④
주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 확인한 수를 확률변수 X라 할 때, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

이때
$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{3}+5\times\frac{1}{2}=\frac{11}{3}$$
$$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{3}+5^2\times\frac{1}{2}=\frac{47}{3}$$
이므로
$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)=\{\mathrm{E}(\mathrm{X})\}^2=\frac{47}{3}-\left(\frac{11}{3}\right)^2=\frac{20}{9}$$
그러므로 크기가 3인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여
$$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(\mathrm{X})}{3}=\frac{1}{3}\times\frac{20}{9}=\frac{20}{27}$$
이때
$$\mathrm{V}(a\overline{X}+1)=a^2\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{20}{27}a^2=60$$
이므로
$$a^2=60\times\frac{27}{20}=81$$
따라서 $a>0$이므로
$a=9$

30. 정답 ①
조건 (가)에서 $f(1)=1$, $f(8)=4$ 또는 $f(1)=2$, $f(8)=2$ 또는 $f(1)=4$, $f(8)=1$
(ⅰ) $f(1)=1$, $f(8)=4$일 때
조건 (나)에서
$1\le f(3)\le f(5)\le f(7)$, $f(2)\le f(4)\le f(6)\le 4$
이므로 $f(3)$, $f(5)$, $f(7)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, $\cdots$, 8중에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 중복조합의 수와 같고, $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 중복조합의 수와 같다.
그러므로 이 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는
$${}_8\mathrm{H}_3\times{}_4\mathrm{H}_3={}_{10}\mathrm{C}_3\times{}_6\mathrm{C}_3=120\times20=2400$$
(ⅱ) $f(1)=2$, $f(8)=2$일 때
조건 (나)에서
$2\le f(3)\le f(5)\le f(7)$, $f(2)\le f(4)\le f(6)\le 2$
이므로 $f(3)$, $f(5)$, $f(7)$의 값을 정하는 경우의 수는

$2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 8$ 중에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 중복조합의 수와 같고, $f(2),\ f(4),\ f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 $1,\ 2$에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 중복조합의 수와 같다.

그러므로 이 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$$\begin{aligned}{}_7\mathrm{H}_3\times{}_2\mathrm{H}_3&={}_9\mathrm{C}_3\times{}_4\mathrm{C}_3\\&=84\times4\\&=336\end{aligned}$$

(iii) $f(1)=4,\ f(8)=1$일 때

조건 (나)에서

$4\le f(3)\le f(5)\le f(7),\ f(2)\le f(4)\le f(6)\le 1$

이므로 $f(3),\ f(5),\ f(7)$의 값을 정하는 경우의 수는

$4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$중에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 중복조합의 수와 같고,

$f(2)=f(4)=f(6)=1$이어야 하므로 $f(2),\ f(4),\ f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 1이다.

그러므로 이 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

${}_5\mathrm{H}_3\times1={}_7\mathrm{C}_3=35$

(i), (ii), (iii)에 의하여 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$2400+336+35=2771$

31. 정답 355

$Z_1=\dfrac{X-m}{6}$이라 하면 확률변수 Z_1은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르고

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le39)&=\mathrm{P}\left(Z_1\le\frac{39-m}{6}\right)\\&=0.9332\end{aligned}$$

이때 표준정규분포표에 의하면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Z\le1.5)&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)\\&=0.5+0.4332\\&=0.9332\end{aligned}$$

이므로

$\dfrac{39-m}{6}=1.5$, 즉 $m=30$

또, $Z_2=\dfrac{Y-50}{\sigma}$이라 하면 확률변수 Z_2는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르고

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\ge53)&=\mathrm{P}\left(Z_2\ge\frac{53-50}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z_2\ge\frac{3}{\sigma}\right)\\&=0.1587\end{aligned}$$

이때 표준정규분포표에 의하면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Z\ge1)&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le1)\\&=0.5-0.3413\\&=0.1587\end{aligned}$$

이므로

$\dfrac{3}{\sigma}=1$, 즉 $\sigma=3$

한편 $Y=aX+b$이므로

$\mathrm{E}(Y)=a\mathrm{E}(X)+b$이므로

에서

$50=30a+b$ …… ㉠

또, $\sigma(Y)=a\sigma(X)$이므로

$3=a\times6$

이것을 ㉠에 대입하면

$50=30\times\dfrac{1}{2}+b$

$b=35$

따라서 $10(a+b)=10\left(\dfrac{1}{2}+35\right)=355$

32. 정답 393

조건 (가)에서 $a_8=a_1=1$이므로

$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$이라 하면

$\dfrac{a_2}{a_1}\times\dfrac{a_3}{a_2}\times\dfrac{a_4}{a_3}\times\cdots\times\dfrac{a_8}{a_7}=\dfrac{a_8}{a_1}=1$

이므로

$b_1\times b_2\times b_3\times\cdots\times b_7=1$

이때 조건 (나)에서 $b_n\in\left\{\dfrac{1}{3},\ 1,\ 3\right\}$이므로

순서쌍 $(b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_7)$의 개수는 다음과 같다.

(i) 1이 1개인 경우

$\dfrac{1}{3}$이 3개, 3이 3개여야 하므로 이들을 순서대로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{7!}{3!\times3!}=140$

(ii) 1이 3개인 경우

$\dfrac{1}{3}$이 2개, 3이 2개여야 하므로 이들을 순서대로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{7!}{3!\times2!\times2!}=210$

(iii) 1이 5개인 경우

$\dfrac{1}{3}$이 1개, 3이 1개여야 하므로 이들을 순서대로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{7!}{5!}=42$

(iv) 1이 7개인 경우 1가지

(i)~(iv)에 의하여 구하는 서로 다른 순서쌍 $(a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7)$의 개수는 순서쌍 $(b_1,\ b_2,\ b_4,\cdots,\ b_7)$의 개수와 같으므로 개수는

$140+210+42+1=393$

33. 정답 ②
이 회사가 생산하는 제품 1개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 6^2)$을 따른다. 크기가 9인 표본을 임의로 추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$$\mathrm{E}(\overline{X})=m,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{6^2}{9}=2^2$$

이므로 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$을 따른다.

확률변수 $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{2}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르고 표본평균이 200 이상일 확률이 0.9938이므로

$$\mathrm{P}(\overline{X}\geq 200)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{200-m}{2}\right)=0.9938$$

주어진 표준정규분포표에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Z\geq -2.5)&=0.5+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2.5)\\&=0.5+0.4938\\&=0.9938\end{aligned}$$

$\dfrac{200-m}{2}=-2.5$이므로

$m=205$

$$\mathrm{P}(\overline{X}\leq a)=\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{a-205}{2}\right)=0.9938$$

이므로

$$\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{a-205}{2}\right)=0.5+\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{a-205}{2}\right)$$

따라서 $\dfrac{a-205}{2}=2.5$에서

$a=210$

34. 정답 ①
방정식 $a+b+c+d=9$를 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$의 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 서로 다른 4개에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$_4\mathrm{H}_9={}_{12}\mathrm{C}_9={}_{12}\mathrm{C}_3=\frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}=220$$

$(a-3)(b-3)(c-3)(d-3)\neq 0$

이므로 $a,\ b,\ c,\ d$는 모두 3이 아니다.

$a,\ b,\ c,\ d$ 중 3이 있는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) $a,\ b,\ c,\ d$ 중 한 개의 값만 3인 경우

(1) $a=3$인 경우

$b+c+d=6$이고 $b\neq3,\ c\neq3,\ d\neq3$인 순서쌍 $(b,\ c,\ d)$의 개수를 구해보자.

방정식 $b+c+d=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $b,\ c,\ d$의 순서쌍 $(b,\ c,\ d)$의 개수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$_3\mathrm{H}_6={}_8\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$$

① $b,\ c,\ d$ 중 한 개의 값만 3인 경우

$b,\ c,\ d$ 중 그 값이 3이 되는 한 개를 제외한 나머지 두 개의 값의 합은 3이므로 순서쌍 $(b,\ c,\ d)$는 $(3,\ 1,\ 2)$, $(3,\ 2,\ 1)$, $(1,\ 3,\ 2)$, $(2,\ 3,\ 1)$, $(1,\ 2,\ 3)$, $(2,\ 1,\ 3)$의 여섯 개다.

② $b,\ c,\ d$ 중 두 개의 값만 3인 경우

$b,\ c,\ d$ 중 그 값이 3이 되는 두 개를 제외한 나머지 한 개의 값은 0이므로 순서쌍 $(b,\ c,\ d)$는 $(0,\ 3,\ 3)$, $(3,\ 0,\ 3)$, $(3,\ 3,\ 0)$의 세 개다.

따라서 $a=3$일 때, $b+c+d=6$이고 $b\neq3,\ c\neq3,\ d\neq3$인 순서쌍 $(b,\ c,\ d)$의 개수는

$28-6-3=19$이다.

(2) $b=3$ 또는 $c=3$ 또는 $d=3$인 경우

(1)의 경우와 같은 방법으로 각각의 순서쌍의 개수는 19이다.

그러므로 $a,\ b,\ c,\ d$ 중 한 개의 값만 3인 경우의 순서쌍의 개수는 $19\times4=76$

(ⅱ) $a,\ b,\ c,\ d$ 중 두 개의 값만 3인 경우

$a,\ b,\ c,\ d$ 중 값이 3이 되는 두 개를 택하는 경우의 수는

$_4\mathrm{C}_2=6$

$a,\ b,\ c,\ d$ 중 그 값이 3이 되는 두 개를 제외한 나머지 두 개가 모두 3이 아니면서 값의 합이 3이 되는 순서쌍은 $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$로 개수는 2이다.

그러므로 $a,\ b,\ c,\ d$ 중 두 개가 3인 경우의 순서쌍의 개수는

$6\times2=12$

(ⅲ) $a,\ b,\ c,\ d$ 중 세 개의 값만 3인 경우

$a,\ b,\ c,\ d$ 중 값이 3이 되는 세 개를 택하는 경우의 수는

$_4\mathrm{C}_3=4$

$a,\ b,\ c,\ d$ 중 그 값이 3이 되는 세 개를 제외한 나머지 한 개의 값은 0이므로 순서쌍의 개수는 1이다.

그러므로 $a,\ b,\ c,\ d$ 중 세 개의 값만 3인 경우의 순서쌍의 개수는 $4\times1=4$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $a+b+c+d=9$를 만족시키면서 $a,\ b,\ c,\ d$ 중 3이 있는 경우의 수는

$76+12+4=92$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$220-92=128$

35. 정답 413
나온 눈의 수가 2 이하이면 주머니 A에서 한 개의 공을 꺼내 주머니 B에 넣고 눈의 수가 3 이상이면 주머니 A에서 두 개의 공을 꺼내 주머니 B에 넣으므로 한 번의 시행에서 주머니 B에 한 개의 공이 들어 있을 확률은

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

주머니 B에 두 개의 공이 들어 있을 확률은

$$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

이다. 주머니 B에 들어 있는 공의 개수가 처음으로 6보다 크거나 같을 때, 주사위를 던진 횟수가 확률변수 X이므로

(ⅰ) $X=4$인 사건은

주머니 B에 들어 있는 공의 개수가 처음으로 6 이상이 될 때 주사위를 4회 던진 사건이다. 이는 세 번째 시행까지 주머니 B에 들어있는 공의 개수가 4이고 네 번째 시행에서 주머니 B에 공 두 개를 넣는 경우와 세 번째 시행까지 주머니 B에 들어 있는 공의 개수가 5이고 네 번째 시행에서는 주머니 B에 공을 한 개 또는 두 개를 넣어도 되는 경우로 나눌 수 있다.

1 또는 2를 세 번 더하여 4 또는 5가 되는 경우는

$1+1+2=4,\ 1+2+2=5$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=4)&={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1\times\frac{2}{3}+{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)\\&=\frac{4}{27}+\frac{12}{27}\\&=\frac{16}{27}\end{aligned}$$

(ⅱ) $X=5$인 사건은

네 번째 시행까지 주머니 B에 들어 있는 공의 개수가 4이고 다섯 번째 시행에서 주머니 B에 공 두 개를 넣는 경우와 네 번째 시행까지 주머니 B에 들어 있는 공의 개수가 5이고 다섯 번째 시행에서는 주머니 B에 공을 한 개 또는 두 개를 넣어도 되는 경우로 나눌 수 있다.

1 또는 2를 네 번 더하여 4 또는 5가 되는 경우는

$1+1+1+1=4,\ 1+1+1+2=5$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=5)&={}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0\times\frac{2}{3}+{}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1\times\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)\\&=\frac{2}{243}+\frac{24}{243}\\&=\frac{26}{243}\end{aligned}$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(4\le X\le 5)&=\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)\\&=\frac{16}{27}+\frac{26}{243}\\&=\frac{16\times 9+26}{243}\\&=\frac{170}{243}\end{aligned}$$

따라서 $p=243,\ q=170$이므로

$p+q=413$

36. 정답 50

$\{f(1)f(2)f(3)-2\}\times\{f(1)f(2)f(3)-3\}=0$에서

$f(1)f(2)f(3)=2$ 또는 $f(1)f(2)f(3)=3$이다.

$3=1\times1\times3$이고 $2=1\times1\times2$이므로 $f(1),\ f(2),\ f(3)$의 값에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(ⅰ) $f(1),\ f(2),\ f(3)$이 $1,\ 1,\ 3$의 값을 갖는 경우

㉠ $f(1)=1,\ f(2)=1,\ f(3)=3$인 경우

$f(1)=1,\ f(3)=3$이므로 $f(4)$는 4를 제외한 4가지의 값을 가질 수 있고, 그 각각에 대하여 $f(5)$는 5를 제외한 4가지의 값을 가질 수 있으므로 곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

$4\times4=16$

㉡ $f(1)=1,\ f(2)=3,\ f(3)=1$인 경우

$f(1)=1$이므로 $f(4)=4$이고 $f(5)$는 5를 제외한 4가지의 값을 갖거나 $f(5)=5$이고 $f(4)$는 4를 제외한 4가지의 값을 가질 수 있으므로 합의 법칙에 의하여 경우의 수는

$4+4=8$

㉢ $f(1)=3,\ f(2)=1,\ f(3)=1$인 경우

$f(4)=4,\ f(5)=5$이어야 하므로 경우의 수는

1

(ⅱ) $f(1),\ f(2),\ f(3)$이 $1,\ 1,\ 2$의 값을 갖는 경우

㉠ $f(1)=1,\ f(2)=1,\ f(3)=2$인 경우

$f(1)=1$이므로 $f(4)=4$이고 $f(5)$는 5를 제외한 4가지의 값을 갖거나 $f(5)=5$이고 $f(4)$는 4를 제외한 4가지의 값을 가질 수 있으므로 합의 법칙에 의하여 경우의 수는

$4+4=8$

㉡ $f(1)=1,\ f(2)=2,\ f(3)=1$인 경우

$f(1)=1,\ f(2)=2$이므로 $f(4)$는 4를 제외한 4가지의 값을 가질 수 있고, 그 각각에 대하여 $f(5)$는 5를 제외한 4가지의 값을 가질 수 있으므로 곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

$4\times4=16$

㉢ $f(1)=2,\ f(2)=1,\ f(3)=1$인 경우

$f(4)=4,\ f(5)=5$이어야 하므로 경우의 수는

1

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는

$16+8+1+8+16+1=50$

37. 정답 ⑤

한 개의 주사위를 던지는 시행의 표본공간은

$S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

사건 A가

$A=\{2,\ 4,\ 6\}$

이므로

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{2}$

두 사건 $A,\ B$가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

이고, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$

즉, $n(B)=2$

이때 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$에서 $n(A\cap B)=1$이므로 사건 B의 두 원소는 사건 $A=\{2,\ 4,\ 6\}$의 원소 중 하나와 사건 $A^C=\{1,\ 3,\ 5\}$의 원소 중 하나이다.

따라서 조건을 만족시키는 사건 B의 개수는

${}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1=9$

38. 정답 ②

흰 공 9개를 같은 종류의 주머니 3개에 조건을 만족시키도록 넣는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 1개, 2개, 6개로 나누어 넣는 경우

흰 공을 1개, 2개, 6개 넣은 주머니에 넣는 검은 공의 개수를 각각 a, b, c라 하면

$a+b+c=17$

이때 각 주머니에 넣는 공의 개수가 짝수이므로

$a=2a'+1$, $b=2b'$, $c=2c'$ (단, a', b', c'은 음이 아닌 정수)

$a'+b'+c'=8$

따라서 검은 공을 넣는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_8={}_{10}\mathrm{C}_8=45$

(ⅱ) 1개, 3개, 5개로 나누어 넣는 경우

흰 공을 1개, 3개, 5개 넣은 주머니에 넣는 검은 공의 개수를 각각 a, b, c라 하면

$a+b+c=17$

이때 각 주머니에 넣는 공의 개수가 짝수이므로

$a=2a'+1$, $b=2b'+1$, $c=2c'+1$ (단, a', b', c'은 음이 아닌 정수)

$a'+b'+c'=7$

따라서 검은 공을 넣는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_7={}_9\mathrm{C}_7=36$

(ⅲ) 2개, 3개, 4개로 나누어 넣는 경우

흰 공을 2개, 3개, 4개 넣은 주머니에 넣는 검은 공의 개수를 각각 a, b, c라 하면

$a+b+c=17$

이때 각 주머니에 넣는 공의 개수가 짝수이므로

$a=2a'$, $b=2b'+1$, $c=2c'$ (단, a', b', c'은 음이 아닌 정수)

$a'+b'+c'=8$

따라서 검은 공을 넣는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_8={}_{10}\mathrm{C}_8=45$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$45+36+45=126$

39. 정답 52

확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

$f(9)<f(21)$에서 $m>\frac{9+21}{2}=15$

$f(6)>f(28)$에서 $m<\frac{6+28}{2}=17$

이므로 자연수 m은 16이다.

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(16,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z_1=\frac{X-16}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z_1은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르고, 확률변수 Y가 정규분포 $\mathrm{N}\left(32,\ \frac{\sigma^2}{4}\right)$을 따르므로 $Z_2=\frac{Y-32}{\frac{\sigma}{2}}$로 놓으면 확률변수 Z_2도 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\geq a)=\mathrm{P}(Y\leq b)$에서

$\mathrm{P}\left(Z_1\geq\frac{a-16}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z_2\leq\frac{b-32}{\frac{\sigma}{2}}\right)$

$\frac{a-16}{\sigma}+\frac{2(b-32)}{\sigma}=0$

$a+2b=80$

$\mathrm{P}\left(\frac{a}{2}\leq X\leq a+b\right)=\mathrm{P}(40-b\leq X\leq 80-b)$

의 값은 $\frac{(40-b)+(80-b)}{2}=m$일 때 최대이므로

$60-b=16$, $b=44$

따라서 $a=-8$, $b=44$이므로

$b-a=52$

40. 정답 10

집합 S의 부분집합이고, 원소의 개수가 2인 집합의 개수는 ${}_{2n}\mathrm{C}_2$이다.

원소의 합이 $2n$보다 큰 사건을 A, 원소의 합이 홀수인 사건을 B라 하자.

원소의 개수가 2인 집합의 모든 원소의 합을 k $(2n\leq k\leq 4n-1)$이라 하자.

(ⅰ) $k=2m$ $(n+1\leq m\leq 2n-1)$일 때

$2m$을 $2n$ 이하의 서로 다른 두 자연수의 합으로 나타내면

$(2m-2n)+2n$, $(2m-2n+1)+(2n-1)$, $\cdots$, $(m-1)+(m+1)$

이므로 그 개수는 $2n-m$이다.

따라서 원소의 합이 짝수인 집합의 개수는

$$\sum_{m=n+1}^{2n-1}(2n-m)=2n(n-1)-\frac{(n-1)\times 3n}{2}$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}$$

(ⅱ) $k=2m+1$ $(n\leq m\leq 2n-1)$일 때

$2m+1$을 $2n$ 이하의 서로 다른 두 자연수의 합으로 나타내면

$(2m-2n)+2n$, $(2m-2n+1)+(2n-1)$, $\cdots$, $m+(m+1)$

이므로 그 개수는 $2n-m$이다.

따라서 원소의 합이 홀수인 집합의 개수는

$$\sum_{m=n}^{2n-1}(2n-m)=2n\times n-\frac{n\times(3n-1)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 사건 A의 경우의 수가

$$\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}=n^2$$

이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_2}=\frac{n}{2n-1}$$

사건 $A\cap B$의 경우가 (ⅱ)의 경우이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{{}_{2n}\mathrm{C}_2}$$
$$=\frac{n+1}{4n-2}$$

따라서 모든 원소의 합이 $2n$보다 클 때, 그 합이 홀수일 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$
$$=\frac{\frac{n+1}{4n-2}}{\frac{n}{2n-1}}$$
$$=\frac{n+1}{2n}$$
$$=\frac{11}{20}$$

이므로

$n=10$

41. 정답 ④

시행의 결과를 (동전의 면, 주사위의 눈의 수)로 나타내자.
두 번의 시행에서 꺼낸 모든 퍼즐 조각을 남김없이 사용하여 넓이가 π인 원 모양의 퍼즐을 1개 만들 수 있는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 반원 모양의 퍼즐 조각을 2개 꺼내는 경우
두 번의 시행 결과가 (앞면, 1), (앞면, 1)인 경우이므로 확률은

$$\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{144}$$

(ⅱ) 반원 모양의 퍼즐 조각 1개와 중심각의 크기가 $60°$인 부채꼴 모양의 퍼즐 조각 3개를 꺼내는 경우
(앞면, 1), (뒷면, 3) 또는 (뒷면, 3), (앞면, 1)인 경우이므로 확률은

$$\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\right)\times2=\frac{2}{144}$$

(ⅲ) 중심각의 크기가 $60°$인 부채꼴 모양의 퍼즐 조각 6개를 꺼내는 경우
(뒷면, 1), (뒷면, 5) 또는 (뒷면, 2), (뒷면, 4) 또는 (뒷면, 3), (뒷면, 3) 또는 (뒷면, 4), (뒷면, 2) 또는 (뒷면, 5), (뒷면, 1)인 경우이므로 확률은

$$\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\right)\times5=\frac{5}{144}$$

두 번의 시행에서 꺼낸 모든 퍼즐 조각을 남김없이 사용하여 넓이가 π인 원 모양의 퍼즐을 1개 만드는 사건을 X라 하고, 퍼즐 조각들이 모두 중심각의 크기가 $60°$인 부채꼴 모양인 사건을 Y라 하면
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

$$\mathrm{P}(X)=\frac{1}{144}+\frac{2}{144}+\frac{5}{144}=\frac{8}{144}$$

$$\mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{5}{144}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(X|Y)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}$$
$$=\frac{\frac{5}{144}}{\frac{8}{144}}$$
$$=\frac{5}{8}$$

42. 정답 ⑤

주머니에는 6과 서로소인 자연수가 적힌 카드 2장, 6과 서로소인 아닌 자연수가 적힌 카드 4장이 들어 있으므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.

(ⅰ) $X=0$인 경우
6과 서로소가 아닌 자연수가 적힌 카드 2장을 꺼내는 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$$

(ⅱ) $X=1$인 경우
6과 서로소인 자연수가 적힌 카드 1장, 6과 서로소인 아닌 자연수가 적힌 카드 1장을 꺼내는 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{2\times4}{15}=\frac{8}{15}$$

(ⅲ) $X=2$인 경우
6과 서로소인 자연수가 적힌 카드 2장을 꺼내는 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{15}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

따라서

$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{2}{3}$$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{2}{5}+1^2\times\frac{8}{15}+2^2\times\frac{1}{15}=\frac{4}{5}$

이고

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{4}{5}-\frac{4}{9}$

$=\frac{16}{45}$

$\mathrm{V}(aX+1)=16$에서

$\mathrm{V}(aX+1)=a^2\mathrm{V}(X)$

$=a^2\times\frac{16}{45}$

$=16$

따라서

$a^2=45$

43. 정답 237

1부터 10까지의 자연수를 각각 3으로 나누었을 때의 나머지가 n인 수의 집합을 S_n이라 하면

$S_0=\{3,\ 6,\ 9\}$, $S_1=\{1,\ 4,\ 7,\ 10\}$, $S_2=\{2,\ 5,\ 8\}$

조건 (나)를 만족하는 경우를 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) $a,\ b,\ c,\ d$가 모두 S_0의 원소인 경우

순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4=15$

(ii) $a,\ b,\ c,\ d$ 중 2개는 S_0의 원소, 1개는 S_1의 원소, 1개는 S_2의 원소인 경우

순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

${}_3\mathrm{H}_2\times4\times3={}_4\mathrm{C}_2\times4\times3=72$

(iii) $a,\ b,\ c,\ d$ 중 1개는 S_0의 원소, 3개는 S_1의 원소인 경우

순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

$3\times{}_4\mathrm{H}_3=3\times{}_6\mathrm{C}_3=3\times20=60$

(iv) $a,\ b,\ c,\ d$ 중 1개는 S_0의 원소, 3개는 S_2의 원소인 경우

순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

$3\times{}_3\mathrm{H}_3=3\times{}_5\mathrm{C}_3=3\times10=30$

(v) $a,\ b,\ c,\ d$ 중 2개는 S_1의 원소, 2개는 S_2의 원소인 경우

순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

${}_4\mathrm{H}_2\times{}_3\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_3\times{}_4\mathrm{C}_2=10\times6=60$

(i)~(v)에 의하여 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

$15+72+60+30+60=237$

44. 정답 911

점 P가 이동할 수 있는 방향은 앞뒤, 좌우, 상하 3가지 방향이 있다.
앞뒤 방향으로 이동한 모서리의 길이의 합을 a, 좌우 방향으로 이동한 모서리의 길이의 합을 b, 상하 방향으로 이동한 모서리의 길이의 합을 c라하자.

모서리의 길이의 합이 7일 때, 점 P가 꼭짓점 G에 있는 경우는 $a,\ b,\ c$는 모두 홀수일 때이다.

이동한 모서리의 길이의 합이 7이 되도록 이동하는 경우의 수는 3^7이다.

(i) $7=5+1+1$인 경우

$(a,\ b,\ c)=(5,\ 1,\ 1)$인 경우에 이동하는 경우의 수는

$\frac{7!}{5!1!1!}=42$

$(a,\ b,\ c)=(1,\ 5,\ 1)$, $(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 5)$인 경우도 마찬가지이므로

이동하는 경우의 수는 모두

$3\times42=126$

(ii) $7=3+3+1$인 경우

$(a,\ b,\ c)=(3,\ 3,\ 1)$인 경우에 이동하는 경우의 수는

$\frac{7!}{3!3!1!}=140$

$(a,\ b,\ c)=(3,\ 1,\ 3)$, $(a,\ b,\ c)=(1,\ 3,\ 3)$인 경우도 마찬가지이므로

이동하는 경우의 수는 모두

$3\times140=420$

(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은

$\frac{126+420}{3^7}=\frac{546}{3^7}=\frac{182}{729}$

따라서 $p=729$, $q=182$이므로

$p+q=911$

45. 정답 ③

곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로 $f(k)=f(3k)$이려면

$k=3k$ 또는 $\frac{k+3k}{2}=m$이어야 한다.

$k=3k$에서 $k=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$\frac{k+3k}{2}=m$에서 $m=2k$

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(2k,\ 4^2)$을 따르므로

$\mathrm{P}(0\le X\le 2k)=\mathrm{P}\left(\frac{0-2k}{4}\le Z\le\frac{2k-2k}{4}\right)$

$=\mathrm{P}\left(-\frac{k}{2}\le Z\le 0\right)$

$=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k}{2}\right)$

$=0.4332$

에서 $\frac{k}{2}=1.5$이므로 $k=3$

따라서

$m+k=6+3=9$

46. 정답 ③

A가 임의로 3개의 동전을 선택하여 뒤집은 후, B가 임의로 2개의 동전을 선택하여 뒤집을 때, 앞면이 보이도록 놓여 있는 동전의 개수가 1인 경우는 다음 두 가지가 있다.

(i) A가 앞면이 보이도록 놓여 있는 동전 3개를 뒤집은 후, B가 앞면이 보이도록 놓여 있는 동전 1개와 뒷면이 보이도록 놓여 있는 동전 1개를 뒤집는 경우

$$\frac{{}_4C_3}{{}_7C_3}\times\frac{{}_1C_1\times{}_6C_1}{{}_7C_2}=\frac{4}{35}\times\frac{2}{7}=\frac{8}{245}$$

(ii) A가 앞면이 보이도록 놓여 있는 동전 2개와 뒷면이 보이도록 놓여 있는 동전 1개를 뒤집은 후, B가 앞면이 보이도록 놓여 있는 동전 2개를 뒤집는 경우

$$\frac{{}_4C_2\times{}_3C_1}{{}_7C_3}\times\frac{{}_3C_2}{{}_7C_2}=\frac{18}{35}\times\frac{1}{7}=\frac{18}{245}$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{8}{245}+\frac{18}{245}=\frac{26}{245}$$

47. 정답 153

주어진 시행을 1번 한 후 기록한 수를 X라 하자.

확인한 두 수가 1, 1이면 $X=2$이고 이때의 확률은

$$\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{15}$$

확인한 두 수가 1, 2이면 $X=1$이고 이때의 확률은

$$\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_6C_2}=\frac{2\times3}{15}=\frac{2}{5}$$

확인한 두 수가 1, 3이면 $X=2$이고 이때의 확률은

$$\frac{{}_2C_1\times{}_1C_1}{{}_6C_2}=\frac{2\times1}{15}=\frac{2}{15}$$

확인한 두 수가 2, 2이면 $X=4$이고 이때의 확률은

$$\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{5}$$

확인한 두 수가 2, 3이면 $X=1$이고 이때의 확률은

$$\frac{{}_3C_1\times{}_1C_1}{{}_6C_2}=\frac{3\times1}{15}=\frac{1}{5}$$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	4	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$\overline{X}=2$이면 이 시행을 3번 반복하여 기록한 모든 수의 합이 6이므로 그 경우는 다음과 같다.

(i) 기록한 수가 1, 1, 4인 경우

1, 1, 4를 배열하는 경우의 수가 3이므로 이때의 확률은

$$3\times\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{1}{5}=\frac{27}{125}$$

(ii) 기록한 수가 2, 2, 2인 경우

2, 2, 2를 배열하는 경우의 수가 1이므로 이때의 확률은

$$1\times\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{1}{125}$$

(i), (ii)에 의하여

$$\mathrm{P}(\overline{X}=2)=\frac{27}{125}+\frac{1}{125}=\frac{28}{125}$$

따라서 $p=125$, $q=28$이므로

$p+q=153$

48. 정답 111

5 이하의 모든 자연수 x에 대하여 $f(x)\le f(x+1)$이므로

$f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le f(5)\le f(6)$ …… ㉠

5 이하의 모든 자연수 x에 대하여

$(f\circ f)(x+1)<f(6)$

이므로

$(f\circ f)(6)<f(6)$ …… ㉡

(i) $f(6)=1$인 경우

㉠에서 $f(1)=1$이고 ㉡에서

$(f\circ f)(6)=f(1)<f(6)$

이므로 모순이다.

(ii) $f(6)=2$인 경우

㉠에서 $f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le f(5)\le 2$이고

㉡에서 $(f\circ f)(6)=f(2)<f(6)$이므로

$f(1)\le 1\le f(3)\le f(4)\le f(5)\le 2$

이때의 함수 f의 개수는

$1\times{}_2H_3={}_4C_3=4$

(iii) $f(6)=3$인 경우

㉠에서 $f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le f(5)\le 3$이고

㉡에서 $(f\circ f)(6)=f(3)<f(6)$이므로

$f(1)\le f(2)\le 1\le f(4)\le f(5)\le 3$ 또는

$f(1)\le f(2)\le 2\le f(4)\le f(5)\le 3$

이때의 함수 f의 개수는

$$\begin{aligned}1\times{}_3H_2+{}_2H_2\times{}_2H_2&={}_4C_2+{}_3C_2\times{}_3C_2\\&=6+3\times3\\&=15\end{aligned}$$

(iv) $f(6)=4$인 경우

㉠에서 $f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le f(5)\le 4$이고

㉡에서 $(f\circ f)(6)=f(4)<f(6)$이므로

$f(1)\le f(2)\le f(3)\le 1\le f(5)\le 4$ 또는

$f(1)\le f(2)\le f(3)\le 2\le f(5)\le 4$ 또는

$f(1)\le f(2)\le f(3)\le 3\le f(5)\le 4$

이때의 함수 f의 개수는

$1\times4+{}_2\mathrm{H}_3\times3+{}_3\mathrm{H}_3\times2=4+{}_4\mathrm{C}_3\times3+{}_5\mathrm{C}_3\times2$
$=4+4\times3+10\times2$
$=36$

(v) $f(6)=5$인 경우

㉠에서 $f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le f(5)\le 5$이고

㉡에서 $(f\circ f)(6)=f(5)<f(6)$이므로

$f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le 1\le 5$ 또는

$f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le 2\le 5$ 또는

$f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le 3\le 5$ 또는

$f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le 4\le 5$

이때의 함수 f의 개수는

$1+{}_2\mathrm{H}_4+{}_3\mathrm{H}_4+{}_4\mathrm{H}_4=1+{}_5\mathrm{C}_4+{}_6\mathrm{C}_4+{}_7\mathrm{C}_4$
$=1+5+15+35$
$=56$

(vi) $f(6)=6$인 경우

㉠에서 $f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le f(5)\le 6$이고

㉡에서 $(f\circ f)(6)=f(6)<f(6)$이므로 모순이다.

(i)~(vi)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는

$4+15+36+56=111$

49. 정답 ②

표본평균의 분포

수험생의 시험 점수를 X점이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(70,\ 10^2)$을 따른다. 크기가 25인 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$\mathrm{E}(\overline{X})=70$

$\sigma(\overline{X})=\dfrac{10}{\sqrt{25}}=2$

이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(70,\ 2^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-70}{2}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(68\le\overline{X}\le a)=\mathrm{P}\left(\frac{68-70}{2}\le Z\le\frac{a-70}{2}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(-1\le Z\le\frac{a-70}{2}\right)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le1)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-70}{2}\right)$$
$$=0.3413+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-70}{2}\right)$$
$$=0.8185$$

이고 $\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{a-70}{2}\right)=0.4772$이다.

$\mathrm{P}(0\le Z\le2)=0.4772$이므로

$\dfrac{a-70}{2}=2$

따라서 $a=74$

50. 정답 ②

중복조합, 함수의 개수

조건 (나)에서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{5}f(5-n)=f(4)+f(3)+f(2)+f(1)+f(0)$이므로 함수 f의 치역의 모든 원소의 합이 5이려면 함수 f의 치역은 $\{1,\ 4\}$, $\{0,\ 1,\ 4\}$, $\{2,\ 3\}$, $\{0,\ 2,\ 3\}$ 중 하나이다.

(i) 함수 f의 치역이 $\{1,\ 4\}$인 경우

조건 (가)에 의하여 $f(4)=1$, $f(0)=4$이고, 1, 4에서 중복을 허락하여 3개를 택한 후 택한 세 수로 $f(2)\le f(3)\le f(1)$을 만족시키도록 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하면 된다. 그러므로 이 경우의 함수 f의 개수는

${}_2\mathrm{H}_3={}_{2+3-1}\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_3$
$={}_4\mathrm{C}_1=4$

(ii) 함수 f의 치역이 $\{0,\ 1,\ 4\}$인 경우

조건 (가)에 의하여 $f(4)=0$, $f(0)=4$이고, 0, 1, 4에서 먼저 1을 1개 택하고 0, 1, 4에서 중복을 허락하여 2개를 다시 택한 후 택한 세 수로 $f(2)\le f(3)\le f(1)$을 만족시키도록 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하면 된다. 그러므로 이 경우의 함수 f의 개수는

${}_3\mathrm{H}_2={}_{3+2-1}\mathrm{C}_2={}_4\mathrm{C}_2$
$=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$

(iii) 함수 f의 치역이 $\{2,\ 3\}$인 경우

조건 (가)에 의하여 $f(4)=2$, $f(0)=3$이고, 2, 3에서 중복을 허락하여 3개를 택한 후 택한 세 수로 $f(2)\le f(3)\le f(1)$을 만족시키도록 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하면 된다. 그러므로 이 경우의 함수 f의 개수는

${}_2\mathrm{H}_3={}_{2+3-1}\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_3$
$={}_4\mathrm{C}_1=4$

(iv) 함수 f의 치역이 $\{0,\ 2,\ 3\}$인 경우

조건 (가)에 의하여 $f(4)=0$, $f(0)=3$이고, 0, 2, 3에서 먼저 2를 1개 택하고 0, 2, 3에서 중복을 허락하여 2개를 다시 택한 후 택한 세 수로 $f(2)\le f(3)\le f(1)$을 만족시키도록 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하면 된다. 그러므로 이 경우의 함수 f의 개수는

${}_3\mathrm{H}_2={}_{3+2-1}\mathrm{C}_2={}_4\mathrm{C}_2$
$=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$

(i)~(iv)에서 구하는 함수 f의 개수는

$4+6+4+6=20$

51. 정답 99

독립시행의 확률

한 개의 주사위를 6번 던질 때, 홀수의 눈이 나온 횟수를 a, 짝수의 눈이 나온 횟수를 b라 하면 점 P의 좌표는 $(a,\ b)$이고

$a+b=6$이므로 원 $(x-4)^2+(y-3)^2=4$의 내부에 있는 점 P의 좌표는 $(3,\ 3)$ 또는 $(4,\ 2)$이다.

(ⅰ) 점 P의 좌표가 $(3,\ 3)$이 되는 경우

$a=3,\ b=3$이므로 점 P의 좌표가 $(3,\ 3)$이 될 확률은

$${}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{20}{64}$$

(ⅱ) 점 P의 좌표가 $(4,\ 2)$가 되는 경우

$a=4,\ b=2$이므로 점 P의 좌표가 $(4,\ 2)$가 될 확률은

$${}_6C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{15}{64}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$$\frac{20}{64}+\frac{15}{64}=\frac{35}{64}$$

따라서 $p=64,\ q=35$이므로

$p+q=99$

52. 정답 36

이산확률변수, 확률

서로 다른 6개의 공을 서로 다른 상자 2개에 비어있는 상자가 없이 나누어 넣는 경우의 수는 2^6-2

두 상자의 공에 적힌 수 중에서 가장 작은 수를 각각 $a,\ b$라 하자.

$a\times b$의 값은 $2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$이므로 확률변수 X의 값은 $2,\ 3,\ 4$이고

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X^3-2X^2>0)&=\mathrm{P}(X^2(X-2)>0)\\&=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)\end{aligned}$$

이다.

(ⅰ) $X=3$일 때

k의 양의 약수의 개수가 3이므로 $k=p^2$ (p는 소수) 꼴이다. 이를 만족하는 경우는 $a=1,\ b=4$이다. 숫자 2와 3이 적힌 공은 숫자 1이 적힌 공이 있는 상자에 넣고, 숫자 5와 6이 적힌 공은 어느 상자에 넣어도 상관없으므로 $a=1,\ b=4$일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=3)&=\frac{2^2\times2}{2^6-2}\\&=\frac{4}{31}\end{aligned}$$

(ⅱ) $X=4$일 때

k의 양의 약수의 개수가 4이므로 $k=q^3$ (q는 소수) 또는 $k=rs$ ($r,\ s$는 서로 다른 소수) 꼴이다. 이를 만족하는 경우는 $a=1,\ b=6$이다. 숫자 $2,\ 3,\ 4,\ 5$가 적힌 공은 숫자 1이 적힌 공이 있는 상자에 넣어야 하므로 $a=1,\ b=6$일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=4)&=\frac{1\times2}{2^6-2}\\&=\frac{1}{31}\end{aligned}$$

그러므로 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 값은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)&=\frac{4}{31}+\frac{1}{31}\\&=\frac{5}{31}\end{aligned}$$

따라서 $p=31,\ q=5$이므로

$p+q=36$

53. 정답 ③

독립시행의 확률

한 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수와 동시에 던져진 동전 중 앞면이 나온 동전의 개수의 곱이 홀수가 되려면 주사위 던져 나온 눈의 수와 앞면이 나온 동전의 개수가 모두 홀수이어야 한다.

(ⅰ) 꺼낸 공에 적힌 수가 짝수인 경우

주머니에서 하나의 공을 꺼내어 공에 적힌 수가 짝수일 확률은

$$\frac{{}_2C_1}{{}_5C_1}=\frac{2}{5}$$

한 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수가 홀수일 확률은 $\frac{1}{2}$

두 개의 동전 중 앞면이 나온 동전이 한 개일 확률은

$${}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}$$

따라서 꺼낸 공에 적힌 수가 짝수일 때, 한 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수와 두 개의 동전 중 앞면이 나온 동전의 개수의 곱이 홀수일 확률은 $\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$

(ⅱ) 꺼낸 공에 적힌 수가 홀수인 경우

주머니에서 하나의 공을 꺼내어 공에 적힌 수가 홀수일 확률은

$$\frac{{}_3C_1}{{}_5C_1}=\frac{3}{5}$$

한 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수가 홀수일 확률은 $\frac{1}{2}$

세 개의 동전 중 앞면이 나온 동전이 한 개일 확률은

$${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$$

세 개의 동전 중 앞면이 나온 동전이 세 개일 확률은

$${}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

따라서 꺼낸 공에 적힌 수가 홀수일 때, 한 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수와 세 개의 동전 중 앞면이 나온 동전의 개수의 곱이 홀수일 확률은

$$\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}=\frac{9}{80}+\frac{3}{80}=\frac{3}{20}$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{1}{10}+\frac{3}{20}=\frac{2}{20}+\frac{3}{20}=\frac{1}{4}$$

54. 정답 ⑤

같은 것이 있는 순열의 수(최단거리)

A지점에서 출발하여 B지점까지 최단거리로 이동하는 전체 경우의

수는 $\dfrac{8!}{4!4!}=\dfrac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$

또 $X^2-3X+2=(X-1)(X-2)=0$에서

$X=1$ 또는 $X=2$이므로

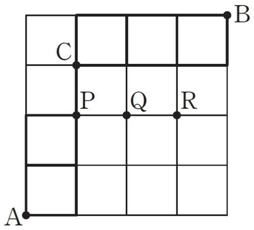
$\mathrm{P}(X^2-3X+2=0)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

즉, 구하는 확률은 A지점에서 출발하여 B지점까지 최단거리로 이동할 때 세 점 P, Q, R 중 한 점만 지나고 이동할 확률과 세 점 중 두 점을 지나고 이동할 확률의 합과 같다.

(i) 세 점 P, Q, R 중 한 점만 지나는 경우

세 점 중 한 점만 지나고 최단거리로 이동하는 경우는 그림과 같다.

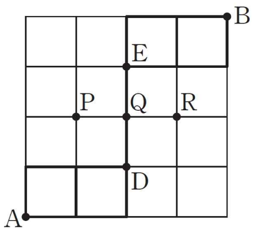
① 점 P를 지나는 경우



세 점 중 점 P만을 지나고 최단거리로 이동하는 경우는 A－P－C－B의 경로를 따라 최단거리로 이동하는 경우이므로 경우의 수는

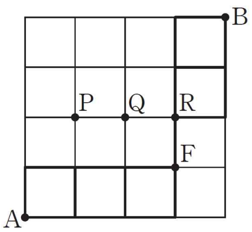
$\dfrac{3!}{2!}\times1\times\dfrac{4!}{3!}=3\times4=12$

② 점 Q를 지나는 경우



세 점 중 점 Q만을 지나고 최단거리로 이동하는 경우는 A－D－Q－E－B의 경로를 따라 최단거리로 이동하는 경우이므로 경우의 수는 $\dfrac{3!}{2!}\times1\times\dfrac{3!}{2!}=3\times3=9$

③ 점 R을 지나는 경우



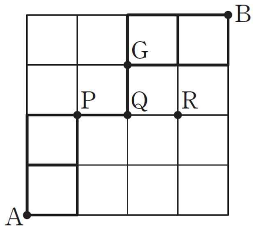
세 점 중 점 R만을 지나고 최단거리로 이동하는 경우는 A－F－R－B의 경로를 따라 최단거리로 이동하는 경우이므로 경우의 수는 $\dfrac{4!}{3!}\times1\times\dfrac{3!}{2!}=4\times3=12$

그러므로 세 점 중 한 점만 지나고 최단거리로 이동하는 경우의 수는 $12+9+12=33$

(ii) 세 점 중 서로 다른 두 점을 지나는 경우

세 점 중 서로 다른 두 점을 지나고 최단거리로 이동하는 경우는 그림과 같다.

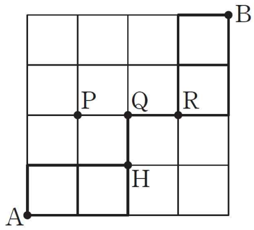
① 두 점 P, Q를 지나는 경우



세 점 중 두 점 P, Q를 지나고 최단거리로 이동하는 경우는 A－P－Q－G－B의 경로를 따라 최단거리로 이동하는 경우이므로 경우의 수는

$\dfrac{3!}{2!}\times1\times\dfrac{3!}{2!}=3\times3=9$

② 두 점 Q, R을 지나는 경우



세 점 중 두 점 Q, R을 지나고 최단거리로 이동하는 경우는 A－H－Q－R－B의 경로를 따라 최단거리로 이동하는 경우이므로 경우의 수는 $\dfrac{3!}{2!}\times1\times\dfrac{3!}{2!}=3\times3=9$

두 점 P, R을 지나고 점 Q를 지나지 않는 경우는 존재하지 않으므로 세 점 중 두 점을 지나고 최단거리로 이동하는 경우의 수는 $9+9=18$

(i), (ii)에 의하여

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X^2-3X+2=0)&=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)\\&=\frac{33}{70}+\frac{18}{70}\\&=\frac{51}{70}\end{aligned}$$

다른 풀이

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 $0,\ 1,\ 2,\ 3$이므로

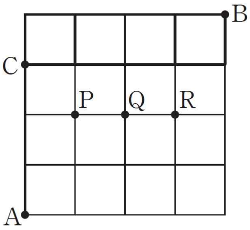
$\mathrm{P}(X^2-3X+2=0)$

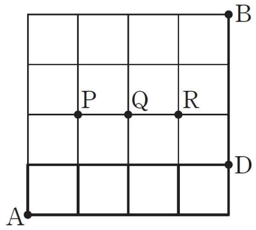
$=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$=1-\mathrm{P}(X=0)-\mathrm{P}(X=3)$

으로 구할 수 있다.

(i) 세 점 P, Q, R을 모두 지나지 않는 경우

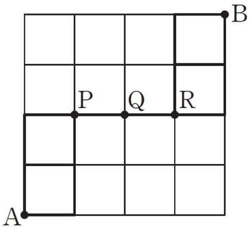




세 점 P, Q, R을 모두 지나지 않고 최단거리로 이동하는 경우는 A－C－B 또는 A－D－B의 경로를 따라 최단거리로 이동하는 경우이므로 경우의 수는

$1\times\frac{5!}{4!}+\frac{5!}{4!}\times1=5+5=10$

(ii) 세 점 P, Q, R을 모두 지나는 경우



세 점 P, Q, R을 모두 지나고 최단거리로 이동하는 경우는 A－P－Q－R－B의 경로를 따라 최단거리로 이동하는 경우이므로 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}\times1\times\frac{3!}{2!}=3\times3=9$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X^2-3X+2=0)&=1-\mathrm{P}(X=0)-\mathrm{P}(X=3)\\&=1-\frac{10}{70}-\frac{9}{70}=\frac{51}{70}\end{aligned}$$

55. 정답 96

조건부확률

집합 X에서 집합 X로의 모든 함수 f 중에서 선택한 함수가 조건을 만족시키는 사건을 A라 하고, $f(2)+f(4)=5$를 만족시키는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

조건 (나)에서 치역의 원소의 개수는 1 또는 3 또는 5이다.

치역의 원소의 개수가 1인 경우는 조건 (가)에서 $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=2$인 경우로 경우의 수는 1

치역의 원소의 개수가 3인 경우는 조건 (가)에서 $f(1)=f(2)=f(3)=2$일 때, $f(4)$, $f(5)$의 값이 1, 3, 4, 5 중 서로 다른 두 원소에 대응되어야 하므로 경우의 수는

${}_4\mathrm{P}_2=4\times3=12$

조건 (가)에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값이 1, 2, 4에 하나씩 대응될 때 $f(4)$, $f(5)$의 값이 1, 2, 4 중 하나에 대응되어야 하므로 경우의 수는

$3!\times{}_3\Pi_2=6\times9=54$

치역의 원소의 개수가 5인 경우는 조건 (가)에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값이 1, 2, 4에 하나씩 대응되고 $f(4)$, $f(5)$의 값이 3과 5에 각각 하나씩 대응되어야 하므로 경우의 수는

$3!\times2=12$

따라서 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$1+12+54+12=79$이므로 $n(A)=79$

한편 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 함수 중 $f(2)+f(4)=5$인 경우는 다음과 같다.

(i) $f(2)=1$, $f(4)=4$일 때

1과 3은 각각 2와 4에 하나씩 대응되어야 하고 $f(5)$의 값이 1, 2, 4중 하나이어야 하므로 경우의 수는

$2!\times3=6$

(ii) $f(2)=2$, $f(4)=3$일 때

1과 3은 각각 1과 4에 하나씩 대응되고, $f(5)=5$이거나 $f(1)=f(3)=2$이고 $f(5)$의 값이 1, 4, 5중 하나이어야 하므로 경우의 수는

$2!\times1+1\times3=5$

(iii) $f(2)=3$, $f(4)=2$일 때

$f(2)=3$일 때 조건 (가)를 만족시키지 않으므로 함수 f는 존재하지 않는다.

(iv) $f(2)=4$, $f(4)=1$일 때

1과 3은 각각 1과 2에 하나씩 대응되어야 하고 $f(5)$의 값이 1, 2, 4 중 하나이어야 하므로 경우의 수는

$2!\times3=6$

(i)~(iv)에 의하여 조건을 모두 만족시키고 $f(2)+f(4)=5$인 함수 f의 개수는 $6+5+6=17$이므로

$n(A\cap B)=17$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B|A)&=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\\&=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}}\\&=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}\\&=\frac{17}{79}\end{aligned}$$

이므로

$p+q=79+17=96$

56. 정답 600

중복조합의 활용

조건 (가)에서 연필과 볼펜을 같은 개수만큼 받은 학생이 받은 연필과 볼펜의 개수에 따라 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

받은 연필의 개수와 받은 볼펜의 개수가 같은 학생 한 명을 선택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1=4$

(i) 한 명의 학생이 연필과 볼펜을 각각 3자루씩 받은 경우

남은 연필 4자루를 나머지 세 명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 이 세 명의 학생이 받은 연필의 개수를 각각 a, b, c라 할 때, $a+b+c=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수해의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_2=\frac{6\times5}{2}=15$$

(ii) 한 명의 학생이 연필과 볼펜을 각각 2자루씩 받은 경우

서로 다른 볼펜 3자루 중 한 명의 학생이 받을 볼펜 2자루를 선택하는 경우의 수는

$${}_3\mathrm{C}_2=3$$

이후 남은 볼펜 1자루를 세 명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_3\mathrm{C}_1=3$$

남은 연필 5자루를 나머지 세 명의 학생에게 나누어주는 경우의 수는 이 세 명의 학생이 받은 연필의 개수를 각각 a, b, c라 할 때, 볼펜 1자루를 받은 학생은 연필도 최소 1자루 이상 받아야 하므로 $a+b+c=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수해의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_2=\frac{6\times5}{2}=15$$

따라서 연필과 볼펜을 각각 2자루씩 받는 한 명의 학생을 포함하여 서로 같은 연필 7자루와 서로 다른 볼펜 3자루를 네 명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

$3\times3\times15=135$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$4\times(15+135)=600$

57. 정답 ①

이산확률변수의 분포

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$이다.

1 이상 6 이하인 자연수 k에 대하여 $X=k$인 경우는 두 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수 중 하나가 k이고 나머지 하나가 1 이상 k 이하인 수이므로

$$\mathrm{P}(X=k)=\frac{1+(k-1)\times2}{36}=\frac{2k-1}{36}$$

확률변수 X에 대한 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{36}+2\times\frac{3}{36}+3\times\frac{5}{36}+4\times\frac{7}{36}+5\times\frac{9}{36}+6\times\frac{11}{36}$$
$$=\frac{161}{36}$$

$$\mathrm{E}(36X-1)=36\mathrm{E}(X)-1$$
$$=36\times\frac{161}{36}-1=160$$

58. 정답 ④

여사건의 확률

꺼낸 3개의 공 중에 흰 공과 검은 공이 모두 있는 사건을 A라 하고 꺼낸 3개의 공에 적힌 모든 숫자의 곱이 짝수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cap B)$이다.

주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

$${}_7\mathrm{C}_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$$

꺼낸 3개의 공이 모두 흰 공이거나 모두 검은 공인 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_3+{}_4\mathrm{C}_3=5$이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{5}{36}$$

꺼낸 3개의 공에 적힌 모든 숫자의 곱이 홀수인 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_3=4$이므로

$$\mathrm{P}(B^C)=\frac{4}{35}$$

한편 꺼낸 3개의 공이 모두 같은 색이면서 곱이 홀수인 경우는 없으므로

$$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=0$$

따라서 $\mathrm{P}(A^C\cup B^C)=\mathrm{P}(A^C)+\mathrm{P}(B^C)=\frac{9}{35}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=1-\mathrm{P}(A^C\cup B^C)$$
$$=1-\frac{9}{35}=\frac{26}{35}$$

59. 정답 9

표준정규분포

조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=g(x+6)$이므로 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 확률밀도함수 $g(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 그래프이고 두 확률밀도함수 $f(x)$, $g(x)$의 표준편차는 같다.

즉, $\sigma_1=\sigma_2$

이때 확률변수 Y의 평균보다 6만큼 작은 값이 확률변수 X의 평균이므로

$(2m-1)-6=m$에서 $m=7$

$Z=\frac{X-7}{\sigma_1}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따른다.

조건 (나)에서 $\mathrm{P}(X\le9)=0.8413$이므로

$$\mathrm{P}(X\le9)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{9-7}{\sigma_1}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{2}{\sigma_1}\right)$$
$$=0.5+0.3413$$

$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{2}{\sigma_1}\right)=0.3413$이므로

$\dfrac{2}{\sigma_{1=1}}$에서 $\sigma_1=2$

따라서 $m=7$, $\sigma_1=\sigma_2=2$이므로

$m+\sigma_2=7+2=9$

60. 정답 72

함수의 개수

조건 (가)에서 $\sqrt{f(1)f(3)}$의 값이 자연수이므로 $f(1)f(3)$은 어떤 자연수의 제곱이어야 한다.

집합 $Y=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$에서 $f(1)f(3)$이 어떤 자연수의 제곱인 경우는 $f(1)=f(3)$인 경우와 $f(1)\ne f(3)$인 경우로 나누어 생각해 볼 수 있다.

(i) $f(1)=f(3)$인 경우

조건 (나)에 의하여 $f(2)$, $f(4)$의 값이 모두 서로 다른 값이어야 하므로 함수 $f(x)$의 치역의 원소의 개수는 3이다.

조건을 만족시키는 함수 $f:X\to Y$의 개수는

${}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{P}_2=24$

(ii) $f(1)\ne f(3)$인 경우

$Y=\{2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ 2^3\}$

$f(1)$, $f(3)$의 값을 모두 2의 거듭제곱으로 나타내었을 때 두 수의 지수의 합이 짝수이어야 한다.

즉, 집합 $\{f(1),\ f(3)\}$은 $\{2^0,\ 2^2\}$, $\{2^1,\ 2^3\}$ 중 한 집합이므로

$f(1)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{P}_2=4$

ⓐ 치역의 원소의 개수가 4인 경우

$f(2)$, $f(4)$의 값은 집합 Y에서 $f(1)$, $f(3)$의 값을 제외한 나머지 2개의 원소 중에서 2개를 택하여 배열해야 하므로

${}_2\mathrm{P}_2=2$

ⓑ 치역의 원소의 개수가 3인 경우

$f(2)$, $f(4)$의 값 중 적어도 하나의 값이 집합 Y에서 $f(1)$, $f(3)$의 값을 제외한 나머지 2개의 원소 중에서 1개의 원소에 대응되어야 한다.

집합 Y에서 $f(1)$, $f(3)$의 값을 제외한 나머지 2개의 원소 중 1개의 원소를 택하는 경우의 수는

${}_2\mathrm{C}_1=2$

이때 $f(1)=a$, $f(3)=b$라 하고 위에서 택한 Y의 원소를 c라 하면 집합 $\{f(2),\ f(4)\}$는 $\{a,\ c\}$, $\{b,\ c\}$, $\{c\}$ 중 하나이다.

즉, $f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{P}_2+1=5$

조건을 만족시키는 함수 $f:X\to Y$의 개수는

$4\times(2+2\times5)=48$

따라서 (i), (ii)에 의해 구하는 경우의 수는

$24+48=72$

다른 풀이

조건 (가)에서 $\sqrt{f(1)f(3)}$의 값이 자연수이므로

$f(1)f(3)$은 어떤 자연수의 제곱이어야 한다.

집합 $Y=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$에서 $f(1)f(3)$이 어떤 자연수의 제곱인 경우는 $f(1)=f(3)$인 경우와 $f(1)\ne f(3)$인 경우로 나누어 생각해 볼 수 있다.

(i) $f(1)=f(3)$인 경우

조건 (나)에 의하여 $f(2)$, $f(4)$의 값이 모두 서로 다른 값이어야 하므로 함수 $f(x)$의 치역의 원소의 개수는 3이다.

조건을 만족시키는 함수 $f:X\to Y$의 개수는

${}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{P}_2=24$

(ii) $f(1)\ne f(3)$인 경우

$Y=\{2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ 2^3\}$

$f(1)$, $f(3)$의 값을 모두 2의 거듭제곱으로 나타내었을 때 두 수의 지수의 합이 짝수이어야 한다.

즉, 집합 $\{f(1),\ f(3)\}$은 $\{2^0,\ 2^2\}$, $\{2^1,\ 2^3\}$ 중 한 집합이므로

$f(1)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{P}_2=4$

$f(1)\ne f(3)$인 전체 함수의 개수에서 치역의 원소의 개수가 2 이하인 함수의 개수를 제외하면 된다.

$f(2)$, $f(4)$를 정하는 경우의 수는

${}_4\Pi_2=4^2=16$

이 중에서 치역의 원소의 개수가 2이하인 경우는 $f(2)$, $f(4)$가 집합 $\{f(1),\ f(3)\}$의 원소인 경우이므로, 그 경우의 수는

${}_2\Pi_2=2^2=4$

따라서 $f(1)\ne f(3)$인 경우 조건을 만족시키는 함수 $f:X\to Y$의 개수는

$4\times(16-4)=48$

따라서 (i), (ii)에 의해 구하는 경우의 수는

$24+48=72$

61. 정답 ③

표본평균의 분포

확률의 총합은 1이므로

$2a+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{10}+a+\dfrac{1}{10}=3a+\dfrac{2}{5}=1$

$3a=\dfrac{3}{5}$, $a=\dfrac{1}{5}$

따라서

$\mathrm{E}(X)=-1\times\dfrac{2}{5}+1\times\dfrac{1}{5}+2\times\dfrac{1}{10}+3\times\dfrac{1}{5}+4\times\dfrac{1}{10}$

$=1$

$\mathrm{E}(X^2)=(-1)^2\times\dfrac{2}{5}+1^2\times\dfrac{1}{5}+2^2\times\dfrac{1}{10}+3^2\times\dfrac{1}{5}+4^2\times\dfrac{1}{10}$

$$=\frac{22}{5}$$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$

$$=\frac{22}{5}-1^2=\frac{17}{5}$$

따라서

$$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{3}=\frac{17}{15}$$

이므로

$$\mathrm{V}\left(\frac{1}{a}\overline{X}-1\right)=\frac{1}{a^2}\mathrm{V}(\overline{X})=25\times\frac{17}{15}=\frac{85}{3}$$

62. 정답 ④

중복조합

$$|1-a_1|+|a_1-a_2|\ge|(1-a_1)+(a_1-a_2)|$$

$$=|1-a_2|$$

이때 등호가 성립할 조건은

$1-a_1\ge 0$이고 $a_1-a_2\ge 0$ 또는 $1-a_1<0$, $a_1-a_2<0$

이므로

$(1-a_1)(a_1-a_2)\ge 0$

$(a_1-1)(a_1-a_2)\le 0$

$1\le a_1\le a_2$ …… ㉠

같은 방법으로

$$|1-a_2|+|a_2-a_3|\ge|(1-a_2)+(a_2-a_3)|$$

$$=|1-a_3|$$

이고 등호가 성립할 조건은

$(1-a_2)(a_2-a_3)\ge 0$

$(a_2-1)(a_2-a_3)\le 0$

$1\le a_2\le a_3$ …… ㉡

$$|1-a_3|+|a_3-6|\ge|(1-a_3)+(a_3-6)|$$

$$=|-5|$$

$$=5$$

이고 등호가 성립할 조건은

$(1-a_3)(a_3-6)\ge 0$

$(a_3-1)(a_3-6)\le 0$

$1\le a_3\le 6$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$1\le a_1\le a_2\le a_3\le 6$

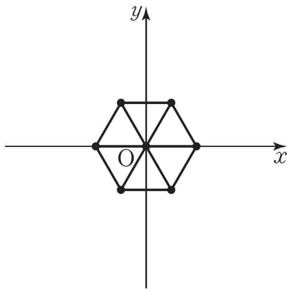
이므로 이 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$의 개수는

$${}_6\mathrm{H}_3={}_{6+3-1}\mathrm{C}_3={}_8\mathrm{C}_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$$

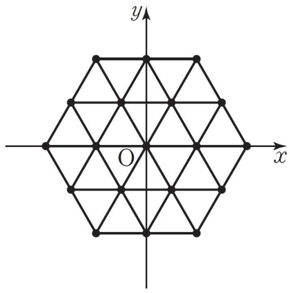
63. 정답 77

확률의 곱셈정리

$n=0$일 때 조건 (나)에 의하여 점 A_1은 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 정육각형의 꼭짓점 중 하나이다.



같은 방법으로 생각하면 $n=1$일 때 조건 (나)에 의하여 점 A_2는 중심이 점 A_1이고 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 정육각형의 꼭짓점 중 하나이다.



따라서 점 A_4가 원점 O와 일치하기 위해서는 점 A_3이 점 A_1과 일치해야 한다.

이때 점 A_3이 점 A_1과 일치하기 위해서는

(ⅰ) 점 A_2가 원점 O와 일치할 때

(ⅱ) 점 A_2가 점 A_1과 일치할 때

(ⅲ) 점 A_2가 점 A_2의 점 중 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 2인 원에 내접하는 정육각형의 꼭짓점과 일치할 때

(ⅳ) 점 A_2가 점 A_2의 점 중 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 2인 원에 내접하는 정육각형의 변의 중점과 일치할 때

로 나눌 수 있다.

(ⅰ)인 경우의 확률은

점 A_1에 있는 점이 주사위를 던진 후 원점 O와 일치해야 하므로

$$1\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

(ⅱ)인 경우의 확률은

점 A_1에 있는 점이 주사위를 던진 후 다시 점 A_1과 일치해야 하므로

$$1\times\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

(ⅲ)인 경우의 확률은

점 A_1에 있는 점이 주사위를 던진 후 점 A_2의 점 중 중심이 원점이고 반지름의 길이가 2인 원에 내접하는 정육각형의 꼭짓점과 일치해야 하므로

$$1\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

(iv)인 경우의 확률은

점 A_1에 있는 점이 주사위를 던진 후 점 A_2의 점 중 중심이 원점이고 반지름의 길이가 2인 원에 내접하는 정육각형의 변의 중점과 일치해야 하므로

$1\times\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

따라서 점 A_3이 점 A_1의 점과 일치할 확률은

$\frac{1}{6}\times1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$

이므로 구하는 확률은

$\frac{5}{12}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{72}$

따라서 $p=72$, $q=5$이므로

$p+q=77$

64. 정답 407

정규분포

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m_1,\ \sigma_1)$을 따른다고 하면 조건 (가)에 의하여

$m_1=\frac{2+6}{2}=4$

또한 조건 (나)에서 $x=3$을 대입하면

$\mathrm{P}(Y\le3)=\mathrm{P}(X\le4)=0.5$

이므로 확률변수 Y가 정규분포 $\mathrm{N}(m_2,\ \sigma_2)$를 따른다고 하면

$m_2=3$이고 $\sigma_1=\sigma_2$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le8)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{8-4}{\sigma_1}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{4}{\sigma_1}\right)\\&=0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{4}{\sigma_1}\right)=0.9772\end{aligned}$$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{4}{\sigma_1}\right)=0.4772$

이므로 $\frac{4}{\sigma_1}=2$

즉, $\sigma_1=2$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(2X-1)+\mathrm{V}(10Y)&=2\mathrm{E}(X)-1+100\mathrm{V}(Y)\\&=2m_1-1+100{\sigma_2}^2\\&=2\times4-1+100\times2^2\\&=407\end{aligned}$$

65. 정답 ④

모평균의 추정

표본평균 $\overline{x_1}$를 이용하여 구한 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\overline{x_1}-1.96\times\frac{5}{98}\le m\le\overline{x_1}+1.96\times\frac{5}{98}$

이므로

$a=\overline{x_1}-1.96\times\frac{5}{98}$, $b=\overline{x_1}+1.96\times\frac{5}{98}$

표본평균 $\overline{x_2}$를 이용하여 구한 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$\overline{x_2}-2.58\times\frac{5}{n}\le m\le\overline{x_2}+2.58\times\frac{5}{n}$

이므로

$c=\overline{x_2}-2.58\times\frac{5}{n}$, $d=\overline{x_2}+2.58\times\frac{5}{n}$

$b-a=d-c$이므로

$2\times1.96\times\frac{5}{98}=2\times2.58\times\frac{5}{n}$

$n=\frac{2.58}{1.96}\times98=129$ …… ㉠

이고

$d-a=\overline{x_2}-\overline{x_1}+2\times1.96\times\frac{5}{98}$

따라서 $d-a=\frac{101}{5}$에서

$\overline{x_1}-\overline{x_1}+\frac{1}{5}=\frac{101}{5}$

$\overline{x_2}-\overline{x_1}=20$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$n+\overline{x_2}-\overline{x_1}=129+20=149$

66. 정답 ④

독립시행의 확률

주사위를 던져 1 또는 2의 눈이 나온 횟수를 a,

주사위를 던져 3 또는 4의 눈이 나온 횟수를 b,

주사위를 던져 5 또는 6의 눈이 나온 횟수를 c라 하자.

이 시행을 4번 반복한 다음 두 점 A와 B가 같은 위치에 있게 되는 경우는

$a+b+c=4$이고 $2a+b=3$인 경우이다.

(i) $a=0$, $b=3$, $c=1$인 경우

이때의 확률은 $\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\frac{4!}{3!}$

(ii) $a=1$, $b=1$, $c=2$인 경우

이때의 확률은 $\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\frac{4!}{2!}$

두 점 A와 B가 처음으로 같은 위치일 때의 좌표가 2인 경우는

$a=1$, $b=1$, $c=2$인 경우이므로

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\frac{4!}{2!}}{\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\frac{4!}{3!}+\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\frac{4!}{2!}}=\frac{3}{4}$$

67. 정답 954

이항분포와 정규분포의 관계

동전을 두 번 던지는 시행을 432번 반복할 때, 앞면이 나온 횟수가 2인 횟수를 확률변수 X라 하면 앞면이 나온 횟수가 2일 확률은 $\frac{1}{4}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(432,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

따라서

$$\mathrm{E}(X)=432\times\frac{1}{4}=108$$

$$\mathrm{V}(X)=432\times\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=9^2$$

이때 $n=432$는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(108,\ 9^2)$을 따른다.

이 시행을 432번 반복한 다음 점 P의 위치는 $(X\sqrt{3},\ 432-X)$이므로

$$d^2=(X\sqrt{3})^2+(432-X)^2$$
$$=4\left(X-\frac{432}{4}\right)^2-\frac{432^2}{4}+432^2$$
$$=4(X-108)^2+\frac{3\times432^2}{4}$$

따라서 $d^2\le\frac{3\times432^2}{4}+1296$일 확률은

$$\mathrm{P}\left(4(X-108)^2+\frac{3\times432^2}{4}\le\frac{3\times432^2}{4}+1296\right)$$
$$=\mathrm{P}(4(X-108)^2\le1296)$$
$$=\mathrm{P}((X-108)^2\le324)$$
$$=\mathrm{P}(108-18\le \mathrm{X}\le108+18)$$
$$=\mathrm{P}\left(-2\le\frac{X-108}{9}\le2\right)$$
$$=\mathrm{P}(-2\le Z\le2)$$
$$=2\times\mathrm{P}(0\le Z\le2)$$
$$=2\times0.477=0.954$$

따라서 $1000k=954$

68. 정답 315

중복조합

(ⅰ) 학생 A가 받는 공의 개수가 0인 경우

세 가지 색깔의 공을 학생 B와 C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

$_2\mathrm{H}_3\times{}_2\mathrm{H}_3\times{}_2\mathrm{H}_3$

학생 B가 받는 공의 개수가 0인 경우의 수는

1

학생 B가 받는 공의 개수가 1인 경우의 수는

$_3\mathrm{C}_1$

학생 B가 받는 공의 개수가 2인 경우의 수는

$_3\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_2$

따라서 학생 A가 받는 공의 개수가 0개이고 학생 B가 받는 공의 개수는 3 이상의 경우의 수는

$_2\mathrm{H}_3\times{}_2\mathrm{H}_3\times{}_2\mathrm{H}_3-\{1+{}_3\mathrm{C}_1+({}_3\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_2)\}=54$

(ⅱ) 학생 A가 받는 공의 개수가 1인 경우

학생 A가 받는 1개의 공의 색깔을 정하는 경우의 수는

$_3\mathrm{C}_1$

남은 공을 학생 B와 C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

$_2\mathrm{H}_2\times{}_2\mathrm{H}_3\times{}_2\mathrm{H}_3$

학생 B가 받는 공에 개수가 0인 경우의 수는

1

학생 B가 받는 공에 개수가 1인 경우의 수는

$_3\mathrm{C}_1$

학생 B가 받는 공에 개수가 2인 경우의 수는

$_3\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_2$

따라서 학생 A가 받는 공의 개수가 1개이고 학생 B가 받는 공의 개수는 3 이상의 경우의 수는

$_3\mathrm{C}_1\times[{}_2\mathrm{H}_2\times{}_2\mathrm{H}_3\times{}_2\mathrm{H}_3-\{1+{}_3\mathrm{C}_1+({}_3\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_1)\}]=114$

(ⅲ) 학생 A가 받는 공의 개수가 2인 경우

㉠ A가 같은 색의 공 2개를 받는 경우

학생 A가 받는 2개의 공의 색깔을 정하는 경우의 수는

$_3\mathrm{C}_1$

A가 받은 공과 같은 색깔의 공 1개를 학생 B 또는 학생 C에게 주는 경우의 수는

$_2\mathrm{C}_1$

남은 공을 학생 B와 C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

$_2\mathrm{H}_3\times{}_2\mathrm{H}_3$

학생 B가 받는 공의 개수가 0인 경우의 수는

1

학생 B가 받는 공의 개수가 1인 경우의 수는

$_3\mathrm{C}_1$

학생 B가 받는 공의 개수가 2인 경우의 수는

$_2\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_2$

따라서 학생 A가 같은 색의 공 2개를 받고 학생 B가 받는 공의 개수는 3 이상인 경우의 수는

$_3\mathrm{C}_1\times[{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{H}_3\times{}_2\mathrm{H}_3-\{1+{}_3\mathrm{C}_1+({}_2\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_2)\}]=69$

㉡ A가 서로 다른 색의 공 2개를 받는 경우

마찬가지의 방법으로

$_3\mathrm{C}_2\times[{}_2\mathrm{H}_2\times{}_2\mathrm{H}_2\times{}_2\mathrm{H}_3-\{1+{}_3\mathrm{C}_1+({}_3\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_2)\}]=78$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$54+114+69+78=315$

69. 정답 ②

모평균의 신뢰구간

크기가 n의 표본에서 구한 표본평균을 $\bar{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\bar{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$a=\bar{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $b=\bar{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이므로

$b-a=9.8$에서

$$2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=9.8$$

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2.5 \quad\cdots\cdots\ ㉠$$

같은 표본에서 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\bar{x}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\bar{x}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$c=\bar{x}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $d=\bar{x}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이므로

㉠에 의하여

$$d-c=2\times2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=12.9$$

70. 정답 ④

중복조합

x가 짝수이면 $xf(x)$가 짝수이므로 조건 (가)를 만족시킨다.

x가 홀수이면 조건 (가)에 의하여

$f(x)=1$ 또는 $f(x)$가 짝수

이므로 홀수 x에 대하여 $f(x)$의 값으로 가능한 것은 1, 2, 4, 6이다.

(ⅰ) $f(1)=1$인 경우

조건 (나)에서 $f(1)+1<f(5)$이므로 $f(5)=4$ 또는 $f(5)=6$이다.

$f(5)=4$일 때 부등식 $1<f(2)\le f(4)\le f(6)<4$의 경우의 수는

${}_2H_3={}_4C_3=4$

$f(5)=6$일 때 부등식 $1<f(2)\le f(4)\le f(6)<6$의 경우의 수는

${}_4H_3={}_6C_3=20$

그러므로 경우의 수는 $4+20=24$

(ⅱ) $f(1)=2$인 경우

조건 (나)에서 $f(1)+1<f(5)$이므로 $f(5)=4$ 또는 $f(5)=6$이다.

$f(5)=4$일 때 부등식 $2<f(2)\le f(4)\le f(6)<4$의 경우의 수는 1

$f(5)=6$일 때 부등식 $2<f(2)\le f(4)\le f(6)<6$의 경우의 수는

${}_3H_3={}_5C_3=10$

그러므로 경우의 수는 $1+10=11$

(ⅲ) $f(1)=4$인 경우

조건 (나)에서 $f(1)+1<f(5)$이므로 $f(5)=6$이다.

$f(5)=6$일 때 부등식 $4<f(2)\le f(4)\le f(6)<6$의 경우의 수는 1

(ⅳ) $f(1)=6$인 경우

조건 (나)에서 $f(1)+1<f(5)$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 $f(3)$을 제외한 함숫값을 정하는 경우의 수는

$24+11+1=36$

이고, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 4이므로 구하는 경우의 수는

$4\times36=144$

71. 정답 528

이항분포

$12^X=2^{2X}\times3^X$이므로 12^X의 양의 약수의 개수는

$$(2X+1)(X+1)=2X^2+3X+1 \quad\cdots\cdots\ ㉠$$

$8^X=2^{3X}$이므로 8^X의 양의 약수의 개수는

$$3X+1 \quad\cdots\cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡에서

$Y=(2X^2+3X+1)-(3X+1)=2X^2$

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(32,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=16$, $\mathrm{V}(X)=8$에서

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$\mathrm{E}(X^2)=8+256=264$

따라서 $\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(2X^2)=2\times\mathrm{E}(X^2)=528$

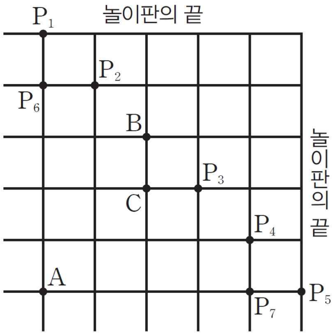
72. 정답 107

조건부확률

$\overline{\mathrm{AB}}<\overline{\mathrm{AP}}$인 사건을 X, 바둑돌이 지점 C를 지나는 사건을 Y라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(Y|X)$이다.

바둑돌이 지점 A에서 지점 B까지 가기 위한 최소한의 이동 횟수는 5이고,

5번의 이동으로 갈 수 있는 지점은 그림과 같이 B, P_1, P_2, $\cdots$, P_5이다.



시행을 6번 반복하므로 $n(X)$의 값을 구하기 위해서는 6번의 시행 중 주사위의 눈이 2 이상 5 이하인 횟수 k에 따라 나누어 생각한다.

(ⅰ) $k=0$인 경우

6번을 이동하면 경우에 상관없이 $\overline{AB}<\overline{AP}$를 만족시킨다.

그러므로 구하는 경우의 수는 $2^6=64$

(ⅱ) $k=1$인 경우

5번의 이동으로 갈 수 있는 6개의 지점 중 $\overline{AB}<\overline{AP}$를 만족시키는 지점은 P_1, P_2, P_4, P_5의 4개다.

즉, 6번의 이동 중 이동하지 않는 시행의 순서와 오른쪽으로 한 칸 이동하는 시행의 횟수에 따라 구분하면

네 지점 P_1, P_2, P_4, P_5로 가는 경우의 수는

$${}_6C_1\times4\times({}_5C_0+{}_5C_1+{}_5C_4+{}_5C_5)=6\times4\times(1+5+5+1)$$
$$=288$$

(ⅲ) $k=2$인 경우

4번의 이동으로 갈 수 있는 5개의 지점 중 $\overline{AB}<\overline{AP}$를 만족시키는 지점은 P_6, P_7의 2개다.

즉, 6번의 이동 중 이동하지 않는 두 번의 시행의 순서에 따라 구분하면

두 지점 P_6, P_7로 가는 경우의 수는

$${}_6C_2\times4^2\times(1^4+1^4)=15\times16\times2$$
$$=480$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

$$P(X)=\frac{64+288+480}{6^6}=\frac{832}{6^6} \quad \cdots\cdots ㉠$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 바둑돌이 지점 C을 지나면 네 지점 P_1, P_2, P_4, P_5를 지나지 않으므로 $\overline{AB}<\overline{AP}$이려면 $k=0$이어야 한다.

$n(X\cap Y)=\frac{4!}{2!\times2!}\times2^2=24$이므로

$$P(X\cap Y)=\frac{24}{6^6} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여

$$P(Y|X)=\frac{P(X\cap Y)}{P(X)}$$
$$=\frac{\frac{24}{6^6}}{\frac{832}{6^6}}=\frac{3}{104}$$

따라서 $p=104$, $q=3$이므로

$p+q=107$

73. 정답 ⑤

이산확률변수의 기댓값

숫자 1, 1, 1, 1, 2, 2 중에서 선택한 두 수의 합으로 가능한 수는

$1+1=2$

$1+2=3$

$2+2=4$

숫자 1, 1, 1, 1, 2, 2 중에서 선택한 세 수의 합으로 가능한 수는

$1+1+1=3$,

$1+1+2=4$,

$1+2+2=5$

이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은

2, 3, 4, 5

(ⅰ) $X=2$인 경우

$X=2$인 사건은 동전을 던져 앞면이 나오고 주머니에서 꺼낸 두 장의 카드에 적혀 있는 수가 1, 1인 사건이므로

$$P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{6}{15}$$
$$=\frac{1}{5}$$

(ⅱ) $X=3$인 경우

$X=3$인 사건은 동전을 던져 앞면이 나오고 주머니에서 꺼낸 두 장의 카드에 적혀 있는 수가 1, 2인 사건 또는 동전을 던져 뒷면이 나오고 주머니에서 꺼낸 세 장의 카드에 적혀 있는 수가 1, 1, 1인 사건이고 두 사건은 서로 배반이므로

$$P(X=3)=\frac{1}{2}\times\frac{{}_4C_1\times{}_2C_1}{{}_6C_2}+\frac{1}{2}\times\frac{{}_4C_3}{{}_6C_3}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{8}{15}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{20}$$
$$=\frac{11}{30}$$

(ⅲ) $X=4$인 경우

$X=4$인 사건은 동전을 던져 앞면이 나오고 주머니에서 꺼낸 두 장의 카드에 적혀 있는 수가 2, 2인 사건 또는 동전을 던져 뒷면이 나오고 주머니에서 꺼낸 세 장의 카드에 적혀 있는 수가 1, 1, 2인 사건이고 두 사건은 서로 배반이므로

$$P(X=4)=\frac{1}{2}\times\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}+\frac{1}{2}\times\frac{{}_4C_2\times{}_2C_1}{{}_6C_3}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{15}+\frac{1}{2}\times\frac{12}{20}$$
$$=\frac{1}{3}$$

(ⅳ) $X=5$인 경우

$X=5$인 사건은 동전을 던져 뒷면이 나오고 주머니에서 꺼낸 세 장의 카드에 적혀 있는 수가 $1,\ 2,\ 2$인 사건이므로

$$\mathrm{P}(X=5)=\frac{1}{2}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{20}=\frac{1}{10}$$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{10}$	1

따라서

$$\mathrm{E}(X)=2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{11}{30}+4\times\frac{1}{3}+5\times\frac{1}{10}=\frac{12+33+40+15}{30}=\frac{10}{3}$$

74. 정답 ②

이항분포와 정규분포의 관계

두 제품 A, C에 대한 선호도를 각각 a, b라 하면 제품 B에 대한 선호도는 제품 C에 대한 선호도의 2배이므로 $2b$이다.

이때 제품 A에 대한 선호도가 가장 높으므로

$a>2b$이고

$a+2b+b=1$

이므로

$a>\frac{2}{5}$ $\cdots\cdots$ ㉠

100명의 고객 중에서 제품 A를 선호하는 고객의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포

$\mathrm{B}(100, a)$를 따르고 100은 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포

$\mathrm{N}(100a,\ 100a(1-a))$를 따른다. 이때 제품 A를 선호하는 고객이 40명 이상일 확률을 표준정규분포표를 이용하여 구한 것이 0.977이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\geq 40)&=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{40-100a}{\sqrt{100a(1-a)}}\right)\\&=0.977\\&=0.5+0.477\\&=\mathrm{P}(Z\geq 0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)\\&=\mathrm{P}(-2\leq Z\leq 0)+\mathrm{P}(Z\geq 0)\\&=\mathrm{P}(Z\geq -2)\end{aligned}$$

즉, $\frac{40-100a}{10\sqrt{a(1-a)}}=-2$

$5a-2=\sqrt{a(1-a)}$

㉠에서 $5a-2>0$이므로 위의 등식의 양변을 제곱하여 정리하면

$25a^2-20a+4=a-a^2$

$26a^2-21a+4=0$

$(13a-4)(2a-1)=0$

㉠에 의하여

$a=\frac{1}{2}$

$a+2b+b=1$에서

$3b=\frac{1}{2}$

$b=\frac{1}{6}$

따라서 제품 B에 대한 선호도는 $\frac{1}{3}$이다.

16200명의 고객 중에서 제품 B를 선호하는 고객의 수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포

$\mathrm{B}\left(16200,\ \frac{1}{3}\right)$

을 따르고 16200은 충분히 크므로 확률변수 Y는 근사적으로 정규분포

$\mathrm{N}\left(16200\times\frac{1}{3},\ 16200\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\right)$, 즉

$\mathrm{N}(5400,\ 60^2)$

을 따른다. 이때 제품 B를 선호하는 고객이 5520명 이상일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\geq 5520)&=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{5520-5400}{60}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\geq 2)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)\\&=0.5-0.477\\&=0.023\end{aligned}$$

75. 정답 16

중복조합의 활용

두 조건 (나), (다)에 의하여 서로 다른 세 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{B}(b,\ c)$, $\mathrm{C}(c,\ d)$로 만들어지는 삼각형 ABC의 무게중심

$\left(\frac{a+b+c}{3},\ \frac{b+c+d}{3}\right)$가 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$\frac{b+c+d}{3}=\frac{a+b+c}{3}$

$a=d$

조건 (가)에서

$2a+b+c=12$

(ⅰ) $a=1$일 때

$b+c=10$이므로 $c=10-b$이고

세 점 A, B, C의 좌표는 각각 $(1,\ b)$, $(b,\ 10-b)$, $(10-b,\ 1)$이다.

이 세 점 A, B, C가 직선 $y=x$ 위에 있지 않으므로 $b \neq 1$이고 $b \neq 5$이고 $b \neq 9$이다.

$b=b'+1$, $c=c'+1$ (b', c'은 음이 아닌 정수)라 하면

$(b'+1)+(c'+1)=10$,

$b'+c'=8$

이고, 이를 만족시키는 b', c'의 순서쌍 (b', c')의 개수는

$${}_2\mathrm{H}_8={}_{2+8-1}\mathrm{C}_8={}_9\mathrm{C}_8={}_9\mathrm{C}_1=9$$

이때 $b'=0$, $b'=4$, $b'=8$인 경우를 제외하면 자연수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$9-3=6$

(ii) $a=2$일 때

$b+c=8$이므로 $c=8-b$이고

세 점 A, B, C의 좌표는 각각 $(2, b)$, $(b, 8-b)$, $(8-b, 2)$이다.

이 세 점 A, B, C가 직선 $y=x$ 위에 있지 않으므로 $b \neq 2$이고 $b \neq 4$이고 $b \neq 6$이다.

$b=b'+1$, $c=c'+1$ (b', c'은 음이 아닌 정수)라 하면

$(b'+1)+(c'+1)=8$,

$b'+c'=6$

이고, 이를 만족시키는 b', c'의 순서쌍 (b', c')의 개수는

$${}_2\mathrm{H}_6={}_{2+6-1}\mathrm{C}_6={}_7\mathrm{C}_6={}_7\mathrm{C}_1=7$$

이때 $b'=1$, $b'=3$, $b'=5$인 경우를 제외하면 자연수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$7-3=4$

(iii) $a=3$일 때

$b+c=6$이므로 $c=6-b$이고

세 점 A, B, C의 좌표는 각각 $(3, b)$, $(b, 6-b)$, $(6-b, 3)$이다.

이 세 점 A, B, C가 직선 $y=x$ 위에 있지 않으므로 $b \neq 3$이다.

$b=b'+1$, $c=c'+1$ (b', c'은 음이 아닌 정수)라 하면

$(b'+1)+(c'+1)=6$,

$b'+c'=4$

이고, 이를 만족시키는 b', c'의 순서쌍 (b', c')의 개수는

$${}_2\mathrm{H}_4={}_{2+4-1}\mathrm{C}_4={}_5\mathrm{C}_4={}_5\mathrm{C}_1=5$$

이때 $b'=2$인 경우를 제외하면 자연수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$5-1=4$

(iv) $a=4$일 때

$b+c=4$이므로 $c=4-b$이고

세 점 A, B, C의 좌표는 각각 $(4, b)$, $(b, 4-b)$, $(4-b, 4)$이다.

이 세 점 A, B, C가 직선 $y=x$ 위에 있지 않으므로 $b \neq 2$이다.

$b=b'+1$, $c=c'+1$ (b', c'은 음이 아닌 정수)

라 하면

$(b'+1)+(c'+1)=4$,

$b'+c'=2$

이고, 이를 만족시키는 b', c'의 순서쌍 (b', c')의 개수는

$${}_2\mathrm{H}_2={}_{2+2-1}\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_1=3$$

이때 $b'=1$인 경우를 제외하면 자연수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$3-1=2$

(v) $a=5$일 때

$b+c=2$이므로 $c=2-b$이고

세 점 A, B, C의 좌표는 각각 $(5, b)$, $(b, 2-b)$, $(2-b, 5)$이다.

이 세 점 A, B, C가 직선 $y=x$ 위에 있지 않으므로 $b \neq 1$이다.

이때 $b+c=2$를 만족시키는 자연수 b, c의 순서쌍 (b, c)가 존재하지 않는다.

즉, 자연수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)는 존재하지 않는다.

(i)~(v)에 의하여 구하는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$6+4+4+2+0=16$

76. 정답 82

조건부확률

함수 $f \circ f$의 치역의 원소 중 홀수의 개수가 3인 사건을 A, 함수 f의 치역의 원소의 개수가 3인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

집합 X에서 집합 X로의 함수의 개수는

${}_5\Pi_5=5^5$

이고, 사건 A는 다음의 세 가지가 있다.

(i) 함수 f의 치역의 원소의 개수가 5인 경우

함수 f는 일대일대응이므로 함수 $f \circ f$의 치역의 원소 중 홀수의 개수는 3

이때의 함수 f의 개수는

$5!=120$

(ii) 함수 f의 치역의 원소의 개수가 4인 경우

함수 f의 치역은 1, 3, 5를 포함해야 하므로 나머지 치역의 원소 1개를 선택하는 경우의 수는

${}_2\mathrm{C}_1=2$

① 함수 $f \circ f$의 치역의 원소의 개수가 4인 경우

함수 f의 치역에 포함되지 않는 집합 X의 원소의 함숫값을 정하는 경우의 수는

$_4\mathrm{C}_1=4$

함수 $f\circ f$의 치역의 원소의 개수가 4이므로

함수 f의 치역의 원소의 함숫값을 정하는 경우의 수는

$4!=24$

② 함수 $f\circ f$의 치역의 원소의 개수가 3인 경우

함수 $f\circ f$의 치역이 $\{1,\ 3,\ 5\}$이므로 함수 f의 치역에 포함되지 않는 집합 X의 원소의 함숫값을 정하는 경우의 수는

1

함수 $f\circ f$의 치역의 원소의 개수가 3이므로

함수 f의 치역의 원소 2개를 선택하는 경우의 수는

$_4\mathrm{C}_2=6$

선택된 원소 2개를 1, 3, 5 중 하나에 대응시키는 경우의 수는

$_3\mathrm{C}_1=3$

함수 f의 치역의 나머지 원소 2개의 함숫값을 정하는 경우의 수는

$2!=2$

이때의 함수 f의 개수는

$2\times(4\times24+1\times6\times3\times2)=264$

(ⅲ) 함수 f의 치역의 원소의 개수가 3인 경우

함수 f의 치역이 $\{1,\ 3,\ 5\}$이어야 하므로

$f(1)$, $f(3)$, $f(5)$를 1, 3, 5에 대응시키는 경우의 수는

$3!=6$

이고 집합 X의 나머지 두 원소를 1, 3, 5에 대응시키는 경우의 수는

$_3\Pi_2=3^2=9$

이때의 함수 f의 개수는

$6\times9=54$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

$$\mathrm{P}(A)=\frac{120+264+54}{5^5}=\frac{438}{5^5}$$

사건 $A\cap B$는 함수 $f\circ f$의 치역의 원소 중 홀수의 개수가 3이고 함수 f의 치역의 원소의 개수가 3인 사건이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{54}{5^5}$$

그러므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{54}{5^5}}{\frac{438}{5^5}}=\frac{9}{73}$$

따라서 $p=73$, $q=9$이므로

$p+q=73+9=82$

77. 정답 ⑤

이항분포의 기댓값과 분산

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르므로

$\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x p^x(1-p)^{n-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=n-1)&={}_n\mathrm{C}_{n-1}p^{n-1}(1-p)^1\\&={}_n\mathrm{C}_1p^{n-1}(1-p)\\&=np^{n-1}(1-p)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=n)&={}_n\mathrm{C}_n p^n(1-p)^0\\&=p^n\end{aligned}$$

조건 (가)에서

$\mathrm{P}(X=n-1)=100\mathrm{P}(X=n)$

이므로

$np^{n-1}(1-p)=100p^n$

조건 (나)에서

$\mathrm{E}(X)=np=5$이므로

$p>0$

$p\neq0$이므로 $n(1-p)=100p$

$$\begin{aligned}n&=np+100p\\&=5+100p\end{aligned}$$

$np=(5+100p)p=5$에서

$20p^2+p-1=0$

$(5p-1)(4p+1)=0$

$p>0$이므로 $p=\frac{1}{5}$

$$n=\frac{5}{p}=\frac{5}{\frac{1}{5}}=25$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(25,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{V}(X)=25\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=4$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2)&=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=4+5^2\end{aligned}$$

$=29$

78. 정답 ①

중복조합의 활용

$192=2^6\times3$이므로 a, b, c, d 중 홀수인 자연수는 1 또는 3이어야 한다.

또한 음이 아닌 정수 m_1, m_2, m_3, m_4, n_1, n_2, n_3, n_4에 대하여

$a=2^{m_1}\times3^{n_1}$, $b=2^{m_2}\times3^{n_2}$, $c=2^{m_3}\times3^{n_3}$, $d=2^{m_4}\times3^{n_4}$라 하면

$m_1+m_2+m_3+m_4=6$ …… ㉠

$n_1+n_2+n_3+n_4=1$ …… ㉡

이어야 한다.

조건 (나)에서 $a+b+c+d$가 홀수이어야 하므로 a, b, c, d 중 홀수인 자연수의 개수는 1 또는 3이어야 한다.

(i) a, b, c, d 중 홀수인 자연수의 개수가 1인 경우

a, b, c, d 중 홀수가 될 자연수를 정하는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

이때 a가 홀수라 하자.

① $a=1$인 경우

b, c, d는 모두 짝수이어야 하므로

$m_2\geq1$, $m_3\geq1$, $m_4\geq1$

㉠에서

$m_2'+1=m_2$, $m_3'+1=m_3$, $m_4'+1=m_4$

(m_2', m_3', m_4'은 음이 아닌 정수)

라 하면 $m_1=0$이므로 ㉠을 만족시키는 모든 순서쌍 $(m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4)$의 개수는 방정식 $m_2'+m_3'+m_4'=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 m_2', m_3', m_4'의 모든 순서쌍 $(m_2',\ m_3',\ m_4')$의 개수와 같고, 이는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

또한 ㉡에서 $n_1=0$이므로 ㉡을 만족시키는 모든 순서쌍 $(n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4)$의 개수는 방정식 $n_2+n_3+n_4=1$을 만족시키는 음이 아닌 정수 n_2, n_3, n_4의 모든 순서쌍 $(n_2,\ n_3,\ n_4)$의 개수와 같고, 이는

${}_3C_1=3$

그러므로 이 경우 구하는 모든 순서쌍의 개수는

$10\times3=30$

② $a=3$인 경우

b, c, d는 모두 짝수이어야 하므로

$m_2\geq1$, $m_3\geq1$, $m_4\geq1$

㉠에서 $m_2''+1=m_2$, $m_3''+1=m_3$, $m_4''+1=m_4$

(m_2'', m_3'', m_4''은 음이 아닌 정수)

라 하면 $m_1=0$이므로 ㉠을 만족시키는 모든 순서쌍 $(m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4)$의 개수는 방정식 $m_2''+m_3''+m_4''=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 m_2'', m_3'', m_4''의 모든 순서쌍 $(m_2'',\ m_3'',\ m_4'')$의 개수와 같고, 이는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

또한 ㉡에서 $n_1=1$이므로 ㉡을 만족시키는 모든 순서쌍 $(n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4)$의 개수는 1이다.

그러므로 이 경우 구하는 모든 순서쌍의 개수는 10이다.

따라서 a, b, c, d 중 홀수인 자연수의 개수가 1인 경우의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 $4\times(30+10)=160$

(ii) a, b, c, d 중 홀수인 자연수의 개수가 3인 경우

a, b, c, d 중 홀수가 될 자연수를 정하는 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

이때 a, b, c가 홀수라 하자.

① a, b, c 모두 1인 경우

$d=192$이면 되므로 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 1이다.

② a, b, c 중 어느 하나가 3인 경우

a, b, c 중 3이 될 자연수를 정하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

이때 $d=64$이면 되므로 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 3이다.

따라서 a, b, c, d 중 홀수인 자연수의 개수가 3인 경우의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

$4\times(1+3)=16$

(i), (ii)에 의하여 구하는 순서쌍의 개수는

$160+16=176$

79. 정답 236

조건부확률

집합 X에서 X로의 모든 함수 중에서 임의로 선택한 한 함수 f가 두 조건 (가), (나)를 만족시킬 사건을 S, 집합 X에서 X로의 모든 함수 중에서 임의로 선택한 한 함수 f가 $f(1)=4$를 만족시킬 사건을 T라 하면 구하는 확률은

$$P(T\mid S)=\frac{P(S\cap T)}{P(S)}$$

이고, 조건 (가)에서

$f(2)<f(4)<f(6)$

이므로 $f(2)\leq5$이다.

이때 $f(2)=2$이면

$$\begin{aligned}f(f(2))&=f(2)\\&=2\end{aligned}$$

이므로 $f(f(2))=4$를 만족시키지 않는다.

또 $f(2)=4$이면 $f(f(2))=4$에서

$$\begin{aligned}f(f(2))&=f(4)\\&=4\end{aligned}$$

이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.
즉, $f(2)$의 값은 1 또는 3 또는 5이므로 다음의 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) $f(2)=1$인 경우

조건 (가)를 만족시키도록 집합 X의 원소 중에서 $f(4)$, $f(6)$의 값을 선택하는 경우의 수는 2, 3, 4, 5, 6, 7 중에서 서로 다른 2개의 수를 선택하는 경우의 수와 같으므로

$_6C_2=15$

한편, 조건 (나)의 $f(f(2))=4$에서

$f(1)=4$

이므로 조건 (가)를 만족시키도록 집합 X의 원소 중에서 $f(3)$, $f(5)$, $f(7)$의 값을 선택하는 경우의 수는 4, 5, 6, 7 중에서 중복을 허락하여 3개의 수를 선택하는 경우의 수와 같으므로

$_4H_3={}_{4+3-1}C_3$
$=20$

이 경우의 함수 f의 개수는

$15\times20=300$

(ⅱ) $f(2)=3$인 경우

조건 (가)를 만족시키도록 집합 X의 원소 중에서 $f(4)$, $f(6)$의 값을 선택하는 경우의 수는 4, 5, 6, 7 중에서 서로 다른 2개의 수를 선택하는 경우의 수와 같으므로

$_4C_2=6$

한편, 조건 (나)의 $f(f(2))=4$에서

$f(3)=4$

이므로 조건 (가)를 만족시키도록 집합 X의 원소 중에서 $f(1)$, $f(5)$, $f(7)$의 값을 선택하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4 중에서 1개의 수를 선택하고 4, 5, 6, 7 중에서 중복을 허락하여 2개의 수를 선택하는 경우의 수와 같으므로

$_4C_1\times{}_4H_2=4\times{}_{4+2-1}C_2$
$=4\times10$
$=40$

이 경우의 함수 f의 개수는

$6\times40=240$

한편, 두 조건 (가), (나)를 만족시키고 $f(2)=3$, $f(1)=4$를 만족시키는 함수 f의 개수는

$6\times10=60$

(ⅲ) $f(2)=5$인 경우

조건 (가)를 만족시키도록 집합 X의 원소 중에서 $f(4)$, $f(6)$의 값을 선택하는 경우의 수는 $f(4)=6$, $f(6)=7$일 때 뿐이므로 1이다.

한편, 조건 (나)의 $f(f(2))=4$에서

$f(5)=4$

이므로 조건 (가)를 만족시키도록 집합 X의 원소 중에서 $f(1)$, $f(3)$, $f(7)$의 값을 선택하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 2개의 수를 선택하고 4, 5, 6, 7 중에서 1개의 수를 선택하는 경우의 수와 같으므로

$_4H_2\times{}_4C_1=40$

이 경우의 함수 f의 개수는

$1\times40=40$

한편, 두 조건 (가), (나)를 만족시키고 $f(2)=5$, $f(1)=4$를 만족시키는 함수 f의 개수는

$1\times4=4$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

$$\mathrm{P}(S)=\frac{300+240+40}{{}_7\Pi_7}=\frac{580}{7^7}$$

$$\mathrm{P}(S\cap T)=\frac{300+60+4}{{}_7\Pi_7}=\frac{364}{7^7}$$

이므로

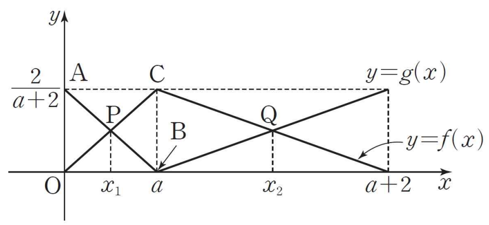
$$P(T|S)=\frac{P(S\cap T)}{P(S)}=\frac{\frac{364}{7^7}}{\frac{580}{7^7}}=\frac{91}{145}$$

따라서 $p=145, q=91$이므로

$p+q=145+91$
$=236$

80. 정답 9

정규분포



점 $\left(0,\ \frac{2}{a+2}\right)$를 A, 점 $(a,\ 0)$을 B, 점 $\left(a,\ \frac{2}{a+2}\right)$를 C, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점 중 x좌표가 작은 점을 P, x좌표가 큰 점을 Q라 하고, 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하자.

$0<k\le a+2$에서 $h_1(k)=\mathrm{P}(0\le X\le k)$, $h_2(k)=\mathrm{P}(0\le Y\le k)$라 하면 $h_1(k)$의 값은 $0\le x\le k$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $x=k$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같고, $h_2(k)$의 값은 $0\le x\le k$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $x=k$ 및 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

$0\le x<x_1$일 때, $f(x)<g(x)$, $f(x_1)=g(x_1)$

$x_1 < x < a$일 때, $f(x) > g(x)$, $h_1(a) = h_2(a)$

$a \le x < x_2$일 때, $f(x) > g(x)$, $f(x_2) = g(x_2)$

$x_2 < x \le a+2$일 때, $f(x) < g(x)$, $h_1(a+2) = h_2(a+2)$

이고 $0 < a < 2$에서 $a < (a+2) - a$이므로 삼각형 BQC의 넓이는 삼각형 OPA의 넓이보다 크다. (단, O는 원점이다.)

즉, 함수 $h(k) = |h_1(k) - h_2(k)|$는 $k = x_2$일 때 최댓값을 갖고, 최댓값은 삼각형 BQC의 넓이와 같으므로 함수 $h(k)$의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{a+2} \times 1 = \frac{1}{a+2}$$

$\frac{1}{a+2} = \frac{5}{14}$에서

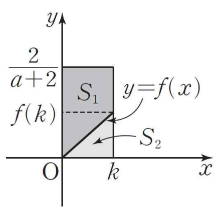
$5(a+2) = 14$, $a = \frac{4}{5}$

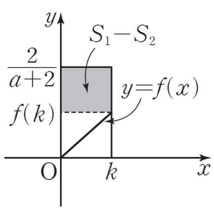
따라서 $p = 5$, $q = 4$이므로

$p + q = 5 + 4 = 9$

[참고] 함수 $h(k)$는 k의 값의 범위에 따라 다음과 같다.

(i) $0 < k \le a$일 때

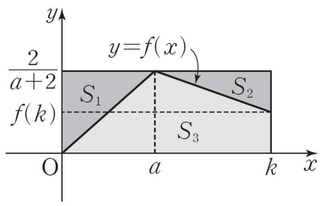


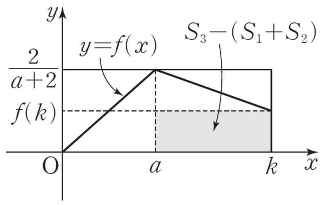


함수 $h(k)$의 값은 $S_1 - S_2$의 값과 같으므로

$$h(k) = k \times \left\{\frac{2}{a+2} - f(k)\right\}$$

(ii) $a < k \le a+2$일 때

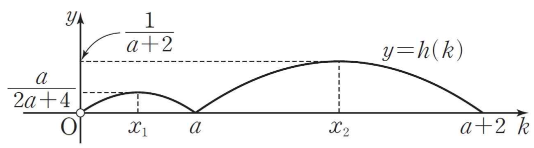




함수 $h(k)$의 값은 $S_3 - (S_1 + S_2)$의 값과 같으므로

$$h(k) = (k-a) \times f(k)$$

따라서 함수 $y = h(k)$의 그래프는 그림과 같다.



81. 정답 ②

모평균의 추정

표본평균이 $\overline{x_1}$, 모표준편차가 $\sigma = 4$, 표본의 크기가 25이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 $95\,\%$의 신뢰구간은

$$\overline{x_1} - 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{25}} \le m \le \overline{x_1} + 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{25}}$$

$$\overline{x_1} - 1.96 \times \frac{4}{5} \le m \le \overline{x_1} + 1.96 \times \frac{4}{5}$$

즉, $a = \overline{x_1} - 1.96 \times \frac{4}{5}$,

$b = \overline{x_1} + 1.96 \times \frac{4}{5}$

이때 $a + b = 70$이므로

$2\overline{x_1} = 70$

$\overline{x_1} = 35$

따라서

$a = 35 - 1.96 \times \frac{4}{5}$

$b = 35 + 1.96 \times \frac{4}{5}$

이므로

$$\begin{aligned}\overline{x_2} &= 72 - \overline{x_1} \\ &= 72 - 35 \\ &= 37\end{aligned}$$

한편, 표본평균이 $\overline{x_2} = 37$, 모표준편차가 $\sigma = 4$, 표본의 크기가 400이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 $95\,\%$의 신뢰구간은

$$37 - 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{400}} \le m \le 37 + 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{400}}$$

$$37 - 1.96 \times \frac{1}{5} \le m \le 37 + 1.96 \times \frac{1}{5}$$

즉, $c = 37 - 1.96 \times \frac{1}{5}$

$d = 37 + 1.96 \times \frac{1}{5}$

따라서

$$\begin{aligned}d - a &= \left(37 + 1.96 \times \frac{1}{5}\right) - \left(35 - 1.96 \times \frac{4}{5}\right) \\ &= 2 + 1.96 \\ &= 3.96\end{aligned}$$

82. 정답 ⑤

중복조합의 활용

여학생 A가 받은 사탕의 개수를 a, 나머지 두 명의 여학생이 받은 사탕의 개수를 각각 b, c라 하고, 남학생 B가 받은 사탕의 개수를 x, 나머지 두 명의 남학생이 받은 사탕의 개수를 각각 y, z라 하자.

여학생 3명은 적어도 한 개의 사탕을 받으므로 a, b, c는 자연수이고 x, y, z는 음이 아닌 정수라 할 때,

$a+b+c+x+y+z=10$ …… ㉠

을 만족시킨다.

또한, 여학생 A와 남학생 B가 받은 사탕의 개수의 합이 4의 배수이므로

$a+x=4$또는 $a+x=8$ …… ㉡

이어야 한다.

따라서 구하는 경우의 수는 방정식 ㉠, ㉡을 만족시키는 자연수 a, b, c와 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z)$의 개수와 같다.

$a=a'+1,\ b=b'+1,\ c=c'+1$이라 하자.

(i) $a+x=4$일 때

방정식 $a+x=4$를 만족시키는 자연수 a와 음이 아닌 정수 x의 순서쌍 $(a,\ x)$의 개수는

방정식 $a'+1+x=4$, 즉 $a'+x=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', x의 순서쌍 $(a',\ x)$의 개수와 같으므로

$${}_2\mathrm{H}_3={}_{2+3-1}\mathrm{C}_3$$
$$={}_4\mathrm{C}_3$$
$$={}_4\mathrm{C}_1$$
$$=4$$

한편, $a+x=4$이면 $b+c+y+z=6$이다.

방정식 $b+c+y+z=6$을 만족시키는 자연수 b, c와 음이 아닌 정수 y, z의 순서쌍 $(b,\ c,\ y,\ z)$의 개수는

방정식 $b'+1+c'+1+y+z=6$

즉, $b'+c'+y+z=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 b', c', y, z의 순서쌍 $(b',\ c',\ y,\ z)$의 개수와 같으므로

$${}_4\mathrm{H}_4={}_{4+4-1}\mathrm{C}_4$$
$$={}_7\mathrm{C}_4$$
$$={}_7\mathrm{C}_3$$
$$=35$$

즉, $a+x=4$일 때 조건을 만족시키는 a, b, c, x, y, z의 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z)$의 개수는

$4\times35=140$

(ii) $a+x=8$일 때

방정식 $a+x=8$을 만족시키는 자연수 a와 음이 아닌 정수 x의 순서쌍 $(a,\ x)$의 개수는

방정식 $a'+1+x=8$, 즉 $a'+x=7$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', x의 순서쌍 $(a',\ x)$의 개수와 같으므로

$${}_2\mathrm{H}_7={}_{2+7-1}\mathrm{C}_7$$
$$={}_8\mathrm{C}_7$$
$$={}_8\mathrm{C}_1$$
$$=8$$

한편, $a+x=8$이면 $b+c+y+z=2$이다.

방정식 $b+c+y+z=2$를 만족시키는 자연수 b, c와 음이 아닌 정수 y, z의 순서쌍 $(b,\ c,\ y,\ z)$는 $(1,\ 1,\ 0,\ 0)$뿐이므로 순서쌍 $(b,\ c,\ y,\ z)$의 개수는 1이다.

즉, $a+x=8$일 때 조건을 만족시키는 a, b, c, x, y, z의 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z)$의 개수는

$8\times1=8$

(i), (ii)에 의하여 구하는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z)$의 개수는

$140+8=148$

이므로 구하는 경우의 수는 148이다.

83. 정답 25

정규분포

조건 (가)에서

$f(20)<f(6)<f(12)$

이므로

$|12-m|<|6-m|<|20-m|$

을 만족시킨다.

$m\le6$이면

$|6-m|<|12-m|<|20-m|$

이고 $m\ge20$이면

$|6-m|>|12-m|>|20-m|$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i) $6<m\le12$인 경우

$|12-m|<|6-m|$

에서

$12-m<m-6,\ m>9$

$|6-m|<|20-m|$

에서

$m-6<20-m,\ m<13$

즉, $9<m\le12$이므로 자연수 m의 값은 $10,\ 11,\ 12$이다.

(ii) $12<m<20$인 경우

$|12-m|<|6-m|$

에서

$m-12<m-6$

이므로 항상 성립한다.

$|6-m|<|20-m|$

에서

$m-6<20-m$

에서

$m<13$

즉, $12<m<13$이므로 조건을 만족시키는 자연수 m은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 m의 값은 $10,\ 11,\ 12$이다.

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때 조건 (나)에서

$$\mathrm{P}(|X-m|\ge 3)=\mathrm{P}\left(\left|\frac{X-m}{\sigma}\right|\ge\frac{3}{\sigma}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(|Z|\ge\frac{3}{\sigma}\right)$$
$$=1-\mathrm{P}\left(|Z|\le\frac{3}{\sigma}\right)$$
$$=1-2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{3}{\sigma}\right)$$

즉, $1-2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{3}{\sigma}\right)\le 0.1336$이므로

$$1-0.1336\le 2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{3}{\sigma}\right)$$
$$0.8664\le 2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{3}{\sigma}\right)$$
$$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{3}{\sigma}\right)\ge 0.4332$$

즉, $\frac{3}{\sigma}\ge 1.5$에서 $\sigma\le 2$이므로 자연수 σ의 값은 1 또는 2이다.

따라서 $m+\sigma$의

최댓값은 $m=12$, $\sigma=2$일 때 14이고

최솟값은 $m=10$, $\sigma=1$일 때 11이므로

그 합은 25이다.

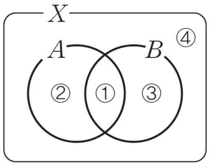
84. 정답 138

확률의 덧셈정리

집합 X의 부분집합의 개수는 2^6이고,

두 부분집합 A, B를 택하는 모든 경우의 수는

$2^6\times 2^6=2^{12}$



(i) $n(A\cap B)=2$인 경우

집합 $A\cap B$에 속하는 원소 2개를 택하는 경우의 수는

${}_6C_2=15$

집합 $A\cap B$에 속하지 않는 4개의 원소는 위의 ②, ③, ④ 영역 중에 한 영역에 속하게 되므로

4개의 원소의 영역을 정하는 경우의 수는 3^4이다.

따라서 이 경우의 확률은

$\frac{15\times 3^4}{2^{12}}$

(ii) $n(A\cup B)=4$인 경우

집합 $A\cup B$에 속하지 않는 원소 2개를 택하는 경우의 수는

${}_6C_2=15$

집합 $A\cup B$에 속하는 4개의 원소는 위의 ①, ②, ③ 영역 중에 한 영역에 속하게 되므로

4개의 원소의 영역을 정하는 경우의 수는 3^4이다.

따라서 이 경우의 확률은

$\frac{15\times 3^4}{2^{12}}$

(iii) $n(A\cap B)=2$이고 $n(A\cup B)=4$인 경우

집합 $A\cap B$에 속하는 원소 2개를 택하는 경우의 수는

${}_6C_2=15$

나머지 4개의 원소에서 집합 $A\cup B$에 속하지 않는 원소 2개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

이때 나머지 2개의 원소는 ②, ③ 영역 중의 하나에 속하게 되므로 2개의 원소의 영역을 정하는 경우의 수는 2^2이다.

따라서 이 경우의 확률은

$\frac{15\times 6\times 2^2}{2^{12}}$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{15\times 3^4}{2^{12}}+\frac{15\times 3^4}{2^{12}}-\frac{15\times 6\times 2^2}{2^{12}}=\frac{15}{2^{12}}(3^4+3^4-6\times 2^2)$$
$$=\frac{15}{2^{12}}\times 138$$

따라서 $k=138$

85. 정답 ⑤

이산확률변수의 평균

확률변수 X가 갖는 값은 1, 2, 3이고, 4개의 직사각형에 3가지 색으로 칠하는 경우의 수는

$3^4=81$

(i) $X=1$일 때

1가지 색으로 칠하는 경우이므로

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{3}{81}=\frac{1}{27}$

(ii) $X=2$일 때

2가지 색으로 칠하는 경우이므로 색칠할 2가지 색을 정하는 경우의 수는

${}_3C_2=3$

ⓐ 2가지 색을 1번, 3번 칠하는 경우

2가지 색 중에서 3번 칠하는 색을 정하는 경우의 수는 ${}_2C_1=2$이므로 4개의 직사각형에 칠하는 경우의 수는

$2\times\frac{4!}{3!}=8$

ⓑ 2가지 색을 2번씩 칠하는 경우

4개의 직사각형에 칠하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times 2!}=6$

즉, $\mathrm{P}(X=2)=\dfrac{3\times(8+6)}{81}=\dfrac{14}{27}$

(ⅲ) $X=3$일 때

3가지 색을 1번, 1번, 2번 칠하는 경우이고 3가지 색 중에서 2번 칠하는 색을 정하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$이므로 4개의 직사각형에 칠하는 경우의 수는

$3\times\dfrac{4!}{2!}=36$

즉, $\mathrm{P}(X=3)=\dfrac{36}{81}=\dfrac{4}{9}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\dfrac{1}{27}$	$\dfrac{14}{27}$	$\dfrac{4}{9}$	1

$\mathrm{E}(X)=1\times\dfrac{1}{27}+2\times\dfrac{14}{27}+3\times\dfrac{4}{9}=\dfrac{65}{27}$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(\frac{9}{5}X-2\right)&=\frac{9}{5}\mathrm{E}(X)-2\\&=\frac{9}{5}\times\frac{65}{27}-2\\&=\frac{7}{3}\end{aligned}$$

86. 정답 ②

표본평균의 분포

조건 (가)에서 $g(1)=f(-1)$이고

조건 (나)에서 $g(1)=f(9)$이므로

$f(-1)=f(9)$

확률변수 X가 정규분포를 따르므로 곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=m_1$에 대하여 대칭이다.

즉, $m_1=\dfrac{-1+9}{2}=4$

조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여

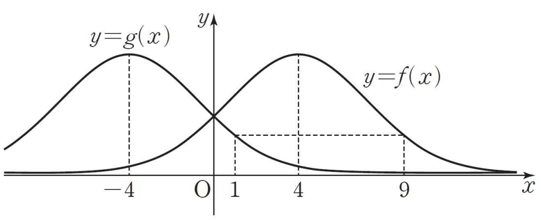
$g(x)=f(-x)$

이므로 두 곡선

$y=f(x)$, $y=g(x)$

는 y축에 대하여 대칭이다.

즉, $m_2=-4$, $\sigma_1=\sigma_2$



확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(4,\ \left(\dfrac{\sigma_1}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따르고,

$Z=\dfrac{\overline{X}-4}{\dfrac{\sigma_1}{\sqrt{n}}}$

라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

확률변수 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(-4,\ \left(\dfrac{\sigma_1}{4}\right)^2\right)$을 따르고,

$Z=\dfrac{\overline{Y}+4}{\dfrac{\sigma_1}{4}}$

라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\le 3)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{3-4}{\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\le-\frac{\sqrt{n}}{\sigma_1}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{Y}\ge -1)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{-1+4}{\frac{\sigma_1}{4}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{12}{\sigma_1}\right)\end{aligned}$$

에서 $\mathrm{P}\left(Z\le-\dfrac{\sqrt{n}}{\sigma_1}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{12}{\sigma_1}\right)$이므로

$\dfrac{\sqrt{n}}{\sigma_1}=\dfrac{12}{\sigma_1}$

따라서 $n=144$

87. 정답 37

확률의 덧셈정리

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에대하여 X에서 X로의 일대일대응의 개수는 $5!$이다.

함수 f가 $f(1)f(2)$의 값이 4의 약수이고

$f(1)<f(5)$를 만족시키는 사건을 A,

$f(2)f(5)$의 값이 6의 배수이고 $f(1)<f(5)$를 만족시키는 사건을 B라 하자.

(ⅰ) 함수 f에 대하여 $f(1)$, $f(2)$의 값을 순서쌍 $(f(1),\ f(2))$로 나타내어 보자.

사건 A는 함수 f가 일대일대응이므로 순서쌍 $(f(1),\ f(2))$가 $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$, $(1,\ 4)$, $(4,\ 1)$인 경우이다.

ⓐ 순서쌍 $(f(1),\ f(2))$가 $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$, $(1,\ 4)$인 경우

각 순서쌍에 대하여 $f(1)<f(5)$이고

일대일대응이 되도록 $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 $3!$이므로 이 경우의 수는

$3\times3!=18$

ⓑ 순서쌍 $(f(1),\ f(2))$가 $(4,\ 1)$인 경우

$f(1)<f(5)$이고 일대일대응이려면 $f(5)=5$이어야 하므로 $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 $2!$, 즉 이 경우의 수는

$1\times 2!=2$

따라서 사건 A가 일어날 확률은

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{18+2}{5!}=\dfrac{20}{120}=\dfrac{1}{6}$

(ii) 함수 f에 대하여 $f(2)$, $f(5)$의 값을 순서쌍 $(f(2),\ f(5))$로 나타내어 보자.

사건 B는 함수 f가 일대일대응이므로 순서쌍 $(f(2),\ f(5))$가 $(2,\ 3)$, $(3,\ 2)$, $(3,\ 4)$, $(4,\ 3)$

인 경우이다.

ⓐ 순서쌍 $(f(2),\ f(5))$가 $(3,\ 2)$, $(2,\ 3)$인 경우

각 순서쌍에 대하여 $f(1)<f(5)$이고 일대일대응이려면 $f(1)=1$이어야 하므로 $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

$2!$

즉, 이 경우의 수는

$2\times 2!=4$

ⓑ 순서쌍 $(f(2),\ f(5))$가 $(3,\ 4)$, $(4,\ 3)$인 경우

각 순서쌍에 대하여 $f(1)<f(5)$이고 일대일대응이려면 $f(1)$의 값은 1, 2 중 하나이고 $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

$2!$

이므로 이 경우의 수는

$2\times(2\times 2!)=8$

따라서 사건 B가 일어날 확률은

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{4+8}{5!}=\dfrac{12}{120}=\dfrac{1}{10}$

(iii) 함수 f에 대하여 $f(1)$, $f(2)$, $f(5)$의 값을 순서쌍 $(f(1),\ f(2),\ f(5))$로 나타내어 보자.

사건 $A\cap B$는 f가 일대일대응이므로 순서쌍 $(f(1),\ f(2),\ f(5))$가 $(1,\ 2,\ 3)$, $(1,\ 4,\ 3)$인 경우이다.

각 순서쌍은 $f(1)<f(5)$이므로 f가 일대일대응이 되도록 $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

$2!$

즉, 이 경우의 수는

$2\times 2!=4$

따라서 사건 $A\cap B$가 일어날 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{4}{5!}=\dfrac{1}{30}$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{1}{6}+\frac{1}{10}-\frac{1}{30}\\&=\frac{7}{30}\end{aligned}$$

따라서 $p=30,\ q=7$이므로

$p+q=30+7=37$

88. 정답 24

중복조합의 활용

A, B를 포함한 세 명의 여학생과 남학생 1명이 받은 공책의 수를 각각 $a,\ b,\ c,\ d$라 하자.

12권의 공책을 4명의 학생에게 적어도 한 권씩 나누어 주므로

$a+b+c+d=12$ ($a,\ b,\ c,\ d$는 자연수) …… ㉠

또한 여학생 A, B가 받은 공책의 수의 곱이 4의 배수이고 남학생이 받은 공책의 수가 짝수이므로

ab는 4의 배수이고 d는 짝수 …… ㉡

이어야 한다.

따라서 구하는 경우의 수는 ㉠, ㉡을 만족시키는 자연수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수와 같다.

ab는 4의 배수이므로 $a,\ b$ 중에서 적어도 하나는 짝수이다.

(i) a와 b가 모두 짝수인 경우

$a,\ b$가 짝수이고 d가 짝수이므로

$c=12-(a+b+d)$에서 c는 짝수이다.

방정식 $a+b+c+d=12$에서

$a=2a'+2,\ b=2b'+2,\ c=2c'+2,$

$d=2d'+2$ ($a',\ b',\ c',\ d'$은 음이 아닌 정수)라 하면

$(2a'+2)+(2b'+2)+(2c'+2)+(2d'+2)=12$

$a'+b'+c'+d'=2$ …… ㉢

a와 b가 짝수인 경우 조건을 만족시키는 자연수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 방정식 ㉢을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a',\ b',\ c',\ d'$의 모든 순서쌍 $(a',\ b',\ c',\ d')$의 개수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_2={}_{4+2-1}\mathrm{C}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$

(ii) $a,\ b$ 중에서 한 개만 짝수인 경우

$a,\ b$ 중에서 한 개만 짝수이면 그 짝수는 4의 배수이고 나머지 한 개는 홀수이다.

$a,\ b$ 중 짝수가 될 한 개를 정하는 경우의 수는

${}_2\mathrm{C}_1=2$

예를 들어, a가 짝수라고 하자.

a는 4의 배수이고

$a=12-(b+c+d)\leq 9$

이므로

$a=4$ 또는 $a=8$

ⓐ $a=4$인 경우

$a+b+c+d=12$에서

$b+c+d=8$

b는 홀수, d는 짝수이므로

$c=8-(b+d)$에서 c는 홀수이다.

방정식 $b+c+d=8$에서

$b=2b'+1,\ c=2c'+1,\ d=2d'+2$

($b',\ c',\ d'$은 음이 아닌 정수)라 하면

$(2b'+1)+(2c'+1)+(2d'+2)=8$

$b'+c'+d'=2$ …… ㉣

$a=4$이고 b가 홀수인 경우 조건을 만족시키는 자연수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 방정식 ㉣을 만족시키는 음이 아닌 정수 $b',\ c',\ d'$의 모든 순서쌍 $(b',\ c',\ d')$의 개수와 같으므로

${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6$

ⓑ $a=8$인 경우

$a+b+c+d=12$에서

$b+c+d=4$

b는 홀수, d는 짝수이므로

$c=4-(b+d)$에서 c는 홀수이다.

방정식 $b+c+d=4$에서

$b=2b'+1,\ c=2c'+1,\ d=2d'+2$

($b',\ c',\ d'$은 음이 아닌 정수)

라 하면

$(2b'+1)+(2c'+1)+(2d'+2)=4$

$b'+c'+d'=0$ …… ㉤

$a=8$이고 b가 홀수인 경우 조건을 만족시키는 자연수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 방정식 ㉤을 만족시키는 음이 아닌 정수 $b',\ c',\ d'$의 순서쌍 $(0,\ 0,\ 0)$으로 1이다.

따라서 $a,\ b$ 중에서 한 개만 짝수인 경우 조건을 만족시키는 자연수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

$2\times(6+1)=14$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

$10+14=24$

89. 정답 ②

[이항분포]

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르고, n은 자연수이므로

$\mathrm{E}(X)=np=\dfrac{n^2}{48}$에서

$n=48p$ …… ㉠

$\mathrm{V}(X)=np(1-p)=\dfrac{n(3-p)}{10}$에서

$p(1-p)=\dfrac{(3-p)}{10}$

$10p^2-11p+3=0$

$(2p-1)(5p-3)=0$

$p=\dfrac{1}{2}$ 또는 $p=\dfrac{3}{5}$

(ⅰ) $p=\dfrac{1}{2}$일 때,

㉠에서 $n=48\times\dfrac{1}{2}=24$

이때 n이 자연수인 조건을 만족시킨다.

(ⅱ) $p=\dfrac{3}{5}$일 때,

㉠에서 $n=48\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{144}{5}$

이때 n이 자연수인 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키는 $n,\ p$의 값은

$n=24,\ p=\dfrac{1}{2}$이므로

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{24\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}}=\sqrt{6}$

90. 정답 ⑤

[조건부확률]

8개의 의자에 8명의 학생을 임의로 앉히는 시행에서 1학년 학생끼리는 1번과 8번 의자를 포함하여 서로 이웃하지 않는 의자에 앉아 있는 사건을 A라 하고, 2학년 학생 중 적어도 2명의 학생이 서로 이웃한 의자에 앉아 있는 사건을 B라 하자. 8명의 학생 중 1학년, 2학년, 3학년의 학생 수를 차례로 $a,\ b,\ c$라 하면

$a+b+c=8$ ($a,\ b,\ c$는 자연수) …… ㉠

두 조건 (가), (나)에서

$2\le b\le a,\ 2\le c\le a$ …… ㉡

이므로 ㉠, ㉡을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는 $(4,\ 2,\ 2),\ (3,\ 3,\ 2),\ (3,\ 2,\ 3)$이다. 이때 8명의 학생을 일렬로 나열된 8개의 의자에 임의로 앉히는 경우의 수는 $8!$이다.

(ⅰ) $(a,\ b,\ c)=(4,\ 2,\ 2)$일 때

1학년 학생이 앉은 의자를 ■으로 표시할 때, 4명의 1학년 학생이 1번과 8번 의자를 포함하여 서로 이웃하지 않는 4개의 의자에 앉아 있는 경우는 다음 그림과 같이 3가지이다.

■			■		■		■

■		■			■		■

■		■		■			■

4명의 1학년 학생을 1번과 8번 의자를 포함하여 서로 이웃하지 않는 4개의 의자에 앉히고, 남은 4명의 학생을 4개의 빈 의자에 앉히는 경우의 수는

$3\times4!\times4!$ …… ㉢

이때 2학년 학생 2명이 서로 이웃한 의자에 앉아 있는 경우는 이웃한 2개의 의자에 2학년 학생 2명이 앉고 나머지 2개의 의자에 남은 2명이 앉으면 되므로 이 경우의 수는

$3\times4!\times2!\times2!$ …… ㉣

(ⅱ) $(a,\ b,\ c)=(3,\ 3,\ 2)$일 때

1학년 학생이 앉은 의자를 ■으로 표시할 때, 3명의 1학년 학생이 1번과 8번 의자를 포함하여 서로 이웃하지 않는 3개의

의자에 앉아 있는 경우는 다음 그림과 같이 4가지이다.

①

■		■					■

②

■			■				■

③

■				■			■

④

■					■		■

3명의 1학년 학생을 1번과 8번 의자를 포함하여 서로 이웃하지 않는 3개의 의자에 앉히고, 남은 5명의 학생을 5개의 빈 의자에 앉히는 경우의 수는

$4\times3!\times5!$ …… ㉤

이때 2학년 학생 중 적어도 2명이 서로 이웃하게 앉아 있는 경우의 수는 다음 2가지 경우로 나누어 구하면 된다.

ⓐ 연속된 3개의 의자에 2학년 학생 3명이 앉는 경우

①의 경우:

■		■	2	2	2		■
■		■		2	2	2	■

②의 경우:

■			■	2	2	2	■

③의 경우의 수는 ②와 같고, ④의 경우의 수는 ①과 같으므로 이때 경우의 수는

$3!\times(6\times3!)\times2!$ …… ㉥

ⓑ 연속된 2개의 의자에 2학년 학생 2명이 앉고, 남은 2학년 학생 1명이 다른 2학년 학생과 이웃하지 않도록 앉는 경우

①의 경우:

■	2	■	2	2			■
■		■	2	2		2	■
■	2	■		2	2		■
■	2	■			2	2	■
■		■	2		2	2	■

②의 경우:

■	2		■	2	2		■
■		2	■	2	2		■
■	2		■		2	2	■
■		2	■		2	2	■
■	2	2	■	2			■
■	2	2	■		2		■
■	2	2	■			2	■

③의 경우의 수는 ②와 같고, ④의 경우의 수는 ①과 같으므로 이때 경우의 수는

$3!\times(24\times3!)\times2!$ …… ㉦

㉥, ㉦에서 구하는 경우의 수는

$3!\times(30\times3!)\times2!$ …… ㉧

(ⅲ) $(a,\ b,\ c)=(3,\ 2,\ 3)$일 때

1학년 학생이 앉은 의자를 ■으로 표시할 때, 3명의 1학년 학생이 1번과 8번 의자를 포함하여 서로 이웃하지 않는 3개의 의자에 앉아 있는 경우는 다음 그림과 같이 4가지이다.

■		■					■
■			■				■
■				■			■
■					■		■

3명의 1학년 학생을 1번과 8번 의자를 포함하여 서로 이웃하지 않는 3개의 의자에 앉히고, 남은 5명의 학생을 5개의 빈 의자에 앉히는 경우의 수는

$4\times3!\times5!$ …… ㉨

이때 2학년 학생 2명이 서로 이웃한 의자에 앉아 있는 경우는 연속된 2개 이상의 의자 중 이웃한 2개의 의자에 2학년 학생 2명이 앉고 나머지 3개의 의자에 남은 3명이 앉으면 되므로 이 경우의 수는

$4\times3!\times(3\times2!)\times3!$ …… ㉩

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)의 ㉢, ㉤, ㉨에서

$$\mathrm{P}(A)=\frac{(3\times4!\times4!)+(4\times3!\times5!)+(4\times3!\times5!)}{8!}$$

$$=\frac{13}{70}$$

또 ㉣, ㉧, ㉩에서

$\mathrm{P}(A\cap B)$

$$=\frac{(3\times4!\times2!\times2!)+(3!\times30\times3!\times2!)+(4\times3!\times6\times3!)}{8!}$$

$$=\frac{23}{280}$$

따라서 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{23}{280}}{\frac{13}{70}}=\dfrac{23}{52}$

91. 정답 16

[여사건]

두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cup B)&=\mathrm{P}((A\cap B^C)^C)=1-\mathrm{P}(A\cap B^C)\\&=1-\{\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)\}\\&=1-\mathrm{P}(A)\end{aligned}$$

이때 $\mathrm{P}(A^C\cup B)=\dfrac{2}{5}$이므로

$\frac{2}{5}=1-\mathrm{P}(A)$

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5}$ …… ㉠

또 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)$
$=1-\mathrm{P}(A\cup B)$
$=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\}$
$=1-\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)$

이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=2\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A^C\cap B^C)$에서

$\mathrm{P}(B)=2\mathrm{P}(B)-\{1-\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)\}$

$2\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(A)$

㉠을 대입하면 $2\mathrm{P}(B)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{5}$ …… ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서

$20\mathrm{P}(A\cup B)=20\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\}$
$=20\times\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\right)=16$

92. 정답 500

[같은 것이 있는 순열]

조건 (가)를 만족시키는 세 수 $f(1),\ f(3),\ f(5)$를 작거나 같은 수부터 차례로 나열하여 얻은 순서쌍은 $(-1,\ 3,\ 3)$, $(0,\ 2,\ 3)$, $(0,\ 3,\ 3)$, $(1,\ 1,\ 3)$, $(1,\ 2,\ 2)$, $(1,\ 2,\ 3)$, $(1,\ 3,\ 3)$, $(2,\ 2,\ 2)$, $(2,\ 2,\ 3)$, $(2,\ 3,\ 3)$, $(3,\ 3,\ 3)$ …… ㉠

11가지이다.

(ⅰ) $n(\{f(1),\ f(3),\ f(5)\})=1$인 경우

㉠에서 $n(\{f(1),\ f(3),\ f(5)\})=1$을 만족시키는 순서쌍은 $(2,\ 2,\ 2)$, $(3,\ 3,\ 3)$의 2개이므로 세 수 $f(1),\ f(3),\ f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 2

$f(1)=f(3)=f(5)=a$라 하면 조건 (다)에 의하여 함수 f의 치역을 집합 $\{a,\ p,\ q,\ r\}$ $(p<q<r)$이라 놓을 수 있고, a를 제외한 집합 Y의 4개의 원소에서 $p,\ q,\ r$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_3=4$

또 $\{p,\ q,\ r\}\subset\{f(2),\ f(4),\ f(6)\}\subset\{a,\ p,\ q,\ r\}$이므로 $\{f(2),\ f(4),\ f(6)\}=\{p,\ q,\ r\}$이고, 조건 (나)에 의하여 집합 $\{f(2),\ f(4),\ f(6)\}$의 서로 다른 세 원소 중 작은 것부터 차례로 세 수 $f(2),\ f(4),\ f(6)$에 대응시키면 되므로 그 경우의 수는 1

따라서 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$2\times4\times1=8$

(ⅱ) $n(\{f(1),\ f(3),\ f(5)\})=2$인 경우

㉠에서 $n(\{f(1),\ f(3),\ f(5)\})=2$을 만족시키는 순서쌍은 의 $(-1,\ 3,\ 3)$, $(0,\ 3,\ 3)$, $(1,\ 1,\ 3)$, $(1,\ 2,\ 2)$, $(1,\ 3,\ 3)$, $(2,\ 2,\ 3)$, $(2,\ 3,\ 3)$의 7가지이므로 세 수 $f(1),\ f(3),\ f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

$7\times\frac{3!}{2!}=21$

$\{f(1),\ f(3),\ f(5)\}=\{a,\ b\}$라 하면 조건 (다)에 의하여 함수 f의 치역을 집합 $\{a,\ b,\ p,\ q\}(p<q)$라 놓을 수 있고, $a,\ b$를 제외한 집합 Y의 3개의 원소에서 $p,\ q$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_2=3$

또 $\{p,\ q\}\subset\{f(2),\ f(4),\ f(6)\}\subset\{a,\ b,\ p,\ q\}$이므로 집합 $\{f(2),\ f(4),\ f(6)\}$은 $\{p,\ q\}$ 또는 $\{a,\ p,\ q\}$ 또는 $\{b,\ p,\ q\}$

① $n(\{f(2),\ f(4),\ f(6)\})=2$, 즉 $\{f(2),\ f(4),\ f(6)\}=\{p,\ q\}$인 경우

조건 (나)와 $p<q$에 의하여 순서쌍 $(f(2),\ f(4),\ f(6))$은 $(p,\ p,\ q)$, $(p,\ q,\ q)$의 2개다.

② $n(\{f(2),\ f(4),\ f(6)\})=3$인 경우

조건을 만족시키는 집합 $\{f(2),\ f(4),\ f(6)\}$은 $\{a,\ p,\ q\}$, $\{b,\ p,\ q\}$의 2개다.

조건 (나)에 의하여 집합 $\{f(2),\ f(4),\ f(6)\}$의 서로 다른 세 원소 중 작은 것부터 차례로 세 수 $f(2),\ f(4),\ f(6)$에 대응시키면 되므로 그 경우의 수는 1

따라서 순서쌍 $(f(2),\ f(4),\ f(6))$의 개수는 $2\times1=2$

이상에서 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$21\times3\times(2+2)=252$

(ⅲ) $n(\{f(1),\ f(3),\ f(5)\})=3$인 경우

㉠에서 $n(\{f(1),\ f(3),\ f(5)\})=3$을 만족시키는 순서쌍은 $(0,\ 2,\ 3)$, $(1,\ 2,\ 3)$의 2개이므로 세 수 $f(1),\ f(3),\ f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

$2\times3!=12$

$f(1),\ f(3),\ f(5)=\{a,\ b,\ c\}$라 하면 조건 (다)에 의하여 함수 f의 치역을 집합 $\{a,\ b,\ c,\ p\}$라 놓을 수 있고, $a,\ b,\ c$를 제외한 집합 Y의 2개의 원소에서 p의 값을 정하는 경우의 수는

${}_2\mathrm{C}_1=2$

또 $\{p\}\subset\{f(2),\ f(4),\ f(6)\}\subset\{a,\ b,\ p,\ q\}$이므로 집합 $\{f(2),\ f(4),\ f(6)\}$은 $\{p\}$또는 $\{a,\ p\}$ 또는 $\{b,\ p\}$ 또는 $\{c,\ p\}$ 또는 $\{a,\ b,\ p\}$ 또는 $\{a,\ c,\ p\}$ 또는 $\{b,\ c,\ p\}$

① $n(\{f(2),\ f(4),\ f(6)\})=1$, 즉 $\{f(2),\ f(4),\ f(6)\}=\{p\}$인 경우 순서쌍 $(f(2),\ f(4),\ f(6))$은 $(p,\ p,\ p)$의 1개다.

② $n(\{f(2),\ f(4),\ f(6)\})=2$인 경우

조건을 만족시키는 집합 $\{f(2),\ f(4),\ f(6)\}$은 $\{a,\ p\}$, $\{b,\ p\}$, $\{c,\ p\}$의 3개다.

조건 (나)에 의하여 집합 $\{f(2),\ f(4),\ f(6)\}$의 서로 다른 두 원소 중 작은 것은 $f(2)$, 큰 것은 $f(6)$에 대응시키면 되고, $f(4)$는 두 원소의 값을 모두 가질 수 있으므로 그 경우의 수는

2

따라서 순서쌍 $(f(2),\ f(4),\ f(6))$의 개수는

$3\times 2=6$

③ $n(\{f(2),\ f(4),\ f(6)\})=2$인 경우

조건을 만족시키는 집합 $\{f(2),\ f(4),\ f(6)\}$은 $\{a,\ b,\ p\}$, $\{a,\ c,\ p\}$, $\{b,\ c,\ p\}$의 3개다.

조건 (나)에 의하여 집합 $\{f(2),\ f(4),\ f(6)\}$의 서로 다른 세 원소 중 작은 것부터 차례로 세 수 $f(2),\ f(4),\ f(6)$에 대응시키면 되므로 그 경우의 수는 1

따라서 순서쌍 $(f(2),\ f(4),\ f(6))$의 개수는

$3\times 1=3$

이상에서 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$12\times 2\times(1+6+3)=240$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 함수 f의 개수는

$8+252+240=500$

93. 정답 ⑤

[이산확률분포]

세 종류의 한식 중 한 종류가 처음으로 나오는 날은 다음 달 1일, 2일, 3일 중 하나이다.

즉, $P(X=4)=0$, $P(X=5)=0$이고, 5종류의 음식이 나오는 순서를 정하는 경우의 수는 $5!$ 이다.

(ⅰ) $X=1$인 경우

1일에 나올 한식을 선택하는 경우의 수는 3, 남은 4종류의 음식이 나오는 순서를 정하는 경우의 수는 $4!$이므로

$$P(X=1)=\frac{3\times 4!}{5!}$$
$$=\frac{3}{5}$$

(ⅱ) $X=2$인 경우

1일에 나올 양식을 선택하는 경우의 수는 2, 2일에 나올 한식을 선택하는 경우의 수는 3, 남은 3종류의 음식이 나오는 순서를 정하는 경우의 수는 $3!$이므로

$$P(X=2)=\frac{2\times 3\times 3!}{5!}$$
$$=\frac{10}{3}$$

(ⅲ) $X=3$인 경우

1일과 2일에 나올 양식의 순서를 정하는 경우의 수는 $2!$, 이후 한식이 나오는 순서를 정하는 경우의 수는 $3!$이므로

$$P(X=3)=\frac{2!\times 3!}{5!}$$
$$=\frac{1}{10}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	0	1

$$E(X)=1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{10}+4\times 0+5\times 0$$
$$=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$$
$$V(X)=1^2\times\frac{3}{5}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{1}{10}+4^2\times 0+5^2\times 0-\left(\frac{3}{2}\right)^2$$
$$=\frac{6+12+9}{10}-\frac{9}{4}$$
$$=\frac{9}{20}$$

따라서 $V(2X+3)=2^2\times V(X)$

$$=4\times\frac{9}{20}=\frac{9}{5}$$

94. 정답 ②

[표본평균]

모집단의 확률변수 X가 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

또 두 확률변수 $Z_1=\frac{X-m}{\sigma}$, $Z_2=\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$은 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르고, 조건 (가)에서 $P(X\ge 12)+P(\overline{X}\ge 12)=1$ 이므로 $\frac{12-m}{\sigma}=-\frac{12-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$에서

$m=12$

조건 (나)에서 $P(X\ge 18)+P(\overline{X}\ge 10)=1$ 이므로

$$P\left(Z_1\ge\frac{18-12}{\sigma}\right)+P\left(Z_2\ge\frac{10-12}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)=1$$
$$P\left(Z_1\ge\frac{6}{\sigma}\right)+P\left(Z_2\ge-\frac{2\sqrt{n}}{\sigma}\right)=1$$

즉, $\frac{6}{\sigma}=\frac{2\sqrt{n}}{\sigma}$이므로

$n=9$

조건 (다)에서 $P\left(Z_2\ge\frac{11-12}{\frac{\sigma}{\sqrt{9}}}\right)=0.5+0.4332$

$P\left(0\le Z_2\le\frac{3}{\sigma}\right)=0.4332$ 이므로

$\frac{3}{\sigma}=1.5$에서 $\sigma=2$

따라서

$P(10\le X\le 14)=P\left(\frac{10-12}{2}\le Z_1\le\frac{14-12}{2}\right)$
$=P(-1\le Z_1\le 1)$
$=2P(0\le Z_1\le 1)$
$=0.6826$

$P(\overline{X}\ge 13)=P\left(Z_2\ge\frac{13-12}{\frac{2}{\sqrt{9}}}\right)$
$=P(Z_2\ge 1.5)$
$=0.5-P(0\le Z_2\le 1.5)$
$=0.5-0.4332=0.0668$

이므로

$P(10\le X\le 14)+P(\overline{X}\ge 13)$
$=0.6826+0.0668$
$=0.7494$

95. 정답 271

[조건부확률]

3학년 학생 중 어느 2명도 연속해서 발표하지 않는 경우는 1학년과 2학년 학생인 8명의 발표 순서를 정하고 맨 처음과 맨 마지막 및 8명의 사이사이에 3학년 학생 4명이 발표하는 순서를 정하는 경우이므로 이 경우의 수를 N이라 하면

$N=8!\times{}_9\mathrm{P}_4$
$=8!\times9\times8\times7\times6$
$=9!\times8\times7\times6$

3학년 학생 중 어느 2명도 연속해서 발표하지 않을 때 1학년 학생 중 어느 2명도 연속해서 발표하지 않는 경우는 N에서 1학년 학생이 연속해서 발표하는 경우를 제외하면 된다.

이때 1학년 학생 2명만 연속해서 발표하는 경우와 3명이 모두 연속해서 발표하는 경우가 있다.

(ⅰ) 1학년 학생 중 3명이 모두 연속해서 발표하는 경우

1학년 학생 3명의 순서를 정하는 경우의 수는 $3!$

1학년 학생 3명을 한 묶음으로 하여 2학년 학생 5명과 발표하는 순서를 정하는 경우의 수는 $6!$

맨 처음과 맨 마지막 및 1학년 묶음과 2학년 학생 5명의 사이사이에 3학년 학생 4명이 발표하는 순서를 정하는 경우의 수는 ${}_7\mathrm{P}_4$

즉, 1학년 학생 중 3명이 모두 연속해서 발표하는 경우의 수를 M_1이라 하면

$M_1=3!\times6!\times{}_7\mathrm{P}_4$
$=3!\times6!\times7\times6\times5\times4$
$=7!\times6!$

(ⅱ) 1학년 학생 중 2명만 연속해서 발표하는 경우

1학년 학생 중 2명을 선택하여 한 묶음으로 조건에 맞도록 발표 순서를 정하는 경우에서 나머지 1학년 학생 1명이 1학년 묶음의 앞 또는 뒤에 배치되어 1학년 학생 3명이 모두 연속해서 발표하는 경우를 제외하면 된다. 1학년 학생 3명을 a, b, c라 하면 발표 순서 중 $(ab)c$인 경우와 $a(bc)$인 경우처럼 3명이 모두 연속하는 경우가 2번 계산되므로 1학년 학생 중 2명만 연속해서 발표하는 경우의 수를 M_2라 하면

$M_2=({}_3\mathrm{C}_2\times2!)\times7!\times{}_8\mathrm{P}_4-2M_1$

이때 $({}_3\mathrm{C}_2\times2!)\times7!\times{}_8\mathrm{P}_4=M_3$이라 하면

$M_2=M_3-2M_1$이고,

$M_3=3!\times7!\times8\times7\times6\times5$
$=6\times7!\times8\times7\times6\times5$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$\frac{N-(M_1+M_2)}{N}=\frac{N-(M_1+M_3-2M_1)}{N}=1-\frac{M_3-M_1}{N}$

$M_3-M_1=6\times7!\times8\times7\times6\times5-7!\times6!$
$=7!\times6\times5\times(8\times7\times6-4\times3\times2)$
$=7!\times6^2\times5\times(8\times7-4)=7!\times6^2\times5\times52$

이므로 구하는 확률은

$1-\frac{M_3-M_1}{N}=1-\frac{7!\times6^2\times5\times52}{9!\times8\times7\times6}$
$=1-\frac{6\times5\times52}{9\times8^2\times7}$
$=1-\frac{5\times13}{3\times8\times7}$
$=\frac{103}{168}$

따라서 $p=168$, $q=103$이므로 $p+q=271$

96. 정답 114

[중복조합]

두 조건 (가), (나)에 의하여 a, b, c 중 1개가 10이거나 a, b, c 중 5가 1개 또는 2개이면서 a, b, c 중 적어도 하나는 짝수이어야 한다.

(ⅰ) a, b, c 중 1개가 10인 경우

a, b, c 중 10이 되는 한 문자를 선택하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1=3$

$a=10$이라 하면 조건 (가)에서

$b+c\le 5$

b, c가 자연수이므로 $b=b_1+1$, $c=c_1+1$ (b_1, c_1은 음이 아닌 정수)라 하면

$b_1+c_1\le 3$ …… ㉠

음이 아닌 정수 k에 대하여

$b_1+c_1+k=3$ …… ㉡

이라 하면 부등식 ㉠을 만족시키는 순서쌍 $(b_1,\ c_1)$의 개수는 방정식 ㉡의 음이 아닌 정수해의 개수와 같고, 그 개수는

${}_3\mathrm{H}_3={}_{3+3-1}\mathrm{C}_3$
$={}_5\mathrm{C}_3$

$={}_5\mathrm{C}_2$

$=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

이므로 구하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 $3\times10=30$

(ii) $a,\ b,\ c$ 중 1개가 5인 경우

$a,\ b,\ c$ 중 5가 되는 한 문자를 선택하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1=3$

$a=5$라 하면 조건 (가)에서

$b+c\le10$

$b,\ c$가 자연수이므로 $b=b_2+1,\ c=c_2+1$ ($b_2,\ c_2$는 음이 아닌 정수)라 하면

$b_2+c_2\le8$ …… ㉢

음이 아닌 정수 k에 대하여

$b_2+c_2+k=8$ …… ㉣

이라 하면 부등식 ㉢을 만족시키는 순서쌍 $(b_2,\ c_2)$의 개수는 방정식 ㉣의 음이 아닌 정수해의 개수와 같고, 그 개수는

${}_3\mathrm{H}_8={}_{3+8-1}\mathrm{C}_8$

$={}_{10}\mathrm{C}_8$

$={}_{10}\mathrm{C}_2$

$=\dfrac{10\times9}{2\times1}=45$

이때 $b,\ c$ 중 적어도 하나는 짝수이고, $b,\ c$는 모두 5가 아니므로 다음 2가지 경우를 제외해야 한다.

① $a=5$이고 $b,\ c$가 모두 홀수인 경우

$b=2b_3+1,\ c=2c_3+1$ ($b_3,\ c_3$은 음이 아닌 정수)라 하면

$(2b_3+1)+(2c_3+1)\le10,\ b_3+c_3\le4$ …… ㉤

음이 아닌 정수 k에 대하여

$b_3+c_3+k=4$ …… ㉥

라 하면 부등식 ㉤을 만족시키는 순서쌍 $(b_3,\ c_3)$의 개수는 방정식 ㉥의 음이 아닌 정수해의 개수와 같고, 그 개수는

${}_3\mathrm{H}_4={}_{3+4-1}\mathrm{C}_4$

$={}_6\mathrm{C}_4$

$={}_6\mathrm{C}_2$

$=\dfrac{6\times5}{2\times1}$

$=15$

② $a=5$이고 $b,\ c$ 중 1개가 5이고 1개가 짝수인 경우

조건을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는 $(5,\ 5,\ 2), (5,\ 5,\ 4), (5,\ 2,\ 5), (5,\ 4,\ 5)$의 4개이다.

그러므로 $a=5$일 때 조건을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 $45-15-4=26$

이므로 구하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 $3\times26=78$

(iii) $a,\ b,\ c$ 중 2개가 5인 경우

$a,\ b,\ c$ 중 5가 되는 문자 2개를 선택하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_2=3$

$a=5,\ b=5$라 하면 조건 (가)에서

$c\le5$

이때 c는 짝수이어야 하므로 조건을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는

$(5,\ 5,\ 2), (5,\ 5,\ 4)$의 2개이다.

그러므로 구하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$3\times2=6$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$30+78+6=114$

97. 정답 ②

[조건부확률]

a가 적힌 카드끼리 서로 이웃하는 사건을 A, b가 적힌 카드가 서로 이웃하지 않는 사건을 B라 하자.

문자 $a,\ a,\ b,\ b,\ c,\ c$가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!\,2!\,2!}=90$

사건 A의 경우의 수는 a가 적힌 카드 2장을 한 묶음으로 하여 나열하면 되므로

$\dfrac{5!}{2!\,2!}=30$

즉,

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{30}{90}$

$=\dfrac{1}{3}$

사건 $A\cap B$의 경우는 a가 적힌 카드 2장을 한 묶음으로 놓고 c가 적힌 카드 2장과 함께 나열한 뒤 나열된 세 곳의 사이 또는 양 끝 4개의 자리 중 2개의 자리에 b가 적힌 카드를 1장씩 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$\dfrac{3!}{2!}\times{}_4\mathrm{C}_2=18$

즉,

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{18}{90}$

$=\dfrac{1}{5}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$

$=\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}}$

$=\dfrac{3}{5}$

다른 풀이

a가 적힌 카드끼리 서로 이웃하는 사건을 A, b가 적힌 카드가 서로 이웃하지 않는 사건을 B라 하자.
사건 A의 경우의 수는 a가 적힌 카드 2장을 한 묶음으로 하여 나열하면 되므로

$$n(A)=\frac{5!}{2!\,2!}$$
$$=30$$

사건 $A\cap B$의 경우는 a가 적힌 카드 2장을 한 묶음으로 놓고 c가 적힌 카드 2장과 함께 나열한 뒤 나열된 세 곳의 사이 또는 양 끝 4개의 자리 중 2개의 자리에 b가 적힌 카드를 1장씩 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$$n(A\cap B)=\frac{3!}{2!}\times {}_4\mathrm{C}_2$$
$$=18$$

따라서

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$
$$=\frac{18}{30}$$
$$=\frac{3}{5}$$

98. 정답 ③

[정규분포]

확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m_1$에 대하여 대칭이므로
조건 (가)에 의하여
$m_1=71$
조건 (나)에 의하여

$$51<\frac{71+m_2}{2}<58$$
$$31<m_2<45$$

확률변수 Y가 정규분포 $\mathrm{N}(m_2,\ 8^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{Y-m_2}{8}$ 로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(Y\le 36)=\mathrm{P}\left(Z\le \frac{36-m_2}{8}\right)$$

의 값은 $\dfrac{36-m_2}{8}$ 의 값이 최대일 때 최대, $\dfrac{36-m_2}{8}$ 의 값이 최소일 때 최소이고, m_2가 정수이므로 $m_2=32$일 때 최대이고 $m_2=44$일 때 최소이다.
즉, 최댓값은

$$\mathrm{P}\left(Z\le \frac{36-32}{8}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\le 0.5)$$
$$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$$
$$=0.5+0.1915$$
$$=0.6915$$

이고, 최솟값은

$$\mathrm{P}\left(Z\le \frac{36-44}{8}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\le -1)$$
$$=\mathrm{P}(Z\ge 1)$$
$$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$$
$$=0.5-0.3413$$
$$=0.1587$$

따라서 $\mathrm{P}(Y\le 36)$의 최댓값과 최솟값의 합은
$0.6915+0.1587=0.8502$

99. 정답 103

[중복순열]

상자 A에 2개 이상의 공을 넣는 경우는 5개의 공을 세 상자 $A,\ B,\ C$에 나누어 넣는 경우에서 상자 A에 넣은 공의 개수가 0인 경우와 1인 경우를 제외하면 된다.
이 경우의 수는

$${}_3\Pi_5-({}_2\Pi_5+5\times{}_2\Pi_4)$$
$$=3^5-(2^5+5\times 2^4)$$
$$=243-(32+80)$$
$$=131$$

상자 A에 2개 이상의 공을 넣고, 상자 A에 넣은 모든 공에 적힌 수의 곱이 홀수인 경우는 홀수가 적힌 공 중 2개만 상자 A에 넣거나 홀수가 적힌 3개의 공을 모두 상자 A에 넣는 경우이다. 이 경우의 수는

$${}_3\mathrm{C}_2\times{}_2\Pi_3+{}_3\mathrm{C}_3\times{}_2\Pi_2$$
$$=3\times 2^3+2^2$$
$$=24+4$$
$$=28$$

따라서 구하는 경우의 수는
$131-28=103$

100. 정답 8

[여사건의 확률]

집합 X에서 X로의 모든 일대일 함수 f의 개수는
$5!=120$
집합 X의 어떤 원소 x에 대하여
$x\times\{f(x)+f^{-1}(x)\}$가 홀수인 사건을 A라 하면 사건 A^C의 경우는
집합 X의 모든 원소 x에 대하여
$x\times\{f(x)+f^{-1}(x)\}$가 짝수이다.
$x\times\{f(x)+f^{-1}(x)\}$는 x가 짝수일 때 항상 짝수이고, x가 홀수일 때 $f(x),\ f^{-1}(x)$가 모두 짝수이거나 모두 홀수이면 짝수이다. 즉, 홀수 a에 대하여 $f(a)$가 홀수이면 $f^{-1}(a)$도 홀수이다.

…… ㉠

(i) $f(x)$가 홀수인 홀수 x가 1개인 경우

㉠에 의하여 한 개의 홀수 a에 대하여

$f(a)=a$

$f(x)$가 홀수인 홀수 x를 택하는 경우의 수는

${}_3C_1$

남은 두 개의 홀수를 짝수에 대응시키는 경우의 수는

$2!$

두 개의 짝수를 남은 두 수에 대응시키는 경우의 수는

$2!$

그러므로 이 경우의 함수의 개수는

${}_3C_1\times2!\times2!=12$

(ii) $f(x)$가 홀수인 홀수 x가 2개인 경우

㉠에 의하여 두 홀수 a, b에 대하여 $f(a)$, $f(b)$는 a 또는 b이다.

$f(x)$가 홀수인 홀수 x를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2$

이 두 홀수를 대응시키는 경우의 수는

$2!$

남은 한 개의 홀수를 짝수에 대응시키는 경우의 수는

${}_2C_1$

두 개의 짝수를 남은 두 수에 대응시키는 경우의 수는

$2!$

그러므로 이 경우의 함수의 개수는

${}_3C_2\times2!\times{}_2C_1\times2!=24$

(iii) $f(x)$가 홀수인 홀수 x가 3개인 경우

㉠에 의하여 세 홀수 a, b, c 에 대하여 $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$는 a 또는 b 또는 c이다.

$f(x)$가 홀수인 홀수 x를 택하는 경우의 수는

${}_3C_3$

이 세 홀수를 대응시키는 경우의 수는

$3!$

두 개의 짝수를 남은 두 수에 대응시키는 경우의 수는

$2!$

그러므로 이 경우의 함수의 개수는

${}_3C_3\times3!\times2!=12$

(i), (ii), (iii)에 의하여 사건 A^C의 경우의 수는

$12+24+12=48$

$\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{48}{120}$

$=\dfrac{2}{5}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$

$=1-\dfrac{2}{5}$

$=\dfrac{3}{5}$

이고, $p=5$, $q=3$이므로

$p+q=8$

101. 정답 ④

모표준편차가 20, 표본의 크기가 25, 표본평균이 $\overline{x}$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\dfrac{20}{\sqrt{25}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\dfrac{20}{\sqrt{25}}$

$a=\overline{x}-1.96\times\dfrac{20}{\sqrt{25}}$, $b=\overline{x}+1.96\times\dfrac{20}{\sqrt{25}}$이므로

$b-a=4\overline{x}$에서

$2\times1.96\times\dfrac{20}{\sqrt{25}}=4\overline{x}$

$4\overline{x}=2\times1.96\times4$

따라서 $\overline{x}=3.92$

다른 풀이

모표준편차가 20, 표본의 크기가 25, 표본평균이 $\overline{x}$이고 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a\le m\le b$이므로

$a=\overline{x}-1.96\times\dfrac{20}{\sqrt{25}}$, $b=\overline{x}+1.96\times\dfrac{20}{\sqrt{25}}$

$a+b=2\overline{x}$이므로 $a=2\overline{x}-b$ …… ㉠

㉠을 $b-a=4\overline{x}$에 대입하면

$b-(2\overline{x}-b)=4\overline{x}$, $b=3\overline{x}$

즉, $3\overline{x}=\overline{x}+1.96\times\dfrac{20}{\sqrt{25}}$

따라서 $\overline{x}=\dfrac{1}{2}\times1.96\times\dfrac{20}{\sqrt{25}}=3.92$

102. 정답 ②

$\{\mathrm{P}(X\ge3)\}^2-\mathrm{P}(X\ge3)=\{\mathrm{P}(Y\ge4)\}^2-\mathrm{P}(Y\ge4)$에서

$\{\mathrm{P}(X\ge3)\}^2-\{\mathrm{P}(Y\ge4)\}^2-\mathrm{P}(X\ge3)+\mathrm{P}(Y\ge4)=0$

$\{\mathrm{P}(X\ge3)-\mathrm{P}(Y\ge4)\}\{\mathrm{P}(X\ge3)+\mathrm{P}(Y\ge4)-1\}=0$

$\mathrm{P}(X\ge3)=\mathrm{P}(Y\ge4)$ 또는 $\mathrm{P}(X\ge3)+\mathrm{P}(Y\ge4)=1$

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$을 따르므로 $Z_1=\dfrac{X-m}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z_1은 표준정규분포 $\mathrm{N}(1,\ 0)$을 따르고, 확률변수 Y가 정규분포 $\mathrm{N}(m+1,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z_2=\dfrac{Y-m-1}{\sigma}$로 놓으면 확률변수 Z_2도 표준정규분포 $\mathrm{N}(1,\ 0)$을 따른다.

(i) $\mathrm{P}(X\ge3)=\mathrm{P}(Y\ge4)$인 경우

$\mathrm{P}\left(Z_1\ge\dfrac{3-m}{2}\right)=\mathrm{P}\left(Z_2\ge\dfrac{4-m-1}{\sigma}\right)$

두 확률변수 Z_1, Z_2가 모두 표준정규분포를 따르므로

$$\frac{3-m}{2}=\frac{4-m-1}{\sigma}$$

$$\frac{3-m}{2}=\frac{3-m}{\sigma}$$

$m \neq 3$이므로 $\sigma=2$

$\mathrm{P}(1 \le Y \le 3)$의 값이 최대가 되기 위해서는 $m+1=2$이어야 한다.

즉, $m=1$이므로 $\mathrm{P}(1 \le Y \le 3)$의 최댓값은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\frac{1-2}{2} \le Z_2 \ge \frac{3-2}{2}\right) &= \mathrm{P}(-0.5 \le Z_2 \le 0.5) \\ &= 2\times\mathrm{P}(0 \le Z_2 \le 0.5) \\ &= 2\times 0.1915 \\ &= 0.3830\end{aligned}$$

(ii) $\mathrm{P}(X \ge 3)+\mathrm{P}(Y \ge 4)=1$인 경우

$$\mathrm{P}\left(Z_1 \ge \frac{3-m}{2}\right)+\mathrm{P}\left(Z_2 \ge \frac{4-m-1}{\sigma}\right)=1$$

두 확률변수 Z_1, Z_2가 모두 표준정규분포를 따르므로

$$\frac{3-m}{2}=\frac{4-m-1}{\sigma}$$

$$\frac{3-m}{2}=\frac{3-m}{\sigma}$$

$m \neq 3$이므로 $\sigma=-2$가 되어 $\sigma>0$을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $\mathrm{P}(1 \le Y \le 3)$의 최댓값은 0.3830이다.

103. 정답 90

조건 (가)에서 $\sum_{n=1}^{4} a_n = a_1+a_2+a_3+a_4$의 값이 짝수이려면 a_1, a_2, a_3, a_4 중 홀수의 개수가 0 또는 2 또는 4이어야 한다. 그러므로 택한 홀수의 개수에 따라 순서쌍 $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$의 개수는 다음과 같다.

(i) 택한 홀수의 개수가 0인 경우

a_1, a_2, a_3, a_4는 모두 짝수이고, 짝수로 만든 순서쌍은 조건 (나)를 만족시킨다.

따라서 택한 홀수의 개수가 0인 경우 구하는 순서쌍의 개수는 숫자 2, 4 중에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_2\Pi_4=2^4=16$

(ii) 택한 홀수의 개수가 2인 경우

① 1, 3을 택한 경우

나머지 개의 짝수가 서로 같을 때, 숫자 2, 4 중에서 한 개를 택하는 경우의 수는

$_2\mathrm{C}_1=2$

이고, 이때 조건 (나)를 만족시키려면 1, 3, □, □를 일렬로 나열하는 경우 중 1과 3이 서로 이웃한 경우를 제외해야 하므로 이 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!}-\frac{3!}{2!}\times 2!=12-6=6$$

그러므로 1, 3과 서로 같은 2개의 짝수로 만든 순서쌍의 개수는

$2\times 6=12$

나머지 2개의 짝수가 서로 다를 때 조건 (나)를 만족시키려면 1, 3, □, ☆을 일렬로 나열하는 경우 중 1과 3이 서로 이웃한 경우를 제외해야 하므로 이 경우의 순서쌍의 개수는

$4!-3!\times 2!=24-12=12$

따라서 1, 3을 택한 경우 순서쌍의 개수는

$12+12=24$

② 1, 1을 택한 경우

나머지 2개는 짝수이고, 1, 1과 짝수 2개로 만든 순서쌍은 조건 (나)를 만족시킨다.

나머지 2개의 짝수가 서로 같을 때, 숫자 2, 4 중에서 한 개를 택하는 경우의 수는

$_2\mathrm{C}_1=2$

이고, 1, 1, □, □를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!\times 2!}=6$$

그러므로 1, 1과 서로 같은 2개의 짝수로 만든 순서쌍의 개수는

$2\times 6=12$

나머지 2개의 짝수가 서로 다를 때 순서쌍의 개수는 1, 1, □, ☆을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{4!}{2!}=12$$

따라서 1, 1을 택한 경우 순서쌍의 개수는

$12+12=24$

③ 3, 3을 택한 경우

②와 같은 방법으로 구하면 순서쌍의 개수는 24

①, ②, ③에서 택한 홀수의 개수가 2인 경우 구하는 순서쌍의 개수는

$24+24+24=72$

(iii) 택한 홀수의 개수가 4인 경우

조건 (나)를 만족시키려면 1과 3은 서로 이웃하지 않아야 하므로 구하는 순서쌍은 $(1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $(3,\ 3,\ 3,\ 3)$이고 그 개수는 2이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 모든 순서쌍 $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$의 개수는

$16+72+2=90$

104. 정답 26

두 번째 시행 후 주머니 A에 들어 있는 공의 개수가 2 이상인 사건을 E, 첫 번째 시행 후 주머니 B에 들어 있는 공의 개수가 4인 사건을 F라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(F|E)$이다.

두 번째 시행 후 주머니 A에 들어 있는 공의 개수가 2 이상이려면 두

번의 시행 중 한 번의 시행에서 주머니 A에 들어 있는 4 또는 5가 적혀있는 한 개의 공을 주머니 B로 옮기거나 두 번의 시행 모두에서 주머니 A에 들어 있는 어느 공도 옮기지 않아야 한다.

두 주머니 A, B에서 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자가 각각 a, b인 경우를 두 수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내면 두 번째 시행 후 주머니 A에 들어 있는 공의 개수가 2 이상인 경우와 그 확률은 다음과 같다.

(i) 주머니 A에서 4가 적혀 있는 공만 주머니 B로 옮긴 경우

첫 번째 시행에서 주머니 A의 4가 적혀 있는 공을 주머니 B로 옮기고 두 번째 시행에서는 어느 주머니에서도 공을 옮기지 않은 경우는 두 주머니 A, B에서 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자가 첫 번째 시행에서 $(4,\ 1)$, $(4,\ 2)$, $(4,\ 3)$, 두 번째 시행에서 $(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(1,\ 3)$, $(1,\ 4)$일 때이므로 이 경우의 확률은

$$\left(\frac{1}{3}\times\frac{3}{3}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{4}{4}\right)=\frac{1}{6} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

첫 번째 시행에서는 어느 주머니에서도 공을 옮기지 않고 두 번째 시행에서 주머니 A의 4가 적혀 있는 공을 주머니 B로 옮기는 경우는 두 주머니 A, B에서 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자가 첫 번째 시행에서 $(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(1,\ 3)$, 두 번째 시행에서 $(4,\ 1)$, $(4,\ 2)$, $(4,\ 3)$일 때이므로 이 경우의 확률은

$$\left(\frac{1}{3}\times\frac{3}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{3}{3}\right)=\frac{1}{9}$$

그러므로 주머니 A에서 4가 적혀 있는 공만 주머니 B로 옮긴 경우의 확률은

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{5}{18}$$

(ii) 주머니 A에서 5가 적혀 있는 공만 주머니 B로 옮긴 경우

첫 번째 시행에서 주머니 A의 5가 적혀 있는 공을 주머니 B로 옮기고 두 번째 시행에서는 어느 주머니에서도 공을 옮기지 않은 경우는 두 주머니 A, B에서 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자가 첫 번째 시행에서 $(5,\ 1)$, $(5,\ 2)$, $(5,\ 3)$, 두 번째 시행에서 $(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(1,\ 3)$, $(1,\ 5)$, $(4,\ 5)$일 때이므로 이 경우의 확률은

$$\left(\frac{1}{3}\times\frac{3}{3}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{4}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{24} \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

첫 번째 시행에서는 어느 주머니에서도 공을 옮기지 않고 두 번째 시행에서 주머니 A의 5가 적혀 있는 공을 주머니 B로 옮기는 경우는 두 주머니 A, B에서 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자가 첫 번째 시행에서 $(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(1,\ 3)$, 두 번째 시행에서 $(5,\ 1)$, $(5,\ 2)$, $(5,\ 3)$일 때이므로 이 경우의 확률은

$$\left(\frac{1}{3}\times\frac{3}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{3}{3}\right)=\frac{1}{9}$$

그러므로 주머니 A에서 5가 적혀 있는 공만 주머니 B로 옮긴 경우의 확률은

$$\frac{5}{24}+\frac{1}{9}=\frac{23}{72}$$

(iii) 두 번의 시행 모두에서 주머니 A에 들어 있는 어느 공도 옮기지 않은 경우

두 주머니 A, B에서 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자가 첫 번째 시행에서 $(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(1,\ 3)$, 두 번째 시행에서 $(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(1,\ 3)$일 때이므로 이 경우의 확률은

$$\left(\frac{1}{3}\times\frac{3}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{3}{3}\right)=\frac{1}{9}$$

(i), (ii), (iii)에서

$$\mathrm{P}(E)=\frac{5}{18}+\frac{23}{72}+\frac{1}{9}=\frac{17}{24}$$

한편, 첫 번째 시행 후 주머니 B에 들어 있는 공의 개수가 4이고 두 번째 시행 후 주머니 A에 들어 있는 공의 개수가 2 이상이려면 첫 번째 시행에서 주머니 A에 들어 있는 4 또는 5가 적혀 있는 한 개의 공을 주머니 B로 옮기고 두 번째 시행에서는 어느 주머니에서도 공을 옮기지 않아야 하므로 ㉠, ㉡에 의하여

$$\mathrm{P}(E\cap F)=\frac{1}{6}+\frac{5}{24}=\frac{3}{8}$$

즉, 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(F\mid E)=\frac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{17}{24}}=\frac{9}{17}$$

따라서 $p=17$, $q=9$이므로

$p+q=17+9=26$

105. 정답 ②

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 5^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균이 $\bar{x}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x}-1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}\le m\le \bar{x}+1.96\times\frac{5}{\sqrt{5}}$$

이때 $b-a=2.8$이므로

$2\times1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}=2.8$에서

$\sqrt{n}=7$, $n=49$

이고,

$$b=\bar{x}+1.96\times\frac{5}{7}=\bar{x}+1.4$$

이때 $4n=4\times49=196$이므로 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 5^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 196인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균이 $\bar{x}+2$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x}+2-1.96\times\frac{5}{14}\le m\le \bar{x}+2+1.96\times\frac{5}{14}$$

이때

$$d=\bar{x}+2+1.96\times\frac{5}{14}=\bar{x}+2+0.7$$

이고, $b+d=192.1$이므로

$(\bar{x}+1.4)+(\bar{x}+2+0.7)=192.1$

$2\bar{x}=188$

$\overline{x}=94$

따라서 $c=\overline{x}+2-0.7=94+2-0.7=95.3$

106. 정답 ②

확률변수 X가 평균이 2인 정규분포를 따르므로

$\mathrm{P}(X \geq 3t-t^2) \leq \frac{1}{2}$이 되려면 $3t-t^2 \geq 2$이어야 한다.

즉, $t^2-3t+2 \leq 0$에서

$(t-1)(t-2) \leq 0$

$1 \leq t \leq 2$

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(2,\ 4t^2)$을$\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. 이때

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(t^2-2t+2 \leq X \leq t^2+2t+2)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{2t^2-2t+2-2}{2t} \leq Z \leq \frac{t^2+2t+2-2}{2t}\right)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{t}{2}-1 \leq Z \leq \frac{t}{2}+1\right)\end{aligned}$$

에서 Z의 범위의 구간의 크기는 2로 고정되어 있다.

표준정규분포를 따르는 확률변수 Z의 확률밀도함수의 그래프의 성질에 의하여 $\frac{t}{2}$가 0에 가까울수록 확률은 커지므로 $1 \leq t \leq 2$에서

$\mathrm{P}\left(\frac{t}{2}-1 \leq Z \leq \frac{t}{2}+1\right)$의 최댓값은 $t=1$일 때

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(-0.5 \leq Z \leq 1.5)&=\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 0.5)+\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.5)\\&=0.1915+0.4332\\&=0.6247\end{aligned}$$

107. 정답 581

(i) $a_2 \times a_4=0$일 때

① $a_2=0,\ a_4 \neq 0$일 때

a_5의 값으로 가능한 경우의 수는 5

$a_4 \neq 0$이므로 세 수 $a_1,\ a_3,\ a_4$의 순서쌍 $(a_1,\ a_3,\ a_4)$의 개수는 4개의 숫자 $1,\ 2,\ 3,\ 4$중에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$

그러므로 조건을 만족시키는 N의 개수는

$5 \times 20=100$

② $a_2 \neq 0,\ a_4=0$일 때

가능한 두 수 $a_2,\ a_5$의 순서쌍 $(a_2,\ a_5)$의 개수는

$4 \times 5=20$

두 수 $a_1,\ a_3$의 순서쌍 $(a_1,\ a_3)$의 개수는 5개의 숫자 $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수에서

$a_1=a_3=0$인 경우의 수를 뺀 것과 같으므로

${}_5\mathrm{H}_2-1={}_6\mathrm{C}_2=14$

그러므로 조건을 만족시키는 N의 개수는

$20 \times 14=280$

③ $a_2=a_4=0$일 때

a_5의 값으로 가능한 경우의 수는 5

두 수 $a_1,\ a_3$의 순서쌍 $(a_1,\ a_3)$의 개수는 ①의 경우와 같으므로

${}_5\mathrm{H}_2-1={}_6\mathrm{C}_2-1=14$

그러므로 조건을 만족시키는 N의 개수는

$5 \times 14=70$

①, ②, ③에 의하여 $a_2 \times a_4=0$일 때 조건을 만족시키는 자연수 N의 개수는

$100+280+70=450$

(ii) $a_2 \times a_4 \neq 0$일 때

$a_5 \geq a_2 \times a_4$를 만족시키는 $a_2 \times a_4$의 값은 1 또는 2 또는 3 또는

4이다.

① $a_2 \times a_4=1$일 때

$a_2=a_4=1$이므로 a_5의 값으로 가능한 경우의 수는 4

두 수 $a_1,\ a_3$의 순서쌍 $(a_1,\ a_3)$의 개수는 4개의 숫자 $1,\ 2,\ 3,\ 4$중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$

그러므로 조건을 만족시키는 N의 개수는

$4 \times 10=40$

② $a_2 \times a_4=2$일 때

a_5의 값으로 가능한 경우의 수는 3

$a_2=1,\ a_4=2$일 때, 두 수 $a_1,\ a_3$의 순서쌍 $(a_1,\ a_3)$의 개수는 3개의 숫자 $2,\ 3,\ 4$ 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

$a_2=2,\ a_4=1$일 때, 두 수 $a_1,\ a_3$의 순서쌍 $(a_1,\ a_3)$의 개수는 4개의 숫자 $1,\ 2,\ 3,\ 4$ 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$

그러므로 조건을 만족시키는 N의 개수는

$3 \times (6+10)=3 \times 16=48$

③ $a_2 \times a_4=3$일 때

a_5의 값으로 가능한 경우의 수는 2

$a_2=1,\ a_4=3$일 때, 두 수 $a_1,\ a_3$의 순서쌍 $(a_1,\ a_3)$의 개수는 2개의 숫자 $3,\ 4$ 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2\mathrm{H}_2={}_3\mathrm{C}_2=3$

$a_2=3,\ a_4=1$일 때, 두 수 $a_1,\ a_3$의 순서쌍 $(a_1,\ a_3)$의 개수는 4개의 숫자 $1,\ 2,\ 3,\ 4$ 중에서 중복을 허락하여 2개를

택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_2 = {}_5\mathrm{C}_2 = 10$

그러므로 조건을 만족시키는 N의 개수는

$2\times(3+10)=2\times13=26$

④ $a_2\times a_4=4$일 때

a_5의 값으로 가능한 경우의 수는 1

$a_2=1$, $a_4=4$일 때, $a_1=a_3=4$이므로 두 수 a_1, a_3의 순서쌍 $(a_1,\ a_3)$의 개수는 1

$a_2=2$, $a_4=2$일 때, 두 수 a_1, a_3의 순서쌍 $(a_1,\ a_3)$의 개수는 3개의 숫자 $2,\ 3,\ 4$ 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_2 = {}_4\mathrm{C}_2 = 6$

$a_2=4$, $a_4=1$일 때, 두 수 a_1, a_3의 순서쌍 $(a_1,\ a_3)$의 개수는 4개의 숫자 $1,\ 2,\ 3,\ 4$ 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_2 = {}_5\mathrm{C}_2 = 10$

그러므로 조건을 만족시키는 N의 개수는

$1\times(1+6+10)=1\times17=17$

①~④에 의하여 $a_2\times a_4\neq0$일 때 조건을 만족시키는 자연수 N의 개수는

$40+48+26+17=131$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 자연수 N의 개수는

$450+131=581$

108. 정답 667

이 게임을 4번 반복한 후 A가 얻은 점수가 6점인 사건을 E, B가 얻은 점수가 3점인 사건을 F라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(F|E)$이다.

A, B 두 사람이 가위바위보를 내는 경우의 수는

$3\times3=9$

이 중에서 A가 가위, B가 보를 내는 경우 A가 이기므로

A가 가위로 이길 확률은 $\frac{1}{9}$

A가 바위를 낼 때 B가 가위를 내면 A가 이기고,

A가 보를 낼 때 B가 바위를 내면 A가 이기므로

A가 바위나 보로 이길 확률은 $\frac{2}{9}$

A와 B가 비기는 경우는 둘 다 가위를 내거나 바위를 내거나 보를 내는 경우이므로

A와 B가 비길 확률은 $\frac{3}{9}$

각 경우에서 A, B가 얻은 점수와 확률을 표로 나타내면 다음과 같다.

경우	A점수	B점수	확률
A가 가위로 이김	3	0	$\frac{1}{9}$
A가 바위나 보로 이김	2	0	$\frac{2}{9}$
비김	1	1	$\frac{3}{9}$
B가 가위로 이김	0	3	$\frac{1}{9}$
B가 바위나 보로 이김	0	2	$\frac{2}{9}$

4번의 게임에서 A가 6점을 얻는 경우와 그 때 B가 얻은 점수와 확률을 표로 나타내면 다음과 같다.

A	B	확률
3, 3, 0, 0	0, 0, 3, 3 0, 0, 3, 2 0, 0, 2, 3 0, 0, 2, 2	$\frac{4!}{2!\times2!}\times\left(\frac{1}{9}\right)^2\times\left(\frac{3}{9}\right)^2=\frac{54}{9^4}$
3, 2, 1, 0	0, 0, 1, 3	$4!\times\frac{1}{9}\times\frac{2}{9}\times\frac{3}{9}\times\frac{1}{9}=\frac{144}{9^4}$
3, 2, 1, 0	0, 0, 1, 2	$4!\times\frac{1}{9}\times\frac{2}{9}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{9}=\frac{288}{9^4}$
3, 1, 1, 1	0, 1, 1, 1	$\frac{4!}{3!}\times\frac{1}{9}\times\left(\frac{3}{9}\right)^3=\frac{108}{9^4}$
2, 2, 2, 0	0, 0, 0, 3	$\frac{4!}{3!}\times\left(\frac{2}{9}\right)^3\times\frac{1}{9}=\frac{32}{9^4}$
2, 2, 2, 0	0, 0, 0, 2	$\frac{4!}{3!}\times\left(\frac{2}{9}\right)^3\times\frac{2}{9}=\frac{64}{9^4}$
2, 2, 1, 1	0, 0, 1, 1	$\frac{4!}{2!\times2!}\times\left(\frac{2}{9}\right)^2\times\left(\frac{3}{9}\right)^2=\frac{216}{9^4}$

위의 표에서 B가 3점을 얻는 경우는 색칠된 부분이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(F|E)=\frac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(E)}$$

$$=\frac{\frac{288+108+32}{9^4}}{\frac{54+144+288+108+32+64+216}{9^4}}$$

$$=\frac{428}{906}=\frac{214}{453}$$

따라서 $p=453$, $q=214$이므로

$p+q=453+214=667$

109. 정답 ③

$a\times b=2^7\times3^6\times5^5\times7^4$이므로

0 이상 7 이하인 두 정수 l_1, l_2,

0 이상 6 이하인 두 정수 m_1, m_2,

0 이상 5 이하인 두 정수 n_1, n_2,

0 이상 4 이하인 두 정수 p_1, p_2

에 대하여

$a=2^{l_1}\times3^{m_1}\times5^{n_1}\times7^{p_1}$, $b=2^{l_2}\times3^{m_2}\times5^{n_2}\times7^{p_2}$

라 하면

$l_1+l_2=7$, $m_1+m_2=6$, $n_1+n_2=5$, $p_1+p_2=4$

$b=k\times a$, 즉 $k=\dfrac{b}{a}$를 만족시키는 자연수 k가 존재하려면

$$k=\frac{2^{l_2}\times3^{m_2}\times5^{n_2}\times7^{p_2}}{2^{l_1}\times3^{m_1}\times5^{n_1}\times7^{p_1}}=2^{l_2-l_1}\times3^{m_2-m_1}\times5^{n_2-n_1}\times7^{p_2-p_1}$$

이므로

$l_1\le l_2$, $m_1\le m_2$, $n_1\le n_2$, $p_1\le p_2$

즉, $l_1\le3$, $m_1\le3$, $n_1\le2$, $p_1\le2$이어야 한다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 자연수 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

3 이하의 음이 아닌 정수 l_1, m_1과

2 이하의 음이 아닌 정수 n_1, p_1

을 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_4\Pi_2\times{}_3\Pi_2=4^2\times3^2=144$

110. 정답 ④

집합 X에서 집합 Y로의 일대일함수 f의 개수는

${}_6\mathrm{P}_4=6\times5\times4\times3=360$

(ⅰ) $f(3)=6$인 경우

$f(4)\le4$이면 되므로 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1=4$

이 각각의 경우에 대하여 $f(1)\ne f(4)$, $f(2)\ne f(4)$이고 $f(1)<f(2)<6$을 만족시키는 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2=6$

따라서 $f(3)=6$인 경우 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 $4\times6=24$

(ⅱ) $f(3)=5$인 경우

$f(4)\le4$이면 되므로 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1=4$

이 각각의 경우에 대하여 $f(1)\ne f(4)$, $f(2)\ne f(4)$이고 $f(1)<f(2)<5$를 만족시키는 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_2=3$

따라서 $f(3)=5$인 경우 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$4\times3=12$

(ⅲ) $f(3)=4$인 경우

$f(4)\le6$이면 되므로 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

① $f(4)\ge5$인 경우

$f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_2\mathrm{C}_1=2$

이 각각의 경우에 대하여 $f(1)<f(2)<4$를 만족시키는 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_2=3$

② $f(4)\le3$인 경우

$f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1=3$

이때 $f(4)$의 값이 정해지면 $f(1)<f(2)<4$를 만족시키는 $f(1)$, $f(2)$의 값도 정해진다.

따라서 $f(3)=4$인 경우 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$2\times3+3=9$

(ⅳ) $f(3)=3$인 경우

$f(1)=1$, $f(2)=2$이어야 하고 $f(4)\le6$이면 되므로 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1=3$

따라서 $f(3)=3$인 경우 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

3

(ⅴ) $f(3)\le2$인 경우

$f(1)<f(2)<f(3)$을 만족시키는 $f(1)$, $f(2)$의 값이 존재하지 않는다.

(ⅰ)~(ⅴ)에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{24+12+9+3}{360}=\frac{48}{360}=\frac{2}{15}$$

다른 풀이

집합 X에서 집합 Y로의 일대일함수 f의 개수는

${}_6\mathrm{P}_4=6\times5\times4\times3=360$

$f(1)<f(2)<f(3)$을 만족시키는 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_3=20$

이 각각의 경우에 대하여 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1=3$

이므로 조건 (가)를 만족시키는 함수 f의 개수는

$20\times3=60$

이때 $f(3)=5$, $f(4)=6$ 또는 $f(3)=6$, $f(4)=5$인 경우 조건 (나)를 만족시킬 수 없다.

$f(3)=5$, $f(4)=6$이고 $f(1)<f(2)<f(3)$을 만족시키는 함수 f의 개수는

${}_4\mathrm{C}_2=6$

$f(3)=6$, $f(4)=5$이고 $f(1)<f(2)<f(3)$을 만족시키는 함수 f의 개수는

${}_4\mathrm{C}_2=6$

즉, 조건 (가)를 만족시키지만 조건 (나)를 만족시키지 않는 함수 f의

개수는

$6+6=12$

이므로 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 함수 f의 개수는

$60-12=48$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{48}{360}=\dfrac{2}{15}$

111. 정답 139

음료수 1팩의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 8^2)$을 따르므로 크기가 4인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(120,\ \dfrac{8^2}{4}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(120,\ 4^2)$을 따르고,

$Z=\dfrac{\overline{X}-120}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때 4팩의 음료수를 담은 한 상자의 무게가 $494.4g$ 이상이고 $507.2g$이하일 확률은

$\mathrm{P}(494.4 \le 4\overline{X} \le 507.2)$

$=\mathrm{P}(123.6 \le \overline{X} \le 126.8)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{123.6-120}{4} \le Z \le \dfrac{126.8-120}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(0.9 \le Z \le 1.7)$

$=\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.7)-\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.9)$

$=0.455-0.316$

$=0.139$

따라서 $k=0.139$이므로

$1000\times k=139$

112. 정답 127

9개의 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3을 일렬로 나열할 때, 같은 숫자끼리는 이웃하지 않으므로 먼저 다음과 같이 3을 배열하고

□, 3, □, 3, □, 3, □, 3, □

3의 좌우에 놓인 5개의 □ 위치에 놓을 숫자의 개수를 순서대로 $p,\ x,\ y,\ z,\ q$라 하면 다음 세 조건을 만족시켜야 한다.

$$\begin{cases} p+x+y+z+q=5 \\ p \ge 0,\ q \ge 0 \\ x \ge 1,\ y \ge 1,\ z \ge 1 \end{cases}$$

이때 $p,\ x,\ y,\ z,\ q$의 값을 순서쌍 $(p,\ x,\ y,\ z,\ q)$로 나타내고, 9개의 숫자를 같은 숫자끼리는 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는 다음과 같다.

(i) $x,\ y,\ z$ 중 1개가 3인 경우

$x,\ y,\ z$ 중 남은 2개는 모두 1이고, $p=0,\ q=0$이다.

예를 들어 $(0,\ 3,\ 1,\ 1,\ 0)$이면 $x=3$에 해당하는 3개의 숫자도 같은 숫자끼리는 이웃하지 않아야 하므로

$3,\ \underline{1,\ 2,\ 1},\ 3,\ \underline{2},\ 3,\ \underline{2},\ 3$ 또는

$3,\ \underline{2,\ 1,\ 2},\ 3,\ \underline{1},\ 3,\ \underline{2},\ 3$ 또는

$3,\ \underline{2,\ 1,\ 2},\ 3,\ \underline{2},\ 3,\ \underline{1},\ 3$

의 3가지 경우가 있다.

그러므로 이때의 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1\times 3=3\times 3=9$

(ii) $x,\ y,\ z$ 중 2개가 2인 경우

$x,\ y,\ z$ 중 남은 1개는 1이고, $p=0,\ q=0$이다.

예를 들어 $(0,\ 2,\ 2,\ 1,\ 0)$이면 $x=y=2$에 해당하는 2개의 숫자도 같은 숫자끼리는 이웃하지 않아야 한다.

$3,\ \underline{1,\ 2},\ 3,\ \underline{1,\ 2},\ 3,\ \underline{2},\ 3$에서 1, 2의 순서를 바꾸는 경우의 수는

$2!\times 2!$

그러므로 이때의 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_2\times(2!\times 2!)=3\times 4=12$

(iii) $x,\ y,\ z$ 중 1개가 2인 경우

$x,\ y,\ z$ 중 나머지 2개는 모두 1이고, $p,\ q$ 중 하나가 1이어야 한다.

예를 들어 $(1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 0)$이면 $x=2$에 해당하는 2개의 숫자도 같은 숫자끼리는 이웃하지 않아야 한다.

○, 3, $\underline{1,\ 2}$, 3, ○, 3, ○, 3에서 1, 2의 순서를 바꾸는 경우의 수는 $2!$이고, 3개의 ○자리에 나머지 숫자 1, 2, 2를 넣는 경우의 수는 $\dfrac{3!}{2!}$이다.

그러므로 이때의 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times 2!\times\dfrac{3!}{2!}=3\times 2\times 2\times 3=36$

(iv) $x,\ y,\ z$가 모두 1인 경우

$p+q=2,\ p\ge 0,\ q\ge 0$이므로

$(2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0),\ (0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2),\ (1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$인 경우가 있다.

① $(2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0)$인 경우

$p=2$에 해당하는 2개의 숫자도 같은 숫자끼리는 이웃하지 않아야 한다.

$\underline{1,\ 2}$, 3, ○, 3, ○, 3, ○, 3에서 1, 2의 순서를 바꾸는 경우의 수는 $2!$이고, 3개의 ○자리에 나머지 숫자 1, 2, 2를 넣는 경우의 수는 $\dfrac{3!}{2!}$이므로 이때의 경우의 수는

$2!\times\dfrac{3!}{2!}=2\times 3=6$

② $(0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2)$인 경우

위의 ①과 같은 방법으로 구하면 이때의 경우의 수도 6이다.

③ $(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$인 경우

○, 3, ○, 3, ○, 3, ○, 3, ○에서 5개의 ○자리에 숫자 1, 1, 2, 2, 2를 넣는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!\times 3!}=10$

①, ②, ③에서 이때의 경우의 수는

$6+6+10=22$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 같은 숫자끼리는 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는

$9+12+36+22=79$

이고, 이 중 어떤 2개의 3 사이에 나열된 숫자가 2개인 경우가 존재하도록 나열하는 경우의 수는 (ⅱ), (ⅲ)에서

$12+36=48$

이므로 구하는 확률은

$\frac{48}{79}$

따라서 $p=79$, $q=48$이므로

$p+q=79+48=127$

113. 정답 ④

이 공장에서 생산하는 제품 A의 길이가 정규분포 $\mathrm{N}(100,\ 6^2)$을 따르므로 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(100,\ \left(\frac{6}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

이때 $Z=\dfrac{\overline{X}-100}{\frac{6}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$와 모평균의 차가 1 이상일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(|\overline{X}-100|\geq 1)&=\mathrm{P}\left(\left|\frac{\overline{X}-100}{\frac{6}{\sqrt{n}}}\right|\geq \frac{1}{\frac{6}{\sqrt{n}}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(|Z|\geq \frac{\sqrt{n}}{6}\right)\\&=1-\mathrm{P}\left(|Z|\leq \frac{\sqrt{n}}{6}\right)\\&=1-2\times\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{\sqrt{n}}{6}\right) \quad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

제품의 생산과정을 멈추고 점검을 하게 될 확률이 10% 이상이 되려면 ㉠에서

$1-2\times\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{\sqrt{n}}{6}\right)\geq 0.1$

$\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{\sqrt{n}}{6}\right)\leq \frac{1-0.1}{2}=0.45$

이때 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.65)=0.450$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{6}\leq 1.65$

$\sqrt{n}\leq 1.65\times 6=9.9$

$n\leq 9.9^2=98.01$

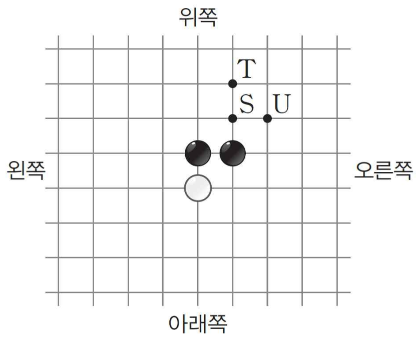
따라서 구하는 자연수 n의 최댓값은 98이다.

114. 정답 ②

이 시행을 7번 반복한 결과 흰 바둑돌이 7번째 시행 후 처음으로 S지점에 도착하는 사건을 X, 두 번째 시행까지 던진 주사위에서 나온 눈의 수가 모두 2 이하인 사건을 Y라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(Y|X)$이다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 1 또는 2인 사건을 A, 3 또는 4 또는 5인 사건을 B, 6인 사건을 C라 하자.

그림과 같이 S지점의 1칸 위쪽을 T지점, 1칸 오른쪽을 U지점이라 하자.



7번째 시행 후 처음으로 S지점에 도착했으므로 6번째 시행 후 흰 바둑돌의 위치는 T지점 또는 U지점이어야 한다.

(ⅰ) 6번째 시행 후 흰 바둑돌의 위치가 T지점인 경우

T지점은 흰 바둑돌의 처음 위치에서 위쪽으로 적어도 3칸을 이동해야 하므로 사건 A가 적어도 2번, 사건 C가 적어도 3번 일어나야 한다.

6번의 시행 중 1번은 이동하지 않는 사건이 일어나야 하고 7번째 시행에서 사건 B가 일어나야 하므로

C (미이동), A, A, C, C, C, B 또는 A, C(미이동), A, C, C, C, B 또는 A, A, C, C, B(미이동), C, B의 순서로 사건이 일어나야 한다.

그러므로 이 경우의 확률은

$2\times\frac{1^4\times 2^2\times 3}{6^7}+\frac{1^3\times 2^2\times 3^2}{6^7}=\frac{5}{2^5\times 3^6}$

(ⅱ) 6번째 시행 후 흰 바둑돌의 위치가 U지점인 경우

U지점은 흰 바둑돌의 처음 위치에서 아래쪽으로 적어도 1칸, 위쪽으로 적어도 3칸을 이동해야 하므로 사건 A가 적어도 1번, 사건 B가 적어도 1번, 사건 C가 적어도 3번 일어나야 한다.

6번의 시행 중 1번은 이동하지 않는 사건이 일어나야 하고 7번째 시행에서 사건 A가 일어나야 하므로

C(미이동), B, C, C, C, A, A 또는 B, C, C, A(미이동), C, A, A의 순서로 사건이 일어나야 한다.

그러므로 이 경우의 확률은

$\frac{1^4\times 2^2\times 3}{6^7}+\frac{1^3\times 2^3\times 3}{6^7}=\frac{1}{2^5\times 3^5}$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$\mathrm{P}(X)=\frac{5}{2^5\times 3^6}+\frac{1}{2^5\times 3^5}=\frac{8}{2^5\times 3^6}=\frac{1}{2^2\times 3^6}$

두 번째 시행까지 던진 주사위에서 나온 눈의 수가 모두 2 이하인 경우는 (ⅰ)에서

A, A, C, C, B(미이동), C, B 의 순서로 사건이 일어나야 하므로

$\mathrm{P}(X\cap Y)=\dfrac{1^3\times2^2\times3^2}{6^7}=\dfrac{1}{2^5\times3^5}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\dfrac{1}{2^5\times3^5}}{\dfrac{1}{2^2\times3^6}}=\frac{3}{8}$$

115. 정답 48

모든 확률의 합은 1이므로

$\mathrm{P}(X\le a)+\mathrm{P}(X\ge a)=1$ …… ㉠

$\mathrm{P}(X\le a)=\dfrac{1}{2}\times a\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{3a}{20}$ …… ㉡

$\mathrm{P}(X\ge a)=\dfrac{1}{2}\times(b-a)\times\dfrac{b}{4}=\dfrac{b(b-a)}{8}$ …… ㉢

$\dfrac{\mathrm{P}(X\ge a)}{\mathrm{P}(X\le a)}=\dfrac{4}{3}$에서

$\mathrm{P}(X\ge a)=\dfrac{4}{3}\mathrm{P}(X\le a)$ …… ㉣

㉣을 ㉠에 대입하면

$\mathrm{P}(X\le a)+\dfrac{4}{3}\mathrm{P}(X\le a)=1$

즉, $\mathrm{P}(X\le a)=\dfrac{3}{7}$이므로 ㉡에서

$\dfrac{3a}{20}=\dfrac{3}{7}$, $a=\dfrac{20}{7}$

㉢, ㉣에서

$\dfrac{b(b-a)}{8}=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{3}{7}$, $b\left(b-\dfrac{20}{7}\right)=\dfrac{32}{7}$

$7b^2-20b-32=0$, $(7b+8)(b-4)=0$

$b>0$이므로 $b=4$

따라서 $7(a+b)=7\times\left(\dfrac{20}{7}+4\right)=48$

116. 정답 17

(i) $a=1$인 경우

조건 (가)에 의하여 $1\le b\le5$ 이때 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{B}(b,\ 0)$에 대하여 직선 AB는 조건 (나)를 만족시킨다.

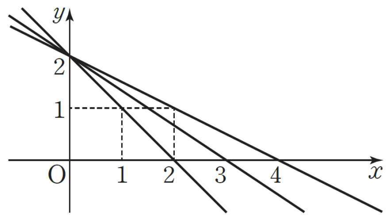
따라서 구하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 $b+c+d=7$을 만족시키는 자연수 b, c, d의 순서쌍 $(b,\ c,\ d)$의 개수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_{7-3}={}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$

(ii) $a=2$인 경우

조건 (가)에 의하여 $2\le b\le4$ 그림과 같이 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$, $\mathrm{B}(b,\ 0)$에 대하여 $b=3$일 때만 직선 AB는 조건 (나)를 만족시킨다.

따라서 구하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 $c+d=3$을 만족시키는 자연수 c, d의 순서쌍 $(c,\ d)$의 개수와 같으므로



${}_2\mathrm{H}_{3-2}={}_2\mathrm{H}_1={}_2\mathrm{C}_1=2$

(iii) $a=3$인 경우

조건 (가)에 의하여 $b=3$ 이때 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 3)$, $\mathrm{B}(3,\ 0)$에 대하여 직선 AB가 두 점 $(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$를 지나므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iv) $a\ge4$인 경우

$b\ge4$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에서 구하는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

$15+2=17$

다른 풀이

조건 (가)에서 네 자연수 a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d=8$이므로

$1\le b\le5$

(i) $b=1$인 경우

$a\le b$이므로 $a=1$

$a=1$일 때, 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{B}(1,\ 0)$이 조건 (나)를 만족시킨다.

이때 $c+d=6$을 만족시키는 자연수 c, d의 순서쌍 $(c,\ d)$의 개수는

${}_2\mathrm{H}_{6-2}={}_2\mathrm{H}_4={}_5\mathrm{C}_4={}_5\mathrm{C}_1=5$따라서 $b=1$인 경우 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 5이다.

(ii) $b=2$인 경우

$a\le b$이므로 $a=1$ 또는 $a=2$

$a=1$일 때, 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{B}(2,\ 0)$이 조건 (나)를 만족시킨다.

이때 $c+d=5$를 만족시키는 자연수 c, d의 순서쌍 $(c,\ d)$의 개수는

${}_2\mathrm{H}_{5-2}={}_2\mathrm{H}_3={}_4\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_1=4$

$a=2$일 때, 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$, $\mathrm{B}(2,\ 0)$에 대하여 직선 AB가 점 $(1,\ 1)$을 지나므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다. 따라서 $b=2$인 경우 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 4이다.

(iii) $b=3$인 경우

$a\le b$이므로 $a=1$ 또는 $a=2$ 또는 $a=3$

$a=1$일 때, 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{B}(3,\ 0)$이 조건 (나)를 만족시킨다.

이때 $c+d=4$를 만족시키는 자연수 c, d의 순서쌍 $(c,\ d)$의 개수

${}_2\mathrm{H}_{4-2}={}_2\mathrm{H}_2={}_3\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_1=3$

$a=2$일 때, 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$, $\mathrm{B}(3,\ 0)$이 조건 (나)를 만족시킨다.

이때 $c+d=3$을 만족시키는 자연수 c, d의 순서쌍 $(c,\ d)$의 개수는

${}_2\mathrm{H}_{3-2}={}_2\mathrm{H}_1={}_2\mathrm{C}_1=2$

$a=3$일 때, 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 3)$, $\mathrm{B}(3,\ 0)$에 대하여 직선 AB가 두

점 $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$을 지나므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
따라서 $b=3$인 경우 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는
$3+2=5$이다.

(iv) $b=4$인 경우
$a \le b$이므로 $a=1$ 또는 $a=2$
$a=1$일 때, 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{B}(4,\ 0)$이 조건 (나)를 만족시킨다.
이때 $c+d=3$을 만족시키는 자연수 c, d의 순서쌍 $(c,\ d)$의 개수는
$${}_2\mathrm{H}_{3-2}={}_2\mathrm{H}_1={}_2\mathrm{C}_1=2$$
$a=2$일 때, 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$, $\mathrm{B}(4,\ 0)$에 대하여 직선 AB가 점 $(2,\ 1)$을 지나므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다. 따라서 $b=4$인 경우 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 2이다.

(v) $b=5$인 경우
조건 (가)에서 $a=c=d=1$이고, 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{B}(5,\ 0)$이 조건 (나)를 만족시킨다. 따라서 $b=5$인 경우 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 1이다.

(i)~(v)에서 구하는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는
$5+4+5+2+1=17$

117. 정답 ④

3번째 시행 후 4장의 카드에서 보이는 면에 적혀 있는 모든 수의 곱이 홀수이려면 3번의 시행 중 4개의 동전을 동시에 한 번 던져 나오는 앞면의 개수가 2인 경우와 4인 경우가 각각 한 번씩 나오고, 앞면의 개수가 0 또는 1 또는 3인 경우가 한 번 나와야 한다.
4개의 동전을 동시에 한 번 던져 나오는 앞면의 개수가 2일 확률은
$${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{2^4}$$
4개의 동전을 동시에 한 번 던져 나오는 앞면의 개수가 4일 확률은
$${}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{2^4}$$
즉, 4개의 동전을 동시에 한 번 던져 나오는 앞면의 개수가 2 또는 4일 확률은
$${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2+{}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{7}{2^4}$$
이므로 4개의 동전을 동시에 한 번 던져 나오는 앞면의 개수가 0 또는 1 또는 3일 확률은
$$1-\frac{7}{2^4}=\frac{9}{2^4}$$
따라서 구하는 확률은
$$3!\times\frac{6}{2^4}\times\frac{1}{2^4}\times\frac{9}{2^4}=\frac{81}{2^{10}}$$

[참고]
4개의 동전을 동시에 한 번 던져 나오는 앞면의 개수가 0 또는 1 또는 3일 확률은
$${}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{9}{2^4}$$

118. 정답 ④

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수를 3으로 나눈 나머지가
0인 경우는 나온 눈의 수가 3, 6이고,
1인 경우는 나온 눈의 수가 1, 4이고,
2인 경우는 나온 눈의 수가 2, 5이므로
3으로 나눈 나머지가 0, 1, 2일 확률은 각각 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$이다.
주사위의 눈의 수가 3 또는 6이 나오면 1이 적혀 있는 공 1개와 3이 적혀 있는 공 1개를 꺼내므로 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 합은 $1+3=4$이다.
주사위의 눈의 수가 1 또는 4가 나오면 1이 적혀 있는 공 1개와 5가 적혀 있는 공 1개를 꺼내므로 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 합은 $1+5=6$이다.
주사위의 눈의 수가 2 또는 5가 나오면 3이 적혀 있는 공 1개와 5가 적혀 있는 공 1개를 꺼내므로 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 합은 $3+5=8$이다

주사위의 눈의 수	꺼낸 공의 개수			꺼낸 공에 적혀 있는 두수의 합
	1이 적혀 있는 공	3이 적혀 있는 공	5이 적혀 있는 공	
3, 6	1	1	0	$1+3=4$
1, 4	1	0	1	$1+5=6$
2, 5	0	1	1	$3+5=8$

이 시행을 두 번 반복하였을 때, 첫 번째 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 합을 X_1, 두 번째 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 합을 X_2라 하자.

표본평균 $\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$이므로 $\overline{X}$를 표로 나타내면 다음과 같다.

X_2 \ X_1	4	6	8
4	4	5	6
6	5	6	7
8	6	7	8

확률변수 $\overline{X}$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\overline{X}$	4	5	6	7	8	계
$\mathrm{P}(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

$$\mathrm{E}(\overline{X})=4\times\frac{1}{9}+5\times\frac{2}{9}+6\times\frac{1}{3}+7\times\frac{2}{9}+8\times\frac{1}{9}=6$$
$$\mathrm{V}(\overline{X})=4^2\times\frac{1}{9}+5^2\times\frac{2}{9}+6^2\times\frac{1}{3}+7^2\times\frac{2}{9}+8^2\times\frac{1}{9}-6^2$$
$$=\frac{1}{9}\times(16+50+108+98+64)-36=\frac{4}{3}$$

따라서 $a=6$, $b=\frac{4}{3}$이므로

$$\mathrm{P}(3b \le \overline{X} \le a)=\mathrm{P}(4 \le \overline{X} \le 6)=\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

119. 정답 24

집합 X에서 X로의 모든 함수 f중에서 임의로 선택한 함수 f가 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 사건을 A, $f(3)=f(4)$인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

집합 X에서 X로의 모든 함수 f의 개수는 5^5

두 조건 (가), (나)에 의하여 $f(3)$과 $f(4)$의 값은 모두 4의 약수이고 $f(3) \le f(4)$이므로

$f(3)=2$, $f(4)=2$ 또는 $f(3)=2$, $f(4)=4$ 또는 $f(3)=4$, $f(4)=4$이다.

(ⅰ) $f(3)=2$, $f(4)=2$일 때

$f(2)=2$

$f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_5\mathrm{H}_2={}_6\mathrm{C}_2=15$

따라서 $f(3)=2$, $f(4)=2$일 때 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 함수 f의 개수는

$1\times15=15$

(ⅱ) $f(3)=2$, $f(4)=4$일 때

$f(2)=2$

$f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

따라서 $f(3)=2$, $f(4)=4$일 때 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 함수 f의 개수는

$1\times6=6$

(ⅲ) $f(3)=4$, $f(4)=4$일 때

$f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 2, 3, 4 중에서 1개를 택하면 되므로 3이다.

$f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

따라서 $f(3)=4$, $f(4)=4$일 때 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 함수 f의 개수는

$3\times6=18$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$$\mathrm{P}(A)=\frac{15+6+18}{5^5}=\frac{39}{5^5},$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{15+18}{5^5}=\frac{33}{5^5}$$

이므로 $\mathrm{P}(B\,|\,A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{33}{5^5}}{\frac{39}{5^5}}=\dfrac{11}{13}$

따라서 $p=13$, $q=11$이므로

$p+q=13+11=24$

120. 정답 285

$c\times d$가 홀수이면 두 자연수 c, d는 모두 홀수이므로

$a+b+c+d=20$에서 $a+b$는 짝수이다.

즉, a, b는 모두 홀수이거나 모두 짝수이다.

(ⅰ) a, b, c, d가 모두 홀수인 자연수일 때

$a=2a'+1$, $b=2b'+1$, $c=2c'+1$, $d=2d'+1$

(a', b', c', d'은 음이 아닌 정수)라 하면

$a+b+c+d=20$에서

$(2a'+1)+(2b'+1)+(2c'+1)+(2d'+1)=20$

$a'+b'+c'+d'=8$ …… ㉠

따라서 ㉠을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d'의 모든 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수는

$${}_4\mathrm{H}_8={}_{11}\mathrm{C}_8={}_{11}\mathrm{C}_3=\frac{11\times10\times9}{3\times2\times1}=165$$

(ⅱ) a, b가 모두 짝수인 자연수이고, c, d가 모두 홀수인 자연수일 때

$a=2a'+2$, $b=2b'+2$, $c=2c'+1$, $d=2d'+1$

(a', b', c', d'은 음이 아닌 정수)라 하면

$a+b+c+d=20$에서

$(2a'+2)+(2b'+2)+(2c'+1)+(2d'+1)=20$

$a'+b'+c'+d'=7$ …… ㉡

따라서 ㉡을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d'의 모든 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수는

$${}_4\mathrm{H}_7={}_{10}\mathrm{C}_7={}_{10}\mathrm{C}_3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$165+120=285$

다른 풀이

$c\times d$가 홀수이면 두 자연수 c, d는 모두 홀수이므로

$a+b+c+d=20$에서 $a+b$는 짝수이다.

두 자연수 a, b에 대하여 $a+b=2m$ $(m=1, 2, 3, \cdots, 9)$이므로

$a=a'+1$, $b=b'+1$ (a', b'은 음이 아닌 정수)라 하면

$(a'+1)+(b'+1)=2m$

즉, $a'+b'=2m-2$이므로 이를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b'의 모든 순서쌍 (a', b')의 개수는

$${}_2\mathrm{H}_{2m-2}={}_{2+(2m-2)-1}\mathrm{C}_{2m-2}={}_{2m-1}\mathrm{C}_{2m-2}={}_{2m-1}\mathrm{C}_1=2m-1$$

홀수인 두 자연수 c, d에 대하여 $c+d=20-2m$이므로

$c=2c'+1$, $d=2d'+1$ (c', d'은 음이 아닌 정수)라 하면

$(2c'+1)+(2d'+1)=20-2m$
즉, $c'+d'=9-m$이므로 이를 만족시키는 음이 아닌 정수 c', d'의 모든 순서쌍 $(c',\ d')$의 개수는
${}_2\mathrm{H}_{9-m}={}_{2+(9-m)-1}\mathrm{C}_{9-m}={}_{10-m}\mathrm{C}_{9-m}={}_{10-m}\mathrm{C}_1=10-m$
따라서 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

$$\sum_{m=1}^{9}(2m-1)(10-m)$$
$$=\sum_{m=1}^{9}(-2m^2+21m-10)$$
$$=-2\times\frac{9\times10\times19}{6}+21\times\frac{9\times10}{2}-10\times9$$
$$=-570+945-90$$

121. 정답 ④
(i) 2회 사용한 문자가 3개인 경우
사용할 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_3=4$
$(1,\ 1,\ 3,\ 3,\ 5,\ 5)$의 경우
모든 경우의 수는 $\frac{6!}{2!2!2!2!}=90$
숫자 1이 이웃하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!2!}=30$
숫자 3이 이웃하는 경우의 수는 30
숫자 5가 이웃하는 경우의 수는 30
숫자 1과 3이 이웃하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$
숫자 1과 5가 이웃하는 경우의 수는 12
숫자 3과 5가 이웃하는 경우의 수는 12
숫자 1, 3, 5가 모두 이웃하는 경우의 수는 $3!=6$
따라서 같은 숫자끼리 이웃하지 않는 경우의 수는
$4\times(90-3\times30+3\times12-6)120$
(ii) 2회 사용한 문자가 2개인 경우
사용할 2개를 선택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2=6$
$(1,\ 1,\ 3,\ 3,\ 5,\ 7)$의 경우
모든 경우의 수는 $\frac{6!}{2!2!}=180$
숫자 1이 이웃하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!}=60$
숫자 3이 이웃하는 경우의 수는 60
숫자 1과 3이 모두 이웃하는 경우의 수는 $4!=24$
따라서 같은 숫자끼리 이웃하지 않는 경우의 수는
$6\times(180-60-60+24)=504$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$120+504=524$

122. 정답 ②
모든 경우의 수는
${}_5\mathrm{C}_3\times{}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_2=10\times10=100$
(i) $X=1$일 때
ⓐ A에서 꺼낸 공에 1이 포함된 경우
${}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2={}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1$
$=6\times2\times3=36$
ⓑ A에서 꺼낸 공에 1이 포함되지 않은 경우
${}_4\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2={}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2$
$=4\times3\times1=12$
그러므로
$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{36+12}{10\times10}=\frac{48}{100}$$
(ii) $X=2$일 때
ⓐ A에서 꺼낸 공에 1이 포함된 경우
${}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1=6\times1\times3=18$
ⓑ A에서 꺼낸 공에 1이 포함되지 않은 경우
${}_4\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1={}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1$
$=4\times3\times2=24$
그러므로
$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{18+24}{10\times10}=\frac{42}{100}$$
따라서 구하는 확률은
$$\frac{\frac{36}{100}+\frac{18}{100}}{\frac{48}{100}+\frac{42}{100}}=\frac{3}{5}$$

123. 정답 865
6번의 시행에서 2 이하의 눈이 n번 나오면 3 이상의 눈이 $(6-n)$번 나오므로 점 P는 시곗바늘이 도는 방향으로 $2n-(6-n)=3n-6$만큼 움직이고, 점 Q는 시곗바늘이 도는 방향으로 $n-(6-n)=2n-6$만큼 움직인다.
n의 값에 따른 두 점 P, Q의 위치는 다음 표와 같다.

n	$3n-6$	$2n-6$	P	Q	선분 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이
0	-6	-6	C	E	1
1	-3	-4	D	D	0
2	0	-2	A	C	1보다 크다.
3	3	0	B	E	1보다 크다.
4	6	2	C	D	1
5	9	4	D	C	1
6	12	6	A	E	1보다 크다.

(i) $n=0$일 확률은
$${}_6\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^0=\frac{2^6}{3^6}=\frac{64}{729}$$

(ii) $n=4$일 확률은

$${}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^4={}_6\mathrm{C}_2\times\frac{2^2}{3^6}=\frac{60}{729}$$

(iii) $n=5$일 확률은

$${}_6\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^5={}_6\mathrm{C}_1\times\frac{2}{3^6}=\frac{12}{729}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{64+60+12}{3^6}=\frac{136}{729}$$

따라서 $p=729$, $q=136$이므로

$p+q=865$

124. 정답 54

$f(1)\times f(2)\times f(5)=10$이면서 조건 (나)를 만족시키는 $f(1)$, $f(2)$, $f(5)$의 경우는 다음이 가능하다.

	$f(1)$	$f(2)$	$f(5)$	$(a,\ b)$
①	1	2	5	없음
②	1	5	2	$(2,\ 5)$
③	2	1	5	$(1,\ 2)$

조건 (나)를 만족시키는 a, b의 차이가 2 이상인 경우 $a<c<b$라 하면 $f(a)>f(b)$이므로 $f(c)\le f(b)<f(a)$가 되어 $(a,\ c)$도 조건 (나)를 만족시킨다.
이때 부등식을 만족시키는 순서쌍이 2개 이상이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다. 따라서 $f(a)>f(b)$를 만족시키는 a, b의 차이는 1이다.

(i) ①의 경우 $f(1)=1$이고, 가능한 $(a,\ b)$는 $(2,\ 3)$, $(3,\ 4)$, $(4,\ 5)$, $(5,\ 6)$이다.

ⓐ $(2,\ 3)$의 경우

$f(1)=1\le f(3)<f(2)=2\le f(4)\le f(5)=5\le f(6)\le 6$

$f(3)=1$, $f(4)$의 값은 2, 3, 4, 5 중에서 하나를 택하고 $f(6)$의 값은 5, 6 중에 하나를 택하면 되므로

$1\times4\times2=8$

ⓑ $(3,\ 4)$의 경우

$f(1)=1<2=f(2)\le f(4)<f(3)\le f(5)=5\le f(6)\le 6$

$f(3)$, $f(4)$의 값은 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 2개, $f(6)$의 값은 5, 6 중에 하나를 택하면 되므로

${}_4\mathrm{C}_2\times2=6\times2=12$

ⓒ $(4,\ 5)$의 경우

$f(1)=1<2=f(2)\le f(3)\le f(5)=5<f(4)\le f(6)=6$

$f(3)$의 값은 2, 3, 4, 5 중 하나를 택하면 되고 $f(4)=f(6)=6$이므로

$4\times1\times1=4$

ⓓ $(5,\ 6)$의 경우

$f(1)=1<2=f(2)\le f(3)\le f(4)\le f(6)<5=f(5)$

$f(3)$, $f(4)$, $f(6)$의 값은 2, 3, 4 중에 중복을 허용하여 3개를 택하면 되므로

${}_3\mathrm{H}_3={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$

ⓐ, ⓑ, ⓒ, ⓓ에 의하여

$8+12+4+10=34$

(ii) ②의 경우 $f(2)=5$, $f(5)=2$이어서 a, b의 차이가 2 이상이므로 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍이 2 이상이 되어 모순이다.

(iii) ③의 경우 $f(1)=2$, $f(2)=1$이므로 $(a,\ b)=(1,\ 2)$이다.

$f(2)=1<2=f(1)\le f(3)\le f(4)\le 5\le f(5)\le f(6)\le 6$

$f(3)$, $f(4)$의 값은 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하고, $f(5)$, $f(6)$의 값은 5, 6 중에서 하나를 택하면 되므로

${}_4\mathrm{H}_2\times2={}_5\mathrm{C}_2\times2=10\times2=20$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수의 개수는 $34+0+20=54$

125. 정답 ③

모표준편차가 2이고 표본의 크기가 n, 표본평균이 $\bar{x}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x}-1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}\le m\le\bar{x}+1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}$$

이때 $a+b=2\bar{x}=120$에서

$\bar{x}=60$

$100(b-a)=100\times2\times1.96\times\dfrac{2}{\sqrt{n}}=49$에서

$\sqrt{n}=16$

$n=256$

따라서

$n+\bar{x}=256+60=316$

126. 정답 ①

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 4^2)$을 따르므로

조건 (가)의 $\mathrm{P}(X\ge10)\le\mathrm{P}(X\le15)$에서

$m\le\dfrac{10+15}{2}=12.5$ …… ㉠

조건 (나)의 $\mathrm{P}(X\le14)\le\mathrm{P}(X\ge9)$에서

$m\ge\dfrac{14+9}{2}=11.5$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$11.5\le m\le12.5$

m은 자연수이므로

$m=12$

표본평균 $\overline{X_1}$은 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\dfrac{4}{6}\right)^2\right)$을 따르므로

$Z_1=\dfrac{\overline{X_1}-m}{\frac{2}{3}}$으로 놓으면 확률변수 Z_1은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

또한 표본평균 $\overline{X_2}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{4}{2}\right)^2\right)$을 따르므로

$Z_2=\dfrac{\overline{X_2}-m}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z_2는 표준정규분포

$\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}\left(\overline{X_1}\le m-1\right)+\mathrm{P}\left(\overline{X_2}\ge 25-m\right)$에서

$\mathrm{P}\left(\overline{X_1}\le 11\right)+\mathrm{P}\left(\overline{X_2}\ge 13\right)$

이때

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\overline{X_1}\le 11\right)&=\mathrm{P}\left(Z_1\le\frac{11-12}{\frac{2}{3}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z_1\le-\frac{3}{2}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z_1\ge\frac{3}{2}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z_1\le\frac{3}{2}\right)\\&=0.5-0.4322\\&=0.0668\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\overline{X_2}\ge 13\right)&=\mathrm{P}\left(Z_2\ge\frac{13-12}{2}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z_2\ge\frac{1}{2}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z_2\le\frac{1}{2}\right)\\&=0.5-0.1915\\&=0.3085\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\overline{X_1}\le 11\right)+\mathrm{P}\left(\overline{X_2}\ge 13\right)&=0.0668+0.3085\\&=0.3753\end{aligned}$$

127. 정답 64

조건 (가), (나)에 의하여

$5=1+4=2+3$이므로

$f(2)=1,\ f(4)=4$ 또는 $f(2)=2,\ f(4)=3$

(ⅰ) $f(2)=1,\ f(4)=4$ 일 때

조건 (나)에 의하여 $f(1)=1$이고, $f(3)$이 될 수 있는 값은 $1,\ 2,\ 3,\ 4$의 4가지, $f(5)$와 $f(6)$의 값은 $4,\ 5,\ 6$ 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 크기순으로 대응시키면 되므로

$${}_3\mathrm{H}_2={}_{3+2-1}\mathrm{C}_2={}_4\mathrm{C}_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

그러므로 구하는 함수의 개수는

$1\times4\times6=24$

(ⅱ) $f(2)=2,\ f(4)=3$ 일 때

조건 (나)에 의하여 $f(1)$이 될 수 있는 값은 $1,\ 2$의 2가지이고, $f(3)$이 될 수 있는 값은 $2,\ 3$의 2가지, $f(5)$와 $f(6)$의 값은 $3,\ 4,\ 5,\ 6$ 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 크기순으로 대응시키면 되므로

$${}_4\mathrm{H}_2={}_{4+2-1}\mathrm{C}_2={}_5\mathrm{C}_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

그러므로 구하는 함수의 개수는

$2\times2\times10=40$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 함수의 개수는

$24+40=64$

128. 정답 10

한 개의 주사위를 한 번 던지는 시행에서 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이고, 그 이외의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$이다.

자연수 n에 대하여 n번의 시행에서 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 $k(0\le k\le n\le 7)$이라 하면 그 이외의 눈이 나오는 횟수는 $n-k$이다.

이때 상자 A에 들어 있는 공의 개수는

$5+2k$

이고, 상자 B에 들어 있는 공의 개수는

$4+(n-k)=n-k+4$

이다. 두 상자에 들어 있는 공의 개수가 같아지려면

$5+2k=n-k+4$

에서

$3k+1=n$

조건을 만족시키는 순서쌍 $(k,\ n)$은

$(0,\ 1),\ (1,\ 4),\ (2,\ 7)$

로 3가지 경우가 있다.

7번째 시행 후 두 상자에 들어 있는 공의 개수가 같아지는 사건을 E라 하자. 구한 순서쌍 $(2,\ 7)$에서

$$\mathrm{P}(E)={}_7\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{21\times32}{3^7}$$

7번째 이전 시행에서 두 상자에 들어 있는 공의 개수가 한 번만 같아지는 사건을 F라 하자. 위에서 구한 순서쌍 $(0,\ 1),\ (1,\ 4)$에서 첫 번째 시행에서 공의 개수가 같아지거나 4번째 시행에서 공의 개수가 같아진다.

첫 번째 시행에서 두 상자의 공의 개수가 같아질 사건을 F_1, 4번째 시행에서 두 상자의 공의 개수가 같아질 사건을 F_2라 하자.

순서쌍 $(0,\ 1),\ (2,\ 7)$에서 첫 번째 시행에서 3의 배수의 눈이 나오지 않고, 이후 6번의 시행에서 3의 배수의 눈이 2번 나올 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(F_1\cap E)&=\frac{2}{3}\times{}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4\\&=\frac{2\times15\times16}{3^7}\end{aligned}$$

순서쌍 $(1,\ 4),\ (2,\ 7)$에서 4번째 시행까지 3의 배수의 눈이 1번 나오고, 이후 3번의 시행에서 3의 배수의 눈이 1번 나올 확률은

$$\mathrm{P}(F_2 \cap E)={}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times {}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$=\frac{32\times 12}{3^7}$$

순서쌍 $(0,\ 1)$, $(1,\ 4)$, $(2,\ 7)$에서 첫 번째에 3의 배수의 눈이 나오지 않고, 이후 3번의 시행에서 3의 배수의 눈이 1번 나오고, 그 이후 3번의 시행에서 3의 배수의 눈이 1번 나올 확률은

$$\mathrm{P}(F_1 \cap F_2 \cap E)=\frac{2}{3}\times {}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times {}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$=\frac{2\times 12\times 12}{3^7}$$

이때 7번째 시행 전까지 단 한 번만 두 상자에 들어 있는 공의 개수가 같고, 이후 7번째 시행 후 다시 두 상자에 들어 있는 공의 개수가 같아질 확률은

$\mathrm{P}(E\cap F)$

$=\mathrm{P}(F_1\cap E)+\mathrm{P}(F_2\cap E)-2\times\mathrm{P}(F_1\cap F_2\cap E)$

$$=\frac{2\times 15\times 16}{3^7}+\frac{32\times 12}{3^7}-2\times\frac{2\times 12\times 12}{3^7}$$

$$=\frac{32\times(15+12-18)}{3^7}$$

$$=\frac{32\times 9}{3^7}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(F|E)=\frac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(E)}$$

$$=\frac{\frac{32\times 9}{3^7}}{\frac{21\times 32}{3^7}}=\frac{3}{7}$$

이므로 $p=7$, $q=3$이고

$p+q=10$

129. 정답 ⑤

두 주사위를 동시에 던져서 나온 두 눈의 수를 각각 a, b라 하면 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 36이고, $2\le a+b\le 12$이다.

$a+b$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$a+b$의 약수의 개수	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6

$X=2$인 경우는 $a+b$의 약수의 개수가 2이므로 $a+b$의 값이 2, 3, 5, 7, 11 중 하나이고, $X=2$일 때 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$, $(1,\ 4)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 2)$, $(4,\ 1)$, $(1,\ 6)$, $(2,\ 5)$, $(3,\ 4)$, $(4,\ 3)$, $(5,\ 2)$, $(6,\ 1)$, $(5,\ 6)$, $(6,\ 5)$의 15개이다.

즉, $\mathrm{P}(X=2)=\frac{15}{36}$

$X=3$인 경우는 $a+b$의 약수의 개수가 3이므로 $a+b$의 값이 4, 9중 하나이고, $X=3$일 때 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(1,\ 3)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 1)$, $(3,\ 6)$, $(4,\ 5)$, $(5,\ 4)$, $(6,\ 3)$의 7개이다.

즉, $\mathrm{P}(X=3)=\frac{7}{36}$

$X=4$인 경우는 $a+b$의 약수의 개수가 4이므로 $a+b$의 값이 6, 8, 10중 하나이고, $X=4$일 때 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(1,\ 5)$, $(2,\ 4)$, $(3,\ 3)$, $(4,\ 2)$, $(5,\ 1)$, $(2,\ 6)$, $(3,\ 5)$, $(4,\ 4)$, $(5,\ 3)$, $(6,\ 2)$, $(4,\ 6)$, $(5,\ 5)$, $(6,\ 4)$의 13개이다.

즉, $\mathrm{P}(X=4)=\frac{13}{36}$

$X=6$인 경우는 $a+b$의 약수의 개수가 6이므로 $a+b$의 값이 12이고, $X=6$일 때 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(6,\ 6)$의 1개이다.

즉, $\mathrm{P}(X=6)=\frac{1}{36}$

이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	6	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{15}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

따라서

$$\mathrm{E}(X)=2\times\frac{15}{36}+3\times\frac{7}{36}+4\times\frac{13}{36}+6\times\frac{1}{36}=\frac{109}{36}$$

130. 정답 ②

조건 (가)에서 a, b는 모두 홀수이고, 조건 (나)에서 c, d는 각각 홀수, 홀수이거나 짝수, 짝수이다. 7이하의 자연수 중에서 홀수는 1, 3, 5, 7이고 짝수는 2, 4, 6이므로 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

$4\times 4\times(4\times 4+3\times 3)=400$

이 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$중에서 $a\le b\le c\le d$인 경우는 다음과 같이 나누어 생각한다.

(ⅰ) $(a,\ b,\ c,\ d)=($ 홀수, 홀수, 홀수, 홀수 $)$인 경우
1, 3, 5, 7중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 경우이므로

$${}_4\mathrm{H}_4={}_{4+4-1}\mathrm{C}_4={}_7\mathrm{C}_4={}_7\mathrm{C}_3=\frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1}=35$$

(ⅱ) $(a,\ b,\ c,\ d)=($ 홀수, 홀수, 짝수, 짝수 $)$인 경우
$c=2$이면 d가 2, 4, 6중에 하나이고 a, b는 모두 1이므로 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 $3\times 1=3$
$c=4$이면 d가 4, 6 중에 하나이고 a, b는 1, 3중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 경우이므로 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

$2\times{}_2\mathrm{H}_2=2\times{}_{2+2-1}\mathrm{C}_2=2\times{}_3\mathrm{C}_2=6$

$c=6$이면 $d=6$이고 a, b는 1, 3, 5 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 경우이므로 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

$${}_3\mathrm{H}_2={}_{3+2-1}\mathrm{C}_2={}_4\mathrm{C}_2=\frac{4\times 3}{2\times 1}=6$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$ 중에서 $a\le b\le c\le d$인 경우의 수는

$35+(3+6+6)=50$

따라서 구하는 확률은

$\frac{50}{400}=\frac{1}{8}$

131. 정답 576

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 81인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균 $\overline{X_1}$의 값을 $\overline{x_1}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$\overline{x_1}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{81}}\le m\le\overline{x_1}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{81}}$

$\overline{x_1}-2.58\times\frac{\sigma}{9}\le m\le\overline{x_1}+2.58\times\frac{\sigma}{9}$

에서 $a=\overline{x_1}-2.58\times\frac{\sigma}{9}$, $b=\overline{x_1}+2.58\times\frac{\sigma}{9}$이므로

$b-a=2\times2.58\times\frac{\sigma}{9}$ …… ㉠

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균 $\overline{X_2}$의 값을 $\overline{x_2}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$\overline{x_2}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x_2}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

에서 $c=\overline{x_2}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $d=\overline{x_2}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이므로

$d-c=2\times2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ …… ㉡

$b-a=\frac{8}{3}(d-c)$에 ㉠, ㉡을 대입하면

$2\times2.58\times\frac{\sigma}{9}=\frac{8}{3}\times2\times2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\sqrt{n}=24$

따라서 $n=576$

132. 정답 74

조건 (가)에서 두 집합 $A\cup B$, $A\cap B$의 모든 원소의 합은 각각 17, 3이므로 집합 $(A-B)\cup(B-A)$의 원소의 합은 14이다.

집합 $(A-B)\cup(B-A)$는

$\{1,\ 2,\ 3,\ 8\}$, $\{1,\ 2,\ 4,\ 7\}$, $\{1,\ 2,\ 5,\ 6\}$, $\{1,\ 3,\ 4,\ 6\}$, $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $\{1,\ 5,\ 8\}$, $\{1,\ 6,\ 7\}$, $\{2,\ 4,\ 8\}$, $\{2,\ 5,\ 7\}$, $\{3,\ 4,\ 7\}$, $\{3,\ 5,\ 6\}$, $\{6,\ 8\}$ 중 하나이다.

이때 $A\cap B=\{1,\ 2\}$ 또는 $A\cap B=\{3\}$이므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각해 보자.

(ⅰ) $A\cap B=\{1,\ 2\}$인 경우

집합 $(A-B)\cup(B-A)$가 1 또는 2를 원소로 가질 수 없으므로 집합 $(A-B)\cup(B-A)$로 가능한 경우는 $\{3,\ 4,\ 7\}$, $\{3,\ 5,\ 6\}$, $\{6,\ 8\}$이다.

집합 $(A-B)\cup(B-A)$가 $\{3,\ 4,\ 7\}$이면 서로 다른 원소 3, 4, 7이 각각 서로 다른 두 집합 $A-B$, $B-A$ 중 하나를 선택해야 하므로 ${}_2\Pi_3$이고, 조건 (나)를 항상 만족시킨다.

같은 방법으로 집합 $(A-B)\cup(B-A)$가 $\{3,\ 5,\ 6\}$, $\{6,\ 8\}$인 경우도 각각 구하면 ${}_2\Pi_3$, ${}_2\Pi_2$이다.

즉, $A\cap B=\{1,\ 2\}$인 경우 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는

${}_2\Pi_3\times2+{}_2\Pi_2=2^3\times2+2^2=16+4=20$

(ⅱ) $A\cap B=\{3\}$인 경우

집합 $(A-B)\cup(B-A)$가 3을 원소로 가질 수 없으므로 집합 $(A-B)\cup(B-A)$로 가능한 경우는 $\{1,\ 2,\ 4,\ 7\}$, $\{1,\ 2,\ 5,\ 6\}$, $\{1,\ 5,\ 8\}$, $\{1,\ 6,\ 7\}$, $\{2,\ 4,\ 8\}$, $\{2,\ 5,\ 7\}$, $\{6,\ 8\}$이다.

집합 $(A-B)\cup(B-A)$가 $\{1,\ 2,\ 4,\ 7\}$이면 서로 다른 원소 1, 2, 4, 7이 각각 서로 다른 두 집합 $A-B$, $B-A$ 중 하나를 선택해야 하므로 ${}_2\Pi_4$이고, 조건 (나)에서 1, 2, 4, 7이 서로 다른 두 집합 $A-B$, $B-A$ 중 모두 같은 집합을 선택한 경우를 제외하면 ${}_2\Pi_4-2$이다.

같은 방법으로 집합 $(A-B)\cup(B-A)$가 $\{1,\ 2,\ 5,\ 6\}$, $\{1,\ 5,\ 8\}$, $\{1,\ 6,\ 7\}$, $\{2,\ 5,\ 7\}$, $\{2,\ 4,\ 8\}$, $\{6,\ 8\}$인 경우도 각각 구하면 $A\cap B=\{3\}$인 경우 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는

$({}_2\Pi_4-2)\times2+({}_2\Pi_3-2)\times4+({}_2\Pi_2-2)$

$=(2^4-2)\times2+(2^3-2)\times4+(2^2-2)=14\times2+6\times4+2=54$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는 $20+54=74$

133. 정답 ①

X에서 Y로의 일대일함수 f의 개수는

${}_8\mathrm{P}_3=8\times7\times6=336$

조건 (가)에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값은

(ⅰ) 짝수, 짝수, 짝수

(ⅱ) 짝수, 홀수, 홀수

이어야 한다.

(ⅰ) 짝수, 짝수, 짝수인 경우

조건 (나)에 의하여 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값은 2, 4, 6, 8 중에서 3개를 선택해야 하므로 그 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_1=4$

(ⅱ) 짝수, 홀수, 홀수인 경우

$f(1)=2$인 경우$f(2)$, $f(3)$은 3, 5, 7 중에서 2개를 선택해야 하므로 그 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_1=3$

$f(1)=4$인 경우 $f(2)=5$, $f(3)=7$이므로 그 경우의 수는 1이다.

$f(2)=2$인 경우 $f(1)=1$이고 $f(3)$은 3, 5, 7 중에서 선택해야 하므로 그 경우의 수는

$_3C_1=3$

$f(2)=4$인 경우 $f(1)$은 1, 3 중에서 $f(3)$은 5, 7 중에서 선택해야 하므로 그 경우의 수는

$_2C_1\times{}_2C_1=2\times2=4$

$f(2)=6$인 경우 $f(1)$은 1, 3, 5 중에서 선택해야하고, $f(3)=7$이므로 그 경우의 수는

$_3C_1=3$

$f(3)=4$인 경우 $f(1)=1$, $f(2)=3$이므로 그 경우의 수는 1이다.

$f(3)=6$인 경우 $f(1)$, $f(2)$는 1, 3, 5 중에서 선택해야 하므로 그 경우의 수는

$_3C_2={}_3C_1=3$

$f(3)=8$인 경우 $f(1)$, $f(3)$은 1, 3, 5, 7 중에서 선택해야 하므로 그 경우의 수는

$_4C_2=\dfrac{4\times3}{2}=6$

(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$4+3+1+3+4+3+1+3+6=28$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{28}{336}=\dfrac{1}{12}$

134. 정답 ⑤

4개의 공이 들어 있는 주머니에서 두 개의 공을 꺼내는 경우의 수는

$_4C_2=6$

주사위의 눈이 짝수인 경우 기록된 수는

$1+3=4$, $1+5=6$, $1+7=3+5=8$, $3+7=10$, $5+7=12$으로

4, 6, 8, 10, 12이다.

또한 주사위의 눈이 홀수인 경우 기록된 수는

(1, 3), (1, 5), (1, 7)에서 1

(3, 5), (3, 7)에서 3

(5, 7)에서 5

로 1, 3, 5이다.

따라서 위의 시행을 한 번 하였을 때 기록된 수를 확률변수 X라 하면

$\mathrm{P}(X=1)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{4}$

$\mathrm{P}(X=3)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{6}$

$\mathrm{P}(X=4)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{12}$

$\mathrm{P}(X=5)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{12}$

$\mathrm{P}(X=6)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{12}$

$\mathrm{P}(X=8)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{6}$

$\mathrm{P}(X=10)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{12}$

$\mathrm{P}(X=12)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{12}$

이때 $\overline{X}=4$인 경우는

$4=\dfrac{3+5}{2}=\dfrac{5+3}{2}=\dfrac{4+4}{2}$

이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}=4)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{12}\times\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}\times\dfrac{1}{12}$

$=\dfrac{1}{72}+\dfrac{1}{72}+\dfrac{1}{144}=\dfrac{5}{144}$

135. 정답 281

9개의 공을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{9!}{2!3!4!}=1260$

검은 공 2개가 서로 이웃하지 않으려면 나머지 7개의 공을 일렬로 나열한 후 7개의 공 사이사이와 양 끝의 8군데 중에서 검은 공 2개를 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{7!}{3!4!}\times{}_8C_2=35\times28=980$

검은 공 2개가 서로 이웃하지 않고, 빨간 공 3개도 모두 서로 이웃하지 않는 경우를 다음과 같이 나눠서 생각한다.

흰 공, 빨간 공을 먼저 배열할 때

(ⅰ) 빨간 공 3개가 모두 이웃하지 않는 경우

(ⅱ) 빨간 공 2개가 이웃하고 나머지 1개의 공이 이웃하지 않는 경우

(ⅲ) 빨간 공 3개가 모두 이웃하는 경우

(ⅰ)의 경우의 수는

흰 공 4개가 일렬로 나열되고 흰 공 사이사이와 양 끝 5군데 중에서 빨간 공 3개가 들어가고 일렬로 나열된 7개의 공 사이사이와 양 끝 8군데 중에서 검은 공 2개를 넣는 그 경우의 수는

$_5C_3\times{}_8C_2=10\times28=280$

(ⅱ)의 경우의 수는

흰 공 4개가 일렬로 나열되고 흰 공 사이사이와 양 끝 5군데 중에서 이웃하는 빨간 공 2개와 나머지 빨간 공 1개를 넣는 경우의 수는

$_5P_2=20$

이웃한 빨간 공 2개 사이에 검은 공 1개를 넣고 일렬로 나열된 8개의 공 사이사이와 양 끝 9군데 중에서 나열된 검은 공의 양 옆을 제외한 7군데 중에서 검은 공 1개를 넣는 경우의 수는

$_7C_1=7$

따라서 (ⅱ)의 경우의 수는 $20\times7=140$

(ⅲ)의 경우의 수는

흰 공 4개가 일렬로 나열되고 흰 공 사이사이와 양 끝 5군데 중에서 이웃하는 빨간 공 3개를 넣는 경우의 수는

$_5C_1=5$

검은 공 2개를 이웃한 빨간 공 3개의 사이 2군데에 넣는 경우의 수는

$_2C_2=1$

따라서 (ⅲ)의 경우의 수는 $5\times1=5$

즉, (ⅰ)~(ⅲ)을 만족시키는 모든 경우의 수는

$280+140+5=425$

이때 검은 공 2개가 서로 이웃하지 않는 사건을 A, 빨간 공 3개가 서로 이웃하지 않는 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{425}{1260}}{\frac{980}{1260}}=\frac{425}{980}=\frac{85}{196}$$

따라서 $p=196$, $q=85$이므로 $p+q=281$

136. 정답 228

조건 (나)에서 $a+b+c$가 홀수인 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) a, b, c가 모두 홀수

(ⅱ) a, b, c 중에서 짝수 2개, 홀수 1개

(ⅰ) a, b, c가 모두 홀수인 경우

조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는 1, 3, 5 중에서 중복을 허락하여 3개를 선택해야 하므로

$_3\mathrm{H}_3={}_{3+3-1}\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$

조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 $(d,\ e)$는 6, 7, 8, 9, 10 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택해야 하므로

$_5\mathrm{H}_2={}_{5+2-1}\mathrm{C}_2={}_6\mathrm{C}_2=15$

이 중에서 $d\times e$가 홀수인 경우는 7, 9 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택해야 하므로

$_2\mathrm{H}_2={}_{2+2-1}\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_2=3$

즉, 조건 (가), (나)를 만족시키는 순서쌍 $(d,\ e)$의 개수는

$15-3=12$

이므로 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는

$10\times12=120$

(ⅱ) a, b, c 중에서 짝수 2개, 홀수 1개인 경우

1, 2, 3, 4, 5 중에서 짝수가 2, 4 두 개 뿐이므로

① 짝수가 2뿐인 경우의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는

$(1,\ 2,\ 2)$, $(2,\ 2,\ 3)$, $(2,\ 2,\ 5)$

② 짝수가 4뿐인 경우의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는

$(1,\ 4,\ 4)$, $(3,\ 4,\ 4)$, $(4,\ 4,\ 5)$

③ 짝수가 2, 4가 각각 1개인 경우의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는

$(1,\ 2,\ 4)$, $(2,\ 3,\ 4)$, $(2,\ 4,\ 5)$

따라서 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 $3+3+3=9$

또한 (ⅰ)에서 순서쌍 $(d,\ e)$의 개수는 12이므로

순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는 $9\times12=108$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는

$120+108=228$

137. 정답 ⑤

7개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 중에서 서로 다른 3개를 택하는 경우의 수는

$_7\mathrm{C}_3=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

택한 세 수의 합이 2의 배수인 사건을 A, 3의 배수인 사건을 B라 하자.

택한 세 수의 합이 2의 배수이려면 세 수 중 짝수가 3개이거나 짝수 1개, 홀수 2개이어야 하므로 그 경우의 수는

$_3\mathrm{C}_3+{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2=1+3\times6=19$

즉, $\mathrm{P}(A)=\dfrac{19}{35}$ …… ㉠

택한 세 수의 합이 3의 배수이려면 세 집합

$D=\{1,\ 4,\ 7\}$, $\mathrm{E}=\{2,\ 5\}$, $\mathrm{F}=\{3,\ 6\}$

에 대하여

(ⅰ) 세 수가 모두 집합 D의 원소이거나

(ⅱ) 세 수가 각각 세 집합 D, E, F의 원소 중 하나이어야 하므로 그 경우의 수는

$_3\mathrm{C}_3+{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1=1+12=13$

즉, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{13}{35}$ …… ㉡

한편, 택한 세 수의 합이 2의 배수이고 3의 배수인 경우, 즉 6의 배수인 경우는 세 수의 집합이

(ⅰ) 세 수의 합이 6인 경우 : $\{1,\ 2,\ 3\}$

(ⅱ) 세 수의 합이 12인 경우 : $\{1,\ 4,\ 7\}$, $\{1,\ 5,\ 6\}$, $\{2,\ 3,\ 7\}$, $\{2,\ 4,\ 6\}$, $\{3,\ 4,\ 5\}$

(ⅲ) 세 수의 합이 18인 경우 : $\{5,\ 6,\ 7\}$

이므로 그 경우의 수는 7이다.

즉, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{7}{35}$ …… ㉢

따라서 구하는 확률은 ㉠, ㉡, ㉢에 의하여

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{19}{35}+\frac{13}{35}-\frac{7}{35}=\frac{25}{35}=\frac{5}{7}$$

138. 정답 ③

6장의 카드를 일렬로 나열하여 만든 6자리 자연수 중에서 임의로 택한 수가 120000보다 큰 사건을 A라 하고, 이 수가 짝수인 사건을 B라 하자.

6개의 수 1, 1, 1, 2, 2, 2를 일렬로 나열하여 만든 6자리 자연수의

개수는

$\dfrac{6!}{3!\times3!}=20$ (가지)

선택된 6자리 자연수가 120000보다 큰 경우는 다음과 같이 3가지이다.

12□□□□의 꼴인 경우

$1,\ 1,\ 2,\ 2$를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!\times2!}=6$ (가지) …… ㉠

21□□□□의 꼴인 경우

$1,\ 1,\ 2,\ 2$를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!\times2!}=6$ (가지) …… ㉡

22□□□□의 꼴인 경우

$1,\ 1,\ 1,\ 2$를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{3!}=4$ (가지) …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{6+6+4}{20}=\dfrac{4}{5}$

한편, 선택된 6자리의 자연수가 120000보다 큰 짝수인 경우의 수는

12□□□2의 꼴인 경우

$1,\ 1,\ 2$를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{3!}{2!}=3$ (가지) …… ㉣

22□□□2의 꼴인 경우

$1,\ 1,\ 1$을 일렬로 나열하는 경우의 수는

1 (가지) …… ㉤

㉣, ㉤, ㉥에서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{3+3+1}{20}=\dfrac{7}{20}$이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{7}{20}}{\frac{4}{5}}=\frac{7}{16}$$

139. 정답 327

10회의 게임에서 A가 이긴 횟수를 a, 진 횟수를 b 비긴 횟수를 c라 하면,

$a+b+c=10$ ($a,\ b,\ c$는 음이 아닌 정수) …… ㉠

10회의 게임 후 A가 이긴 횟수가 비긴 횟수보다 크지 않으므로

$a\le c$ …… ㉡

10회의 게임 후 A가 가진 사탕의 개수가 16이므로

$10+2a-b=16$

$2a-b=6$ …… ㉢

㉠, ㉢에서 변끼리 더하면

$3a+c=16$

㉡에서 $3a+c\ge 4a$, 즉 $a\le 4$

이때 $a,\ b,\ c$는 음이 아닌 정수이므로 ㉠, ㉢을 만족시키는 세 수 $a,\ b,\ c$의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는

$(3,\ 0,\ 7)$, $(4,\ 2,\ 4)$

(i) A가 3회 이기고, 7번 비기는 경우의 수는

$\dfrac{10!}{3!\times7!}=120$

(ii) A가 4회 이기고, 2번 지며, 4번 비기는 경우의 수는

$\dfrac{10!}{4!\times2!\times4!}=3150$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수 k의 값은

$k=120+3150=3270$

따라서 $\dfrac{k}{10}=327$

140. 정답 4

두 확률변수 $X,\ Y$의 표준편차가 서로 같으므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 x축의 방향으로 평행이동하면 서로 일치한다.

조건 (나)에서 $\mathrm{P}(t\le Y\le t+4)$의 값은

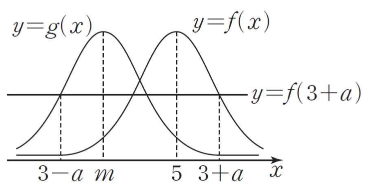
$\dfrac{t+(t+4)}{2}=m$

즉, $t=m-2$일 때 최대이므로

$a=m-2$ …… ㉠

조건 (가)에서 $f(3+a)=g(3-a)$를 만족시키는 실수 a가 존재하는 경우는 다음과 같다.

(i) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 직선 $x=3$에 대하여 서로 대칭인 경우

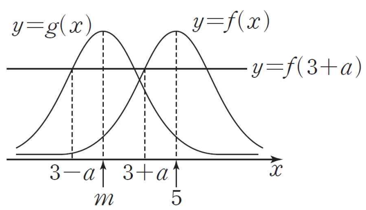


$\dfrac{m+5}{2}=\dfrac{(3-a)+(3+a)}{2}=3$에서

$m=1$

㉠에서 $a=-1$이므로 a가 양수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-2a$만큼 평행이동시킨 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프와 일치하는 경우



$(3+a)-(3-a)=5-m$에서

$a=\dfrac{5-m}{2}$

㉠에서 $m-2=\dfrac{5-m}{2}$

$m=3,\ a=1$이므로 조건을 모두 만족시킨다.

따라서 $a+m=4$

141. 정답 ①

확률변수 X가 따르는 정규분포를 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$ $(\sigma>0)$이라 하면

$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

조건 (가)의 $\mathrm{P}(112\le X\le 140)=\mathrm{P}(118\le X\le 146)$에서

$140-112=28$, $146-118=28$이므로

$$\mathrm{P}\left(\frac{112-m}{\sigma}\le Z\le\frac{140-m}{\sigma}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{118-m}{\sigma}\le Z\le\frac{146-m}{\sigma}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{m-146}{\sigma}\le Z\le\frac{m-118}{\sigma}\right)$$

에서

$$\frac{112-m}{\sigma}=\frac{m-146}{\sigma},\ \frac{140-m}{\sigma}=\frac{m-118}{\sigma}$$

즉, $m=129$

조건 (나)의

$\mathrm{P}(X\le 113)+\mathrm{P}(139\le X\le 145)=0.0062$에서

$$\mathrm{P}(X\le 113)+\mathrm{P}(139\le X\le 145)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{113-129}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(\frac{139-129}{\sigma}\le Z\le\frac{145-129}{\sigma}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z\le-\frac{16}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(\frac{10}{\sigma}\le Z\le\frac{16}{\sigma}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{16}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(\frac{10}{\sigma}\le Z\le\frac{16}{\sigma}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{10}{\sigma}\right)=0.0062$$

이므로

$$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{10}{\sigma}\right)=0.5-\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{10}{\sigma}\right)$$
$$=0.5-0.0062=0.4938$$

이때 주어진 표준정규분포표에서

$\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)=0.4938$이므로

$$\frac{10}{\sigma}=2.5,\ \sigma=4$$

따라서 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(129,\ 4^2)$을 따르고

$Z=\dfrac{X-129}{4}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(X\le 133)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{133-129}{4}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\le 1)$$
$$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$$
$$=0.5+0.3413=0.8413$$

142. 정답 ⑤

n장의 카드 중에서 서로 다른 2장의 카드를 동시에 택하는 경우의 수는 ${}_n\mathrm{C}_2$

이때 $X=b-a$이므로 X가 가질 수 있는 값은 $2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 2n-2$이다. $1\le k\le n-1$인 자연수 k에 대하여 X의 값이 $2k$가 되도록 하는 두 수 $a,\ b$의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(2,\ 2k+2)$, $(4,\ 2k+4)$, $(6,\ 2k+6)$, $\cdots$, $(2(n-k),\ 2n)$으로 그 개수는 $n-k$이다. 따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	4	6	$\cdots$	$2n-2$	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\dfrac{n-1}{{}_n\mathrm{C}_2}$	$\dfrac{n-2}{{}_n\mathrm{C}_2}$	$\dfrac{n-3}{{}_n\mathrm{C}_2}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{{}_n\mathrm{C}_2}$	1

$$\mathrm{E}(X)$$
$$=\sum_{k=1}^{n-1}\left(2k\times\frac{n-k}{{}_n\mathrm{C}_2}\right)$$
$$=2\sum_{k=1}^{n-1}\left(k\times\frac{n-k}{\frac{n(n-1)}{2}}\right)$$
$$=\frac{4}{n(n-1)}\times\left(n\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}k^2\right)$$
$$=\frac{4}{n(n-1)}\left\{n\times\frac{n(n-1)}{2}-\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right\}$$
$$=2n-\frac{2}{3}(2n-1)=\frac{2(n+1)}{3}$$

이때 $\mathrm{E}(X)=8$이므로 $\dfrac{2(n+1)}{3}=8$, $n=11$

또한

$$\mathrm{E}(X^2)=\sum_{k=1}^{10}\left(4k^2\times\frac{11-k}{{}_{11}\mathrm{C}_2}\right)$$
$$=\frac{4}{{}_{11}\mathrm{C}_2}\left(11\sum_{k=1}^{10}k^2-\sum_{k=1}^{10}k^3\right)$$
$$=\frac{4}{\frac{11\times 10}{2}}\left\{11\times\frac{10\times 11\times 21}{6}-\left(\frac{10\times 11}{2}\right)^2\right\}$$
$$=88$$

따라서 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=88-8^2=24$이므로

$n+\mathrm{V}(X)=11+24=35$

143. 정답 121

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 2 이하인 사건을 A, 3 이상인 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

주어진 시행을 4번 반복할 때, 4번째 시행 후 점 P가 원 $(x-2)^2+(y-2)^2=2$ 위에 있는 경우는 점 P가 점 $(1,\ 3)$ 또는 점 $(3,\ 1)$로 이동하는 경우이다.

(ⅰ) 4번째 시행 후 점 P가 점 $(1,\ 3)$으로 이동하는 경우 4번의 시행에서 사건 A가 1번, 사건 B가 3번 일어나야 하므로 이 경우의 확률은

$${}_4\mathrm{C}_1\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81}$$

(ii) 4번째 시행 후 점 P가 점 $(3,\ 1)$로 이동하는 경우 4번의 시행에서 사건 A가 3번, 사건 B가 1번 일어나야 하므로 이 경우의 확률은

$${}_{4}C_{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{81}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{32}{81}+\frac{8}{81}=\frac{40}{81}$$

따라서 $p=81,\ q=40$이므로

$p+q=81+40=121$

144. 정답 19

네 학생 A, B, C, D가 받는 연필의 개수를 각각 $a,\ b,\ c,\ d$라 하고, 네 학생에게 연필을 나누어 준 후 남은 연필의 개수를 e라 하면 같은 종류의 연필 $2n$개를 나누어 주므로

$a+b+c+d+e=2n$ ($a,\ b,\ c,\ d,\ e$는 음이 아닌 정수) …… ㉠

이때 조건 (가)에 의하여

$a\geq 1,\ b\geq 1,\ c\geq 1,\ d\geq 1$이고 $e\leq 2n-4$이다.

한편 조건 (다)에 의하여 $a,\ b,\ c,\ d$가 모두 홀수이거나 모두 짝수이어야 한다. 이때 $a+b+c+d$가 짝수이므로 ㉠에서 e는 0또는 짝수이다.

(i) $a,\ b,\ c,\ d$가 모두 홀수인 경우

$a=2a'+1,\ b=2b'+1,\ c=2c'+1,\ d=2d'+1,\ e=2e'$이라 하면 ㉠에서

$(2a'+1)+(2b'+1)+(2c'+1)+(2d'+1)+2e'=2n$

$a'+b'+c'+d'+e'=n-2$

($a',\ b',\ c',\ d',\ e'$은 음이 아닌 정수)

이때, $a',\ b',\ c',\ d',\ e'$의 모든 순서쌍 $(a',\ b',\ c',\ d',\ e')$의 개수는 서로 다른 5개에서 $(n-2)$개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{5}H_{n-2}={}_{5+(n-2)-1}C_{n-2}={}_{n+2}C_{n-2}$$
$$={}_{n+2}C_{(n+2)-(n-2)}={}_{n+2}C_{4}$$

그러므로 $a,\ b,\ c,\ d$가 모두 홀수인 경우의 수는 ${}_{n+2}C_{4}$이다.

(ii) $a,\ b,\ c,\ d$가 모두 짝수인 경우

$a=2a''+2,\ b=2b''+2,\ c=2c''+2,\ d=2d''+2,\ e=2e''$이라 하면 ㉠에서

$(2a''+2)+(2b''+2)+(2c''+2)+(2d''+2)+2e''=2n$

$a''+b''+c''+d''+e''=n-4$

($a'',\ b'',\ c'',\ d'',\ e''$은 음이 아닌 정수)

이때 $a'',\ b'',\ c'',\ d'',\ e''$의 모든 순서쌍 $(a'',\ b'',\ c'',\ d'',\ e'')$의 개수는 서로 다른 5개에서 $(n-4)$개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{5}H_{n-4}={}_{5+(n-4)-1}C_{n-4}={}_{n}C_{n-4}$$
$$={}_{n}C_{n-(n-4)}={}_{n}C_{4}$$

그러므로 $a,\ b,\ c,\ d$가 모두 짝수인 경우의 수는 ${}_{n}C_{4}$이다.

(i), (ii)에 의하여

$$a_n={}_{n+2}C_{4}+{}_{n}C_{4}$$
$$=\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{4!}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$
$$=\frac{n(n-1)}{4!}\{(n+2)(n+1)+(n-2)(n-3)\}$$
$$=\frac{2n(n-1)(n^2-n+4)}{4!}$$
$$=\frac{n(n-1)(n^2-n+4)}{12}$$

이므로

$$\sum_{n=4}^{10}\frac{n^2-n+4}{a_n}$$
$$=\sum_{n=4}^{10}\frac{12}{n(n-1)}$$
$$=12\sum_{n=4}^{10}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$
$$=12\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)\right\}$$
$$=12\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{10}\right)=\frac{14}{5}$$

따라서 $p=5,\ q=14$이므로 $p+q=5+14=19$

145. 정답 ④

(i) 0이 포함된 경우

0이 아닌 다른 숫자 1개를 택하는 경우의 수는

${}_{9}C_{1}=9$

ⓐ 0이 1번 사용된 경우, 0이 들어갈 자리를 정하는 경우의 수는

${}_{3}C_{1}=3$

ⓑ 0이 2번 사용된 경우, 0이 들어갈 자리를 정하는 경우의 수는

${}_{3}C_{2}=3$

ⓒ 0이 3번 사용된 경우, 0이 들어갈 자리를 정하는 경우의 수는

${}_{3}C_{3}=1$

그러므로 이 경우의 수는

$9\times(3+3+1)=63$

(ii) 0이 포함되지 않은 경우

0을 제외한 9개의 숫자 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_{9}C_{2}=36$

ⓐ 택한 2개의 숫자 중에서 1개가 3번 사용된 경우의 수는

$$2\times\frac{4!}{3!}=8$$

ⓑ 택한 2개의 숫자가 2번씩 사용된 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!\times 2!}=6$$

그러므로 이 경우의 수는

$36\times(8+6)=504$

(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키는 자연수의 개수는

$63+504=567$

다른 풀이

(ⅰ) 0이 포함된 경우

$_{9}C_{1}\times({}_{2}\Pi_{3}-1)=63$

(ⅱ) 0이 포함되지 않은 경우

$_{9}C_{2}\times({}_{2}\Pi_{4}-2)=504$

(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키는 자연수의 개수는

$63+504=567$

146. 정답 ③

$c=3b+c'$ (c'은 음이 아닌 정수)라 하면

$b+c+d+e=4b+c'+d+e$

(ⅰ) $a=1$일 때

$4b+c'+d+e=14$

ⓐ $b=0$일 때, $c'+d+e=14$이므로 조건을 만족시키는 모든 순서쌍의 개수는

$_{3}H_{14}={}_{16}C_{14}={}_{16}C_{2}=120$

ⓑ $b=1$일 때, $c'+d+e=10$이므로 조건을 만족시키는 모든 순서쌍의 개수는

$_{3}H_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_{2}=66$

ⓒ $b=2$일 때, $c'+d+e=6$이므로 조건을 만족시키는 모든 순서쌍의 개수는

$_{3}H_{6}={}_{8}C_{6}={}_{8}C_{2}=28$

ⓓ $b=3$일 때, $c'+d+e=2$이므로 조건을 만족시키는 모든 순서쌍의 개수는

$_{3}H_{2}={}_{4}C_{2}=6$

그러므로 $a=1$일 때 조건을 만족시키는 모든 순서쌍의 개수는

$120+66+28+6=220$

(ⅱ) $a=2$일 때

$4b+c'+d+e=7$

ⓐ $b=0$일 때, $c'+d+e=7$이므로 조건을 만족시키는 모든 순서쌍의 개수는

$_{3}H_{7}={}_{9}C_{7}={}_{9}C_{2}=36$

ⓑ $b=1$일 때, $c'+d+e=3$이므로 조건을 만족시키는 모든 순서쌍의 개수는

$_{3}H_{3}={}_{5}C_{3}={}_{5}C_{2}=10$

그러므로 $a=2$일 때 조건을 만족시키는 모든 순서쌍의 개수는

$36+10=46$

(ⅲ) $a=7$일 때

$4b+c'+d+e=2$

$b=0$, $c'+d+e=2$이므로 조건을 만족시키는 모든 순서쌍의 개수는

$_{3}H_{2}={}_{4}C_{2}=6$

(ⅳ) $a=14$일 때

$4b+c'+d+e=1$

$b=0$, $c'+d+e=1$이므로 조건을 만족시키는 모든 순서쌍의 개수는

$_{3}H_{1}={}_{3}C_{1}=3$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 모든 순서쌍의 개수는

$220+46+6+3=275$

147. 정답 15

확률변수 X가 갖는 값은 2, 3, 4, 5이다.

(ⅰ) $X=2$인 경우는 주사위에서 6의 약수의 눈이 나오고 주머니 A에서 2가 적혀 있는 카드 한 장을 꺼내는 경우와 주사위에서 6의 약수가 아닌 눈이 나오고 주머니 B에서 1이 적혀 있는 카드 두 장을 꺼내는 경우이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{18}$

(ⅱ) $X=3$인 경우는 주사위에서 6의 약수의 눈이 나오고 주머니 A에서 3이 적혀 있는 카드 한 장을 꺼내는 경우와 주사위에서 6의 약수가 아닌 눈이 나오고 주머니 B에서 1이 적혀 있는 카드와 2가 적혀 있는 카드를 각각 한 장씩 꺼내는 경우이므로

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{6}=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$

(ⅲ) $X=4$인 경우는 주사위에서 6의 약수의 눈이 나오고 주머니 A에서 4가 적혀 있는 카드 한 장을 꺼내는 경우와 주사위에서 6의 약수가 아닌 눈이 나오고 주머니 B에서 1이 적혀 있는 카드와 3이 적혀 잇는 카드를 각각 한 장씩 꺼내는 경우이므로

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{6}=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$

(ⅳ) $X=5$인 경우는 주사위에서 6의 약수가 아닌 눈이 나오고 주머니 B에서 2가 적혀 있는 카드와 3이 적혀 있는 카드를 각각 한 장씩 꺼내는 경우이므로

$\mathrm{P}(X=5)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{18}$	1

따라서

$$\mathrm{E}(X)=2\times\frac{5}{18}+3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{3}+5\times\frac{1}{18}$$
$$=\frac{10+18+24+5}{18}$$
$$=\frac{57}{18}=\frac{19}{6}$$

이므로

$\mathrm{E}(6X-4)=6\mathrm{E}(X)-4$

$=6\times\frac{19}{6}-4=15$

148. 정답 7

5번의 시행 중 빨간 공, 파란 공, 노란 공이 나온 횟수를 각각 a, b, c라 하면

$a+b+c=5$

이고, 공깃돌이 이동한 거리는 $a+2b+3c$이다.

5번의 시행 후에 공깃돌이 다시 점 A에 놓여 있으려면 $a+2b+3c$의 값이 5의 배수이어야 한다.

(i) $a+2b+3c=5$일 때

$a=5$, $b=0$, $c=0$인 경우뿐이고 이 경우의 확률은

$\left(\frac{1}{2}\right)^5$

(ii) $a+2b+3c=10$일 때

ⓐ $a=0$, $b=5$, $c=0$인 경우

이 경우의 확률은

$\left(\frac{1}{3}\right)^5$

ⓑ $a=1$, $b=3$, $c=1$인 경우

이 경우의 수는 $\frac{5!}{3!}=20$이므로 이 경우의 확률은

$20\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{1}{6}$

ⓒ $a=2$, $b=1$, $c=2$인 경우

이 경우의 수는 $\frac{5!}{2!\times2!}=30$이므로 이 경우의 확률은

$30\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2$

(iii) $a+2b+3c=15$일 때

$a=0$, $b=0$, $c=5$인 경우뿐이고, 이 경우의 확률은

$\left(\frac{1}{6}\right)^5$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{3}\right)^5+20\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{1}{6}+30\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^5$$

$$=\frac{3^5+2^5+20\times3\times2^3+30\times3^2\times2+1}{6^5}=\frac{1}{6}$$

따라서 $p=6$, $q=1$이므로

$p+q=6+1=7$

149. 정답 ③

표본의 크기가 n이고 표본평균이 $\overline{x}$일 때, 신뢰도 95%로 추정한 모평균 m의 신뢰구간은

$$\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이때 $73.8\le m\le74.2$이므로

$$\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=73.8,\ \ \overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=74.2$$

위의 두 식을 더하면 $2\overline{x}=148$, $\overline{x}=74$

또한 $n=196\sigma$이므로

$74+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{196\sigma}}=74.2$에서 $1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{196\sigma}}=0.2$

따라서 $\sqrt{\sigma}=\frac{10}{7}$

150. 정답 ②

3번의 시행에서 A가 사탕을 4개 받는 경우를 나누면 다음과 같다.

(i) a가 적힌 공이 두 번 나오고, b가 적힌 공이 한 번 나온 경우

$\frac{3!}{2!}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^1=\frac{3}{6^2}=\frac{1}{72}$

이 경우 B가 받는 사탕의 개수는 2이다.

(ii) a가 적힌 공이 두 번 나오고, 0이 적힌 공이 한 번 나온 경우

$\frac{3!}{2!}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^1=\frac{1}{72}$

이 경우 B가 받는 사탕의 개수가 0이다.

(iii) a가 적힌 공이 한 번 나오고, 1이 적힌 공이 두 번 나온 경우

$\frac{3!}{2!}\times\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{8}$

이 경우 B가 받는 사탕의 개수는 2이다.

(i), (ii), (iii)에서 학생 A가 받은 사탕의 개수가 4인 사건을 X, 학생 B가 받은 사탕의 개수가 0인 사건을 Y라 하면 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(Y\mid X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}$$

$$=\frac{\frac{1}{72}}{\frac{1}{72}+\frac{1}{72}+\frac{1}{8}}=\frac{1}{11}$$

151. 정답 378

자연수 d의 값에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) $d=1$인 경우

$a+b+c=9$이므로 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 방정식 $a+b+c=9$를 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수와 같다.

음이 아닌 세 정수 a', b', c'에 대하여

$a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$로 놓으면

$a'+b'+c'=6$

이를 만족시키는 음이 아닌 세 정수 a', b', c'의 모든 순서쌍 $(a',\ b',\ c')$의 개수는

${}_3\mathrm{H}_6={}_{3+6-1}\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_2=28$

이때 $d<e$이므로 e가 가질 수 있는 값의 경우의 수는 6이다.

그러므로 조건을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는

$28\times6=168$

(ii) $d=2$인 경우

(i)과 같은 방법으로 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

${}_3\mathrm{H}_5={}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=21$

e가 기질 수 있는 값의 경우의 수는 5이므로 조건을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는

$21\times5=105$

(iii) $d=3$인 경우

(i)과 같은 방법으로 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$

e가 기질 수 있는 값의 경우의 수는 4이므로 조건을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는

$15\times4=60$

(i), (ii), (iii)을 통해 $d=4,\ d=5,\ d=6$인 경우 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는 각각

${}_5\mathrm{C}_3\times3=30,\ {}_4\mathrm{C}_2\times2=12,\ {}_3\mathrm{C}_1\times1=3$이므로 구하는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는

$168+105+60+30+12+3=378$

152. 정답 150

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(t,\ t)$를 따르므로 $Z=\dfrac{X-t}{\sqrt{t}}$로 놓으면

확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\le1.6t)=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{1.6t-t}{\sqrt{t}}\right)=\mathrm{P}(Z\le0.6\sqrt{t})$

$0.726\le\mathrm{P}(Z\le0.6\sqrt{t})\le0.885$에서

$0.226\le\mathrm{P}(0\le Z\le0.6\sqrt{t})\le0.385$이므로

주어진 표준정규분포표에서

$0.6\le0.6\sqrt{t}\le1.2$

$1\le\sqrt{t}\le2$ …… ㉠

$\mathrm{P}(0\le X\le t+\sqrt{t})=\mathrm{P}\left(\dfrac{0-t}{\sqrt{t}}\le Z\le\dfrac{(t+\sqrt{t}-t)}{\sqrt{t}}\right)$

$=\mathrm{P}(-\sqrt{t}\le Z\le1)$

㉠ 에 의하여 최솟값은 $\sqrt{t}=1$일 때이므로 $m=0.682$

최댓값은 $\sqrt{t}=2$일 때이므로 $M=0.818$

따라서 $100\times(m+M)=150$

153. 정답 ①

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 2^2)$을 따르므로 $Z_1=\dfrac{X-10}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z_1은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르고,

확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z_2=\dfrac{Y-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z_2는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\ge12)=\mathrm{P}(Y\le12)$에서

$\mathrm{P}(X\ge12)=\mathrm{P}\left(Z_1\ge\dfrac{12-10}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(Z_1\ge1)$

$\mathrm{P}(Y\le12)=\mathrm{P}\left(Z_2\le\dfrac{12-m}{\sigma}\right)$

이므로

$\mathrm{P}(Z_1\ge1)=\mathrm{P}\left(Z_2\le\dfrac{12-m}{\sigma}\right)$

확률변수 $Z_1,\ Z_2$가 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\dfrac{12-m}{\sigma}=-1$

$m-\sigma=12$ …… ㉠

$\mathrm{P}(6\le X\le10)+\mathrm{P}(Y\ge21)=\dfrac{1}{2}$에서

$\mathrm{P}(6\le X\le10)=\mathrm{P}\left(\dfrac{6-10}{2}\le Z_1\le\dfrac{10-10}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z_1\le0)$

$\mathrm{P}(Y\ge21)=\mathrm{P}\left(Z_2\ge\dfrac{21-m}{\sigma}\right)$

이므로

$\mathrm{P}(-2\le Z_1\le0)+\mathrm{P}\left(Z_2\ge\dfrac{21-m}{\sigma}\right)=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{21-m}{\sigma}=2$

$m+2\sigma=21$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$m=15,\ \sigma=3$

따라서

$\mathrm{P}\left(\dfrac{27}{2}\le Y\le21\right)=\mathrm{P}\left(\dfrac{13.5-15}{3}\le Z_2\le\dfrac{21-15}{3}\right)$

$=\mathrm{P}(-0.5\le Z_2\le2)$

$=\mathrm{P}(-0.5\le Z_2\le0)+\mathrm{P}(0\le Z_2\le2)$

$=\mathrm{P}(0\le Z_2\le0.5)+\mathrm{P}(0\le Z_2\le2)$

$=0.1915+0.4772$

$=0.6687$

154. 정답 ④

이 시행을 한 번 한 후 꺼낸 공에 적힌 모든 수의 합이 짝수인 사건을 E, 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 6의 약수인 사건을 F라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(F|E)=\dfrac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(E)}$이다.

(i) 주사위를 한 번 던졌을 때, 나온 눈의 수가 6의 약수인 경우

주사위를 한 번 던졌을 때 6의 약수의 눈이 나올 확률은

$\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

주머니 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때 꺼낸 공에

적힌 모든 수의 합이 짝수이려면 1, 3, 5가 적힌 3개의 공 중에서 2개를 꺼내거나 2, 4가 적힌 2개의 공을 모두 꺼내야 하므로 이 경우의 확률은

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_2+{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{2}{5}$$

따라서 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 6의 약수이고, 꺼낸 공에 적힌 모든 수의 합이 짝수일 확률은

$$\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$$

(ii) 주사위를 한 번 던졌을 때, 나온 눈의 수가 6의 약수가 아닌 경우

주사위를 한 번 던졌을 때 6의 약수가 아닌 눈이 나올 확률은

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

주머니 B에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때 꺼낸 공에 적힌 모든 수의 합이 짝수이려면 1, 3, 5가 적힌 3개의 공 중에서 2개와 2, 4, 6이 적힌 3개의 공 중에서 1개를 꺼내거나 2, 4, 6이 적힌 3개의 공을 모두 꺼내야 하므로 이 경우의 확률은

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{1}{2}$$

따라서 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 6의 약수가 아니고, 꺼낸 공에 적힌 모든 수의 합이 짝수일 확률은

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

(i), (ii)에서

$$\mathrm{P}(E)=\frac{4}{15}+\frac{1}{6}=\frac{13}{30},\ \mathrm{P}(E\cap F)=\frac{4}{15}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(F|E)=\frac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{4}{15}}{\frac{13}{30}}=\frac{8}{13}$$

155. 정답 207

조건 (가)에 의하여

$f(5)=3$ 또는 $f(5)=6$

(i) $f(5)=3$일 때

조건 (나)에서

$f(1)\le f(3)\le 3$

$f(1)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

1, 2, 3에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$_3\mathrm{H}_2={}_{3+2-1}\mathrm{C}_2={}_4\mathrm{C}_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

조건 (다)에서

$f(2)\times f(4)\times f(6)=3$

$f(2)$, $f(4)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는

1, 1, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{3!}{2!}=3$$

따라서 $f(5)=3$일 때 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$6\times3=18$

(ii) $f(5)=6$일 때

조건 (나)에서

$f(1)\le f(3)\le 6$

$f(1)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

1, 2, 3, 4, 5, 6에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$_6\mathrm{H}_2={}_{6+2-1}\mathrm{C}_2={}_7\mathrm{C}_2=\frac{7\times6}{2\times1}=21$$

조건 (다)에서

$f(2)\times f(4)\times f(6)=6$

$f(2)$, $f(4)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는

1, 1, 6 또는 1, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{3!}{2!}+3!=9$$

따라서 $f(5)=6$일 때 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$21\times9=189$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$18+189=207$

156. 정답 20

상자에서 한 개의 카드를 꺼낼 때 나온 카드에 적혀 있는 수를 확률변수 Y라 하면

$$\mathrm{P}(Y=1)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{P}(Y=2)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$\mathrm{P}(Y=3)=\frac{1}{6}$$

확률변수 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$$\mathrm{E}(Y)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}=\frac{5}{3}$$

$$\mathrm{V}(Y)=1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{6}-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

X는 이 상자에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한

표본평균이므로

$$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(Y)}{n}=\frac{5}{9n}$$

이때 $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{5}{18}$이므로

$\frac{5}{9n}=\frac{5}{18}$, 즉 $n=2$

$n=2$이므로 $\overline{X}$가 가질 수 있는 값은 1, $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{5}{2}$, 3이다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\frac{n+1}{2}\leq\overline{X}\leq\frac{n+2}{2}\right)&=\mathrm{P}\left(\frac{3}{2}\leq\overline{X}\leq 2\right)\\&=\mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{3}{2}\right)+\mathrm{P}(\overline{X}=2)\end{aligned}$$

$\overline{X}=\frac{3}{2}$이려면 꺼낸 카드에 적힌 두 수가 1, 2 또는 2, 1이므로

$$\mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

$\overline{X}=2$이려면 꺼낸 카드에 적힌 두 수가 1, 3 또는 2, 2 또는 3, 1이므로

$$\mathrm{P}(\overline{X}=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{18}$$

이때

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\frac{n+1}{2}\leq\overline{X}\leq\frac{n+2}{2}\right)&=\mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{3}{2}\right)+\mathrm{P}(\overline{X}=2)\\&=\frac{1}{3}+\frac{5}{18}\\&=\frac{11}{18}\end{aligned}$$

이므로

$$n\times\mathrm{P}\left(\frac{n+1}{2}\leq\overline{X}\leq\frac{n+2}{2}\right)=2\times\frac{11}{18}=\frac{11}{9}$$

따라서 $p=9$, $q=11$이므로

$p+q=9+11=20$

157. 정답 ⑤

함수 $f(x)$가 확률변수 X의 확률밀도함수이므로 확률밀도함수의 정의에 의하여 $\int_{-2}^{4}f(x)\,dx=1$

조건에서 $\int_{-2}^{0}f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{4}f(x)\,dx$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{4}f(x)\,dx&=\int_{-2}^{0}f(x)\,dx+\int_{0}^{4}f(x)\,dx\\&=\frac{1}{2}\int_{0}^{4}f(x)\,dx+\int_{0}^{4}f(x)\,dx\\&=\frac{3}{2}\int_{0}^{4}f(x)\,dx=1\end{aligned}$$

그러므로 $\int_{0}^{4}f(x)\,dx=\frac{2}{3}$, $\int_{-2}^{0}f(x)\,dx=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

이때

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{0}f(x)\,dx&=\int_{-2}^{0}ax(x+2)\,dx=a\int_{-2}^{0}(x^2+2x)\,dx\\&=a\left[\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{-2}^{0}\\&=a\left\{0-\left(-\frac{8}{3}+4\right)\right\}=-\frac{4}{3}a\end{aligned}$$

이므로 $-\frac{4}{3}a=\frac{1}{3}$에서 $a=-\frac{1}{4}$ ······ ㉠

$$\begin{aligned}\int_{0}^{4}f(x)\,dx&=\int_{0}^{4}bx(x-4)\,dx=b\int_{0}^{4}(x^2-4x)\,dx\\&=b\left[\frac{x^3}{3}-2x^2\right]_{0}^{4}\\&=b\left\{\left(\frac{64}{3}-32\right)-0\right\}=-\frac{32}{3}b\end{aligned}$$

이므로 $-\frac{32}{3}b=\frac{2}{3}$에서 $b=-\frac{1}{16}$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{4}x(x+2) & (-2\leq x\leq 0)\\-\frac{1}{16}x(x-4) & (0<x\leq 4)\end{cases}$$

함수 $g(x)$도 확률변수 Y의 확률밀도함수이므로 확률밀도함수의 정의에 의하여

$$\int_{-2}^{4}g(x)\,dx=1$$

$-2\leq x\leq 4$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=k-\frac{1}{2}f(x)$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{4}g(x)\,dx&=\int_{-2}^{4}\left\{k-\frac{1}{2}f(x)\right\}dx\\&=\int_{-2}^{4}k\,dx-\frac{1}{2}\int_{-2}^{4}f(x)\,dx\\&=\Big[kx\Big]_{-2}^{4}-\frac{1}{2}\times1\\&=\{4k-(-2k)\}-\frac{1}{2}=6k-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

즉, $6k-\frac{1}{2}=1$이므로 $6k=\frac{3}{2}$, $k=\frac{1}{4}$

그러므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(-4k\leq Y\leq 4k)=\mathrm{P}(-1\leq Y\leq 1)&=\int_{-1}^{1}g(x)\,dx\\&=\int_{-1}^{1}\left\{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}f(x)\right\}dx\\&=\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}\,dx-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\\&=\left[\frac{1}{4}x\right]_{-1}^{1}-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\\&=\frac{1}{4}\{1-(-1)\}-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$$

이때

$$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}f(x)\,dx+\int_{0}^{1}f(x)\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}\left\{-\frac{1}{4}x(x+2)\right\}dx+\int_{0}^{1}\left\{-\frac{1}{16}x(x-4)\right\}dx$$
$$=-\frac{1}{4}\int_{-1}^{0}(x^2+2x)\,dx-\frac{1}{16}\int_{0}^{1}(x^2-4x)\,dx$$
$$=-\frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{-1}^{0}-\frac{1}{16}\left[\frac{x^3}{3}-2x^2\right]_{0}^{1}$$
$$=-\frac{1}{4}\left\{0-\left(-\frac{1}{3}+1\right)\right\}-\frac{1}{16}\left\{\left(\frac{1}{3}-2\right)-0\right\}$$
$$=\left(-\frac{1}{4}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{16}\times\left(-\frac{5}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{5}{48}=\frac{13}{48}$$

따라서

$$\mathrm{P}(-4k\le Y\le 4k)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{13}{48}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{13}{96}$$
$$=\frac{35}{96}$$

158. 정답 ②

꺼낸 공에 적힌 수가 같은 것이 있는 사건을 A, 꺼낸 공이 모두 짝수이거나 모두 홀수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.
주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

$${}_{10}\mathrm{C}_4=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$$

꺼낸 공에 적힌 수가 같은 것이 있는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 꺼낸 4개의 공 중 4가 적힌 공 두 개가 포함되어 있는 경우
4가 적힌 공 두 개를 제외한 나머지 8개의 공 중 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_{8}\mathrm{C}_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$$

(ⅱ) 꺼낸 4개의 공 중 5가 적힌 공 두 개가 포함되어 있는 경우
5가 적힌 공 두 개를 제외한 나머지 8개의 공 중 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_{8}\mathrm{C}_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$$

(ⅲ) 꺼낸 4개의 공 중 4가 적힌 공이 두 개, 5가 적힌 공이 두 개인 경우
4가 적힌 공 두 개, 5가 적힌 공 두 개를 택하는 경우의 수는 1

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$$\mathrm{P}(A)=\frac{28+28-1}{210}=\frac{55}{210}\qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

한편, 4가 적힌 공 두 개를 꺼냈을 때 꺼낸 공이 모두 짝수이거나 모두 홀수인 경우의 수는 남아 있는 8개의 공 중 짝수만 2개를 꺼내는 경우, 즉 남아 있는 빨간 공에 적혀 있는 수 1, 2, 3, 5와 남아 있는 파란 공에 적혀 있는 수 5, 6, 7, 8 중 짝수를 2개 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_{3}\mathrm{C}_2={}_{3}\mathrm{C}_1=3$$

5가 적힌 공 두 개를 꺼냈을 때 꺼낸 공이 모두 짝수이거나 모두 홀수인 경우의 수는 남아 있는 8개의 공 중 홀수만 2개를 꺼내는 경우, 즉 남아 있는 빨간 공에 적혀 있는 수 1, 2, 3, 4와 남아 있는 파란 공에 적혀 있는 수 4, 6, 7, 8 중 홀수를 2개 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_{3}\mathrm{C}_2={}_{3}\mathrm{C}_1=3$$

그러므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3+3}{210}=\frac{6}{210}\qquad\cdots\cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡에서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$
$$=\frac{\frac{6}{210}}{\frac{55}{210}}=\frac{6}{55}$$

159. 정답 32

주머니에서 임의로 카드를 한 장씩 꺼낼 때, 꺼낸 카드에 적힌 수가 1, 2, 3일 확률은 각각 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$이다.
이때 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4이므로 각각의 경우 확률을 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) $X=2$인 경우

ⓐ 첫 번째 꺼낸 카드에 적힌 수가 1이고 두 번째 꺼낸 카드에 적힌 수가 3인 경우

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$$

ⓑ 첫 번째 꺼낸 카드에 적힌 수가 2이고 두 번째 꺼낸 카드에 적힌 수가 2 이상인 경우

$$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}$$

ⓒ 첫 번째 꺼낸 카드에 적힌 수가 3이고 두 번째 꺼낸 카드에 적힌 수가 1 이상인 경우

$$\frac{1}{6}\times1=\frac{1}{6}$$

ⓐ, ⓑ, ⓒ에서

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$$

(ⅱ) $X=3$인 경우

ⓓ 카드를 두 번 꺼낼 때까지 꺼낸 카드에 적힌 모든 수의 합이 2이고 세 번째 꺼낸 카드에 적힌 수가 2 이상인 경우, 즉 첫 번째와 두 번째 꺼낸 카드에 적힌 수가 모두 1이고 세 번째 꺼낸 카드에 적힌 수가 2 이상인 경우

$${}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{8}$$

ⓔ 카드를 두 번 꺼낼 때까지 꺼낸 카드에 적힌 모든 수의 합이 3이고 세 번째 꺼낸 카드에 적힌 수가 1 이상인 경우, 즉 첫 번째와 두 번째 꺼낸 카드에 적힌 수가 1이 한 개, 2가 한 개이고 세 번째 꺼낸 카드에 적힌 수가 1 이상인 겨우

$$\left({}_2\mathrm{C}_1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)\times 1=\frac{1}{3}$$

ⓓ, ⓔ에서

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{8}+\frac{1}{3}=\frac{11}{24}$$

(ⅲ) $X=4$인 경우

카드를 세 번 꺼낼 때까지 꺼낸 카드에 적힌 모든 수의 합이 3이고 네 번째 꺼낸 카드에 적힌 수가 1 이상인 경우, 즉 첫 번째, 두 번째, 세 번째 꺼낸 카드에 적힌 수가 모두 1이고 네 번째 꺼낸 카드에 적혀 있는 수가 1 이상인 경우

$$\mathrm{P}(X=4)={}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\times 1=\frac{1}{8}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{8}$	1

따라서

$$\mathrm{E}(X)=2\times\frac{5}{12}+3\times\frac{11}{24}+4\times\frac{1}{8}=\frac{65}{24}$$

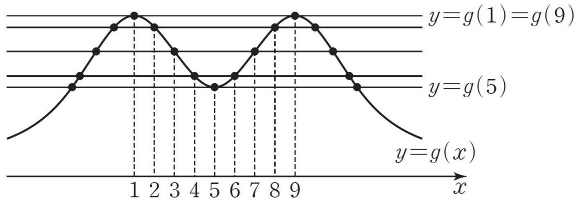
이므로

$$\mathrm{E}\left(12X-\frac{1}{2}\right)=12\mathrm{E}(X)-\frac{1}{2}$$
$$=12\times\frac{65}{24}-\frac{1}{2}=32$$

160. 정답 4

함수 $y=f(10-x)=f(-(x-10))$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 10만큼 평행이동한 것이므로 자연수 m의 값에 따른 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같고, 자연수 n에 대하여 x에 대한 방정식 $g(x)=g(n)$의 서로 다른 실근의 개수 $h_m(n)$을 구해보면

(ⅰ) $m=1$일 때



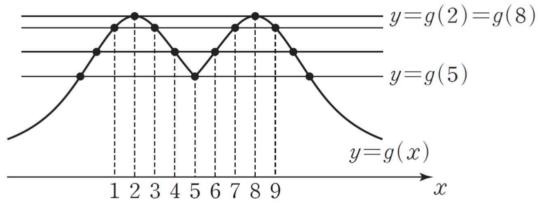
$h_1(1)=h_1(9)=2$,

$h_2(2)=h_1(3)=h_1(4)=h_1(6)=h_1(7)=h_1(8)=4$,

$h_1(5)=3$이므로

$$\sum_{n=1}^{9}h_1(n)=2\times 2+4\times 6+3\times 1=31$$

(ⅱ) $m=2$일 때

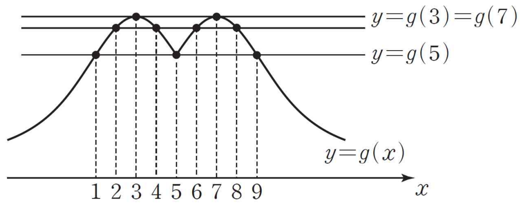


$h_2(1)=h_2(3)=h_2(7)=h_2(9)=4$,

$h_2(2)=h_2(8)=2$, $h_2(4)=h_2(6)=4$, $h_2(5)=3$이므로

$$\sum_{n=1}^{9}h_2(n)=4\times 4+2\times 2+4\times 2+3\times 1=31$$

(ⅲ) $m=3$일 때

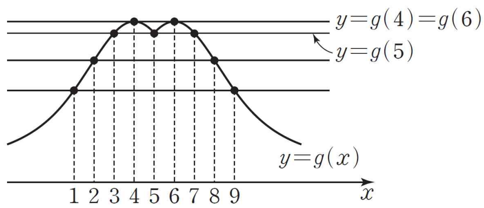


$h_3(1)=h_3(5)=h_3(9)=3$,

$h_3(2)=h_3(4)=h_3(6)=h_3(8)=4$, $h_3(3)=h_3(7)=2$이므로

$$\sum_{n=1}^{9}h_3(n)=3\times 3+4\times 4+2\times 2=29$$

(ⅳ) $m=4$일 때

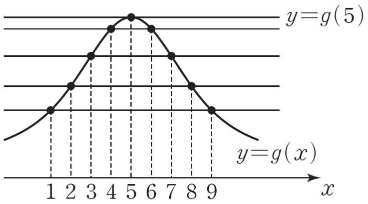


$h_4(1)=h_4(2)=h_4(8)=h_4(9)=2$,

$h_4(3)=h_4(5)=h_4(7)=3$, $h_4(4)=h_4(6)=2$이므로

$$\sum_{n=1}^{9}h_4(n)=2\times 4+3\times 3+2\times 2=21$$

(ⅴ) $m=5$일 때

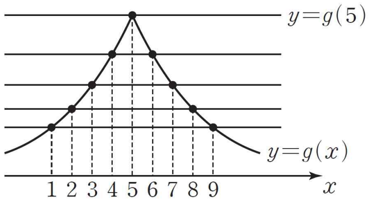


$h_5(1)=h_5(2)=h_5(3)=h_5(4)=h_5(6)=h_5(7)=h_5(8)=h_5(9)=2$,

$h_5(5)=1$이므로

$\sum_{n=1}^{9} h_5(n)=2\times8+1\times1=17$

(vi) $m>5$일 때



$h_m(1)=h_m(2)=h_m(3)=h_m(4)=h_m(6)=h_m(7)=h_m(8)$

$=h_m(9)=2$,

$h_m(5)=1$이므로

$\sum_{n=1}^{9} h_m(n)=2\times8+1\times1=17$

따라서 (i)~(vi)에서 $\sum_{n=1}^{9} h_m(n)=21$을 만족시키는 자연수 m의 값은 4이다.

(미적분)

161. 정답 ⑤
여학생 3명을 배열하는 경우의 수는 $3!$
A의 양 옆과 B의 양 옆에 모두 여학생이 앉으므로 여학생 사이사이에 A, B를 배열하는 경우의 수는 $2!$
여학생 3명과 A, B를 한 묶음으로 보고 A, B를 제외한 남학생 3명과 이 묶음을 원 모양으로 배열하는 경우의 수는 $(4-1)!$
따라서 구하는 경우의 수는
$3!\times2!\times(4-1)!=6\times2\times6=72$

162. 정답 ④
이 시행을 2번 반복하여 얻은 점수의 합이 4인 사건을 A, 첫 번째 시행에서 얻은 점수와 두 번째 시행에서 얻은 점수가 같은 사건ㅇㄹ B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.
이 시행을 한 번 하여 얻은 점수를 x라 하면
(i) $x=0$인 경우

$a=1$, $b=1$이므로 $\mathrm{P}(x=0)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{12}$

(ii) $x=1$인 경우

$a=3$, $b=2$이므로 $\mathrm{P}(x=1)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{6}=\frac{3}{8}$

(iii) $x=2$인 경우
$a=1$, $b=2$ 또는 $a=3$, $b=1$이므로
$$\mathrm{P}(x=2)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{6}+\frac{3}{4}\times\frac{2}{6}=\frac{3}{8}$$
(iv) $x=4$인 경우
$a=1$, $b=4$ 또는 $a=3$, $b=4$이므로
$$\mathrm{P}(x=4)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{6}$$
(i)~(iv)에서 이 시행을 2번 반복하여 얻은 점수의 합이 4인 경우는
첫 번째 시행에서 얻은 점수가 0이고 두 번째 시행에서 얻은 점수가 4이거나
첫 번째 시행에서 얻은 점수가 2이고 두 번째 시행에서 얻은 점수가 2이거나
첫 번째 시행에서 얻은 점수가 4이고 두 번째 시행에서 얻은 점수가 0이므로
$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{12}\times\frac{1}{6}+\frac{3}{8}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{12}=\frac{97}{576}$$
사건 $A\cap B$는 첫 번째 시행에서 얻은 점수가 2이고 두 번째 시행에서 얻은 점수가 2인 사건이므로
$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{8}\times\frac{3}{8}=\frac{9}{64}$$
따라서 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{9}{64}}{\frac{97}{576}}=\frac{81}{97}$$

163. 정답 66
조건 (나)에서 $f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)$
$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)\le5+5+5+5$를 만족시키는 함수 f의 개수는 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_5\mathrm{H}_4$
$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=20$인 경우는
$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=5$뿐이므로 이때의 함수 f의 개수는 1
$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=19$인 경우는
$f(1)=4$, $f(2)=f(3)=f(4)=5$뿐이므로 이때의 함수 f의 개수는 1
$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=18$인 경우는
$f(1)=3$, $f(2)=f(3)=f(4)=5$ 또는
$f(1)=f(2)=4$, $f(3)=f(4)=5$이므로 이때의 함수 f의 개수는 2
따라서 구하는 함수 f의 개수는
${}_5\mathrm{H}_4-(1+1+2)={}_8\mathrm{C}_4-4=70-4=66$

164. 정답 669
$f(t)=\mathrm{P}(X\le t)+\mathrm{P}(Y\ge t)$
$$=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{t-m}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{t-2m}{\sigma}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{t-2m}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(\frac{t-2m}{\sigma}\le Z\le\frac{t-m}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{t-2m}{\sigma}\right)$$

$=1+\mathrm{P}\left(\frac{t-2m}{\sigma}\le Z\le \frac{t-m}{\sigma}\right)$

함수 $f(t)$는 $\frac{t-m}{\sigma}=-\frac{t-2m}{\sigma}$, 즉 $t=\frac{3}{2}m$일 때 최댓값을 가지므로

$\frac{3}{2}m=9$, $m=6$

함수 $f(t)$가 $t=9$에서 최댓값 1.866을 가지므로

$f(9)=1+\mathrm{P}\left(-\frac{3}{\sigma}\le Z\le \frac{3}{\sigma}\right)=1.866$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{3}{\sigma}\right)=0.433$

주어진 표준정규분포표에 의하여 $\frac{3}{\sigma}=1.5$이므로 $\sigma=2$

따라서

$$\begin{aligned}1000\times\mathrm{P}(8\le Y\le 13)&=1000\times\mathrm{P}\left(\frac{8-12}{2}\le Z\le\frac{13-12}{2}\right)\\&=1000\times\mathrm{P}(-2\le Z\le 0.5)\\&=1000\times\{\mathrm{P}(0\le Z\le 2)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)\}\\&=1000\times(0.477+0.192)=669\end{aligned}$$

165. 정답 ⑤

조건 (가)에서 남학생의 수가 여학생의 수보다 크거나 같아야 하므로 남학생의 수는 3명 또는 4명인 경우이다.

(ⅰ) 남학생 3명이 선택된 경우

남학생 4명 중에서 3명을 선택하고, 여학생 5명 중에서 3명을 선택한다. 이후 남학생 3명을 먼저 탁자에 앉히고 남학생 사이사이에 여학생 3명을 앉히면 되므로 이때 경우의 수는

$_4C_3\times{}_5C_3\times(3-1)!\times{}_3P_3=4\times10\times2\times6=480$

(ⅱ) 남학생 4명이 선택된 경우

남학생 4명 중에서 4명을 선택하고, 여학생 5명 중에서 2명을 선택한다. 이후 남학생 4명을 먼저 탁자에 앉히고 남학생 사이사이에 여학생 2명을 앉히면 되므로 이때 경우의 수는

$_4C_4\times{}_5C_2\times(4-1)!\times{}_4P_2=1\times10\times6\times12=720$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$480+720=1200$

166. 정답 ①

두 개의 주사위를 동시에 던져서 나온 눈의 수의 합이 방정식 $(x-3)(x-5)(x-7)=0$을 만족시키려면 두 수의 합이 3, 5, 7 중 1개 이어야 한다.

두 개의 주사위에서 나온 눈의 수를 각각 a, b라 하면 두 수의 합이 3, 5, 7인 경우를 a, b의 순서쌍 (a, b)로 나타내면

(ⅰ) 두 수의 합이 3인 경우

$(1, 2)$, $(2, 1)$의 2가지

(ⅱ) 두 수의 합이 5인 경우

$(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$의 4가지

(ⅲ) 두 수의 합이 7인 경우

$(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$, $(6, 1)$의 6가지

두 개의 주사위를 동시에 던졌을 때 나오는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$이므로 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나온 눈의 수의 합이 방정식

$(x-3)(x-5)(x-7)=0$을 만족시킬 확률은

$\frac{2+4+6}{36}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

이때 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(288, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=288\times\frac{1}{3}=96$, $\mathrm{V}(X)=288\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=64$

이때 288은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(96, 8^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-96}{8}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(100\le X\le 108)&=\mathrm{P}\left(\frac{100-96}{8}\le Z\le\frac{108-96}{8}\right)\\&=\mathrm{P}(0.5\le Z\le 1.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)\\&=0.4332-0.1915\\&=0.2417\end{aligned}$$

167. 정답 25

주머니 A와 주머니 B에서 나온 공의 숫자가 같은 경우와 다른 경우를 조사해 보자.

(ⅰ) $a=b$인 경우

순서쌍 (a, b)는 $(1, 1)$, $(3, 3)$이다.

이때 이산확률변수 X가 갖는 값은 순서대로 2, 6이다.

(ⅱ) $a\ne b$인 경우

순서쌍 (a, b)는 $(1, 3)$, $(1, 5)$, $(1, 7)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$, $(2, 5)$, $(2, 7)$, $(3, 1)$, $(3, 5)$, $(3, 7)$, $(4, 1)$, $(4, 3)$ $(4, 5)$, $(4, 7)$이다.

이때 이산확률변수 X가 갖는 값을 차례로 나열하면 2, 4, 6, 1, 1, 3, 5, 2, 2, 4, 3, 1, 1, 3이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	1

따라서

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{4}{16}+2\times\frac{4}{16}+3\times\frac{3}{16}+4\times\frac{2}{16}+5\times\frac{1}{16}+6\times\frac{2}{16}=\frac{23}{8}$

이므로

$\mathrm{E}(8X+2)=8\mathrm{E}(X)+2=8\times\frac{23}{8}+2=25$

168. 정답 459

연필 2자루를 두 명의 학생 A, B에게 나누어 주는 경우를 순서쌍으로 나타내면 $(0,\ 2)$, $(1,\ 1)$, $(2,\ 0)$이다.

(ⅰ) 연필 2자루를 A학생에게만 나누어 주는 경우

볼펜과 형관펜 5자루를 선택하는 경우를 순서대로 순서쌍으로 나타내면 $(1,\ 4)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 2)$이 경우이다.

ⓐ 볼펜 1자루, 형광펜 4자루를 선택할 때

볼펜 1자루와 형광펜 4자루를 A, B, C 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_3\mathrm{H}_1 \times {}_3\mathrm{H}_4 = {}_3\mathrm{C}_1 \times {}_6\mathrm{C}_4 = 3 \times 15 = 45$$

이때 모든 학생은 5개 이하의 학용품만 받을 수 있으므로 6개 이상 학용품을 받는 경우를 구해 보자.

A, B, C 3명의 학생이 받는 학용품의 개수를 각각 x, y, z라 하면 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$중에서

$(6,\ 0,\ 1)$, $(6,\ 1,\ 0)$, $(7,\ 0,\ 0)$

의 3가지는 학용품을 6개 이상 받는 경우이다.

이때 $(6,\ 0,\ 1)$과 $(6,\ 1,\ 0)$의 경우 B 또는 C가 볼펜 또는 형광펜을 받는 경우이므로 각각 2가지이다.

따라서 5개 이하의 학용품을 받는 경우의 수는

$$45-5=40$$

ⓑ 볼펜 2자루, 형광펜 3자루를 선택할 때

볼펜 2자루와 형광펜 3자루를 A, B, C 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_3\mathrm{H}_2 \times {}_3\mathrm{H}_3 = {}_4\mathrm{C}_2 \times {}_5\mathrm{C}_3 = 6 \times 10 = 60$$

이때 모든 학생은 5개 이하의 학용품만 받을 수 있으므로 6개 이상 학용품을 받는 경우의 수는 ⓐ의 경우와 같이 5가지이므로 5개 이하의 학용품을 받는 경우의 수는

$$60-5=55$$

ⓒ 볼펜 3자루, 형광펜 2자루를 선택할 때

볼펜 3자루와 형광펜 2자루를 A, B, C 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_3\mathrm{H}_3 \times {}_3\mathrm{H}_2 = {}_5\mathrm{C}_3 \times {}_4\mathrm{C}_2 = 10 \times 6 = 60$$

이때 모든 학생은 5개 이하의 학용품만 받을 수 있으므로 6개 이상 학용품을 받는 경우의 수는 ⓐ의 경우와 같이 5가지이므로 5개 이하의 학용품을 받는 경우의 수는

$$60-5=55$$

따라서 연필 2자루를 한 명의 학생 A에게만 나누어 주는 경우의 수는

$$40+55+55=150$$

(ⅱ) 연필 2자루를 B학생에게만 나누어 주는 경우

(ⅰ)과 동일하므로 경우의 수는 150

(ⅲ) 연필 2자루를 두 명의 학생 A, B에게 각각 1자루씩 나누어 주는 경우

볼펜과 형광펜 5자루를 선택하는 경우를 순서쌍으로 나타내면 $(1,\ 4)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 2)$인 경우이다.

ⓐ 볼펜 1자루, 형광펜 4자루를 선택할 때

볼펜 1자루와 형광펜 4자루를 A, B, C 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_3\mathrm{H}_1 \times {}_3\mathrm{H}_4 = {}_3\mathrm{C}_1 \times {}_6\mathrm{C}_4 = 3 \times 15 = 45$$

이때 모든 학생은 5개 이하의 학용품만 받을 수 있으므로 6개 이상 학용품을 받는 경우를 구해 보자.

A, B, C 3명의 학생이 받는 학용품의 개수를 각각 x, y, z라 하면 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$ 중에서

$(1,\ 6,\ 0)$, $(6,\ 1,\ 0)$

의 2가지는 학용품을 6개 이상 받는 경우이므로 5개 이하의 학용품을 받는 경우의 수는

$$45-2=43$$

ⓑ 볼펜 2자루, 형광펜 3자루를 선택할 때

볼펜 2자루와 형광펜 3자루를 A, B, C 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_3\mathrm{H}_2 \times {}_3\mathrm{H}_3 = {}_4\mathrm{C}_2 \times {}_5\mathrm{C}_3 = 6 \times 10 = 60$$

이때 모든 학생은 5개 이하의 학용품만 받을 수 있으므로 6개 이상 학용품을 받는 경우의 수는 (ⅲ)의 ⓐ의 경우와 같이 5가지이므로 5개 이하의 학용품을 받는 경우의 수는

$$60-2=58$$

ⓒ 볼펜 3자루, 형광펜 2자루를 선택할 때

볼펜 3자루와 형광펜 2자루를 A, B, C 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_3\mathrm{H}_3 \times {}_3\mathrm{H}_2 = {}_5\mathrm{C}_3 \times {}_4\mathrm{C}_2 = 10 \times 6 = 60$$

이때 모든 학생은 5개 이하의 학용품만 받을 수 있으므로 6개 이상 학용품을 받는 경우의 수는 (ⅲ)의 ⓐ의 경우와 같이 2가지이므로 5개 이하의 학용품을 받는 경우의 수는

$$60-2=58$$

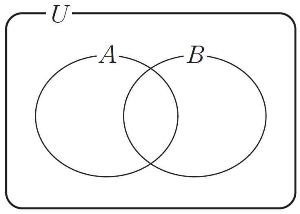
따라서 연필 2자루를 두 명의 학생 A, B에게 각각 1자루씩 나누어 주는 경우의 수는

$$43+58+58=159$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$$150+150+159=459$$

169. 정답 ⑤



$n(A)>n(B)$이므로 $n(A\cap B^C)>n(A^C\cap B)$ $\cdots\cdots$ ㉠

(ⅰ) $n(A^C\cap B)=0$인 경우

집합 U의 각 원소는 세 집합 $A\cap B^C$, $A\cap B$, $A^C\cap B^C$ 중 한 집합의 원소이므로 두 집합 A, B의 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는

$${}_3\Pi_4=3^4=81$$

㉠을 만족시키지 못하면 $n(A\cap B^C)=0$이다. 이때 집합 U의 각 원소는 두 집합 $A\cap B$, $A^C\cap B^C$ 중 한 집합의 원소이므로 두 집합 A, B의 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는

${}_2\Pi_4=2^4=16$

따라서 $n(A^C\cap B)=0$인 경우 두 집합 A, B의 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는

$81-16=65$

(ii) $n(A^C\cap B)=1$인 경우

집합 $A^C\cap B$의 원소를 정하는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

㉠에서 $n(A\cap B^C)=2$ 또는 $n(A\cap B^C)=3$

$n(A\cap B^C)=2$일 때, 집합 $A\cap B^C$의 원소를 정하는 경우의 수는 ${}_3C_2=3$이고, 남은 한 원소는 두 집합 $A\cap B$, $A^C\cap B^C$ 중 한 집합의 원소이므로 $n(A\cap B^C)=2$인 두 집합 A, B의 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는

$3\times2=6$

$n(A\cap B^C)=3$일 때, 두 집합 A, B의 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는 1이다.

따라서 $n(A^C\cap B)=1$인 경우 두 집합 A, B의 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는

$4\times(6+1)=28$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는

$65+28=93$

170. 정답 73

확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

(i) $f(-19)<f(13)$에서 $m>\dfrac{-19+13}{2}=-3$

(ii) $f(13)\le f(-1)$에서 $m\le\dfrac{13+(-1)}{2}=6$

(i), (ii)에서 정수 m은 -2 이상 6 이하이다.

확률변수 $\overline{X}$는 평균이 m, 표준편차가 $\dfrac{12}{\sqrt{9}}=4$인 정규분포를 따른다.

이때 $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(|\overline{X}-2m|\le2)&=\mathrm{P}(-2\le\overline{X}-2m\le2)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{-2+m}{4}\le Z\le\frac{2+m}{4}\right)\end{aligned}$$

이 값은 구간 $\left[\dfrac{-2+m}{4},\ \dfrac{2+m}{4}\right]$의 길이가 일정하므로

$\dfrac{-2+m}{4}$과 $\dfrac{2+m}{4}$의 평균이 Z의 평균인 0에 가까울수록 크고, 멀수록 작다.

$\dfrac{-2+m}{4}$과 $\dfrac{2+m}{4}$의 평균이 $\dfrac{m}{4}$이므로 $m=0$일 때 최대이고, $m=6$일 때 최소이다.

따라서 $\mathrm{P}(|\overline{X}-2m|\le2)$의 최댓값은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\frac{-2+0}{4}\le Z\le\frac{2+0}{4}\right)&=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le0.5)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)\\&=2\times0.1915\\&=0.3830\end{aligned}$$

이고, $\mathrm{P}(|\overline{X}-2m|\le2)$의 최솟값은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\frac{-2+6}{4}\le Z\le\frac{2+6}{4}\right)&=\mathrm{P}(1\le Z\le2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le2)-\mathrm{P}(0\le Z\le1)\\&=0.4772-0.3413\\&=0.1359\end{aligned}$$

이므로 최댓값과 최솟값의 합은

$0.3830+0.1359=0.5189$

171. 정답

8개의 의자를 원형으로 배열하는 전체 경우의 수는

$(8-1)!=7!$

1이 적힌 의자와 이웃하여 배열할 수 있는 의자에 적힌 수는 6, 7, 8이다. 이 중 2개를 택하여 배열하는 경우의 수는 ${}_3C_2\times2=6$이다.

3개의 의자(1이 적힌 의자와 이웃한 2개의 의자)를 한 묶음으로 하여 의자를 배열하는 원순열의 수는 $5!$이다.

묶음의 의자를 제외한 의자에 적힌 수 중 두 수의 합이 7보다 작은 경우는 2와 3 또는 2와 4이다.

2가 적힌 의자와 3이 적힌 의자가 서로 이웃하는 경우의 수는 $4!\times2$이고, 2가 적힌 의자와 4가 적힌 의자가 서로 이웃하는 경우의 수는 $4!\times2$이다.

또 2가 적힌 의자가 3이 적힌 의자, 4가 적힌 의자와 모두 이웃하는 경우의 수는 $3!\times2$이다.

그러므로 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 합이 7보다 작지 않도록 배열하는 경우의 수는

$6\times\{5!-(4!\times2+4!\times2-3!\times2)\}=216$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{216}{7!}=\dfrac{3}{70}$이므로

$p+q=70+3=73$

다른 풀이

8개의 의자를 원형으로 배열하는 전체 경우의 수는

$(8-1)!=7!$

1이 적힌 의자와 이웃하여 배열할 수 있는 의자에 적힌 수는 6, 7, 8이다. 이 중 2개를 택하여 배열하는 경우의 수는 ${}_3C_2\times2=6$이다.

3개의 의자(1이 적힌 의자와 이웃한 2개의 의자)를 한 묶음을 A라 하자.

(i) A와 2가 적힌 의자가 이웃한 경우

2가 적힌 의자에 이웃한 의자 중 A가 아닌 의자에 적힐 수 있는

수는 A에 적히지 않은 수와 5이므로 2가지이다.
이 경우의 원순열의 수는
$2\times2\times3!=24$

(ii) A와 2가 적힌 의자가 이웃하지 않는 경우
2가 적힌 의자에 이웃한 의자에 적힐 수 있는 수는 A에 적히지 않은 수와 5이므로 2가지이다.
이 경우의 원순열의 수는
$2\times3!=12$

그러므로 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 합이 7보다 작지 않도록 배열하는 경우의 수는
$6\times(24+12)=216$
따라서 구하는 확률은
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{216}{7!}=\dfrac{3}{70}$이므로
$p+q=70+3=73$

172. 정답 120
얻은 점수의 합이 11인 경우는 다음과 같다.
(i) 받은 점수가 $3,\ 3,\ 3,\ 2,\ 0$인 경우
받은 점수가 0이려면 검은 공을 꺼내야 한다.
꺼낸 검은 공에 적힌 수가 1 또는 4 또는 5인 경우 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는
$3\times\dfrac{5!}{3!}=60$
꺼낸 검은 공에 적힌 수가 2인 경우 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는
$\dfrac{5!}{3!2!}=10$
꺼낸 검은 공에 적힌 수가 3인 경우 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는
$\dfrac{5!}{4!}=5$
따라서 받은 점수가 $3,\ 3,\ 3,\ 2,\ 0$인 경우 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는
$60+10+5=75$
(ii) 받은 점수가 $3,\ 3,\ 3,\ 1,\ 1$인 경우
모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는
$\dfrac{5!}{3!2!}=10$
(iii) 받은 점수가 $3,\ 3,\ 2,\ 2,\ 1$인 경우
모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는
$\dfrac{5!}{2!2!}=30$
(iv) 받은 점수가 $3,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2$인 경우
모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는
$\dfrac{5!}{4!}=5$
(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는
$75+10+30+5=120$

다른 풀이
(i) 검은 공을 1번 꺼내는 경우
받은 점수가 $3,\ 3,\ 3,\ 2,\ 0$이다.
꺼낸 검은 공에 적힌 수가 1 또는 4 또는 5인 경우 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는
$3\times\dfrac{5!}{3!}=60$
꺼낸 검은 공에 적힌 수가 2인 경우 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는
$\dfrac{5!}{3!2!}=10$
꺼낸 검은 공에 적힌 수가 3인 경우 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는
$\dfrac{5!}{4!}=5$
따라서 받은 점수가 $3,\ 3,\ 3,\ 2,\ 0$인 경우 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는
$60+10+5=75$
(ii) 검은 공을 꺼내지 않는 경우
$a+b+c+d+e=11\,(a,\ b,\ c,\ d,\ e$는 3 이하의 자연수)에서
$a'=3-a,\ b'=3-b,\ c'=3-c,\ d'=3-d,\ e'=3-e$로 놓으면
$a'+b'+c'+d'+e'=4\,(a',\ b',\ c',\ d',\ e'$은 2 이하의 음이 아닌 정수)
순서쌍 $(a',\ b',\ c',\ d',\ e')$의 개수는
${}_5\mathrm{H}_4-5-5\times4=45$
(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는
$75+45=120$

173. 정답 ②
상자 A에 검은 공이 6개 들어 있으므로 시행 후 두 상자 A와 B에 들어 있는 검은 공의 개수가 서로 같으려면 두 상자 A와 B에 검은 공이 각각 3개씩 들어 있어야 한다.
(i) 흰 공 3개를 꺼내는 경우
상자 B에는 검은 공이 최대 2개 들어갈 수 있으므로 두 상자 A와 B에 들어 있는 검은 공의 개수가 서로 같을 수 없다.
(ii) 흰 공 2개, 검은 공 1개를 꺼내는 경우
상자 B에 검은 공이 3개 들어가려면 나중에 꺼내는 2개의 공이 모두 검은 공이어야 하므로 이 경우의 확률은
$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_6\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}\times\dfrac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{7}$
(iii) 흰 공 1개, 검은 공 2개를 꺼내는 경우
상자 B에 검은 공이 3개 들어가려면 나중에 꺼내는 2개의 공 중

검은 공이 1개이어야 하므로 이 경우의 확률은

$$\frac{{}_4C_1 \times {}_6C_2}{{}_{10}C_3} \times \frac{{}_3C_1 \times {}_4C_1}{{}_7C_2} = \frac{2}{7}$$

(iv) 검은 공 3개를 꺼내는 경우

상자 B에 검은 공이 3개 들어 있으므로 이 경우의 확률은

$$\frac{{}_6C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{6}$$

(i)~(iv)에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{1}{6} = \frac{25}{42}$$

174. 정답 ⑤

3 이하의 자연수 k에 대하여 $a_k + a_{k+1} = 3$이므로

$a_1 + a_2 = 3$, $a_2 + a_3 = 3$, $a_3 + a_4 = 3$

$a_1 = 0$이면 $a_2 = 3$, $a_3 = 0$, $a_4 = 3$

$a_1 = 1$이면 $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $a_4 = 2$

$a_1 = 2$이면 $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 1$

$a_1 = 3$이면 $a_2 = 0$, $a_3 = 3$, $a_4 = 0$

$a_1 \geq 4$이면 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(i) $a_1 = 0$, $a_2 = 3$, $a_3 = 0$, $a_4 = 3$인 경우

$f(x) = 2$인 x의 개수와 $f(x) = 4$인 x의 개수가 모두 3이므로 구하는 함수 f의 개수는

2, 2, 2, 4, 4, 4

를 일렬로 나열한 다음 맨 왼쪽에 있는 수부터 차례로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값으로 정하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{6!}{3!3!} = 20$$

$a_1 = 3$, $a_2 = 0$, $a_3 = 3$, $a_4 = 0$인 경우도 같은 방법으로 구하면 함수 f의 개수는 20

(ii) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $a_4 = 2$인 경우

$f(x) = 1$인 x의 개수와 $f(x) = 3$인 x의 개수가 모두 1이고, $f(x) = 2$인 x의 개수와 $f(x) = 4$인 x의 개수가 모두 2이므로 구하는 함수 f의 개수는

1, 2, 2, 3, 4, 4

를 일렬로 나열한 다음 맨 왼쪽에 있는 수부터 차례로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값으로 정하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{6!}{2!2!} = 180$$

$a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 1$인 경우도 같은 방법으로 구하면 함수 f의 개수는 180

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$2 \times 20 + 2 \times 180 = 400$

175. 정답 55

$\mathrm{P}(0 \leq X \leq a) = 1$이므로 연속확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프로부터

$\frac{1}{2} \times a \times c = 1$, 즉 $ac = 2$ …… ㉠

$\mathrm{P}(0 \leq X \leq b) = \alpha$라 하면 연속확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프로부터

$\frac{1}{2} \times b \times c = \alpha$, 즉 $bc = 2\alpha$ …… ㉡

두 점 $(0,\ 0)$, $(b,\ c)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{c}{b}x$$

이므로 $\mathrm{P}\left(0 \leq X \leq \frac{b}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{b}{2} \times \frac{c}{2} = \frac{1}{8}bc = \frac{1}{4}\alpha$

$\mathrm{P}(b \leq X \leq a) = 1 - \mathrm{P}(0 \leq X \leq b) = 1 - \alpha$

이므로 $4\mathrm{P}\left(0 \leq X \leq \frac{b}{2}\right) = 3\mathrm{P}(b \leq X \leq a)$에서

$\alpha = 3 - 3\alpha$, $4\alpha = 3$

$$\alpha = \frac{3}{4}$$

$\alpha = \frac{3}{4}$을 ㉡에 대입하면

$bc = \frac{3}{2}$ …… ㉢

㉠에서 $a = \frac{2}{c}$, ㉢에서 $b = \frac{3}{2c}$이므로 $\frac{a}{2} < b$

그러므로 ㉠, ㉡, ㉢에 의하여

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\frac{b}{2} \leq X \leq \frac{a}{2}\right) &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{c}{2} + \frac{ac}{2b}\right) \times \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{c}{2} + \frac{2}{3}c\right) \times \left(\frac{1}{c} - \frac{3}{4c}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{7}{6}c \times \frac{1}{4c} \\ &= \frac{7}{48}\end{aligned}$$

따라서 $p = 48$, $q = 7$이므로

$p + q = 48 + 7 = 55$

176. 정답 176

$192 = 2^6 \times 3$이므로 a, b, c, d 중 홀수인 자연수는 1 또는 3이어야 한다.

또한 음이 아닌 정수 m_1, m_2, m_3, m_4, n_1, n_2, n_3, n_4에 대하여

$a = 2^{m_1} \times 3^{n_1}$, $b = 2^{m_2} \times 3^{n_2}$, $c = 2^{m_3} \times 3^{n_3}$, $d = 2^{m_4} \times 3^{n_4}$라 하면

$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 6$ …… ㉠

$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 1$ …… ㉡

이어야 한다.

조건 (나)에서 $a + b + c + d$가 홀수이어야 하므로

a, b, c, d 중 홀수인 자연수의 개수는 1 또는 3이어야 한다.

(ⅰ) a, b, c, d 중 홀수인 자연수의 개수가 1인 경우

a, b, c, d 중 홀수가 될 자연수를 정하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1=4$

이때 a가 홀수라 하자.

① $a=1$인 경우

b, c, d는 모두 짝수이어야 하므로

$m_2\ge 1$, $m_3\ge 1$, $m_4\ge 1$

㉠에서

$m_2'+1=m_2$, $m_3'+1=m_3$, $m_4'+1=m_4$

(m_2', m_3', m_4'은 음이 아닌 정수)

라 하면 $m_1=0$이므로 ㉠을 만족시키는 모든 순서쌍 $(m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4)$의 개수는 방정식 $m_2'+m_3'+m_4'=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 m_2', m_3', m_4'의 모든 순서쌍 $(m_2',\ m_3',\ m_4')$의 개수와 같고, 이는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_3={}_{3+3-1}\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$

또한 ㉡에서 $n_1=0$이므로 ㉡을 만족시키는 모든 순서쌍 $(n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4)$의 개수는 방정식 $n_2+n_3+n_4=1$을 만족시키는 음이 아닌 정수 n_2, n_3, n_4의 모든 순서쌍 $(n_2,\ n_3,\ n_4)$의 개수와 같고, 이는

${}_3\mathrm{C}_1=3$

그러므로 이 경우 구하는 모든 순서쌍의 개수는

$10\times3=30$

② $a=3$인 경우

b, c, d는 모두 짝수이어야 하므로

$m_2\ge 1$, $m_3\ge 1$, $m_4\ge 1$

㉠에서

$m_2''+1=m_2$, $m_3''+1=m_3$, $m_4''+1=m_4$

(m_2'', m_3'', m_4''은 음이 아닌 정수)

라 하면 $m_1=0$이므로 ㉠을 만족시키는 모든 순서쌍 $(m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4)$의 개수는 방정식 $m_2''+m_3''+m_4''=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 m_2'', m_3'', m_4''의 모든 순서쌍 $(m_2'',\ m_3'',\ m_4'')$의 개수와 같고, 이는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_3={}_{3+3-1}\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$

또한 ㉡에서 $n_1=1$이므로 ㉡을 만족시키는 모든 순서쌍 $(n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4)$의 개수는 1이다.

그러므로 이 경우 구하는 모든 순서쌍의 개수는 10이다.

따라서 a, b, c, d 중 홀수인 자연수의 개수가 1인 경우 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

$4\times(30+10)=160$

(ⅱ) a, b, c, d 중 홀수인 자연수의 개수가 3인 경우

a, b, c, d 중 홀수가 될 자연수를 정하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_1=4$

이때 a, b, c가 홀수라 하자.

① a, b, c 모두 1인 경우

$d=192$이면 되므로 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 1이다.

② a, b, c 중 어느 하나가 3인 경우

a, b, c 중 3이 될 자연수를 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1=3$

이때 $d=64$이면 되므로 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 3이다.

따라서 a, b, c, d 중 홀수인 자연수의 개수가 3인 경우의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

$4\times(1+3)=16$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 순서쌍의 개수는

$160+16=176$

177. 정답 ⑤

한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 홀수일 확률과 짝수일 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이다.

(ⅰ) 한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 홀수인 경우

주머니 A에서 흰 공 1개를 꺼내어 주머니 B에 넣으면 주머니 B에는 흰 공 3개와 검은 공 4개가 들어 있게 되는데, 주머니 B에서 흰 공 1개를 꺼낼 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_1}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_1}=\frac{3}{35}$

주머니 A에서 검은 공 1개를 꺼내어 주머니 B에 넣으면 주머니 B에는 흰 공 2개와 검은 공 5개가 들어 있게 되는데, 주머니 B에서 흰 공 1개를 꺼낼 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_1}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_1}=\frac{3}{35}$

따라서 이 경우에 주머니 B에서 꺼낸 공이 흰 공일 확률은

$\frac{3}{35}+\frac{3}{35}=\frac{6}{35}$

(ⅱ) 한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 짝수인 경우

주머니 A에서 흰 공 2개를 동시에 꺼내어 주머니 B에 넣으면 주머니 B에는 흰 공 4개와 검은 공 4개가 들어 있게 되는데, 주머니 B에서 흰 공 1개를 꺼낼 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_1}=\frac{1}{40}$

주머니 A에서 흰 공 1개와 검은 공 1개를 동시에 꺼내어 주머니 B에 넣으면 주머니 B에는 흰 공 3개와 검은 공 5개가 들어 있게 되는데, 주머니 B에서 흰 공 1개를 꺼낼 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_1}=\frac{9}{80}$

주머니 A에서 검은 공 2개를 동시에 꺼내어 주머니 B에 넣으면 주머니 B에는 흰 공 2개와 검은 공 6개가 들어 있게 되는데, 주머니 B에서 흰 공 1개를 꺼낼 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}\times\frac{{}_2C_1}{{}_8C_1}=\frac{3}{80}$

따라서 이 경우에 주머니 B에서 꺼낸 공이 흰 공일 확률은

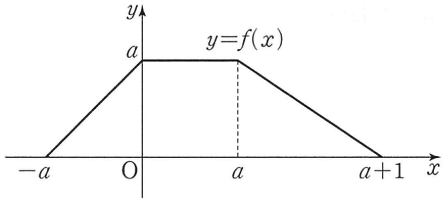
$\frac{1}{40}+\frac{9}{80}+\frac{3}{80}=\frac{7}{40}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$\frac{6}{35}+\frac{7}{40}=\frac{97}{280}$

178. 정답 ④

확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}a^2+a^2+\frac{1}{2}a=1$에서

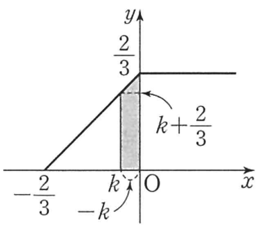
$3a^2+a-2=0$

$(3a-2)(a+1)=0$

$a>0$이므로 $a=\frac{2}{3}$

$\mathrm{P}\left(0\le X\le\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$, $\mathrm{P}\left(k\le X\le\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}$이므로 $k<0$이고

$\mathrm{P}(k\le X\le 0)=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$



즉, 그림에서 색칠한 부분의 넓이가 $\frac{1}{18}$이므로

$\frac{1}{2}\times\left(k+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)\times(-k)=\frac{1}{18}$

$k^2+\frac{4}{3}k+\frac{1}{9}=0$

$9k^2+12k+1=0$

$k=\frac{-6\pm\sqrt{36-9}}{9}=\frac{-2\pm\sqrt{3}}{3}$

$-\frac{2}{3}<k<0$이므로 $k=\frac{-2+\sqrt{3}}{3}$

179. 정답 7

8개의 장난감 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_8C_2=28$

럭키박스에 넣은 2개의 장난감이 서로 다른 종류인 사건을 A라 하면 그 여사건 A^C은 럭키박스에 넣은 2개의 장난감이 서로 같은 종류인 사건이다.

같은 종류의 인형 3개 중 2개를 택하거나 같은 종류의 피규어 3개 중 2개를 택하거나 같은 종류의 자석블록 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2+{}_3C_2+{}_2C_2=3+3+1=7$

이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{7}{28}=\frac{1}{4}$

그러므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

따라서 $p=4$, $q=3$이므로

$p+q=4+3=7$

180. 정답 950

(ⅰ) 조건을 만족시키는 n의 값이 1, 2인 경우

$f(1)>f(3)$, $f(2)>f(4)$, $f(3)\le f(5)$이다.

① $f(3)=1$일 때 $f(1)$과 $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

$4\times5=20$

② $f(3)=2$일 때 $f(1)$과 $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

$3\times4=12$

③ $f(3)=3$일 때 $f(1)$과 $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

$2\times3=6$

④ $f(3)=4$일 때 $f(1)$과 $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

$1\times2=2$

각각의 경우에 $f(2)$와 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는

$(20+12+6+2)\times10=400$

(ⅱ) 조건을 만족시키는 n의 값이 1, 3인 경우

$f(1)>f(3)>f(5)$이고 $f(2)\le f(4)$이다.

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는

${}_5C_3\times{}_5H_2={}_5C_2\times{}_6C_2=10\times15=150$

(ⅲ) 조건을 만족시키는 n의 값이 2, 3인 경우

$f(2)>f(4)$, $f(3)>f(5)$, $f(1)\le f(3)$이다.

① $f(3)=2$일 때 $f(1)$과 $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

$2\times1=2$

② $f(3)=3$일 때 $f(1)$과 $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

$3\times2=6$

③ $f(3)=4$일 때 $f(1)$과 $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

$4\times3=12$

④ $f(3)=5$일 때 $f(1)$과 $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

$5\times4=20$

각각의 경우에 $f(2)$와 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_2=10$

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는

$(2+6+12+20)\times10=400$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는

$400+150+400=950$

181. 정답 ④

모표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 9인 표본의 표본평균의 값을 $\overline{x_1}$라 하면 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\overline{x_1}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{9}}\le m\le\overline{x_1}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{9}}$$

이므로 $b-a=2\times2.58\times\dfrac{\sigma}{3}$

같은 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균의 값을 $\overline{x_2}$라 하면 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\overline{x_2}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x_2}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이므로 $d-c=2\times1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\dfrac{b-a}{d-c}\ge4.3$에서 $b-a\ge4.3(d-c)$

$$2\times2.58\times\frac{\sigma}{3}\ge4.3\times2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n}\ge\frac{4.3\times1.96\times3}{2.58}$$

$n\ge9.8^2=96.04$

따라서 자연수 n의 최솟값은 97이다.

182. 정답 ⑤

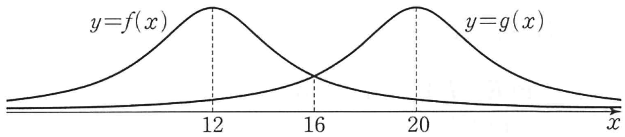
확률밀도함수 $f(x)$는 $x=m_1$일 때 최대이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le f(m_1)$이고, 확률밀도함수 $g(x)$는 $x=m_2$일 때 최대이므로 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\le g(m_2)$이다.

또 두 확률변수 X, Y의 표준편차가 같으므로 $f(m_1)=g(m_2)$이다.

따라서 조건 (가)에 의하여 $m_2=20$이고

조건 (나)에 의하여 $\dfrac{m_1+m_2}{2}=16$에서 $m_1=12$이다.

두 확률밀도함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프를 그리면 그림과 같다.



즉, 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(12,\ 4^2)$을 따르고, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$을 따른다.

한편, 확률변수 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(1,\ 0)$을 따르므로

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(X\le10)+\mathrm{P}(Y\ge22)\\&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{10-12}{4}\right)+\mathrm{P}\left(Z\le\frac{22-20}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le-0.5)+\mathrm{P}(Z\ge0.5)\\&=2\mathrm{P}(Z\ge0.5)\\&=2\times\{0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)\}\\&=2\times(0.5-0.1915)\\&=0.6170\end{aligned}$$

183. 정답 17

두 주머니에서 서로 다른 색의 공을 꺼내는 사건을 E, 받은 점수가 6의 배수인 사건을 F라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(E|F)$이다.

(ⅰ) 두 주머니에서 서로 다른 색의 공을 꺼낼 확률은

$$\mathrm{P}(E)=\frac{2}{6}\times\frac{3}{6}+\frac{4}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$$

주사위를 1번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 6이고, 나온 눈의 수에 3을 곱한 값이 6의 배수가 되는 경우는

$3\times2,\ 3\times4,\ 3\times6$

이므로 이 경우의 수는 3이다.

그러므로 $\mathrm{P}(E|F)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

(ⅱ) 두 주머니에서 서로 같은 색의 공을 꺼낼 확률은

$$\mathrm{P}(E^C)=1-\mathrm{P}(E)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

주사위를 2번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 6^2이고, 나온 눈의 수를 차례로 a, b라 할 때 ab가 6의 배수가 되는 순서쌍 $(a,\ b)$는

① 주사위에서 나온 눈의 수에 6이 있는 경우

$(6,\ 1)$, $(6,\ 2)$, $(6,\ 3)$, $(6,\ 4)$, $(6,\ 5)$, $(6,\ 6)$, $(1,\ 6)$, $(2,\ 6)$, $(3,\ 6)$, $(4,\ 6)$, $(5,\ 6)$

의 11가지이다.

② 주사위에서 나온 눈의 수에 6이 없는 경우

$(2,\ 3)$, $(3,\ 2)$, $(3,\ 4)$, $(4,\ 3)$

의 4가지이다.

①, ②에서

$$\mathrm{P}(F|E^C)=\frac{11+4}{6^2}=\frac{15}{6^2}=\frac{5}{12}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$\mathrm{P}(E\cap F)=\mathrm{P}(E)\mathrm{P}(F|E)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(F)=\mathrm{P}(E\cap F)+\mathrm{P}(E^C\cap F)$

$=\mathrm{P}(E)\mathrm{P}(F|E)+\mathrm{P}(E^C)\mathrm{P}(F|E^C)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{12}=\frac{11}{24}$

이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(E|F)=\frac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(F)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{11}{24}}=\frac{6}{11}$

따라서 $p=11$, $q=6$이므로 $p+q=11+6=17$

184. 정답 432

네 명의 학생 A, B, C, D가 받은 과일의 개수를 각각 a, b, c, d (a, b, c, d는 자연수)라 하면

$a+b+c+d=12$ …… ㉠

이때 받은 사과의 개수와 배의 개수가 같은 학생이 단 한 명이 되도록 모든 과일을 남김없이 나누어주는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 네 명의 학생 중 한 명이 사과와 배를 각각 2개씩 받은 경우

네 명의 학생 중 2개의 사과를 받을 학생을 선택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1=4$

이때 2개의 사과를 받은 학생이 A이면 A가 받은 배의 개수도 2이므로 $a=4$

㉠에서 $b+c+d=8$ (b, c, d는 자연수)이므로

$b'+1=b$, $c'+1=c$, $d'+1=d$라 하면 b', c', d'은 음이 아닌 정수이고

$(b'+1)+(c'+1)+(d'+1)=8$

즉, $b'+c'+d'=5$이므로 이를 만족시키는 음이 아닌 정수 b', c', d'의 순서쌍 (b', c', d')의 개수는

${}_3\mathrm{H}_5={}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=21$

따라서 사과와 배를 각각 2개씩 받은 학생이 한 명이 되도록 나누어 주는 경우의 수는

$4\times21=84$

(ⅱ) 네 명의 학생 중 한 명만 사과와 배를 각각 한 개씩 받은 경우

네 명의 학생 중 사과를 한 개씩 받을 2명의 학생을 선택하는 경우

${}_4\mathrm{C}_2=6$

사과를 한 개씩 받은 학생이 A, B이면 A, B 중 배를 한 개만 받을 학생을 선택하는 경우의 수는

${}_2\mathrm{C}_1=2$

이때 사과와 배를 각각 한 개씩 받은 학생이 A이면 $a=2$이다. 또 B가 받은 배의 개수를 b'이라 하면 $b=b'+1$이고 b'은 음이 아닌 정수이다.

㉠에서 $(b'+1)+c+d=10$, 즉 $b'+c+d=9$ (c, d는 자연수)

이므로 $c'+1=c$, $d'+1=d$라 하면 c', d'은 음이 아닌 정수이고

$b'+(c'+1)+(d'+1)=9$

즉, $b'+c'+d'=7$이므로 이를 만족시키는 음이 아닌 정수 b', c', d'의 순서쌍 (b', c', d')의 개수는

${}_3\mathrm{H}_7={}_9\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_2=36$

그런데 B가 받은 배의 개수는 1이어야 하므로 위에서 구한 경우에서 $b'=1$인 경우를 제외해야 한다.

즉, $b'=1$이면 $c'+d'=6$이므로 이를 만족시키는 음이 아닌 정수 c', d'의 순서쌍 (c', d')의 개수는

${}_2\mathrm{H}_6={}_7\mathrm{C}_6={}_7\mathrm{C}_1=7$

따라서 사과와 배를 각각 한 개씩 받은 학생이 단 한 명이 되도록 나누어주는 경우의 수는

$6\times2\times(36-7)=348$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$84+348=432$

185. 정답 ③

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르므로 $Z_1=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z_1은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(m\le X\le120)+\mathrm{P}(X\le80)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{m-m}{\sigma}\le Z_1\le\frac{120-m}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z_1\le\frac{80-m}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(0\le Z_1\le\frac{120-m}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z_1\le\frac{80-m}{\sigma}\right)=0.5$

이므로

$\frac{120-m}{\sigma}=-\frac{80-m}{\sigma}$

$120-m=-80+m$

$2m=200$

$m=100$

확률변수 $\overline{X}$가 정규분포 $\mathrm{N}\left(100, \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2\right)$을 따르므로

$Z_2=\frac{\overline{X}-100}{\frac{\sigma}{2}}$으로 놓으면 확률변수 Z_2는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(\overline{X}\le90)=-\mathrm{P}\left(Z_2\le\frac{90-100}{\frac{\sigma}{2}}\right)=\mathrm{P}\left(Z_2\le-\frac{20}{\sigma}\right)$,

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge m+\sigma)=\mathrm{P}\left(Z_2\ge\frac{100+\sigma-100}{\frac{\sigma}{2}}\right)=\mathrm{P}(Z_2\ge2)$

이므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\le90)=\mathrm{P}(\overline{X}\ge m+\sigma)$에서

$\mathrm{P}\left(Z_2\le-\frac{20}{\sigma}\right)=\mathrm{P}(Z_2\ge2)$

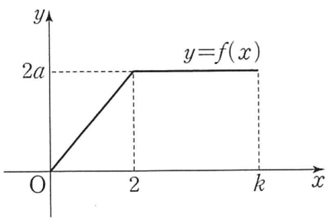
이때 $2=-\left(-\dfrac{20}{\sigma}\right)$이므로 $\sigma=10$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\le 95)&=\mathrm{P}\left(Z_2\le\frac{95-100}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_2\le -1)\\&=\mathrm{P}(Z_2\ge 1)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z_2\le 1)\\&=0.5-0.3413\\&=0.1587\end{aligned}$$

186. 정답 ⑤

확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $f(x)$가 연속확률변수 X의 확률밀도함수이므로

$\mathrm{P}(0\le X\le k)=1$에서

$\dfrac{1}{2}\times 2\times 2a+(k-2)\times 2a=1$

즉, $2a(k-1)=1$ …… ㉠

함수 $y=f(6-x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $x=3$에 대하여 대칭이고, 함수 $g(x)$가 연속확률변수 Y의 확률밀도함수이므로

$\mathrm{P}(0\le Y\le 3)=\dfrac{1}{2}$

이어야 한다.

$0\le x\le 3$에서 $g(x)=f(x)$이므로

$\mathrm{P}(0\le Y\le 3)=\mathrm{P}(0\le X\le 3)=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2a+2a\times 1=4a$

즉, $4a=\dfrac{1}{2}$에서 $a=\dfrac{1}{8}$이므로 ㉠에서

$\dfrac{1}{4}(k-1)=1$

$k=5$

따라서 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{8}x & (0\le x\le 2)\\ \dfrac{1}{4} & (2\le x\le 5)\end{cases}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(1\le X\le\frac{2}{3}k\right)&=\mathrm{P}\left(1\le X\le\frac{10}{3}\right)\\&=\mathrm{P}(1\le X\le 2)+\mathrm{P}\left(2\le X\le\frac{10}{3}\right)\\&=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right)\times 1+\left(\frac{10}{3}-2\right)\times\frac{1}{4}\\&=\frac{25}{48}\end{aligned}$$

187. 정답 19

주머니 A에 들어 있는 카드에 적혀 있는 모든 수의 합은

$1+2+6+8=17$

주머니 B에 들어 있는 카드에 적혀 있는 모든 수의 합은

$3+4+5+7=19$

두 번의 시행은 다음 세 가지 경우로 나눌 수 있다. 이때 두 번의 시행을 한 후 두 주머니 A, B에 들어 있는 카드에 적혀 있는 수의 합을 각각 S_1, S_2라 하자.

(ⅰ) 한 개의 주사위를 두 번 던져 나온 눈의 수가 모두 6의 약수인 경우

두 번의 시행에서 주머니 A에 들어 있는 카드 2장을 꺼내어 주머니 B에 넣으므로

$S_1\le 17-1-2=14$, $S_2\ge 19+1+2=22$

그러므로 $S_1<S_2$이다.

(ⅱ) 한 개의 주사위를 두 번 던져 6의 약수가 한 번, 6의 약수가 아닌 수가 한 번 나온 경우

첫 번째 시행에서 6의 약수가 나오고 두 번째 시행에서 6의 약수가 아닌 수가 나왔을 때, 주머니 A에서 꺼내어 주머니 B에 넣은 카드에 적혀 있는 숫자를 a, 주머니 B에서 꺼내어 주머니 A에 넣은 카드에 적혀 있는 숫자를 b라 하고 $S_1>S_2$인 경우를 두 수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내면

$(1,\ 3)$, $(1,\ 4)$, $(1,\ 5)$, $(1,\ 7)$, $(2,\ 4)$, $(2,\ 5)$, $(2,\ 7)$

이므로 $S_1>S_2$인 경우의 수는 7이다.

마찬가지 방법으로 첫 번째 시행에서 6의 약수가 아닌 수가 나오고 두 번째 시행에서 6의 약수가 나왔을 때, $S_1>S_2$인 경우의 수는 7이다.

(ⅲ) 한 개의 주사위를 두 번 던져 나온 눈의 수가 모두 6의 약수가 아닌 경우

두 번째의 시행에서 주머니 B에 들어 있는 카드 2장을 꺼내어 주머니 A에 넣으므로

$S_1\ge 17+3+4=24$, $S_2\le 19-3-4=12$

그러므로 $S_1>S_2$이다.

한편, 한 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 6의 약수일 확률은 $\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$이고, 6의 약수가 아닐 확률은 $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$이다.

그러므로 두 번의 시행 후 주머니 A에 들어 있는 카드에 적혀 있는 수의 합이 주머니 B에 들어 있는 카드에 적혀 있는 수의 합보다 큰 사건을 S, 두 주머니 A, B에 들어 있는 카드의 개수가 같은 사건을 T라 하면 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$\mathrm{P}(S)=2\times\left(\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{7}{4\times 5}\right)+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{45}+\dfrac{1}{9}=\dfrac{4}{15}$,

$\mathrm{P}(S\cap T)=2\times\left(\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{7}{4\times 5}\right)=\dfrac{7}{45}$

이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(T|S)=\frac{\mathrm{P}(S\cap T)}{\mathrm{P}(S)}=\frac{\frac{7}{45}}{\frac{4}{15}}=\frac{7}{12}$$

따라서 $p=12$, $q=7$이므로

$p+q=12+7=19$

188. 정답 254

조건 (가)에 의하여

$f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le f(5)\le f(6)$

조건 (나)에 의하여 $f(3)f(4)f(5)$, $f(4)f(5)f(6)$의 값이 모두 3의 배수이므로 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(ⅰ) $f(4)f(5)$의 값이 3의 배수인 경우

① $f(4)=1$일 때

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 1

$f(4)f(5)$의 값이 3의 배수이려면

$f(5)=3$일 때 $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 4

$f(5)=6$일 때 $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 1

그러므로 이 경우의 수는

$1\times(4+1)=5$

② $f(4)=2$일 때

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_2\mathrm{H}_3={}_4\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_1=4$

$f(4)f(5)$의 값이 3의 배수이려면

$f(5)=3$일 때 $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 4

$f(5)=6$일 때 $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 1

그러므로 이 경우의 수는

$4\times(4+1)=20$

③ $f(4)=3$일 때

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_3={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$

$f(4)f(5)$의 값이 3의 배수이므로 $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$

그러므로 이 경우의 수는

$10\times10=100$

④ $f(4)=4$일 때

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$

$f(4)f(5)$의 값이 3의 배수이려면 $f(5)=6$이어야 하고, 이때 $f(6)=6$이다.

그러므로 이 경우의 수는

$20\times1=20$

⑤ $f(4)=5$일 때

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{H}_3={}_7\mathrm{C}_3=35$

$f(4)f(5)$의 값이 3의 배수이려면 $f(5)=6$이어야 하고, 이때 $f(6)=6$이다.

그러므로 이 경우의 수는

$35\times1=35$

⑥ $f(4)=6$일 때

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_6\mathrm{H}_3={}_8\mathrm{C}_3=56$

$f(4)f(5)$의 값이 3의 배수이므로 $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 1

그러므로 이 경우의 수는

$56\times1=56$

①~⑥에 의하여 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$5+20+100+20+35+56=236$

(ⅱ) $f(4)f(5)$의 값이 3의 배수가 아닌 경우

조건 (나)를 만족시키기 위해서는 $f(3)$의 값과 $f(6)$의 값이 모두 3의 배수이어야 한다.

① $f(3)=f(6)=3$일 때

$f(4)=f(5)=3$이므로 $f(4)f(5)$의 값이 3의 배수가 되어 주어진 경우를 만족시키지 않는다.

② $f(3)=3$, $f(6)=6$일 때

$f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

이 각각에 대하여 $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우는

$f(4)=f(5)=4$ 또는 $f(4)=4$, $f(5)=5$ 또는 $f(4)=f(5)=5$의 3가지이다.

그러므로 이 경우의 수는

$6\times3=18$

③ $f(3)=f(6)=6$일 때

$f(4)=f(5)=6$이므로 $f(4)f(5)$의 값이 3의 배수가 되어 주어진 경우를 만족시키지 않는다.

①, ②, ③에 의하여 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 18이다.

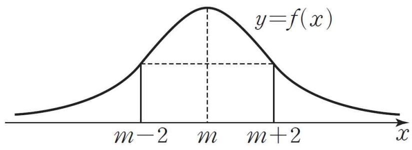
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는

$236+18=254$

189. 정답 ②

$$\begin{aligned}H(t)&=\mathrm{P}(X\le t+2)-\mathrm{P}(X\ge t-2)\\&=\{\mathrm{P}(X\le t-2)+P(t-2\le X\le t-2)\}\\&\quad-\{P(t-2\le X\le t+2)+P(X\ge t-2)\}\\&=\mathrm{P}(X\le t-2)-\mathrm{P}(X\ge t+2)\end{aligned}$$

확률변수 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하면 곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.



$t=m$일 때,

$\mathrm{P}(X \le m-2)=P(X \ge m+2)$, 즉 $H(m)=0$이다.

이때 방정식 $H(t)=0$은 오직 하나의 실근 $t=m$을 갖고, 조건에서 $H(4)=0$이므로

$m=4$ …… ㉠

확률변수 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned} H(6) &= \mathrm{P}(X \le 4)-\mathrm{P}(X \ge 8) \\ &= \mathrm{P}\left(Z \le \frac{4-4}{\sigma}\right)-\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{8-4}{\sigma}\right) \\ &= \mathrm{P}(Z \le 0)-\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{4}{\sigma}\right) \\ &= 0.5-\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{4}{\sigma}\right) \\ &= \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{4}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

조건에서 $H(6)=0.4332$이고,

$\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5)=0.4332$이므로

$\dfrac{4}{\sigma}=1.5,\ \sigma=\dfrac{8}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}\left(4,\ \left(\dfrac{8}{3}\right)^2\right)$을 따르므로

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(\frac{4}{3} \le X \le \frac{20}{3}\right) &= \mathrm{P}\left(\frac{\frac{4}{3}-4}{\frac{8}{3}} \le Z \le \frac{\frac{20}{3}-4}{\frac{8}{3}}\right) \\ &= \mathrm{P}(-1 \le Z \le 1) \\ &= 2\times\mathrm{P}(0 \le Z \le 1) \\ &= 2\times 0.3413 \\ &= 0.6826 \end{aligned}$$

190. 정답 ③

조건 (가)에서 $k\times f(k)$는 짝수이므로 $f(1),\ f(3),\ f(5)$의 값은 각각 2또는 4또는 6이다.

(ⅰ) $f(5)=2$인 경우

조건 (나)에 의하여

$f(1)=f(3)=2$

조건 (다)에서

$f(2)f(4)f(6)=2$

이때 $1\times1\times2=2$이므로 $f(2),\ f(4),\ f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 세 수 $1,\ 1,\ 2$를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{3!}{2!}=3$

따라서 $f(5)=2$일 때 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$1\times3=3$

(ⅱ) $f(5)=4$인 경우

조건 (나)에 의해 $f(1),\ f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 두 수 $2,\ 4$에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2\mathrm{H}_2={}_3\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_1=3$

조건 (다)에서

$f(2)f(4)f(6)=4$

이때 $1\times1\times4=1\times2\times2=4$이므로

$f(2),\ f(4),\ f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 세 수 $1,\ 1,\ 4$또는 $1,\ 2,\ 2$를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{3!}{2!}+\dfrac{3!}{2!}=3+3=6$

따라서 $f(5)=4$일 때 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$3\times6=18$

(ⅲ) $f(5)=6$인 경우

조건 (나)에 의해 $f(1),\ f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 세 수 $2,\ 4,\ 6$에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

조건 (다)에서

$f(2)f(4)f(6)=6$

이때 $1\times1\times6=1\times2\times3=6$이므로

$f(2),\ f(4),\ f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 세 수 $1,\ 1,\ 6$또는 세수 $1,\ 2,\ 3$을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{3!}{2!}+3!=3+6=9$

따라서 $f(5)=6$일 때 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는

$6\times9=54$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 함수 f의 개수는

$3+18+54=75$

191. 정답 48

(ⅰ) 서로 다른 두 개의 문자를 택하는 경우

세 개의 문자 중 두 개의 문자를 택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2=3$

이 중 $a,\ b$에서 중복을 허락하여 5개를 택할 때, 같은 문자끼리 서로 이웃하지 않도록 나열하기 위해서는 a를 3개, b를 2개 또는 a를 2개 또는 b를 3개 택해야 한다. 이때 같은 문자끼리 서로 이웃하지 않도록 나열하는 경우는 $ababa,\ babab$의 두 가지이다.

그러므로 이 경우의 수는

$3\times2=6$

(ii) 서로 다른 세 개의 문자를 택하는 경우

① 한 문자를 3개 택하는 경우

3개 택할 한 문자를 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1=3$

이 중 하나인 a, a, a, b, c를 택한 경우, 같은 문자 a, a, a끼리 서로 이웃하지 않도록 나열하는 경우는 다음과 같다.

㉠ b ㉡ c ㉢

위의 그림과 같이 b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$2!=2$

이때 남은 a, a, a를 ㉠, ㉡, ㉢에 하나씩 놓으면 되므로 이 경우의 수는 1

그러므로 이 경우의 수는

$3\times2\times1=6$

② 두 문자를 2개씩 택하는 경우

2개 택할 두 문자를 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_2=3$

이 중 하나인 a, a, a, b, c를 택한 경우, 같은 문자 a, a, b, b끼리 서로 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는 b, b, c를 일렬로 나열하는 경우를 기준으로 구하면 다음과 같다.

㉠ b ㉡ b ㉢ c ㉣

위의 경우, 같은 문자끼리 이웃하지 않도록 나열하려면 ㉡에 a를 놓고, 남은 ㉠, ㉢, ㉣ 중 한 곳에 a를 놓으면 되므로 이 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1=3$

㉠ b ㉡ c ㉢ b ㉣

위의 경우, 같은 문자끼리 이웃하지 않도록 나열하려면 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣중 두 곳에 각각 a를 놓으면 되므로 이 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2=6$

㉠ c ㉡ b ㉢ b ㉣

위의 경우, 같은 문자끼리 이웃하지 않도록 나열하려면 ㉢에 a를 놓고, 남은 ㉠, ㉡, ㉣ 중 한 곳에 a를 놓으면 되므로 이 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1=3$

그러므로 두 문자를 2개씩 택하여 같은 문자끼리 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는

$3\times(3+6+3)=3\times12=36$

①, ②에 의하여 이 경우의 수는

$6+36=42$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$6+42=48$

192. 정답 61

$a_1+a_2=9$인 사건을 A, $|a_1-a_2|>1$인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

6개의 공에 적힌 수의 합이 12이므로 사건 A가 일어날 확률은 다음 경우로 나누어 구할 수 있다.

(i) 첫 번째 시행에서 동전의 앞면이 나온 경우

두 번째 시행에서 동전의 뒷면이 나와야 하므로 이 확률은 $\frac{1}{4}$이다. 이때 $a_1+a_2=9$가 되도록 하는 a_1, a_2의 값과 각각의 경우에 대한 확률을 구하면 다음과 같다.

a_1	a_2	확률
$1+1+2=4$	$2+3=5$	$\frac{2\times2}{{}_6\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_2}=\frac{1}{15}$
$1+1+3=5$	$2+2=4$	$\frac{2\times1}{{}_6\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_2}=\frac{1}{30}$
$1+2+2=5$	$1+3=4$	$\frac{2\times2}{{}_6\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_2}=\frac{1}{15}$
$1+2+3=6$	$1+2=3$	$\frac{8\times1}{{}_6\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_2}=\frac{2}{15}$
$2+2+3=7$	$1+1=2$	$\frac{2\times1}{{}_6\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_2}=\frac{1}{30}$

그러므로 첫 번째 시행에서 동전의 앞면이 나올 때, $a_1+a_2=9$일 확률은

$\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{30}+\frac{1}{15}+\frac{2}{15}+\frac{1}{30}\right)=\frac{1}{12}$

(ii) 첫 번째 시행에서 동전의 뒷면이 나온 경우

㉠ 두 번째 시행에서 동전의 앞면이 나온 경우

이 경우의 확률은 $\frac{1}{4}$

이때 $a_1+a_2=9$가 되도록 하는 a_1, a_2의 값과 각각의 경우에 대한 확률을 구하면 다음과 같다.

a_1	a_2	확률
$1+1=2$	$2+2+3=7$	$\frac{1\times2}{{}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_3}=\frac{1}{30}$
$1+2=3$	$1+2+3=6$	$\frac{4\times2}{{}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_3}=\frac{2}{15}$
$1+3=4$	$1+2+2=5$	$\frac{4\times1}{{}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_3}=\frac{1}{15}$
$2+2=4$	$1+1+3=5$	$\frac{1\times2}{{}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_3}=\frac{1}{30}$
$2+3=5$	$1+1+2=4$	$\frac{4\times1}{{}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_3}=\frac{1}{15}$

이 경우의 확률은

$\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{30}+\frac{2}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{30}+\frac{1}{15}\right)=\frac{1}{12}$

㉡ 두 번째 시행에서 동전의 앞면이 나온 경우

이 경우의 확률은 $\frac{1}{4}$

이때 $a_1+a_2=9$가 되도록 하는 a_1, a_2의 값과 각각의 경우에 대한 확률을 구하면 다음과 같다.

a_1	a_2	확률
$1+2=3$	$3+3=6$	$\dfrac{4\times1}{{}_6C_2\times{}_4C_2}=\dfrac{2}{45}$
$1+3=4$	$2+3=5$	$\dfrac{4\times2}{{}_6C_2\times{}_4C_2}=\dfrac{4}{45}$
$2+3=5$	$1+3=4$	$\dfrac{4\times2}{{}_6C_2\times{}_4C_2}=\dfrac{4}{45}$
$3+3=6$	$1+2=3$	$\dfrac{1\times4}{{}_6C_2\times{}_4C_2}=\dfrac{2}{45}$

이 경우의 확률은

$$\frac{1}{4}\times\left(\frac{2}{45}+\frac{4}{45}+\frac{4}{45}+\frac{2}{45}\right)=\frac{1}{15}$$

㉠, ㉡에 의하여 첫 번째 시행에서 동전의 뒷면이 나올 때 $a_1+a_2=9$일 확률은

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{15}=\frac{3}{20}$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{12}+\frac{3}{20}=\frac{7}{30}$$

이때 사건 $A\cap B$는 $a_1+a_2=9$이고 $|a_1-a_2|>1$인 사건이고, 이는 (ⅰ)의 표와 (ⅱ)의 ㉠, ㉡의 표에서 음영으로 처리한 경우이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}\times\left\{\left(\frac{2}{15}+\frac{1}{30}\right)+\left(\frac{1}{30}+\frac{2}{15}\right)+\left(\frac{2}{45}+\frac{2}{45}\right)\right\}$$
$$=\frac{19}{180}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{19}{180}}{\frac{7}{30}}=\frac{19}{42}$$

이므로

$p+q=42+19=61$

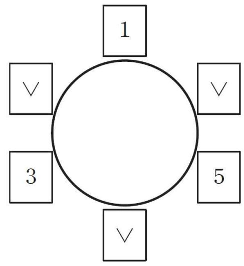
193. 정답 ③

숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 원형으로 일정한 간격을 두고 임의로 배열할 때, 이웃한 카드에 적힌 두 수의 곱이 모두 짝수인 사건을 A, 서로 마주 보는 카드에 적힌 두 수의 합이 모두 7인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cup B)$이다.

여섯 장의 카드를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

(ⅰ) $\mathrm{P}(A)$는 다음과 같다.

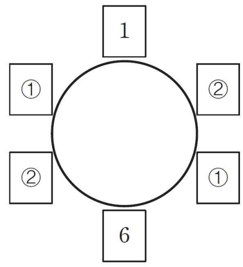


이웃한 두 수의 곱이 짝수가 되려면 1, 3, 5가 적힌 카드를 원형으로 배열한 후, 위의 그림의 ∨ 표시된 곳에 2, 4, 6이 적힌 카드를 하나씩 배열하면 되므로 이 경우의 수는

$(3-1)!\times3!=2!\times3!=12$

그러므로 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{12}{120}=\dfrac{1}{10}$

(ⅱ) $\mathrm{P}(B)$는 다음과 같다.

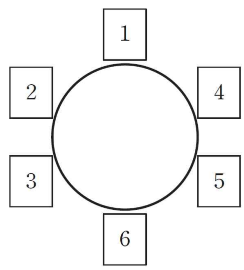


$7=1+6=2+5=3+4$이므로 마주 보는 두 수의 합이 7인 경우는 그림과 같이 1, 6이 적힌 카드를 마주 보도록 배치한 후, 2, 5가 적힌 카드 두 장을 모두 ① 또는 모두 ②에 배치하고 3, 4가 적힌 카드를 남은 두 자리에 배치하는 경우이므로 이 경우의 수는

$(2-1)!\times(2\times2!)\times2!=8$

그러므로 $\mathrm{P}(B)=\dfrac{8}{120}=\dfrac{1}{15}$

(ⅲ) $\mathrm{P}(A\cap B)$는 다음과 같다.



그림과 같이 1, 3, 5가 적힌 카드를 원형으로 배열한 후, 1, 3, 5가 적힌 카드가 배열된 자리와 마주보는 자리에 각각 6, 4, 2가 적힌 카드를 놓으면 이웃한 두 수의 곱이 짝수이면서 마주 보는 두 수의 합이 7이 되므로 이렇게 배열하는 경우의 수는

$(3-1)!\times1=2!\times1=2$

그러므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{2}{120}=\dfrac{1}{60}$

따라서 확률의 덧셈정리에 의하여 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}-\frac{1}{60}=\frac{3}{20}$$

194. 정답 ①

1회 시행에서 기록한 수를 확률변수 X라 하자.

(ⅰ) 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3의 배수인 경우 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2 또는 3 또는 4 또는 6이고, 각각의 확률은 다음과 같다.

$X=2$인 경우는 꺼낸 2개의 공에 적힌 수가 1, 2 또는 1, 3인 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{9}$$

$X=3$인 경우는 꺼낸 2개의 공에 적힌 수가 1, 4인 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$$

$X=4$인 경우는 꺼낸 2개의 공에 적힌 수가 2, 3 또는 2, 4인 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=4)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{9}$$

$X=6$인 경우는 꺼낸 2개의 공에 적힌 수가 3, 4인 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=6)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$$

(ⅱ) 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3의 배수가 아닌 경우 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1 또는 2 또는 3이고, 각각의 확률은 다음과 같다.

$X=1$인 경우는 꺼낸 1개의 공에 적힌 수가 1인 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_1}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$$

$X=2$인 경우는 꺼낸 1개의 공에 적힌 수가 2또는 3인 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{{}_4\mathrm{C}_1}=\frac{2}{3}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{3}$$

$X=3$인 경우는 꺼낸 1개의 공에 적힌 수가 4인 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_1}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	$\mathrm{P}(X=x)$
1	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{9}+\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$
3	$\frac{1}{18}+\frac{1}{6}=\frac{2}{9}$
4	$\frac{1}{9}$
6	$\frac{1}{18}$
합계	1

주어진 시행을 2번 반복했을 때, 1회와 2회에 기록한 수를 각각 X_1, X_2라 하면 $\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$이다.

$\overline{X}=3$인 의 X_1, X_2 순서쌍 $(X_1,\ X_2)$는 (2, 4), (3, 3), (4, 2)이므로

$$\mathrm{P}(\overline{X}=3)=\frac{4}{9}\times\frac{1}{9}+\frac{2}{9}\times\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\times\frac{4}{9}$$
$$=\frac{4}{27}$$

195. 정답 13

이산확률변수 X에 대하여 모든 확률의 합은 1이므로

$$a+\frac{1}{4}+b+\frac{1}{12}=1$$

$$a+b=\frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이산확률변수 Y에 대하여 모든 확률의 합은 1이므로

$$\sum_{k=1}^{4}\mathrm{P}(Y=k)$$
$$=\sum_{k=1}^{4}\left\{\frac{k}{2}\times\mathrm{P}(X=k)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1\times a+2\times\frac{1}{4}+3\times b+4\times\frac{1}{12}\right)$$
$$=\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}b+\frac{5}{12}$$

즉, $\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}b+\frac{5}{12}=1$에서

$$a+3b=\frac{7}{6} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{5}{12}$, $b=\frac{1}{4}$

그러므로

$$\mathrm{E}(Y)=\sum_{k=1}^{4}\{k\times\mathrm{P}(Y=k)\}$$

$$= \sum_{k=1}^{4} \left\{ k \times \frac{k}{2} \times \mathrm{P}(X=k) \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1^2 \times \frac{5}{12} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 3^2 \times \frac{1}{4} + 4^2 \times \frac{1}{12}\right)$$

$$= \frac{5}{2}$$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(4Y+3) &= 4 \times \mathrm{E}(Y) + 3 \\ &= 4 \times \frac{5}{2} + 3 \\ &= 13\end{aligned}$$

196. 정답 10

조건 (가)를 만족시키는 함수 f의 개수는

$4! = 24$

조건 (나)를 만족시키는 함수 g의 개수는 다음과 같다.

집합 X의 원소 중 함수 g의 치역이 될 두 원소를 택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2 = 6$

이 각각에 대하여 함수 g의 치역의 두 원소를 α, β $(\alpha \neq \beta)$라 할 때, 함수 g는 집합 $\{1, 2, 3, 4\}$에서 집합 $\{\alpha, \beta\}$로의 함수 중에서 치역이 $\{\alpha\}$ 또는 $\{\beta\}$인 함수를 제외하면 되므로 그 개수는

$2^4 - 2 = 14$

그러므로 가능한 함수 g의 개수는

$6 \times 14 = 84$

그러므로 가능한 두 함수 f, g의 순서쌍 (f, g)의 개수는

24×84

이때 $S_1 = 2S_2$인 사건을 A라 하면 $\mathrm{P}(A)$는 다음과 같다.

(ⅰ) 함수 $g \circ f$의 치역이 $\{1, 2\}$인 경우

$S_1 = 2S_2$이므로 함수 $f \circ g$의 치역이 $\{2, 3\}$, 즉 $\{f(1), f(2)\} = \{2, 3\}$이다.

함수 g의 치역이 $\{1, 2\}$이므로 가능한 함수 g의 개수는

$2^4 - 2 = 14$

이때 $\{f(1), f(2)\} = \{2, 3\}$이므로

$f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 $2! = 2$

$f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 $2! = 2$

가능한 함수 f의 개수는

$2 \times 2 = 4$

즉, 순서쌍 (f, g)의 개수는

$14 \times 4 = 56$

이므로 이때의 확률은

$$\frac{56}{24 \times 84} = \frac{1}{36}$$

(ⅱ) 함수 $g \circ f$의 치역이 $\{1, 3\}$인 경우

$S_1 = 2S_2$이므로 함수 $f \circ g$의 치역이 $\{2, 4\}$, 즉 $\{f(1), f(3)\} = \{2, 4\}$이다.

함수 g의 치역이 $\{1, 3\}$이므로 가능한 함수 g의 개수는

$2^4 - 2 = 14$

이때 $\{f(1), f(3)\} = \{2, 4\}$이므로

$f(1)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 $2! = 2$

$f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 $2! = 2$

가능한 함수 f의 개수는

$2 \times 2 = 4$

즉, 순서쌍 (f, g)의 개수는

$14 \times 4 = 56$

이므로 이때의 확률은

$$\frac{56}{24 \times 84} = \frac{1}{36}$$

(ⅲ) 함수 $g \circ f$의 치역이 $\{2, 4\}$인 경우

$S_1 = 2S_2$이므로 함수 $f \circ g$의 치역이 $\{3, 4\}$, 즉 $\{f(2), f(4)\} = \{3, 4\}$이다.

함수 g의 치역이 $\{2, 4\}$이므로 가능한 함수 g의 개수는

$2^4 - 2 = 14$

이때 $\{f(2), f(4)\} = \{3, 4\}$이므로

$f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 $2! = 2$

$f(1)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 $2! = 2$

가능한 함수 f의 개수는

$2 \times 2 = 4$

즉, 순서쌍 (f, g)의 개수는

$14 \times 4 = 56$

이므로 이때의 확률은

$$\frac{56}{24 \times 84} = \frac{1}{36}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

$$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{12}$$

따라서 $p = \frac{1}{12}$이므로

$$120 \times p = 120 \times \frac{1}{12} = 10$$