내신대비 모의고사

범위 : 미분-적분

시험시간 : 50분

이름 :

[객관식]

1. 정적분 $\int_{0}^{2}(6x^2+4x+3)dx$을 구하면?

① 10 ② 20 ③ 30
④ 40 ⑤ 50

2. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=t^4+t^3-2t^2+3t$일 때, $t=1$에서의 속도를 구하면?

① -2 ② 0 ③ 2
④ 4 ⑤ 6

3. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-6x+3$은 $x=a$에서 극댓값을, $x=b$에서 극솟값을 갖는다. $b-a$의 값은?

① 5 ② -3 ③ -2
④ 1 ⑤ 2

4. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 $3x^2-6x+3$이다. 이 곡선이 점 $(1, 4)$을 지날 때, $f(-1)$의 값은?

① -3 ② -4 ③ -1
④ 0 ⑤ 2

5. 곡선 $y=x^2-2x-3$과 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=3$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하면?

① $\frac{32}{3}$ ② $\frac{17}{3}$ ③ $\frac{10}{3}$
④ $\frac{13}{3}$ ⑤ $\frac{7}{3}$

6. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $\int_{1}^{x}f(t)dt=x^3+2ax^2-ax+1$를 만족시킬 때, $f(a)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 5 ② 4 ③ 8
④ 12 ⑤ 30

7. 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)=3x^2+\int_0^1 xf(t)dt$일 때, $f(1)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

8. 함수 $f(x)=x^3+x^2+x$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하면?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

9. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $2x^4-4x^2 \ge k$가 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값은?

① -3 ② -2 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

10. 곡선 $y=x^3-x$과 직선 $y=2x+k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위를 $\alpha<k<\beta$라 할 때, $\beta-\alpha$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

11. 다항함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $f(-x)=-f(x)$	(나) $\int_{-2}^{1} f(x)dx=3$

이 때, 정적분 $\int_{1}^{2}(f(x)+1)dx$의 값은?

① 0 ② -1 ③ -2
④ 1 ⑤ 2

12. 두 함수 $f(x)=-2x^2-8x+a$, $g(x)=x^4+x^2-6x$가 있다. 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1) \le g(x_2)$가 항상 성립하도록 하는 실수 a의 최댓값은?

① -13 ② -12 ③ -10
④ -8 ⑤ -5

13. 원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 A, B의 시각 t에서의 속도가 각각 t^2-10t, t^3-11t^2+22t이다. 두 점 A, B사이의 거리의 최댓값은? (단, $0 \le t \le 10$)

① 4 ② 8 ③ 16
④ 32 ⑤ 64

14. 임의의 다항함수 $f(x)$와 양의 실수 a에 대하여 다음 〈보기〉 중 옳은 것을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

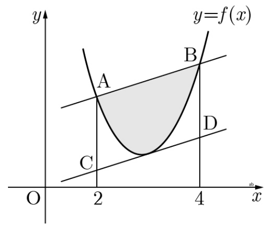
ㄱ. $\int_{-a}^{a}\{f(x)+f(-x)\}dx=4\int_{0}^{a}f(x)dx$

ㄴ. $\int_{-a}^{a}\{f(x)-f(-x)\}dx=0$

ㄷ. $\int_{-a}^{a}f(|x|)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 다음 그림과 같이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프 위에 두 점 $A(2, f(2))$, $B(4, f(4))$이 있다. 이 곡선에 접하고 직선 AB와 평행한 직선이 두 직선 $x=2$, $x=4$과 만나는 점을 각각 C, D라고 하자. 평행사변형 $ACDB$의 넓이가 8일 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 AB로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하면?



① $\frac{4}{3}$ ② 2 ③ $\frac{8}{3}$
④ $\frac{16}{3}$ ⑤ 4

16. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(0)=0$, $f'(2)=16$
(나) 어떤 양수 k에 대하여 두 열린구간 $(-\infty, 0)$, $(0, k)$에서 $f'(x)<0$이다.

다음 〈보기〉 중 옳은 것을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. 방정식 $f'(x)=0$은 열린구간 $(0, 2)$에서 한 개의 실근을 갖는다.
ㄴ. 함수 $f(x)$의 극댓값이 존재한다.
ㄷ. $f(0)=0$이면, 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq -\frac{1}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[주관식]

17. 다음 식 또는 문장이 맞으면 ○, 틀리면 X를 적으시오.

(1) $\int (3x^2-2x)dx = x^3-x^2$

(2) $\int_{-1}^{1} (3x^2+10x+3)dx = 8$

(3) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

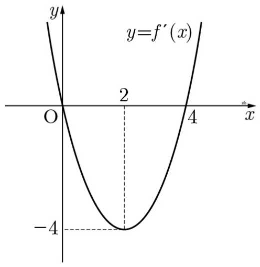
(4) 원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)=8-4t$일 때, $t=0$에서 $t=3$까지 점 P의 위치는 6이다.

(5) $\int \left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx = \int \left\{\frac{d}{dx}g(x)\right\}dx$이면 $f(x)=g(x)$이다.

(6) 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$이다.

18. 다항함수 $f(x)$와 그 부정적분 $F(x)$에 대하여 $F(x)+\int xf(x)dx = x^3-x^2-5x+3$가 성립할 때, $f(1)$을 구하시오.

19. 삼차함수 $y=f(x)$의 도함수의 그래프가 다음 그림과 같고, $f(x)$의 극댓값이 4일 때, 다음 물음에 답하시오.



(1) 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 극댓값을, $x=b$에서 극솟값을 갖는다. a, b의 값을 구하고 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 좌표평면에 그리시오.

(2) 곡선 $y=f(x)$와 $y=4$으로 둘러싸인 도형 넓이를 구하시오.

20. 두 곡선 $y=6-x^2$, $y=-6+x^2\,(-\sqrt{6} \le x \le \sqrt{6})$으로 둘러싸인 도형에 내접하는 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하시오.

21. 점 $(-2, a)$에서 곡선 $y=-x^3+2x$에 서로 다른 세 접선을 그을 수 있게 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

22. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=6x+\int_0^x (3x+4t)t^2dt$를 만족시키는 함수 $f(x)$의 구간 $[1, 2]$에서 최솟값이 p일 때, p의 값을 구하시오.

정답 및 풀이

1. 정답 ③

$\int_0^2 (6x^2+4x+3)dx = [3x^3+2x^2+3x]_0^2 = 30$

2. 정답 ⑤

$f'(x) = 4t^3+3t^2-4t+3$
$f'(1)=6$

3. 정답 ①

$f'(x) = x^2-x-6 = (x-3)(x+2)$

$x=-2$에서 극댓값, $x=3$에서 극솟값

$b-a=3-(-2)=5$

4. 정답 ②

$f'(x)=3x^2-6x+3$

$f(x) = x^3-3x^2+3x+C$

$f(1)=4,\ C=3$

$f(x) = x^3-3x^2+3x+3$

$f(-1)=-4$

5. 정답 ①

$\int_{-1}^3 (x^2-2x-3)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x\right]_{-1}^3 = \frac{32}{3}$

6. 정답 ⑤

$f(x)=3x^2+4ax-a$

$\int_1^1 f(t)dt = x^3+2ax^2-ax+1 = 1+2a-a+1=0$

$a=-2$

$f(x)=3x^2-8x+2$

$f(-2)=30$

7. 정답 ⑤

$\int_0^1 f(t)dt = A$

$f(x) = 3x^2+Ax$

$\int_0^1 (3x^2+Ax)\,dt = A$

$\left[x^3+\frac{1}{2}Ax^2\right]_0^1 = 1+\frac{1}{2}A = A$

$A=2$

$f(x) = 3x^2+2x$

$f(1)=3+2=5$

8. 정답 ①

$x^3-x^2+x=x$

$x=1$ 또는 $x=0$

$2\times\left\{-\int_0^1 (x^3-x^2)\,dx\right\} = \frac{1}{6}$

9. 정답 ②

$8x^3-8x=0$

$x=-1, x=1$에서 극솟값 그래서 최솟값은 -2

$-2 \ge k$

10. 정답 ④

$x^3-x = 2x+k$

$x^3-3x=k$

$f(x)=x^3-3x$

$f'(x)=3x^2-3$

$x=-1$에서 극댓값 2, $x=1$에서 극솟값 -2

$-2<k<2$

11. 정답 ③

$\int_{-2}^1 f(x)dx = F(1)-F(-2) = 3$

$f(x)$는 기함수, $F(x)$는 우함수

$\int_1^2 \{f(x)+1\}dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_1^2 1dx = F(2)-F(1)+2-1=-2$

12. 정답 ②

$f(x)=-2x^2-8x+a=-2(x+2)^2+a+8$

$g(x)=x^4+x^2-6x$

$g'(x)=4x^3+2x-6 = 2(x-1)(2x^2+2x+3)$

$x=1$에서 최솟값 -4

$a+8\le -4$

$a\le -12$

13. 정답 ⑤

$v_A = t^2-10t,\ v_B = t^3-11t^2+22t$

$\int (v_B - v_A)dx = \int (t^3 - 12t^2 + 32t)dt$

$t^3 - 12t^2 + 32t = t(t-4)(t-8)$

$t=4$일 때 최댓값을 갖는다.

$\int_0^4 (t^3 - 12t^2 + 32t)\,dt = \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{10}{3}t^3 + 12t^2\right]_0^4 = 64$

14. 정답 ④

ㄱ. $\int_{-a}^{a} \{f(x)+f(-x)\}dx = 4\int_0^a f(x)dx$

우함수 일 때 만 성립

ㄴ. $\int_{-a}^{a} \{f(x)-f(-x)\}dx = 0$

$f(x)-f(-x)$는 기함수이므로 성립

ㄷ. $\int_{-a}^{a} f(|x|)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

$f(|x|)$는 우함수이므로 성립.

15. 정답 ④

$\overline{CD}$의 직선의 방정식을 $g(x)$

$h(x) = f(x) - g(x) = a(x-3)^2$

평행사변형의 넓이는 8 밑변의 길이 2, 높이 4

$h(4) = 4$

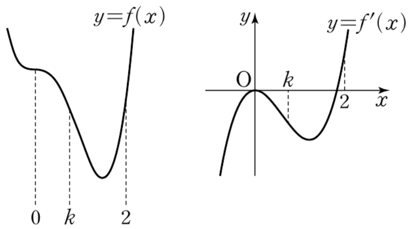
$h(x) = 4(x-3)^2$

$\int_2^4 4(x-3)^2 dx = \int_{-1}^{1} 4x^2 dx = 2\int_0^1 4x^2 dx = \left[\frac{8}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{8}{3}$

$8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$

16. 정답 ③

두 조건 (가), (나)를 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 도함수 $y=f'(x)$의 그래프는 그림과 같다.



ㄱ. 함수 $y=f'(x)$의 그래프와 x축은 열린구간 $(k,\ 2)$에서 한 점에서 만난다. 즉, 방정식 $f'(x)=0$은 열린구간 $(0,\ 2)$에서 한 개의 실근을 갖는다.

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 함수 $f(x)$는 극솟값을 갖는다.

ㄷ. $f(0)=0$이면 양수 a에 대하여 $f(x)=x^3(x-a)$로 놓을 수 있다.

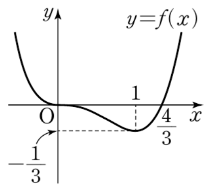
이때 $f'(x) = 4x^3 - 3ax^2$이므로 $f'(2) = 32 - 12a = 16$에서

$a = \frac{4}{3}$ 그러므로 $f(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3$에서

$f'(x) = 4x^3 - 4x^2 = 4x^2(x-1)$

$f'(x) = 0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 $-\frac{1}{3}$을 가지므로 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq -\frac{1}{3}$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

17. 정답 (1) × (2) ○ (3) × (4) ○ (5) × (6) ○

(1) $\int (3x^2 - 2x)dx = x^3 - x^2 + C$

(2) $\int_{-1}^{1} (3x^2 + 10x + 3)dx = 2\int_0^1 (3x^2+3)dx = 2\left[x^3 + 3x\right]_0^1 = 8$

(3) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이 아니더라도 극값을 가질 수 있다.

(4) 원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t) = 8-4t$일 때, $t=0$에서 $t=3$까지 점 P의 위치는 6이다.

$\int_0^3 (8-4t)dt = \left[8t - 2t^2\right]_0^3 = 24 - 18 = 6$

(5) $\int \left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx = \int \left\{\frac{d}{dx}g(x)\right\}dx$이면 $f(x) = g(x)$이다.

[반례] $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x^2$이면

$\int \left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx = \int 2x\,dx = x^2 + C_1$

$\int \left\{\frac{d}{dx}g(x)\right\}dx = \int 2x\,dx = x^2 + C_2$

$C_1 = C_2 = 0$일 때 가정은 참이지만 결론은 거짓.

(6) 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$이다.

18. 정답 -2

$F(x) + \int xf(x)dx = x^3 - x^2 - 5x + 3$

$f(x)+xf(x) = 3x^2-2x-5$

$(x+1)f(x)=(x+1)(3x-5)$

$f(x)=3x-5$

$f(1)=-2$

19. 정답 (1) $a=0,\ b=4,\ f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+4$ (2) 36

(1) $a=0,\ b=4,\ f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+4$

$f'(x)=Ax(x-4)$

$f'(2)=-4$

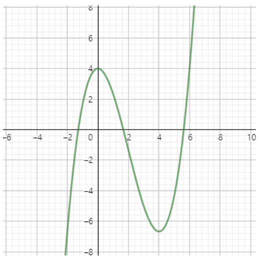
$A=1$

$x=0$에서 극대, $x=4$에서 극소

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+C$

$f(0)=4$

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+4$



(2) 36

$\int_0^6\left(4-\frac{1}{3}x^3+2x^2-4\right)dx = \left[-\frac{1}{12}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^6=36$

20. 정답 $16\sqrt{2}$

$y=6-x^2$위에 한 점 $(t,6-t^2)$, $y=-6+x^2$위의 한 점 $(t,-6+t^2)$로 이루어진 직사각형의 넓이는 $2t\times(12-2t^2)$의 최댓값은 $y=24t-4t^3$

$y'=24-12t^2=-12(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})$

$t=\sqrt{2}$에서 최댓값 $16\sqrt{2}$을 가진다.

21. 정답 $-4<a<4$

$y=(-3t^2+2)(x-t)-t^3+2t$

$a=(-3t^2+2)(-2-t)-t^3+2t$

$2t^3+6t^2-4=a$

$f(t)=2t^3+6t^2-4$

$f'(t)=6t^2+12t=6t(t+2)$

$t=-2$에서 극댓값 4, $t=0$에서 극솟값 -4

$-4<a<4$

22. 정답 8

$f(x)=6x+3x\int_0^x t^2dt+4\int_0^x t^3dt = 6x+x^4+x^4=6x+2x^4$

$f'(x)=6+8x^3$

$1\le x\le 2$ 에서 $f'(x)>0$이므로 증가함수

$f(1)$일 때 최솟값

$f(1)=6+2=8$