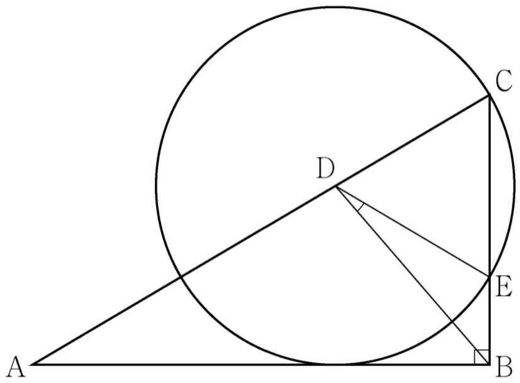
공통과목 : 수학1

01. [2023KDS(K)11-09]

다음 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AC}}=6$, $\angle\mathrm{ABC}=\frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC를 $2:1$로 내분하는 점 D를 중심으로 하고 점 C를 지나는 원이 선분 AB와 한 점에서만 만난다. 이 원이 직선 BC와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 E라 할 때, $\sin(\angle\mathrm{ADE})$의 값은?



① $\frac{\sqrt{21}}{14}$ ② $\frac{\sqrt{22}}{14}$ ③ $\frac{\sqrt{23}}{14}$
④ $\frac{\sqrt{6}}{7}$ ⑤ $\frac{5}{14}$

02. [2023KDS(K)11-12]

$10 \le a_1 < 12$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+a_{k+1})=\frac{(-1)^{n+1}}{2}$$

을 만족시킨다. 어떤 자연수 m에 대하여 세 수 a_{2m}, a_{2m+1}, a_{2m+2}가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, a_{40}의 값은?

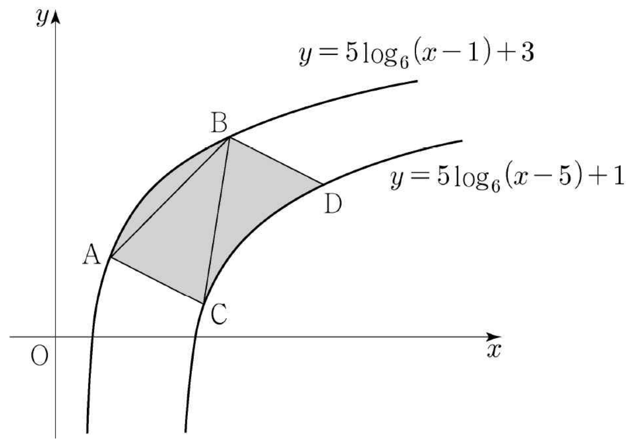
① 27 ② $\frac{55}{2}$ ③ 28
④ $\frac{57}{2}$ ⑤ 29

03. [2023KDS(K)11-13]

곡선 $y=5\log_6(x-1)+3$ 위의 두 점 A, B와 곡선 $y=5\log_6(x-5)+1$ 위의 두 점 C, D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 직선 AC, BD의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.
(나) 두 곡선 $y=5\log_6(x-1)+3$, $y=5\log_6(x-5)+1$과 두 선분 AC, BD로 둘러싸인 부분의 넓이는 30이다.

$\overline{AB}=\overline{BC}$일 때, $\overline{OD}^2$의 값은? (단, O는 원점이고, 점 A의 x좌표가 점 B의 x좌표보다 작다.)



① 147 ② 152 ③ 157
④ 162 ⑤ 167

04. [2023KDS(K)11-15]

수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{2n-1}=n,\ a_{2n}=2a_n$$

을 만족시킨다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보 기

ㄱ. $a_{24}=16$
ㄴ. $a_n=24$인 모든 자연수 n의 개수는 4이다.
ㄷ. 600이하의 자연수 m에 대하여 $a_n=m$인 모든 자연수 n의 개수는 9이고, n을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 b_1, b_2, $\cdots$, b_9라 하면 $\sum_{k=1}^{9}(2^9-b_k)=511$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

05. [2023KDS(K)11-21]

세 양수 a, b, c $(a < b)$에 대하여 집합 $\left\{x \,\middle|\, 0 \le x \le \frac{3}{c}\right\}$에서 정의된 함수 $f(x) = a + b\cos(c\pi x)$가 있다. 곡선 $y = f(x)$가 x축과 만나는 세 점을 각각 $\mathrm{A}(x_1,\ 0)$, $\mathrm{B}(x_2,\ 0)$, $\mathrm{C}(x_3,\ 0)$ $(x_1 < x_2 < x_3)$이라 할 때 $(x_2)^2 = x_1 x_3$이고, 곡선 $y = f(x)$위의 점 D에 대하여 삼각형 ABD는 넓이가 $\sqrt{3}$인 정삼각형이다. $\frac{ab}{c}$의 값을 구하시오.

공통과목 : 수학2

06. [2023KDS(K)11-10]

두 상수 a, b와 함수 $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 + a$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a - 2b$의 값은?

(가) $x = b$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \le f(b)$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \ge f(f(b))$이다.

① -7 ② -6 ③ -5
④ -4 ⑤ -3

07. [2023KDS(K)11-11]

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1 f(x_1) < x_2 f(x_2)$이다.

곡선 $y=f(x)$위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선이 점$(2,\ 0)$을 지날 때, $f(5)$의 값은?

① 7 ② 9 ③ 11
④ 13 ⑤ 15

08. [2023KDS(K)11-14]

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x < 2$일 때, $f(x) = 1 - \lvert x-a \rvert$이다. (단, a는 상수이다.) (나) 모든 실수 x에 대하여 $\{f(x)\}^2 = f(x)f(x+2)$이다. (다) 방정식 $f(x)f(-x) = 1$의 서로 다른 실근의 개수는 8이다.

함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{3}{4}$이 만나는 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, 16번째 수는?

① $\dfrac{41}{4}$ ② $\dfrac{37}{4}$ ③ $\dfrac{33}{4}$
④ $\dfrac{29}{4}$ ⑤ $\dfrac{25}{4}$

09. [2023KDS(K)11-20]

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$는

$$v(t) = t^2 - (a+4)t + 2a + 4 \ (a > 0)$$

이다. 점 P는 시각 $t = k$ $(k > 0)$에서 처음으로 운동 방향을 바꾸고 이때 점 P는 원점에 있다. 점 P가 시각 $t = k$일 때부터 다시 원점을 지날 때까지 움직인 거리는 점 P가 시각 $t = 0$에서 $t = k$까지 움직인 거리의 2배이다. 시각 $t = 4k$에서의 점 P의 속도를 구하시오.

10. [2023KDS(K)11-22]

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

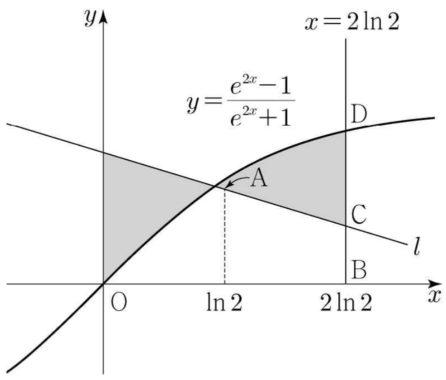
(가) 함수 $|x-a|f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이다.
(나) 함수 $f'(x)$의 그래프와 직선 $y = -3$이 만나는 점의 개수는 2이다.
(다) 함수 $|f(x)+3x-b|$는 $x = -3$에서만 미분가능하지 않다.

$f(a-b)$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 상수이다.)

선택과목 : 미적분

11. [2023KDS(K)11-28]

그림과 같이 점 $\mathrm{A}(\ln 2,\ k)$를 지나는 직선 l이 있다. 직선 $x=2\ln 2$가 x축, 직선 l, 곡선 $y=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$과 만나는 점을 각각 B, C, D라 할 때, 점 C는 선분 BD 위에 있고 점 B가 아니다. 곡선 $y=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$과 y축 및 직선 l로 둘러싸인 부분의 넓이와 곡선 $y=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$과 직선 $x=2\ln 2$ 및 직선 l로 둘러싸인 부분의 넓이가 같을 때, 2^{2k+1}의 값은?



① $\dfrac{17}{8}$ ② $\dfrac{17}{4}$ ③ $\dfrac{17}{2}$
④ 17 ⑤ 34

12. [2023KDS(K)11-29]

함수 $f(x)=x^3-3x^2+5x+a$의 역함수를 $g(x)$라 하자.
함수 $h(x)=(x^2+2x-2)e^{-x}$에 대하여 함수 $h(g(x)-x)$가 $x=1$에서 극소일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

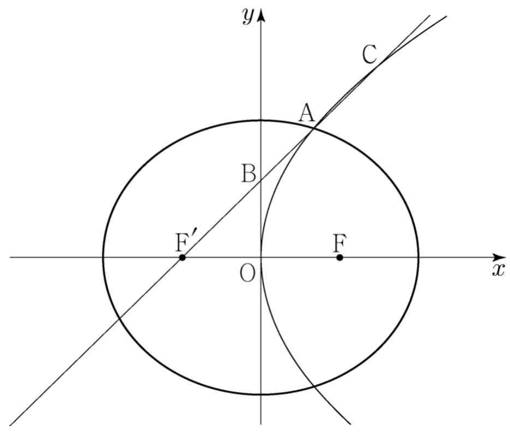
13. [2023KDS(K)11-30]

두 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=\dfrac{a}{|x-2|+2}+b$가 $\displaystyle\int_0^4 xf(x)dx=0$을 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 $g(x)=\displaystyle\int_0^1 tf(xt)dt$일 때, $\displaystyle\int_2^4 g(x)dx=3\ln 2-2$이다. $g(0)=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}\ln 2$일 때, p^2+q^2의 값을 구하시오.
(단, $\ln 2$는 무리수이고, p와 q는 자연수이다.)

선택과목 : 기하

14. [2023KDS(K)11-28]

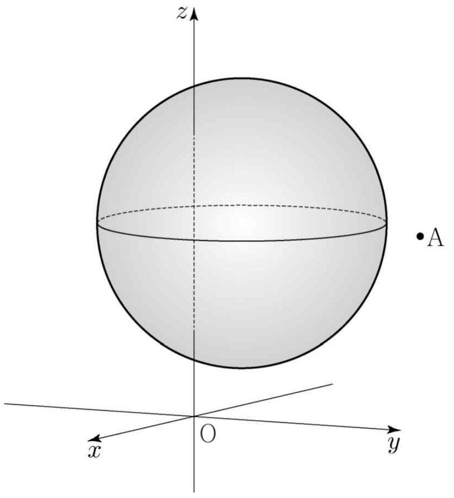
그림과 같이 점 $\mathrm{F}(p,\ 0)$ $(p>0)$을 초점으로 하고 꼭짓점이 O인 포물선과 두 점 F, $\mathrm{F}'(-p,\ 0)$을 초점으로 하는 타원이 있다. 타원과 포물선이 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점을 A, 직선 AF'이 y축과 만나는 점을 B, 직선 AF'이 포물선과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{F}'\mathrm{B}}$: $\overline{\mathrm{BA}}=3:2$, $\overline{\mathrm{AC}}=7$일 때, 타원의 장축의 길이는? (단, O는 원점이다.)



① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

15. [2023KDS(K)11-29]

좌표공간에 구 S : $(x+3\sqrt{3})^2+y^2+(z-9)^2=52$와 점 $\mathrm{A}(-3\sqrt{3},\ 10,\ 9)$가 있다. 구 S 위를 움직이는 점 P의 y좌표가 음수이고, 직선 AP와 y축이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$일 때, $\overline{\mathrm{OP}}^2$의 최댓값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)



16. [2023KDS(K)11-30]

좌표평면에 점 $\mathrm{A}(4\sqrt{3},\ 4)$와 두 점 P, Q가 $\overline{\mathrm{OP}}=6$, $\overline{\mathrm{AQ}}=2$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=36$을 만족시킨다. $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$의 값이 최대일 때의 두 점 P, Q를 각각 X, Y라 하자. $0 \le t \le 1$인 실수 t에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=t\overrightarrow{\mathrm{OX}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OY}}$$

일 때, $\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AR}}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $25\times(M-m)$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

선택과목 : 확률과 통계

17. [2023KDS(K)11-28]

확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 2인 정규분포를 따르고, 확률변수 Y는 평균이 $m+6$, 표준편차가 4인 정규분포를 따른다. 두 확률 변수 X, Y가 $\mathrm{P}(X \geq 9) \leq \mathrm{P}(Y \leq 18) \leq 0.8413$을 만족시킬 때, $\mathrm{P}(6 \leq X \leq 11)$의 최솟값을 다음의 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

<표준정규분포표>

① 0.6247 ② 0.6687 ③ 0.7745
④ 0.8185 ⑤ 0.9104

18. [2023KDS(K)11-29]

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f : X \to X$의 개수를 구하시오.

(가) $f(1) < f(2) < f(3)$, $f(4) \leq f(5) \leq f(6)$
(나) $f(2) \leq f(6)$

19. [2023KDS(K)11-30]

주머니에 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 흰 공 4개와 숫자 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 검은 공 4개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 4번 반복하여 확인한 4개의 수를 크지 않는 수부터 차례로 a, b, c, d라 하자. $b \le 4$일 때, 두 번째 시행과 세 번째 시행에서 꺼낸 공의 색이 서로 다를 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

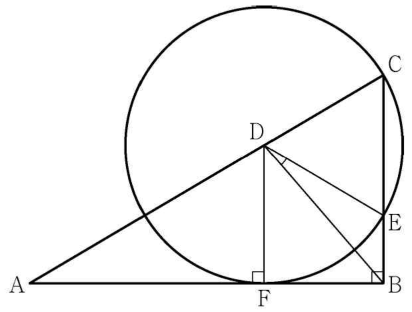
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

빠른 정답

01	❶	02	❶	03	❸	04	❺	05	18
06	❹	07	❹	08	❹	09	12	10	50
11	❷	12	10	13	20	14	❷	15	304
16	576	17	❷	18	952	19	367	20	-

고3 2023KDS(K)11 핵심체크 해설

1) 정답 ❶



점 D가 선분 AC를 2 : 1로 내분하는 점이므로 $\overline{AD}=4$, $\overline{CD}=2$이고,
원이 선분 AB와 만나는 점을 F라 하면
$\overline{DF}=\overline{CD}=2$, $\angle AFD=\frac{\pi}{2}$이고
직각삼각형 ADF에서 $\overline{AD}:\overline{DF}=2:1$이므로
$\angle ADF=\frac{\pi}{3}$, $\overline{AF}=2\sqrt{3}$
두 선분 DF와 CB가 평행하므로
$\angle ACB=\angle ADF=\frac{\pi}{3}$
곧, $\overline{BC}=3$, $\overline{AB}=3\sqrt{3}$
특히 $\overline{CD}=\overline{DE}$이고 $\angle DEC=\angle DCE=\frac{\pi}{3}$이므로
삼각형 CDE는 정삼각형이다.
따라서 $\overline{CE}=\overline{CD}=2$
한편, $\overline{BF}=\overline{AB}-\overline{AF}=\sqrt{3}$이므로
직각삼각형 DFB에서
$\overline{BD}=\sqrt{\overline{DF}^2+\overline{BF}^2}=\sqrt{7}$
$\angle BED=\pi-\angle CED=\frac{2\pi}{3}$,
$\overline{BE}=\overline{BC}-\overline{CE}=3-2=1$이므로
삼각형 BDE에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BE}}{\sin(\angle BDE)}=\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BED)}$$

따라서

$$\begin{aligned}\sin(\angle BED)&=\frac{\overline{BE}}{\overline{BD}}\times\sin(\angle BED)\\&=\frac{1}{\sqrt{7}}\times\sin\frac{2\pi}{3}\\&=\frac{\sqrt{7}}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=\frac{\sqrt{21}}{14}\end{aligned}$$

2) 정답 ❶

$\sum_{k=1}^{n}(a_k+a_{k+1})=\frac{(-1)^{n+1}}{2}$의 양변에 $n=1$을 대입하면

$a_1+a_2=\frac{1}{2}$

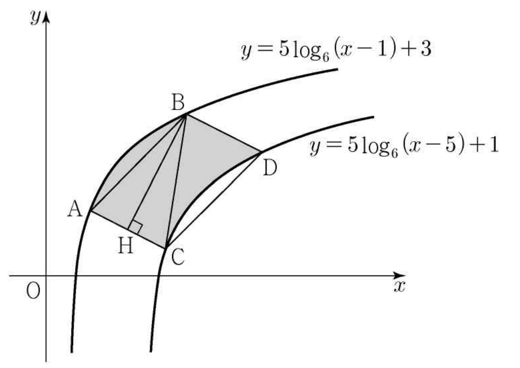
$n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여

$$\begin{aligned}a_n+a_{n+1}&=\sum_{k=1}^{n}(a_k+a_{k+1})-\sum_{k=1}^{n-1}(a_k+a_{k+1})\\&=\frac{(-1)^{n+1}}{2}-\frac{(-1)^n}{2}\\&=(-1)^{n+1}\end{aligned}$$

곧, 모든 자연수 n에 대하여
$a_{2n}+a_{2n+1}=-1$ …… ㉠
$a_{2n+1}+a_{2n+2}=1$ …… ㉡
㉡에서 ㉠을 변끼리 빼면
$a_{2n+2}-a_{2n}=2$
곧, 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 $a_2=-a_1+\frac{1}{2}$이고
공차가 2인 등차수열이다.
$a_{2n}=-a_1+\frac{1}{2}+(n-1)\times 2$
㉠에서 $a_{2n+1}=-1-a_{2n}$이므로
모든 자연수 n에 대하여
$a_{2n}=-a_1+\frac{4n-3}{2}$, $a_{2n+1}=a_1-\frac{4n-1}{2}$
따라서
$a_{2m}=-a_1+\frac{4m-3}{2}$,
$a_{2m+1}=a_1-\frac{4m-1}{2}$,
$a_{2m+2}=-a_1+\frac{4m+1}{2}$이고,
세 수 a_{2m}, a_{2m+1}, a_{2m+2}가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$a_{2m}+a_{2m+2}=2\times a_{2m+1}$에서
$-2a_1+\frac{8m-2}{2}=2a_1-\frac{8m-2}{2}$
곧, $a_1=2m-\frac{1}{2}$
한편, $10\leq a_1<12$에서
$10\leq 2m-\frac{1}{2}<12$
정리하면 $5+\frac{1}{4}\leq m<6+\frac{1}{4}$이고,
m은 자연수이므로 $m=6$이고
$a_1=2m-\frac{1}{2}=\frac{23}{2}$
모든 자연수 n에 대하여
$a_{2n}=-a_1+\frac{4n-3}{2}=2n-13$이므로
$a_{40}=2\times 20-13=27$

3) 정답 ❸

$y=5\log_6(x-5)+1$은 곡선 $y=5\log_6(x-1)+3$을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.
또한, 조건 (가)에 의하여
$y=5\log_6(x-5)+1$ 위의 점 C가 점 A를 지나고 기울기가 $-\frac{1}{2}$인 직선 위에 있다.
따라서 점 A를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점이 C이다.
같은 방법으로 점 B를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점이 D이므로
두 직선 AC, BD가 평행하고
$\overline{AC}=\overline{BD}=\sqrt{4^2+(-2)^2}=2\sqrt{5}$
곧, 사각형 ACDB는 평행사변형이다.
이때 점 A의 좌표를 $(t,\ 5\log_6(t-1)+3)$이라 하면
점 C의 좌표는 $(t+4,\ 5\log_6(t-1)+1)$이고,
점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{AB}=\overline{BC}$이므로 $\overline{AH}=\overline{CH}$이다.
곧, 점 H의 좌표는 $(t+2,\ 5\log_6(t-1)+2)$이다.



곡선 $y=5\log_6(x-1)+3$과 선분 AB로 둘러싸인 부분을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면 곡선 $y=5\log_6(x-5)+1$과 선분 CD로 둘러싸인 부분과 일치하므로
두 곡선 $y=5\log_6(x-1)+3$, $y=5\log_6(x-5)+1$과 두 선분 AC, BD로 둘러싸인 부분의 넓이는 평행사변형 ACDB의 넓이와 같다.
이때 평행사변형 ACDB의 넓이는
$\overline{AC}\times\overline{BH}=2\sqrt{5}\times\overline{BH}$이므로
$2\sqrt{5}\times\overline{BH}=30$, 곧 $\overline{BH}=3\sqrt{5}$
한편, 기울기가 $-\frac{1}{2}$인 직선 AC와 직선 BH가 서로 수직이므로 직선 BH의 기울기는 2이다.
두 점 B, H의 x좌표의 차를 k라 하면
y좌표의 차는 $2k$이고,
$\overline{BH}=\sqrt{k^2+(2k)^2}=\sqrt{5}k$
이때 $\overline{BH}=3\sqrt{5}$이므로 $k=3$
점 H의 좌표가 $(t+2,\ 5\log_6(t-1)+2)$이므로
점 B의 좌표는 $(t+5,\ 5\log_6(t-1)+8)$이다.
특히, 점 B가 곡선 $y=5\log_6(x-1)+3$위의 점이므로
$5\log_6(t-1)+8=5\log_6((t+5)-1)+3$
$5\log_6(t+4)-5\log_6(t-1)=5$
$\log_6\frac{t+4}{t-1}=1$
$\frac{t+4}{t-1}=6$에서 $t=2$
따라서 점 B의 좌표는 $(7,\ 8)$이므로
점 D의 좌표는 $(7+4,\ 8-2)$, 곧 $(11,\ 6)$이다.
$\overline{OD}^2=11^2+6^2=157$

4) 정답 ❺

ㄱ. $a_{24}=2a_{12}$
$\quad=2^2a_6$

$=2^3a_3$

$=2^3\times2$

$=16$ (참)

ㄴ. 임의의 자연수 n에 대하여

$n=2^N\times(2p-1)$을 만족시키는 음이 아닌 정수 N과 자연수 p가 존재한다.

이때

$a_n=a_{2^N(2p-1)}$

$=2a_{2^{N-1}(2p-1)}$

$=2^2a_{2^{N-2}(2p-1)}$

$\vdots$

$=2^Na_{2p-1}$

$=2^N\times p$ …… ㉠

$a_n=24$인 자연수 n을

$n=2^N\times(2p-1)$

(N은 음이 아닌 정수, p는 자연수)라 하자.

㉠에 의하여 $2^N\times p=24$

$24=2^0\times24=2^1\times12=2^2\times6=2^3\times3$

에서

순서쌍 $(N,\ p)$는 $(0,\ 24)$, $(1,\ 12)$, $(2,\ 6)$, $(3,\ 3)$이고, $n=2^N\times(2p-1)$이므로

자연수 n은 $2^0\times47$, $2^1\times23$, $2^2\times11$, $2^3\times5$

이다. 따라서 $a_n=24$인 모든 자연수 n의 개수는 4이다. (참)

ㄷ. 600이하의 자연수 m에 대하여

$a_n=m$인 자연수 n을

$n=2^N\times(2p-1)$

(N은 음이 아닌 정수, p는 자연수)라 하자.

㉠에 의하여 $2^N\times p=m$

$a_n=m$인 모든 자연수 n의 개수가 9이므로

ㄴ과 마찬가지의 방법으로

순서쌍 $(N,\ p)$의 개수는 9이고,

이때의 $N=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8$이다.

따라서 600이하의 자연수 m은 $2^8\times$(홀수)의 꼴이다.

곧, $m=2^8$

$N=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8$에 대하여

$m=2^8=2^N\times2^{8-N}$에서

$n=2^N\times\{2\times(2^{8-N})-1\}=2^9-2^N$

N의 값이 커질수록 n의 값은 작아지므로

$b_k=2^9-2^{9-k}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9)$

따라서

$$\sum_{k=1}^{9}(2^9-b_k)=\sum_{k=1}^{9}2^{9-k}$$

$=2^8+2^7+2^6+\cdots+2^0$

$=1+2+2^2+\cdots+2^8$

$=\dfrac{1\times(2^9-1)}{2-1}$

$=2^9-1$

$=511$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

5) 정답 18

$0<a<b$, $c>0$이므로

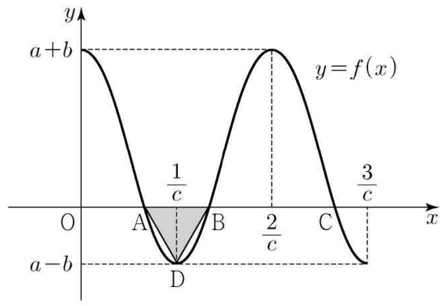
함수 $f(x)=a+b\cos(c\pi x)$의

최댓값은 $a+b>0$, 최솟값은 $a-b<0$

주기는 $\dfrac{2\pi}{c\pi}=\dfrac{2}{c}$

따라서 집합 $\left\{x\,\middle|\,0\le x\le\dfrac{3}{c}\right\}$에서 정의된 함수

$f(x)=a+b\cos(c\pi x)$의 그래프는 다음과 같다.



삼각형 ABD가 정삼각형이므로 점 D는 선분 AB의 수직이등분선 위에 있다.

곧, 점 D의 x좌표는 $\dfrac{x_1+x_2}{2}$이다.

구간 $\left[0,\ \dfrac{2}{c}\right]$에서 함수 $f(x)$의 그래프는

직선 $x=\dfrac{1}{c}$에 대하여 대칭이므로

$\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{1}{c}$ …… ㉠

한편, 삼각형 ABD는 넓이가 $\sqrt{3}$인 정삼각형이므로

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\overline{AB}^2=\sqrt{3}$에서

$\overline{AB}=2$

곧, $x_2-x_1=2$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $x_1=\dfrac{1}{c}-1$, $x_2=\dfrac{1}{c}+1$

함수 $f(x)$의 주기가 $\dfrac{2}{c}$이므로

$x_3=x_1+\dfrac{2}{c}=\dfrac{3}{c}-1$

이때 $(x_2)^2=x_1x_3$이므로

$\left(\dfrac{1}{c}+1\right)^2=\left(\dfrac{1}{c}-1\right)\left(\dfrac{3}{c}-1\right)$에서

$(1+c)^2=(1-c)(3-c)$

$c=\dfrac{1}{3}$

곧, $x_1=3-1=2$, $x_2=3+1=4$,

$x_3=3\times3-1=8$

$f(x_1)=0$에서

$a+b\cos\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)=a-\dfrac{b}{2}=0$

곧, $b=2a$

점 D의 y좌표는

$f\left(\dfrac{1}{c}\right)=f(3)=a-b=-a$

점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{DH}=a$이고,

$\overline{DH}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\overline{AB}$에서

$a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times2=\sqrt{3}$, $b=2a=2\sqrt{3}$

따라서 $\dfrac{ab}{c}=\dfrac{\sqrt{3}\times2\sqrt{3}}{\frac{1}{3}}=18$

6) 정답 ④

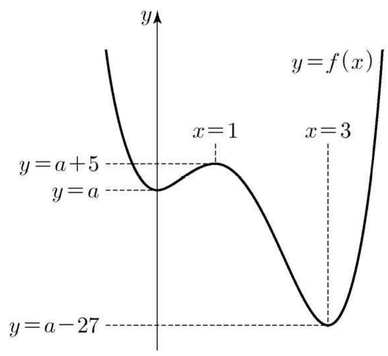
$f(x)=3x^4-16x^3+18x^2+a$에서

$f'(x)=12x^3-48x^2+36x$

$=12x(x-1)(x-3)$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	a	↗	$a+5$	↘	$a-27$	↗



함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 가지고,

$x=3$에서 최솟값을 가진다.

이때 조건 (가)에 의하여 함수 $f(x)$는 $x=b$에서 극댓값을 가지므로 $b=1$이다.

조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)$는 $x=f(b)$에서 최솟값을 가지므로 $f(b)=3$이다.

곧, $f(1)=3$이므로

$a+5=3$에서 $a=-2$

따라서 $a-2b=-2-2\times1=-4$

7) 정답 ④

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)

$g(x)=xf(x)=x^3+ax^2+bx$라 하면

$x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$g(x_1)<g(x_2)$이므로

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\ge0$

$g'(x)=3x^2+2ax+b\ge0$

방정식 $3x^2+2ax+b=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2-3b\le0$ …… ㉠

$f'(x)=2x+a$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의

점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$y=(a+2)(x-1)+a+b+1$

이 직선이 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$2a+b+3=0$

$b=-2a-3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a^2-3(-2a-3)=a^2+6a+9=(a+3)^2\le 0$

곧, $a=-3$이고 $b=3$

따라서 $f(x)=x^2-3x+3$이므로

$f(5)=25-15+3=13$

8) 정답 ④

조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여

$f(x)\{f(x)-f(x+2)\}=0$

곧, $f(x)=0$ 또는 $f(x)=f(x+2)$

따라서 모든 실수 x에 대하여 (a) 또는 (b)로 함수가 결정된다.

(a) $f(x)=0$
(b) $f(x)\ne 0$이면 $f(x)=f(x+2)$

만약, 열린구간 $(k,\ k+2)$의 모든 x에 대하여 $f(x)\ne 0$이면

(b)에 의하여 오른쪽으로 이어지는 길이가 2인 열린구간 $(k+2,\ k+4)$, $(k+4,\ k+6)$, … 에서도 $f(x)\ne 0$이다.

그러나 열린구간 $(k,\ k+2)$의 왼쪽으로 이어지는 구간에서는 반드시 $f(x)\ne 0$인 것은 아니다.

또한, 열린구간 $(k,\ k+2)$의 모든 x에 대하여 $f(x)=0$이면 열린구간 $(k-2,\ k)$의 모든 x에 대하여 $f(x)=0$이어야 (a) 또는 (b)를 만족시킨다.

같은 방법으로 왼쪽으로 이어지는 길이가 2인 열린구간 $(k-4,\ k-2)$, $(k-6,\ k-4)$, … 에서도 $f(x)=0$이다.

그러나 열린구간 $(k,\ k+2)$의 오른쪽으로 이어지는 구간에서는 반드시 $f(x)=0$인 것은 아니다.

조건 (가)에서 $f(x)=1-|x-a|$이고,

$0\le x<2$, $x\ne a-1$, $x\ne a+1$일 때

$f(x)\ne 0$이므로 $f(x)=f(x+2)$

따라서 $2\le x<4$, $x\ne a+1$, $x\ne a+3$일 때

$f(x)=f(x-2)$

곧, $f(x)=1-|x-2-a|$

또한, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2+}f(x)$

$\lim_{x\to 2-}f(x)=1-|2-a|$

$\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2+}(1-|x-2-a|)=1-|-a|$

이므로

$1-|2-a|=1-|-a|$

$a=1$

곧, 구간 $[0,\ 2)$에서 $f(x)=1-|x-1|$

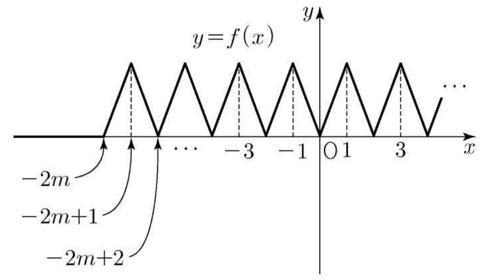
마찬가지의 방법으로 (b)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 구간 $[2n,\ 2n+2)$에서

$f(x)=1-|x-2n-1|$

또한, 조건 (다)를 만족시키는 실수 x의 개수가 8이므로 $f(x)=0$인 구간이 존재한다.

따라서 어떤 자연수 m에 대하여

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x<-2m)\\ 1-|x+2m-1| & (-2m\le x<-2m+2)\\ 1-|x+2m-3| & (-2m+2\le x<-2m+4)\\ 1-|x+2m-5| & (-2m+4\le x<-2m+6)\\ \vdots & \vdots\end{cases}$$



모든 실수 x에 대하여 $0\le f(x)\le 1$이므로

$0\le f(-x)\le 1$

곧, $0\le f(x)f(-x)\le 1$

따라서 조건 (다)의 방정식 $f(x)f(-x)=1$의 실근은 두 방정식 $f(x)=1$, $f(-x)=1$의 공통근이다.

곧, $x=-(2k-1)$ 또는 $x=2k-1$

$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m)$

특히, 방정식 $f(x)f(-x)=1$의 서로 다른 실근의 개수가 8이므로

$2m=8$에서

$m=4$

방정식 $f(x)=\dfrac{3}{4}$의 실근을 작은 것부터 크기순으로 나열하면 16번째 수는 7보다 크고 8보다 작다.

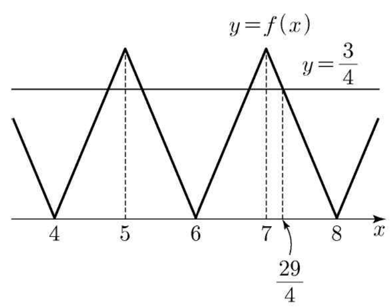
$7<x<8$일 때

$f(x)=1-|x-7|=-x+8$이므로

$-x+8=\dfrac{3}{4}$에서

$x=\dfrac{29}{4}$

따라서 구하는 16번째 수는 $\dfrac{29}{4}$이다.



9) 정답 12

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t\ge 0)$에서의 속도 $v(t)$는

$v(t)=t^2-(a+4)t+2a+4$

$\quad=(t-2)(t-a-2)$

$0<t<2$일 때 $v(t)>0$이고,

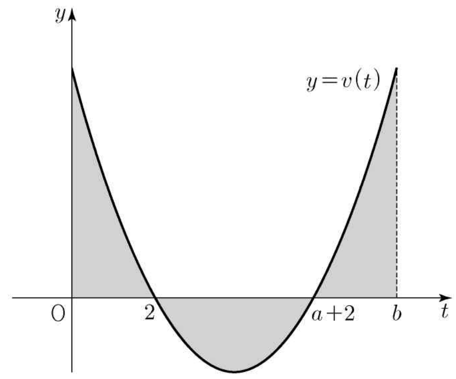
$2<t<a+2$일 때 $v(t)<0$이다.

곧, 점 P는 시각 $t=2$에서 처음으로 운동 방향을 바꾸므로 $k=2$

점 P가 시각 $t=2$일 때부터 다시 원점을 지나는 시각을 $t=b$ $(b>2)$ 라 하면

$\int_2^b v(t)dt=0$

곧, $\int_2^{a+2}v(t)dt+\int_{a+2}^b v(t)dt=0$



점 P가 시각 $t=2$에서 시각 $t=b$까지 움직인 거리가 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 움직인 거리의 2배이므로

$\int_2^b|v(t)|dt=2\int_0^2|v(t)|dt$

$\int_2^{a+2}\{-v(t)\}dt+\int_{a+2}^b v(t)dt=2\int_0^2 v(t)dt$

위 식의 양변에 $2\int_2^{a+2}v(t)dt$를 더하여 정리하면

$\int_2^{a+2}v(t)dt+\int_{a+2}^b v(t)dt=2\left(\int_0^2 v(t)dt+\int_2^{a+2}v(t)dt\right)$

$0=2\left(\int_0^2 v(t)dt+\int_2^{a+2}v(t)dt\right)$

곧, $\int_0^{a+2}v(t)dt=0$

$$\begin{aligned}\int_0^{a+2}v(t)dt&=\int_0^{a+2}\{t^2-(a+4)t+2a+4\}dt\\&=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{a+4}{2}t^2+(2a+4)t\right]_0^{a+2}\\&=\frac{1}{3}(a+2)^3-\frac{a+4}{2}(a+2)^2+(2a+4)(a+2)\\&=-\frac{1}{6}(a-4)(a+2)^2\\&=0\end{aligned}$$

에서 $a>0$이므로 $a=4$

$v(t)=t^2-8t+12$에서

$v(4k)=v(8)=12$

10) 정답 50

$g(x)=|x-a|f(x)$라 하면

조건 (가)에 의하여 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이고, $g(a)=0$

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $h(x)$에 대하여

$g(x)=(x-a)h(x)$라 하면

$$f(x)=\begin{cases}-h(x) & (x<a)\\ h(x) & (x>a)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이고 미분가능하므로

$-h(a)=h(a)$에서 $h(a)=0$

$-h'(a)=h'(a)$에서 $h'(a)=0$

따라서 상수 k에 대하여

$h(x)=(x-a)^2(x-k)$라 하면

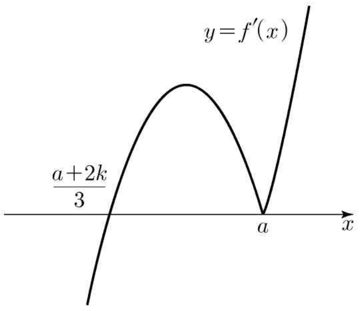
$$f(x)=\begin{cases}-(x-a)^2(x-k) & (x<a)\\ (x-a)^2(x-k) & (x\ge a)\end{cases}$$이고,

$$f'(x)=\begin{cases}-3(x-a)\left(x-\dfrac{a+2k}{3}\right) & (x<a)\\ 3(x-a)\left(x-\dfrac{a+2k}{3}\right) & (x\ge a)\end{cases}$$

이제 k의 값에 따라 다음 세 가지 경우로 나누어 함수 $f'(x)$의 그래프를 살펴보자

(i) $k<a$인 경우

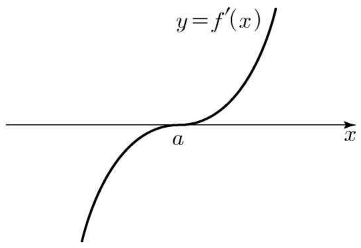
$\dfrac{a+2k}{3}<a$이므로 함수 $f'(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f'(x)$의 그래프와 직선 $y=-3$이 만나는 점의 개수는 1이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $k=a$인 경우

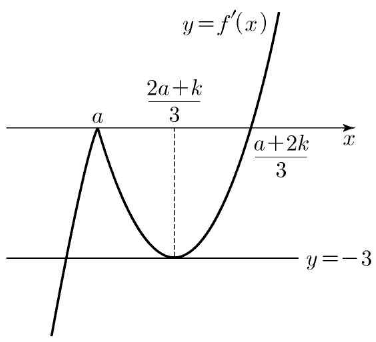
$\dfrac{a+2k}{3}=a$이므로 함수 $f'(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f'(x)$의 그래프와 직선 $y=-3$이 만나는 점의 개수는 1이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iii) $k>a$인 경우

$\dfrac{a+2k}{3}>a$이므로 함수 $f'(x)$의 그래프는 다음과 같다.



조건 (나)를 만족시키기 위해서는 함수 $f'(x)$의 극솟값이 -3이어야 한다.

함수 $f'(x)$는 $x=\dfrac{a+\dfrac{a+2k}{3}}{2}=\dfrac{2a+k}{3}$에서

극솟값 $f'\left(\dfrac{2a+k}{3}\right)=-\dfrac{(a-k)^2}{3}$을 가지므로

$-\dfrac{(a-k)^2}{3}=-3$

$k>a$이므로 $k=a+3$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$$f(x)=\begin{cases}-(x-a)^2(x-a-3) & (x<a)\\ (x-a)^2(x-a-3) & (x\ge a)\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-3(x-a)(x-a-2) & (x<a)\\ 3(x-a)(x-a-2) & (x\ge a)\end{cases}$$

이제 $i(x)=f(x)+3x$라 하면 조건 (다)에 의하여

함수 $|i(x)-b|$가 $x=-3$에서만 미분가능하지 않다.

곧, $i(-3)=b$, $i'(-3)\ne 0$이고,

$x\ne -3$일 때

'$i(x)\ne b$' 이거나 '$i(x)=b$이면서 $i'(x)=0$'이다.

함수 $i(x)$의 그래프와 직선 $y=b$가 만나고,

교점에서의 접선의 기울기가 0이 아닌 점이

점 $(-3,\ i(-3))$뿐이어야 한다. …… ㉠

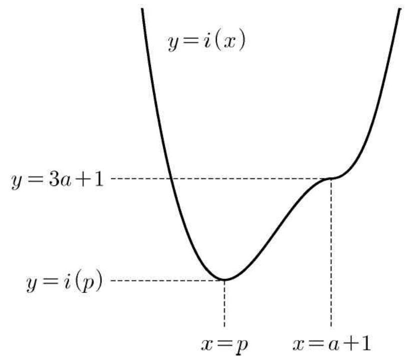
방정식 $f'(x)+3=0$의 두 실근 중

작은 근을 p라 하면 $p<a$이고,

큰 근은 $\dfrac{a+(a+2)}{2}=a+1$이다.

$i'(x)=f'(x)+3$을 이용하여 함수 $i(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	p	$\cdots$	$a+1$	$\cdots$
$i'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$i(x)$	$\searrow$	$i(p)$	$\nearrow$	$3a+1$	$\nearrow$



㉠을 만족시키기 위해서는 $b=3a+1$이고,

함수 $i(x)$의 그래프와 직선 $y=b$의 두 교점 중

점 $(a+1,\ i(a+1))$에서의 접선의 기울기가 0이므로 다른 한 교점의 x좌표가 -3이다.

이 교점의 x좌표는 p보다 작으므로

$-3<p<a$이고,

$i(-3)=3a+1$에서

$f(-3)-9=3a+1$

$-(-3-a)^2(-3-a-3)-9=3a+1$

$(a+2)(a^2+10a+22)=0$

$a>-3$이므로 $a=-2$이고, $b=3a+1=-5$

따라서

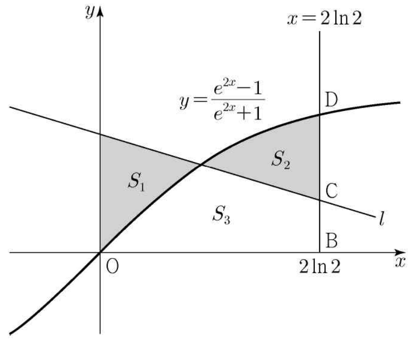
$f(x)=\begin{cases}-(x+2)^2(x-1) & (x<-2)\\ (x+2)^2(x-1) & (x\ge -2)\end{cases}$에서

$f(a-b)=f(3)=50$

11) 정답 ❷

[출제의도]

곡선 $y=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$과 y축 및 직선 l로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)$과 직선 $x=2\ln 2$ 및 직선 l로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2, 곡선 $y=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$과 x축 및 직선 $x=2\ln 2$, 직선 l로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_3이라 하자.



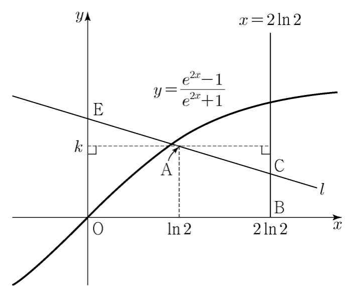
$S_1=S_2$이므로 $S_1+S_3=S_2+S_3$이고,

$$\begin{aligned}S_2+S_3&=\int_0^{2\ln 2}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx\\&=\int_0^{2\ln 2}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx\\&=\int_0^{2\ln 2}\frac{(e^x+e^{-x})'}{e^x+e^{-x}}dx\\&=\Big[\ln(e^x+e^{-x})\Big]_0^{2\ln 2}\\&=\ln\left(4+\frac{1}{4}\right)-\ln(1+1)\\&=\ln\frac{17}{8}\quad\cdots\cdots\ ㉠\end{aligned}$$

직선 l이 y축과 만나는 점을 점 E 라 하면 직선 l이 점 $(\ln 2,\ k)$를 지나므로

$S_1+S_3=$(사다리꼴 OBCE의 넓이)

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\times(\overline{\text{OE}}+\overline{\text{BC}})\times 2\ln 2\\&=2\ln 2\times k\quad\cdots\cdots\ ㉡\end{aligned}$$



㉠, ㉡에서 $2\ln 2\times k=\ln\dfrac{17}{8}$이므로

$k=\dfrac{\ln\frac{17}{8}}{2\ln 2}=\dfrac{\ln\frac{17}{8}}{\ln 4}=\log_4\dfrac{17}{8}$

$2k+1=2\log_4\dfrac{17}{8}+1$

$=\log_2\dfrac{17}{4}$

따라서 $2^{2k+1}=\dfrac{17}{4}$

12) 정답 10

[출제의도]

$f(x)=x^3-3x^2+5x+a$에서

$f'(x)=3x^2-6x+5=3(x-1)^2+2>0$이므로 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분 가능하고, $g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$ 함수 $h(g(x)-x)$를 x에 대하여 미분하면

$\{h(g(x)-x)\}'=h'(g(x)-x)\{g'(x)-1\}$

모든 실수 x에 대하여

$f'(x)=3(x-1)^2+2\geq 2$이므로

$0<\dfrac{1}{f'(x)}\leq\dfrac{1}{2}$이고, 모든 실수 x에 대하여

$\dfrac{1}{f'(g(x))}\leq\dfrac{1}{2}$ 곧, $g'(x)-1\leq\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{1}{2}$

$h(x)=(x^2+2x-2)e^{-x}$에서

$h'(x)=\{(2x+2)-(x^2+2x-2)\}e^{-x}$

$\quad=-(x-2)(x+2)e^{-x}$

$\{g(x)-x\}'=g'(x)-1\leq-\dfrac{1}{2}$이므로

함수 $g(x)-x$는 실수 전체의 집합에서 감소하고

$\lim\limits_{x\to-\infty}\{g(x)-x\}=\infty$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\{g(x)-x\}=-\infty$, ... <참고>

따라서 두 방정식 $g(x)-x=2$, $g(x)-x=-2$의 실근을 각각 α, β라 하면 $\alpha<\beta$이다.

$\{h(g(x)-x)\}'=h'(g(x)-x)\{g'(x)-1\}$을 이용하여 함수 $h(g(x)-x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$\{h(g(x)-x)\}'$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(g(x)-x)$	↗	$h(2)$	↘	$h(-2)$	↗

함수 $h(g(x)-x)$는 $x=\beta$에서 극소이므로 $\beta=1$이다.

이때 $g(\beta)-\beta=-2$에서

$g(1)-1=-2$

$g(1)=-1$

$f(-1)=1$에서

$(-1)^3-3\times(-1)^2+5\times(-1)+a=1$

따라서 $a=10$

[[참고]]

모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\leq\dfrac{1}{2}$일 때,

$\lim\limits_{x\to-\infty}\{g(x)-x\}=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\{g(x)-x\}=-\infty$임을 보이자.

$p(x)=g(x)-\dfrac{1}{2}x$라 하면

$p'(x)=g'(x)-\dfrac{1}{2}\leq 0$이므로 $x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $p(x_1)\geq p(x_2)$

(i) $x<0$일 때 $p(x)\geq p(0)$

곧, $g(x)-\dfrac{1}{2}x\geq g(0)$

$g(x)-x\geq-\dfrac{1}{2}x+g(0)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left\{-\dfrac{1}{2}x+g(0)\right\}=\infty$이므로

$\lim\limits_{x\to-\infty}\{g(x)-x\}=\infty$

(ii) $x>0$일 때 $p(x)\leq p(0)$ 곧, $g(x)-\dfrac{1}{2}x\leq g(0)$

$g(x)-x\leq-\dfrac{1}{2}x+g(0)$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left\{-\dfrac{1}{2}x+g(0)\right\}=-\infty$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}\{g(x)-x\}=-\infty$

13) 정답 20

[출제의도]

모든 실수 x에 대하여

$f(4-x)=\dfrac{a}{|(4-x)-2|+2}+b$

$\quad=\dfrac{a}{|x-2|+2}+b$

$\quad=f(x)$

곧, 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

$\displaystyle\int_0^4 xf(x)dx=\int_0^2 xf(x)dx+\int_2^4 xf(x)dx$

$\quad=\displaystyle\int_0^2 xf(x)dx+\int_2^4 xf(4-x)dx$

$(\because f(x)=f(4-x))$

$\quad=\displaystyle\int_0^2 xf(x)dx+\int_0^2(4-x)f(x)dx$

$\quad=4\displaystyle\int_0^2 f(x)dx$

$\displaystyle\int_0^4 xf(x)dx=0$이므로 $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx=0$ 이때

$\displaystyle\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\left(\frac{-a}{x-4}+b\right)dx$

$\quad=\Big[-a\ln|x-4|+bx\Big]_0^2$

$\quad=(-a\ln 2+2b)-(-a\ln 4+0)$

$\quad=a\ln 2+2b$이므로

$a\ln 2+2b=0$

$b=-\dfrac{\ln 2}{2}a$ ...... ㉠

$g(x)=\displaystyle\int_0^1 tf(xt)dt$

$x=0$일 때 $g(0)=\displaystyle\int_0^1 tf(0)dt$

$x\neq 0$일 때 $xt=s$라 놓으면 $x=\dfrac{ds}{dt}$

$t=0$일 때 $s=0$이고, $t=1$일 때 $s=x$이므로

$g(x)=\displaystyle\int_0^x\left\{\frac{s}{x}\times f(s)\times\frac{1}{x}\right\}ds$

$\quad=\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x sf(s)ds$

$u(x)=-\dfrac{1}{x}$, $v(x)=\displaystyle\int_0^x sf(s)ds$라 하면

$u'(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $v'(x)=xf(x)$이므로

$\displaystyle\int_2^4 g(x)dx=\int_2^4 u'(x)v(x)dx$

$\quad=\Big[v(x)v(x)\Big]_2^4-\displaystyle\int_2^4 u(x)v'(x)dx$

$\quad=\Big[u(x)v(x)\Big]_2^4-\displaystyle\int_2^4\left\{-\frac{1}{x}\times xf(x)\right\}dx$

$\quad=\Big[u(x)v(x)\Big]_2^4+\displaystyle\int_2^4 f(x)dx$

$v(4)=\displaystyle\int_0^4 sf(s)ds=0$이고,

$f(4-x)=f(x)$에서

$\displaystyle\int_2^4 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx=0$이므로

$\displaystyle\int_2^4 g(x)dx=\Big[u(x)v(x)\Big]_2^4$

$\quad=-u(2)v(2)$

$\quad=-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times\displaystyle\int_0^2 sf(s)ds$

$\quad=\dfrac{1}{2}\times\displaystyle\int_0^2 sf(s)ds$

$\displaystyle\int_2^4 g(x)dx=3\ln 2-2$이므로 $\displaystyle\int_0^2 sf(s)ds=6\ln 2-4$

$\displaystyle\int_0^2 sf(s)ds=\int_0^2\left(\frac{-as}{s-4}+bs\right)ds$

$\quad=\displaystyle\int_0^2\left\{-a\times\frac{(s-4)+4}{s-4}+bs\right\}ds$

$\quad=\displaystyle\int_0^2\left(\frac{-4a}{s-4}+bs-a\right)ds$

$\quad=\left[-4a\ln|s-4|+\dfrac{b}{2}s^2-as\right]_0^2$

$\quad=(-4a\ln 2+2b-2a)-(-4a\ln 4)$

$\quad=4a\ln 2+2b-2a$

$\quad=3a\ln-2a$ $(\because$ ㉠$)$

$3a\ln 2-2a=6\ln 2-4$에서

$a(3\ln 2-2)=2(3\ln 2-2)$이므로

$a=2$, $b=-\ln 2$이고

$f(x)=\dfrac{2}{|x-2|+2}-\ln 2$ 따라서

$g(0)=\displaystyle\int_0^1 tf(0)dt$

$\quad=f(0)\times\left[\dfrac{1}{2}t^2\right]_0^1$

$\quad=\dfrac{1}{2}\times f(0)$

$\quad=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}\ln 2$이므로

$p=4$, $q=2$에서 $p^2+q^2=20$

14) 정답 ❷

[출제의도]

$\mathrm{F}(p,\ 0)$ $(p>0)$을 초점으로 하고 꼭짓점이 O인 포물선의 준선은 직선 $x=-p$이고 포물선의 방정식은

$y^2=4px$ ...... ㉠

점 A에서 포물선의 준선 $x=-p$에 내린 수선의 발을 H, x축에 내린 수선의 발을 H, x축에 내린 수

선의 발을 H_1, 점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 H_2라 하자.

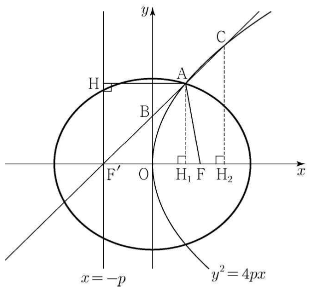
$\overline{F'O} : \overline{OH_1} = \overline{F'B} : \overline{BA} = 3 : 2$이므로

$\overline{OH_1} = \frac{2}{3} \times \overline{F'O} = \frac{2p}{3}$

곧, 점 H_1의 x좌표는 $\frac{2p}{3}$이다.

점 A는 포물선 위의 점이므로

$\overline{AF} = \overline{AH} = \overline{H_1F'} = \frac{2p}{3} + p = \frac{5p}{3}$



직각삼각형 AFH_1에서

$\overline{AH_1} = \sqrt{\overline{AF}^2 - \overline{FH_1}^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{5p}{3}\right)^2 - \left(p - \frac{2p}{3}\right)^2}$

$= \frac{2\sqrt{6}}{3}p$

$\angle AF'H_1 = \theta$라 하면 직선 AF'의 기울기는

$\tan\theta = \frac{\overline{AH_1}}{\overline{F'H_1}}$

$= \frac{\frac{2\sqrt{6}}{3}p}{\frac{5}{3}p}$

$= \frac{2\sqrt{6}}{5}$

따라서 직선 AF'의 방정식은

$y = \frac{2\sqrt{6}}{5}(x+p)$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 점 C의 x좌표를 구하면

$\frac{24}{25}(x+p)^2 = 4px$

$6x^2 - 13px + 6p^2 = 0$

$(3x-2p)(2x-3p) = 0$

$x = \frac{2p}{3}$ 또는 $x = \frac{3p}{2}$

$p > 0$이고 점 H_1의 x좌표보다 점 H_2의 x좌표가 더 크므로 점 H_2의 x좌표는 $\frac{3p}{2}$이다.

따라서 $\overline{H_1H_2} = \frac{3p}{2} - \frac{2p}{3} = \frac{5p}{6}$

한편, $\tan\theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}$이므로 $\cos\theta = \frac{5}{7}$이고,

$\overline{AC} \times \cos\theta = 7 \times \frac{5}{7} = 5$

$\overline{H_1H_2} = \overline{AC} \times \cos\theta$이므로

$\frac{5p}{6} = 5$

$p = 6$

따라서 타원의 장축의 길이는

$\overline{AF} + \overline{AF'} = \overline{AF} + \frac{\overline{H_1F'}}{\cos\theta}$

$= \frac{5p}{3} + \frac{\frac{5p}{3}}{\frac{5}{7}}$

$= 4p$

$= 24$

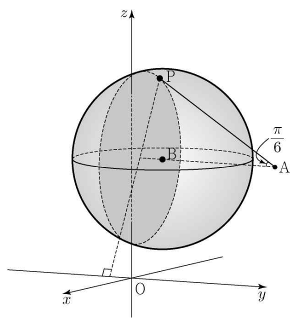
15) 정답 304

[출제의도]

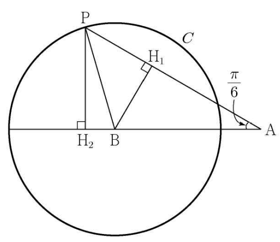
구 S : $(x+3\sqrt{3})^2 + y^2 + (z-9)^2 = 52$의 중심을 B라 하면 점 B의 좌표는 $(-3\sqrt{3},\ 0,\ 9)$이고, 구 S의 반지름의 길이는 $\sqrt{52} = 2\sqrt{13}$이다.

이때 점 A를 지나고 y축과 평행한 직선이 zx평면과 만나는 점은 점 A에서 zx평면에 내린 수선의 발, 곧 점 $B(-3\sqrt{3},\ 0,\ 9)$이다.

직선 AP와 y축이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$이므로 직선 AP와 직선 AB가 이루는 예각의 크기도 $\frac{\pi}{6}$이다.



세 점 A, B, P를 포함하는 평면이 구 S와 만나서 생기는 원을 C라 하자.



점 B에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H_1, 점 P에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H_2라 하자.

$\overline{AB} = 10$이므로 직각삼각형 ABH_1에서

$\overline{BH_1} = \overline{AB} \times \sin\frac{\pi}{6} = 5$

$\overline{AH_1} = \overline{AB} \times \cos\frac{\pi}{6} = 5\sqrt{3}$

직각삼각형 BH_1P에서

$\overline{PH_1} = \sqrt{\overline{BP}^2 - \overline{BH_1}^2}$

$= \sqrt{52 - 25}$

$= 3\sqrt{3}$

따라서 $\overline{AP} = \overline{AH_1} + \overline{PH_1} = 8\sqrt{3}$이고,

직각삼각형 APH_2에서

$\overline{PH_2} = \overline{AP} \times \sin\frac{\pi}{6} = 4\sqrt{3}$,

$\overline{AH_2} = \overline{AP} \times \cos\frac{\pi}{6} = 12$

곧, $\overline{BH_2} = \overline{AH_2} - \overline{AB} = 2$이므로

점 H_2의 좌표는 $(-3\sqrt{3},\ -2,\ 9)$이다.

점 H_2를 지나고 y축에 수직인 평면을 α라 할 때, 평면 α 위에 있는 점의 y좌표는 -2이다.

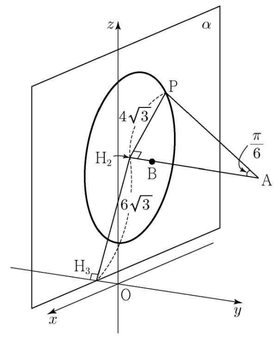
$\overline{PH_2} = 4\sqrt{3}$, $\angle PH_2A = \frac{\pi}{2}$이므로

평면 α 위에서 점 P는 중심이 H_2이고 반지름의 길이가 $4\sqrt{3}$인 원 위를 움직인다.

점 O에서 평면 α에 내린 수선의 발을 $H_3(0,\ -2,\ 0)$이라 하면

$\overline{H_2H_3} = \sqrt{(-3\sqrt{3}-0)^2 + \{-2-(-2)\}^2 + (9-0)^2}$

$= 6\sqrt{3}$



이때 직각삼각형 OH_3P에서

$\overline{OP} = \sqrt{\overline{OH_3}^2 + \overline{PH_3}^2} = \sqrt{\overline{PH_3}^2 + 4}$이므로

선분 OP의 길이가 최대인 경우는 선분 PH_3의 길이가 최대일 때이다.

$\overline{H_2H_3} = 6\sqrt{3}$이고, 점 P는 점 H_2를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $4\sqrt{3}$인 원 위를 움직이므로

$\overline{PH_3} \le \overline{PH_2} + \overline{H_2H_3} = 10\sqrt{3}$

선분 PH_3의 길이의 최댓값이 $10\sqrt{3}$이므로

$\overline{OP}^2$의 최댓값은 $(10\sqrt{3})^2 + 4 = 304$

16) 정답 576

[출제의도]

원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $r_1 = 6$인 원을 C_1, 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $r_2 = 2$인 원을 C_2라 하면

$\overline{OP} = 6$, $\overline{AQ} = 2$ 이므로 두 점 P, Q는 각각 두 원 C_1, C_2 위의 점이다.

한편, $\overline{OA} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 4^2} = 8$이고

$r_1 + r_2 = 6 + 2 = 8$이므로 선분 OA를 $r_1 : r_2 = 3 : 1$로 내분하는 점을 C라 하면 두 원 C_1, C_2가 점 C에서 만난다.

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 36$에서

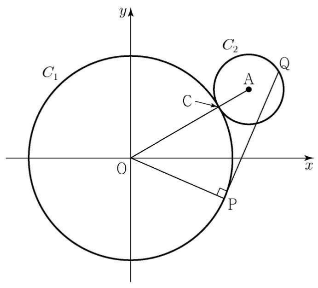
$\overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}) = 36$,

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 36 - \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP}$

$=36-\overline{\text{OP}}^2$

$=0$

이므로 두 직선 OP, PQ가 서로 수직이거나 두 점 P와 Q가 일치한다. 두 점 P와 Q가 일치하는 경우는 P=Q=C인 경우뿐이다. 한편, 두 직선 OP, PQ가 서로 수직인 경우 점 Q는 점 P에서 원 C_1에 접하는 직선 위의 점이어야 한다.



$|\overrightarrow{\text{PQ}}|=\sqrt{|\overrightarrow{\text{OQ}}-\overrightarrow{\text{OP}}|^2}$

$=\sqrt{|\overrightarrow{\text{OQ}}|^2-2\overrightarrow{\text{OP}}\cdot\overrightarrow{\text{OQ}}+|\overrightarrow{\text{OP}}|^2}$

$=\sqrt{|\overrightarrow{\text{OQ}}|^2-2\times36+6^2}$

$=\sqrt{|\overrightarrow{\text{OQ}}|^2-36}$

이므로 $|\overrightarrow{\text{OQ}}|$의 값이 최대일 때 $|\overrightarrow{\text{PQ}}|$의 값이 최대이다. 이때의 P, Q가 각각 X, Y이므로 세 점 O, A, Y가 이 순서대로 한 직선 위에 있다.

$\overrightarrow{\text{OR}}=t\overrightarrow{\text{OX}}+(1-t)\overrightarrow{\text{OY}}$ $(0\le t\le1)$

에서 점 R는 선분 XY 위를 움직이는 점이다.

선분 OA의 중점을 M이라 하면

$\overrightarrow{\text{OM}}+\overrightarrow{\text{AM}}=\vec{0}$

$|\overrightarrow{\text{OM}}|=|\overrightarrow{\text{AM}}|$

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\text{OA}}$

$=4$

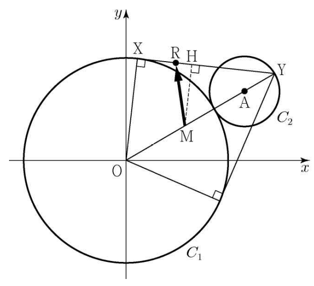
따라서

$\overrightarrow{\text{OR}}\cdot\overrightarrow{\text{AR}}$

$=(\overrightarrow{\text{OM}}+\overrightarrow{\text{MR}})\cdot(\overrightarrow{\text{AM}}+\overrightarrow{\text{MR}})$

$=\overrightarrow{\text{OM}}\cdot\overrightarrow{\text{AM}}+(\overrightarrow{\text{OM}}+\overrightarrow{\text{AM}})\cdot\overrightarrow{\text{MR}}+\overrightarrow{\text{MR}}\cdot\overrightarrow{\text{MR}}$

$=-4^{2}+|\overrightarrow{\text{MR}}|^2$



점 M에서 선분 XY에 내린 수선의 발 H에 대하여

$|\overrightarrow{\text{MH}}|\le|\overrightarrow{\text{MR}}|\le|\overrightarrow{\text{MY}}|$ $(\because\ |\overrightarrow{\text{MX}}|<|\overrightarrow{\text{MY}}|)$

이므로

R=Y일 때 $|\overrightarrow{\text{MR}}|$가 최대이고,

$|\overrightarrow{\text{MR}}|=|\overrightarrow{\text{MY}}|=4+2=6$이므로

$M=-4^2+6^2$

R=H일 때 $|\overrightarrow{\text{MR}}|$가 최소이고,

$|\overrightarrow{\text{MR}}|=|\overrightarrow{\text{MH}}|$

$=\overline{\text{OX}}\times\dfrac{\overline{\text{MY}}}{\overline{\text{OY}}}$

$=6\times\dfrac{6}{10}$

$=\dfrac{18}{5}$

이므로

$m=-4^2+\left(\dfrac{18}{5}\right)^2$

따라서 $25\times(M-m)=25\times\left(36-\dfrac{324}{25}\right)=576$

17) 정답 ❷

[출제의도]

확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다고 하자. 확률변수 X가 평균이 m, 표준편차가 2인 정규분포를 따르고, 확률변수 Y가 평균이 $m+6$, 표준편차가 4인 정규분포를 따르므로

$\mathrm{P}(X\ge9)\le\mathrm{P}(Y\le18)$에서

$\mathrm{P}\left(\dfrac{X-m}{2}\ge\dfrac{9-m}{2}\right)$

$\le\mathrm{P}\left(\dfrac{Y-(m+6)}{4}\le\dfrac{18-(m+6)}{4}\right)$

$\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{9-m}{2}\right)\le\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{12-m}{4}\right)$

$\mathrm{P}\left(Z\le-\dfrac{9-m}{2}\right)\le\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{12-m}{4}\right)$

$-\dfrac{9-m}{2}\le\dfrac{12-m}{4}$이므로

$m\le10$ …… ㉠

$\mathrm{P}(Y\le18)\le0.8413$이고

$\mathrm{P}(Z\le1)=\mathrm{P}(Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le1)$

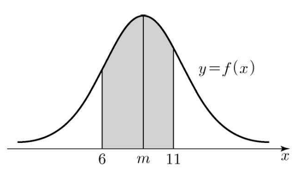
$=0.5+0.3413$

$=0.8413$ 이므로

$\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{12-m}{4}\right)\le\mathrm{P}(Z\le1)$

$\dfrac{12-m}{4}\le1$에서 $m\ge8$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $8\le m\le10$ 이때 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$을 따르므로 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하면 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭인 종 모양의 곡선이다.



이때 $\mathrm{P}(6\le X\le11)$은 함수 $f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=6$, $x=11$로 둘러싸인 부분의 넓이이므로 $\mathrm{P}(6\le X\le11)$의 값이 최소인 경우는 확률변수 X의 평균 m과 $\dfrac{6+11}{2}=8.5$의 차가 가장 클 때이다.

따라서 $\mathrm{P}(6\le X\le11)$은 $m=10$일 때 최솟값을 가지고,

$\mathrm{P}(6\le X\le11)=\mathrm{P}\left(\dfrac{6-10}{2}\le\dfrac{X-10}{2}\le\dfrac{11-10}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z\le0.5)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le2)+\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)$

$=0.4772+0.1915$

$=0.6687$

18) 정답 952

[출제의도]

$f(1)<f(2)<f(3)$을 만족시키도록 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 공역 X의 6개의 원소 중에서 서로 다른 3개의 원소를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_6\mathrm{C}_3=20$

$f(4)\le f(5)\le f(6)$을 만족시키도록 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 공역 X의 6개의 원소 중에서 중복을 허용하여 3개의 원소를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_6\mathrm{H}_3={}_8\mathrm{C}_3=56$

따라서 조건 (가)를 만족시키는 함수 f의 개수는

$20\times56=1120$

조건 (가)를 만족시키고 조건 (나)를 만족시키지 않는 함수 f의 개수를 구하자.

조건 (나)를 만족시키지 않으려면

$f(2)>f(6)$이고,

$1\le f(1)<f(2)<f(3)\le6$이므로

$f(2)$의 값을 기준으로 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(ⅰ) $f(2)=5$인 경우

$1\le f(1)<5<f(3)\le6$이므로

$f(1)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

$4\times1=4$

위의 각각의 경우에 대하여

$1\le f(4)\le f(5)\le f(6)<f(2)=5$이므로

$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$

이 때의 경우의 수는

$4\times20=80$

(ⅱ) $f(2)=4$인 경우

$1\le f(1)<4<f(3)\le6$이므로 $f(1)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

$3\times2=6$

위의 각각의 경우에 대하여

$1\le f(4)\le f(5)\le f(6)<f(2)=4$이므로

$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_3={}_5\mathrm{C}_3=10$

이때의 경우의 수는

$6\times10=60$

(ⅲ) $f(2)=3$인 경우

$1\le f(1)<3<f(3)\le6$이므로

$f(1)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

$2\times3=6$

위의 각각의 경우에 대하여

$1\le f(4)\le f(5)\le f(6)<f(2)=3$이므로

$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_2\mathrm{H}_3={}_4\mathrm{C}_3=4$

이 때의 경우의 수는

$6\times4=24$

(ⅳ) $f(2)=2$인 경우

$1 \le f(1) < 2 < f(3) \le 6$이므로
$f(1)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는
$1 \times 4 = 4$
위의 각각의 경우에 대하여
$1 \le f(4) \le f(5) \le f(6) < f(2) = 2$이므로
$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는
1이다.
이때의 경우의 수는
$4 \times 1 = 4$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 조건 (가)를 만족시키고 조건 (나)를 만족시키지 않는 함수 f의 개수는
$80+60+24+4=168$
따라서 구하는 함수 f의 개수는 $1120-168=952$

19) 정답 367

[출제의도]

한 번의 시행에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수가
4 이하일 확률은 $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$,
5 이상일 확률은 $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

$b \le 4$인 사건을 X, 두 번째 시행과 세 번째 시행에서 꺼낸 공의 색이 서로 다른 사건을 Y라 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}$

n번째 시행에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 a_n이라 하자.
사건 X는 네 수 a_1, a_2, a_3, a_4 중 적어도 두 수가 4 이하인 경우이다.
네 수 a_1, a_2, a_3, a_4 중 두 수만 4 이하인 확률은
$${}_4\mathrm{C}_2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{54}{256}$$
네 수 a_1, a_2, a_3, a_4 중 세 수만 4 이하일 확률은
$${}_4\mathrm{C}_3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \frac{1}{4} = \frac{108}{256}$$
네 수 a_1, a_2, a_3, a_4 중 모두 4 이하일 확률은
$$\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}$$
따라서 $P(X)=\frac{54}{256}+\frac{108}{256}+\frac{81}{256}=\frac{243}{256}$

…… <참고>

사건 $X\cap Y$는 $b \le 4$이고, 두 번째 시행과 세 번째 시행에서 꺼낸 공의 색이 서로 다른 사건이다.
두 번째 시행에서 꺼낸 공의 색을 기준으로 경우를 나누어 살펴보자.

(ⅰ) 두 번째 시행에서 꺼낸 공이 흰색인 경우
a_2의 값은 1, 2, 3, 4 중 하나이고, 세 번째 시행에서 꺼낸 공은 검은색이어야 하므로 a_3의 값은 3, 4, 5, 6 중 하나이다.
(ⅰ-1) $a_3=3$ 또는 $a_3=4$인 경우
$a_2 \le 4$, $a_3 \le 4$이므로 첫 번째 시행과 네 번째 시행에서는 어떤 공을 꺼내어도 관계가 없으므로
$$1 \times \frac{4}{8} \times \frac{2}{8} \times 1 = \frac{1}{8}$$
(ⅰ-2) $a_3=5$ 또는 $a_3=6$인 경우
$a_2 \le 4$, $a_3 \ge 5$ 이므로 두 수 a_1, a_4 중 적어도 하나는 4 이하이다.
$$\frac{4}{8} \times \frac{2}{8} \times \left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right\} = \frac{15}{128}$$
곧, 이 경우의 확률은 $\frac{1}{8}+\frac{15}{128}=\frac{31}{128}$

(ⅱ) 두 번째 시행에서 꺼낸 공이 검은색인 경우 세 번째 시행에서 꺼낸 공이 흰색인 경우이므로 (ⅰ)에서와 마찬가지로 이 경우의 확률은
$\frac{31}{128}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여
$\mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{31}{128}+\frac{31}{128}=\frac{31}{64}$이므로
$$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\frac{31}{64}}{\frac{243}{256}}=\frac{124}{243}$$
따라서 $p=243$, $q=124$이므로 $p+q=367$

<참고>

네 수 a_1, a_2, a_3, a_4 중 하나만 4 이하인 확률은
$${}_4\mathrm{C}_1 \times \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{12}{256},$$
네 수 a_1, a_2, a_3, a_4 중 하나만 5 이상일 확률은
$\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{1}{256}$ 이므로
여사건의 확률에 의하여
$$\mathrm{P}(X)=1-\left(\frac{12}{256}+\frac{1}{256}\right)=\frac{243}{256}$$