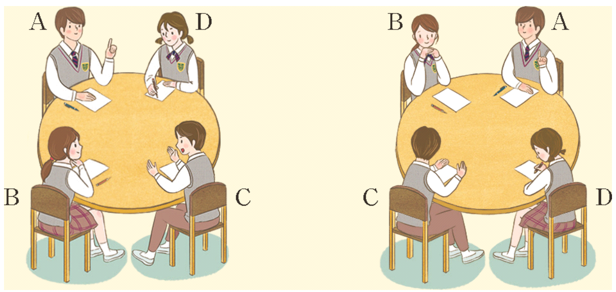
순열과 조합

여러 가지 순열

생각 열기

1. 네 명의 학생 A, B, C, D가 원탁에 둘러앉아 회의를 하려고 한다.

▶ 위치를 생각하지 않고 순서만 생각할 때, 네 명이 다음과 같이 원탁에 둘러앉는 경우는 같은 것이라고 할 수 있는지 말해 보자.



2. 회장과 부회장을 포함한 5명의 회원이 원탁에 둘러앉을 때, 다음을 구하시오.

(1) 5명이 앉는 경우의 수

(2) 회장과 부회장이 서로 이웃하게 앉는 경우의 수

3. 할머니와 할아버지를 포함한 6명의 가족이 원형 식탁에 둘러앉아 식사를 할 때, 다음을 구하시오.

(1) 6명이 앉는 경우의 수

(2) 할머니와 할아버지가 서로 마주 보고 앉는 경우의 수

4. 오른쪽 그림과 같이 정팔각형 모양의 구절판에 서로 다른 9가지의 간식을 구분하여 담는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

생각 열기

5. 세 자리 비밀번호를 설정할 수 있는 여행용 가방이 있다. 0부터 9까지의 숫자 중에서 중복을 허용하여 각 자리에 올 수 있는 숫자를 하나씩 골라 비밀번호를 만들려고 한다.

▶ 만들 수 있는 비밀번호의 가짓수를 구해 보자.

6. 세 개의 문자 x, y, z 중에서 5개를 택하는 중복순열의 수를 구하시오.

7. 네 개의 숫자 0, 1, 2, 3 중에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수를 구하시오.

8. 여섯 개의 문자 a, b, c, d, e, f 중에서 3개를 택하는 중복순열 중에서 자음으로 시작하는 것의 개수를 구하시오.

생각 열기

9. 모스 부호는 점(•)과 선(▬)을 적절히 배합하여 문자와 기호를 나타내는 전신 부호이다. 예를 들어 • 1개와 ▬ 2개를 전부 나열하여 만들 수 있는 모스 부호는 오른쪽과 같이 3가지가 있다.

▬▬•, ▬•▬, •▬▬

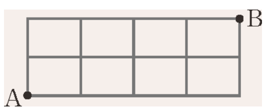
▶ • 2개와 ▬ 2개를 전부 나열하여 만들 수 있는 모스 부호의 가짓수를 구해 보자.

10. 영어 단어 banana에 있는 6개의 문자를 일렬로 나열할 때, 다음을 구하시오.

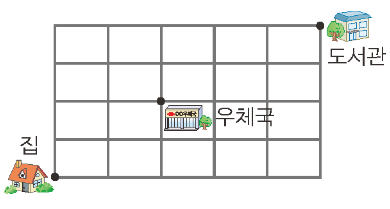
(1) 모든 문자를 나열하는 경우의 수

(2) n이 양 끝에 오도록 나열하는 경우의 수

11. 오른쪽 그림과 같은 도로망이 있다. A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 구하시오.



12. 집에서 도서관까지 가는 도로망이 오른쪽 그림과 같을 때, 다음을 구하시오.



(1) 집에서 도서관까지 최단 거리로 가는 경우의 수

(2) 집에서 우체국을 거쳐 도서관까지 최단 거리로 가는 경우의 수

[생각 넓히기]

13. 서로 다른 종류의 빵 10개와 서로 다른 모양의 바구니 3개가 있다. 이 10개의 빵 중에서 5개를 택하여 바구니에 나누어 담는 경우의 수를 구하려고 한다.
(단, 바구니를 모두 사용하지 않아도 된다.)

활동 1 10개의 빵 중에서 5개를 택하는 경우의 수를 구해 보자.

활동 2 활동 1에서 택한 5개의 빵을 바구니에 나누어 담는 경우의 수를 구해 보자.

활동 3 활동 1과 활동 2의 결과를 이용하여 10개의 빵 중에서 5개를 택하여 바구니에 나누어 담는 경우의 수를 구해 보자.

수학 이야기

갈릴레이의 주사위

이탈리아의 수학자이자 천문학자인 갈릴레이(Galilei, G., 1564~1642)는 친구들로부터 다음과 같은 질문을 받았다.

> 3개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 눈의 수의 합이 9인 경우와 10인 경우는 6가지로 서로 같은데도 불구하고, 실제로는 눈의 수의 합이 10인 경우가 더 많은 이유는 무엇인가?

갈릴레이는 이 질문을 해결하기 위해 3개의 주사위를 빨간색, 파란색, 초록색으로 구별하여 다음과 같이 계산했다고 한다.

❶ 눈의 수의 합이 9인 경우는 다음의 6가지가 생긴다.

> (1, 2, 6), (1, 3, 5), (1, 4, 4),
> (2, 2, 5), (2, 3, 4), (3, 3, 3)

(i) (1, 2, 6), (1, 3, 5), (2, 3, 4)는 눈의 수가 모두 다르다. 이때 각각의 경우의 수는 $3!=6$이므로, 눈의 수가 모두 다른 경우의 수는 $3\times6=18$이다.

(ii) (1, 4, 4)와 (2, 2, 5)는 2개의 눈의 수가 같다. 이때 각각의 경우의 수는 $\dfrac{3!}{2!\times1!}=3$이므로, 2개의 눈의 수가 같은 경우의 수는 $2\times3=6$이다.

(iii) (3, 3, 3)이 나오는 경우의 수는 1이다.

(i)~(iii)에서 눈의 수의 합이 9인 경우의 수는 $18+6+1=25$임을 알 수 있다.

❷ 눈의 수의 합이 10인 경우는 다음의 6가지가 생긴다.

> (1, 3, 6), (1, 4, 5), (2, 2, 6),
> (2, 3, 5), (2, 4, 4), (3, 3, 4)

이 6가지 경우에 대하여 ❶에서와 같은 방법으로 전체 경우의 수를 구하면 $18+9=27$임을 알 수 있다.

이와 같은 계산을 통해 갈릴레이는 눈의 수의 합이 10인 경우가 9인 경우보다 더 많은 이유를 설명할 수 있었다고 한다.

(출처 : Gnedenko, B. V., 『Theory of Probability and Statistics and Their Applications before 1750』)

중복조합

생각 열기

14. ABO식 혈액형은 3개의 유전자 A, B, O 중에서 두 유전자의 조합으로 결정되는 데, 이들을 유전형이라고 한다. 예를 들어 유전형 AA는 A와 A의 결합이고, 유전형 AO는 A와 O 또는 O와 A의 결합이다.

❶ 3개의 유전자 A, B, O 중에서 두 유전자의 조합으로 만들어지는 유전형을 모두 나열하여 다음 표를 완성해 보자.

	A	B	O
A	AA		
B			
O			

❷ ❶의 결과를 이용하여 3개의 유전자로 만들어지는 유전형을 모두 말해 보자.

함께하기

15. 다음 표는 3개의 문자 a, b, c 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 모든 경우를 나열하고, 각 경우를 그림으로 나타낸 것이다.
이때 ○는 3개의 문자 a, b, c를 나타내고, ▯는 서로 다른 문자사이의 경계를 나타낸다.

$aaaa$	$aaab$	$aaac$	$aabb$	$aabc$
○○○○▯▯	○○○▯○▯	○○○▯▯○	○○▯○○▯	○○▯○▯○
$aacc$	$abbb$	$abbc$	$abcc$	$accc$
$bbbb$	$bbbc$	$bbcc$	$bccc$	$cccc$

활동 ① ○와 ▯를 이용하여 위의 표를 완성해 보자.

활동 ② 활동 ①의 결과를 이용하여 다음 □ 안에 알맞은 수를 써넣어 보자.

3개의 문자 a, b, c 중에서 4개를 택하는 중복조합의 수는 4개의 ○와 2개의 ▯를 일렬로 나열하는 같은 것이 있는 순열의 수와 같다.
따라서 구하는 중복조합의 수는

$$\frac{(\square+2)!}{\square!\times 2!}=\frac{\square!}{\square!\times 2!}$$
$$=\square$$

이다.

16. 다음 값을 구하시오.

(1) ${}_{6}H_{3}$　　(2) ${}_{4}H_{7}$

(3) ${}_{5}H_{0}$

17. 바닐라 맛 아이스크림, 초콜릿 맛 아이스크림, 딸기 맛 아이스크림 중에서 중복을 허용하여 5개를 주문하는 경우의 수를 구하시오.

18. 다항식 $(x+y+z)^4$을 전개할 때 생기는 서로 다른 항의 개수를 구하시오.

19. 다음 식을 전개할 때 생기는 서로 다른 항의 개수를 구하시오.

(1) $(a+b+c+d)^3$ (2) $(a+b)^3(x+y+z)^2$

20. 방정식 $x+y+z=6$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) x, y, z가 모두 음이 아닌 정수인 해의 개수

(2) x, y, z가 모두 자연수인 해의 개수

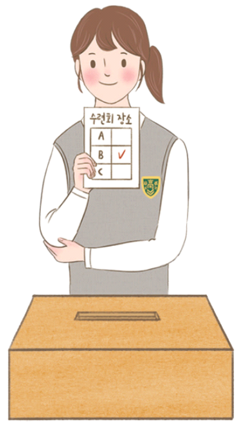
21. 방정식 $x+y+z=8$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) x, y, z가 모두 음이 아닌 정수인 해의 개수

(2) x, y, z가 모두 자연수인 해의 개수

[생각 넓히기]

22. 회원이 10명인 어느 동아리에서 A, B, C 세 곳 중 한 곳으로 수련회를 가기로 하고, 오른쪽 그림과 같은 투표용지에 각자 가고 싶은 곳을 무기명으로 기표하기로 했다. (단, 기권 또는 무효표는 없다.)



활동 ① 각 회원이 1곳에만 기표할 때, 나올 수 있는 경우의 수를 구해 보자.

활동 ② 각 회원이 2곳에 기표할 때, 나올 수 있는 경우의 수를 구해 보자.

활동 ③ 활동 ①과 활동 ②의 결과를 비교해 보자.

탐구 & 융합 경우의 수를 구하는 방법

문제 해결 | 창의·융합

똑같은 공 5개를 상자 3개에 모두 나누어 담는 경우의 수를 구할 때, 다음과 같이 상황에 따라 다른 방법을 적용해야 한다.

❶ 똑같은 상자 3개를 모두 사용하는 경우

모든 상자에 각각 공을 하나씩 넣은 후에 남은 공 2개를 똑같은 상자 3개에 모두 나누어 담는 경우의 수와 같으므로, 가능한 방법은 다음의 2가지이다.

(1개, 1개, 3개) 또는 (1개, 2개, 2개)

❷ 똑같은 상자 3개 중에서 일부만 사용해도 되는 경우

사용하는 상자가 1개, 2개, 3개인 경우에 따라 나누어 담는 방법을 구하면, 가능한 방법은 다음의 5가지이다.

(i) 상자 1개 사용 ➡ (0개, 0개, 5개)
(ii) 상자 2개 사용 ➡ (0개, 1개, 4개), (0개, 2개, 3개)
(iii) 상자 3개 사용 ➡ (1개, 1개, 3개), (1개, 2개, 2개)

❸ 서로 다른 상자 3개를 모두 사용하는 경우

모든 상자에 각각 공을 하나씩 넣은 후에 남은 공 2개를 서로 다른 상자 3개에 모두 나누어 담는 경우의 수와 같으므로, 가능한 방법은 다음의 6가지이다.

$${}_3\mathrm{H}_2 = {}_{3+2-1}\mathrm{C}_2 = {}_4\mathrm{C}_2 = 6$$

❹ 서로 다른 상자 3개 중에서 일부만 사용해도 되는 경우

공 5개를 서로 다른 3개의 상자에 모두 나누어 담는 경우의 수와 같으므로, 가능한 방법은 다음의 21가지이다.

$${}_3\mathrm{H}_5 = {}_{3+5-1}\mathrm{C}_5 = {}_7\mathrm{C}_5 = {}_7\mathrm{C}_2 = 21$$

탐구

23. 다음 각 경우에 똑같은 공 5개를 똑같은 상자 2개와 다른 상자 1개에 모두 나누어 담는 방법이 몇 가지인지 구해 보자.

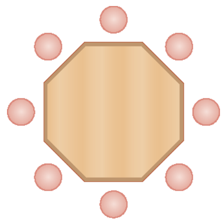
(1) 상자 3개를 모두 사용하는 경우

(2) 상자를 일부만 사용해도 되는 경우

중단원 마무리하기

기 본

24. 정팔각형 모양의 탁자에 8명이 둘러앉는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



25. 다섯 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수를 구하시오.

26. 여섯 개의 문자 a, a, b, b, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하시오.

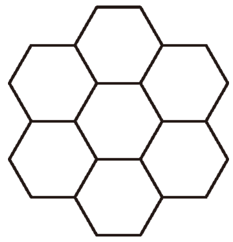
27. 다음 값을 구하시오.

(1) ${}_4\Pi_2$ (2) ${}_2H_5$

28. 식당에서 후식으로 떡, 과일, 음료수 중에서 중복을 허용하여 2개를 고르는 경우의 수를 구하시오.

표 준

29. 오른쪽 그림과 같이 합동인 정육각형 7개를 붙여 만든 도형의 각 면에 다른 색이 오도록 7가지 색으로 구분하여 칠하는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



30. 6명의 학생 A, B, C, D, E, F가 부채춤을 추기 위하여 원형으로 둘러설 때, 다음을 구하시오.

(1) 6명이 서는 경우의 수

(2) A와 B가 서로 이웃하게 서는 경우의 수

31. 4명의 학생이 방과후 체육 활동으로 농구, 야구, 축구 중에서 한 가지를 택하는 경우의 수를 구하시오.

32. 여섯 개의 숫자 0, 1, 1, 1, 2, 2를 모두 사용하여 만들 수 있는 여섯 자리 자연수의 개수를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

33. 영어 단어 success에 있는 7개의 문자를 일렬로 나열할 때, 모음이 서로 이웃하게 오도록 나열하는 경우의 수를 구하시오.

34. 다음 등식을 만족시키는 자연수 n 또는 r의 값을 구하시오.

(1) ${}_{n}\Pi_{3}=8$　　　　(2) ${}_{3}\mathrm{H}_{r}=15$

35. 3개의 문자 x, y, z를 이용하여 만들 수 있는 단항식 중 서로 다른 오차식의 개수를 구하시오.

발 전

36. 다섯 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허용하여 만든 자연수를 크기가 작은 것부터 차례대로 나열할 때, 2000은 몇 번째 수인지 구하시오.

37. 다섯 명의 학생 A, B, C, D, E의 학교 급식 만족도를 조사하려고 한다. 만족은 ○, 보통은 △, 불만족은 ×로 나타낼 때, 다음을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오. (단, 기권이나 무효는 없다.)

(1) 나오는 모든 경우의 수

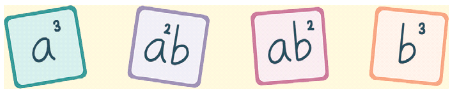
(2) ○가 두 번 나오는 경우의 수

38. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$에서 $Y=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$로의 함수 $f: X \to Y$ 중에서 $f(1) \le f(2)$를 만족시키는 f의 개수를 구하시오.

이항정리

생각 열기

39. 다항식 $(a+b)^3$을 전개할 때 생기는 항은 다음과 같다.



▶ 다항식 $(a+b)^3$의 전개식에서 a^3, a^2b, ab^2, b^3의 계수와 ${}_3C_0$, ${}_3C_1$, ${}_3C_2$, ${}_3C_3$을 각각 비교해 보자.

40. $(a+b)^6$의 전개식에서 다음 항의 계수를 구하시오.

(1) a^2b^4　　(2) ab^5

41. 이항정리를 이용하여 $(x-2)^4$을 전개하시오.

42. 이항정리를 이용하여 다음 식을 전개하시오.

(1) $(x+2y)^4$　　(2) $(1-x)^5$

43. $\left(x^3-\dfrac{2}{x}\right)^5$의 전개식에서 x^7의 계수를 구하시오.

44. $\left(3x-\dfrac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 다음을 구하시오.

(1) $\dfrac{1}{x^4}$의 계수　　(2) 상수항

45. n이 자연수일 때, 다음 등식이 성립함을 증명하시오.

$${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$$

46. n이 자연수일 때, 다음 등식이 성립함을 증명하시오.

(1) ${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots+(-1)^n\times{}_nC_n=0$

(2) ${}_{2n}C_0+{}_{2n}C_2+{}_{2n}C_4+\cdots+{}_{2n}C_{2n}$
$={}_{2n}C_1+{}_{2n}C_3+{}_{2n}C_5+\cdots+{}_{2n}C_{2n-1}=2^{2n-1}$

47. 파스칼의 삼각형을 이용하여 $(a+b)^5$을 전개하시오.

48. 파스칼의 삼각형을 이용하여 다음 값을 구하시오.

$${}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4$$

[생각 넓히기]

49. 원소의 개수가 n인 집합 A의 부분집합의 개수에 대해 알아보려고 한다.

활동 ① 집합 A의 부분집합 중에서 원소의 개수가 $k\ (1 \le k \le n)$인 부분집합의 개수는 ${}_nC_k$임을 설명해 보자.

활동 ② 29쪽 예제 3의 등식을 이용하여 집합 A의 부분집합의 개수는 2^n임을 설명해 보자.

활동 ③ 집합 A의 부분집합 B의 원소의 개수가 $r\ (1 \le r \le n)$일 때, $B \subset C \subset A$를 만족시키는 집합 C의 개수는 2^{n-r}임을 설명해 보자.

탐구 & 융합

파스칼의 삼각형과 하키 스틱 패턴

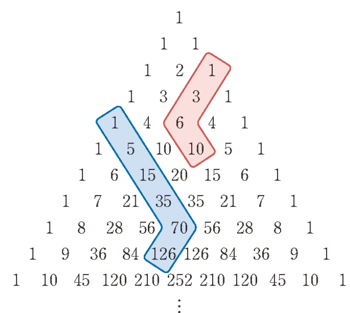
추론 | 창의·융합

파스칼의 삼각형과 하키 스틱 패턴

파스칼의 삼각형은 프랑스의 수학자 파스칼 (Pascal, B., 1623~1662)이 1654년 『수 삼각형론 (Traite du Triangle Arithmetique)』이란 책을 통해 발표하여 그의 이름을 따서 부르고 있지만, 사실은 그 이전부터 널리 알려져 있었다. 중국의 수학자 주세걸 (朱世傑, 1270?~1330?)은 1303년에 『사원옥감 (四元玉鑑)』이란 수학책에서 오른쪽 그림과 같은 수 삼각형을 발표했다.

파스칼의 삼각형은 조합과 관련된 신기한 성질을 우리 눈으로 확인할 수 있게 한다.

오른쪽 그림은 파스칼의 삼각형을 나타낸 것인데, 이 그림에서 ‘하키 스틱 패턴’이라 부르는 재미있는 성질을 확인해 보자.



예를 들어 빨간색으로 칠한 부분에서 대각선 방향으로 1, 3, 6을 더한 값은 그 다음 행의 오른쪽 값 10과 같다. 즉,

$$1+3+6=10$$

인데, 이것은 등식

$$ {}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 = {}_5C_3 $$

이 성립함을 뜻한다.

또한, 파란색으로 칠한 부분에서도 다음 등식이 성립함을 알 수 있다.

$$ {}_4C_0 + {}_5C_1 + {}_6C_2 + {}_7C_3 + {}_8C_4 = {}_9C_4 $$

이와 같은 패턴의 모양이 마치 하키 스틱처럼 보인다고 하여 ‘하키 스틱 패턴’이라는 이름이 붙었다.

탐구

50. 위의 파스칼의 삼각형에서 하키 스틱 패턴을 찾아 다음 값을 구해 보자.

$$1+4+10+20+35+56+84$$

또, 이 패턴을 조합의 수를 이용하여 나타내어 보자.

중단원 마무리하기

기 본

51. $(a+b)^7$의 전개식에서 a^2b^5의 계수를 구하시오.

52. 이항정리를 이용하여 다음 식을 전개하시오.

(1) $(2x+y)^3$

(2) $(a-2b)^5$

53. $\left(-x+\dfrac{2}{x^2}\right)^5$의 전개식에서 x^2의 계수를 구하시오.

54. 다음 등식을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오.

$${}_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3={}_nC_3$$

표 준

55. 다항식 $(1+x)^n$의 전개식에서 x^2의 계수가 45일 때, 자연수 n의 값을 구하시오.

56. 원소가 7개인 집합 A의 부분집합 중에서 원소의 개수가 홀수인 것의 개수를 구하시오.

57. 수학여행에서 6명의 학생이 매번 구성원을 다르게 하여 기념사진을 찍으려고 할 때, 사진을 찍어야 하는 횟수를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

발 전

58. 21^{11}을 40으로 나누었을 때 나머지를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

59. 다음 부등식을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오.

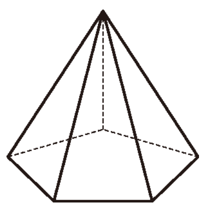
$$1000 < {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n < 2000$$

대단원 평가하기

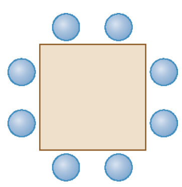
60. 서로 다른 양초 5개를 원형으로 배열하는 경우의 수를 구하시오.

61. 남학생 5명, 여학생 2명이 원탁에 둘러앉을 때, 여학생끼리는 서로 이웃하게 앉는 경우의 수를 구하시오.

62. 오른쪽 그림과 같이 밑면이 정오각형이고 옆면이 모두 합동인 정오각뿔에서 6개의 면을 서로 다른 6가지 색을 한 번씩 사용하여 칠하는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



63. 오른쪽 그림과 같은 정사각형 모양의 식탁에 8명이 둘러앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



① $4! \times 2$　② $7!$
③ $7! \times 2$　④ $8!$　⑤ $\frac{8!}{2}$

64. 4명의 회원이 각자 비행기, 기차, 고속버스 중에서 한 가지 교통수단을 이용하여 회의 장소에 모일 때, 교통수단을 택하는 경우의 수는?

① 3^4　② 4^3　③ ${}_4\mathrm{P}_3$
④ ${}_4\mathrm{H}_3$　⑤ ${}_4\mathrm{C}_3$

65. 다섯 개의 특수 문자 §, ※, @, #, & 중에서 중복을 허용하여 택한 3개를 일렬로 나열하여 만들 수 있는 암호의 개수는?

① 105　② 110　③ 115
④ 120　⑤ 125

66. 두 집합

$$X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\},\ \ Y=\{a,\ b,\ c\}$$

에 대하여 X를 정의역, Y를 공역으로 하는 함수 $f: X \rightarrow Y$의 개수는?

① 49　② 64　③ 81
④ 169　⑤ 243

67. 두 종류의 모자와 세 종류의 목도리를 판매하고 있는 가게에서 3명의 학생이 각각 모자 한 개와 목도리 한 개씩을 사려고 할 때, 이 3명의 학생이 모자와 목도리를 사는 경우의 수를 구하시오.

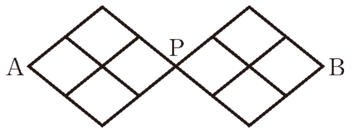
68. ${}_n\mathrm{P}_2 + {}_n\Pi_2 = 120$을 만족시키는 자연수 n의 값은?

① 6　② 7　③ 8
④ 9　⑤ 10

69. 여섯 개의 문자 x, x, x, y, y, z를 일렬로 나열하는 경우의 수는?

① 12　② 60　③ 75
④ 90　⑤ 120

70. 다음 그림과 같이 마름모 모양의 두 도로망이 P 지점에서 서로 연결되어 있다. A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 구하시오.



71. 영어 단어 happiness에 있는 9개의 문자를 일렬로 나열할 때, a와 i가 양 끝에 오도록 나열하는 경우의 수를 구하시오.

72. 여섯 개의 숫자 0, 2, 2, 3, 5, 5를 모두 사용하여 만들 수 있는 여섯 자리 자연수 중 짝수의 개수를 구하시오.

73. 모양과 크기가 같은 흰 공, 노란 공, 빨간 공 중에서 중복을 허용하여 7개를 택하는 경우의 수를 구하시오.

74. 다항식 $(a+b+c)^3(x+y)^2$을 전개할 때 생기는 서로 다른 항의 개수를 구하시오.

75. 어느 꽃집에서는 장미, 카네이션, 백합, 국화를 판매하고 있다. 네 종류의 꽃 중에서 적어도 한 송이씩을 포함하여 10송이를 사는 경우의 수를 구하시오.

76. 부등식 $x+y+z \le 3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z를 택하는 경우의 수를 구하시오.

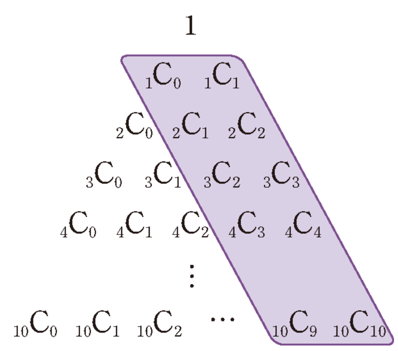
77. 자연수 r에 대하여 ${}_4\mathrm{H}_r = {}_9\mathrm{C}_3$이 성립할 때, ${}_r\mathrm{H}_4$의 값을 구하시오.

78. $(x+3y)^6$의 전개식에서 x^4y^2의 계수는?

① 125 ② 128 ③ 132
④ 135 ⑤ 148

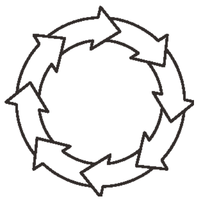
79. $(3-ax)^5$의 전개식에서 x^3의 계수가 -720일 때, 실수 a의 값을 구하시오.

80. 다음 그림과 같은 파스칼의 삼각형에서 색칠한 부분의 모든 수의 합은?



① 45 ② 55 ③ 56
④ 65 ⑤ 66

81. 오른쪽 그림과 같은 광고 디자인에 있는 8개의 화살표를 서로 다른 8가지의 색을 한 번씩 사용하여 칠하려고 한다. 특정한 3가지 색이 이웃하도록 칠하는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



82. 9^{24}을 1000으로 나눈 나머지를 구하시오.

83. 6단으로 된 계단을 한 걸음에 1단 또는 2단씩 올라 맨 위의 단까지 가는 경우의 수를 구하려고 한다.

(1) 1단 올라가는 횟수를 a, 2단 올라가는 횟수를 b라 할 때, 순서쌍 $(a,\ b)$를 모두 구하시오.

(2) 한 걸음에 1단 또는 2단씩 올라 맨 위의 단까지 가는 경우의 수를 구하시오.

확률의 뜻

생각 열기

84. 오른쪽 그림은 어느 식당에서 판매하는 음식의 종류와 가격을 나타낸 것이다.

❶ 이 식당에서 주문할 수 있는 음식을 모두 나열해 보자.

❷ 3000원짜리 음식을 주문하려고 할 때, 주문할 수 있는 음식을 모두 나열해 보자.

85. 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T로 나타낼 때, 서로 다른 두 개의 동전을 동시에 던지는 시행에서 다음을 구하시오.

(1) 표본공간 S

(2) 서로 다른 면이 나오는 사건 A

86. 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T로 나타낼 때, 서로 다른 두 개의 동전을 동시에 던지는 시행에서 두 개 모두 앞면이 나오는 사건을 A, 적어도 한 개는 앞면이 나오는 사건을 B, 두 개 모두 뒷면이 나오는 사건을 C라 할 때, 다음을 구하시오.

(1) $A \cup B$

(2) $A \cap C$

(3) B^C

(4) A, B, C 중에서 서로 배반인 두 사건

87. 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수의 합이 10일 확률을 구하시오.

88. 빨간 공 3개와 파란 공 2개가 들어 있는 주머니에서 임의로 2개의 공을 꺼낼 때, 빨간 공 1개와 파란 공 1개가 나올 확률을 구하시오.

89. 8개의 컵 중 5개에는 생과일주스가, 나머지 3개에는 식혜가 들어 있다. 이 중에서 임의로 2개를 택할 때, 다음을 구하시오.

(1) 2개에 모두 생과일주스가 들어 있을 확률

(2) 1개에는 생과일주스, 다른 1개에는 식혜가 들어 있을 확률

90. 오른쪽 표는 2015년 우리나라의 지역별 출생자 수를 조사하여 나타낸 것의 일부이다. 어느 날 우연히 만난 아이가 2015년에 태어난 아이였을 때, 이 아이가 경기도에서 태어났을 확률을 소수점 아래 셋째 자리에서 반올림하여 구하시오.

(단위: 명)

지역	출생자
경기도	113495
강원도	10929
충청북도	13563
⋮	⋮
합계	438420

(출처: 통계청, 2015)

함께하기

91. 표본공간이 S인 사건 A에 대하여 다음 □ 안에 알맞은 수를 써넣어 보자.

$\varnothing \subset A \subset S$이므로 $n(\varnothing) \le n(A) \le n(S)$이다. 이 식의 각 변을 $n(S)$로 나누면

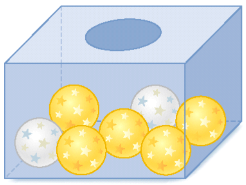
$$0 \le \frac{n(A)}{n(S)} \le \square, \text{ 즉 } 0 \le \mathrm{P}(A) \le \square$$

이다. 특히, $A = S$이면 $\mathrm{P}(S) = \dfrac{n(S)}{n(S)} = \square$

이고, $A = \varnothing$이면 $\mathrm{P}(\varnothing) = \dfrac{n(\varnothing)}{n(S)} = \square$

이다.

92. 오른쪽 그림과 같이 흰 공 2개와 노란 공 5개가 들어 있는 상자에서 임의로 3개의 공을 꺼낼 때, 다음을 구하시오.



(1) 노란 공이 포함될 확률
(2) 흰 공이 3개 나올 확률

[생각 넓히기]
93. 어느 고등학교의 마라톤 대회에 참가한 500명을 대상으로 다음과 같은 이벤트를 했다.

활동 1 마라톤 대회에 참가한 소정이가 음료 교환권을 받을 확률과 보조 배터리를 받을 확률을 각각 구해 보자.
활동 2 위의 상황에서 확률이 0인 사건을 만들어 보자.

공학적 도구

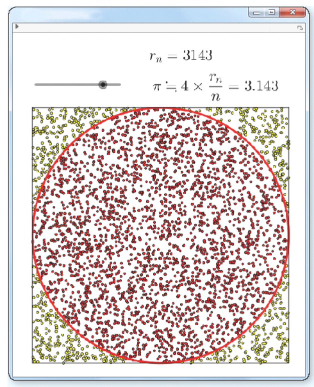
통계적 확률과 모의실험

정보 처리 | 태도 및 실천

모의실험 (simulation)은 실제의 상황을 간단하게 축소한 모형을 통해서 실험을 하고 그 실험 결과에 따라 의사결정을 하는 방법으로, 통계적 확률을 구하는 데 이용할 수 있다.

몬테카를로 모의실험 (Monte Carlo simulation)은 주어진 시행을 임의로 여러 번 반복함으로써 확률을 계산하는 것으로, 컴퓨터를 이용한 주사위나 동전 던지기 등이 사용된다.

모의실험에 의한 통계적 확률 계산으로 원주율 π의 어림값을 구해 보자.



오른쪽 그림은 컴퓨터 프로그램을 이용하여 한 변의 길이가 2인 정사각형에 내접하는 원을 그리고, 정사각형의 내부에 n개의 점을 임의로 찍는 모의실험을 한 것이다. 원의 내부에 있는 점의 개수를 r_n이라 할 때, 원의 내부에 있는 점의 상대도수 $\frac{r_n}{n}$은 n이 충분히 크면

$\frac{(\text{원의 넓이})}{(\text{정사각형의 넓이})}=\frac{\pi}{4}$에 가까워질 것으로 예측할 수 있다.

예를 들어 어떤 모의실험에서 $n=4000$일 때 $r_n=3143$이라면, π의 어림값으로 $4\times\frac{3143}{4000}=3.143$을 얻게 된다.

확 인

94. 동전 던지기 프로그램을 이용하여 학생 6명이 차례대로 동전을 50번씩 던질 때, 앞면이 나오는 횟수를 조사하는 실험을 해 보자.

(1) 한 사람의 동전 던지기가 끝났을 때 이전 사람의 기록까지 모두 합하여 동전을 던진 횟수를 n이라 하고, 그때까지 앞면이 나온 횟수를 모두 합하여 r_n이라 하자.
다음 표를 완성해 보자.

n	50	100	150	200	250	300
r_n						
$\frac{r_n}{n}$						

(2) 위의 표에서 n이 커짐에 따라 $\frac{r_n}{n}$이 동전 한 개를 던질 때 앞면이 나올 수학적 확률에 가까워지는지 알아보자.

확률의 덧셈정리

생각 열기

95. 어느 마을 주민 400명을 대상으로 두 안건 A와 B에 대한 찬성 여부를 각각 조사했더니 A 안건에 찬성한 주민은 120명, B 안건에 찬성한 주민은 240명이었고, 두 안건에 모두 찬성한 주민은 없었다고 한다.

❶ A 안건 또는 B 안건에 찬성한 주민의 수를 구해 보자.

❷ 조사에 참여한 주민 중에서 임의로 한 명을 택할 때, 그 주민이 A 안건 또는 B 안건에 찬성했을 확률을 구해 보자.

96. 1부터 30까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 30장의 카드 중에서 임의로 한 장의 카드를 뽑을 때, 다음을 구하시오.

(1) 카드에 적힌 수가 4의 배수이거나 6의 배수일 확률

(2) 카드에 적힌 수가 10 이하이거나 20 이상일 확률

97. 한 개의 주사위를 던질 때, 나오는 눈의 수가 6의 약수 또는 소수일 확률을 구하시오.

98. 지수를 포함한 남학생 5명, 가희를 포함한 여학생 7명이 있는 과학사 탐구 동아리에서 동아리 홍보를 담당할 세 명의 학생을 임의로 뽑을 때, 다음을 구하시오.

(1) 지수 또는 가희가 뽑힐 확률

(2) 모두 남학생 또는 모두 여학생이 뽑힐 확률

함께하기

99. 표본공간이 S인 사건 A에 대하여 여사건 A^C의 확률을 구하려고 한다. 다음 $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.

사건 A와 그 여사건 A^C는 서로 $\square$사건이므로

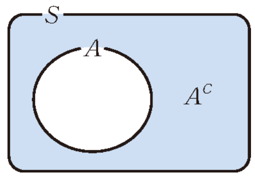
확률의 덧셈정리에 의하여

$$\mathrm{P}(A \cup A^C) = \mathrm{P}(\square) + \mathrm{P}(A^C)$$

이다. 그런데 $\mathrm{P}(A \cup A^C) = \mathrm{P}(S) = \square$이므로

$$\mathrm{P}(\square) + \mathrm{P}(A^C) = 1, \text{ 즉 } \mathrm{P}(A^C) = 1 - \mathrm{P}(\square)$$

가 성립한다.



100. 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수가 다를 확률을 구하시오.

101. 45개의 모시 송편 중 29개에는 콩이 들어 있고, 나머지에는 깨가 들어 있다. 모시 송편 중에서 임의로 두 개를 택할 때, 적어도 한 개에는 콩이 들어 있을 확률을 구하시오.

102. 1부터 20까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 20장의 카드 중에서 임의로 두 장의 카드를 뽑을 때, 카드에 적힌 두 수의 곱이 짝수일 확률을 구하시오.

103. 영어 단어 lovely에 있는 6개의 문자를 일렬로 나열할 때, 같은 문자가 이웃하지 않을 확률을 구하시오.

[생각 넓히기]

104. 4월에 태어난 5명의 아이가 있다.

활동 ❶ 5명의 생일이 모두 다를 확률을 구해 보자.

활동 ❷ 생일이 같은 아이가 있을 확률을 구해 보자.

중단원 마무리하기

기 본

105. 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던지는 시행에서 다음을 구하시오.

(1) 표본공간 S

(2) 나오는 눈의 수가 같은 사건 A

106. 양식장에서 기르는 어느 생선알 1000개 중에서 800개가 부화에 성공했다고 한다. 같은 조건에서 생선알 한 개가 부화할 때, 이 생선알이 부화에 성공할 확률을 구하시오.

107. 파란색 알사탕 3개와 빨간색 알사탕 5개가 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 알사탕을 꺼낼 때, 다음을 구하시오.

(1) 빨간색 알사탕이 나올 확률

(2) 알사탕이 나올 확률

(3) 노란색 알사탕이 나올 확률

108. 두 사건 A와 B가 서로 배반사건이고 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$일 때, 다음을 구하시오.

(1) $\mathrm{P}(A\cup B)$ (2) $\mathrm{P}(A^C)$

표 준

109. 두 사람이 가위바위보를 한 번 할 때, 비길 확률을 구하시오.

110. 남학생 5명과 여학생 4명을 일렬로 세울 때, 남학생과 여학생이 교대로 서게 될 확률을 구하시오.

111. 운동회에 참가한 민희와 수영이에게 초콜릿 맛 우유, 딸기 맛 우유, 바나나 맛 우유, 멜론 맛 우유 중에서 임의로 하나씩 나누어 줄 때, 두 사람이 서로 다른 맛의 우유를 받을 확률을 구하시오.

112. 방정식 $x+y+z=8$의 음이 아닌 정수인 해 중에서 임의로 하나를 택할 때, y의 값이 2일 확률을 구하시오.

113. 어느 마을에 살고 있는 120가구 중에서 닭을 기르는 집은 전체의 60% 이고 돼지를 기르는 집은 전체의 45%이다. 또, 닭과 돼지를 모두 기르는 집은 24가구이다. 이 마을에서 임의로 한 집을 택할 때, 그 집에서 닭 또는 돼지를 기를 확률을 구하시오.

114. 3장의 경품권을 포함한 10장의 카드가 들어 있는 추첨함에서 임의로 두 장의 카드를 꺼낼 때, 적어도 한 장은 경품권일 확률을 구하시오.

115. 학급 회의를 하기 위해 원탁에 시연이와 민지를 포함한 6명의 이름표를 놓을 때, 시연이와 민지의 이름표가 이웃하지 않을 확률을 구하시오.

116. A 반과 B 반의 학생으로만 구성된 어느 동아리 회원 10명 중에서 대표 2명을 뽑을 때, 같은 반 학생이 뽑힐 확률은 $\frac{8}{15}$이다. 이 동아리 회원 중에서 A 반과 B 반의 학생 수의 차를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

발 전

117. 세 사람이 5개의 상영관의 영화표를 판매하는 매표소에서 영화표를 임의로 구매할 때, 이들 중 두 사람만 같은 상영관의 영화표를 구매할 확률을 구하시오.

118. 서로 다른 두 개의 주사위 A, B를 동시에 던지는 시행에서 나오는 눈의 수를 각각 a, b라 할 때, x에 대한 이차방정식 $x^2-ax+2b=0$이 실근을 가질 확률을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

조건부 확률

생각 열기

119. 오른쪽 표는 어느 야구 팀에 등록된 선수를 대상으로 오른손과 왼손을 쓰는 투수와 타자의 수를 조사하여 나타낸 것이다.

(단위: 명)

	투수	타자	합계
오른손	8	8	16
왼손	4	7	11
합계	12	15	27

❶ 선수 중에서 임의로 한 명을 택할 때, 그 선수가 왼손을 쓰는 선수일 확률을 구해 보자.

❷ 투수 중에서 임의로 한 명을 택할 때, 그 선수가 왼손을 쓰는 선수일 확률을 구해 보자.

120. 1부터 9까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 9개의 공이 상자에 들어 있다. 이 상자에서 임의로 꺼낸 공에 적힌 수가 홀수일 때, 그 수가 10의 약수일 확률을 구하시오.

121. 한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 6의 약수일 때, 그 수가 소수일 확률을 구하시오.

122. 오른쪽 표는 어느 학급 학생 32명을 대상으로 반바지로 된 생활복에 대한 찬성 여부를 조사하여 나타낸 것이다. 이 학급에서 임의로 택한 한 명이 찬성한 학생일 때, 그 학생이 여학생일 확률을 구하시오.

(단위: 명)

	찬성	반대	합계
남학생	13	4	17
여학생	8	7	15
합계	21	11	32

123. 상자 안에 아몬드 초콜릿 10개와 호두 초콜릿 6개가 들어 있다. 이 상자에서 민수와 선미가 차례대로 초콜릿을 임의로 한 개씩 꺼낼 때, 두 사람 모두 호두 초콜릿을 꺼낼 확률을 구하시오. (단, 꺼낸 초콜릿은 다시 넣지 않는다.)

124. 흰색 탁구공 8개와 주황색 탁구공 4개가 들어 있는 주머니에서 탁구공을 임의로 한 개씩 두 번 꺼낼 때, 흰색 탁구공, 주황색 탁구공의 순서로 탁구공을 꺼낼 확률을 구하시오. (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

125. 어느 회사는 같은 부품을 A 공장에서 40 %, B 공장에서 60 % 납품받는다. 두 공장 A, B에서 생산된 부품의 불량률은 각각 1 %, 2 %이다. 이 부품 중에서 임의로 한 개를 택할 때, 다음을 구하시오.

(1) 택한 부품이 불량품일 확률

(2) 택한 부품이 불량품일 때, 그 부품이 A 공장에서 생산되었을 확률

126. 어느 거짓말 탐지기의 정확도는 90 %이다. 즉, 참말을 참이라고 판정할 확률과 거짓말을 거짓이라고 판정할 확률이 모두 0.9이다. 거짓말을 할 확률이 0.2인 어떤 사람이 한 말에 대해 거짓말 탐지기가 거짓이라고 판정했을 때, 실제로 그 사람이 거짓말을 했을 확률을 구하시오.

[생각 넓히기]

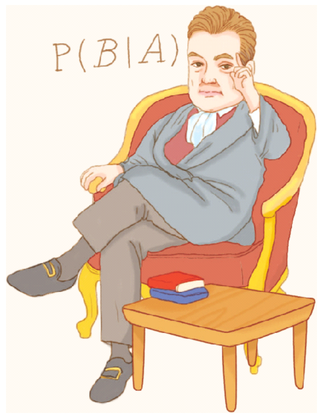
127. 다음은 4개의 당첨 제비가 포함된 20개의 제비 중에서 두 사람이 차례대로 제비를 임의로 한 개씩 뽑을 때, 누가 더 유리한지에 대한 대화이다. 누구의 말이 맞는지 판단해 보자. (단, 뽑은 제비는 다시 넣지 않는다.)

탐구&융합 조건부확률과 베이즈의 정리

문제 해결 | 창의·융합

감기, 기관지염, 폐렴에 걸린 환자는 보통 기침을 한다. 이 환자들이 기침을 할 확률을 안다고 할 때, 기침을 하는 환자가 감기, 기관지염, 폐렴에 걸려 있을 확률을 구할 수 있을까?

영국의 목사이자 수학자인 베이즈(Bayes, T., 1702~1761)는 이와 같이 이미 주어진 확률을 이용하여 새로운 확률을 계산하는 공식을 처음 발견했는데, 이를 “베이즈의 정리”라고 한다.



그의 이론에 의하면, 두 사건 A와 B의 확률 $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$와 조건부확률 $\mathrm{P}(A|B)$를 알 때, 확률 $\mathrm{P}(B|A)$를

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A|B)}{\mathrm{P}(A)}\mathrm{P}(B)$$

와 같이 구할 수 있다.

베이즈가 생각해 낸 이 확률 이론은 컴퓨터 공학 분야에서 폭넓게 사용되고 있는데 이 이론을 바탕으로 한 ‘베이지안 기계 학습(Bayesian machine learning)’은 컴퓨터의 독자적 학습 능력을 의미하며, 인공지능 로봇 기술에 응용된다고 한다.

(출처: 다다 사토시, 『처음 배우는 인공지능』, 송교석 역)

탐구

128. 2000명 중에 한 명꼴로 감염되는 어느 바이러스의 감염 여부를 판정하는 검사법의 정확도가 90%라고 한다.

(단위: 명)

	양성 반응	음성 반응	합계
감염자			10
비감염자			19990
합계			20000

(1) 이 검사를 받은 사람이 20000명일 때, 오른쪽 표를 완성해 보자.

(2) 이 검사에서 양성 반응을 보인 사람이 실제로 바이러스에 감염된 사람일 확률을 소수점 아래 다섯째 자리에서 반올림하여 구해 보자.

사건의 독립과 종속

생각 열기

129. 빨간색 사탕 4개와 파란색 사탕 5개가 들어 있는 주머니에서 사탕을 임의로 한 개씩 두 번 꺼낼 때, 첫 번째 꺼낸 사탕이 빨간색인 사건을 A, 두 번째 꺼낸 사탕이 파란색인 사건을 B라 하자.

❶ 첫 번째 꺼낸 사탕을 다시 넣을 때, $\mathrm{P}(B|A)$와 $\mathrm{P}(B)$를 각각 구해 보자.

❷ 첫 번째 꺼낸 사탕을 다시 넣지 않을 때, $\mathrm{P}(B|A)$와 $\mathrm{P}(B)$를 각각 구해 보자.

130. 한 개의 주사위를 던질 때, 나오는 눈의 수가 짝수인 사건을 A, 소수인 사건을 B, 6의 약수인 사건을 C라 하자. 다음 두 사건이 서로 독립인지 종속인지 말하시오.

(1) A와 B　　(2) A와 C

131. 1부터 10까지의 자연수 중에서 임의로 한 개를 택할 때, 택한 수가 2의 배수인 사건을 A, 3의 배수인 사건을 B, 5의 배수인 사건을 C라 하자. 다음 두 사건이 서로 독립인지 종속인지 말하시오.

(1) A와 B　　(2) A와 C

함께하기

132. 한 개의 주사위를 4번 던질 때, 1의 눈이 2번 나올 확률을 구하려고 한다.

활동 ❶ 1의 눈이 나오는 경우를 ○, 1의 눈이 나오지 않는 경우를 ×로 나타낼 때, 1의 눈이 2번 나오는 모든 경우와 각각의 사건이 일어날 확률을 구하여 아래 표를 완성해 보자.

1회	2회	3회	4회	확률
○	○	×	×	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}$

활동 ❷ 활동 ❶의 결과를 이용하여 한 개의 주사위를 4번 던질 때, 1의 눈이 2번 나올 확률을 구해 보자.

133. 어느 클레이 사격 선수가 날아오르는 표적을 맞힐 확률은 $\frac{4}{5}$라고 한다. 이 선수가 3발을 쏘았을 때, 다음을 구하시오.

(1) 표적을 2번 맞힐 확률

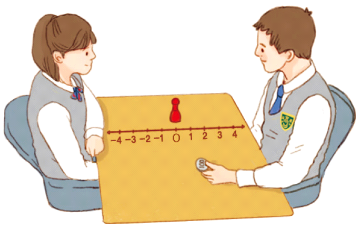
(2) 표적을 한 번도 맞히지 못할 확률

134. 승률이 60%인 바둑 기사가 5번의 대국에서 4번 이상 이길 확률을 구하시오.

135. 어느 양궁 선수가 10점 과녁을 맞힐 확률은 $\frac{3}{4}$이라고 한다. 이 선수가 3발을 쏘았을 때, 적어도 한 발은 10점 과녁에 맞힐 확률을 구하시오.

[생각 넓히기]

136. 오른쪽 그림과 같이 수직선 위의 원점 O에 놓인 말을 동전을 한 번 던질 때마다 다음과 같은 규칙에 따라 움직이려고 한다.



(가) 앞면이 나오면 양의 방향으로 1만큼 이동한다.
(나) 뒷면이 나오면 음의 방향으로 1만큼 이동한다.

활동 ▶ 동전을 5번 던질 때, 말이 원점에서 3만큼 떨어진 곳에 위치할 확률을 구해 보자.

중단원 마무리하기

기 본

137. 한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 소수일 때, 그 수가 홀수일 확률을 구하시오.

138. 표본공간이 $S=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 10\}$인 두 사건 A와 B에 대하여 $A=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$, $B=\{2,\ 5,\ 8\}$일 때, $\mathrm{P}(B|A)$를 구하시오.

139. 1부터 12까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 12장의 카드 중에서 임의로 한 장의 카드를 뽑을 때, 카드에 적힌 수가 4의 약수인 사건을 A, 3의 배수인 사건을 B라 하자. 두 사건 A와 B가 서로 독립인지 종속인지 말하시오.

140. 두 사건 A와 B가 서로 독립이고 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$를 구하시오.

141. 한 개의 동전을 4번 던질 때, 앞면이 3번 나올 확률을 구하시오.

표 준

142. 원소의 개수가 15인 표본공간 S의 두 사건 A와 B에 대하여 $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5}$이고, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{3}$일 때, $n(A\cap B)$를 구하시오.

143. 어느 학교 밴드 동아리 전체 회원의 60 %는 남학생이고, 보컬을 담당하는 남학생 회원은 전체 회원의 24 %이다. 이 동아리에서 임의로 택한 한 명이 남학생일 때, 그 학생이 보컬을 담당하는 학생일 확률을 구하시오.

144. 상자 안에 크기와 모양이 같은 검은색 볼펜 5자루와 빨간색 볼펜 2자루가 들어 있다. 이 상자에서 민지와 지훈이가 차례대로 볼펜을 임의로 한 자루씩 꺼낼 때, 민지는 검은색 볼펜, 지훈이는 빨간색 볼펜을 꺼낼 확률을 구하시오. (단, 꺼낸 볼펜은 다시 넣지 않는다.)

145. 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 다음 보기의 세 사건 A, B, C 중에서 서로 독립인 두 사건을 찾으시오.

A : 첫 번째에 나오는 눈의 수가 4의 약수인 사건
B : 나오는 눈의 수가 모두 짝수인 사건
C : 나오는 눈의 수의 합이 7인 사건

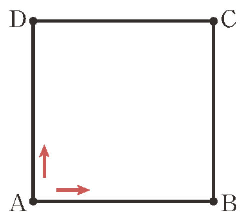
146. 어느 푸드 트럭에서는 햄버거, 샌드위치, 케밥을 판매한다. 각 음식에 대한 선호도가 동일한 4명의 손님이 음식을 주문할 때, 적어도 한 명은 케밥을 택할 확률을 구하시오.

147. 7번의 경기 중에서 4번의 경기를 먼저 이기는 팀이 우승하는 프로 야구 한국 시리즈에 A 팀과 B 팀이 출전하였다. 현재까지 A 팀이 2승 무패로 앞서고 있다고 할 때, B 팀이 우승할 확률을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오. $\left(\text{단, A 팀이 B 팀을 이길 확률은 } \frac{1}{2}\text{이고, 비기는 경우는 없다.}\right)$

발전

148. 감귤은 무게에 따라 분류하는데, 두 감귤 농장 A, B에서 생산된 감귤을 잘못 분류할 비율은 각각 2%, 3%이다. 어느 과일 가게에 감귤 5상자가 있는데, 이 중에서 3상자는 A 농장에서, 나머지 2상자는 B 농장에서 생산되었다고 한다. 이 5개의 상자 중에서 임의로 한 상자를 택하고, 그 상자에서 꺼낸 감귤 한 개가 잘못 분류된 감귤일 때, 그 감귤이 A 농장에서 생산되었을 확률을 구하시오.

149. 점 P가 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD의 변 위를 주사위를 한 번 던질 때마다 다음과 같은 규칙에 따라 움직인다.



주사위를 4번 던질 때, 점 A를 출발한 점 P가 다시 점 A로 되돌아올 확률을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

> (가) 나오는 눈의 수가 3의 배수이면 시곗바늘이 도는 방향과 반대인 방향으로 1만큼 움직인다.
> (나) 나오는 눈의 수가 3의 배수가 아니면 시곗바늘이 도는 방향으로 1만큼 움직인다.

대단원 평가하기

150. 주사위를 한 번 던지는 시행에서 나오는 눈의 수가 3의 약수인 사건을 A라 할 때, 다음 중 A와 서로 배반인 사건은?

① 나오는 눈의 수가 4의 약수인 사건
② 나오는 눈의 수가 소수인 사건
③ 나오는 눈의 수가 짝수인 사건
④ 나오는 눈의 수가 홀수인 사건
⑤ 나오는 눈의 수가 3의 배수인 사건

151. 야구에서 n타수 중 r개의 안타를 친 선수의 타율은 $\frac{r}{n}$라고 한다. 현재까지 32타수에 나와 타율이 0.25인 선수가 앞으로 48타수에 더 나와 타율이 0.3이 되게 하기 위해서는 몇 개의 안타를 더 쳐야 하는지 구하시오.

152. 4인승 카누 경기의 연습을 하기 위해 4명의 선수가 임의로 자리에 앉을 때, 특정한 두 선수가 카누의 양 끝에 앉을 확률은?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

153. 1부터 5까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 5장의 카드 중에서 임의로 두 장의 카드를 차례대로 뽑아 첫 번째 뽑은 카드에 적힌 수를 a, 두 번째 뽑은 카드에 적힌 수를 b라 하자. 이때 두 변의 길이가 각각 a이고, 나머지 한 변의 길이가 b인 이등변삼각형이 둔각삼각형일 확률을 구하시오. (단, 꺼낸 카드는 다시 넣지 않는다.)

154. 집합 $A=\{a,\ b,\ c\}$의 공집합이 아닌 부분집합 중에서 임의로 2개를 택할 때, 하나가 다른 하나의 진부분집합이 될 확률을 구하시오.

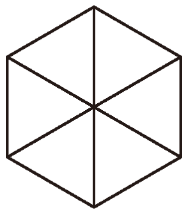
155. 흰 공 5개와 검은 공 4개가 들어 있는 주머니에서 임의로 2개의 공을 꺼낼 때, 2개 모두 흰 공이거나 2개 모두 검은 공일 확률은?

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

156. 두 사건 A와 B에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $0<\mathrm{P}(A)<1$
② $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$
③ $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
④ $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$
⑤ $\mathrm{P}(A-B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)$

157. 오른쪽 그림과 같이 6등분한 정육각형에 빨강, 파랑, 노랑, 초록, 주황, 보라의 6가지 색을 모두 사용하여 임의로 칠할 때, 빨간색과 노란색을 이웃하지 않게 칠할 확률은?



① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{7}{15}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

158. 남학생 4명과 여학생 5명으로 구성된 어느 모둠에서 청소 당번 3명을 뽑을 때, 적어도 한 명의 남학생이 청소 당번으로 뽑힐 확률은?

① $\frac{13}{42}$ ② $\frac{7}{14}$ ③ $\frac{11}{14}$
④ $\frac{37}{42}$ ⑤ $\frac{13}{14}$

159. 오른쪽 표는 어느 여행사에서 회원 40명을 대상으로 여행을 가고 싶은 지역을 조사하여 나타낸 것이다. 이 회원 중에서 임의로 택한 한 명이 경주를 가고 싶다고 한 회원일 때, 그 회원이 여자일 확률을 구하시오.

(단위: 명)

	경주	담양	합계
남	16	6	22
여	8	10	18
합계	24	16	40

160. 1등 당첨 제비 1개와 2등 당첨 제비 2개를 포함한 10개의 제비가 들어 있는 추첨함에서 임의로 뽑은 2개의 제비 중 한 개가 당첨 제비일 때, 그 제비가 1등 당첨 제비일 확률을 구하시오.

161. 두 사건 A와 B에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=0.5,\ \mathrm{P}(B)=0.6,\ \mathrm{P}(A\cap B)=0.2$$

일 때, $\mathrm{P}(A^C|B^C)$의 값을 구하시오.

162. 어느 지역에서 장마철 날씨를 조사한 결과 비가 온 날의 다음 날에 비가 올 확률은 0.6이고, 비가 오지 않은 날의 다음 날에 비가 올 확률은 0.3이었다. 장마철의 어느 수요일에 비가 왔을 때, 그 주 금요일에도 비가 올 확률을 구하시오.

163. 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 나오는 눈의 수를 각각 a, b라 하자. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 허근을 가질 때, a가 홀수일 확률을 구하시오.

164. 어느 농구 선수의 자유투 성공 확률을 조사하였더니 자유투를 성공한 후 다음 시도에서 성공할 확률은 $\frac{2}{3}$이고, 자유투를 실패한 후 다음 시도에서 성공할 확률은 $\frac{1}{4}$이었다. 이 선수가 첫 번째 자유투를 성공했을 때, 세 번째 시도에서 성공할 확률을 구하시오.

165. 확률이 0이 아닌 두 사건에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① 서로 종속인 두 사건은 배반사건이 아니다.
② 서로 독립인 두 사건은 배반사건이다.
③ 서로 배반인 두 사건은 종속사건이다.
④ 서로 배반이 아닌 두 사건은 독립사건이다.
⑤ 어떤 사건과 그 여사건은 독립사건이다.

166. 오른쪽 그림과 같은 어느 달의 달력에서 임의로 한 날을 택할 때, 그 날이 일요일인 사건을 A, 수요일인 사건을 B, 날짜가 5의 배수인 사건을 C라 하자. 다음 보기에서 서로 독립인 두 사건을 있는 대로 고른 것은?

일	월	화	수	목	금	토
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

| 보기 |

ㄱ. A와 B　　ㄴ. B와 C　　ㄷ. A와 C

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

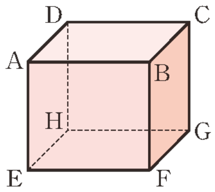
167. 서로 독립인 두 사건 A와 B에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4},\quad \mathrm{P}(B)=\frac{2}{5}$$

일 때, A와 B 중에서 적어도 한 사건이 일어날 확률을 구하시오.

168. 5문제 중에서 4문제 이상을 맞히면 합격하는 시험이 있다. 각 문제를 맞힐 확률이 $\frac{1}{2}$인 학생이 이 시험에 합격할 확률을 구하시오.

169. 오른쪽 그림과 같은 직육면체의 8개의 꼭짓점 중에서 임의로 서로 다른 3개의 점을 택할 때, 그중에서 2개의 점이 같은 모서리의 꼭짓점일 확률을 구하시오.



170. 5번의 경기 중에서 3번을 먼저 이기는 사람이 최종 우승하는 체스 대회의 결승에 A와 B 두 사람이 진출하였다. A가 첫 번째 경기를 이겼을 때, A가 최종 우승할 확률을 구하시오.

$\left(\text{단, A가 B를 이길 확률은 } \frac{2}{3}\text{이고, 비기는 경우는 없다.}\right)$

171. 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 첫 번째에 나오는 눈의 수가 4의 배수인 사건을 A, 두 개의 주사위에서 나오는 눈의 수의 합이 k인 사건을 B_k라 하면 두 사건 A와 B_k는 서로 독립이다. 다음에 답하시오. (단, k는 5 이상의 자연수이다.)

(1) 두 사건 A와 B_k가 일어날 확률을 각각 구하시오.

(2) (1)의 결과를 이용하여 k의 값을 구하시오.

확률변수와 확률분포

생각 열기

172. 한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하자.

❶ 표본공간 S를 구해 보자.

❷ 표본공간의 각 근원사건에 대하여 앞면이 나오는 횟수를 X라 할 때, X가 가질 수 있는 값을 모두 구해 보자.

173. 파란 공 4개와 빨간 공 5개가 들어 있는 주머니에서 임의로 4개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 빨간 공의 개수를 확률변수 X라 하자. X가 가질 수 있는 값을 구하시오.

174. 다음 시행에서의 확률변수가 이산확률변수인지 연속확률변수인지 말하시오.

(1) 볼링공을 계속 굴리는 시행에서 스트라이크를 성공할 때까지 공을 굴린 횟수

(2) 7분 간격으로 도착하는 어느 버스를 기다리는 시간을 측정하는 시행에서 버스를 기다리는 시간

175. 다음 확률변수가 이산확률변수인지 연속확률변수인지 말하시오.

(1) 어느 지역에 일 년 동안 내리는 강수량

(2) 어느 날 동물원의 입장객 수

(3) 10개의 동전을 던질 때, 앞면이 나온 동전의 개수

(4) 어느 공장에서 생산된 전구의 수명

176. 남학생 4명과 여학생 3명으로 구성되어 있는 봉사 동아리에서 3명을 임의로 뽑을 때, 뽑힌 여학생의 수를 확률변수 X라 하자. 다음에 답하시오.

(1) X의 확률분포를 표로 나타내시오.

(2) 여학생이 2명 이상 뽑힐 확률을 구하시오.

177. 흰 공 5개와 검은 공 5개가 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 검은 공의 개수를 확률변수 X라 하자. 다음에 답하시오.

(1) X의 확률분포를 표로 나타내시오.

(2) 검은 공을 적어도 1개 이상 꺼낼 확률을 구하시오.

178. 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=kx$ $(0 \le x \le 3)$일 때, 다음을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

(1) k의 값　　(2) $\mathrm{P}(2 \le X \le 3)$

179. 연속확률변수 X의 확률밀도함수가
$f(x)=\frac{1}{4}x+k\ (0\le x\le 2)$일 때, 다음을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

(1) k의 값　　　　(2) $\mathrm{P}(1<X\le 2)$

180. 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

(1) k의 값　　　　(2) $\mathrm{P}\left(X>\frac{3}{2}\right)$

181. 여객선 터미널에서 어느 여객선의 도착 예정 시각과 실제 도착 시각의 차를 확률변수 X라 할 때, X의 확률밀도함수 $f(x)$는

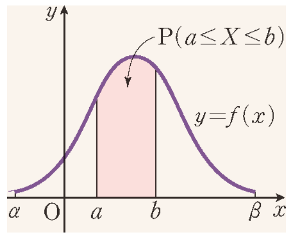
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{150}x & (0\le x<10)\\ \frac{1}{10}-\frac{1}{300}x & (10\le x\le 30)\end{cases}$$

이다. 이때 도착 예정 시각과 실제 도착 시각의 차가 5분 이상 15분 이하일 확률을 구하시오.

탐구&융합 연속확률변수와 적분

추론 | 창의·융합

연속확률변수 X가 a 이상 b 이하의 값을 가질 확률 $\mathrm{P}(a\le X\le b)$는 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로, 확률밀도함수의 성질을 정적분을 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.



> 연속확률변수 X가 닫힌구간 $[\alpha,\ \beta]$에 속하는 모든 실수의 값을 가질 때, X의 확률밀도함수가 $f(x)$이면
> ❶ $\alpha\le x\le\beta$인 모든 x에 대하여　$f(x)\ge 0$
> ❷ $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=1$
> ❸ $\mathrm{P}(a\le X\le b)=\int_{a}^{b}f(x)dx$ (단, $\alpha\le a\le b\le\beta$)

예를 들어 어느 상점에서 물건값을 계산하기 위하여 기다리는 시간을 연속확률변수 X라 할 때, X의 확률밀도함수가 다음과 같다고 한다.

$$f(x)=\frac{1}{288}x(12-x)\ \ (0\le x\le 12)$$

이때 기다리는 시간이 3분 이내일 확률은 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(0\le X\le 3)=\int_{0}^{3}\frac{1}{288}x(12-x)dx$$
$$=\frac{1}{288}\left[6x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^3=\frac{5}{32}$$

탐구

182. 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=kx^2$ $(0\le x\le 3)$일 때, 다음을 구해 보자. (단, k는 상수이다.)

(1) k의 값　　　　(2) $\mathrm{P}(1\le X\le 2)$

이산확률변수의 기댓값과 표준편차

생각 열기

183. 어느 놀이공원에서는 개장 기념행사로 선착순 100명의 입장객에게 다음 표와 같이 할인액이 적힌 할인권을 준다고 한다.

할인액(원)	5000	10000	20000	합계
할인권 수	70	20	10	100

❶ 할인권 한 장에 대한 할인액의 평균을 구하는 식을 세워 보자.

❷ 100장의 할인권 중에서 임의로 택한 할인권 한 장의 할인액을 확률변수 X라 할 때, X의 확률분포를 표로 나타내어 보자.

184. 한 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수를 확률변수 X라 할 때, X의 기댓값을 구하시오.

185. 검은색 볼펜 6자루와 파란색 볼펜 4자루가 들어 있는 필통에서 임의로 3자루의 볼펜을 뽑을 때, 뽑은 파란색 볼펜의 개수를 확률변수 X라 하자. X의 기댓값을 구하시오.

186. 상자 속에 1, 3, 5, 7의 숫자가 각각 하나씩 적힌 4장의 카드가 들어 있다. 이 중에서 임의로 1장을 꺼낼 때, 꺼낸 카드에 적힌 수를 확률변수 X라 하자. X의 분산과 표준편차를 구하시오.

187. 어느 고등학교 학생들의 형제자매의 수를 확률변수 X라 하고, X의 확률분포를 조사한 결과는 다음 표와 같다. X의 분산과 표준편차를 구하시오.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	0.4	0.3	0.2	0.1	1

188. 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(X)=10$일 때, 다음 확률변수의 기댓값을 구하시오.

(1) $4X-3$　　(2) $-\frac{1}{2}X+7$

189. 확률변수 X의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$와 분산 $\mathrm{V}(X)$에 대하여 다음이 성립함을 보이시오.

$$\mathrm{V}(X)=E(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$

190. 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{V}(X)=9$일 때, 다음 확률변수의 분산과 표준편차를 구하시오.

(1) $3X$　　(2) $3X-\frac{1}{5}$

(3) $-X+3$　　(4) $-\frac{1}{3}X-2$

191. 확률변수 X의 확률분포가 아래 표와 같을 때, 확률변수 $Y=3X+2$의 기댓값과 분산 및 표준편차를 구하시오.

X	2	4	6	8	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

192. 빨간 공 3개와 파란 공 3개가 들어 있는 주머니에서 임의로 2개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 빨간 공의 개수를 확률변수 X라 하자. 확률변수 $5X-2$의 표준편차를 구하시오.

이항분포

생각 열기

193. 어느 국궁 선수는 활을 한 번 쏠 때 과녁을 맞힐 확률이 $\frac{9}{10}$라고 한다. 이 선수가 활을 세 번 쏠 때, 과녁을 맞힌 횟수를 확률변수 X라 하자.
다음은 X의 확률분포를 표로 나타낸 것이다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$		${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{9}{10}\right)^1\left(\frac{1}{10}\right)^2$			1

❶ 위의 표를 완성해 보자.
❷ 위의 표에서 확률의 합이 1임을 이항정리를 이용하여 설명해 보자.

194. 다음 확률변수 X가 이항분포를 따르는지 확인하고, 이항분포를 따르면 $\mathrm{B}(n,\ p)$의 꼴로 나타내시오.
(1) 재구매율이 60 %인 상품을 100명에게 판매하였을 때, 재구매하는 인원수 X
(2) 흰 공 3개와 검은 공 5개가 들어 있는 주머니에서 임의로 2개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 흰 공의 개수 X
(3) 서로 다른 두 개의 동전을 동시에 던지는 시행을 20회 반복할 때, 두 개의 동전 모두 앞면이 나오는 횟수 X

195. 어느 야구 선수는 타석에 들어설 때마다 안타를 칠 확률이 0.3이라고 한다. 이 선수가 세 번의 타석에 들어설 때, 안타를 치는 횟수를 확률변수 X라 하자. 다음을 구하시오.
(1) X의 확률질량함수 (2) $\mathrm{P}(X=2)$

196. 시청률이 40 %인 어느 드라마가 방영되고 있는 동안 임의로 5가구를 조사할 때, 이 드라마를 시청하는 가구 수를 확률변수 X라 하자. 다음을 구하시오.
(1) X의 확률질량함수 (2) $\mathrm{P}(X=3)$

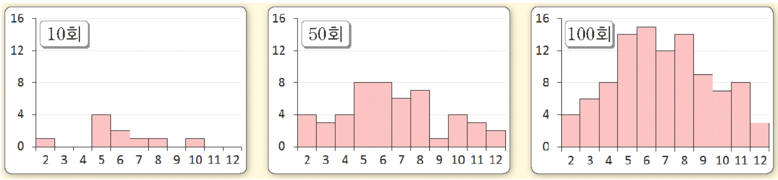
197. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(200,\ \frac{3}{5}\right)$을 따를 때, X의 평균과 표준편차를 구하시오.

198. 어느 제약 회사에서 새로 개발한 치료약은 특정 질병의 환자에게 90%의 완치율을 보인다고 한다. 이 약을 복용한 300명의 환자 중에서 완치되는 환자 수를 확률변수 X라 할 때, X의 평균과 표준편차를 구하시오.

정규분포

생각 열기

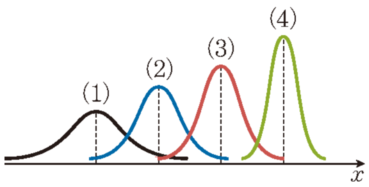
199. 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던지는 시행을 10회, 50회, 100회 하여 나온 눈의 수의 합을 히스토그램으로 나타내었더니 다음과 같았다.



❶ 각 경우의 도수분포다각형을 그려 보자.

❷ 시행 횟수가 많아짐에 따라 도수분포다각형의 모양은 어떻게 변하는지 말해 보자.

200. 오른쪽 그림은 4개의 정규분포곡선이다. 이 곡선 중에서 평균이 가장 큰 것과 표준편차가 가장 큰 것을 각각 말하시오.



201. 확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따를 때, 표준정규분포표를 이용하여 다음 확률을 구하시오.

(1) $\mathrm{P}(Z \le 2)$ (2) $\mathrm{P}(-1 < Z \le 1.5)$

202. 확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따를 때, 표준정규분포표를 이용하여 다음 확률을 구하시오.

(1) $\mathrm{P}(Z \ge 1)$ (2) $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)$

203. 확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따를 때, 표준정규분포표를 이용하여 다음을 만족시키는 상수 a의 값을 구하시오.

(1) $\mathrm{P}(Z \ge a) = 0.0668$ (2) $\mathrm{P}(Z \le a) = 0.9938$

함께하기

204. $Z = \dfrac{X-m}{\sigma}$의 평균과 분산을 다음 단계에 따라 구해 보자.

활동 ❶ $\mathrm{E}(aX+b) = a\mathrm{E}(X)+b$를 이용하여 $\mathrm{E}(Z)$를 구해 보자.

활동 ❷ $\mathrm{V}(aX+b) = a^2\mathrm{V}(X)$를 이용하여 $\mathrm{V}(Z)$를 구해 보자.

205. 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(70,\ 5^2)$을 따를 때, $\mathrm{P}(70 \le X \le 80)$을 구하시오.

206. 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 10^2)$을 따를 때, 다음 확률을 구하시오.

(1) $\mathrm{P}(106 \le X \le 142)$ (2) $\mathrm{P}(X \ge 135)$

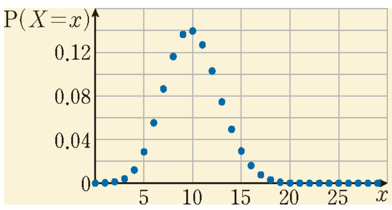
207. 어느 농장에서 생산되는 한라봉 한 개의 무게는 평균이 270 g이고 표준편차가 40 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 농장에서 생산된 한라봉 중에서 임의로 한 개를 택할 때, 이 한라봉의 무게가 250 g 이상 280 g 이하일 확률을 구하시오.

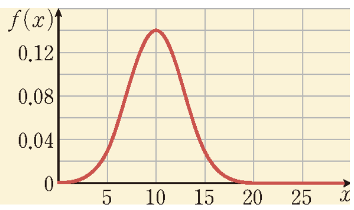
208. 어느 과수원에서 생산된 배 한 개의 당도는 평균이 12 Brix이고 표준편차가 2 Brix인 정규분포를 따른다고 한다. 이 과수원에서 생산된 배 중에서 당도가 13 Brix 이상인 것은 전체의 몇 %인지 구하시오.

209. 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, $\mathrm{P}(|X-m| \le k\sigma)=0.9876$이 성립하도록 상수 k의 값을 정하시오.

생각 열기

210. 다음 그림은 이항분포 $\mathrm{B}\left(50,\ \dfrac{1}{5}\right)$과 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 8)$을 나타낸 그래프이다.





▶ 이항분포 $\mathrm{B}\left(50,\ \dfrac{1}{5}\right)$과 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 8)$의 평균과 표준편차가 각각 같음을 확인하고, 그래프의 모양을 비교해 보자.

211. 어느 고등학교에서 도보로 등교하는 학생의 비율이 40 %라고 한다. 이 학교 학생 150명 중에서 도보로 등교하는 학생이 66명 이상일 확률을 구하시오.

212. 어느 영화의 관람객 90 %가 청소년이라 할 때, 이 영화의 관람객 100명 중에서 청소년이 96명 이상일 확률을 구하시오.

213. 계란은 무게에 따라 다음과 같이 구분한다.

구분	왕란	특란	대란
무게	68 g 이상	60 g 이상 68 g 미만	52 g 이상 60 g 미만

구분	중란	소란
무게	44 g 이상 52 g 미만	44 g 미만

어느 양계장에서 생산되는 계란 한 개의 무게는 평균이 59.6 g이고 표준편차가 10 g인 정규분포를 따른다고 한다.

활동 1 이 양계장에서 생산되는 계란 중에서 임의로 한 개를 택할 때, 이 계란이 왕란일 확률을 구해 보자.
(단, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.84)=0.3$으로 계산한다.)

활동 2 활동 1을 이용하여 이 양계장에서 생산되는 계란 400개 중에서 왕란으로 분류되는 계란 수의 평균과 표준편차를 구해 보자.

활동 3 활동 2를 이용하여 이 양계장에서 생산되는 계란 400개 중에서 왕란이 90개 이상일 확률을 구해 보자.

공학적 도구

확률 구하기

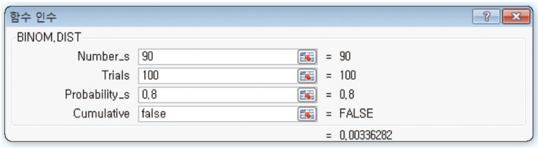
정보 처리

컴퓨터 프로그램인 스프레드시트를 이용하여 이항분포와 정규분포의 확률을 다음과 같이 계산해 보자.

(1) 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(100,\ 0.8)$을 따를 때, $\mathrm{P}(X=90)$을 구해 보자.

❶ 메뉴에서 '수식' – '함수 삽입'을 선택하면 '함수 마법사' 창이 나타난다.
이때 범주 선택에서 '통계', 함수 선택에서 'BINOM.DIST'를 선택하고 확인을 클릭하면 '함수 인수' 창이 나타난다.

❷ 아래 그림과 같은 '함수 인수' 창에서 'Number_s'에 90, 'Trials'에 100, 'Probability_s'에 0.8, 'Cumulative'에 false를 입력한 후, 확인을 클릭하면 0.00336282가 나온다. 따라서 $\mathrm{P}(X=90)=0.00336282$이다.

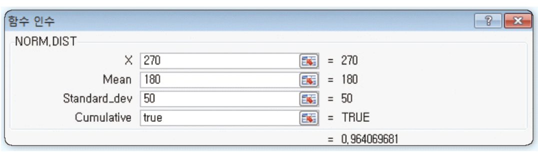


참고 'Cumulative'에 true를 입력하면 $\mathrm{P}(X\le 90)$을 구할 수 있다.

(2) 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(180,\ 50^2)$을 따를 때, $\mathrm{P}(X\le 270)$을 구해 보자.

❶ 메뉴에서 '수식' – '함수 삽입'을 선택하면 '함수 마법사' 창이 나타난다.
이때 범주 선택에서 '통계', 함수 선택에서 'NORM.DIST'를 선택하고 확인을 클릭하면 '함수 인수' 창이 나타난다.

❷ 아래 그림과 같은 '함수 인수' 창에서 'X'에 270, 'Mean'에 180, 'Standard_dev'에 50, 'Cumulative'에 true를 입력한 후, 확인을 클릭하면 0.964069681이 나타난다. 따라서 $\mathrm{P}(X\le 270)=0.964069681$이다.



참고 '수식 입력' 창에 다음과 같이 입력하면 $\mathrm{P}(180\le X\le 230)$을 구할 수 있다.

확인

214. 스프레드시트를 이용하여 다음에 답해 보자.

(1) 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(400,\ 0.5)$를 따를 때, $\mathrm{P}(X\le 210)$을 구해 보자.

(2) 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(70,\ 4^2)$을 따를 때, $\mathrm{P}(74\le X\le 82)$를 구해 보자.

중단원 마무리하기

기본

215. 확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때, 다음에 답하시오.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	a	$\frac{2}{5}$	1

(1) 상수 a의 값　　(2) $P(2 \le X \le 3)$

216. 확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때, X의 평균과 분산 및 표준편차를 구하시오.

X	-1	0	1	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	1

217. 확률변수 X에 대하여 $E(X)=24$, $\sigma(X)=3$일 때, 확률변수 $Y=\frac{2}{3}X-4$의 평균과 분산 및 표준편차를 구하시오.

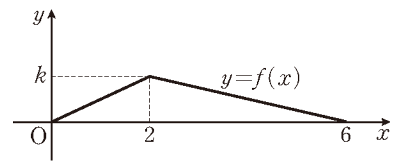
218. 확률변수 X가 이항분포 $B\left(12, \frac{1}{4}\right)$을 따를 때, X의 평균과 분산 및 표준편차를 구하시오.

219. 확률변수 X가 정규분포 $N(50, 5^2)$을 따를 때, $P(X \le 60)$을 구하시오.

표준

220. 이산확률변수 X의 확률질량함수가 $P(X=x)=\frac{x}{10}$ $(x=1, 2, 3, 4)$일 때, X의 분산을 구하시오.

221. 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $P(1 \le X \le 4)$를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.



222. 확률변수 X에 대하여 $E(X)=30$, $V(X)=4$이고, 확률변수 $Y=aX+b$에 대하여 $E(Y)=20$, $V(Y)=1$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 양수이다.)

223. 이항분포 $B(20, p)$를 따르는 확률변수 X에 대하여 X의 평균이 10일 때, X^2의 평균을 구하시오.

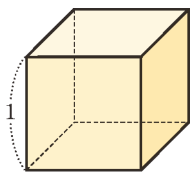
224. 확률변수 X가 정규분포 $N(10, \sigma^2)$을 따르고 $P(7 \le X \le 10)=0.1915$일 때, $P(X \ge 16)$을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

225. 두 확률변수 X와 Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(12,\ 2^2)$, $\mathrm{N}(22,\ 3^2)$을 따르고 $\mathrm{P}(10 \le X \le k) = \mathrm{P}(k \le Y \le 25)$일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

226. 어느 회사에서 생산되는 노트북 컴퓨터 한 대의 무게는 평균이 $940\ \mathrm{g}$이고 표준편차가 $20\ \mathrm{g}$인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산된 노트북 컴퓨터 중에서 임의로 한 대를 택할 때, 이 노트북의 무게가 $1000\ \mathrm{g}$ 이상일 확률을 구하시오.

발 전

227. 한 모서리의 길이가 1인 정육면체에서 세 꼭짓점을 택하여 삼각형을 만들려고 한다. 만들어지는 삼각형의 넓이의 제곱을 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{V}(7X)$를 구하시오.



228. 어느 고등학교 학생 400명의 $1000\ \mathrm{m}$ 달리기 기록은 평균이 230초이고 표준편차가 30초인 정규분포를 따른다고 한다. 기록이 몇 초 이하이면 상위 10위 이내에 드는지 구하시오.

통계적 추정

모집단과 표본

생각 열기

229. 어느 회사에서 10대가 선호하는 운동화 색상을 다음 두 가지 방법 중 하나를 택하여 조사하려고 한다.

[방법 1] 10대인 모든 사람을 대상으로 조사한다.	[방법 2] 10대 중에서 임의로 택한 1000명을 대상으로 조사한다.

▶ 어떤 방법을 택하는 것이 좋을지 생각해 보고, 그 이유를 말해 보자.

230. 다음 조사는 전수조사와 표본조사 중 어느 것이 적합한지 말하시오.

(1) 타이어 수명 조사 (2) 병역 판정 검사
(3) 과일 당도 검사 (4) 우리나라 총인구 조사

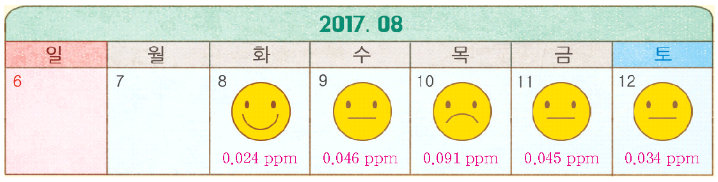
231. 컴퓨터 프로그램을 이용하여 우리 반에서 5명의 학생을 임의추출하는 방법을 말하시오.

232. 1부터 5까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 5개의 공이 들어 있는 주머니에서 2개의 공을 다음과 같이 임의추출할 때, 그 경우의 수를 구하시오.

(1) 한 개씩 복원추출 (2) 한 개씩 비복원추출
(3) 동시에 2개를 추출

생각 열기

233. 대기 중 오존(O_3) 농도가 높을 때는 오존의 살균력이 건강에 해를 끼칠 수 있어 외출을 삼가는 것이 좋다고 한다. 다음은 어느 지역의 8월 8일부터 8월 12일까지의 오후 2시에 측정한 오존 농도를 나타낸 것이다.



❶ 5일 동안 오존 농도의 평균을 구해 보자.
❷ 2일을 임의추출하여 평균을 구하고 ❶의 결과와 비교해 보자.
❸ ❷에서 구한 평균을 다른 사람이 구한 평균과 비교해 보자.

234. 어느 아파트에서 가구당 하루에 배출하는 음식물 쓰레기양은 평균이 860 g이고 표준편차가 60 g이라고 한다. 이 아파트에서 36가구를 임의추출할 때, 가구당 하루에 배출하는 음식물 쓰레기양의 표본평균의 평균과 표준편차를 구하시오.

235. 어느 고등학교 학생들이 등교할 때 걸리는 시간은 평균이 20분이고 표준편차가 5분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 학교 학생 중에서 36명을 임의추출할 때, 등교할 때 걸리는 시간의 평균이 18분 이상일 확률을 구하시오.

236. 어느 비행기 탑승객의 짐의 무게는 평균이 18 kg이고 표준편차가 4 kg인 정규분포를 따른다고 한다. 이 비행기 탑승객 중에서 16명을 임의추출할 때, 짐의 평균 무게가 17 kg 이상 20 kg 이하일 확률을 구하시오.

모평균의 추정

생각 열기

237. 어느 제과점에서 만든 과자 10개를 임의추출하여 1개당 당류 함유량을 조사하였더니 과자 1개당 당류 함유량의 표본평균이 10 g이고 표본표준편차가 0.3 g이었다고 한다.
❶ 과자 1개당 당류 함유량의 모평균을 추측해 보자.
❷ ❶에서 추측한 값이 모평균과 같다고 할 수 있는지 말해 보자.

238. 어느 고등학교 남학생들의 하루 운동 시간은 모평균이 m분이고 모표준편차가 10분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 학교 남학생 중에서 25명을 임의추출하여 하루 운동 시간을 조사하였더니, 평균이 42분이었다. 이 학교 남학생들의 하루 운동 시간의 모평균 m을 신뢰도 95 %로 추정하시오.

239. 어느 회사에서 생산되는 두루마리 휴지의 길이는 모평균이 m m이고 모표준편차가 0.2 m인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산된 두루마리 휴지 중에서 36개를 임의추출하여 그 길이를 측정하였더니, 평균이 100.7 m이었다. 이 회사에서 생산된 두루마리 휴지의 길이의 모평균 m을 신뢰도 99 %로 추정하시오.

240. 어느 회사에서 생산되는 휴대 전화의 배터리 사용 시간은 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산된 휴대 전화 64대를 임의추출하여 배터리 사용 시간을 조사하였더니 평균이 8시간이고 표준편차가 1시간이었다. 이 휴대 전화의 배터리 사용 시간의 모평균 m을 신뢰도 95 %로 추정하시오.

241. 어느 자동차 회사에서 생산되는 자동차의 연료 1 L당 주행거리인 연비는 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산된 자동차 100대를 임의추출하여 연비를 조사하였더니 평균이 15.6 km이고 표준편차가 4.5 km이었다. 이 자동차의 연비의 모평균 m을 신뢰도 99 %로 추정하시오.

[생각 넓히기]

242. 모표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 어느 모집단에서 표본을 임의추출하여 모평균 m을 추정하였더니, 모평균 m의 신뢰도 α %의 신뢰구간이 $a \le m \le b$이었다.
이때 다음 명제의 참, 거짓을 판별하시오.

(가) 표본의 크기가 일정할 때, 신뢰도를 높게 하면 $b-a$의 값은 커진다.
(나) 신뢰도가 일정할 때, 표본의 크기를 크게 하면 $b-a$의 값은 작아진다.
(다) 신뢰도가 일정할 때, 표본의 크기를 2배로 늘리면 $b-a$의 값은 $\frac{1}{2}$배가 된다.

탐구 & 융합

생활 속의 통계적 추정

창의 · 융합 | 태도 및 실천

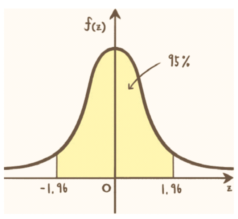
다음은 생활 속에서 자료를 수집하고 정리하여 통계적 추정을 통해 결과를 분석하는 과정이다.

1. 조사 내용과 대상 선정
(1) 조사 내용 선정
우리 학교 학생들의 스마트폰 사용 실태를 알아보기 위하여, 전체 학생들의
– 한 달 동안의 스마트폰 데이터 사용량 조사
– 하루 동안의 스마트폰 사용 시간 조사
(2) 조사 대상 선정
우리 학교의 전체 학생 중에서 임의추출한 30명의 학생을 대상으로 조사한다.

2. 설문 조사지 작성 및 조사 실시

3. 자료 분석
조사 대상 학생들의 설문 조사지를 분석하여 다음의 표본평균과 표본표준편차를 구한다.
– 한 달 동안의 스마트폰 데이터 사용량
– 하루 동안의 스마트폰 사용 시간

4. 통계적 추정을 이용한 모평균의 추정
조사 대상 학생들에 대한 자료 분석을 이용하여 다음의 모평균을 신뢰도 95 %의 신뢰 구간으로 추정한다.
– 우리 학교 전체 학생들의 한 달 동안의 스마트폰 데이터 사용량
– 우리 학교 전체 학생들의 하루 동안의 스마트폰 사용 시간



탐구

243. 위와 같이 생활 속에서 표본평균을 이용하여 모평균을 추정할 수 있는 예를 찾아 설문 조사를 실시하고, ‘생활 속의 통계적 추정’이란 주제로 발표해 보자.

중단원 마무리하기

기본

244. 다음 조사는 전수조사와 표본조사 중 어느 것이 적합한지 말하시오.
(1) 형광등 수명 조사
(2) 어느 고등학교 학생들의 『확률과 통계』 시험의 평균 점수

245. 모평균이 56이고 모분산이 9인 모집단에서 임의추출한 크기가 36인 표본의 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 분산 및 표준편차를 구하시오.

246. 정규분포 $\mathrm{N}(12,\ 5^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 25인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$가 10 이상 14 이하일 확률을 구하시오.

247. 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 4^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 64인 표본을 임의추출하였더니 표본평균이 15이었다. 모평균 m을 신뢰도 95%로 추정하시오.

표준

248. 표준편차가 4인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균의 표준편차가 0.1 이하가 되도록 하는 n의 최솟값을 구하시오.

249. 1부터 5까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 5장의 카드 중에서 3장의 카드를 임의추출할 때, 꺼낸 카드에 적힌 숫자의 평균을 $\overline{X}$라 하자. 이때 $\mathrm{V}(2\overline{X})$를 구하시오.

250. 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 5^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균과 모평균의 차가 0.2 이하일 확률이 0.9544이다. 이때 n의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

251. 어느 공장에서 생산되는 음료수 캔 한 개의 용량은 평균이 500 mL이고 표준편차가 2 mL인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산된 음료수 캔 중에서 n개를 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$가 499 mL 이상 501 mL 이하일 확률이 0.9974이다. 이때 n의 값을 구하시오.

252. 어느 농장에서 키우는 돼지의 무게는 표준편차가 5 kg인 정규분포를 따른다고 한다. 이 농장에서 돼지 100마리를 임의추출하여 무게를 조사하였더니 평균이 150 kg이었다. 이 농장에서 키우는 돼지의 무게의 모평균 m을 신뢰도 95 %로 추정하시오.

253. 모평균 m의 신뢰구간이 $\alpha \le m \le \beta$일 때, $\beta-\alpha$를 신뢰구간의 길이라고 한다. 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간의 길이가 $\frac{1}{2}\sigma$ 이하일 때, n의 최솟값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

발 전

254. 4, 5, 6, 7의 숫자가 각각 하나씩 적힌 공이 각각 80개, 60개, 40개, 20개가 들어 있는 주머니에서 100개의 공을 임의추출할 때, 공에 적힌 숫자의 평균을 $\overline{X}$라 하자. 이때 $\mathrm{P}(\overline{X} \ge k)=0.0228$을 만족시키는 상수 k의 값을 구하시오.

255. 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 4^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 m^2인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. 이때 $\mathrm{P}(m-1 \le \overline{X} \le m+1)=0.9544$를 만족시키는 m의 값을 구하시오. (단, m은 자연수이다.)

256. 어느 초콜릿 공장에서 만드는 초콜릿 한 개의 무게는 평균이 30 g이고 표준편차가 4 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 초콜릿 공장에서는 초콜릿을 4개씩 한 상자에 담아서 판매하는데, 4개의 초콜릿을 담은 상자의 무게가 109.76 g 이하이면 불량품인 상자로 판정된다고 한다. 이 초콜릿 공장에서 출하한 초콜릿 상자 400개 중에서 불량품인 상자가 28개 이하일 확률을 구하시오. (단, 상자의 무게는 무시하고, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.28)=0.40$, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)=0.48$로 계산한다.)

대단원 평가하기

257. 흰 공 4개와 검은 공 6개가 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 검은 공의 개수를 확률변수 X라 하자. 이때 $\mathrm{P}(X \le 2)$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

258. 각 면에 1, 1, 2, 2, 2, 3의 숫자가 각각 하나씩 적힌 정육면체 모양의 주사위가 있다. 이 주사위를 던져서 나온 눈의 수를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{E}(X)$의 값은?

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{3}$
④ $\frac{11}{6}$ ⑤ 2

259. 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(X)=4$, $\mathrm{E}(X^2)=25$일 때, $\sigma(X)$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

260. 확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때, $\mathrm{E}(aX+b)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	a	b

① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

261. 각 면에 1, 2, 3, 4의 숫자가 각각 하나씩 적힌 정사면체가 있다. 이 정사면체를 던져서 바닥에 놓인 면에 적힌 숫자를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{V}(2X+1)$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

262. 어느 농구 선수가 자유투를 성공할 확률은 0.9라고 한다. 이 선수가 100번의 자유투를 던질 때, 성공한 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)+\sigma(X)$의 값은?

① 90 ② 93 ③ 96
④ 99 ⑤ 102

263. 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르는 확률변수 X에 대하여 X의 평균이 5이고 분산이 4일 때, $\frac{n}{p}$의 값을 구하시오.

264. 두 확률변수 X와 Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 3^2)$과 $\mathrm{N}(m,\ 3^2)$을 따른다. 이때 각각의 확률밀도함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다고 한다.

> (가) $\mathrm{P}(X \le 10) \le \mathrm{P}(Y \ge 25)$
> (나) $f(15) = g(25)$

$\mathrm{P}(Y \le 36)$의 값을 구하시오.

265. 어느 고등학교 학생들의 봉사 시간은 평균이 48시간이고 표준편차가 10시간인 정규분포를 따른다고 한다. 이 고등학교 학생 중에서 임의로 1명을 택할 때, 이 학생의 봉사 시간이 58시간 이상일 확률을 구하시오.

266. 어느 공장에서 생산되는 이온 음료 한 병의 용량은 평균이 250 mL이고 표준편차가 0.5 mL인 정규분포를 따른다고 한다.
이온 음료 한 병의 용량이 248.5 mL 이상 251.5 mL 이하일 때 합격품으로 처리한다. 이 공장에서 생산된 이온 음료 10000병 중에서 합격품의 개수의 기댓값을 구하시오.

267. 어느 자격증 시험에서 70점 이상을 받으면 합격이라고 한다. 10000명이 응시한 이 자격증 시험 점수가 평균이 55점이고 표준편차가 σ점인 정규분포를 따를 때, 합격자 수가 668명이었다. σ의 값을 구하시오.

268. 어느 공장에서 생산되는 A 타이어의 수명은 평균이 40000 km이고 표준편차가 2000 km인 정규분포를 따르고, B 타이어의 수명은 평균이 45000 km이고 표준편차가 4000 km인 정규분포를 따른다고 한다.
이 공장에서 생산된 A 타이어와 B 타이어 중에서 임의로 제품을 각각 1개씩 택할 때, 택한 A 타이어의 수명이 43000 km 이상일 확률과 B 타이어의 수명이 a km이하일 확률이 같다. 상수 a의 값은?

① 39000 ② 41000 ③ 43000
④ 45000 ⑤ 47000

269. 어느 지역의 청소년 음악 콩쿠르 지원자 1000명의 평가 점수가 평균이 63점이고 표준편차가 20점인 정규분포를 따른다고 한다. 이 콩쿠르의 예선을 통과한 인원이 242명이라 할 때, 예선을 통과할 수 있는 최저 점수를 구하시오.

270. 어느 고속 도로의 하이 패스를 이용하는 차량의 80 %가 승용차라고 한다. 이 고속 도로의 하이 패스를 이용한 차량 400대 중에서 승용차가 336대 이상일 확률을 구하시오.

271. 어느 세차장에서 자동차 한 대를 세차하는 데 걸리는 시간은 평균이 8분이고 표준편차가 2분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 세차장에서 세차를 한 자동자 중에서 16대를 임의추출할 때, 이 16대의 총 세차 시간의 합이 2시간 이하일 확률을 구하시오..

272. 어느 공장에서 생산되는 A 제품의 무게는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$을 따르고, B 제품의 무게는 정규분포 $\mathrm{N}(3m,\ 4^2)$을 따른다고 한다. 이 공장에서 생산된 A 제품과 B 제품 중에서 임의로 4개씩 택할 때, 택한 A 제품 4개의 평균 무게가 k 이상일 확률과 B제품 4개의 평균 무게가 k 이하일 확률이 같다. $\dfrac{m}{k}$의 값은?

① $\dfrac{1}{5}$ ② $\dfrac{2}{5}$ ③ $\dfrac{3}{5}$

④ $\dfrac{4}{5}$ ⑤ 1

273. 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 그 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $a \le m \le b$라 할 때 $b-a=11.76$이다. $\mathrm{P}(\overline{X} \ge m+5.88)$의 값을 구하시오.

274. 어느 고등학교 학생들의 일 년 독서량은 표준편차가 5권인 정규분포를 따른다고 한다. 이 고등학교 학생 중에서 n명을 임의추출하여 일 년 독서량을 조사하였더니 평균이 10권이었다.
이 고등학교 학생들의 일 년 독서량의 평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간이 $8.71 \le m \le 11.29$일 때, n의 값을 구하시오.

275. 1부터 12까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 12개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내는 시행을 반복한다. 꺼낸 공에 적힌 수를 모두 더하여 그 합이 4의 배수가 되면 이 시행을 멈추기로 할 때, 시행을 멈출 때까지 꺼낸 공의 개수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{P}(X \ge 3)$의 값을 구하시오. (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

276. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(10,\ p)$를 따르고,

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{4}{5}\mathrm{P}(X=4)$$

일 때, $\mathrm{E}(6X)$의 값을 구하시오. (단, $p \ne 0$)

277. 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(7,\ 3^2)$을 따를 때, 확률 $\mathrm{P}(2a-5 \le X \le 4a+1)$이 최대가 되도록 하는 상수 a의 값을 구하시오.

278. 어느 지역의 버스 정류장 사이의 거리는 표준편차가 80 m인 정규분포를 따른다. 모평균을 신뢰도 95 %로 추정할 때, 모평균과 표본평균의 차가 39.2 m 이하가 되기 위한 표본의 크기의 최솟값을 구하시오.

빠른정답

1) 같다.

2) (1) 24 (2) 12

3) (1) 120 (2) 24

4) 45360

5) 1000

6) 243

7) 192

8) 144

9) 6

10) (1) 60 (2) 4

11) 15

12) (1) 126 (2) 60

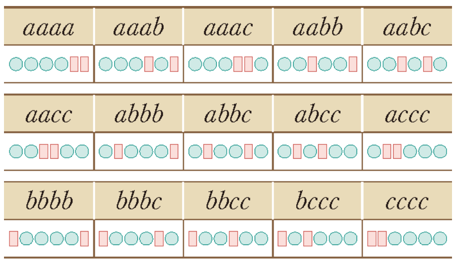
13) ❶ 252 ❷ 343

14) ❶

	A	B	O
A	AA	AB	AO
B	AB	BB	BO
O	AO	BO	OO

❷ AA, AB, AO, BB, BO, OO

15) ❶



❷ $\dfrac{(\boxed{4}+2)!}{\boxed{4}!\times 2!}=\dfrac{\boxed{6}!}{\boxed{4}!\times 2!}=\boxed{15}$

16) (1) 56 (2) 120

17) 21

18) 15

19) (1) 20 (2) 24

20) (1) 28 (2) 10

21) (1) 45 (2) 21

22) ❶ 66 ❷ 66 ❸ 같다.

23) (1) 4가지 (2) 12가지

24) 5040

25) 125

26) 60

27) (1) 16 (2) 6

28) 6

29) 840

30) (1) 120 (2) 48

31) 81

32) 50

33) 120

34) (1) 2 (2) 4

35) 21

36) 250번째 수

37) (1) 243 (2) 80

38) 75

39) 풀이 참고

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$이고

${}_3C_0={}_3C_3=1$, ${}_3C_1={}_3C_2=3$이므로 a^3, a^2b, ab^2, b^3의 계수와 ${}_3C_0$, ${}_3C_1$, ${}_3C_2$, ${}_3C_3$은 각각 서로 같다.

40) (1) 15 (2) 6

41) $x^4-8x^3+24x^2-32x+16$

42) (1) $x^4+8x^3y+24x^2y^2+32xy^3+16y^4$

43) 40

44) (1) -18 (2) -540

45) 풀이 참조

이항정리를 이용하여 $(1+x)^n$을 전개하면

$$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$$

$x=1$을 이 식에 대입하면

$$2^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n$$

46) 풀이 참조

(1) 이항정리를 이용하여 $(1+x)^n$을 전개하면

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$

$x=-1$을 이 식에 대입하면

$0={}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots+(-1)^n\times{}_nC_n$

(2) ${}_{2n}C_0+{}_{2n}C_1+{}_{2n}C_2+\cdots+{}_{2n}C_{2n-1}+{}_{2n}C_{2n}=2^{2n}$ …… ①

${}_{2n}C_0-{}_{2n}C_1+{}_{2n}C_2-\cdots-{}_{2n}C_{2n-1}+{}_{2n}C_{2n}=0$ …… ②

①+②를 하면

$$2({}_{2n}C_0+{}_{2n}C_2+{}_{2n}C_4+\cdots+{}_{2n}C_{2n})=2^{2n}$$

$${}_{2n}C_0+{}_{2n}C_2+{}_{2n}C_4+\cdots+{}_{2n}C_{2n}=2^{2n-1}$$

①−②를 하면

$$2({}_{2n}C_1+{}_{2n}C_3+{}_{2n}C_5+\cdots+{}_{2n}C_{2n-1})=2^{2n}$$

$${}_{2n}C_1+{}_{2n}C_3+{}_{2n}C_5+\cdots+{}_{2n}C_{2n-1}=2^{2n-1}$$

따라서

$$\begin{aligned}&{}_{2n}C_0+{}_{2n}C_2+{}_{2n}C_4+\cdots+{}_{2n}C_{2n}\\&={}_{2n}C_1+{}_{2n}C_3+{}_{2n}C_5+\cdots+{}_{2n}C_{2n-1}\\&=2^{2n-1}\end{aligned}$$

47) $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

48) 35

49) 풀이 참조

❶ n개의 원소 중에서 k개의 원소를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_nC_k$이다.

❷ 원소의 개수가 n인 집합 A에 대하여

원소의 개수가 0인 경우의 수는

$_{n}C_{0}$

원소의 개수가 1인 경우의 수는

$_{n}C_{1}$

원소의 개수가 2인 경우의 수는

$_{n}C_{2}$

⋮

원소의 개수가 n인 경우의 수는

$_{n}C_{n}$

따라서 집합 A의 부분집합의 개수는

$_{n}C_{0}+{}_{n}C_{1}+{}_{n}C_{2}+\cdots+{}_{n}C_{n}=2^{n}$

❸ $B\subset C\subset A$를 만족시키는 집합 C의 개수는 $(n-r)$개의 원소를 갖는 집합의 부분집합의 개수와 같으므로

$_{n-r}C_{0}+{}_{n-r}C_{1}+\cdots+{}_{n-r}C_{n-r}=2^{n-r}$

50) 210
51) 21
52) (1) $8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$
53) 10
54) 5
55) 10
56) 64
57) 63
58) 21
59) 10
60) 24
61) 240
62) 144
63) ③
64) ①
65) ⑤
66) ⑤
67) 216
68) ③
69) ②
70) 36
71) 2520
72) 78
73) 36
74) 30
75) 84
76) 20
77) 126
78) ④
79) 2
80) ④
81) 720
82) 361
83) 13
84) ❶ 김밥, 라면, 국수, 수제비, 냉면, 떡국, 순대
❷ 수제비, 순대
85) (1) $S=\{HH, HT, TH, TT\}$
(2) $A=\{HT, TH\}$
86) (1) $\{HH, HT, TH\}$
(2) $\varnothing$
(3) $\{TT\}$
(4) 사건 A와 사건 C, 사건 B와 사건 C
87) $\frac{1}{12}$
88) $\frac{3}{5}$
89) (1) $\frac{5}{14}$ (2) $\frac{15}{28}$
90) 0.26
91) 1, 1, 1, 0
92) (1) 1 (2) 0
93) ❶ 음료 교환권을 받을 확률 : 1
보조 배터리를 받을 확률 : $\frac{1}{10}$
❷ 예시 마라톤 대회에 참가한 학생이 경품으로 카메라를 받는 사건
94) 풀이 참조
(1) 예시

n	50	100	150	200	250	300
r_n	27	53	79	105	130	154
$\frac{r_n}{n}$	$\frac{27}{50}$	$\frac{53}{100}$	$\frac{79}{150}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{13}{25}$	$\frac{77}{150}$

(2) (1)의 표에서 동전을 던진 횟수 n이 50, 100, 150, ⋯, 300으로 커짐에 따라 $\frac{r_n}{n}$은 각각

0.54, 0.53, 0.526⋯, 0.525, 0.52, 0.513⋯

임을 알 수 있다.

따라서 n이 커짐에 따라 $\frac{r_n}{n}$이 동전 한 개를 던질 때 앞면이 나올 수학적 확률인 $\frac{1}{2}$에 가까워진다.

95) ❶ 360 ❷ $\frac{9}{10}$
96) (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{7}{10}$
97) $\frac{5}{6}$
98) (1) $\frac{5}{11}$ (2) $\frac{9}{44}$

99) 배반, A, 1, A, A

100) $\frac{5}{6}$

101) $\frac{29}{33}$

102) $\frac{29}{38}$

103) $\frac{2}{3}$

104) ❶ $\frac{{}_{30}\mathrm{P}_5}{{}_{30}\Pi_5}=\frac{2639}{3750}$ ❷ $1-\frac{2639}{3750}=\frac{1111}{3750}$

105) (1) $S=\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ \cdots,\ (6,\ 4),\ (6,\ 5),$

106) $\frac{4}{5}$

107) (1) $\frac{5}{8}$ (2) 1

108) (1) $\frac{5}{6}$ (2) $\frac{2}{3}$

109) $\frac{1}{3}$

110) $\frac{1}{126}$

111) $\frac{3}{4}$

112) $\frac{7}{45}$

113) $\frac{17}{20}$

114) $\frac{8}{15}$

115) $\frac{3}{5}$

116) 4

117) $\frac{12}{25}$

118) $\frac{5}{18}$

119) ❶ $\frac{11}{27}$ ❷ $\frac{1}{3}$

120) $\frac{2}{5}$

121) $\frac{1}{2}$

122) $\frac{8}{21}$

123) $\frac{1}{8}$

124) $\frac{8}{33}$

125) (1) 0.016 (2) 0.25

126) $\frac{9}{13}$

127) 희정

128) (1) 풀이 참조 (2) 0.0045

(1) 검사를 받은 사람 20000명 중 감염자는 10명, 비감염자는 19990명이다. 감염자 중에서 양성 반응을 보인 사람은

$10\times\frac{90}{100}=9$ (명)

비감염자 중에서 음성 반응을 보인 사람은

$19990\times\frac{90}{100}=17991$ (명)

따라서 감염자 중에서 음성 반응을 보인 사람은

$10-9=1$ (명)

비감염자 중에서 양성 반응을 보인 사람은

$19990-17991=1999$ (명)

이 상황을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	양성 반응	음성 반응	합계
감염자	9	1	10
비감염자	1999	17991	19990
합계	2008	17992	20000

129) ❶ $\mathrm{P}(B|A)=\frac{5}{9}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{5}{9}$

❷ $\mathrm{P}(B|A)=\frac{5}{8}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{5}{9}$

130) (1) 종속 (2) 독립

131) (1) 종속 (2) 독립

132) ❶

1회	2회	3회	4회	확률
○	○	×	×	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}$
○	×	○	×	$\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}$
○	×	×	○	$\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}$
×	○	○	×	$\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}$
×	○	×	○	$\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}$
×	×	○	○	$\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$

❷ $\frac{25}{216}$

133) (1) $\frac{48}{125}$ (2) $\frac{1}{125}$

134) $\frac{1053}{3125}$

135) $\frac{63}{64}$

136) $\frac{5}{16}$

137) $\frac{2}{3}$

138) $\frac{1}{2}$

139) 종속

140) $\frac{1}{4}$

141) $\frac{1}{4}$

142) 3

143) $\frac{2}{5}$

144) $\frac{5}{21}$

145) 사건 A와 사건 C

146) $\frac{65}{81}$

147) $\frac{3}{16}$

148) $\frac{1}{2}$

149) $\frac{41}{81}$

150) ③

151) 16개

152) ②

153) $\frac{1}{10}$

154) $\frac{4}{7}$

155) ④

156) ②

157) ⑤

158) ④

159) $\frac{1}{3}$

160) $\frac{1}{3}$

161) $\frac{1}{4}$

162) 0.48

163) $\frac{10}{17}$

164) $\frac{19}{36}$

165) ③

166) ②

167) $\frac{11}{20}$

168) $\frac{3}{16}$

169) $\frac{8}{9}$

170) $\frac{8}{9}$

171) 7

172) ❶ $S=\{\mathrm{HH}, \mathrm{HT}, \mathrm{TH}, \mathrm{TT}\}$
❷ 0, 1, 2

173) 0, 1, 2, 3, 4

174) (1) 이산확률변수 (2) 연속확률변수

175) (1) 연속확률변수 (2) 이산확률변수

176) (1) 풀이 참조 (2) $\frac{13}{35}$

(1) 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다.
7명의 학생 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_7\mathrm{C}_3$이고, 뽑힌 학생 중에서 여학생의 수가 x명인 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_x \times {}_4\mathrm{C}_{3-x}$이므로 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_3\mathrm{C}_x \times {}_4\mathrm{C}_{3-x}}{{}_7\mathrm{C}_3} \quad (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$	1

177) (1)

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	1

(2) $\frac{11}{12}$

178) (1) $\frac{2}{9}$ (2) $\frac{5}{9}$

179) (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{5}{8}$

180) (1) $\frac{5}{4}$ (2) $\frac{1}{2}$

181) $\frac{13}{24}$

182) (1) $\frac{1}{9}$ (2) $\frac{7}{27}$

183) ❶ $\frac{5000\times70+10000\times20+20000\times10}{100}$

❷

X	5000	10000	20000	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

184) $\frac{7}{2}$

185) $\frac{6}{5}$

186) $\mathrm{V}(X)=5$, $\sigma(X)=\sqrt{5}$

187) $\mathrm{V}(X)=1$, $\sigma(X)=1$

188) (1) 37 (2) 2

189) 풀이 참조

확률변수 X의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$를 m이라 하면

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}((X-m)^2)\\&=\mathrm{E}(X^2-2mX+m^2)\\&=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(2mX)+\mathrm{E}(m^2)\\&=\mathrm{E}(X^2)-2m\times m+m^2\\&=\mathrm{E}(X^2)-m^2\\&=\mathrm{E}(x^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\end{aligned}$$

따라서 다음이 성립한다.

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(x^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$

190) (1) $\mathrm{V}(3X)=81$, $\sigma(3X)=9$

191) $\mathrm{E}(Y)=14$, $\mathrm{V}(Y)=36$, $\sigma(Y)=6$

192) $\sqrt{10}$

193) 풀이 참조

❶ ${}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{10}\right)^3$, ${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{9}{10}\right)^2\left(\frac{1}{10}\right)^1$, ${}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{9}{10}\right)^3$

❷ 확률의 합이 이항정리를 이용하여

$\left(\frac{1}{10}+\frac{9}{10}\right)^3$을 전개한 식과 같으므로

$${}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{10}\right)^3+{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{9}{10}\right)^1\left(\frac{1}{10}\right)^2+{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{9}{10}\right)^2\left(\frac{1}{10}\right)^1+{}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{9}{10}\right)^3$$

$$=\left(\frac{1}{10}+\frac{9}{10}\right)^3$$

$$=1$$

194) (1) $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{3}{5}\right)$

195) (1) 풀이 참조 (2) $\frac{189}{1000}$

(1) 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(3,\ \frac{3}{10}\right)$을 따르므로 X의 확률질량함수는

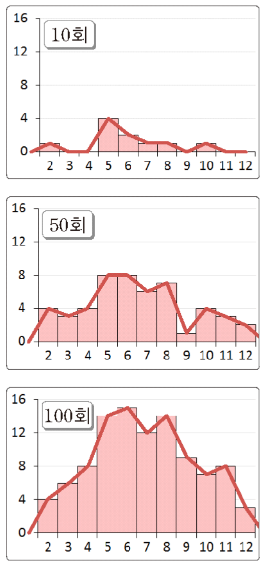
$$\mathrm{P}(X=x)={}_3\mathrm{C}_x\left(\frac{3}{10}\right)^x\left(\frac{7}{10}\right)^{3-x}\quad(x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

196) (1) $\mathrm{P}(X=x)={}_5\mathrm{C}_x\left(\frac{2}{5}\right)^x\left(\frac{3}{5}\right)^{5-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$

197) $\mathrm{E}(X)=120$, $\sigma(X)=4\sqrt{3}$

198) $\mathrm{E}(X)=270$, $\sigma(X)=3\sqrt{3}$

199) 풀이 참조

❶ 

❷ 예시 종 모양에 가까워진다.

200) 평균이 가장 큰 것 : (4)

201) (1) 0.9772 (2) 0.7745

202) (1) 0.1587 (2) 0.95

203) (1) 1.5 (2) 2.5

204) 풀이 참조

❶ $\mathrm{E}(Z)=\mathrm{E}\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)$

$$=\frac{1}{\sigma}\{\mathrm{E}(X)-m\}$$

$$=0$$

❷ $\mathrm{V}(Z)=\mathrm{V}\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)$

$$=\left(\frac{1}{\sigma}\right)^2\mathrm{V}(X)$$

$$=1$$

205) 0.4772

206) (1) 0.9053 (2) 0.0668

207) 0.2902

208) 30.85%

209) 2.5

210) 풀이 참조

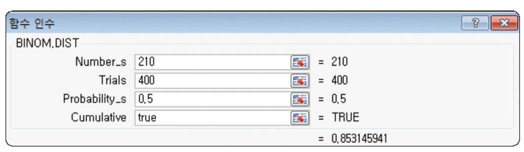
이항분포 $\mathrm{B}\left(50,\ \frac{1}{5}\right)$과 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 8)$의 평균은 10, 표준편차는 $\sqrt{8}$로 평균과 표준편차는 각각 같고 그래프의 모양도 서로 비슷하다.

211) 0.1587

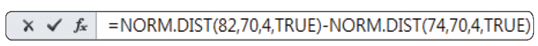
212) 0.0228

213) ❶ 0.2

214) 풀이 참조

(1) 

$\mathrm{P}(X\leq 210)=0.853145941$

(2) 

$\mathrm{P}(74 \le X \le 82) = 0.157305356$

215) (1) $\frac{3}{10}$　　(2) $\frac{2}{5}$

216) $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{8}$, $\mathrm{V}(X) = \frac{23}{64}$, $\sigma(X) = \frac{\sqrt{23}}{8}$

217) $\mathrm{E}(Y) = 12$, $\mathrm{V}(Y) = 4$, $\sigma(Y) = 2$

218) $\mathrm{E}(X) = 3$, $\mathrm{V}(X) = \frac{9}{4}$, $\sigma(X) = \frac{3}{2}$

219) 0.9772

220) 1

221) $\frac{3}{4}$

222) $\frac{11}{2}$

223) 105

224) 0.1587

225) 16

226) 0.0013

227) $\frac{3}{2}$

228) 171.2초 이하

229) 풀이 참조

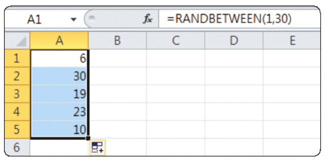
예시1 [방법 1]을 택하는 것이 정확한 결과를 얻을 수 있다.

예시2 [방법 2]를 택하는 것이 시간과 비용을 줄일 수 있다.

230) (1) 표본조사　　(2) 전수조사

231) 풀이 참조

예시 우리 반 학생 30명 중에서 5명을 컴퓨터 프로그램을 이용하여 다음과 같이 임의추출한다.
셀 A1에 ‘=RANDBETWEEN(1, 30)’을 입력한 후, ‘채우기 핸들’을 이용하여 셀 A5까지 드래그 한다.



232) (1) 25　　(2) 20

233) 풀이 참조

❶ 0.048 ppm

❷ 예시 9일과 11일의 오존 농도의 평균은

$$\frac{0.046+0.045}{2} = 0.0455(\mathrm{ppm})$$

따라서 ❶의 결과와 다르다.

❸ 예시 8일과 12일을 임의추출한 경우의 평균은

$$\frac{0.024+0.034}{2} = 0.029(\mathrm{ppm})$$

따라서 ❷에서 구한 평균과 다르다.

234) 평균 : 860 g, 표준편차 : 10 g

235) 0.9918

236) 0.8185

237) 풀이 참조

❶ 과자 10개의 과자 1개당 당류 함유량의 표본평균이 10 g이므로 모평균은 10 g일 것으로 추측할 수 있다.

❷ 표본이 다르면 그에 따라 과자 10개의 과자 1개당 당류 함유량의 표본평균도 달라질 것이다. 따라서 추측한 값이 모평균과 같다고 확신할 수는 없지만 모평균은 추측한 값에 가까울 것이라고 기대할 수 있다.

238) $38.08 \le m \le 45.92$(단위 : 분)

239) $100.614 \le m \le 100.786$(단위 : m)

240) $7.755 \le m \le 8.245$ (단위 : 시간)

241) $14.439 \le m \le 16.761$(단위 : km)

242) (가) 참　　(나) 참

243) 생략

244) (1) 표본조사　　(2) 전수조사

245) $\mathrm{E}(\overline{X}) = 56$, $\mathrm{V}(\overline{X}) = \frac{1}{4}$, $\sigma(\overline{X}) = \frac{1}{2}$

246) 0.9544

247) $14.02 \le m \le 15.98$

248) 1600

249) $\frac{8}{3}$

250) 2500

251) 36

252) $149.02 \le m \le 150.98$(단위 : kg)

253) 62

254) $\frac{26}{5}$

255) 8

256) 0.02

257) ⑤

258) ④

259) ①

260) ③

261) ③

262) ②

263) 125

264) 0.9772

265) 0.1587

266) 9974

267) 10

268) 39000

269) 77점

270) 0.0228

271) 0.1587

272) $\frac{3}{5}$

273) 0.025

274) 100

275) $\frac{25}{44}$

276) 25

277) 3

278) 16

[정답 및 해설]

1) 같다.

2) (1) 24 (2) 12

(1) 5명이 앉는 경우의 수는 원순열의 수이므로

$(5-1)!=4!=24$

(2) 회장과 부회장을 한 사람으로 생각하면 모두 4명이고, 이들이 앉는 원순열의 수는

$(4-1)!=3!=6$

이때 각 경우에 대하여 회장과 부회장이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times 2=12$

3) (1) 120 (2) 24

4) 45360

5) 1000

6) 243

7) 192

천의 자리에는 0을 제외한 1, 2, 3이 올 수 있으므로 그 경우의 수는 3이다.

또, 각 경우에 대하여 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에는 0, 1, 2, 3이 모두 올 수 있으므로 그 경우의 수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$

따라서 구하는 네 자리 자연수의 개수는 $3\times 64=192$

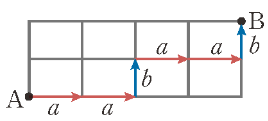
8) 144

9) 6

10) (1) 60 (2) 4

11) 15

오른쪽으로 한 칸 가는 것을 a, 위쪽으로 한 칸 가는 것을 b로 나타내면 A



지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 4개의 a와 2개의 b를 일렬로 나열하는 순열의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{4!\times 2!}=15$$

12) (1) 126 (2) 60

13) ❶ 252 ❷ 343 ❸ 61236

❶ 10개의 빵 중에서 5개를 택하는 경우의 수는

$${}_{10}C_5=\frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6}{5\times 4\times 3\times 2\times 1}=252$$

❷ ❶에서 택한 5개의 빵을 바구니에 나누어 담는 경우의 수는

${}_3\Pi_5=3^5=243$

❸ ❶, ❷에서 구하는 경우의 수는

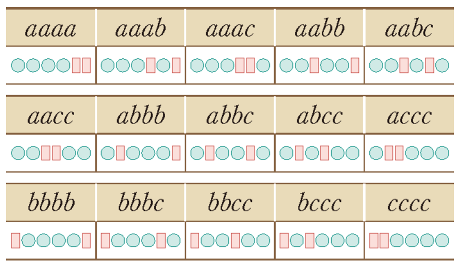
${}_{10}C_5\times {}_3\Pi_5=252\times 243=61236$

14) ❶

	A	B	O
A	AA	AB	AO
B	AB	BB	BO
O	AO	BO	OO

❷ AA, AB, AO, BB, BO, OO

15) ❶



❷ $\dfrac{(\boxed{4}+2)!}{\boxed{4}!\times 2!}=\dfrac{\boxed{6}!}{\boxed{4}!\times 2!}=\boxed{15}$

16) (1) 56 (2) 120 (3) 1

17) 21

18) 15

주어진 다항식은

$$(x+y+z)^4=(x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)$$

이므로, 3개의 문자 x, y, z 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 곱하면 주어진

다항식을 전개할 때 생기는 항이 하나씩 만들어진다.
따라서 $(x+y+z)^4$을 전개할 때 생기는 서로 다른 항의 개수는 3개의 문자 x, y, z중에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$_3H_4 = {}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6\times5}{2\times1} = 15$$

19) (1) 20 (2) 24

20) (1) 28 (2) 10

(1) 음이 아닌 정수인 해 중에서 $x=6$, $y=0$, $z=0$을 $xxxxxx$와 같이 나타내고, $x=1$, $y=3$, $z=2$를 $xyyyzz$와 같이 나타내기로 하면, 음이 아닌 정수인 해의 개수는 3개의 문자 x, y, z 중에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같음을 알 수 있다.
따라서 구하는 해의 개수는

$$_3H_6 = {}_{3+6-1}C_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = 28$$

(2) $x=1+a$, $y=1+b$, $z=1+c$로 놓으면 a, b, c는 모두 음이 아닌 정수이고, 주어진 방정식은

$$a+b+c=3$$

따라서 구하는 해의 개수는 $a+b+c=3$에서 a, b, c가 모두 음이 아닌 정수인 해의 개수와 같으므로 (1)에서와 같은 방법에 의하여

$$_3H_3 = {}_{3+3-1}C_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

21) (1) 45 (2) 21

22) ❶ 66 ❷ 66
❸ 같다.

23) (1) 4가지 (2) 12가지
똑같은 상자 2개를 A, A라 하고 다른 상자 1개를 B라 할 때, A, A, B에 담는 공의 개수가 각각 p, q, r인 것을

$(p,\ q,\ r)$

로 나타내기로 하면 가능한 방법은 다음과 같다.
(1) 상자 3개를 모두 사용하는 경우

(1, 1, 3), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (3, 1, 1)

따라서 가능한 방법은 이다.
(2) 상자를 일부만 사용하는 경우

(0, 0, 5), (1, 0, 4), (1, 1, 3), (2, 0, 3),
(2, 1, 2), (3, 0, 2), (2, 2, 1), (3, 1, 1),
(4, 0, 1), (3, 2, 0), (4, 1, 0), (5, 0, 0)

따라서 가능한 방법은 12가지이다.

24) 5040

25) 125

26) 60

27) (1) 16 (2) 6

28) 6

29) 840

30) (1) 120 (2) 48

31) 81

32) 50
문제이해 0이 맨 앞에 나오는 경우는 없으므로 여섯 개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수에서 0이 맨 앞에 나오는 경우의 수를 빼면 된다. ▶ 30%
해결과정 여섯 개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{1!\times3!\times2!}=60$$ ▶ 30%

0을 맨 앞에 고정하고 나머지 다섯 개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!\times2!}=10$$ ▶ 30%

답구하기 따라서 구하는 경우의 수는

$$60-10=50$$ ▶ 10%

33) 120

34) (1) 2 (2) 4

35) 21

36) 250번째 수
한 자리 자연수의 개수는
1, 2, 3, 4의 4
두 자리 자연수의 개수는

$4\times{}_5\Pi_1=20$

세 자리 자연수의 개수는

$4\times{}_5\Pi_2=100$

이므로 세 자리 이하의 자연수의 개수는

$4+20+100=124$

천의 자리 숫자가 1인 네 자리 자연수의 개수는

${}_5\Pi_3=125$

따라서 세 자리 이하의 자연수와 천의 자리 숫자가 1인 네 자리 자연수의 개수는

$124+125=249$

이므로 2000은 250번째 수이다.

37) (1) 243 (2) 80

(1) ○, △, × 3개 중에서 중복을 허용하여 5개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_3\Pi_5=3^5=243$ ▶ 30%

(2) 5명의 학생 중에서 2명이 ○를 택하는 경우의 수는

${}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$ ▶ 30%

그 각각에 대하여 ×, △ 2개 중에서 중복을 허용하여 나머지 3명의 학생이 택하는 경우의 수는

${}_2\Pi_3=2^3=8$ ▶ 30%

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times8=80$ ▶ 10%

38) 75

$f(1)\le f(2)$를 만족시키는 함수 f에 대하여 $f(3)$을 택하는 경우의 수는 5이다.

이 각각에 대하여 공역 Y의 5개의 원소 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하고, 크기 순서대로 $f(1)$, $f(2)$를 정하면 되므로 그 경우의 수는

${}_5H_2={}_{5+2-1}C_2={}_6C_2$

$=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$5\times15=75$

39) 풀이 참고

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$이고

${}_3C_0={}_3C_3=1$, ${}_3C_1={}_3C_2=3$이므로 a^3, a^2b, ab^2, b^3의 계수와 ${}_3C_0$, ${}_3C_1$, ${}_3C_2$, ${}_3C_3$은 각각 서로 같다.

40) (1) 15 (2) 6

41) $x^4-8x^3+24x^2-32x+16$

$(x-2)^4$

$={}_4C_0x^4+{}_4C_1x^3(-2)+{}_4C_2x^2(-2)^2+{}_4C_3x(-2)^3+{}_4C_4\times(-2)^4$

$=x^4-4\times2x^3+6\times4x^2-4\times8x+16$

$=x^4-8x^3+24x^2-32x+16$

42) (1) $x^4+8x^3y+24x^2y^2+32xy^3+16y^4$

(2) $-x^5+5x^4-10x^3+10x^2-5x+1$

43) 40

전개식의 일반항은

${}_5C_r(x^3)^{5-r}\left(-\dfrac{2}{x}\right)^r={}_5C_rx^{3(5-r)}\times\dfrac{(-2)^r}{x^r}=(-2)^r\times{}_5C_r\dfrac{x^{15-3r}}{x^r}$

$\dfrac{x^{15-3r}}{x^r}=x^7$에서 $(15-3r)-r=7$이므로 $r=2$

따라서 x^7의 계수는

$(-2)^2\times{}_5C_2=40$

44) (1) -18 (2) -540

45) 풀이 참조

이항정리를 이용하여 $(1+x)^n$을 전개하면

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$

$x=1$을 이 식에 대입하면

$2^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n$

46) 풀이 참조

(1) 이항정리를 이용하여 $(1+x)^n$을 전개하면

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$

$x=-1$을 이 식에 대입하면

$0={}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots+(-1)^n\times{}_nC_n$

(2) ${}_{2n}C_0+{}_{2n}C_1+{}_{2n}C_2+\cdots+{}_{2n}C_{2n-1}+{}_{2n}C_{2n}=2^{2n}$ …… ①

${}_{2n}C_0-{}_{2n}C_1+{}_{2n}C_2-\cdots-{}_{2n}C_{2n-1}+{}_{2n}C_{2n}=0$ …… ②

①+②를 하면

$2({}_{2n}C_0+{}_{2n}C_2+{}_{2n}C_4+\cdots+{}_{2n}C_{2n})=2^{2n}$

${}_{2n}C_0+{}_{2n}C_2+{}_{2n}C_4+\cdots+{}_{2n}C_{2n}=2^{2n-1}$

①−②를 하면

$2({}_{2n}C_1+{}_{2n}C_3+{}_{2n}C_5+\cdots+{}_{2n}C_{2n-1})=2^{2n}$

${}_{2n}C_1+{}_{2n}C_3+{}_{2n}C_5+\cdots+{}_{2n}C_{2n-1}=2^{2n-1}$

따라서

$$ {}_{2n}C_0+{}_{2n}C_2+{}_{2n}C_4+\cdots+{}_{2n}C_{2n} $$
$$ ={}_{2n}C_1+{}_{2n}C_3+{}_{2n}C_5+\cdots+{}_{2n}C_{2n-1} $$
$$ =2^{2n-1} $$

47) $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

48) 35

49) 풀이 참조

❶ n개의 원소 중에서 k개의 원소를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_nC_k$이다.

❷ 원소의 개수가 n인 집합 A에 대하여
원소의 개수가 0인 경우의 수는
$${}_nC_0$$
원소의 개수가 1인 경우의 수는
$${}_nC_1$$
원소의 개수가 2인 경우의 수는
$${}_nC_2$$
$$\vdots$$
원소의 개수가 n인 경우의 수는
$${}_nC_n$$
따라서 집합 A의 부분집합의 개수는
$${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$$

❸ $B\subset C\subset A$를 만족시키는 집합 C의 개수는 $(n-r)$개의 원소를 갖는 집합의 부분집합의 개수와 같으므로
$${}_{n-r}C_0+{}_{n-r}C_1+\cdots+{}_{n-r}C_{n-r}=2^{n-r}$$

50) 210

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
⋮

위의 그림의 보라색으로 칠한 부분에서 대각선 방향으로 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84를 더한 값은 그 다음 행의 왼쪽 값 210과 같다. 즉,
$$1+4+10+20+35+56+84=210$$
이다.
이 패턴을 조합의 수를 이용하여 나타내면 다음과 같다.
$${}_3C_0+{}_4C_1+{}_5C_2+{}_6C_3+{}_7C_4+{}_8C_5+{}_9C_6={}_{10}C_6$$

51) 21

52) (1) $8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$
(2) $a^5-10a^4b+40a^3b^2-80a^2b^3+80ab^4-32b^5$

53) 10

54) 5

55) 10

56) 64

57) 63

해결과정 6명의 학생 중 1명만 사진을 찍는 경우의 수는
$${}_6C_1$$
6명의 학생 중 2명이 사진을 찍는 경우의 수는
$${}_6C_2$$
$$\vdots$$
6명의 학생 전원이 사진을 찍는 경우의 수는
$${}_6C_6$$ ▶ 60%

답구하기 따라서 구하는 경우의 수는
$${}_6C_1+{}_6C_2+{}_6C_3+{}_6C_4+{}_6C_5+{}_6C_6$$
$$=2^6-1$$
$$=63$$ ▶ 40%

58) 21

문제이해 이항정리를 이용하여 $(1+x)^{11}$을 전개하면
$$(1+x)^{11}$$
$$={}_{11}C_0+{}_{11}C_1x+{}_{11}C_2x^2+\cdots+{}_{11}C_{11}x^{11}$$ ▶ 20%

해결과정 $x=20$을 이 식에 대입하면
$$21^{11}=(1+20)^{11}$$
$$={}_{11}C_0+{}_{11}C_1\times20+{}_{11}C_2\times20^2+\cdots+{}_{11}C_{11}\times20^{11}$$ ▶ 30%

이때 ${}_{11}C_2\times20^2+\cdots+{}_{11}C_{11}\times20^{11}$은 모두 40으로 나누어떨어지므로 21^{11}을 40으로 나눈 나머지는
$${}_{11}C_0+{}_{11}C_1\times20=1+11\times20=221$$
을 40으로 나눈 나머지와 같다. ▶ 30%

답구하기 따라서
$$221=40\times5+21$$
이므로 구하는 나머지는 21이다. ▶ 20%

59) 10

${}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n-1$이므로

$1000<2^n-1<2000$에서

$1001<2^n<2001$

그런데 $2^{10}=1024$, $2^{11}=2048$이므로

$n=10$

60) 24

61) 240

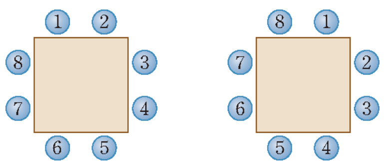
62) 144

63) ③

8명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(8-1)!=7!$

이때 정사각형 모양의 식탁에 앉는 경우는 다음 그림과 같이 서로 다른 2가지가 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는

$7!\times 2$

이므로 옳은 것은 ③이다.

64) ①

65) ⑤

66) ⑤

67) 216

68) ③

69) ②

70) 36

71) 2520

72) 78

짝수가 되려면 일의 자리에 0 또는 2가 와야 한다.

(i) 일의 자리에 0이 오는 경우

$\frac{5!}{2!\times 2!}=30$

(ii) 일의 자리에 2가 오는 경우

0, 2, 3, 5, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

이고, 이 중에서 0이 맨 앞에 오는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

이므로

$60-12=48$

(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는

$30+48=78$

73) 36

74) 30

75) 84

76) 20

77) 126

78) ④

79) 2

80) ④

(i) ${}_1C_1+{}_2C_2+{}_3C_3+\cdots+{}_{10}C_{10}=10$

(ii) ${}_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+\cdots+{}_{10}C_9$

$=({}_2C_0+{}_2C_1)+{}_3C_2+\cdots+{}_{10}C_9$

$=({}_3C_1+{}_3C_2)+\cdots+{}_{10}C_9$

$={}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_9$

$=\cdots={}_{10}C_8+{}_{10}C_9$

$={}_{11}C_9$

$={}_{11}C_2$

$=55$

(ⅰ), (ⅱ)에서 색칠한 부분의 모든 수의 합은

$10+55=65$

이므로 옳은 것은 ④이다.

81) 720

해결과정 특정한 3가지 색을 하나로 보고 6가지 색을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$ ▶ 40%

그 각각에 대하여 3가지 색을 배열하는 경우의 수는

$3!=6$ ▶ 40%

답구하기 따라서 구하는 경우의 수는

$120\times6=720$ ▶ 20%

82) 361

문제이해 이항정리를 이용하여 $(x-1)^{24}$을 전개하면

$(x-1)^{24}={}_{24}C_0x^{24}+{}_{24}C_1x^{23}(-1)+\cdots+{}_{24}C_{24}\times(-1)^{24}$

$x=10$을 이 식에 대입하면

$9^{24}=(10-1)^{24}$

$={}_{24}C_0\times10^{24}+\cdots+{}_{24}C_{21}\times10^3\times(-1)^{21}$

$+{}_{24}C_{22}\times10^2\times(-1)^{22}+{}_{24}C_{23}\times10\times(-1)^{23}+{}_{24}C_{24}\times(-1)^{24}$

▶ 40%

해결과정 이때

${}_{24}C_0\times10^{24}+\cdots+{}_{24}C_{21}\times10^3\times(-1)^{21}$

은 1000으로 나누어떨어지므로 9^{24}을 1000으로 나눈 나머지는

${}_{24}C_{22}\times10^2\times(-1)^{22}+{}_{24}C_{23}\times10\times(-1)^{23}+{}_{24}C_{24}\times(-1)^{24}$

을 1000으로 나눈 나머지와 같다. ▶ 40%

답구하기 따라서

${}_{24}C_{22}\times10^2\times(-1)^{22}+{}_{24}C_{23}\times10\times(-1)^{23}+{}_{24}C_{24}\times(-1)^{24}$

$={}_{24}C_2\times10^2\times(-1)^{22}+{}_{24}C_1\times10\times(-1)^{23}+{}_{24}C_0\times(-1)^{24}$

$=\frac{24\times23}{2!}\times100-24\times10+1$

$=27600-240+1$

$=27361$

이므로 9^{24}을 1000으로 나눈 나머지는 361이다. ▶ 20%

83) 13

(1) 1단 올라가는 횟수를 a, 2단 올라가는 횟수를 b라 할 때, 합하여 6단까지 올라가므로

$a+2b=6$

그런데 a, b는 0 이상의 정수이므로 구하는 순서쌍은

(0, 3), (2, 2), (4, 1), (6, 0) ▶ 30%

(2) (ⅰ) (0, 3)일 때, bbb를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{3!}{3!}=1$

(ⅱ) (2, 2)일 때, $aabb$를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{4!}{2!\times2!}=6$

(ⅲ) (4, 1)일 때, $aaaab$를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{5!}{4!\times1!}=5$

(ⅳ) (6, 0)일 때, $aaaaaa$를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{6!}{6!}=1$ ▶ 60%

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 경우의 수는

$1+6+5+1=13$ ▶ 10%

84) ❶ 김밥, 라면, 국수, 수제비, 냉면, 떡국, 순대

❷ 수제비, 순대

85) (1) $S=\{HH, HT, TH, TT\}$

(2) $A=\{HT, TH\}$

86) (1) $\{HH, HT, TH\}$

(2) $\varnothing$

(3) $\{TT\}$

(4) 사건 A와 사건 C, 사건 B와 사건 C

87) $\frac{1}{12}$

88) $\frac{3}{5}$

표본공간을 S라 하면 $n(S)={}_5C_2=10$

빨간 공 3개 중에서 1개를 꺼내고, 파란 공 2개 중에서 1개를 꺼내는 사건을 A라 하면

$n(A)={}_3C_1\times{}_2C_1=3\times2=6$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

89) (1) $\frac{5}{14}$ (2) $\frac{15}{28}$

90) 0.26

91) 1, 1, 1, 0

92) (1) 1 (2) 0

93) ❶ 음료 교환권을 받을 확률 : 1

보조 배터리를 받을 확률 : $\frac{1}{10}$

❷ 예시 마라톤 대회에 참가한 학생이 경품으로 카메라를 받는 사건

94) 풀이 참조

(1) 예시

n	50	100	150	200	250	300
r_n	27	53	79	105	130	154
$\frac{r_n}{n}$	$\frac{27}{50}$	$\frac{53}{100}$	$\frac{79}{150}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{13}{25}$	$\frac{77}{150}$

(2) (1)의 표에서 동전을 던진 횟수 n이 50, 100, 150, $\cdots$, 300으로 커짐에 따라 $\frac{r_n}{n}$은 각각

0.54, 0.53, 0.526$\cdots$, 0.525, 0.52, 0.513$\cdots$

임을 알 수 있다.

따라서 n이 커짐에 따라 $\frac{r_n}{n}$이 동전 한 개를 던질 때 앞면이 나올 수학적 확률인 $\frac{1}{2}$에 가까워진다.

95) ❶ 360 ❷ $\frac{9}{10}$

96) (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{7}{10}$

(1) 카드에 적힌 수가 4의 배수인 사건을 A, 6의 배수인 사건을 B라 하면 $A\cap B$는 12의 배수인 사건이다.

$n(A)=7$, $n(B)=5$, $n(A\cap B)=2$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{7}{30},\quad \mathrm{P}(B)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6},\quad \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{7}{30}+\frac{1}{6}-\frac{1}{15}=\frac{1}{3}$$

(2) 카드에 적힌 수가 10 이하인 사건을 C, 20 이상인 사건을 D라 하면

$n(C)=10$, $n(D)=11$이므로

$$\mathrm{P}(C)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3},\quad \mathrm{P}(D)=\frac{11}{30}$$

$C\cap D=\varnothing$이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(C\cup D)=\mathrm{P}(C)+\mathrm{P}(D)$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{11}{30}=\frac{7}{10}$$

97) $\frac{5}{6}$

98) (1) $\frac{5}{11}$ (2) $\frac{9}{44}$

99) 배반, A, 1, A, A

100) $\frac{5}{6}$

101) $\frac{29}{33}$

두 개 중에서 적어도 한 개에는 콩이 들어 있는 사건을 A라 하면 여사건 A^C는 두 개에 모두 깨가 들어 있는 사건이다.

깨가 들어 있는 송편은 16개이므로 A^C의 확률은

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_{16}\mathrm{C}_2}{{}_{45}\mathrm{C}_2}=\frac{4}{33}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{4}{33}=\frac{29}{33}$$

102) $\frac{29}{38}$

103) $\frac{2}{3}$

104) ❶ $\frac{{}_{30}\mathrm{P}_5}{{}_{30}\Pi_5}=\frac{2639}{3750}$ ❷ $1-\frac{2639}{3750}=\frac{1111}{3750}$

105) (1) $S=\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ \cdots,\ (6,\ 4),\ (6,\ 5),\ (6,\ 6)\}$

(2) $A=\{(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5),\ (6,\ 6)\}$

106) $\frac{4}{5}$

107) (1) $\frac{5}{8}$ (2) 1
(3) 0

108) (1) $\frac{5}{6}$ (2) $\frac{2}{3}$

109) $\frac{1}{3}$

110) $\frac{1}{126}$

111) $\frac{3}{4}$

112) $\frac{7}{45}$

113) $\frac{17}{20}$

114) $\frac{8}{15}$

115) $\frac{3}{5}$

116) 4

문제이해 A 반과 B 반의 학생 수를 각각

$m,\ 10-m$

이라 하자. ▶ 10%

해결과정 동아리 회원 10명 중에서 대표 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_{10}C_2=45$

이때 2명의 대표를 각각 A 반과 B 반에서 뽑는 경우의 수는

${}_{m}C_1\times{}_{10-m}C_1=m(10-m)$

이므로 2명의 대표를 각각 A 반과 B 반에서 뽑을 확률은

$\frac{m(10-m)}{45}$ ▶ 40%

따라서 2명의 대표가 같은 반에서 뽑힐 확률은

$1-\frac{m(10-m)}{45}=\frac{8}{15}$

이므로

$45-m(10-m)=24$

$m^2-10m+21=0$

$(m-3)(m-7)=0$

에서 $m=3$ 또는 $m=7$ ▶ 30%

답구하기 두 반의 학생 수는 각각 7, 3이므로 A 반과 B 반의 학생 수의 차는

4 ▶ 20%

117) $\frac{12}{25}$

세 사람이 영화표를 구매하는 경우의 수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$

세 사람이 모두 다른 상영관의 영화표를 구매하는 경우의 수는

${}_5P_3=5\times4\times3=60$

세 사람이 모두 같은 상영관의 영화표를 구매하는 경우의 수는

5

따라서 세 사람 중에서 두 사람만 같은 상영관의 영화표를 구매하는 경우의 수는

$125-(60+5)=60$

즉, 세 사람 중에서 두 사람만 같은 상영관의 영화표를 구매할 확률은

$\frac{60}{125}=\frac{12}{25}$

118) $\frac{5}{18}$

해결과정 서로 다른 두 개의 주사위 A, B를 동시에 던지는 시행에서 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$ ▶ 20%

이차방정식 $x^2-ax+2b=0$이 실근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식 D가

$D=a^2-8b\geq0$

이어야 하므로

$a^2\geq8b$

이때 $b\geq1$이므로

$a\geq3$ ▶ 30%

(i) $a=3$일 때, b는 1이므로 경우의 수는 1
(ii) $a=4$일 때, b는 1, 2이므로 경우의 수는 2
(iii) $a=5$일 때, b는 1, 2, 3이므로 경우의 수는 3
(iv) $a=6$일 때, b는 1, 2, 3, 4이므로 경우의 수는 4

(i)~(iv)에서 모든 경우의 수는

$1+2+3+4=10$ ▶ 40%

답구하기 따라서 구하는 확률은

$\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$ ▶ 10%

119) ❶ $\frac{11}{27}$ ❷ $\frac{1}{3}$

120) $\frac{2}{5}$

공에 적힌 수가 홀수인 사건을 A, 10의 약수인 사건을 B라 하면

$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{1, 2, 5\}$이고, $A\cap B=\{1, 5\}$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{9},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{9}$$

따라서 꺼낸 공에 적힌 수가 홀수일 때, 그 수가 10의 약수일 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{2}{5}$$

121) $\frac{1}{2}$

122) $\frac{8}{21}$

123) $\frac{1}{8}$

민수가 꺼낸 초콜릿이 호두 초콜릿인 사건을 A, 선미가 꺼낸 초콜릿이 호두 초콜릿인 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8},\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{8}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{8}$$

124) $\frac{8}{33}$

125) (1) 0.016 (2) 0.25

부품이 두 공장 A, B에서 생산된 사건을 각각 A, B, 불량품인 사건을 E라 하자.

(1) A 공장에서 생산된 부품이 불량품인 사건은 $A\cap E$이고, B 공장에서 생산된 부품이 불량품인 사건은 $B\cap E$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=0.4\times0.01=0.004$$
$$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=0.6\times0.02=0.012$$

따라서 택한 부품이 불량품일 확률은

$$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)=0.016$$

(2) 택한 부품이 불량품일 때, 그 부품이 A 공장에서 생산되었을 확률은

$$\mathrm{P}(A\,|\,E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{0.004}{0.016}=0.25$$

126) $\frac{9}{13}$

127) 희정

먼저 뽑는 사람이 당첨 제비를 뽑을 확률은

$\frac{1}{5}$

나중에 뽑는 사람이 당첨 제비를 뽑을 확률은

$$\frac{1}{5}\times\frac{3}{19}+\frac{4}{5}\times\frac{4}{19}=\frac{1}{5}$$

따라서 당첨 제비를 뽑을 확률은 뽑는 순서에 상관없이 $\frac{1}{5}$로 같으므로 희정이의 말이 맞다.

128) (1) 풀이 참조 (2) 0.0045

(1) 검사를 받은 사람 20000명 중 감염자는 10명, 비감염자는 19990명이다. 감염자 중에서 양성 반응을 보인 사람은

$$10\times\frac{90}{100}=9\ (\text{명})$$

비감염자 중에서 음성 반응을 보인 사람은

$$19990\times\frac{90}{100}=17991\ (\text{명})$$

따라서 감염자 중에서 음성 반응을 보인 사람은

$$10-9=1\ (\text{명})$$

비감염자 중에서 양성 반응을 보인 사람은

$$19990-17991=1999\ (\text{명})$$

이 상황을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	양성 반응	음성 반응	합계
감염자	9	1	10
비감염자	1999	17991	19990
합계	2008	17992	20000

(2) (1)의 표에서 구하는 확률은

0.0045

129) ❶ $\mathrm{P}(B|A)=\frac{5}{9}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{5}{9}$

❷ $\mathrm{P}(B|A)=\frac{5}{8}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{5}{9}$

130) (1) 종속 (2) 독립

$A=\{2,\ 4,\ 6\}$, $B=\{2,\ 3,\ 5\}$, $C=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(C)=\frac{2}{3}$$

(1) $A\cap B=\{2\}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

또, $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 종속이다.

(2) $A\cap C=\{2,\ 6\}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{3}$$

또, $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$$

따라서 두 사건 A와 C는 서로 독립이다.

131) (1) 종속 (2) 독립

132) ❶

1회	2회	3회	4회	확률
○	○	×	×	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}$
○	×	○	×	$\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}$
○	×	×	○	$\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}$
×	○	○	×	$\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}$
×	○	×	○	$\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}$
×	×	○	○	$\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$

❷ $\frac{25}{216}$

133) (1) $\frac{48}{125}$ (2) $\frac{1}{125}$

(1) 3발을 쏘았을 때 표적을 2번 맞힐 확률은 독립시행의 확률에 의하여

$${}_3\mathrm{C}_2\times\left(\frac{4}{5}\right)^2\times\left(\frac{1}{5}\right)^1=\frac{48}{125}$$

(2) 3발을 쏘았을 때 표적을 한 번도 맞히지 못할 확률은

$${}_3\mathrm{C}_0\times\left(\frac{4}{5}\right)^0\times\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{1}{125}$$

134) $\frac{1053}{3125}$

135) $\frac{63}{64}$

136) $\frac{5}{16}$

137) $\frac{2}{3}$

138) $\frac{1}{2}$

139) 종속

140) $\frac{1}{4}$

141) $\frac{1}{4}$

142) 3

143) $\frac{2}{5}$

144) $\frac{5}{21}$

145) 사건 A와 사건 C

146) $\frac{65}{81}$

147) $\frac{3}{16}$

해결과정 B 팀이 우승하는 경우의 확률은 각각 다음과 같다.

(ⅰ) 4번의 경기를 연속하여 모두 이기는 경우

$${}_4\mathrm{C}_4\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$$

▶

40%

(ii) 4번의 경기에서 3승 1패를 하고, 마지막 경기를 이기는 경우

$${}_4C_3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$ ▶ 40%

답구하기 (i), (ii)에서 B 팀이 우승할 확률은

$$\frac{1}{16}+\frac{1}{8}=\frac{3}{16}$$ ▶ 20%

148) $\frac{1}{2}$

감귤이 두 농장 A, B에서 생산된 사건을 각각 A, B, 무게가 잘못 분류된 감귤인 사건을 C라 하자.

$$P(A)=\frac{3}{5}$$

$$P(C|A)=\frac{2}{100}=\frac{1}{50}$$

$$P(B)=\frac{2}{5}$$

$$P(C|B)=\frac{3}{100}$$

이때 A 농장에서 생산된 감귤이 무게가 잘못 분류된 사건은 $A\cap C$이고, B 농장에서 생산된 감귤이 무게가 잘못 분류된 사건은 $B\cap C$이므로

$$P(A\cap C)=P(A)P(C|A)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{50}=\frac{3}{250}$$

$$P(B\cap C)=P(B)P(C|B)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{100}=\frac{3}{250}$$

즉, 꺼낸 감귤이 무게가 잘못 분류된 감귤일 확률은

$$P(C)=P(A\cap C)+P(B\cap C)=\frac{3}{250}+\frac{3}{250}=\frac{3}{125}$$

따라서 꺼낸 감귤이 무게가 잘못 분류된 감귤일 때, 그 감귤이 A 농장에서 생산되었을 확률은

$$P(A|C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{\frac{3}{250}}{\frac{3}{125}}=\frac{1}{2}$$

149) $\frac{41}{81}$

해결과정 주사위를 한 번 던지는 시행에서 점 P가 시곗바늘이 도는 방향과 반대인 방향으로 움직일 확률은

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$ ▶ 20%

주사위를 한 번 던지는 시행에서 점 P가 시곗바늘이 도는 방향으로 움직일 확률은

$$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$ ▶ 20%

주사위를 4번 던지는 시행에서 점 A를 출발한 점 P가 다시 점 A로 되돌아오는 경우는 네 번 모두 같은 방향으로 움직이거나, 두 번은 시곗바늘이 도는 방향과 반대인 방향으로, 두 번은 시곗바늘이 도는 방향으로 움직이는 경우이다. ▶ 30%

답구하기 따라서 구하는 확률은

$${}_4C_0\times\left(\frac{2}{3}\right)^4+{}_4C_4\times\left(\frac{1}{3}\right)^4+{}_4C_2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$=\frac{16}{81}+\frac{1}{81}+\frac{24}{81}$$

$$=\frac{41}{81}$$ ▶ 30%

150) ③

151) 16개

152) ②

153) $\frac{1}{10}$

154) $\frac{4}{7}$

집합 $A=\{a, b, c\}$의 공집합이 아닌 부분집합의 개수는

7

이 중에서 서로 다른 두 집합을 택하는 경우의 수는

$${}_7C_2=21$$

택한 두 부분집합 중에서 하나가 다른 하나의 진부분집합이 되는 경우의 수는 그중 한 부분집합의 원소의 개수에 따라 각각 다음과 같다.

(i) 원소의 개수가 1인 경우

그 집합의 공집합이 아닌 진부분집합이 없으므로 경우의 수는

0

(ii) 원소의 개수가 2인 경우

그 집합의 부분집합의 개수는

$${}_3C_2=3$$

이때 공집합이 아닌 진부분집합의 개수는 각각 2이므로 구하는 경우의 수는

$3\times 2=6$

(iii) 원소의 개수가 3인 경우

그 집합의 부분집합의 개수는

1

이때 공집합이 아닌 진부분집합의 개수는 6이므로 구하는 경우의 수는

$1\times 6=6$

(i)~(iii)에서 하나가 다른 하나의 진부분집합이 되는 모든 경우의 수는

$6+6=12$

따라서 구하는 확률은

$\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$

155) ④

156) ②

157) ⑤

158) ④

159) $\frac{1}{3}$

160) $\frac{1}{3}$

161) $\frac{1}{4}$

162) 0.48

163) $\frac{10}{17}$

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times 6=36$

이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 허근을 가지는 사건을 A, a가 홀수인 사건을 B라 하자.

$x^2+ax+b=0$이 허근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식 D가

$D=a^2-4b<0$

이어야 하므로

$a^2<4b$

이때 $b\le 6$이므로

$a^2<24$

따라서 a는 1, 2, 3, 4 중의 하나이다.

(i) $a=1$일 때,

b는 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 경우의 수는

6

(ii) $a=2$일 때,

b는 2, 3, 4, 5, 6이므로 경우의 수는

5

(iii) $a=3$일 때,

b는 3, 4, 5, 6이므로 경우의 수는

4

(iv) $a=4$일 때,

b는 5, 6이므로 경우의 수는

2

(i)~(iv)에서

$n(A)=6+5+4+2=17$

주어진 이차방정식이 허근을 가지고 a가 홀수인 사건은 $A\cap B$이므로 (i), (iii)에서

$n(A\cap B)=10$

따라서

$\mathrm{P}(A)=\frac{17}{36}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$

즉, 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{5}{18}}{\frac{17}{36}}=\frac{10}{17}$$

164) $\frac{19}{36}$

165) ③

166) ②

167) $\frac{11}{20}$

168) $\frac{3}{16}$

169) $\frac{8}{9}$

해결과정 어느 2개의 점도 같은 모서리의 꼭짓점이 아닌 3개의 점을 택하는 경우는 네 점 A, C, F, H 또는 네 점 B, D, E, G 중에서 3개의 점을 택할 때이므로 그 경우의 수는

$${}_4C_3+{}_4C_3=8$$ ▶ 40%

8개의 꼭짓점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$${}_8C_3=56$$

3개의 점 중에서 어느 2개의 점도 같은 모서리의 꼭짓점이 아닐 확률은

$$\frac{8}{56}=\frac{1}{7}$$ ▶ 40%

답구하기 따라서 3개의 점 중에서 2개의 점이 같은 모서리의 꼭짓점일 확률은

$$1-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$$ ▶ 20%

170) $\frac{8}{9}$

해결과정 A가 최종 우승하는 경우의 확률은 각각 다음과 같다.

(i) 두 번의 경기를 연속하여 모두 이기는 경우

$${}_2C_2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$ ▶ 30%

(ii) 두 번의 경기에서 1승 1패를 하고, 네 번째 경기를 이기는 경우

$${}_2C_1\times\left(\frac{2}{3}\right)^1\times\left(\frac{1}{3}\right)^1\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$$ ▶ 30%

(iii) 세 번의 경기에서 1승 2패를 하고, 마지막 경기를 이기는 경우

$${}_3C_1\times\left(\frac{2}{3}\right)^1\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{27}$$ ▶ 30%

답구하기 (i)~(iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{4}{27}=\frac{24}{27}=\frac{8}{9}$$ ▶ 10%

171) 7

(1) 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$$6\times6=36$$

이때 $n(A)=1\times6=6$이므로

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

첫 번째에 나오는 눈의 수가 4의 배수이고 두 눈의 수의 합이 k인 사건은

$$A\cap B_k$$

이때 첫 번째에 나오는 눈의 수가 4이면 두 눈의 수의 합이 k이기 위해서는 두 번째에 나오는 눈의 수가 $k-4$이어야 하므로

$$n(A\cap B_k)=1$$

에서 $P(A\cap B_k)=\frac{1}{36}$ ▶ 30%

두 사건 A와 B_k가 서로 독립이므로

$$P(A)P(B_k)=P(A\cap B_k)$$

에서 $\frac{1}{6}P(B_k)=\frac{1}{36}$

따라서 $P(B_k)=\frac{1}{6}$ ▶ 20%

(2) (1)에서 $P(B_k)=\frac{1}{6}$이므로

$$n(B_k)=6$$ ▶ 20%

위의 조건을 만족시키는 경우는

$B_7=\{(1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (5,\ 2),\ (6,\ 1)\}$ ▶ 20%

따라서 구하는 k의 값은 7 ▶ 10%

172) ❶ $S=\{HH,\ HT,\ TH,\ TT\}$
❷ 0, 1, 2

173) 0, 1, 2, 3, 4

174) (1) 이산확률변수 (2) 연속확률변수

(1) 스트라이크를 성공할 때까지 공을 굴린 횟수를 확률변수 X라 하고 성공을 s, 실패를 f라 하면 표본공간 S는

$$S=\{s,\ fs,\ ffs,\ fffs,\ \cdots\}$$

이때 오른쪽 그림과 같이 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, …로 자연수와 같이 셀 수 있으므로 X는 이산확률변수이다.

(2) 버스를 기다리는 시간을 확률변수 X라 하면 표본공간 S는

$$S=\{x\mid 0\le x\le 7\}$$

이다.

이때 X는 0 이상 7 이하의 모든 실수의 값을 가지므로 연속확률변수이다.

175) (1) 연속확률변수 (2) 이산확률변수 (3) 이산확률변수 (4) 연속확률변수

176) (1) 풀이 참조 (2) $\frac{13}{35}$

(1) 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다.

7명의 학생 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_7\mathrm{C}_3$이고, 뽑힌 학생 중에서 여학생의 수가 x명인 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_x \times {}_4\mathrm{C}_{3-x}$이므로 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_3\mathrm{C}_x \times {}_4\mathrm{C}_{3-x}}{{}_7\mathrm{C}_3} \quad (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$	1

(2) 여학생이 2명 이상 뽑힐 확률은 $\mathrm{P}(X \geq 2)$이므로

$$\mathrm{P}(X \geq 2)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)=\frac{12}{35}+\frac{1}{35}=\frac{13}{35}$$

177) (1)

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	1

(2) $\frac{11}{12}$

178) (1) $\frac{2}{9}$ (2) $\frac{5}{9}$

(1) 함수 $f(x)=kx$의 그래프와 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2}\times 3 \times 3k=1, \quad 즉 \quad k=\frac{2}{9}$$

(2) $\mathrm{P}(2 \leq X \leq 3)$은 오른쪽 그림에서 색칠한 사다리꼴의 넓이와 같으므로

$$\mathrm{P}(2 \leq X \leq 3)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{9}+\frac{2}{3}\right)\times 1=\frac{5}{9}$$

179) (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{5}{8}$

180) (1) $\frac{5}{4}$ (2) $\frac{1}{2}$

181) $\frac{13}{24}$

182) (1) $\frac{1}{9}$ (2) $\frac{7}{27}$

183) ❶ $\frac{5000\times 70+10000\times 20+20000\times 10}{100}$

❷

X	5000	10000	20000	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

184) $\frac{7}{2}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

따라서 확률변수 X의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$는

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$$

185) $\frac{6}{5}$

186) $\mathrm{V}(X)=5,\ \sigma(X)=\sqrt{5}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	7	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

이때 확률변수 X의 기댓값은

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}+5\times\frac{1}{4}+7\times\frac{1}{4}$$
$$=4$$

따라서 확률변수 X의 분산과 표준편차는 각각 다음과 같다.

$$\mathrm{V}(X)=(1-4)^2\times\frac{1}{4}+(3-4)^2\times\frac{1}{4}+(5-4)^2\times\frac{1}{4}+(7-4)^2\times\frac{1}{4}$$
$$=5$$

$\sigma(X)=\sqrt{5}$

187) $\mathrm{V}(X)=1,\ \sigma(X)=1$

188) (1) 37 (2) 2

189) 풀이 참조

확률변수 X의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$를 m이라 하면

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}((X-m)^2)\\&=\mathrm{E}(X^2-2mX+m^2)\\&=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(2mX)+\mathrm{E}(m^2)\\&=\mathrm{E}(X^2)-2m\times m+m^2\\&=\mathrm{E}(X^2)-m^2\\&=\mathrm{E}(x^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\end{aligned}$$

따라서 다음이 성립한다.

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(x^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$

190) (1) $\mathrm{V}(3X)=81,\ \sigma(3X)=9$

(2) $\mathrm{V}\left(3X-\frac{1}{5}\right)=81,\ \sigma\left(3X-\frac{1}{5}\right)=9$

(3) $\mathrm{V}(-X+3)=9,\ \sigma(-X+3)=3$

(4) $\mathrm{V}\left(-\frac{1}{3}X-2\right)=1,\ \sigma\left(-\frac{1}{3}X-2\right)=1$

191) $\mathrm{E}(Y)=14,\ \mathrm{V}(Y)=36,\ \sigma(Y)=6$

확률변수 X의 기댓값과 분산 및 표준편차는 다음과 같다.

$\mathrm{E}(X)=2\times\frac{2}{5}+4\times\frac{3}{10}+6\times\frac{1}{5}+8\times\frac{1}{10}=4$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=2^2\times\frac{2}{5}+4^2\times\frac{3}{10}+6^2\times\frac{1}{5}+8^2\times\frac{1}{10}-4^2$

$=4$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{4}=2$

따라서 다음을 얻는다.

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(3X+2)=3\mathrm{E}(X)+2=3\times4+2=14$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(3X+2)=3^2\mathrm{V}(X)=9\times4=36$

$\sigma(Y)=\sigma(3X+2)=3\sigma(X)=3\times2=6$

192) $\sqrt{10}$

193) 풀이 참조

❶ ${}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{10}\right)^3,\ {}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{9}{10}\right)^2\left(\frac{1}{10}\right)^1,\ {}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{9}{10}\right)^3$

❷ 확률의 합이 이항정리를 이용하여

$\left(\frac{1}{10}+\frac{9}{10}\right)^3$을 전개한 식과 같으므로

${}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{10}\right)^3+{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{9}{10}\right)^1\left(\frac{1}{10}\right)^2+{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{9}{10}\right)^2\left(\frac{1}{10}\right)^1+{}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{9}{10}\right)^3$

$=\left(\frac{1}{10}+\frac{9}{10}\right)^3$

$=1$

194) (1) $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{3}{5}\right)$

(2) 독립시행이 아니므로 이항분포를 따르지 않는다.

(3) $\mathrm{B}\left(20,\ \frac{1}{4}\right)$

195) (1) 풀이 참조 (2) $\frac{189}{1000}$

(1) 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(3,\ \frac{3}{10}\right)$을 따르므로 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_3\mathrm{C}_x\left(\frac{3}{10}\right)^x\left(\frac{7}{10}\right)^{3-x}\quad(x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

(2) $\mathrm{P}(X=2)={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{7}{10}\right)^1$

$=\frac{189}{1000}$

196) (1) $\mathrm{P}(X=x)={}_5\mathrm{C}_x\left(\frac{2}{5}\right)^x\left(\frac{3}{5}\right)^{5-x}(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$

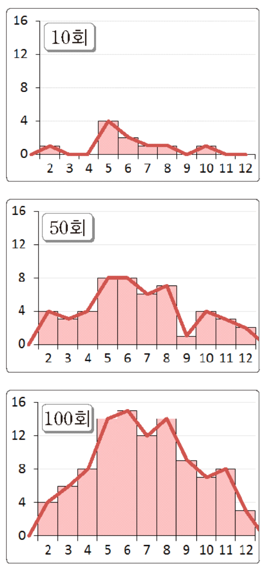
(2) $\frac{144}{625}$

197) $\mathrm{E}(X)=120,\ \sigma(X)=4\sqrt{3}$

198) $\mathrm{E}(X)=270,\ \sigma(X)=3\sqrt{3}$

199) 풀이 참조

❶



❷ 예시 종 모양에 가까워진다.

200) 평균이 가장 큰 것 : (4)

표준편차가 가장 큰 것 : (1)

201) (1) 0.9772 (2) 0.7745

(1) $\mathrm{P}(Z\le2)=\mathrm{P}(Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)$

$=0.5+0.4772$

$=0.9772$

(2) $\mathrm{P}(-1<Z\le1.5)=\mathrm{P}(-1<Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)$

$=\mathrm{P}(0\le Z<1)+\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)$

$= 0.3413 + 0.4332$

$= 0.7745$

202) (1) 0.1587 (2) 0.95

203) (1) 1.5 (2) 2.5

204) 풀이 참조

❶ $\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}\left(\dfrac{X-m}{\sigma}\right)$

$= \dfrac{1}{\sigma}\{\mathrm{E}(X) - m\}$

$= 0$

❷ $\mathrm{V}(Z) = \mathrm{V}\left(\dfrac{X-m}{\sigma}\right)$

$= \left(\dfrac{1}{\sigma}\right)^2 \mathrm{V}(X)$

$= 1$

205) 0.4772

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(70,\ 5^2)$을 따르므로 확률변수 $Z = \dfrac{X-70}{5}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(70 \le X \le 80) = \mathrm{P}\left(\dfrac{70-70}{5} \le Z \le \dfrac{80-70}{5}\right)$

$= \mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$

$= 0.4772$

206) (1) 0.9053 (2) 0.0668

207) 0.2902

한라봉 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(270,\ 40^2)$을 따르므로, 확률변수 $Z = \dfrac{X-270}{40}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(250 \le X \le 280) = \mathrm{P}\left(\dfrac{250-270}{40} \le Z \le \dfrac{280-270}{40}\right)$

$= \mathrm{P}(-0.5 \le Z \le 0.25)$

$= \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.25)$

$= 0.1915 + 0.0987 = 0.2902$

208) 30.85%

209) 2.5

210) 풀이 참조

이항분포 $\mathrm{B}\left(50,\ \dfrac{1}{5}\right)$과 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 8)$의 평균은 10, 표준편차는 $\sqrt{8}$로 평균과 표준편차는 각각 같고 그래프의 모양도 서로 비슷하다.

211) 0.1587

150명 중에서 도보로 등교하는 학생 수를 확률변수 X라 하면, X는 이항분포 $\mathrm{B}(150,\ 0.4)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X) = 150 \times 0.4 = 60,\ \sigma(X) = \sqrt{150 \times 0.4 \times 0.6} = 6$

이때 150은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 6^2)$을 따른다.

따라서 확률변수 $Z = \dfrac{X-60}{6}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X \ge 66) = \mathrm{P}\left(Z \ge \dfrac{66-60}{6}\right)$

$= \mathrm{P}(Z \ge 1)$

$= \mathrm{P}(Z \ge 0) - \mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$

$= 0.5 - 0.3413 = 0.1587$

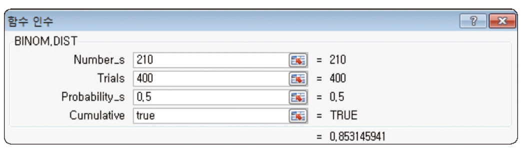
212) 0.0228

213) ❶ 0.2

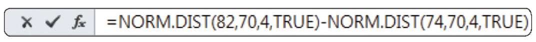
❷ 평균 : 80, 표준편차 : 8

❸ 0.1056

214) 풀이 참조

(1) 

$\mathrm{P}(X \le 210) = 0.853145941$

(2) 

$\mathrm{P}(74 \le X \le 82) = 0.157305356$

215) (1) $\dfrac{3}{10}$ (2) $\dfrac{2}{5}$

216) $\mathrm{E}(X) = \dfrac{1}{8}$, $\mathrm{V}(X) = \dfrac{23}{64}$, $\sigma(X) = \dfrac{\sqrt{23}}{8}$

217) $\mathrm{E}(Y)=12,\ \mathrm{V}(Y)=4,\ \sigma(Y)=2$

218) $\mathrm{E}(X)=3,\ \mathrm{V}(X)=\dfrac{9}{4},\ \sigma(X)=\dfrac{3}{2}$

219) 0.9772

220) 1

221) $\dfrac{3}{4}$

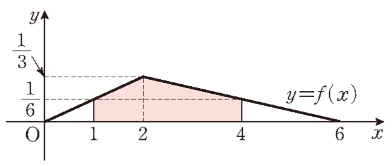
해결과정 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 이므로

$\dfrac{1}{2}\times 6\times k=1$, 즉 $k=\dfrac{1}{3}$ ▶ 30%

따라서

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}x & (0\le x<2)\\ -\dfrac{1}{12}x+\dfrac{1}{2} & (2\le x\le 6)\end{cases}$$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



▶ 40%

답 구하기 $\mathrm{P}(1\le X\le 4)$

$=\mathrm{P}(1\le X\le 2)+\mathrm{P}(2\le X\le 4)$

$=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}\right)\times 1+\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\right)\times 2$

$=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}$ ▶ 30%

222) $\dfrac{11}{2}$

223) 105

224) 0.1587

문제 이해 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ \sigma^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\dfrac{X-10}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

▶ 20%

해결 과정 $\mathrm{P}(7\le X\le 10)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{7-10}{\sigma}\le Z\le\dfrac{10-10}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(-\dfrac{3}{\sigma}\le Z\le 0\right)$

이고 $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)=0.1915$이므로

$-\dfrac{3}{\sigma}=-0.5$, 즉 $\sigma=6$ ▶ 40%

답 구하기 $\mathrm{P}(X\ge 16)=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{16-10}{6}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 1)$

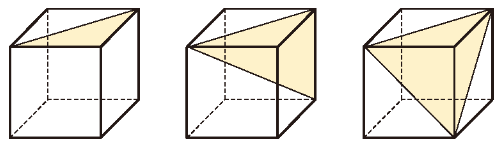
$=0.5-0.3413$

$=0.1587$ ▶ 40%

225) 16

226) 0.0013

227) $\dfrac{3}{2}$



[그림 1] [그림 2] [그림 3]

(ⅰ) [그림 1]과 같이 세 꼭짓점을 택하여 만든 삼각형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 1\times 1=\dfrac{1}{2}$

(ⅱ) [그림 2]와 같이 세 꼭짓점을 택하여 만든 삼각형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times 1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(ⅲ) [그림 3]과 같이 세 꼭짓점을 택하여 만든 삼각형의 넓이는

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

이상에서 확률변수 X가 가질 수 있는 값은

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4},\ \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2},\ \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$

이고,

$\mathrm{P}\left(X=\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{24}{{}_8\mathrm{C}_3}=\dfrac{3}{7}$,

$\mathrm{P}\left(X=\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{24}{{}_8\mathrm{C}_3}=\dfrac{3}{7}$,

$\mathrm{P}\left(X=\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{8}{{}_8\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{7}$

이므로

$\mathrm{E}(X)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{7}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{7}+\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{7}$

$= \frac{3}{7}$

$$\mathrm{E}(x^2) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{3}{7} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{3}{7} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{7}$$

$$= \frac{3}{14}$$

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \{\mathrm{E}(X)\}^2$$

$$= \frac{3}{14} - \left(\frac{3}{7}\right)^2$$

$$= \frac{3}{98}$$

따라서 구하는 분산은

$$\mathrm{V}(7X) = 49\mathrm{V}(X)$$

$$= 49 \times \frac{3}{98}$$

$$= \frac{3}{2}$$

228) 171.2초 이하

이 학교 학생의 1000 m 달리기 기록을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(230,\ 30^2)$을 따르므로

$Z = \frac{X - 230}{30}$ 은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

기록이 a초 이하일 때 상위 10위 이내에 든다고 하면

$$\mathrm{P}(X \le a) = \mathrm{P}\left(Z \le \frac{a - 230}{30}\right)$$

$$= \frac{10}{400}$$

$$= 0.025$$

이므로

$$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{230 - a}{30}\right) = 0.5 - 0.025$$

$$= 0.475$$

그런데 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.96) = 0.475$이므로

$\frac{230 - a}{30} = 1.96$, 즉 $a = 171.2$

따라서 기록이 171.2초 이하이면 상위 10위 이내에 든다.

229) 풀이 참조

예시1 [방법 1]을 택하는 것이 정확한 결과를 얻을 수 있다.

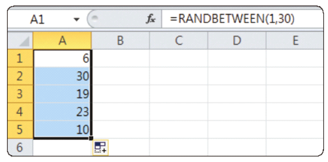
예시2 [방법 2]를 택하는 것이 시간과 비용을 줄일 수 있다.

230) (1) 표본조사 (2) 전수조사
(3) 표본조사 (4) 전수조사

231) 풀이 참조

예시 우리 반 학생 30명 중에서 5명을 컴퓨터 프로그램을 이용하여 다음과 같이 임의추출한다.

셀 A1에 ‘=RANDBETWEEN(1, 30)’을 입력한 후, ‘채우기 핸들’을 이용하여 셀 A5까지 드래그 한다.



232) (1) 25 (2) 20
(3) 10

233) 풀이 참조

❶ 0.048 ppm

❷ 예시 9일과 11일의 오존 농도의 평균은

$$\frac{0.046 + 0.045}{2} = 0.0455(\mathrm{ppm})$$

따라서 ❶의 결과와 다르다.

❸ 예시 8일과 12일을 임의추출한 경우의 평균은

$$\frac{0.024 + 0.034}{2} = 0.029(\mathrm{ppm})$$

따라서 ❷에서 구한 평균과 다르다.

234) 평균 : 860 g, 표준편차 : 10 g

235) 0.9918

등교할 때 걸리는 시간이 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 5^2)$을 따르므로 36명이 등교할 때 걸리는 시간의 평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(20,\ \frac{5^2}{36}\right)$을 따른다.

따라서 확률변수 $Z = \frac{\overline{X} - 20}{\frac{5}{\sqrt{36}}}$ 은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로, 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(\overline{X} \ge 18) = \mathrm{P}\left(Z \ge \frac{18 - 20}{\frac{5}{\sqrt{36}}}\right)$$

$$= \mathrm{P}(Z \ge -2.4)$$

$$= 0.5 + \mathrm{P}(0 \le Z \le 2.4)$$

$$= 0.5 + 0.4918$$

$$= 0.9918$$

236) 0.8185

237) 풀이 참조

❶ 과자 10개의 과자 1개당 당류 함유량의 표본평균이 10 g이므로 모평균은 10 g일 것으로 추측할 수 있다.
❷ 표본이 다르면 그에 따라 과자 10개의 과자 1개당 당류 함유량의 표본평균도 달라질 것이다. 따라서 추측한 값이 모평균과 같다고 확신할 수는 없지만 모평균은 추측한 값에 가까울 것이라고 기대할 수 있다.

238) $38.08 \le m \le 45.92$(단위 : 분)
$n=25$, $\overline{x}=42$, $\sigma=10$이므로 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은
$$42-1.96\times\frac{10}{\sqrt{25}} \le m \le 42+1.96\times\frac{10}{\sqrt{25}}$$
$$38.08 \le m \le 45.92$$

239) $100.614 \le m \le 100.786$(단위 : m)

240) $7.755 \le m \le 8.245$ (단위 : 시간)
$n=64$, $\overline{x}=8$, $s=1$이고 표본의 크기 n이 충분히 크므로 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은
$$8-1.96\times\frac{1}{\sqrt{64}} \le m \le 8+1.96\times\frac{1}{\sqrt{64}}$$
$$7.755 \le m \le 8.245$$

241) $14.439 \le m \le 16.761$(단위 : km)

242) ㈎ 참 ㈏ 참 ㈐ 거짓

243) 생략

244) (1) 표본조사 (2) 전수조사

245) $\mathrm{E}(\overline{X})=56$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1}{4}$, $\sigma(\overline{X})=\frac{1}{2}$

246) 0.9544

247) $14.02 \le m \le 15.98$

248) 1600

249) $\frac{8}{3}$

250) 2500
문제이해 $\mathrm{E}(\overline{X})=m$, $\sigma(\overline{X})=\frac{5}{\sqrt{n}}$이므로
$\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \left(\frac{5}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다. ▶ 30%
해결과정 따라서 확률변수 $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{5}{\sqrt{n}}}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로
$$\mathrm{P}(|\overline{X}-m| \le 0.2)=0.9544$$
에서
$$\mathrm{P}\left(|Z| \le 0.2\times\frac{\sqrt{n}}{5}\right)=0.9544$$
$$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{\sqrt{n}}{25}\right)=0.4772$$ ▶ 40%
답구하기 이때 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)=0.4772$이므로
$$\frac{\sqrt{n}}{25}=2,\ \text{즉}\ n=2500$$ ▶ 30%

251) 36

252) $149.02 \le m \le 150.98$(단위 : kg)

253) 62
문제이해 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이를 l이라 하면
$$l=2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$ ▶ 30%
해결과정 따라서 $l \le \frac{1}{2}\sigma$이므로
$$2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \frac{1}{2}\sigma,\quad \sqrt{n} \ge 2\times2\times1.96$$
$$\sqrt{n} \ge 7.84,\ \text{즉}\ n \ge 61.4656$$ ▶ 60%
답구하기 따라서 n의 최솟값은 62이다. ▶ 10%

254) $\frac{26}{5}$
주머니에서 1개의 공을 임의추출할 때, 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하면 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	4	5	6	7	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

$\mathrm{E}(X)=4\times\frac{2}{5}+5\times\frac{3}{10}+6\times\frac{1}{5}+7\times\frac{1}{10}$

$=5$

$\mathrm{V}(X)=(-1)^2\times\frac{2}{5}+0^2\times\frac{3}{10}+1\times\frac{1}{5}+2^2\times\frac{1}{10}$

$=1$

$\sigma(X)=1$

$n=100$이므로 표본평균 $\overline{X}$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(5,\ \left(\frac{1}{10}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 확률변수 $Z=\frac{\overline{X}-5}{\frac{1}{10}}=10(\overline{X}-5)$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\geq k)=0.0228$에서

$\mathrm{P}(Z\geq 10(k-5))=0.0228$

$\mathrm{P}(0\leq Z\leq 10(k-5))=0.5-0.0228$

$=0.4772$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)=0.4772$이므로

$10(k-5)=2$, 즉 $k=\frac{26}{5}$

255) 8

$\mathrm{E}(\overline{X})=m$, $\sigma(\overline{X})=\frac{4}{m}$이므로 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{4}{m}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 확률변수 $Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{4}{m}}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(m-1\leq\overline{X}\leq m+1)=0.9544$에서

$\mathrm{P}\left(-\frac{m}{4}\leq Z\leq\frac{m}{4}\right)=0.9544$

$\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{m}{4}\right)=0.4772$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)=0.4772$이므로

$\frac{m}{4}=2$, 즉 $m=8$

256) 0.02

한 상자에 들어 있는 초콜릿 4개의 평균 무게를 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(30,\ \left(\frac{4}{\sqrt{4}}\right)^2\right)$, 즉 $\mathrm{N}(30,\ 2^2)$을 따르므로 출하한 상자가 불량품일 확률은

$\mathrm{P}(4\overline{X}\leq 109.76)$

$=\mathrm{P}(\overline{X}\leq 27.44)$

$=\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{27.44-30}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\leq -1.28)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.28)$

$=0.5-0.4$

$=0.1$

한편, 초콜릿 상자 400개 중에서 불량품인 상자의 수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(400,\ 0.1)$을 따른다.

이때 n이 충분히 크므로 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 6^2)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(Y\leq 28)=\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{28-40}{6}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\leq -2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)$

$=0.5-0.48$

$=0.02$

257) ⑤

258) ④

259) ①

260) ③

261) ③

262) ②

263) 125

264) 0.9772

정규분포를 따르는 두 확률변수 X와 Y의 표준편차가 같으므로 두 확률밀도함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 대칭축의 위치는 다르지만 모양이 같다.

이때 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 3^2)$을 따르고 조건 (가)에서

$\mathrm{P}(X\leq 10)\leq\mathrm{P}(Y\geq 25)$이므로

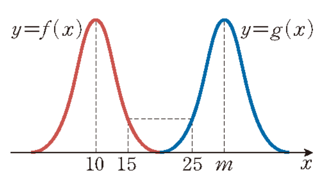
$0.5\leq\mathrm{P}(Y\geq 25)$,

$m\geq 25$

또, 조건 (나)에서

$f(15)=g(25)$

이므로



$m=25+(15-10)=30$

따라서 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 3^2)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\le 36)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{36-30}{3}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le 2)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.9772\end{aligned}$$

265) 0.1587

266) 9974

267) 10

268) 39000

A 타이어의 수명을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(40000,\ 2000^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\frac{X-40000}{2000}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 임의로 택한 A 타이어의 수명이 43000 km 이상일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 43000)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{43000-40000}{2000}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)\end{aligned}$$

B 타이어의 수명을 확률변수 Y라 하면 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(45000,\ 4000^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\frac{Y-45000}{4000}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 임의로 택한 B 타이어의 수명이 a km 이하일 확률은

$$\mathrm{P}(Y\le a)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{a-45000}{4000}\right)$$

이때 $\mathrm{P}(Z\ge 1.5)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{a-45000}{4000}\right)$이므로

$$1.5=-\frac{a-45000}{4000},\qquad 6000=-a+45000$$

즉, $a=39000$

269) 77점

270) 0.0228

271) 0.1587

272) $\frac{3}{5}$

A 제품 4개의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 표준편차는

$$\mathrm{E}(\overline{X})=m,\ \sigma(\overline{X})=\frac{2}{\sqrt{4}}=1$$

이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 1^2)$을 따른다.

따라서 임의로 택한 A 제품 4개의 평균 무게가 k 이상일 확률은

$$\mathrm{P}(\overline{X}\ge k)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{k-m}{1}\right)$$

이다.

B 제품 4개의 무게의 평균을 $\overline{Y}$라 하면 표본평균 $\overline{Y}$의 평균과 표준편차는

$$\mathrm{E}(\overline{Y})=3m,\ \sigma(\overline{Y})=\frac{4}{\sqrt{4}}=2$$

이므로 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}(3m,\ 2^2)$을 따른다.

따라서 임의로 택한 B 제품 4개의 평균 무게가 k 이하일 확률은

$$\mathrm{P}(\overline{Y}\le k)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{k-3m}{2}\right)$$

이다.

이때 $\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{k-m}{1}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{k-3m}{2}\right)$이므로

$$\frac{k-m}{1}=-\frac{k-3m}{2},\qquad 2k-2m=-k+3m$$

$$3k=5m,\ \text{즉}\ \frac{m}{k}=\frac{3}{5}$$

273) 0.025

모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간 $a\le m\le b$에서 $b-a=11.76$이므로

$$2\times 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=11.76,\ \text{즉}\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}=3$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(\overline{X}\ge m+5.88)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{m+5.88-m}{3}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1.96)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.96)\\&=0.5-0.4750\\&=0.025\end{aligned}$$

274) 100

275) $\frac{25}{44}$

문제이해 공에 적힌 수를 4로 나눈 나머지가 r인 숫자의 집합을 A_r라 하면

$A_0=\{4,\ 8,\ 12\}$,
$A_1=\{1,\ 5,\ 9\}$,
$A_2=\{2,\ 6,\ 10\}$,
$A_3=\{3,\ 7,\ 11\}$ ▶ 30%

해결과정

(i) $X=1$인 경우
꺼낸 공에 적힌 수가 A_0의 원소이어야 하므로

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$ ▶ 20%

(ii) $X=2$인 경우
꺼낸 공에 적힌 수가 각각 A_1, A_3의 원소이거나, 각각 A_3, A_1의 원소이거나, 두 개의 원소가 모두 A_2의 원소이어야 하므로

$\mathrm{P}(X=2)$
$=2\times\left(\frac{3}{12}\times\frac{3}{11}\right)+\frac{3}{12}\times\frac{2}{11}$
$=\frac{2}{11}$ ▶ 20%

(i), (ii)에서

$\mathrm{P}(X\le 2)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$
$=\frac{1}{4}+\frac{2}{11}$
$=\frac{19}{44}$ ▶ 20%

답구하기 따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X\ge 3)=1-\mathrm{P}(X\le 2)$
$=\frac{25}{44}$ ▶ 10%

276) 25

문제이해 $\mathrm{P}(X=3)={}_{10}\mathrm{C}_3p^3(1-p)^7$,
$\mathrm{P}(X=4)={}_{10}\mathrm{C}_4p^4(1-p)^6$ ▶ 30%

해결과정 $\mathrm{P}(X=3)=\frac{4}{5}\mathrm{P}(X=4)$에서

${}_{10}\mathrm{C}_3p^3(1-p)^7=\frac{4}{5}\times{}_{10}\mathrm{C}_4p^4(1-p)^6$,

$\frac{10!}{3!7!}p^3(1-p)^7=\frac{4}{5}\times\frac{10!}{4!6!}p^4(1-p)^6$,

$5-5p=7p$, 즉 $p=\frac{5}{12}$ ▶ 40%

답구하기 따라서 $\mathrm{E}(X)=10\times\frac{5}{12}=\frac{25}{6}$이므로

$\mathrm{E}(6X)=6\times\frac{25}{6}=25$ ▶ 30%

277) 3

해결과정 $Z=\frac{X-7}{3}$로 놓으면

$\mathrm{P}(2a-5\le X\le 4a+1)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{2a-12}{3}\le Z\le\frac{4a-6}{3}\right)$ ▶ 30%

주어진 확률이 최대이려면 $\frac{2a-12}{3}$와 $\frac{4a-6}{3}$이 직선 $Z=0$에 대하여 대칭이어야 한다. ▶ 40%

답구하기 즉, $\frac{2a-12}{3}=-\frac{4a-6}{3}$이므로

$a=3$ ▶ 30%

278) 16

문제이해 표본평균을 $\overline{X}$, 표본의 크기를 n이라 하면, 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{X}-1.96\times\frac{80}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+1.96\times\frac{80}{\sqrt{n}}$

이므로

$|m-\overline{X}|\le 1.96\times\frac{80}{\sqrt{n}}$ ▶ 40%

해결과정 모평균과 표본평균의 차가 39.2 m 이하가 되려면

$1.96\times\frac{80}{\sqrt{n}}\le 39.2$, $\sqrt{n}\ge 4$

즉, $n\ge 16$ ▶ 40%

답구하기 따라서 표본의 크기의 최솟값은 16이다. ▶ 20%