25학년도 수능대비
수능CCTV

수학2

수학자료실 http://www.math114.net
수학세상 http://himath114.tistory.com

개념 1. 좌극한과 우극한

(1) 좌극한(값)

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a보다 작으면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 α를 $x=a$에서 $f(x)$의 좌극한이라 하며 기호로는 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \to a-} f(x) = \alpha$$

(2) 우극한(값)

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a보다 크면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 β에 한없이 가까워지면 β를 $x=a$에서 $f(x)$의 우극한이라 하고 기호로는 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \beta$$

(3) (좌극한)=(우극한)일 때, 극한값이 존재한다.

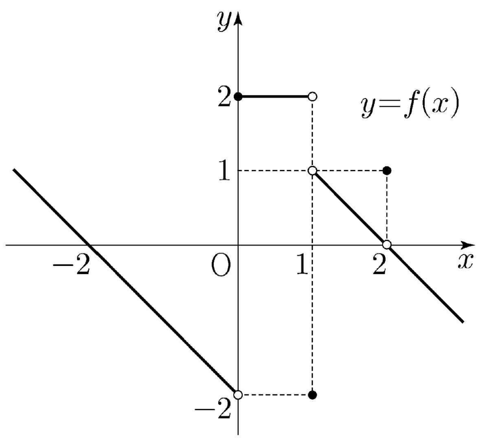
$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = \alpha \Longleftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ (극한값 존재)

(4) (좌극한)$\neq$(우극한)일 때, 극한값이 없다.

$\lim_{x \to a+} f(x) \neq \lim_{x \to a-} f(x) \longrightarrow \lim_{x \to a} f(x)$는 극한값이 없다.

1. 대표 기출 | 3점 | | 22년 평가원 | 1st 2nd 3rd

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

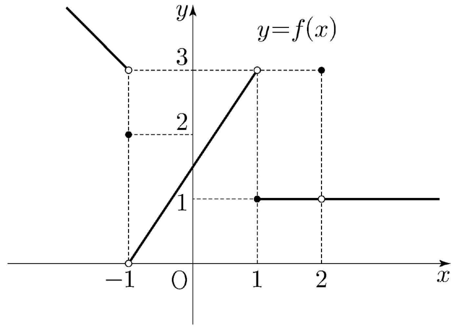


$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

2. 대표 기출 | 3점 | | 21년 수능 | 1st 2nd 3rd

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

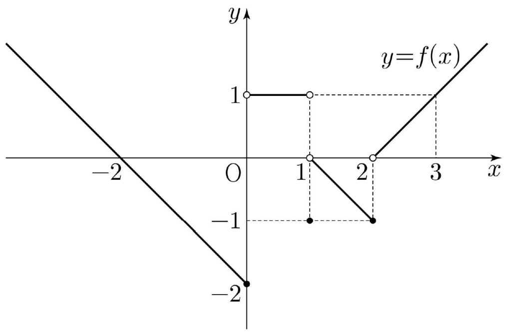


$\lim_{x \to -1-} f(x) + \lim_{x \to 2} f(x)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

3. 대표 기출 | 3점 | | 21년 평가원 | 1st 2nd 3rd

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

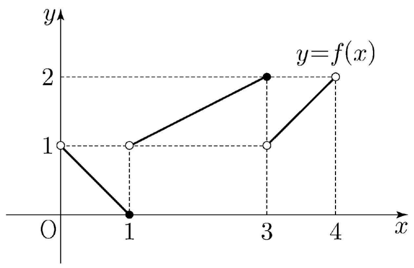


$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 2+} f(x)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

4. 대표 기출 | 3점 | | 20년 평가원 | 1st 2nd 3rd

열린구간 $(0,\ 4)$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

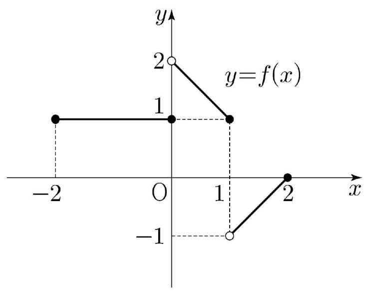


$\lim\limits_{x\to1+}f(x)-\lim\limits_{x\to3-}f(x)$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

5. 대표 기출 | 3점 | | 20년 평가원 | 1st 2nd 3rd

닫힌구간 $[-2, 2]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

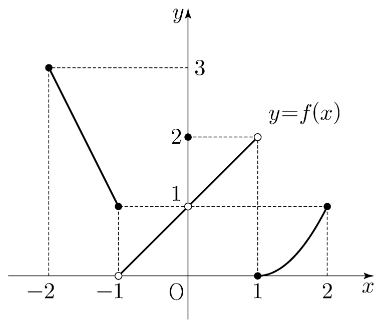


$\lim\limits_{x\to0+}f(x)+\lim\limits_{x\to2-}f(x)$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

6. 대표 기출 | 3점 | | 19년 평가원 | 1st 2nd 3rd

닫힌 구간 $[-2,\ 2]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

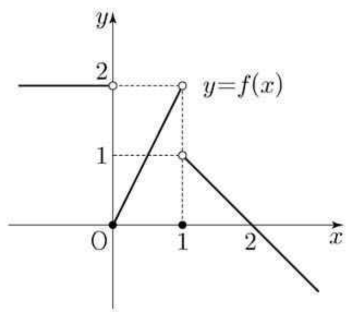


$\lim\limits_{x\to-1+}f(x)+\lim\limits_{x\to1-}f(x)$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

7. 대표 기출 | 3점 | | 19년 수능 | 1st 2nd 3rd

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

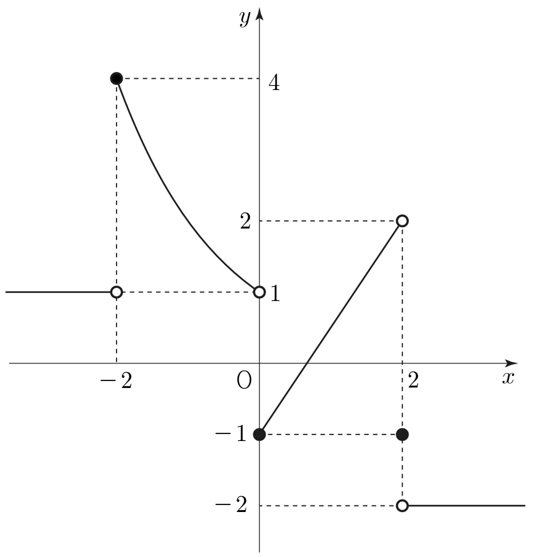


$\lim\limits_{x\to0+}f(x)-\lim\limits_{x\to1-}f(x)$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

8. 대표 기출 | 3점 | | 19년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

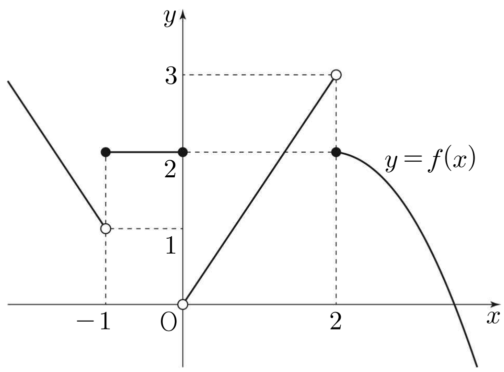


$\lim_{x\to -2+} f(x)+\lim_{x\to 2-} f(x)$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

9. 유사 기출 | 3점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

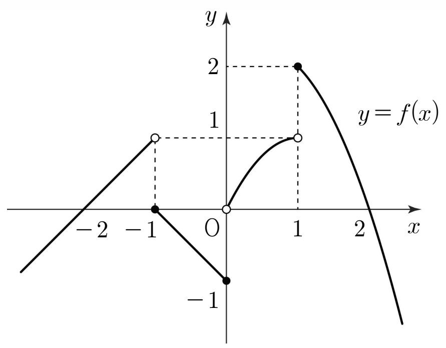


$\lim_{x\to -1+} f(x)+\lim_{x\to 2-} f(x)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

10. 유사 기출 | 3점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

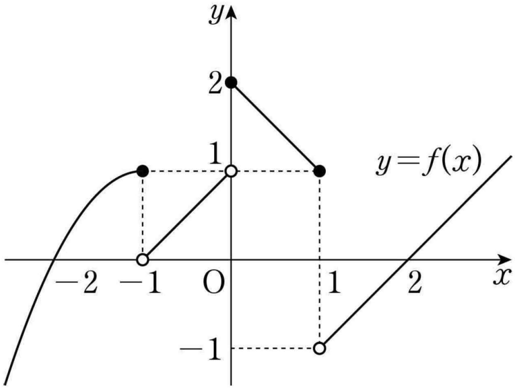


$\lim_{x\to -1+} f(x)+\lim_{x\to 1-} f(x)$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

11. 유사 기출 | 3점 | | 22년 교육청 |

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

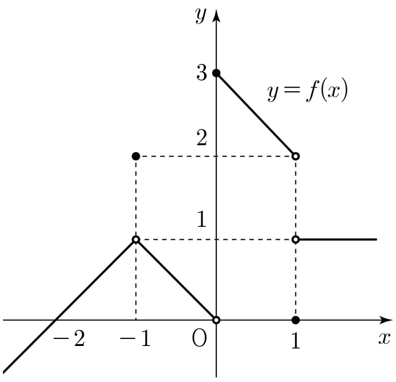


$\lim_{x\to-1+}f(x)+\lim_{x\to1-}f(x)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

12. 유사 기출 | 3점 | | 22년 교육청 |

함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같다.

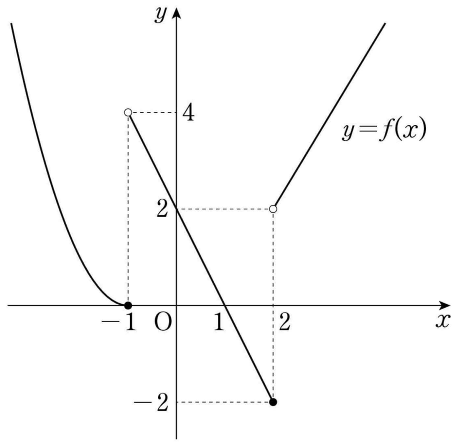


$\lim_{x\to-1}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

13. 유사 기출 | 3점 | | 22년 교육청 |

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

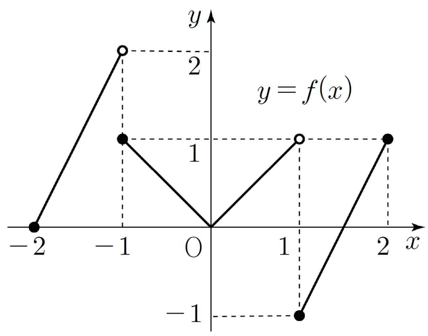


$\lim_{x\to-1+}f(x)+\lim_{x\to2-}f(x)$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

14. 유사 기출 | 3점 | | 21년 교육청 |

닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

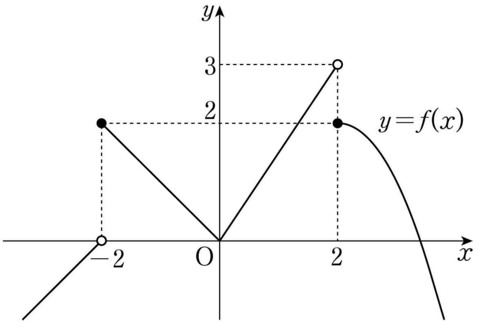


$\lim_{x\to-1-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

15. 유사 기출 | 3점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

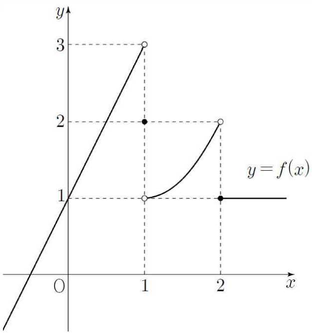


$\lim_{x\to-2+} f(x)+\lim_{x\to2-} f(x)$의 값은?

① 6 ② 5 ③ 4
④ 3 ⑤ 2

16. 유사 기출 | 3점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

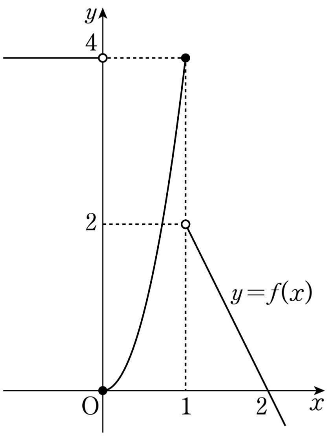


$\lim_{x\to1-} f(x)+\lim_{x\to2+} f(x)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

17. 유사 기출 | 3점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

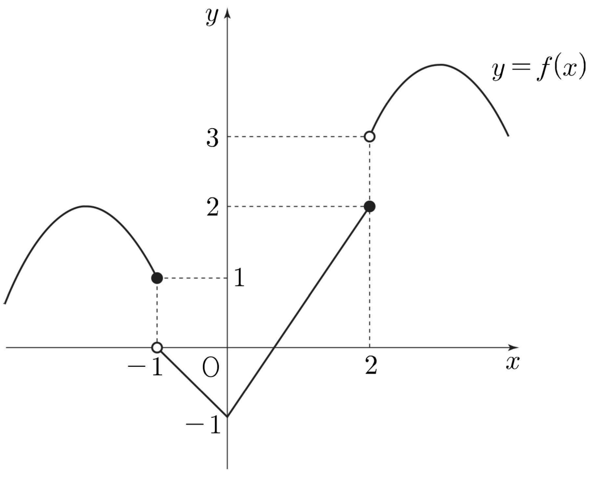


$\lim_{x\to1+} f(x)-\lim_{x\to0-} \dfrac{f(x)}{x-1}$ 의 값은?

① -6 ② -3 ③ 0
④ 3 ⑤ 6

18. 유사 기출 | 3점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

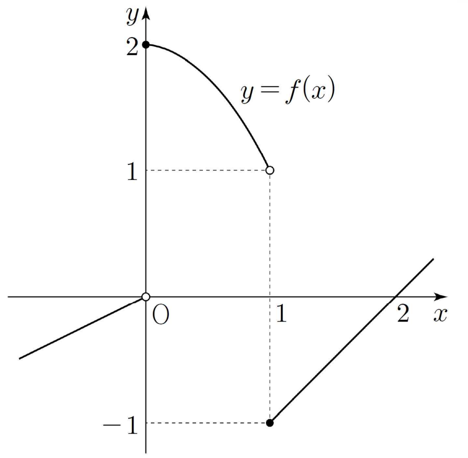


$f(-1)+\lim_{x\to2+} f(x)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

19. 유사 기출 | 3점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

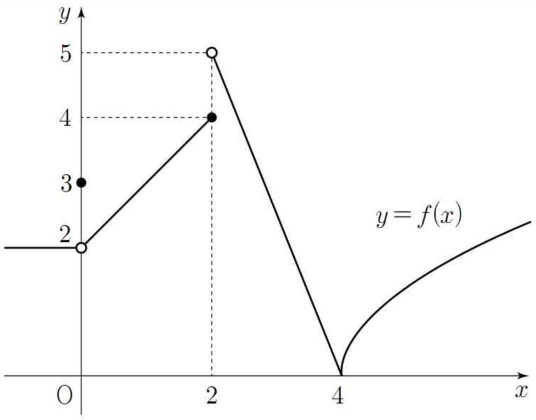


$\lim_{x\to 0-} f(x) + \lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

20. 유사 기출 | 3점 | | 19년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

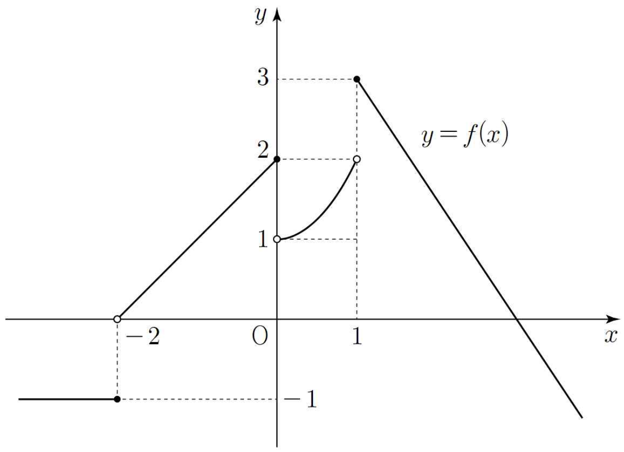


$f(0) + \lim_{x\to 2+} f(x)$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

21. 유사 기출 | 3점 | | 19년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

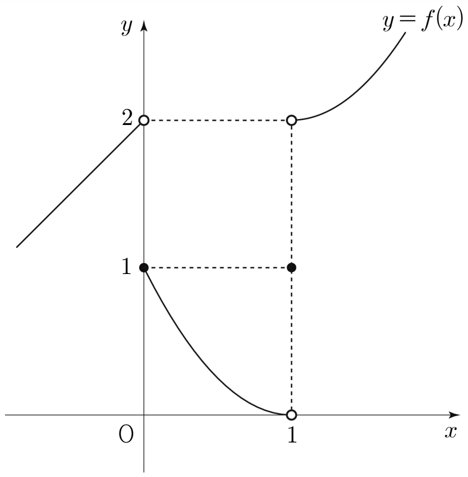


$\lim_{x\to -2-} f(x) + \lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

22. 유사 기출 | 3점 | | 19년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

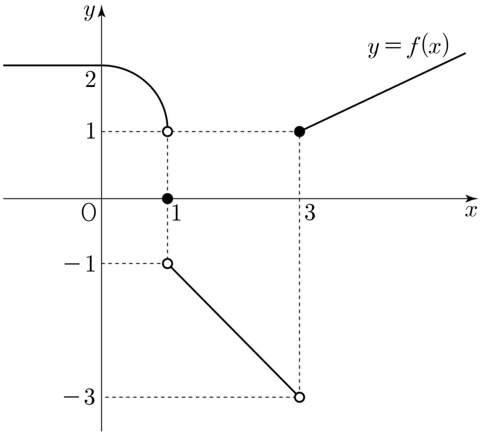


$f(0) + \lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

23. 유사 기출 | 3점 | | 19년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$f(3)+\lim_{x \to 1-} f(x)$의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0

④ 1　　⑤ 2

개념 2. 극한값 구하기

(1) $\frac{0}{0}$꼴의 극한값

① 유리함수의 경우
분모, 분자를 인수분해하고 약분하여 부정형이 되는 원인을 없앤다.

② 무리함수의 경우
분모 또는 분자 중 $\sqrt{\ }$ 가 있는 쪽(경우에 따라서는 분모와 분자를 모두)를 유리화하여 부정형이 되는 원인을 없앤다.

(2) $\frac{\infty}{\infty}$꼴의 극한값

분모, 분자를 각각 분모의 최고차항으로 나누어서 부정형이 되는 원인을 없앤다.

(3) $\infty-\infty$꼴의 극한값
 근호가 없는 다항식은 최고차항으로 묶고, 근호가 있을 때는 유리화한다.

(4) $\infty\times 0$ 꼴의 극한값

통분 또는 유리화하여 $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\infty\times c$, $\frac{c}{\infty}$(c는 유한확정값)으로 변형할 수 있는지 조사한다.

[보충학습]

(1) $\frac{0}{0}$꼴과$\infty\times 0$꼴에서0은 수0이 아니라0에 가까이 가는 것을 뜻한다.
(2) 여러 가지 부정형의 극한값

① $\infty\cdot c$, $\frac{\infty}{c}$의 꼴 : $c>0$이면$+\infty$, $c<0$이면$-\infty$

② $\frac{c}{\infty}$의 꼴 : 0

③ $\frac{c}{0}$의 꼴 :

$$\begin{cases} c>0\text{일 때 분모}\to+0\text{이면 }+\infty,\ \text{분모}\to-0\text{이면 }-\infty \\ c<0\text{일 때 분모}\to+0\text{이면 }-\infty,\ \text{분모}\to-0\text{이면 }+\infty \end{cases}$$

(3) 무한소(0)과 무한대(∞)의 관계(단,c는 상수)

① $\frac{c}{\infty}=0$ ② $\frac{c}{0}=\begin{cases} \infty & (a>0) \\ -\infty & (a<0) \end{cases}$

24. 대표 기출 | 2점 | | 22년 수능 | 1st 2nd 3rd

$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-2}+3x}{x+5}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

25. 대표 기출 | 2점 | | 20년 수능 | 1st 2nd 3rd

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x-2}$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

26. 대표 기출 | 3점 | | 20년 평가원 | 1st 2nd 3rd

$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-6x}{x-2}$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

27. 대표 기출 | 3점 | | 20년 평가원 | 1st 2nd 3rd

$\lim_{x \to -1} \frac{x^2+9x+8}{x+1}$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

28. 대표 기출 | 4점 | | 20년 수능 | 1st 2nd 3rd

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)+g(x)}{x} = 3, \ \lim_{x \to 0} \frac{f(x)+3}{xg(x)} = 2$$

을 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여 $h'(0)$의 값은?

① 27 ② 30 ③ 33
④ 36 ⑤ 39

29. 대표 기출 | 3점 | | 21년 평가원 | 1st 2nd 3rd

삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

30. 대표 기출 | 4점 | | 19년 수능 | 1st 2nd 3rd

상수항과 계수가 모두 정수인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 최댓값은?

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)g(x)}{x^3} = 2$

(나) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)g(x)}{x^2} = -4$

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

31. 대표 기출 | 3점 | | 19년 교육청 | 1st 2nd 3rd

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)-3x^2}{x} = 10, \ \lim_{x \to 1} f(x) = 20$$

을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

32. 유사 기출 | 3점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2}$의 값을 구하시오.

33. 유사 기출 | 2점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

$\lim_{x \to 0} \frac{x^2+9x}{x}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

34. 유사 기출 | 3점 | | 22년 교육청 | 1st 2nd 3rd

$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{2x-5}-1}{x-3}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

35. 유사 기출 | 2점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

$\lim_{x \to 2}(x^2+5)$의 값은?

① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

36. 유사 기출 | 2점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

$\lim_{x \to 0}(x^2+x+3)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

37. 유사 기출 | 2점 | | 10년 교육청 | 1st 2nd 3rd

$\lim_{x \to -\infty} \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+1}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

38. 유사 기출 | 3점 | | 19년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)$가 $\lim_{x \to 1}(x-1)f(x)=3$을 만족시킬 때, $\lim_{x \to 1}(x^2-1)f(x)$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

39. 유사 기출 | 3점 | | 19년 교육청 | 1st 2nd 3rd

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여

$\lim_{x \to 5} \frac{f(x)-x}{x-5}=8$일 때, $f(7)$의 값을 구하시오.

40. 유사 기출 | 3점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to \infty} \frac{xf(x)-2x^3+1}{x^2}=5,\ f(0)=1$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

41. 유사 기출 | 3점 | | 22년 교육청 | 1st 2nd 3rd

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^2}=2,\ \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1}=3$$

을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

42. 유사 기출 | 3점 | | 19년 교육청 | 1st 2nd 3rd

$\lim_{x \to 2}(x^2+5)$의 값을 구하시오.

개념 3. 함수의 극한의 성질

(1) 함수의 극한에 관한 기본 성질

$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$(α, β는 상수)일 때

① $\lim_{x\to a} kf(x)=k\lim_{x\to a} f(x)=k\alpha$ (k는 상수)

②

$\lim_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)=\alpha\pm\beta$ (복부호동순)

③ $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)=\alpha\beta$

④ $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ $(g(x)\neq 0,\ \beta\neq 0)$

개념 4. 극한값의 대소

a에 가까운 값x에 대하여 항상

① $f(x)\leqq g(x)$이고

$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}g(x)=\beta$이면$\alpha\leqq\beta$

② $f(x)\leqq g(x)\leqq h(x)$이고

$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} h(x)=\alpha$이면$\lim_{x\to a} g(x)=\alpha$

개념 5. 미정계수의 결정

(1) $\dfrac{\infty}{\infty}$의 꼴

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$($\alpha$는 유한확정값)일 때

$\alpha\neq 0$이고 $\{f(x)$의 차수$\}=\{g(x)$의 차수$\}$이면

극한값α는 최고차항의 계수의 비

(2) $\dfrac{0}{0}$의 꼴

$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$($\alpha$는 유한확정값)일 때

$$\begin{cases} x\to a\text{일 때, } \lim_{x\to a} g(x)=0\text{이면 } \lim_{x\to a} f(x)=0 \\ x\to a\text{일 때, } \lim_{x\to a} f(x)=0\text{이면 } \lim_{x\to a} g(x)=0 \end{cases}$$

43. 대표 기출 | 2점 | | 07년 평가원 | 1st 2nd 3rd

두 상수 a, b에 대하여 $\lim_{x\to 1}\dfrac{ax+b}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$일 때, ab의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1
④ 1 ⑤ 2

44. 대표 기출 | 2점 | | 06년 수능 | 1st 2nd 3rd

두 상수 a, b가 $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-(a+2)x+2a}{x^2-b}=3$을 만족시킬 때, $a+b$의 값은?

① -6 ② -4 ③ -2
④ 0 ⑤ 2

45. 유사 기출 | 3점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

두 상수 a, b에 대하여 $\lim_{x \to -1} \frac{x^2+4x+a}{x+1} = b$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

46. 유사 기출 | 3점 | | 06년 교육청 | 1st 2nd 3rd

다항함수 $y=f(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)-x^2}{ax+1} = 2$

(나) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{f(x)} = \frac{1}{4}$

이 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

47. 유사 기출 | 3점 | | 19년 교육청 | 1st 2nd 3rd

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 1,\ \lim_{x \to 2} \{2f(x)+g(x)\} = 8$$

을 만족시킬 때, $\lim_{x \to 2} g(x)$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

48. 유사 기출 | 3점 | | 19년 교육청 | 1st 2nd 3rd

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$(x-1)f(x) = x^3+ax+b$$

를 만족시킨다. $f(1)=4$일 때, $a \times b$의 값은?
(단, a, b는 상수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

49. 유사 기출 | 3점 | | 19년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=2x^2+ax+b$에 대하여 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 5$일 때, $f(2)$의 값은? (단, a와 b는 상수이다.)

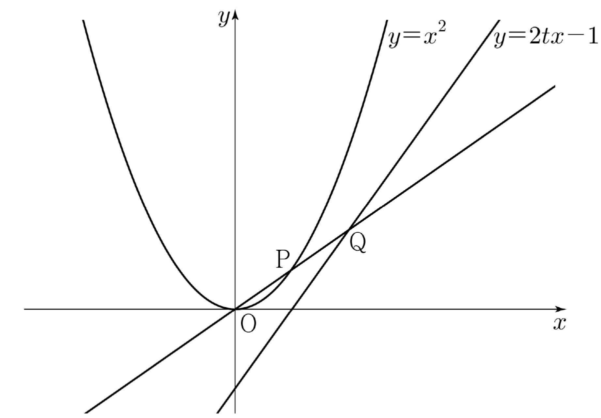
① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

개념 6. 함수극한의 활용

도형 또는 함수의 그래프가 주어진 함수의 극한의 활용 문제는 주어진 조건을 적절히 이용하여 관계식을 정확하게 구하는 것이 문제 해결의 핵심이다.
<참고> 중학도형이나 고등수학에서 도형의 방정식 개념을 잘 숙지해 두어야 한다.

50. 대표 기출 | 4점 | | 23년 평가원 |

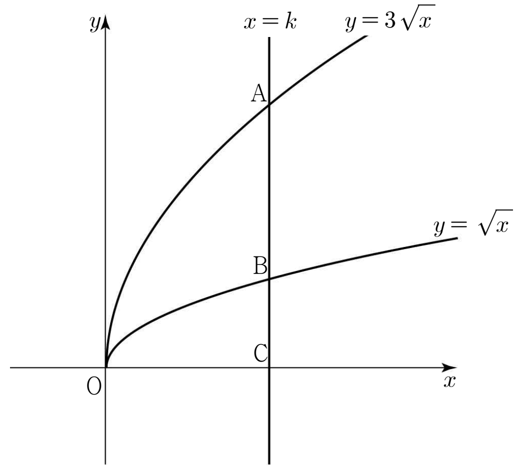
그림과 같이 실수 t $(0<t<1)$에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 중에서 직선 $y=2tx-1$과의 거리가 최소인 점을 P라 하고, 직선 OP가 직선 $y=2tx-1$과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{t\to1-}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{1-t}$의 값은? (단, O는 원점이다.)



① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$
④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

51. 대표 기출 | 3점 | | 13년 교육청 |

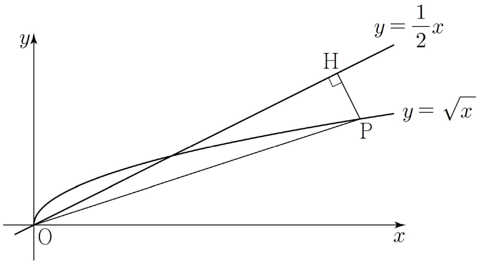
그림과 같이 두 함수 $y=3\sqrt{x}$, $y=\sqrt{x}$의 그래프와 직선 $x=k$가 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $x=k$가 x축과 만나는 점을 C라 하자. $\lim_{k\to+0}\frac{\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{OB}}-\overline{\mathrm{BC}}}$의 값은? (단, $k>0$이고, O는 원점이다.)



① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

52. 유사 기출 | 3점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{t})$ $(t>4)$에서 직선 $y=\frac{1}{2}x$에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{OH}}^2}{\overline{\mathrm{OP}}^2}$의 값은? (단, O는 원점이다.)



① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{11}{15}$

④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{13}{15}$

개념 7. 함수의 연속과 불연속

(1) 함수의 연속과 불연속

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 세 조건을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

① $x=a$에서 함수 $f(x)$가 정의되어 있다. ⇨ $f(a)$의 값이 존재한다.

② 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재한다. ⇨

$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x)$

③ $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ ⇨ ① = ②

(2) $x=a$에서 불연속

① $x=a$에서의 함숫값 $f(a)$가 존재하지 않는다.

② 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재하지 않는다.

$\lim_{x\to a-0} f(x) \neq \lim_{x\to a+0} f(x)$

③ 극한값과 함숫값이 일치하지 않는다.

$\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$

(2) 구간에서의 연속함수

구간 (a, b)를 개구간, $[a, b]$를 폐구간이라고 한다. 또, 실수 전체의 집합을 $(-\infty, \infty)$로 나타낸다.

함수 $f(x)$가 어떤 구간의 모든 점에서 연속이면 $f(x)$는 그 구간에서 연속 또는 그 구간에서 연속인 함수라 한다.

(3) 여러 가지 함수의 연속성

① 다항함수 : $f(x)$

⇨ $(-\infty, \infty)$에서 연속

② 분수함수 : $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

⇨ $f(x)$, $g(x)$가 연속일 때 $g(x) \neq 0$인 x의 범위에서 연속

③ 무리함수 : $\sqrt{f(x)}$

⇨ $f(x)$가 연속일 때 $f(x) \geq 0$인 x의 범위에서 연속

(4) 연속함수의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$ 또는 구간 $[a, b]$에서 연속이면, 다음 각 함수도 $x=a$ 또는 $[a, b]$에서 연속이다.

(1) $f(x) \pm g(x)$

(2) $kf(x)$(단, k는 상수)

(3) $f(x) \cdot g(x)$

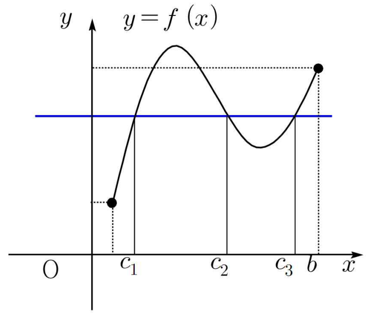
(4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$(단, $g(x) \neq 0$)

(5) $(f \circ g)(x)$(단, $g(x)$의 치역이 $f(x)$의 정의역 안에 포함)

개념 8. 연속함수의 응용

(1) 함수의 최대최소

함수 $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.(역은 성립하지 않는다.)

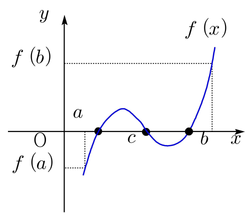


* 개구간에서는 최댓값과 최솟값이 존재하지 않을 수도 있다.

* 불연속 함수는 최댓값과 최솟값이 존재하지 않을 수도 있다.

(2) 사잇값 정리

$y=k$ 함수 $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.



(3) 사잇값 정리의 활용

함수 $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 다르면 즉, $f(a)f(b) < 0$이면, 방정식 $f(x)=0$은 a와 b 사이에 적어도 하나의 실근을 가진다

53. 대표 기출 | 3점 | | 23년 평가원 | 1st 2nd 3rd

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 4 - f(1)$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

54. 대표 기출 | 3점 | | 23년 수능 | 1st 2nd 3rd

함수

$$f(x) = \begin{cases} 3x - a & (x < 2) \\ x^2 + a & (x \geq 2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

55. 대표 기출 | 3점 | | 22년 평가원 | 1st 2nd 3rd

두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} x + a & (x < -1) \\ x & (-1 < x < 3) \\ bx - 2 & (x \geq 3) \end{cases}$$

이다. 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값은?

① $\frac{7}{3}$　② $\frac{8}{3}$　③ 3　④ $\frac{10}{3}$　⑤ $\frac{11}{3}$

56. 대표 기출 | 3점 | | 22년 평가원 | 1st 2nd 3rd

함수

$$f(x) = \begin{cases} -2x + a & (x \leq a) \\ ax - 6 & (x > a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은?

① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

57. 대표 기출 | 4점 | | 21년 수능 | 1st 2nd 3rd

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2=0$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 최댓값이 1이고 최솟값이 0일 때, $f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$

④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

58. 대표 기출 | 3점 | | 21년 평가원 | 1st 2nd 3rd

함수

$$f(x)=\begin{cases} 2x+a & (x\le -1) \\ x^2-5x-a & (x>-1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

59. 대표 기출 | 4점 | | 20년 수능 | 1st 2nd 3rd

함수

$$f(x)=\begin{cases} -3x+a & (x\le 1) \\ \dfrac{x+b}{\sqrt{x+3}-2} & (x>1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 상수이다.)

60. 대표 기출 | 3점 | | 21년 평가원 | 1st 2nd 3rd

함수

$$f(x)=\begin{cases} -2x+6 & (x<a) \\ 2x-a & (x\ge a) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은?

① 2 ② 4 ③ 6

④ 8 ⑤ 10

61. 대표 기출 | 3점 | | 19년 평가원 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이고

$\lim_{x\to 2-} f(x)=a+2$, $\lim_{x\to 2+} f(x)=3a-2$

를 만족시킬 때, $a+f(2)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

62. 대표 기출 | 4점 | | 19년 평가원 | 1st 2nd 3rd

두 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2x+3 & (x<0) \\ -2x+2 & (x\geq 0) \end{cases}, \quad g(x)=\begin{cases} 2x & (x<a) \\ 2x-1 & (x\geq a) \end{cases}$$

가 있다. 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

63. 유사 기출 | 3점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-ax+1 & (x<2) \\ -x+1 & (x\geq 2) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

64. 유사 기출 | 3점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

두 자연수 m, n에 대하여 함수 $f(x)=(x-m)(x-n)$이

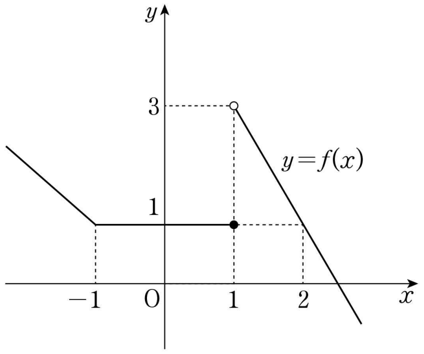
$f(1)f(3)<0$, $f(3)f(5)<0$

을 만족시킬 때, $f(6)$의 값은? [3점]

① 30 ② 36 ③ 42
④ 48 ⑤ 54

65. 유사 기출 | 3점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

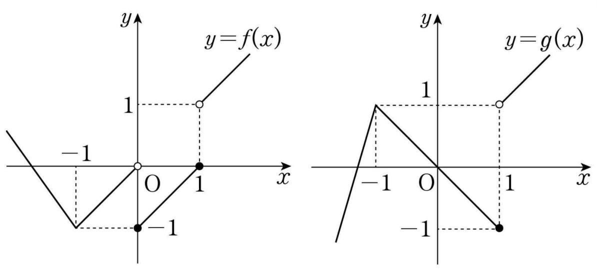


함수 $(x^2+ax+b)f(x)$가 $x=1$에서 연속일 때, $a+b$의 값은?
(단, a, b는 실수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

66. 유사 기출 | 3점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같다.



<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $\lim_{x\to 1-} f(x)g(x)=-1$

ㄴ. $f(1)g(1)=0$

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

67. 유사 기출 | 3점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+3x+a}{x-2} & (x<2) \\ -x^2+b & (x \geq 2) \end{cases}$$

가 $x=2$에서 연속일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

68. 유사 기출 | 3점 | | 22년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & (x<2) \\ x^2-ax+3 & (x \geq 2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

69. 유사 기출 | 3점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+ax+b}{x-3} & (x<3) \\ \dfrac{2x+1}{x-2} & (x \geq 3) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a-b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

70. 유사 기출 | 3점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수

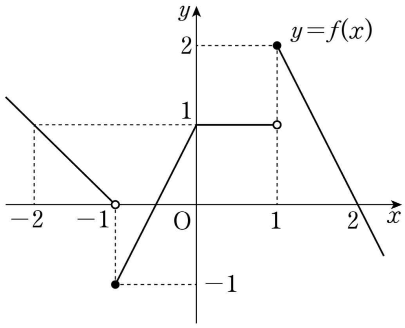
$$f(x)=\begin{cases} -2x+1 & (x<1) \\ x^2-ax+4 & (x \geq 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

① -6 ② -3 ③ 0
④ 3 ⑤ 6

71. 유사 기출 | 3점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)=f(x)g(x)$가 구간 $(-2, 2)$에서 연속일 때, $g(5)$의 값을 구하시오.

72. 유사 기출 | 3점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수

$$f(x)=\begin{cases} ax+3 & (x \neq 1) \\ 5 & (x=1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

73. 유사 기출 | 3점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

모든 실수에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$(x-1)f(x)=x^2-3x+2$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

74. 유사 기출 | 3점 | | 19년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<2) \\ x^2-4x+a & (x \geq 2) \end{cases}$$

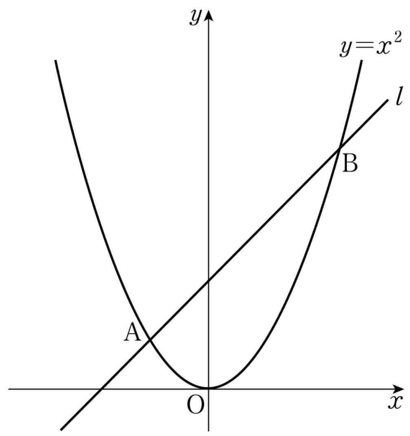
가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

STEP2

75. 고 난 도 | 4점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

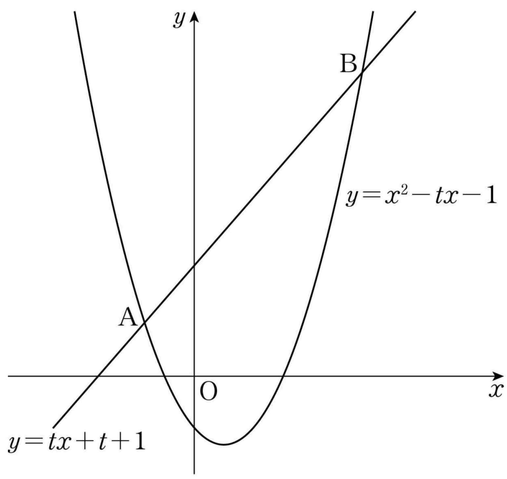
곡선 $y=x^2$과 기울기가 1인 직선 l이 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 양의 실수 t에 대하여 선분 AB의 길이가 $2t$가 되도록 하는 직선 l의 y절편을 $g(t)$라 할 때, $\lim_{t \to \infty} \frac{g(t)}{t^2}$의 값은?



① $\frac{1}{16}$　② $\frac{1}{8}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ 1

76. 고난도 | 4점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

실수 t $(t>0)$에 대하여 직선 $y=tx+t+1$과 곡선 $y=x^2-tx-1$이 만나는 두 점을 A, B라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{t^2}$의 값은?



① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$
④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

77. 고난도 | 4점 | | 22년 교육청 | 1st 2nd 3rd

$a>2$인 상수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & (x\le 2) \\ -x^2+ax & (x>2) \end{cases}$$

라 하자. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $h(1)+h(3)$의 값은?

(가) $x\ne 1$, $x\ne a$일 때, $h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$이다.
(나) $h(1)=h(a)$

① $-\frac{15}{6}$ ② $-\frac{7}{3}$ ③ $-\frac{13}{6}$
④ -2 ⑤ $-\frac{11}{6}$

78. 고난도 | 4점 | | 22년 교육청 | 1st 2nd 3rd

두 양수 a, $b(b>3)$과 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} (x+3)f(x) & (x<0) \\ (x+a)f(x-b) & (x\ge 0) \end{cases}$$

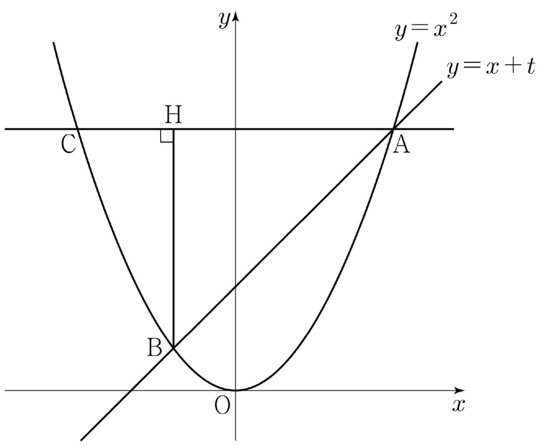
이 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(4)$의 값을 구하시오. [4점]

$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{\lvert g(x)\rvert+\{g(t)\}^2}-\lvert g(t)\rvert}{(x+3)^2}$의 값이 존재하지 않는 실수 t의 값은 -3과 6뿐이다.

79. 고난도 | 4점 | | 22년 교육청 | 1st 2nd 3rd

실수 $t(t>0)$에 대하여 직선 $y=x+t$와 곡선 $y=x^2$이 만나는 두 점을 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=x^2$과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C, 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{\overline{\mathrm{AH}}-\overline{\mathrm{CH}}}{t}$의 값은? (단, 점 A의 x좌표는 양수이다.)



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

80. 고난도 | 4점 | | 22년 교육청 | 1st 2nd 3rd

최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 최댓값을 구하시오.

(가) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\lvert f(x)-1\rvert}{x}$의 값이 존재한다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $xf(x)\geq-4x^2+x$이다.

81. 고난도 | 4점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\{2f(x)-3g(x)\}=1,\ \lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$$

를 만족시킬 때, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4f(x)+g(x)}{3f(x)-g(x)}$의 값은?

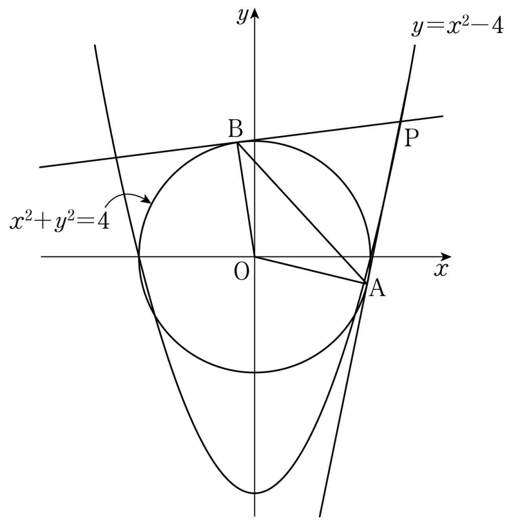
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

82. 고난도 | 4점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

곡선 $y=x^2-4$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2-4)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이를 $S(t)$, 삼각형 PBA의 넓이를 $T(t)$라 할 때,

$$\lim_{t\to2+}\frac{T(t)}{(t-2)S(t)}+\lim_{t\to\infty}\frac{T(t)}{(t^4-2)S(t)}$$

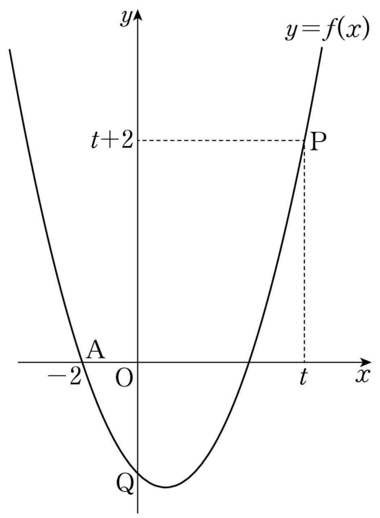
의 값은? (단, O는 원점이고, $t>2$이다.)



① 1 ② $\dfrac{5}{4}$ ③ $\dfrac{3}{2}$
④ $\dfrac{7}{4}$ ⑤ 2

83. 고난도 | 4점 | | 20년 교육청 |

최고차항의 계수가 1이고 두 점 $A(-2,\ 0)$, $P(t,\ t+2)$를 지나는 이차함수 $f(x)$가 있다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{t\to\infty}(\sqrt{2}\times\overline{AP}-\overline{AQ})$의 값을 구하시오. (단, $t\neq-2$)



84. 고난도 | 4점 | | 20년 교육청 |

좌표평면에 세 점 $O(0,\ 0)$, $A(\sqrt{2},\ 0)$, $B(0,\ \sqrt{2})$가 있다. 점 O를 중심으로 하는 원 C의 반지름의 길이가 t일 때, 삼각형 ABP의 넓이가 자연수인 원 C 위의 점 P의 개수는 함수 $f(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 점 P는 직선 AB 위에 있지 않다.)

[보 기]

ㄱ. $f\left(\frac{1}{2}\right)=2$

ㄴ. $\lim_{t\to1+}f(t)\neq f(1)$

ㄷ. $0<a<4$인 실수 a에 대하여 함수 $f(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

85. 고난도 | 4점 | | 19년 교육청 |

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=1,\quad \lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=2$$

를 만족시킨다. $f(1)\le 12$일 때, $f(2)$의 최댓값은?

① 27 ② 30 ③ 33
④ 36 ⑤ 39

86. 고 난 도 | 4점 | | 19년 평가원 |

다음 조건을 만족시키는 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은?

> $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}=6$, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=4$인 자연수 n이 존재한다.

① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

87. 고 난 도 | 4점 | | 21년 교육청 |

다항함수 $f(x)$는 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-3x-5}=2$을 만족시키고, 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-3} & (x\neq 3)\\ 1 & (x=3)\end{cases}$$

이다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $f(1)$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

88. 고 난 도 | 4점 | | 21년 교육청 |

실수 m에 대하여 직선 $y=mx$와 함수

$$f(x)=2x+3+|x-1|$$

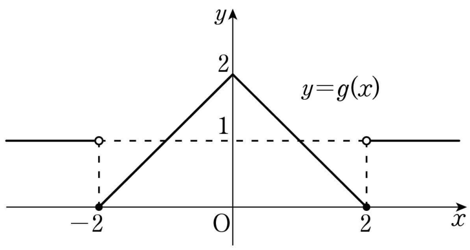
의 그래프의 교점의 개수를 $g(m)$이라 하자. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$에 대하여 함수 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $h(5)$의 값을 구하시오.

89. 고 난 도 | 4점 | | 19년 교육청 |

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=\begin{cases}-|x|+2 & (|x|\leq 2)\\ 1 & (|x|>2)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이다. 함수 $y=f(x-a)g(x)$의 그래프가 한 점에서만 불연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱은?



① −16 ② −12 ③ −8
④ −4 ⑤ −1

90. 고난도 | 4점 | | 19년 교육청 |

두 상수 a, b에 대하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2}{x^2-1}=2,\ \lim_{x\to 1}\frac{a(x-1)}{x^2-1}=b$$

일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

91. 고난도 | 4점 | | 19년 교육청 |

실수 k와 함수

$$f(x)=\begin{cases}2^{x-2} & (x<2)\\ 2^{-x+2} & (x\ge 2)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x)-k|+k$라 하자.
직선 $y=2k$와 함수 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수를 $h(k)$라 할 때, $\lim_{k\to\frac{1}{4}-}\left\{h(k)h\left(k+\frac{1}{4}\right)\right\}$의 값을 구하시오.

92. 고난도 | 4점 | | 19년 교육청 |

세 실수 a, b, c에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}-|2x+a| & (x<0)\\ x^2+bx+c & (x\ge 0)\end{cases}$$

이고, 함수 $|f(x)|$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 두 함수 $y=f(x)$, $y=|f(x)|$의 그래프와 만나는 점의 개수를 각각 $g(t)$, $h(t)$라 할 때, 두 함수 $g(t)$, $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(t)$의 치역은 $\{1, 2, 3, 4\}$이다.
(나) $\lim_{t\to 2-}h(t)\times\lim_{t\to 2+}h(t)=12$

$f(-2)+f(6)$의 값은?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

93. 고난도 | 4점 | | 19년 교육청 |

좌표평면에서 실수 m에 대하여 함수

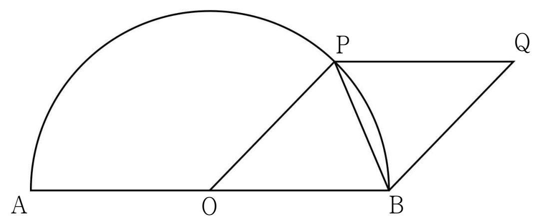
$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & (x<m) \\ \frac{1}{4}(x-3)^2 & (x \geq m) \end{cases}$$

의 그래프가 직선 $y=mx$와 만나는 점의 개수를 $g(m)$이라 하자. $m \leq 0$에서 함수 $g(m)$이 연속이 되도록 하는 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

94. 고난도 | 4점 | | 19년 교육청 |

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원과 선분 AB의 중점 O가 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 점 P를 지나고 직선 AB와 평행한 직선과 점 B를 지나고 직선 OP와 평행한 직선이 만나는 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{BP}}=t$라 할 때,

$\lim_{t \to 0+} \frac{3-\overline{\mathrm{AQ}}}{t^2}$의 값은? (단, $0<t<\sqrt{2}$)



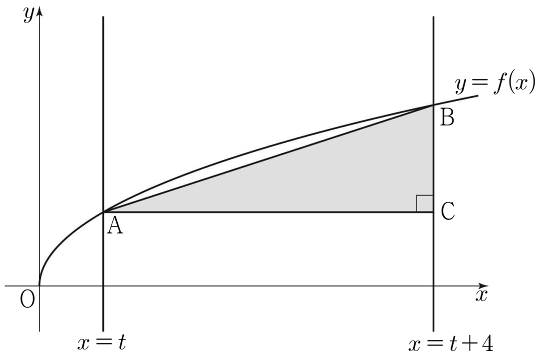
① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

95. 고난도 | 4점 | | 19년 교육청 |

그림과 같이 좌표평면에서 양의 실수 t에 대하여 함수 $f(x)=\sqrt{x}$의 그래프가 두 직선 $x=t$, $x=t+4$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 A에서 직선 $x=t+4$에 내린 수선의 발을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 $S(t)$라 할 때,

$\lim_{t \to \infty} \frac{\sqrt{t} \times S(t)}{2}$의 값은?



① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$

④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

96. 고난도 | 4점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

최고차항의 계수가 1이고 $f(-3)=f(0)$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-3 \text{ 또는 } x \geq 0) \\ -f(x) & (-3 \leq x < 0) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=k$에서 불연속인 실수 k의 값이 한 개일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. 함수 $g(x)g(x-3)$은 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. $f(-6)\times f(3)=0$

ㄷ. 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=k$에서 불연속인 실수 k가 음수일 때 집합 $\{x \mid f(x)=0, x\text{는 실수}\}$의 모든 원소의 합이 -1이면 $g(-1)=-48$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

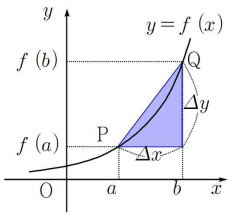
개념 9. 평균변화율과 순간 변화율

평균변화율

(1) 함수 $y=f(x)$에서 x의 증분 Δx에 대한 y의 증분 Δy의 비율

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

(2) $y=f(x)$의 평균변화율은 오른쪽 그림에서 직선 PQ의 기울기



변화율(미분계수, 순간변화율, 순간속도)

(1) 함수 $y=f(x)$에 대하여 x의 값이 a에서 $a+\Delta x$까지 변할 때의 평균변화율에서 Δx가 0에 한없이 가까워질 때의 극한값

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

를 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 변화율 또는 미분계수라 하고 기호로

$$f'(a),\ y'_{x=a},\ \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$$

와 같이 나타낸다.

(2) 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기와 같다.

97. 대표 기출 | 3점 | | 21년 평가원 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=x^3-6x^2+5x$에서 x의 값이 0에서 4까지 변할 때의 평균변화율과 $f'(a)$의 값이 같게 되도록 하는 $0<a<4$인 모든 실수 a의 값의 곱은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

98. 대표 기출 | 4점 | | 20년 평가원 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=x^3-3x^2+5x$에서 x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 평균변화율이 $f'(2)$의 값과 같게 되도록 하는 양수 a의 값을 구하시오.

99. 유사 기출 | 3점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

0이 아닌 모든 실수 h에 대하여 다항함수 $f(x)$에서 x의 값이 1에서 $1+h$까지 변할 때의 평균변화율이 h^2+2h+3일 때, $f'(1)$의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

100. 유사 기출 | 3점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=x^3+ax$에서 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율이 $f'(a)$의 값과 같게 되도록 하는 양수 a에 대하여 $3a^2$의 값을 구하시오.

101. 유사 기출 | 3점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=x^3-3x$에서 x의 값이 1에서 4까지 변할 때의 평균변화율과 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(k,\ f(k))$에서의 접선의 기울기가 서로 같을 때, 양수 k의 값은?

① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$
④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$

개념 10. 미분계수와 기울기

미분계수와 기울기

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서의 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 θ라 하면, $f'(a)=\tan\theta$

(1) $x=a$에서의 미분계수

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}$$

또, $a+\Delta x=x$로 놓으면 $\Delta x=x-a$이고, $\Delta x\to 0$일 때, $x\to a$

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x^2)-f(a)}{x^2-a}$$

미분가능성과 연속

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면, $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

그러나 그 역은 성립하지 않는다.

102. 대표 기출 | 4점 | | 22년 수능 | 1st 2nd 3rd

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오.

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$이다.
>
> (나) 함수 $g(x)$의 최솟값은 $\dfrac{5}{2}$이다.
>
> (다) $f(0)=-3$, $f(g(1))=6$

103. 대표 기출 | 2점 | | 23년 수능 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=2x^3-5x^2+3$에 대하여 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

104. 대표 기출 | 4점 | | 21년 평가원 | 1st 2nd 3rd

두 양수 p, q가 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은?

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x)=|xf(x-p)+qx|$이다.
>
> (나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

105. 대표 기출 | 3점 | | 20년 평가원 | 1st 2nd 3rd

함수

$$f(x)=\begin{cases} x^3+ax+b & (x<1) \\ bx+4 & (x \geq 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은?(단, a, b는 상수이다.)

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

106. 대표 기출 | 3점 | | 19년 교육청 | 1st 2nd 3rd

다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(4+h)-f(4)}{3h}=7$일 때, $f'(4)$의 값을 구하시오.

107. 대표 기출 | 4점 | | 19년 수능 | 1st 2nd 3rd

함수

$$f(x)=\begin{cases} -x & (x \leq 0) \\ x-1 & (0<x \leq 2) \\ 2x-3 & (x>2) \end{cases}$$

와 상수가 아닌 다항식 $p(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $p(0)=0$이다.
ㄴ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $p(2)=0$이다.
ㄷ. 함수 $p(x)\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $p(x)$는 $x^2(x-2)^2$으로 나누어떨어진다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

108. 대표 기출 | 3점 | | 19년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수

$$f(x)=\begin{cases} x^3-ax^2+bx & (x \leq 1) \\ 2x+b & (x>1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a \times b$의 값은? (단, a와 b는 상수이다.)

① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

109. 유사 기출 | 3점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수

$$f(x)=\begin{cases} 3x+a & (x \le 1) \\ 2x^3+bx+1 & (x>1) \end{cases}$$

이 $x=1$에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -8 ② -6 ③ -4
④ -2 ⑤ 0

110. 유사 기출 | 3점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

두 함수 $f(x)=|x+3|$, $g(x)=2x+a$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, 상수 a의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

111. 유사 기출 | 3점 | | 22년 교육청 | 1st 2nd 3rd

$f(3)=2$, $f'(3)=1$인 다항함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$가

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-g(x)}{x-3}=1$$

을 만족시킬 때, $g(1)$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

112. 유사 기출 | 3점 | | 22년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=2x^2-3x+5$에서 x의 값이 a에서 $a+1$까지 변할 때의 평균변화율이 7이다. $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

113. 유사 기출 | 3점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=2x^3+3x$에 대하여 $\lim_{h\to0}\frac{f(2h)-f(0)}{h}$의 값은?

① 0 ② 2 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

114. 유사 기출 | 3점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=3$일 때,

$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$의 값은?

① 0 ② 2 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

115. 유사 기출 | 3점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=x^2-2x^2+ax+1$에 대하여 $\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=9$일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

116. 유사 기출 | 3점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-4}{2h}=1$$

을 만족시킬 때, $f(3)+f'(3)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

117. 유사 기출 | 2 | | 19년 교육청 | 1st 2nd 3rd

다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(4+h)-f(4)}{3h}=7$일 때,
$f'(4)$의 값은?

① 21 ② 22 ③ 23
④ 24 ⑤ 25

개념 11. 도함수

도함수의 정의

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

도함수의 기하학적 의미

도함수 $f'(x)$는 $y=f(x)$의 그래프 위의 임의의 점 $(x, f(x))$에서 접선의 기울기를 뜻한다.

미분의 기본공식

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 도함수가 존재할 때,

(1) $y=c$ (c는 상수) $y'=0$

(2) $y=x^n$ (n은 자연수) $y'=nx^{n-1}$

(3) $y=cf(x)$ (c는 상수) $y'=cf'(x)$

(4) $y=f(x)\pm g(x)$ $y'=f'(x)\pm g'(x)$(복부호동순)

(5) $y=f(x)g(x)$ $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

(6) $y=f(x)g(x)h(x)$

$y'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$

합성함수의 미분법

$y=\{f(x)\}^n$ $y'=n\{f(x)\}^{n-1}\cdot f'(x)$

항등식과 미분계수

항등식을 만들어 x를 변수로 나머지는 상수 취급하여 양변을 미분한다.

다항식의 나눗셈과 미분법

다항식을 만들어 양변 미분한다. (곱의 미분 적극 활용)

118. 대표 기출 | 3점 | | 22년 수능 | 1st 2nd 3rd

다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=x^2f(x)$$

라 하자. $f(2)=1$, $f'(2)=3$일 때, $g'(2)$의 값은?

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

119. 대표 기출 | 3점 | | 23년 평가원 | 1st 2nd 3rd

다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^3+1)f(x)$$

라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=3$일 때, $g'(1)$의 값은?

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

120. 대표 기출 | 3점 | | 23년 수능 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=(x+1)(x^2+3)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오.

121. 대표 기출 | 2점 | | 21년 수능 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=x^3+3x^2+x-1$에 대하여 $f'(1)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

122. 대표 기출 | 3점 | | 21년 평가원 | 1st 2nd 3rd

다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^2+3)f(x)$$

라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=1$일 때, $g'(1)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

123. 대표 기출 | 2점 | | 21년 평가원 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=2x^3+4x+5$에 대하여 $f'(1)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

124. 대표 기출 | 3점 | | 20년 수능 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=x^4+3x-2$에 대하여 $f'(2)$의 값은?

① 35 ② 37 ③ 39 ④ 41 ⑤ 43

125. 대표 기출 | 2점 | | 20년 평가원 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=x^3-2x-7$에 대하여 $f'(1)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

126. 대표 기출 | 3점 | | 20년 평가원 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=x^3+7x+1$에 대하여 $f'(0)$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

127. 대표 기출 | 3점 | | 19년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=x^2+7x+6$에 대하여 $f'(2)$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

128. 유사 기출 | 3점 | | 22년 교육청 | 1st 2nd 3rd

최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf'(x)-3f(x)=2x^2-8x$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

129. 유사 기출 | 3점 | | 22년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=x^3+2x+7$에 대하여 $f'(1)$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

130. 유사 기출 | 3점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=x^2+ax$에 대하여 $f'(1)=4$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

131. 유사 기출 | 3점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=2x^2+ax+3$에 대하여 $x=2$에서의 미분계수가 18일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

132. 유사 기출 | 3점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=x^2-ax$에 대하여 $f'(1)=0$일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

133. 유사 기출 | 3점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

두 함수 $f(x)=2x^2+5x+3$, $g(x)=x^3+2$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$의 $x=0$에서의 미분계수를 구하시오.

134. 유사 기출 | 4점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=3,\ \lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x^2-x-2}=6$$

을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은?

① -24 ② -21 ③ -18
④ -15 ⑤ -12

135. 유사 기출 | 3점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-4}{x^2-4}=2,\ \lim_{x\to2}\frac{g(x)+1}{x-2}=8$$

을 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여 $h'(2)$의 값을 구하시오.

136. 유사 기출 | 4점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

$f(1)=-2$인 다항함수 $f(x)$에 대하여 일차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)+4}{x-1}=8$

(나) $g(0)=g'(0)$

$f'(1)$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

137. 유사 기출 | 3점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=x^4+3x^2+9x-27$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오.

138. 유사 기출 | 3점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=x^4+3x^2+7x$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오.

139. 유사 기출 | 3점 | | 19년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=x^3+x^2-x+3$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오.

140. 유사 기출 | 3점 | | 19년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=(x-2)(x^3-4x+a)$에 대하여 $f'(1)=6$일 때, 상수 a의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

141. 유사 기출 | 3점 | | 19년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=10x^2+12x$에 대하여 $f'(5)$의 값을 구하시오.

142. 유사 기출 | 3점 | | 19년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=x^4-5x^2+9$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하시오.

개념 12. 접선의 방정식

접선의 방정식

(1) 접선의 방정식

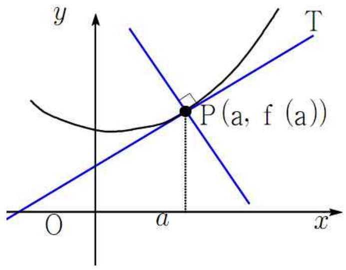
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

(2) 법선의 방정식

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서의 법선의 방정식은

$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$



(3) 두 곡선의 공통접선

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가

▸ 점(α, β)에서 접할 조건

① $f(\alpha)=g(\alpha)=\beta$

② $f'(\alpha)=g'(\alpha)$

▸ 점(α, β)에서 직교 조건

① $f(\alpha)=g(\alpha)=\beta$

② $f'(\alpha)\cdot g'(\alpha)=-1$

(4)접선의 방정식을 구하는 방법

곡선 $y=f(x)$에 관한 접선의 방정식을 구할 때,

▸ 접점의 좌표가 주어지면 기울기를 먼저 구한다.

▸ 기울기가 주어지면 접점의 좌표를 먼저 구한다.

▸ 곡선 밖의 점에서 곡선에 접선을 그을 때에는 x좌표를 t로 놓고 먼저 이것에 대한 접선의 방정식을 세운다.

143. 대표 기출 | 4점 | | 23년 수능 | 1st 2nd 3rd

$a>\sqrt{2}$인 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=-x^3+ax^2+2x$$

라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중 O가 아닌 점을 A라 하고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B라 하자. 점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점일 때, $\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{AB}}$의 값을 구하시오.

144. 대표 기출 | 3점 | | 22년 수능 | 1st 2nd 3rd

점 $(0,\ 4)$에서 곡선 $y=x^3-x+2$에 그은 접선의 x절편은?

① $-\frac{1}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{3}{2}$

④ -2 ⑤ $-\frac{5}{2}$

145. 대표 기출 | 4점 | | 21년 수능 | 1st 2nd 3rd

삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선과 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선이 일치할 때, $f'(2)$의 값은?

① -18 ② -17 ③ -16

④ -15 ⑤ -14

146. 대표 기출 | 3점 | | 22년 평가원 | 1st 2nd 3rd

곡선 $y=x^3-4x+5$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선이 곡선 $y=x^4+3x+a$에 접할 때, 상수 a의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

147. 대표 기출 | 3점 | | 20년 수능 | 1st 2nd 3rd

곡선 $y=x^3-3x^2+2x+2$ 위의 점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$에서 접선과 수직이고 점 A를 지나는 직선의 x절편은?

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

148. 대표 기출 | 3점 | | 20년 평가원 | 1st 2nd 3rd

곡선 $y=x^3-6x^2+6$ 위의 점 $(1,\ 1)$ 에서의 접선이 점 $(0,\ a)$를 지날 때, a의 값을 구하시오.

149. 대표 기출 | 4점 | | 20년 평가원 | 1st 2nd 3rd

최고차항의 계수가 a인 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$|f'(x)| \le 4x^2+5$$

를 만족시킨다. 함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축이 직선 $x=1$일 때, 실수 a의 최댓값은?

① $\dfrac{3}{2}$ ② 2 ③ $\dfrac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\dfrac{7}{2}$

150. 대표 기출 | 3점 | | 19년 수능 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=-x^4+8a^2x^2-1$이 $x=b$와 $x=2-2b$에서 극대일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 $a>0$, $b>1$인 상수이다.)

① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

151. 유사 기출 | 3점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

직선 $y=4x+5$가 곡선 $y=2x^4-4x+k$에 접할 때, 상수 k의 값을 구하시오.

152. 유사 기출 | 3점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

다항함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ f(0))$에서의 접선의 방정식이 $y=3x-1$이다. 함수 $g(x)=(x+2)f(x)$에 대하여 $g'(0)$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

153. 유사 기출 | 3점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

곡선 $y=x^3-10$ 위의 점 $\mathrm{P}(-2,\ -18)$에서의 접선과 곡선 $y=x^3+k$ 위의 점 Q에서의 접선이 일치할 때, 양수 k의 값을 구하시오.

154. 유사 기출 | 3점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x+2)f(x)$$

라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3,\ 2)$에서의 접선의 기울기가 4일 때, $g'(3)$의 값을 구하시오.

155. 유사 기출 | 3점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

곡선 $y=4x^3-5x+9$ 위의 점 $(1,\ 8)$에서의 접선의 기울기를 구하시오.

156. 유사 기출 | 3점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접한다. 함수 $g(x)=(x-3)f'(x)$에 대하여 곡선 $y=g(x)$가 y축에 대하여 대칭일 때, $f(0)$의 값은?

① 1 ② 4 ③ 9
④ 16 ⑤ 25

157. 유사 기출 | 3점 | | 22년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=x^3-2x^2+2x+a$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=6$일 때, 양수 a의 값은?

① $2\sqrt{2}$ ② $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ ③ $3\sqrt{2}$
④ $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

개념 13. 롤의 정리

롤의 정리
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$이면 $f'(c)=0$인 c가 a와 b사이에 적어도 하나 존재한다.
평균값 정리
함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하면
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\ \ (a<c<b)$$
인 c가 적어도 하나 존재한다.

158. 대표 기출 | 3점 | | 17년 수능 | 1st 2nd 3rd

모든 실수 x에 대하여 미분가능한 함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to\infty}f'(x)=12$일 때, $\lim_{x\to\infty}\{f(x+1)-f(x-1)\}$의 값을 구하시오.

159. 대표 기출 | 3점 | | 22년 평가원 | 1st 2nd 3rd

실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 최솟값은?

(가) $f(1)=3$
(나) $1<x<5$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 5$이다.

① 21 ② 22 ③ 23
④ 24 ⑤ 25

개념 14. 함수의 증가감소

함수의 증가감소

(1) 증가함수와 감소함수

함수 $f(x)$가 어떤 구간의 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여

- $x_1<x_2$일 때, $f(x_1)<f(x_2)$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다고 하며 함수 $f(x)$를 이 구간에서의 증가함수라 한다.
- $x_1<x_2$일 때, $f(x_1)>f(x_2)$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다고 하며 함수 $f(x)$를 이 구간에서의 감소함수라 한다.

(2) 함수의 증가상태와 감소상태

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때

① $f'(a)>0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 증가상태에 있다.

② $f'(a)<0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 감소상태에 있다.

(3) 함수의 증가와 감소

함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능할 때 그 구간의 모든 점에서

- $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다.
- $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.

160. 대표 기출 | 3점 | | 21년 수능 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=x^3+ax^2-(a^2-8a)x+3$이 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 실수 a의 최댓값을 구하시오.

161. 대표 기출 | 4점 | | 22년 수능 | 1st 2nd 3rd

다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$g(x)=\begin{cases} x & (x<-1 \text{ 또는 } x>1) \\ f(x) & (-1\le x\le 1) \end{cases}$$

함수 $h(x)=\lim_{t\to 0+}g(x+t)\times\lim_{t\to 2+}g(x+t)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

| 보기 |

ㄱ. $h(1)=3$

ㄴ. 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 감소하고 $g(-1)=-2$이면 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 최솟값을 갖는다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

개념 15. 함수의 극대극소

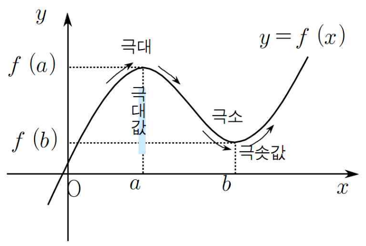
함수의 극대와 극소

(1) 함수의 극대·극소의 정의

① 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이고, x가 증가하면서 $x=a$를 지날 때, $f(x)$가 증가상태에서 감소상태로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대가 되고, $f(a)$를 극댓값이라고 한다.

② 함수 $f(x)$가 $x=b$에서 연속이고, x가 증가하면서 $x=b$를 지날 때, $f(x)$가 감소상태에서 증가상태로 바뀌면 $f(x)$는 $x=b$에서 극소가 되고, $f(b)$를 극솟값이라고 한다.

③ 극대가 되는 점 $(a, f(a))$를 극대점, 극소가 되는 점 $(b, f(b))$를 극소점이라 한다.



※ 극댓값과 극솟값을 합하여 극값이라 하고, 함수의 그래프에서 극대가 되는 점을 극대점, 극소가 되는 점을 극소점이라 하며, 극대점과 극소점을 합하여 극점이라 한다.

(2) 극값에서의 미분계수

미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

그러나 위의 성질의 역은 일반적으로 성립하지 않는다.

(3) 극대·극소의 판정

미분가능한 함수 $f(x)$에서 $f'(a)=0$일 때, $x=a$의 좌우에서

(1) $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(-)으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 극댓값 $f(a)$를 갖는다.

(2) $f'(x)$의 부호가 음(-)에서 양(+)으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고, 극솟값 $f(a)$를 갖는다.

162. 대표 기출 | 3점 | | 23년 수능 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-12x+4$가 $x=\alpha$에서 극대이고 $x=\beta$에서 극소일 때, $\beta-\alpha$의 값은? (단, α와 β는 상수이다.)

① -4 ② -1 ③ 2

④ 5 ⑤ 8

163. 대표 기출 | 3점 | | 23년 평가원 | 1st 2nd 3rd

두 상수 a, b에 대하여 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx+a$는 $x=1$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극솟값이 -2일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오.

164. 대표 기출 | 4점 | | 23년 수능 | 1st 2nd 3rd

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $f(x)$에 대하여
> $$f(k-1)f(k+1)<0$$
> 을 만족시키는 정수 k는 존재하지 않는다.

$f'\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{1}{4}$, $f'\left(\dfrac{1}{4}\right)<0$일 때, $f(8)$의 값을 구하시오.

165. 대표 기출 | 3점 | | 22년 수능 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=2x^3-9x^2+ax+5$는 $x=1$에서 극대이고 $x=b$에서 극소이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

166. 대표 기출 | 3점 | | 22년 평가원 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$는 $x=1$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극댓값이 4일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 상수이다.)

167. 대표 기출 | 3점 | | 21년 평가원 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=x^3-3x+12$가 $x=a$에서 극소일 때, $a+f(a)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

168. 대표 기출 | 3점 | | 22년 평가원 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=x^3-3x^2+k$의 극댓값이 9일 때,
함수 $f(x)$의 극솟값은? (단, k는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

169. 대표 기출 | 3점 | | 21년 평가원 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$의 극댓값과 극솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① 13 ② 14 ③ 15
④ 16 ⑤ 17

170. 대표 기출 | 4점 | | 21년 평가원 | 1st 2nd 3rd

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오.

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(나) 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 네 실근 α_1, α_2, α_3, α_4를 갖고 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=7$이다.

171. 대표 기출 | 3점 | | 20년 평가원 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2+mx+1$이 $x=3$에서 극대일 때, 상수 m의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

172. 대표 기출 | 4점 | | 19년 평가원 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=x^3-3ax^2+3(a^2-1)x$의 극댓값이 4이고 $f(-2)>0$일 때, $f(-1)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

173. 유사 기출 | 3점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^2-2x)f(x)$$

라 하자. 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극솟값 2를 가질 때, $g'(3)$의 값을 구하시오.

174. 유사 기출 | 3점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=x^3+ax^2-9x+4$가 $x=1$에서 극값을 갖는다. 함수 $f(x)$의 극댓값은? (단, a는 상수이다.)

① 31 ② 33 ③ 35
④ 37 ⑤ 39

175. 유사 기출 | 3점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=2x^3-6x+a$의 극솟값이 2일 때, 상수 a의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

176. 유사 기출 | 3점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=x^3+6x^2+9x+a$의 극솟값이 -6일 때, 상수 a의 값은?

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

177. 유사 기출 | 3점 | | 22년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=x^3-3x^2+ax+10$이 $x=3$에서 극소일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

개념 16. 최댓값 최솟값

함수의 최대와 최소

(1) 다항함수의 최댓값·최솟값

다항함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 극값을 가질 때,

① $f(x)$의 최댓값은 극댓값과 $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이다.

② $f(x)$의 최솟값은 극솟값과 $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 작은 값이다.

(2) 극값이 하나만 존재할 때의 최대·최소

함수가 주어진 구간에서 연속이고 그 구간에서

① 극값이 하나만 존재하고 그것이 극소이면 극솟값이 곧 최솟값이다.

② 극값이 하나만 존재하고 그것이 극대이면 극댓값이 곧 최댓값이다.

(3) 최댓값과 최솟값을 구하는 방법

폐구간 $a \leq x \leq b$에서 함수 $f(x)$가 연속일 때

① $y = f(x)$의 극댓값, 극솟값을 구한다.

② 범위의 끝값인 $f(a)$, $f(b)$를 구한다.

③ 이 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

178. 대표 기출 | 4점 | | 15년 수능 | 1st 2nd 3rd

다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $\dfrac{f'(0)}{f(0)}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. Mm의 값은?

(가) 함수 $|f(x)|$는 $x = -1$에서만 미분가능하지 않다.
(나) 방정식 $f(x) = 0$은 닫힌구간 $[3, 5]$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

① $\dfrac{1}{15}$　② $\dfrac{1}{10}$　③ $\dfrac{2}{15}$　④ $\dfrac{1}{6}$　⑤ $\dfrac{1}{5}$

179. 유사 기출 | 3점 | | 17년 평가원 | 1st 2nd 3rd

구간 $[-1, 3]$에서 함수 $f(x) = x^3 - 3x + 5$의 최솟값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

180. 유사 기출 | 3점 | | 14년 교육청 | 1st 2nd 3rd

닫힌구간 $[-2, 2]$에서 정의된 함수 $f(x) = -x^3 + 3x^2 + a$의 최솟값이 -4일 때, 최댓값은? (단, a는 상수이다.)

① 16　② 18　③ 20　④ 22　⑤ 24

개념 17. 방정식과 부등식

방정식과 부등식에의 응용

(1) 방정식의 실근

① 방정식 $f(x)=0$의 실근

함수 $f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표이다.

② 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근

함수 $f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표이다.

(2) 삼차 방정식의 실근의 개수

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0\ (a\neq 0)$에서

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라 할 때,

$f'(x)=0$의 두 실근을 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$라 하면

① 서로 다른 세 실근을 갖는다. $\Longleftrightarrow f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$

② 서로 다른 두 실근을 갖는다. $\Longleftrightarrow f(\alpha)\cdot f(\beta)=0$

③ 한 실근만을 갖는다. $\Longleftrightarrow f(\alpha)\cdot f(\beta)>0$

(3) 부등식의 증명

① $x>a$에서 $f(x)>0$을 증명할 때

다음 중에서 한 가지를 보이면 된다.

- $x>a$에서 $f(x)$의 최솟값이 0보다 크다는 것을 보인다.
- $x>a$에서 $f(x)$가 증가함수이고 $f(a)\geq 0$임을 보인다.

즉, $f'(x)>0$, $f(a)\geq 0$임을 보인다.

② $f(x)\geq g(x)$을 증명할 때

$F(x)=f(x)-g(x)$라 놓고 모든 실수값에 대하여 $F(x)$의 최솟값이 0 이상임을 보인다.

181. 대표 기출 | 3점 | | 23년 평가원 | 1st 2nd 3rd

두 곡선 $y=2x^2-1$, $y=x^3-x^2+k$가 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 양수 k의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

182. 대표 기출 | 3점 | | 21년 수능 | 1st 2nd 3rd

방정식 $2x^3-3x^2-12x+k=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수는?

① 20 ② 23 ③ 26
④ 29 ⑤ 32

183. 대표 기출 | 4점 | | 23년 수능 | 1st 2nd 3rd

두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3-6x+1 & (x\leq 2) \\ a(x-2)(x-b)+9 & (x>2) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

$$g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)=9$$

를 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$에 대하여 $a+b$의 최댓값은?

① 51 ② 52 ③ 53
④ 54 ⑤ 55

184. 대표 기출 | 3점 | | 22년 평가원 | 1st 2nd 3rd

방정식 $3x^4-4x^3-12x^2+k=0$이 서로 다른 4개의 실근을 갖도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오.

185. 대표 기출 | 3점 | | 22년 수능 | 1st 2nd 3rd

방정식 $2x^3-6x^2+k=0$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 2가 되도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오.

186. 대표 기출 | 4점 | | 21년 평가원 | 1st 2nd 3rd

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
> (나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때, $f(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

187. 대표 기출 | 4점 | | 22년 평가원 | 1st 2nd 3rd

두 함수

$$f(x)=x^3-x+6,\ g(x)=x^2+a$$

가 있다. $x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$f(x)\geq g(x)$$

가 성립할 때, 실수 a의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

188. 대표 기출 | 3점 | | 20년 수능 | 1st 2nd 3rd

곡선 $y=4x^3-12x+7$과 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 양수 k의 값을 구하시오.

189. 대표 기출 | 4점 | | 20년 평가원 | 1st 2nd 3rd

방정식 $x^3-x^2-8x+k=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2일 때, 양수 k의 값을 구하시오.

190. 대표 기출 | 3점 | | 20년 평가원 | 1st 2nd 3rd

방정식 $2x^3+6x^2+a=0$이 $-2\le x\le 2$에서 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 정수 a의 개수는?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

191. 대표 기출 | 4점 | | 19년 수능 | 1st 2nd 3rd

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)-x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
(나) 방정식 $f(x)+x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

$f(0)=0$, $f'(1)=1$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

192. 대표 기출 | 4점 | | 19년 평가원 | 1st 2nd 3rd

곡선 $y=x^3-3x^2+2x-3$과 직선 $y=2x+k$가 서로 다른 두 점에서만 만나도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱을 구하시오.

193. 대표 기출 | 4점 | | 19년 평가원 | 1st 2nd 3rd

두 함수

$$f(x)=x^3+3x^2-k,\ \ g(x)=2x^2+3x-10$$

에 대하여 부등식

$$f(x)\geq 3g(x)$$

가 닫힌 구간 $[-1,\ 4]$에서 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하시오.

194. 유사 기출 | 3점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

곡선 $y=x^3-3x^2-9x$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 정수 k의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은?

① 27 ② 28 ③ 29
④ 30 ⑤ 31

195. 유사 기출 | 3점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

두 함수

$$f(x)=-x^4-x^3+2x^2,\ \ g(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+a$$

가 있다. 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$f(x)\leq g(x)$$

가 성립할 때, 실수 a의 최솟값은?

① 8 ② $\frac{26}{3}$ ③ $\frac{28}{3}$
④ 10 ⑤ $\frac{32}{3}$

196. 유사 기출 | 3점 | | 22년 교육청 | 1st 2nd 3rd

모든 실수 x에 대하여 부등식

$$3x^4-4x^3-12x^2+k \geq 0$$

이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값을 구하시오.

197. 유사 기출 | 3점 | | 22년 교육청 | 1st 2nd 3rd

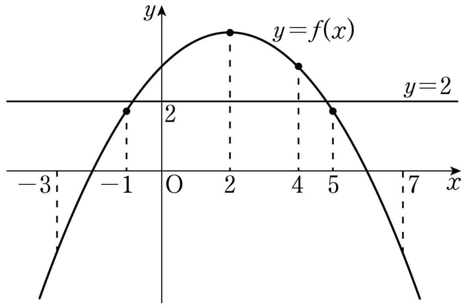
모든 실수 x에 대하여 부등식

$$x^4-4x^3+16x+a \geq 0$$

이 항상 성립하도록 하는 실수 a의 최솟값을 구하시오.

198. 유사 기출 | 3점 | | 19년 교육청 | 1st 2nd 3rd

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2$가 그림과 같다.



열린 구간 $(-3, 7)$에서 부등식 $f'(x)\{f(x)-2\} \leq 0$을 만족시키는 정수 x의 개수는? (단, $f'(2)=0$)

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

199. 유사 기출 | 4점 | | 19년 교육청 | 1st 2nd 3rd

최고차항의 계수가 양수인 사차함수
$f(x)=ax^4+bx^2+c$ (a, b, c는 상수)가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f(x)=0$의 모든 실근이 α, β, γ이다.
> (단, $\alpha<\beta<\gamma$)
>
> (나) $f(1)=-\dfrac{3}{4}$, $f'(-1)=1$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $f(0)=0$
ㄴ. $f'(\alpha)=-4$
ㄷ. 방정식 $|f(x)|=k(x-\alpha)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 양수 k의 범위는 $\dfrac{8}{27}<k<4$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

개념 18. 속도와 가속도

속도와 가속도

(1) 속도 · 가속도

수직선 위를 움직이는 점P의 시각t에서의 좌표x가 $x=f(t)$로 나타내어질 때,

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

를 시각t에서$t+\Delta t$까지의 평균속도라 하고

$$v=\frac{dx}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=f'(t)$$

를 시각t에서의 점P의 순간속도 또는 속도라 한다.

$$a=\frac{dv}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=v'(t)=f''(t)$$

를 시각t에서의 가속도라 한다.

(2) 속력

속도의 방향은 생각하지 않고 그 크기만 생각할 때, 속도의 절대값 $|v|$를 속력이라고 한다.

① 거리의 시각에 대한 변화율이 속도(velocity)이다.
② 속도의 시각에 대한 변화율이 가속도(acceleration)이

(3) 직선 위를 움직이는 점의 운동 방향

직선 위를 움직이는 점P의 좌표가$x=f(t)$로 나타내어질 때,

① $f'(t)>0$: 양의 방향으로 움직인다.
② $f'(t)<0$: 음의 방향으로 움직인다.
③ $f'(a)=0$이고$t=a$의 앞뒤에서$f'(t)$의 부호가 바뀌면$t=a$에서 운동 방향이 바뀐다.

(4) 위치(거리)$\xrightarrow{\text{미분}}$속도(v)$\xrightarrow{\text{미분}}$가속도(a)

200. 대표 기출 . | 4점 | | 19년 수능 | 1st 2nd 3rd

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q 의 시각 t $(t\ge 0)$ 에서의 위치 x_1, x_2가

$$x_1=t^3-2t^2+3t\ ,\ x_2=t^2+12\ t$$

이다. 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하시오

201. 유사 기출 | 3점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t>0)$에서의 위치 $x(t)$가

$$x(t)=\frac{3}{2}t^4-8t^3+15t^2-12t$$

이다. 점 P의 운동 방향이 바뀌는 순간 점 P의 가속도를 구하시오.

202. 유사 기출 | 3점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 위치 t가

$$x=2t^3-kt^2 \ (k\text{는 상수})$$

이다. 시각 $t=1$에서 점 P가 운동 방향을 바꿀 때, 시각 $t=k$에서의 점 P의 가속도를 구하시오.

203. 유사 기출 | 3점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 위치 x가

$$x=t^3+kt^2+kt \ (k\text{는 상수})$$

이다. 시각 $t=1$에서 점 P가 운동 방향을 바꿀 때, 시각 $t=2$에서 점 P의 가속도는?

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

204. 유사 기출 | 3점 | | 13년 교육청 | 1st 2nd 3rd

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치는 $P(t)=t^3-9t^2+34t$이다. 점 P의 속도가 처음으로 10이 되는 순간 점 P의 위치는?

① 38 ② 40 ③ 42
④ 44 ⑤ 46

205. 유사 기출 | 3점 | | 19년 교육청 | 1st 2nd 3rd

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 위치 x가

$$x=t^3-3t^2+at \ (a\text{는 상수})$$

이다. 점 P의 시각 $t=3$에서의 속도가 15일 때, a의 값을 구하시오.

206. 유사 기출 | 3점 | | 19년 평가원 | 1st 2nd 3rd

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t>0)$에서의 위치 $(x,\ y)$가

$$x=t^3-5t^2+6t$$

이다. $t=3$에서 점 P의 가속도를 구하시오.

STEP2

207. 고난도 | 4점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=|x^3-3x^2+p|$는 $x=a$와 $x=b$에서 극대이다.
$f(a)=f(b)$일 때, 실수 p의 값은?
(단, a, b는 $a \neq b$인 상수이다.)

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

208. 고난도 | 4점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

양수 k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=|x^3-12x+k|$$

라 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$ $(a \geq 0)$이 만나는 서로 다른 점의 개수가 홀수가 되도록 하는 실수 a의 값이 오직 하나일 때, k의 값은?

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

209. 고난도 | 4점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

삼차함수 $f(x)$에 대하여 구간 $(0,\ \infty)$에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} x^3-8x^2+16x & (0<x\leq 4) \\ f(x) & (x>4) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 구간 $(0,\ \infty)$에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(10)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

(가) $g\left(\frac{21}{2}\right)=0$
(나) 점 $(-2,\ 0)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은, 기울기가 0이 아닌 접선이 오직 하나 존재한다.

210. 고난도 | 4점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 있다.
실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x)-t|$라 할 때, $\lim_{x \to k}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$의 값이 존재하는 서로 다른 실수 k의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{t \to 4+}h(t)=5$
(나) 함수 $h(t)$는 $t=-60$과 $t=4$에서만 불연속이다.

$f(2)=4$이고 $f'(2)>0$일 때, $f(4)+h(4)$의 값을 구하시오.

211. 고 난 도 | 4점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

양의 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3-3t^2x$$

라 할 때, 닫힌구간 $[-2,\ 1]$에서 두 함수 $f(x)$, $|f(x)|$의 최댓값을 각각 $M_1(t)$, $M_2(t)$라 하자. 함수

$$g(t)=M_1(t)+M_2(t)$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

| 보기 |

ㄱ. $g(2)=32$

ㄴ. $g(t)=2f(-t)$를 만족시키는 t의 최댓값과 최솟값의 합은 3이다.

ㄷ. $\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}-\lim\limits_{h\to0-}\dfrac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}=5$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

212. 고 난 도 | 4점 | | 23년 평가원 | 1st 2nd 3rd

정수 $a(a\neq0)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3-2ax^2$$

이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되도록 하는 a에 대하여 $f'(10)$의 값을 구하시오. [4점]

> 함수 $y=f(x)$에 대하여
> $$\left\{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\}\times\left\{\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\}<0$$
> 을 만족시키는 세 실수 x_1, x_2, x_3이 열린구간 $\left(k,\ k+\dfrac{3}{2}\right)$에 존재한다.

213. 고 난 도 | 4점 | | 22년 교육청 | 1st 2nd 3rd

두 함수

$$f(x)=x^2+2x+k,\ \ g(x)=2x^3-9x^2+12x-2$$

에 대하여 함수 $(g\circ f)(x)$의 최솟값이 2가 되도록 하는 실수 k의 최솟값은?

① 1 ② $\dfrac{9}{8}$ ③ $\dfrac{5}{4}$
④ $\dfrac{11}{8}$ ⑤ $\dfrac{3}{2}$

214. 고 난 도 | 4점 | | 22년 교육청 | 1st 2nd 3rd

두 함수

$$f(x)=x^3-kx+6,\ \ g(x)=2x^2-2$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

| 보기 |

ㄱ. $k=0$일 때, 방정식 $f(x)+g(x)=0$은 오직 하나의 실근을 갖는다.

ㄴ. 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 k의 값은 4뿐이다.

ㄷ. 방정식 $|f(x)|=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수가 5가 되도록 하는 실수 k가 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

215. 고 난 도 | 4점 | | 22년 교육청 | 1st 2nd 3rd

정수 k와 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<0) \\ x-1 & (0\le x<1) \\ 0 & (1\le x\le 3) \\ -x+4 & (x>3) \end{cases}$$

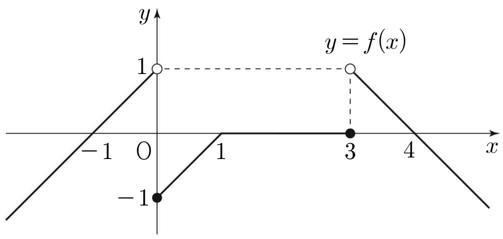
에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x-k)|$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

| 보기 |

ㄱ. $k=-3$일 때, $\lim_{x\to 0-} g(x)=g(0)$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)+g(x)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 정수 k가 존재한다.

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은 -5이다.



① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

216. 고 난 도 | 4점 | | 22년 교육청 | 1st 2nd 3rd

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가
모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다.
양수 t에 대하여 좌표평면 위의 네 점 $(t,\ 0)$, $(-,\ 2t)$, $(-t,\ 0)$, $(0,\ -2t)$를 꼭짓점으로 하는 마름모가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 $t=\alpha$, $t=8$에서 불연속이다. $\alpha^2\times f(4)$의 값을 구하시오. (단, α는 $0<\alpha<8$인 상수이다.)

217. 고 난 도 | 4점 | | 22년 교육청 | 1st 2nd 3rd

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-2) \\ f(x)+8 & (x\ge -2) \end{cases}$$

라 하자. 방정식 $g(x)=f(-2)$의 실근이 2뿐일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은?

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4
④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

218. 고 난 도 | 4점 | | 22년 교육청 | 1st 2nd 3rd

삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 할 때, 함수 $h(x)$를

$$h(x)=|f(x)|+g(x)$$

라 하자. 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $(k,\ 0)(k\ne 0)$에서의 접선의 방정식은 $y=0$이다.
(나) 방정식 $h(x)=0$의 실근 중에서 가장 큰 값은 12이다.

$h(3)=-\frac{9}{2}$일 때, $k\times\{h(6)-h(11)\}$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

219. 고난도 | 4점 | | 22년 교육청 | 1st 2nd 3rd

최고차항의 계수가 1이고 $x=3$에서 극댓값 8을 갖는 삼차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq t) \\ -f(x)+2f(t) & (x < t) \end{cases}$$

라 할 때, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 두 개일 때, $f(8)$의 값을 구하시오.

220. 고난도 | 4점 | | 22년 교육청 | 1st 2nd 3rd

두 정수 a, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \leq x < 4$에서 $f(x)=ax^2+bx-24$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$이다.

$1<x<10$일 때, 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 5이다. $a+b$의 값은?

① 18 ② 19 ③ 20
④ 21 ⑤ 22

221. 고난도 | 4점 | | 22년 교육청 | 1st 2nd 3rd

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 구간 $(-\infty,\ t]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 m_1이라 하고, 구간 $[t,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 m_2라 할 때,

$$g(t)=m_1-m_2$$

라 하자. $k>0$인 상수 k와 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$g(t)=k$를 만족시키는 모든 실수 t의 값의 집합은 $\{t \mid 0 \leq t \leq 2\}$이다.

$g(4)=0$일 때, $k+g(-1)$의 값을 구하시오.

222. 고난도 | 4점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)-g(x)}{x-1}=5$

(나) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)+g(x)-2f(1)}{x-1}=7$

두 실수 a, b에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)-a}{x-1}=b\times g(1)$일 때, a, b의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

223. 고난도 | 4점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 3보다 작은 실수 a에 대하여 함수 $g(x)=|(x-a)f(x)|$가 $x=3$에서만 미분가능하지 않다. 함수 $g(x)$의 극댓값이 32일 때, $f(4)$의 값은?

① 7 ② 9 ③ 11
④ 13 ⑤ 15

224. 고난도 | 4점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

삼차함수 $f(x)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x(x-3)(x+3)$에 대하여 $x\geq -3$에서 정의된 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (-3\leq x\leq 3) \\ \dfrac{1}{k+1}f(x-6k) & (6k-3\leq x< 6k+3) \end{cases}$$

(단, k는 모든 자연수)

이다. 자연수 n에 대하여 직선 $y=n$과 함수 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수를 a_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{12}a_n$의 값을 구하시오.

225. 고난도 | 4점 | | 20년 수능 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 함수 $g(x)$는 일차함수이다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} |f(x)-g(x)| & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x\geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $h(0)=0$, $h(2)=5$일 때, $h(4)$의 값을 구하시오.

226. 고난도 | 4점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=x^3-6x^2+ax+10$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} b-f(x) & (x<3) \\ f(x) & (x\geq 3) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, 함수 $g(x)$의 극솟값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

227. 고 난 도 | 4점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax$에 대하여 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 자연수 a의 값을 가장 작은 수부터 차례대로 나열할 때 n번째 수를 a_n이라 하자. $a=a_n$일 때, $f(x)$의 극댓값을 b_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{10}(b_n-a_n)$의 값을 구하시오.

228. 고 난 도 | 4점 | | 20년 평가원 | 1st 2nd 3rd

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=f(3)=0$
> (나) 집합 $\{x \mid x \geq 1$ 이고 $f'(x)=0\}$의 원소의 개수는 1이다.

상수 a에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)f(a-x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\dfrac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}$의 값을 구하시오.

229. 고 난 도 | 4점 | | 20년 평가원 | 1st 2nd 3rd

이차함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고, 삼차함수 $g(x)$는 이차항의 계수가 0이다. 함수

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x \leq 0) \\ g(x) & (x > 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킬 때, $h'(-3)+h'(4)$의 값을 구하시오.

> (가) 방정식 $h(x)=h(0)$의 모든 실근의 합은 1이다.
> (나) 닫힌구간 $[-2,\ 3]$에서 함수 $h(x)$의 최댓값과 최솟값의 차는 $3+4\sqrt{3}$이다.

230. 고 난 도 | 4점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

양수 a에 대하여 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $|x(x-2)|g(x)=x(x-2)(|f(x)|-a)$
> 이다.
> (나) 함수 $g(x)$는 $x=0$과 $x=2$에서 미분가능하다.

$g(3a)$의 값을 구하시오.

231. 고난도 | 4점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x+a$의 최댓값이 12일 때, 상수 a의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

232. 고난도 | 4점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

삼차함수 $f(x)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x(x-3)(x+3)$에 대하여 $x\geq -3$에서 정의된 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (-3\leq x\leq 3) \\ \dfrac{1}{k+1}f(x-6k) & (6k-3\leq x<6k+3) \end{cases}$$

(단, k는 모든 자연수)

이다. 자연수 n에 대하여 직선 $y=n$과 함수 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{12}a_n$의 값을 구하시오.

233. 고난도 | 4점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

이차함수 $g(x)=x^2-6x+10$에 대하여 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.
(나) 함수 $(g\circ f)(x)$의 최솟값을 m이라 할 때, 방정식 $g(f(x))=m$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
(다) 방정식 $g(f(x))=17$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

234. 고난도 | 4점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

$a>0$인 상수 a에 대하여 함수 $f(x)=|(x^2-9)(x+a)|$가 오직 한 개의 x 값에서만 미분가능하지 않을 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은?

① 32 ② 34 ③ 36
④ 38 ⑤ 40

235. 고 난 도 | 4점 | | 21년 평가원 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x$에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)+|f(x)+x|=6x+k$$

의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오.

236. 고 난 도 | 4점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+|f'(x)|$$

라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(0)=g(0)=0$
> (나) 방정식 $f(x)=0$은 양의 실근을 갖는다.
> (다) 방정식 $|f(x)|=4$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$g(3)$의 값은?

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

237. 고 난 도 | 4점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$와 역함수가 존재하는 삼차함수 $g(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 실수 x에 대하여 $2f(x)=g(x)-g(-x)$이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, a, b, c는 상수이다.)

보 기

ㄱ. $a^2\le 3b$
ㄴ. 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. 방정식 $f'(x)=0$이 실근을 가지면 $g'(1)=1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

238. 고 난 도 | 4점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

자연수 a에 대하여 두 함수

$$f(x)=-x^4-2x^2-x^2,\ \ g(x)=3x^2+a$$

가 있다. 다음을 만족시키는 a의 값을 구하시오.

> 모든 실수 x에 대하여 부등식
> $$f(x)\le 12x+k\le g(x)$$
> 를 만족시키는 자연수 k의 개수는 3이다.

239. 고 난 도 | 4점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f'(x)=x^2-4x,\ g'(x)=-2x$
> (나) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프는 서로 다른 두 점에서만 만난다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 모두 $x=0$에서 극대이다.

ㄴ. $\{f(0)-g(0)\}\times\{f(2)-g(2)\}=0$

ㄷ. 모든 실수 x에 대하여 $\int_{-1}^{x}\{f(t)-g(t)\}\,dt\ge 0$이면 $\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}\,dx=2$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

240. 고 난 도 | 4점 | | 19년 교육청 | 1st 2nd 3rd

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$2f(x)=(x+1)f'(x)$$

를 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

241. 고 난 도 | 4점 | | 19년 교육청 | 1st 2nd 3rd

상수 a와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=(x^2-x+a)f(x)$라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x\to1}\dfrac{g(x)-f(x)}{x-1}=0$
> (나) $g'(1)\ne0$
> (다) $f(\alpha)=f'(\alpha)$이고 $g'(\alpha)=2f'(\alpha)$인 실수 α가 존재한다.

$g(\alpha+4)=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

242. 고난도 | 4점 | | 19년 평가원 | 1st 2nd 3rd

최고차항의계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 네 개의 수 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선과 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선이 점 $(k,\ 0)$에서 만난다. $f(2k)=20$일 때, $f(4k)$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

243. 고난도 | 4점 | | 19년 평가원 | 1st 2nd 3rd

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} \frac{1}{2} & (x<0) \\ f(x) & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $g(x)$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$보다 작을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ $g(0)+g'(0)=\frac{1}{2}$

ㄴ $g(1)<\frac{3}{2}$

ㄷ 함수 $g(x)$의 최솟값이 0일 때, $g(2)=\frac{5}{2}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

244. 고난도 | 4점 | | 19년 교육청 | 1st 2nd 3rd

접선의 방정식과 합성함수
좌표평면 위의 점 $(0,\ t)$를 지나고 곡선

$y=x^3-ax^2+3x-5$ (a는 자연수)

에 접하는 서로 다른 모든 직선의 개수를 $f(t)$라 할 때, 함수 $f(t)$에 대하여 합성함수 $g(t)=(f \circ f)(t)$라 하자. 다음 조건을 만족시키는 a의 최솟값을 m이라 할 때, $m+g(m)$의 값은?

(가) 모든 실수 t에 대하여 $g(t)>1$이다.
(나) 함수 $g(t)$의 치역의 원소의 개수는 1이다.

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

245. 고난도 | 4점 | | 19년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=x^3+x^2+ax+b$에 대하여 함수 $g(x)$를

$g(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 상수이다.)

[보 기]

ㄱ. 함수 $h(x)$가 $h(x)=(x-1)f(x)$이면 $h'(x)=g(x)$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극값 0을 가지면 $\int_0^1 g(x)\,dx=-1$이다.

ㄷ. $f(0)=0$이면 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ ㄴ
④ ㄱ ㄷ ⑤ ㄱ ㄴ ㄷ

246. 고난도 | 4점 | | 19년 교육청 |

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오.

(가) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-3}{x} = 0$

(나) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-1$의 교점의 개수는 2이다.

247. 고난도 | 4점 | | 19년 교육청 |

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

[조건]

(가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 α, β $(\alpha<\beta)$뿐이다.

(나) 함수 $f(x)$의 극솟값은 -4이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $f'(\alpha)=0$

ㄴ. $\beta=\alpha+3$

ㄷ. $f(0)=16$이면 $\alpha^2+\beta^2=18$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

248. 고난도 | 4점 | | 19년 교육청 |

삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f'(x)=0$의 두 실근 α, β는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|\alpha-\beta|=10$

(나) 두 점 $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$ 사이의 거리는 26이다.

함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차는?

① $12\sqrt{2}$ ② 18 ③ 24

④ 30 ⑤ $24\sqrt{2}$

249. 고 난 도 | 4점 | | 19년 교육청 | 1st 2nd 3rd

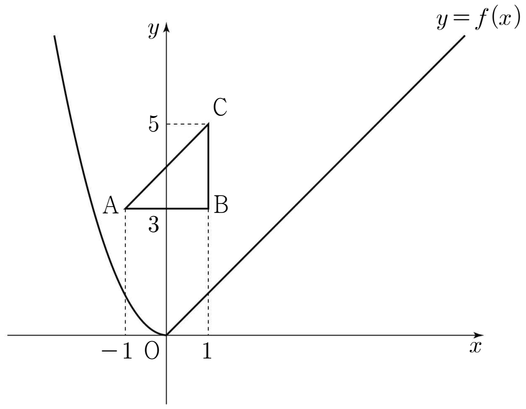
함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x<0) \\ x & (x \ge 0) \end{cases}$$

이고, 좌표평면 위에 세 점 $\mathrm{A}(-1,\ 3)$, $\mathrm{B}(1,\ 3)$, $\mathrm{C}(1,\ 5)$가 있다. 실수 x에 대하여 점 $\mathrm{P}(x,\ f(x))$와 삼각형 ABC의 세 변 위의 임의의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}^2$의 최댓값을 $g(x)$라 하자. 함수 $g(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $g(0)=26$
ㄴ. 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $g(x)$의 최솟값은 10이다.
ㄷ. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 모든 a의 값의 합은 2이다.



① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

250. 고 난 도 | 4점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2-6t$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. 시각 $t=2$에서 점 P가 움직이는 방향이 바뀐다.
ㄴ. 점 P가 출발한 후 움직이는 방향이 바뀔 때 점 P의 위치는 -4이다.
ㄷ. 점 P가 시각 $t=0$일 때부터 가속도가 12가 될 때까지 움직인 거리는 8이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

개념 19. 부정적분의 정의

미분과 부정적분의 관계

$F'(x)=f(x) \Leftrightarrow \int f(x)dx=F(x)+C$

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right)=f(x)$

(2) $\int\left(\dfrac{d}{dx}f(x)\right)dx=f(x)+C$

부정적분의 계산

(1) $\int k\,dx=kx+C$ (k는 상수)

(2) $\int x^n\,dx=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ ($n\neq-1$인 실수)

(3) $\int k\cdot f(x)dx=k\int f(x)dx$ (k는 상수)

(4) $\int\{f(x)\pm g(x)\}dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

(복호 동순)

(5) $\int(ax+b)^n\,dx=\dfrac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}+C$

($a\neq0$, $n\neq-1$인 실수)

251. 대표 기출 | 3점 | | 23년 평가원 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=8x^3-1$이고 $f(0)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

252. 대표 기출 | 3점 | | 23년 수능 | 1st 2nd 3rd

다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)=3x(x-2),\ f(1)=6$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

253. 대표 기출 | 3점 | | 22년 수능 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=4x^3-2x$이고 $f(0)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

254. 대표 기출 | 3점 | | 22년 평가원 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=8x^3+6x^2$이고 $f(0)=-1$일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오.

255. 대표 기출 | 3점 | | 22년 평가원 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2-4x+3$이고 $f(1)=5$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

256. 대표 기출 | 3점 | | 21년 수능 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+2x$이고 $f(0)=2$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

257. 대표 기출 | 3점 | | 21년 평가원 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=8x^3-12x^2+7$이고 $f(0)=3$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

258. 대표 기출 | 3점 | | 21년 평가원 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)$가 $f'(x)=3x^2-2x$, $f(1)=1$ 을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

259. 대표 기출 | 3점 | | 20년 수능 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+4x+5$이고 $f(0)=4$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

260. 대표 기출 | 3점 | | 20년 평가원 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)$가

$$f'(x)=-x^3+3,\ f(2)=10$$

을 만족시킬 때, $f(0)$의 값을 구하시오.

261. 대표 기출 | 3점 | | 20년 평가원 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)$가

$$f'(x)=x^3+x,\ f(0)=3$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

262. 유사 기출 | 3점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=9x^2-8x+1$이고 $f(1)=10$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

263. 유사 기출 | 3점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $F(x)$의 도함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}-2x & (x<0)\\ k(2x-x^2) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이다. $F(2)-F(-3)=22$일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

264. 유사 기출 | 3점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=9x^2-8x+1$이고 $f(1)=10$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

265. 유사 기출 | 3점 | | 22년 교육청 | 1st 2nd 3rd

다항함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$F(x)=(x+2)f(x)-x^3+12x$$

를 만족시킨다. $F(0)=30$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

266. 유사 기출 | 3점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+6x-4$이고 $f(1)=5$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

267. 유사 기출 | 3점 | | 22년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2-2x-1$이고 $f(1)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

268. 유사 기출 | 3점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=2x+4$이고 $f(-1)+f(1)=0$일 때, $f(2)$의 값은?

① 9　② 10　③ 11　④ 12　⑤ 13

269. 유사 기출 | 3점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=4x^3+4x+1$이다. $f(0)=1$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

개념 20. 정적분의 기본공식

정적분의 기본정리

연속함수 $f(x)$의 부정적분의 하나를 $F(x)$라 하면

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

☞ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(y)dy$

정적분의 공식

(1) $\int_a^a f(x)dx = 0$

(2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(3) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (k는 상수)

(4) $\int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \{f(x)\pm g(x)\}dx$

(5) $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

(6) 이차함수의 정적분

$f(x)=ax^2+bx+c$이고 $f(x)=0$의 두 실근이 α, β일때,

$$\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)dx = \int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$= -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(7) 평행이동의 정적분

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx = \int_{a-d}^{b-d} f(x+d)dx$$

(8) 절대값 기호가 있는 함수의 정적분

구간을 나누어서 정적분의 공식을 사용한다.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(9) 범위에 따라 함수가 다른 정적분

구간의 범위에 따르는 함수를 선택하여 정적분의 공식을 사용

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(10) 우함수 · 기함수의 정적분

위끝, 아래끝의 절대값이 같고, 부호가 다를 때 사용

① $f(x)$ 가 우함수이면

→ $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

② $f(x)$ 가 기함수이면 → $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

270. 대표 기출 | 4점 | | 21년 평가원 | 1st 2nd 3rd

실수 a와 함수 $f(x)=x^3-12x^2+45+3$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_a^x \{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4 dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오.

271. 대표 기출 | 3점 | | 23년 평가원 | 1st 2nd 3rd

삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x)-f(x)=3x^4-3x$$

를 만족시킬 때, $\int_{-2}^2 f(x)dx$의 값은?

① 12 ② 16 ③ 20
④ 24 ⑤ 28

272. 대표 기출 | 3점 | | 19년 평가원 | 1st 2nd 3rd

$\int_0^2 (3x^2+6x)dx$의 값은?

① 20 ② 22 ③ 24
④ 26 ⑤ 28

273. 유사 기출 | 2점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

$\int_0^3 (x+1)^2 dx$ 의 값은?

① 12 ② 15 ③ 18
④ 21 ⑤ 24

274. 유사 기출 | 2점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

$\int_0^1 (2x+3)\,dx$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

275. 유사 기출 | 2점 | | 22년 교육청 | 1st 2nd 3rd

$\int_0^2 (2x^3+3x^2)\,dx$의 값은?

① 14 ② 16 ③ 18
④ 20 ⑤ 22

276. 유사 기출 | 3점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

$\int_{-2}^2 (x^3+3x^2)\,dx$의 값은? [

① -16 ② -8 ③ 0
④ 8 ⑤ 16

277. 유사 기출 | 3점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

$\int_0^3 x^2\,dx$ 의 값을 구하시오.

278. 유사 기출 | 3점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

$\int_5^2 2t\,dt - \int_5^0 2t\,dt$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

279. 유사 기출 | 3점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

$\int_0^1 (3x^2+2)\,dx$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

280. 유사 기출 | 3점 | | 19년 교육청 | 1st 2nd 3rd

$\int_0^3 (x^2-2)dx$ 의 값은?

① 3 ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{11}{3}$
④ 4 ⑤ $\frac{13}{3}$

281. 유사 기출 | 3점 | | 19년 교육청 | 1st 2nd 3rd

$\int_{-3}^{3} (x^3+4x^2)dx + \int_{3}^{-3} (x^3+x^2)dx$의 값은?

① 36 ② 42 ③ 48
④ 54 ⑤ 60

개념 21. 정적분의 응용

정적분으로 정의된 함수와 미분

(1) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt = f(x)$

(2) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^{x+a} f(t)dt = f(x+a) - f(x)$

(3) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x xf(t)dt = \int_a^x f(t)dt + xf(x)$

(4) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x (x-t)f(t)dt = \int_a^x f(t)dt$

(5) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt = f\{g(x)\}g'(x) - f\{h(x)\}h'(x)$

정적분으로 정의된 함수에서 $f(x)$구하기

(1) 적분구간이 상수로 되어 있을 때,

$f(x) = g(x) + \displaystyle\int_{상수}^{상수} f(t)\,dt$ 의 꼴

$\rightarrow \displaystyle\int_{상수}^{상수} f(t)\,dt = a$로 치환한다.

(2) 적분구간에 변수 x가 있을 때,

$\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = g(x)$꼴 $\rightarrow$ 양변을 x에 관하여 미분

정적분으로 표현된 함수의 극한값

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt = f(a)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{1}{x}\int_a^{x+a} f(t)dt = f(a)$

282. 대표 기출 | 4점 | | 22년 평가원 | 1st 2nd 3rd

최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} |f(t)|\,dt$는 $x=1$과 $x=4$에서 극소이다. $f(0)$의 값을 구하시오.

283. 대표 기출 | 4점 | | 20년 평가원 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x) = -x^2 - 4x + a$에 대하여 함수

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt$$

가 닫힌구간 $[0, 1]$에서 증가하도록 하는 실수 a의 최솟값을 구하시오.

284. 대표 기출 | 4점 | | 20년 평가원 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x) = 4x^3 + x\int_0^1 f(t)dt$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

285. 대표 기출 | 3점 | | 13년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)$가 $f(x) = x^2 - 2x + \int_0^1 tf(t)dt$를 만족시킬 때, $f(3)$의 값은?

① $\frac{13}{6}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{17}{6}$
④ $\frac{19}{6}$ ⑤ $\frac{7}{2}$

286. 대표 기출 | 4점 | | 19년 수능 | 1st 2nd 3rd

미분과 적분
다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $\int_1^x f(t)\,dt = \frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$이다.
> (나) $\int_0^2 f(x)\,dx = 5\int_{-1}^1 xf(x)\,dx$

$f(0)=1$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오.

287. 대표 기출 | 4점 | | 22년 평가원 | 1st 2nd 3rd

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} -\int_0^x f(t)\,dt & (x<0) \\ \int_0^x f(t)\,dt & (x \ge 0) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

| 보기 |

ㄱ. $f(0)=0$
ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.
ㄷ. $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

288. 유사 기출 | 3점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)-x-f(t)+t$$

라 할 때, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. 두 함수 $f(x)$와 $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{t \to -1}\{h(t)-h(-1)\}=\lim_{t \to 1}\{h(t)-h(1)\}=2$

(나) $\int_0^{\alpha} f(x)dx=\int_0^{\alpha}|f(x)|dx$를 만족시키는 실수 α의 최솟값은 -1이다.

(다) 모든 실수 x에 대하여 $\frac{d}{dx}\int_0^x\{f(u)-ku\}du \geq 0$이 되도록 하는 실수 k의 최댓값은 $f'(\sqrt{2})$이다.

$f(6)$의 값을 구하시오.

289. 유사 기출 | 3점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x f(t)dt=x^3-ax+1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

290. 유사 기출 | 4점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$3x\,f(x)=9\int_1^x f(t)\,dt+2x$$

를 만족시킬 때, $f'(1)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

291. 유사 기출 | 4점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

다항함수 $f(x)$의 한 부정적분 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=2x+2\int_0^1 g(t)\,dt$

(나) $g(0)-\int_0^1 g(t)\,dt=\frac{2}{3}$

$g(1)$의 값은?

① -2 ② $-\frac{5}{3}$ ③ $-\frac{4}{3}$
④ -1 ⑤ $-\frac{2}{3}$

개념 22. 정적분과 넓이

정적분과 넓이

$S=\int_a^b |f(x)|\,dx$

두 그래프사이의 넓이

$\rightarrow S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$

암기하면 좋은 공식

(1) 포물선의 그래프가 x축과 두 점에서 만날 때,

$$S=\frac{|a|(\beta-\alpha)^3}{6}$$

(2) 포물선과 직선이 서로 다른 두 점에서 만날 때,

$S=\frac{|a|(\beta-\alpha)^3}{6}$

(3) 포물선과 포물선이 서로 다른 두 점에서 만날 때,

$S=\frac{|a-a'|(\beta-\alpha)^3}{6}$

(4) 삼차곡선과 x 축 사이의 넓이

$=\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^4$

(5) 삼차곡선과 접선사이의 넓이

$=\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^4$

(6) 4차 함수와 접선으로 둘러 싸인 부분의 넓이

$=\left|\frac{a(\beta-\alpha)^5}{30}\right|$

(7) 포물선과 두 접선으로 둘러 싸인 부분의 넓이

포물선 $y=ax^2+bx+c$와 포물선 밖의 점 P에서 그은 접선의 두 접점을

$\mathrm{Q}(\alpha,\ f(\alpha))$, $\mathrm{R}(\beta,\ f(\beta))$라 할 때,포물선과 두 접선으로 둘러싸인 넓이

$\Rightarrow S=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{PQR}=\left|\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^3\right|$

292. 대표 기출 | 3점 | | 23년 평가원 | 1st 2nd 3rd

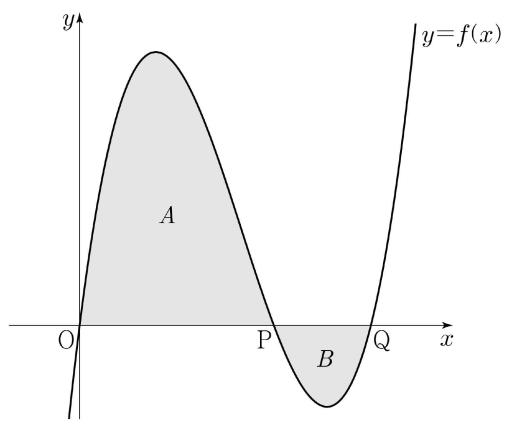
양수 k에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=kx(x-2)(x-3)$$

이다. 곡선 $y=f(x)$와 x축이 원점 O와 두 점 P, Q ($\overline{\mathrm{OP}}<\overline{\mathrm{OQ}}$)에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 선분 OP로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 영역을 B라 하자.

$$(A\text{의 넓이})-(B\text{의 넓이})=3$$

일 때, k의 값은?



① $\frac{7}{6}$　② $\frac{4}{3}$　③ $\frac{3}{2}$　④ $\frac{5}{3}$　⑤ $\frac{11}{6}$

293. 대표 기출 | 4점 | | 23년 수능 |

함수 $f(x)=\frac{1}{9}x(x-6)(x-9)$와 실수 $t(0<t<6)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<t) \\ -(x-t)+f(t) & (x\le t) \end{cases}$$

이다. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이의 최댓값은?

① $\frac{125}{4}$ ② $\frac{127}{4}$ ③ $\frac{129}{4}$
④ $\frac{131}{4}$ ⑤ $\frac{133}{4}$

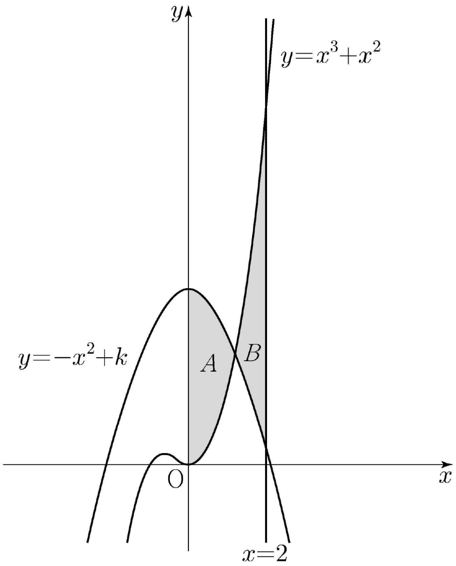
294. 대표 기출 | 3점 | | 21년 수능 |

곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $x=k$가 이등분할 때, 상수 k의 값은?

① 3 ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{7}{2}$
④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 4

295. 대표 기출 | 4점 | | 22년 수능 |

두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$와 직선 $x=2$ 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A=B$일 때, 상수 k의 값은? (단, $4<k<5$)



① $\frac{25}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{9}{2}$
④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $\frac{29}{6}$

296. 대표 기출 | 4점 | | 22년 수능 | 1st 2nd 3rd

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $n-1 \le x < n$일 때, $|f(x)| = |6(x-n+1)(x-n)|$이다.
> (단, n은 자연수이다.)

열린구간 $(0,\ 4)$에서 정의된 함수

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt - \int_x^4 f(t)\,dt$$

가 $x=2$에서 최솟값 0을 가질 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{4} f(x)\,dx$의 값은?

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

297. 대표 기출 | 3점 | | 21년 평가원 | 1st 2nd 3rd

곡선 $y=3x^2-x$과 직선 $y=5x$로 둘러싸인 부분의 넓이는?
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

298. 대표 기출 | 4점 | | 20년 수능 | 1st 2nd 3rd

곡선 $y=x^2-7x+10$과 직선 $y=-x+10$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

299. 대표 기출 | 3점 | | 20년 평가원 | 1st 2nd 3rd

곡선 $y=x^3-2x^2$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

300. 대표 기출 | 4점 | | 22년 평가원 | 1st 2nd 3rd

상수 $k(k<0)$에 대하여 두 함수

$$f(x)=x^3+x^2-x,\ g(x)=4|x|+k$$

의 그래프가 만나는 점의 개수가 2일 때,
두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하자.
$30\times S$의 값을 구하시오.

301. 대표 기출 | 4점 | | 19년 수능 | 1st 2nd 3rd

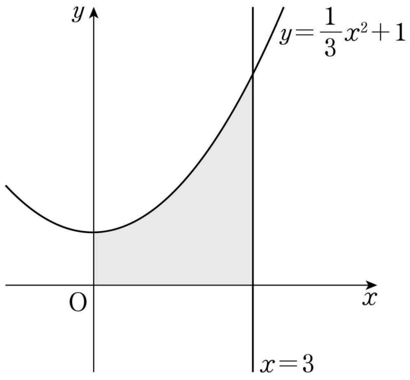
두 함수

$$f(x)=\frac{1}{3}x(4-x),\ g(x)=|x-1|-1$$

의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $4S$의 값을 구하시오.

302. 유사 기출 | 3점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

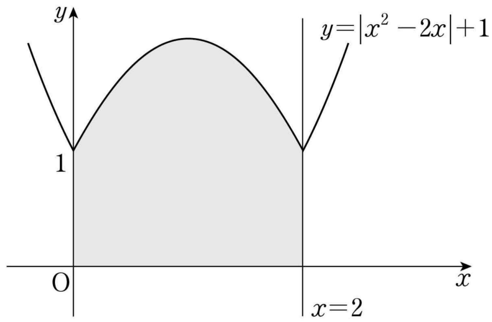
곡선 $y=\frac{1}{3}x^2+1$과 x축, y축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는?



① 6 ② $\frac{20}{3}$ ③ $\frac{22}{3}$
④ 8 ⑤ $\frac{26}{3}$

303. 유사 기출 | 3점 | | 23년 교육청 |

함수 $y=|x^2-2x|+1$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는?



① $\frac{8}{3}$ ② 3 ③ $\frac{10}{3}$

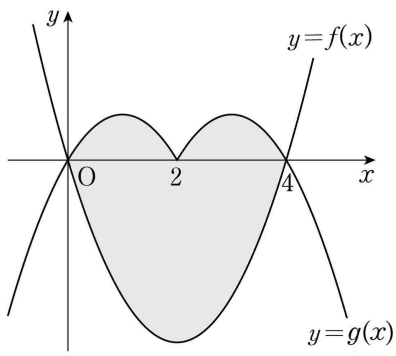
④ $\frac{11}{3}$ ⑤ 4

304. 유사 기출 | 3점 | | 22년 교육청 |

두 함수

$$f(x)=x^2-4x,\ g(x)=\begin{cases}-x^2+2x & (x<2)\\ -x^2+6x-8 & (x\geq 2)\end{cases}$$

의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

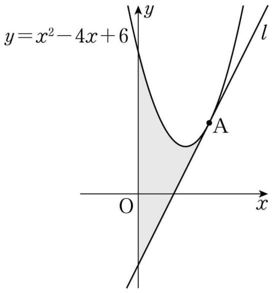


① $\frac{40}{3}$ ② 14 ③ $\frac{44}{3}$

④ $\frac{46}{3}$ ⑤ 16

305. 유사 기출 | 3점 | | 22년 교육청 | 1st 2nd 3rd

그림과 같이 곡선 $y=x^2-4x+6$ 위의 점 A(3, 3)에서의 접선을 l이라 할 때, 곡선 $y=x^2-4x+6$과 직선 l 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?



① $\frac{26}{3}$ ② 9 ③ $\frac{28}{3}$
④ $\frac{29}{3}$ ⑤ 10

306. 유사 기출 | 3점 | | 22년 교육청 | 1st 2nd 3rd

곡선 $y=-x^2+4x-4$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $12S$의 값을 구하시오.

307. 유사 기출 | 3점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

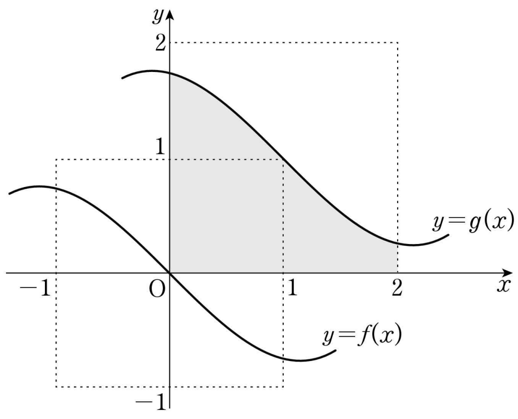
양수 a에 대하여 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=ax$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{a^3}{12}$ ② $\frac{a^3}{8}$ ③ $\frac{a^3}{6}$
④ $\frac{a^3}{4}$ ⑤ $\frac{a^3}{3}$

308. 유사 기출 | 3점 | | 19년 교육청 | 1st 2nd 3rd

평행이동과 적분

그림은 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$인 연속함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 함수 $y=g(x)$의 그래프이다. $\int_{0}^{2} g(x)\,dx$의 값은?



① $\frac{7}{4}$　② 2　③ $\frac{9}{4}$

④ $\frac{5}{2}$　⑤ $\frac{11}{4}$

개념 23. 속도거리

속도 거리

수직선 위를 움직이는 점P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 시각 $t=t_0$에서의 점P의 위치가 x_0일 때

(1) 시각 t에서의 점P의 위치 x는

$$x=x_0+\int_{t_0}^{t}v(t)dt$$

← x_0은 출발점의 위치

(2) $t=a$에서 $t=b$까지의 점P의 위치의 변화량은

$$\int_a^b v(t)dt$$

(3) 시각 $t=a$에서의 $t=b$까지 점P가 실제로 움직인 거리 s는

$s=\int_a^b|v(t)|dt$ ← 경과 거리 : 점P가 움직인 거리의 총합을 뜻한다.

309. 대표 기출 | 4점 | | 21년 수능 | 1st 2nd 3rd

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가 $x(t)$가 두 상수 a, b에 대하여

$$x(t)=t(t-1)(at+b)\ \ (a\neq 0)$$

이다. 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $\int_0^1|v(t)|dt=2$를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $\int_0^1 v(t)dt=0$

ㄴ. $|x(t_1)|>1$인 t_1인 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.

ㄷ. $0\leq t\leq 1$인 모든 t에 대하여 $|x(t)|<1$이면 $x(t_2)=0$인 t_2가 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

310. 대표 기출 | 3점 | | 23년 평가원 | 1st 2nd 3rd

실수 $a(a\geq 0)$에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$를

$$v(t)=-t(t-1)(t-a)(t-2a)$$

라 하자. 점 P가 시각 $t=0$일 때 출발한 후 운동 방향을 한 번만 바꾸도록 하는 a에 대하여, 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{7}{30}$ ③ $\frac{4}{15}$
④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

311. 대표 기출 | 4점 | | 23년 수능 | 1st 2nd 3rd

시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t\geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=t^2-6t+5,\ \ v_2(t)=2t-7$$

이다. 시각 t에서의 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, 함수 $f(t)$는 구간 $[0,\ a]$에서 증가하고, 구간 $[a,\ b]$에서 감소하고, 구간 $[b,\ \infty)$에서 증가한다. 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 Q가 움직인 거리는? (단, $0<a<b$)

① $\frac{15}{2}$ ② $\frac{17}{2}$ ③ $\frac{19}{2}$
④ $\frac{21}{2}$ ⑤ $\frac{23}{2}$

312. 대표 기출 | 4점 | | 22년 수능 | 1st 2nd 3rd

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$와 가속도 $a(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \leq t \leq 2$일 때, $v(t) = 2t^3 - 8t$이다.
(나) $t \geq 2$일 때, $a(t) = 6t + 4$이다.

시각 $t = 0$에서 $t = 3$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오.

313. 대표 기출 | 3점 | | 21년 평가원 | 1st 2nd 3rd

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 3t^2 - 4t + k$$

이다. 시각 $t = 0$에서 점 P의 위치는 0이고, 시각 $t = 1$에서 점 P의 위치는 -3이다. 시각 $t = 1$에서 $t = 3$까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

314. 대표 기출 | 4점 | | 22년 평가원 | 1st 2nd 3rd

시각 $t = 0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t) = 2 - t, \quad v_2(t) = 3t$$

이다. 출발한 시각부터 점 P가 원점으로 돌아올 때까지 점 Q가 움직인 거리는?

① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

315. 대표 기출 | 4점 | | 20년 수능 | 1st 2nd 3rd

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 2t - 6$$

이다. 점 P가 시각 $t = 3$에서 $t = k\,(k > 3)$까지 움직인 거리가 25일 때, 상수 k의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

316. 대표 기출 | 4점 | | 20년 평가원 | 1st 2nd 3rd

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = -4t+5$$

이다. 시각 $t=3$에서 점 P의 위치가 11일 때, 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는?

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

317. 대표 기출 | 3점 | | 20년 평가원 | 1st 2nd 3rd

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = t^2 - at \ (a>0)$$

이다. 점 P가 시각 $t=0$일 때부터 움직이는 방향이 바뀔 때까지 움직인 거리가 $\frac{9}{2}$이다. 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

318. 유사 기출 | 3점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = t^2 - 4t + 3$$

이다. 점 P가 시각 $t=1$, $t=a$ $(a>1)$에서 운동 방향을 바꿀 때, 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 움직인 거리는?

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3
④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

319. 유사 기출 | 3점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t) = 12t - 12,\ v_2(t) = 3t^2 + 2t - 12$$

이다. 시각 $t=k$ $(k>0)$에서 두 점 P, Q의 위치가 같을 때, 시각 $t=0$에서 $t=k$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오.

320. 유사 기출 | 3점 | | 22년 교육청 | 1st 2nd 3rd

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=4t^3-48t$$

이다. 시각 $t=k(k>0)$에서 점 P의 가속도가 0일 때, 시각 $t=0$에서 $t=k$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오. (단, k는 상수이다.)

321. 유사 기출 | 3점 | | 22년 교육청 | 1st 2nd 3rd

시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2+6t-a$$

이다. 시각 $t=3$에서의 점 P의 위치가 6일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

322. 유사 기출 | 3점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3t^2-15t+k, \quad v_2(t)=-3t^2+9t$$

이다. 점 P와 점 Q가 출발한 후 한 번만 만날 때, 양수 k의 값을 구하시오.

323. 유사 기출 | 3점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=12-4t$일 때, 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오.

324. 유사 기출 | 4점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=3t^2-12t+9$이다. 점 P가 $t=0$일 때 원점을 출발하여 처음으로 운동 방향을 바꾼 순간의 위치를 A라 하자. 점 P가 A에서 방향을 바꾼 순간부터 다시 A로 돌아올 때까지 움직인 거리를 구하시오.

325. 유사 기출 | 4점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=-4t+8$$

일 때, $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오.

STEP2

326. 고 난 도 | 4점 | | 22년 교육청 | 1st 2nd 3rd

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_1^x (x-t)f(t)\,dt=3$$

을 만족시킬 때, $\int_1^2 (4x+1)f(x)\,dx$의 값은?

① 15 ② 18 ③ 21
④ 24 ⑤ 27

327. 고 난 도 | 4점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=1$인 삼차함수 $f(x)$와 양의 실수 p에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g'(0)=0$
>
> (나) $g(x)=\begin{cases} f(x-p)-f(-p) & (x<0) \\ f(x+p)-f(p) & (x\ge 0)\end{cases}$

$\int_0^p g(x)\,dx=20$일 때, $f(5)$의 값을 구하시오.

328. 고 난 도 | 4점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

두 상수 a, $b(b\neq 1)$과 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 도함수 $g'(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
>
> (나) $|x|<2$일 때, $g(x)=\int_0^x (-t+a)\,dt$이고
> $|x|\ge 2$일 때, $|g'(x)|=f(x)$이다.
>
> (다) 함수 $g(x)$는 $x=1$, $x=b$에서 극값을 갖는다.

$g(k)=0$을 만족시키는 모든 실수 k의 값이 합이 $p+q\sqrt{3}$일 때, $p\times q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.)

329. 고 난 도 | 4점 | | 23년 평가원 | 1st 2nd 3rd

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(9)$의 값을 구하시오.

> $x\ge 1$인 모든 실수 x에 대하여
> $g(x)\ge g(4)$이고 $|g(x)|\ge |g(3)|$이다.

330. 고난도 | 4점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(1+x)+f(1-x)=0$이다.
(나) $\int_{-1}^{3} f'(x)dx = 12$

$f(4)$의 값은?

① 24 ② 28 ③ 32
④ 36 ⑤ 40

331. 고난도 | 4점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

최고차항의 계수가 1이고 $f'(2)=0$인 이차함수 $f(x)$가 모든 자연수 n에 대하여

$$\int_{4}^{n} f(x)dx \geq 0$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $f(2)<0$
ㄴ. $\int_{3}^{4} f(x)dx > \int_{4}^{2} f(x)dx$
ㄷ. $6 \leq \int_{4}^{6} f(x)dx \leq 14$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

332. 고난도 | 4점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2-4x+1$이고 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{0}^{x} f(t)dt = 1$일 때, $f(2)$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

333. 고난도 | 4점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$2x^2 f(x) = 3\int_{0}^{x} (x-t)\{f(x)+f(t)\}dt$$

를 만족시킨다. $f'(2)=4$일 때, $f(6)$의 값을 구하시오.

334. 고난도 | 4점 | | 22년 교육청 | 1st 2nd 3rd

양수 a와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x \{f'(t+a)\times f'(t-a)\}\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $g(x)$는 $x=\frac{1}{2}$과 $x=\frac{13}{2}$에서만 극값을 갖는다.

$f(0)=-\frac{1}{2}$일 때, $a\times f(1)$의 값을 구하시오.

335. 고난도 | 4점 | | 22년 교육청 | 1st 2nd 3rd

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$\int_t^x f(s)\,ds=0$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기
ㄱ. $f(x)=x^2(x-1)$일 때, $g(1)=1$이다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이면 $g(a)=3$인 실수 a가 존재한다.
ㄷ. $\lim_{t\to b}g(t)+g(b)=6$을 만족시키는 실수 b의 값이 0과 3뿐이면 $f(4)=12$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

336. 고난도 | 4점 | | 22년 교육청 | 1st 2nd 3rd

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$$\int_0^1 f'(x)dx=\int_0^2 f'(x)dx=0$$

을 만족시킬 때, $f'(1)$의 값은?

① -4　② -3　③ -2
④ -1　⑤ 0

337. 고난도 | 4점 | | 22년 교육청 | 1st 2nd 3rd

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x+2) & (x<0) \\ \int_0^x tf(t)\,dt & (x\geq 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 실수 a에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=|g(x)-g(a)|$$

라 할 때, 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은?

① $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$　② $-\frac{7\sqrt{3}}{6}$　③ $-\sqrt{3}$
④ $-\frac{5\sqrt{3}}{6}$　⑤ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

338. 고 난 도 . | 4점 | | 22년 교육청 |

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1이고 상수항이 0인 삼차함수 $g(x)$가 있다. 양의 상수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $x|g(x)|=\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)dt$이다.

(나) 방정식 $g(f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$\int_{-2a}^{2a}f(x)dx$의 값을 구하시오

339. 고 난 도 | 4점 | | 22년 교육청 |

최고차항의 계수가 3인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=x^2\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x t^2 f(t)\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.
(나) 방정식 $g'(x)=0$의 모든 실근은 0, 3이다.

$\int_0^3|f(x)|dx$의 값을 구하시오.

340. 고 난 도 | 4점 | | 22년 교육청 |

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$, $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(t)$를

$$g(t)=\int_t^{t+1}f(x)\,dx-\int_0^1|f(x)|\,dx$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

| 보기 |

ㄱ. $g(0)=0$이면 $g(-1)<0$이다.
ㄴ. $g(-1)>0$이면 $f(k)=0$을 만족시키는 $k<-1$인 실수 k가 존재한다.
ㄷ. $g(-1)>1$이면 $g(0)<-1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

341. 고 난 도 | 4점 | | 22년 교육청 |

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2+at$$

이다. 시각 $t=0$에서의 점 P의 위치와 시각 $t=6$에서의 점 P의 위치가 서로 같을 때, 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 움직인 거리는? (단, a는 상수이다.)

① 64 ② 66 ③ 68
④ 70 ⑤ 72

342. 고난도 | 4점 | | 22년 교육청 |

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3(t-2)(t-a) \quad (a>2\text{인 상수})$$

이다. 점 P의 시각 $t=0$에서의 위치는 0이고, $t>0$에서 점 P의 위치가 0이 되는 순간은 한 번뿐이다.

$v(8)$의 값은?

① 27 ② 36 ③ 45 ④ 54 ⑤ 63

343. 고난도 | 4점 | | 22년 교육청 |

수직선 위의 점 A(6)과 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 이 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각 $t(t \geq 0)$에서의 점 P의 속도 $v(t)$를

$$v(t)=3t^2+at \quad (a>0)$$

이라 하자. 시각 $t=2$에서 점 P와 점 A 사이의 거리가 10일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

344. 고난도 | 4점 | | 21년 수능 |

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)=x$이다.
(나) 어떤 상수 a, b에 대하여 구간 $[0,\ \infty)$에서 $f(x+1)-xf(x)=ax+b$이다.

$60 \times \int_1^2 f(x)\,dx$의 값을 구하시오.

345. 고난도 | 4점 | | 21년 수능 |

최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 방정식 $f'(x)=0$이 닫힌구간 $[t,\ t+2]$에서 갖는 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{t \to a+} g(t)+\lim_{t \to a-} g(t) \leq 2$이다.
(나) $g(f(1))=g(f(4))=2$, $g(f(0))=1$

$f(5)$의 값을 구하시오.

346. 고난도 | 4점 | | 21년 평가원 | 1st 2nd 3rd

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(0)=0,\ f(1)=1,\ \int_{0}^{1} f(x)\,dx=\frac{1}{6}$$

을 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-3}^{2} g(x)\,dx$의 값은?

(가) $g(x)=\begin{cases} -f(x+1)+1 & (-1<x<0) \\ f(x) & (0\le x\le 1) \end{cases}$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{17}{6}$ ③ $\frac{19}{6}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{23}{6}$

347. 고난도 | 4점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

양수 a와 일차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_{0}^{x}(t^2-4)\{|f(t)|-a\}\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.

(나) $g(2)=5$

$g(0)-g(-4)$의 값을 구하시오.

348. 고난도 | 4점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

실수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$$f(x)=3x+a,\ g(x)=\int_{2}^{x}(t+a)f(t)\,dt$$

라 하자. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $h(-1)$의 최솟값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

(가) 곡선 $y=h(x)$ 위의 어떤 점에서의 접선이 x축이다.

(나) 곡선 $y=|h(x)|$가 x축과 평행한 직선과 만나는 서로 다른 점의 개수의 최댓값은 4이다.

349. 고난도 | 4점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$에 대하여 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 세 실근 $\alpha,\ 0,\ \beta\ (\alpha<0<\beta)$가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=9$는 서로 다른 세 실근을 갖는다.

(나) $f(\alpha)=-16$

함수 $g(x)=|f'(x)|-f'(x)$에 대하여 $\int_{0}^{10} g(x)\,dx$의 값은?

① 48 ② 50 ③ 52 ④ 54 ⑤ 56

350. 고난도 | 4점 | | 20년 수능 |

실수 $a(a>1)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(x+1)(x-1)(x-a)$$

라 하자. 함수

$$g(x)=x^2\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x t^2 f(t)\,dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a의 최댓값은?

① $\frac{9\sqrt{2}}{8}$ ② $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
④ $\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

351. 고난도 | 4점 | | 21년 평가원 |

최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=f'(2)=0$인 삼차함수 $f(x)$와 양수 p에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x)-f(0) & (x\le 0) \\ f(x+p)-f(p) & (x>0) \end{cases}$$

이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $p=1$일 때, $g'(1)=0$이다.
ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 양수 p의 개수는 1이다.
ㄷ. $p\ge 2$일 때, $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx\ge 0$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

352. 고난도 | 4점 | | 21년 교육청 |

최고차항의 계수가 4이고 $f(0)=f'(0)=0$을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \int_0^x f(t)dt+5 & (x<c) \\ \left|\int_0^x f(t)dt-\frac{13}{3}\right| & (x\ge c) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 c의 개수가 1일 때, $g(1)$의 최댓값은?

① 2 ② $\frac{8}{3}$ ③ $\frac{10}{3}$
④ 4 ⑤ $\frac{14}{3}$

353. 고난도 | 4점 | | 20년 교육청 |

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt+f(x)$$

라 할 때, 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0을 갖는다.
(나) 함수 $g(x)$의 도함수 $y=g'(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

$f(2)$의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

354. 고난도 | 4점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+f(-x)}{x^2}=3$

(나) $f(0)=-1$

$\int_{-3}^{3}f(x)\,dx$의 값은?

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

355. 고난도 | 4점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 P_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 P_1의 좌표는 $(1,\ 1)$이다.

(나) 점 P_n의 x좌표는 a_n이다.

(다) 직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 기울기는 $\frac{1}{2}a_{n+1}$이다.

$x\geq 1$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 모든 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[a_n,\ a_{n+1}]$에서 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$과 일치할 때, $\int_{1}^{11}f(x)\,dx$의 값은?

① 140 ② 145 ③ 150 ④ 155 ⑤ 160

356. 고난도 | 4점 | | 20년 교육청 | 1st 2nd 3rd

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$, $f(x+3)=f(x)$이고 $\int_{-1}^{2}\{f(x)+x^2-1\}^2\,dx$의 값이 최소가 되도록 하는 연속함수 $f(x)$에 대하여 $\int_{-1}^{26}f(x)\,dx$의 값을 구하시오.

357. 고난도 | 4점 | | 20년 평가원 | 1st 2nd 3rd

실수 전체의 집합에서 연속인 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)\geq g(x)$

(나) $f(x)+g(x)=x^2+3x$

(다) $f(x)g(x)=(x^2+1)(3x-1)$

$\int_{0}^{2}f(x)dx$의 값은?

① $\frac{23}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{29}{6}$ ④ $\frac{16}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$

358. 고난도 | 4점 | | 20년 교육청 |

$t \geq 6-3\sqrt{2}$인 실수 t에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2+tx & (x<0) \\ -3x^2+tx & (x \geq 0) \end{cases}$$

일 때, 다음 조건을 만족시키는 실수 k의 최솟값을 $g(t)$라 하자.

> (가) 닫힌구간 $[k-1,\ k]$에서 함수 $f(x)$는 $x=k$에서 최댓값을 갖는다.
> (나) 닫힌구간 $[k,\ k+1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=k+1$에서 최솟값을 갖는다.

$3\int_{2}^{4}\{6g(t)-3\}^2dt$의 값을 구하시오.

359. 고난도 | 4점 | | 20년 교육청 |

양의 실수 t와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(t)=\frac{f(t)-f(0)}{t}$$

이라 하자. 두 함수 $f(x)$와 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(t)$의 최솟값은 0이다.
> (나) x에 대한 방정식 $f'(x)=g(a)$를 만족시키는 x의 값은 a와 $\frac{5}{3}$이다. (단, $a>\frac{5}{3}$인 상수이다.)

자연수 m에 대하여 집합 A_m을

$$A_m=\{x \mid f'(x)=g(m),\ 0<x \leq m\}$$

이라 할 때, $n(A_m)=2$를 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합을 구하시오.

360. 고난도 | 4점 | | 23년 교육청 |

세 양수 a, b, k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} ax & (x<k) \\ -x^2+4bx-3b^2 & (x \geq k) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

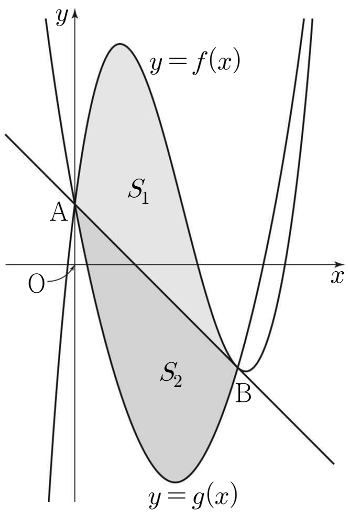
ㄱ. $a=1$이면 $f'(k)=1$이다.
ㄴ. $k=3$이면 $a=-6+4\sqrt{3}$이다.
ㄷ. $f(k)=f'(k)$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

361. 고난도 | 4점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

그림과 같이 삼차함수 $f(x)=x^3-6x^2+8x+1$의 그래프와 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, 점 $\mathrm{B}(k,\ f(k))$에서 만나고, 곡선 $y=f(x)$위의 점 B에서의 접선이 점 A를 지난다.
곡선 $y=f(x)$와 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=g(x)$와 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자.

$S_1=S_2$ 일 때, $\int_0^k g(x)dx$의 값은? (단, k는 양수이다.)



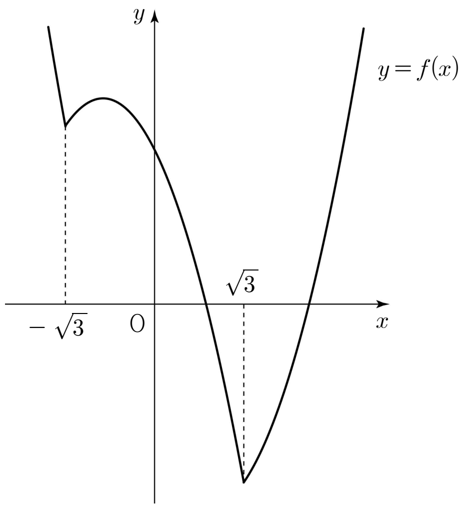
① $-\frac{17}{2}$　② $-\frac{33}{4}$　③ -8
④ $-\frac{31}{4}$　⑤ $-\frac{15}{2}$

362. 고난도 | 4점 | | 23년 교육청 | 1st 2nd 3rd

실수 $t\left(\sqrt{3}<t<\frac{13}{4}\right)$에 대하여 두 함수

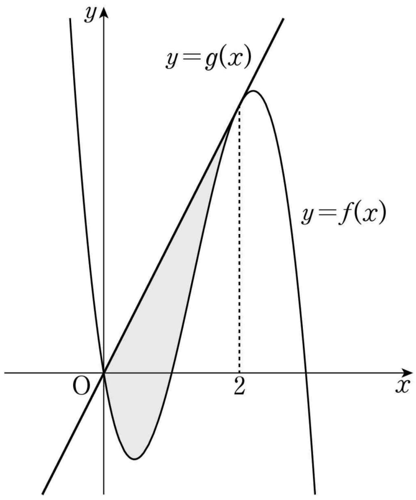
$$f(x)=|x^2-3|-2x,\ g(x)=-x+t$$

의 그래프가 만나는 서로 다른 네 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$라 하자. $x_4-x_1=5$일 때, 닫힌구간 $[x_3,\ x_4]$에서 두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 $p-q\sqrt{3}$이다. $p\times q$의 값을 구하시오. (단, $p,\ q$는 유리수이다.)



363. 고 난 도 | 4점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

최고차항의 계수가 -3인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선 $y=g(x)$가 곡선 $y=f(x)$와 원점에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는?



① $\dfrac{7}{2}$ ② $\dfrac{15}{4}$ ③ 4

④ $\dfrac{17}{4}$ ⑤ $\dfrac{9}{2}$

364. 고 난 도 | 4점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(1-x)=-f(1+x)$를 만족시킨다. 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=-6x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $4S$의 값을 구하시오.

365. 고 난 도 | 4점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

두 양수 a, b $(a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$를
$f(x)=(x-a)(x-b)$라 하자.

$$\int_0^a f(x)dx=\frac{11}{6},\quad \int_0^b f(x)dx=-\frac{8}{3}$$

일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 4 ② $\dfrac{9}{2}$ ③ 5

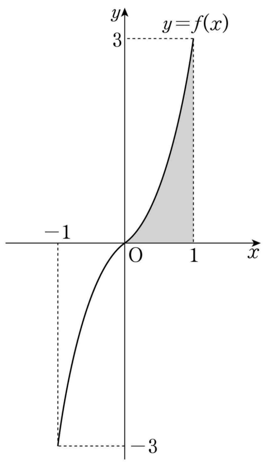
④ $\dfrac{11}{2}$ ⑤ 6

366. 고난도 | 4점 | | 20년 교육청 |

닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$를 정의역에서 증가하고 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$가 성립할 때, 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 $g(x)=f(x)$이다.
> (나) 닫힌구간 $[2n-1,\ 2n+1]$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $2n$만큼, y축의 방향으로 $6n$만큼 평행이동한 그래프이다.
> (단, n은 자연수이다.)

$f(1)=3$이고 $\int_0^1 f(x)\,dx=1$일 때, $\int_3^6 g(x)\,dx$의 값을 구하시오.



367. 고난도 | 4점 | | 20년 교육청 |

최고차항의 계수가 4인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt-xf(x)$$

라 하자. 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\le g(3)$이고 함수 $g(x)$는 오직 1개의 극값만 가진다. $\int_0^1 g'(x)\,dx$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

368. 고난도 | 4점 | | 20년 교육청 |

함수 $f(x)=\begin{cases}-3x^2 & (x<1)\\ 2(x-3) & (x\ge 1)\end{cases}$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x (t-1)f(t)\,dt$$

라 할 때, 실수 t에 대하여 직선 $y=t$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(t)$라 하자.
$\left|\lim_{t\to a+}h(t)-\lim_{t\to a-}h(t)\right|=2$를 만족시키는 모든 실수 a에 대하여 $|a|$의 값의 합을 S라 할 때, $30S$의 값을 구하시오.

369. 고난도 | 4점 | | 19년 평가원 | 1st 2nd 3rd

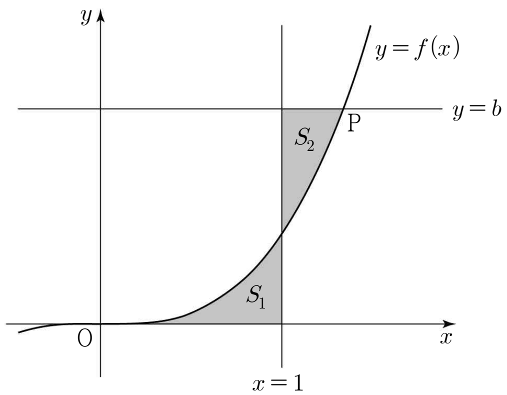
함수 $f(x)=x^2-2x$에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=-f(x-1)-1$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

370. 고난도 | 4점 | | 19년 교육청 | 1st 2nd 3rd

함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^3$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=1$, $y=b$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. $S_1=S_2$일 때, $30a$의 값을 구하시오. (단, $a>1$)



371. 고난도 | 4점 | | 19년 교육청 | 1st 2nd 3rd

$x=-3$과 $x=a\,(a>-3)$에서 극값을 갖는 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-3) \\ \displaystyle\int_0^x |f'(t)|\,dt & (x\geq -3) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(-3)=-16$, $g(a)=-8$
(나) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(다) 함수 $g(x)$는 극솟값을 갖는다.

$\left|\displaystyle\int_a^4 \{f(x)+g(x)\}dx\right|$의 값을 구하시오.

372. 고 난 도 | 4점 | | 19년 교육청 | 1st 2nd 3rd

양수 a에 대하여 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=g(0)$

(나) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0,\ \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}=0$

(다) $\int_0^a \{g(x)-f(x)\}dx=36$

$3\int_0^a |f(x)-g(x)|dx$의 값을 구하시오.

373. 고 난 도 | 4점 | | 21년 평가원 | 1st 2nd 3rd

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=-4t^3+12t^2$$

이다. 시각 $t=k$에서 점 P의 가속도가 12일 때, 시각 $t=3k$에서 $t=4k$까지 점 P가 움직인 거리는? (단, k는 상수이다.)

① 23 ② 25 ③ 27 ④ 29 ⑤ 31

374. 고 난 도 | 4점 | | 21년 교육청 | 1st 2nd 3rd

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=4t-10$ 이다. 점 P의 시각 $t=1$에서의 위치와 점 P의 시각 $t=k(k>1)$에서의 위치가 서로 같을 때, 상수 k의 값은?

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

빠른정답

1. ②
2. ④
3. ①
4. ②
5. ⑤
6. ②
7. ①
8. ⑤
9. ⑤
10. ③
11. ④
12. ②
13. ④
14. ③
15. ②
16. ④
17. ⑤
18. ④
19. ①
20. ④
21. ②
22. ③
23. ⑤
24. ④
25. ③
26. ①
27. ②
28. ①
29. ②
30. ③
31. ⑤
32. 5
33. ⑤
34. ①
35. ③
36. ③
37. ②
38. ②
39. 27
40. 8
41. ④
42. 9
43. ③
44. ①
45. 5
46. 12
47. ③
48. ①
49. ①
50. ③
51. ③
52. ④
53. ②
54. ①
55. ⑤
56. ①
57. ③
58. ④
59. 6
60. ④
61. 6
62. ④
63. ①
64. ④
65. ②
66. ⑤
67. ①
68. ③
69. ⑤
70. ⑤
71. 24
72. ②
73. ②
74. ④
75. ④
76. ④
77. ③
78. 19
79. ②
80. 226
81. ②
82. ②
83. 6
84. ⑤
85. ③
86. ③
87. ①
88. 8
89. ①
90. 3
91. 4
92. ①
93. 48
94. ②
95. ④
96. ⑤
97. 11
98. 3
99. ⑤
100. 13
101. ⑤
102. 13
103. ④
104. ③
105. ④
106. 21
107. ②
108. ④
109. ②
110. ③
111. ④
112. ③
113. ④
114. ④
115. ③
116. ①
117. ①
118. ③
119. ①
120. 8
121. ⑤
122. ③
123. ⑤
124. ①
125. ①
126. ④
127. ①
128. ③
129. ①
130. 2
131. 10
132. ②
133. 10
134. ①
135. 24
136. ①
137. 19
138. 17
139. 4
140. ⑤
141. 112
142. 12
143. 25
144. ④
145. ⑤
146. ①
147. ①
148. 10
149. ②
150. ①
151. 11
152. ①
153. 22
154. 22
155. 7
156. ③
157. ③
158. 24
159. ③
160. 6
161. ①
162. ⑤
163. 6
164. 483
165. ②
166. 2
167. 11
168. ⑤
169. ③
170. 108
171. ①
172. ②
173. 8
174. ①
175. ①
176. ①
177. 15
178. ⑤
179. ③
180. ①
181. ③
182. ③
183. ①
184. 4
185. 7
186. 61
187. ⑤
188. 15
189. 12
190. ③
191. 51
192. 21
193. 3
194. ④
195. ⑤
196. 32
197. 11
198. ②
199. ⑤
200. 27
201. 6
202. 30
203. ④
204. ②
205. 6
206. 8
207. ②
208. ⑤
209. 29
210. 729
212. 380
213. ⑤
214. ②
215. ④
216. 240
217. ③
218. 121
219. 58
220. ④
221. 82
222. ③
223. ①
224. 64
225. 39
226. 6
227. 160
228. 105
229. 38
230. 108
231. ④
232. 64
233. ①
234. ①
235. 21
236. ①
237. ①
238. 34
239. ⑤
240. 16
241. 61
242. 42
243. ⑤
244. ④
245. ⑤
246. 19
247. ②
248. ③
249. ③
250. ⑤
251. 33
252. ④
253. 15
254. 15
255. 16
256. 4
257. 8
258. ⑤
259. 12
260. 8
261. 9
262. 20
263. 9
264. 20
265. 9
266. 17
267. 13
268. ③
269. 27
270. 8
271. ②
272. ①
273. ④
274. ④
275. ②
276. ①
277. 9
278. ⑤
279. ③
280. ①
281. ④
282. 13
283. 5
284. ①
285. ①
286. 7
287. ④
288. 182
289. ②
290. ⑤
291. ③
292. ②
293. ③
294. ①
295. ④
296. ②
297. ④
298. 36
299. ②
300. 80
301. 14
302. ①

303. ③
304. ①
305. ②
306. 32
307. ③
308. ②
309. ③
310. ③
311. ②
312. 17
313. 6
314. ⑤
315. ③
316. ④
317. ③
318. ②
319. 102
320. 80
321. 16
322. 18
323. 20
324. 8
325. 10
326. ⑤
327. 66
328. 32
329. 39
330. ①
331. ③
332. ①
333. 24
334. 30
335. ②
336. ④
337. ①
338. 4
339. 8
340. ⑤
341. ①
342. ②
343. ④
344. 110
345. 9
346. ②
347. 16
348. 251
349. ②
350. ④
351. ⑤
352. ⑤
353. ②
354. ⑤
355. ②
356. 12
357. ③
358. 37
359. 35
360. ⑤
361. ②
363. ③
364. 2
365. ②
366. 41
367. ②
368. 80
369. ③
370. 40
371. 80
372. 340
373. ③
374. ③

25학년도 수능대비

수능CCTV

수학2

정답 및 풀이

빠른정답

1. ①
2. ④
3. ①
4. ②
5. ⑤
6. ②
7. ①
8. ⑤
9. ⑤
10. ③
11. ④
12. ②
13. ④
14. ③
15. ②
16. ④
17. ⑤
18. ④
19. ①
20. ④
21. ②
22. ③
23. ⑤
24. ④
25. ③
26. ①
27. ②
28. ①
29. ②
30. ③
31. ⑤
32. 5
33. ⑤
34. ①
35. ③
36. ③
37. ②
38. ②
39. 27
40. 8
41. ④
42. 9
43. ③
44. ①
45. 5
46. 12
47. ③
48. ①
49. ①
50. ③
51. ③
52. ④
53. ②
54. ①
55. ⑤
56. ①
57. ③
58. ④
59. 6
60. ④
61. 6
62. ④
63. ①
64. ④
65. ②
66. ⑤
67. ①
68. ③
69. ⑤
70. ⑤
71. 24
72. ②
73. ②
74. ④
75. ④
76. ④
77. ③
78. 19
79. ②
80. 226
81. ②
82. ②
83. 6
84. ⑤
85. ③
86. ③
87. ①
88. 8
89. ①
90. 3
91. 4
92. ①
93. 48
94. ②
95. ④
96. ⑤
97. 11
98. 3
99. ⑤
100. 13
101. ⑤
102. 13
103. ④
104. ③
105. ④
106. 21
107. ②
108. ④
109. ②
110. ③
111. ④
112. ③
113. ④
114. ④
115. ③
116. ①
117. ①
118. ③
119. ①
120. 8
121. ⑤
122. ③
123. ⑤
124. ①
125. ①
126. ④
127. ①
128. ③
129. ①
130. 2
131. 10
132. ②
133. 10
134. ①
135. 24
136. ①
137. 19
138. 17
139. 4
140. ⑤
141. 112
142. 12
143. 25
144. ④
145. ⑤
146. ①
147. ①
148. 10
149. ②
150. ①
151. 11
152. ①
153. 22
154. 22
155. 7
156. ③
157. ③
158. 24
159. ③
160. 6
161. ①
162. ⑤
163. 6
164. 483
165. ②
166. 2
167. 11
168. ⑤
169. ③
170. 108
171. ①
172. ②
173. 8
174. ①
175. ①
176. ①
177. 15
178. ⑤
179. ③
180. ①
181. ③
182. ③
183. ①
184. 4
185. 7
186. 61
187. ⑤
188. 15
189. 12
190. ③
191. 51
192. 21
193. 3
194. ④
195. ⑤
196. 32
197. 11
198. ②
199. ⑤
200. 27
201. 6
202. 30
203. ④
204. ②
205. 6
206. 8
207. ②
208. ⑤
209. 29
210. 729
212. 380
213. ⑤
214. ②
215. ④
216. 240
217. ③
218. 121
219. 58
220. ④
221. 82
222. ③
223. ①
224. 64
225. 39
226. 6
227. 160
228. 105
229. 38
230. 108
231. ④
232. 64
233. ①
234. ①
235. 21
236. ①
237. ①
238. 34
239. ⑤
240. 16
241. 61
242. 42
243. ⑤
244. ④
245. ⑤
246. 19
247. ②
248. ③
249. ③
250. ⑤
251. 33
252. ④
253. 15
254. 15
255. 16
256. 4
257. 8
258. ⑤
259. 12
260. 8
261. 9
262. 20
263. 9
264. 20
265. 9
266. 17
267. 13
268. ③
269. 27
270. 8
271. ②
272. ①
273. ④
274. ④
275. ②
276. ①
277. 9
278. ⑤
279. ③
280. ①
281. ④
282. 13
283. 5
284. ①
285. ①
286. 7
287. ④
288. 182
289. ②
290. ⑤
291. ③
292. ②
293. ③
294. ①
295. ④
296. ②
297. ④
298. 36
299. ②
300. 80
301. 14
302. ①

303. ③
304. ①
305. ②
306. 32
307. ③
308. ②
309. ③
310. ③
311. ②
312. 17
313. 6
314. ⑤
315. ③
316. ④
317. ③
318. ②
319. 102
320. 80
321. 16
322. 18
323. 20
324. 8
325. 10
326. ⑤
327. 66
328. 32
329. 39
330. ①
331. ③
332. ①
333. 24
334. 30
335. ②
336. ④
337. ①
338. 4
339. 8
340. ⑤
341. ①
342. ②
343. ④
344. 110
345. 9
346. ②
347. 16
348. 251
349. ②
350. ④
351. ⑤
352. ⑤
353. ②
354. ⑤
355. ②
356. 12
357. ③
358. 37
359. 35
360. ⑤
361. ②
363. ③
364. 2
365. ②
366. 41
367. ②
368. 80
369. ③
370. 40
371. 80
372. 340
373. ③
374. ③

정답 및 풀이

1. ②
[출제의도] 함수의 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?
$x\to 0-$일 때 $f(x)\to -2$이고
$x\to 1+$일 때 $f(x)\to 1$이므로
$\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)$
$=-2+1=-1$

2. ④
$x\to -1-$일 때 $f(x)\to 3$이므로
$\lim_{x\to -1-} f(x)=3$
또, $x\to 2$일 때, $f(x)\to 1$이므로
$\lim_{x\to 2} f(x)=1$
따라서
$\lim_{x\to -1-} f(x)+\lim_{x\to 2} f(x)=3+1=4$

3. ①
$\lim_{x\to 0-} f(x)=-2$
$\lim_{x\to 2+} f(x)=0$
따라서
$\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 2+} f(x)=-2+0=-2$

4. ②
$x=1+$일 때, $f(x)\to 1$이므로
$\lim_{x\to 1+} f(x)=1$
또, $x=3-$일 때, $f(x)\to 2$이므로
$\lim_{x\to 3-} f(x)=2$
따라서
$\lim_{x\to 1+} f(x)-\lim_{x\to 3-} f(x)=1-2=-1$

5. ⑤
$\lim_{x\to 0+} f(x)=2,\ \lim_{x\to 2-} f(x)=0$
이므로
$\lim_{x\to 0+} f(x)+\lim_{x\to 2-} f(x)$
$=2+0$
$=2$

6. ②
$x\to -1+$일 때, $f(x)\to 0$이므로
$\lim_{x\to -1+} f(x)=0$
또, $x\to 1-$일 때, $f(x)\to 2$이므로
$\lim_{x\to 1-} f(x)=2$
따라서 $\lim_{x\to -1+} f(x)+\lim_{x\to 1-} f(x)=0+2=2$

7. ①
주어진 그래프에서
$\lim_{x\to 0+} f(x)=0,\ \lim_{x\to 1-} f(x)=2$
이므로
$\lim_{x\to 0+} f(x)-\lim_{x\to 1-} f(x)=0-2=-2$

8. ⑤
$\lim_{x\to -2+} f(x)+\lim_{x\to 2-} f(x)=4+2=6$

9. ⑤
$\lim_{x\to -1+} f(x)+\lim_{x\to 2-} f(x)=2+3=5$

10. ③
$\lim_{x\to -1+} f(x)=0,\ \lim_{x\to 1-} f(x)=1$
따라서 $\lim_{x\to -1+} f(x)+\lim_{x\to 1-} f(x)=0+1=1$

11. ④
[출제의도] 함수의 극한을 이해하여 함수의 그래프에서 좌극한과 우극한을 구한다.
$\lim_{x\to -1+} f(x)+\lim_{x\to 1-} f(x)=0+1=1$

12. ②
[출제의도] 함수의 극한 이해하기
$\lim_{x\to -1} f(x)=1,\ \lim_{x\to 1+} f(x)=1$
$\lim_{x\to -1} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)=2$

13. ④
[출제의도] 함수의 극한값을 구한다.
$\lim_{x\to -1+} f(x)+\lim_{x\to 2-} f(x)=4+(-2)=2$

14. ③
$\lim_{x\to -1-} f(x)=2,\ \lim_{x\to 1+} f(x)=-1$
따라서 $\lim_{x\to -1-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)=1$

15. ②
$\lim_{x\to -2+} f(x)+\lim_{x\to 2-} f(x)=2+3=5$

16. ④
$\lim_{x\to 1-} f(x)+\lim_{x\to 2+} f(x)=3+1=4$

17. ⑤
$\lim_{x\to 1+} f(x)=2,\ \lim_{x\to 0-} f(x)=4,\ \lim_{x\to 0-} (x-1)=-1$에서
$$\lim_{x\to 1+} f(x)-\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1+} f(x)-\frac{\lim_{x\to 0-} f(x)}{\lim_{x\to 0-} x-1}$$
$$=2-\left(\frac{4}{-1}\right)=6$$

18. ④

$f(-1)+\lim_{x\to 2+}f(x)=1+3=4$

19. ①

$\lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)=0+(-1)=-1$

20. ④

$f(0)=3$, $\lim_{x\to 2+}f(x)=5$이므로

$f(0)+\lim_{x\to 2+}f(x)=8$

21. ②

$\lim_{x\to -2-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)=-1+3=2$

22. ③

$f(0)=1$, $\lim_{x\to 1+}f(x)=2$이므로

$f(0)+\lim_{x\to 1+}f(x)=1+2=3$

23. ⑤

$f(3)+\lim_{x\to 1-}f(x)=1+1=2$

24. ④

[출제의도] 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-2}+3x}{x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}+3}{1+\frac{5}{x}}$$

$$=\frac{\sqrt{1-0}+3}{1+0}$$

$$=4$$

25. ③

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+4)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}(x+4)$$

$$=2+4$$

$$=6$$

26. ①

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-6x}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{3x(x-2)}{(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}3x$$

$$=6$$

27. ②

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+9x+8}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+8)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}(x+8)$$

$$=-1+8$$

$$=7$$

28. ①

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{x}=3$에서

$x\to 0$일 때 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}\{f(x)+g(x)\}=0$이다.

이때 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 연속함수이므로

$f(0)+g(0)=0$ …… ㉠

따라서

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)-f(0)-g(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(x)-f(0)}{x}+\frac{g(x)-g(0)}{x}\right\}$$

$=f'(0)+g'(0)=3$ …… ㉡

이다.

또, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{xg(x)}=2$에서

$x\to 0$일 때 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}\{f(x)+3\}=0$이므로

$f(0)+3=0$에서

$f(0)=-3$

따라서 ㉠에서

$g(0)=3$

따라서

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{xg(x)}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(x)-f(0)}{x}\times\frac{1}{g(x)}\right\}$$

$$=\frac{f'(0)}{g(0)}$$

$$=\frac{f'(0)}{3}$$

$$=2$$

에서 $f'(0)=6$

따라서 ㉡에서

$g'(0)=-3$

그러므로 곱의 미분법에 의해

$h'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$

$=6\times 3+(-3)\times(-3)$

$=27$

29. ②

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$에서 $x\to 0$이면 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

따라서 $f(0)=0$

같은 방법으로 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1$에서

$f(1)=0$

따라서 삼차함수 $f(x)$를

$f(x)=x(x-1)(ax+b)$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}(x-1)(ax+b)=-b$$
이므로
$b=-1$
$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}x(ax+b)=a+b$$
이므로
$a+b=1$
따라서 $a=2$이므로
$f(x)=x(x-1)(2x-1)$
따라서 $f(2)=2\times1\times3=6$

다른 풀이

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$에서 $x\to0$이면 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.
따라서 $f(0)=0$
이때
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)=1$$
같은 방법으로 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=1$에서 $f(1)=0,\ f'(1)=1$
함수 $f(x)$는 삼차함수이고 $f'(0)=f'(1)=1$이므로
$f'(x)=ax(x-1)+1$, 즉 $f'(x)=ax^2-ax+1$
이라 놓으면
$f(x)=\dfrac{a}{3}x^3-\dfrac{a}{2}x^2+x+C$ (C는 적분상수)
$f(0)=0$에서 $C=0$
$f(1)=0$에서 $\dfrac{a}{3}-\dfrac{a}{2}+1=0$
$a=6$이므로 $f(x)=2x^3-3x^2+x$
$\therefore\ f(2)=6$

30. ③
조건 (가), (나)에 의하여
$f(x)g(x)=x^2(2x+a)$ (a는 상수)
로 놓을 수 있다.
조건 (나)에 의하여 $a=-4$이므로
$f(x)g(x)=2x^2(x-2)$
이때 $f(2)$가 최대가 되는 $f(x)$는
$f(x)=2x^2$
이므로 구하는 최댓값은
$f(2)=8$

31. ⑤
$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-3x^2}{x}=10$ 이므로
$f(x)=3x^2+10x+a$ (a는 상수)
$\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)=20$이므로
$3+10+a=20$ 즉, $a=7$
$f(x)=3x^2+10x+7$
따라서 $f(0)=7$

32. 5
$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x+3)=5$$

33. ⑤
$$\lim_{x\to0}\frac{x^2+9x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x+9)}{x}=\lim_{x\to0}(x+9)=9$$

34. ①
[출제의도] 함수의 극한 이해하기
$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{2x-5}-1}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{2x-6}{(x-3)(\sqrt{2x-5}+1)}=\lim_{x\to3}\frac{2}{\sqrt{2x-5}+1}=1$$

35. ③
$$\lim_{x\to2}(x^2+5)=\lim_{x\to2}x^2+\lim_{x\to2}5=4+5=9$$

36. ③
$$\lim_{x\to0}(x^2+x+3)=\lim_{x\to0}x^2+\lim_{x\to0}x+\lim_{x\to0}3=3$$

37. ②
$-x=t$ 로 치환하면
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{-t-\sqrt{t^2-1}}{-t+1}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t+\sqrt{t^2-1}}{t-1}=\lim_{t\to\infty}\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}{1-\frac{1}{t}}=2$$

38. ②
$\displaystyle\lim_{x\to1}(x-1)f(x)=3$이고 $\displaystyle\lim_{x\to1}(x+1)=2$이므로
$$\lim_{x\to1}(x^2-1)f(x)=\lim_{x\to1}(x+1)(x-1)f(x)$$
$$=\lim_{x\to1}(x+1)\times\lim_{x\to1}(x-1)f(x)$$
$=2\times3=6$

39. 27
$\displaystyle\lim_{x\to5}\frac{f(x)-x}{x-5}=8$에서 $\displaystyle\lim_{x\to5}(x-5)=0$이므로
$\displaystyle\lim_{x\to5}\{f(x)-x\}=0$
$f(x)-x$도 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로
$f(x)-x=(x-5)(x+a)$라 하면
$\displaystyle\lim_{x\to5}\frac{f(x)-x}{x-5}=\lim_{x\to5}(x+a)=5+a=8$에서 $a=3$
그러므로 $f(x)=(x-5)(x+3)+x$
따라서 $f(7)=2\times10+7=27$

40. 8
$f(x)$가 다항함수이고

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xf(x)-2x^3+1}{x^2}=5$이므로

$xf(x)=2x^3+5x^2+ax$ (a는 실수)

$x\neq 0$일 때 $f(x)=2x^2+5x+a$이고

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=a=1$

따라서 $f(1)=2+5+1=8$

41. ④

[출제의도] 함수의 극한에 대한 성질을 활용하여 문제 해결하기

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$이므로 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=3$이므로 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0,\ f(1)=0$

$f(x)=(x-1)(2x+a)$ (a는 상수)라 하면

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(2x+a)}{x-1}=2+a=3,\ a=1$

$f(x)=(x-1)(2x+1)$

따라서 $f(3)=14$

42. 9

$\lim\limits_{x\to 2}(x^2+5)=2^2+5=9$

43. ③

$x\to 1$일 때 (분모)→0이고 수렴하므로 (분자)→0

$\therefore\ a+b=0\ \ \therefore\ b=-a\cdots\cdots$ ㉠

$2\sqrt{2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a(x-1)}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}{(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}a(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})=2\sqrt{2}a$

$\therefore\ a=1$

㉠에서 $b=-1$

$\therefore\ ab=-1$

44. ①

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-(a+2)x+2a}{x^2-b}=3$에서 $x\to 2$일 때 (분자)→0이므로 (분모)→0이어야 한다.

따라서 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-b)=4-b=0$에서 $b=4$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-(a+2)x+2a}{x^2-b}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-a)}{(x-2)(x+2)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-a}{x+2}=\dfrac{2-a}{2+2}=3$

$\therefore\ a=-10$

$\therefore\ a+b=-10+4=-6$

45. 5

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+4x+a}{x+1}=b$에서

(분모) → 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) → 0

$\lim\limits_{x\to -1}(x^2+4x+a)=0$이므로 $1-4+a=0$,

$a=3$

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+4x+3}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x+3)}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to -1}(x+3)=2=b$

따라서 $a+b=5$

46. 12

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-x^2}{ax+1}=2$에서 $f(x)=x^2+2ax+b$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{f(x)}=\dfrac{1}{4}$에서 $f(1)=0$이므로 $1+2a+b=0$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2+2ax+b}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2+2ax-2a-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x-1)(x+2a+1)}$

$=\dfrac{1}{2a+2}=\dfrac{1}{4}$

따라서 $a=1,\ b=-3$

$\therefore f(3)=12$

47. ③

$\lim\limits_{x\to 2}2f(x)=2\times\lim\limits_{x\to 2}f(x)=2$이므로

$\lim\limits_{x\to 2}g(x)=\lim\limits_{x\to 2}\{2f(x)+g(x)-2f(x)\}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\{2f(x)+g(x)\}-\lim\limits_{x\to 2}2f(x)$

$=8-2=6$

48. ①

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+ax+b}{x-1} & (x\neq 1)\\ 4 & (x=1)\end{cases}$이고

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+ax+b}{x-1}=4$에서 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 1}(x^3+ax+b)=1+a+b=0,\ b=-a-1$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+ax-a-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+a+1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+a+1)$

$=3+a=4$

따라서 $a=1,\ b=-2$이므로 $a\times b=-2$

49. ①

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=5$이고 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=0$

$f(x)=2x^2+ax+b$에서

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=2+a+b=0$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이고

$f'(x)=4x+a$이므로

$f'(1)=4+a=5$에서 $a=1$

$2+a+b=0$에서 $b=-3$

따라서 $f(x)=2x^2+x-3$이므로

$f(2)=7$

50. ③

점 P의 좌표를 $(s,\ s^2)$이라 하면 점 P에서 곡선 $y=x^2$에 접하는 직선의 기울기가 $2t$가 되어야 한다.

$f(x)=x^2$이라 하면

$f'(x)=2x$

이므로

$2s=2t$

에서

$s=t$

즉, $\mathrm{P}(t,\ t^2)$

이때 직선 OP의 방정식은 $y=tx$이므로

$tx=2tx-1$

에서

$x=\frac{1}{t}$

즉, 점 Q의 좌표는

$\mathrm{Q}\left(\frac{1}{t},\ 1\right)$

따라서

$$\lim_{t\to1-}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{1-t}=\lim_{t\to1-}\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{t}-t\right)^2+(1-t^2)^2}}{1-t}$$
$$=\lim_{t\to1-}\frac{(1-t^2)\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}{1-t}$$
$$=\lim_{t\to1-}(1+t)\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}$$
$$=2\sqrt{2}$$

51. ③

$$\lim_{k\to0+}\frac{\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{OB}}-\overline{\mathrm{BC}}}=\lim_{k\to0+}\frac{\sqrt{k^2+9k}-3\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}-\sqrt{k}}$$
$$=\lim_{k\to0+}\frac{\sqrt{k+9}-3}{\sqrt{k+1}-1}=\lim_{k\to0+}\frac{k(\sqrt{k+1}+1)}{k(\sqrt{k+9}+3)}$$
$$=\lim_{k\to0+}\frac{\sqrt{k+1}+1}{\sqrt{k+9}+3}=\frac{1}{3}$$

52. ④

삼각형 PHO는 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{OH}}^2=\overline{\mathrm{OP}}^2-\overline{\mathrm{PH}}^2$

$\mathrm{P}(t,\ \sqrt{t})$이므로 $\overline{\mathrm{OP}}^2=t^2+t$

선분 PH의 길이는

점 P와 직선 $x-2y=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\overline{\mathrm{PH}}=\frac{|t-2\sqrt{t}|}{\sqrt{5}}$

$\overline{\mathrm{OH}}^2=t^2+t-\frac{(t-2\sqrt{t})^2}{5}=\frac{4t^2+4t\sqrt{t}+t}{5}$

따라서 $\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{OH}}^2}{\overline{\mathrm{OP}}^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{4t^2+4t\sqrt{t}+t}{5(t^2+t)}$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{4+\frac{4\sqrt{t}}{t}+\frac{1}{t}}{5+\frac{5}{t}}=\frac{4}{5}$$

53. ②

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

즉,

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=4-f(1)$

에서

$f(1)=4-f(1)$

$2f(1)=4$

따라서 $f(1)=2$

54. ①

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서도 연속이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2+}f(x)=f(2)$

이때

$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}(3x-a)$

$=6-a$

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}(x^2+a)$

$=4+a$

$f(2)=4+a$

그러므로

$6-a=4+a=4+a$

따라서

$2a=2,\ a=1$

55. ⑤

[출제의도] 함수의 연속의 정의를 이해하고 이를 이용하여 미정계수의 값을 구할 수 있는가?

함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-1$,

$x=3$에서 연속이어야 한다.

(i) 함수 $|f(x)|$가 $x=-1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to-1-}|f(x)|=\lim_{x\to-1+}|f(x)|=|f(-1)|$$

이어야 한다. 이때

$$\lim_{x\to-1-}|f(x)|=\lim_{x\to-1-}|x+a|=|-1+a|,$$

$$\lim_{x\to-1+}|f(x)|=\lim_{x\to-1+}|x|=1,$$

$|f(-1)|=|-1|=1$

이므로

$|-1+a|=1$

$a>0$이므로 $a=2$

(ii) 함수 $|f(x)|$가 $x=3$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to3-}|f(x)|=\lim_{x\to3+}|f(x)|=|f(3)|$$

$$\lim_{x\to3-}|f(x)|=\lim_{x\to3-}|x|=3,$$

$$\lim_{x\to3+}|f(x)|=\lim_{x\to3+}|bx-2|=|3b-2|,$$

$|f(3)|=|3b-2|$

이므로

$|3b-2|=3$

$b>0$이므로 $b=\frac{5}{3}$

(i), (ii)에 의하여

$a+b=2+\frac{5}{3}=\frac{11}{3}$

56. ①

[출제의도] 함수가 연속이 되도록 하는 모든 상수의 값의 합을 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=a$에서 연속이어야 한다. 즉,

$$f(a)=\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)$$

가 성립해야 한다.

$f(a)=-2a+a=-a$

$$\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a-}(-2x+a)=-2a+a=-a$$

$$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}(ax-6)=a^2-6$$

이므로 $f(a)=\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)$에서

$-a=a^2-6$

$a^2+a-6=(a+3)(a-2)=0$

$a=-3$ 또는 $a=2$

따라서 구하는 모든 상수 a의 값의 합은

$(-3)+2=-1$

57. ③

$\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2=0$에서

$\{f(x)-x\}\{f(x)+x\}\{f(x)-1\}=0$

이므로

$f(x)=1,\ f(x)=-x,\ f(x)=x$

이때, $f(0)=1$ 또는 $f(0)=0$이다.

(i) $f(0)=1$일 때,

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고, 최댓값이 1이므로

$f(x)=1$

이다. 이때, 함수 $f(x)$의 최솟값이 0이 아니므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $f(0)=0$일 때,

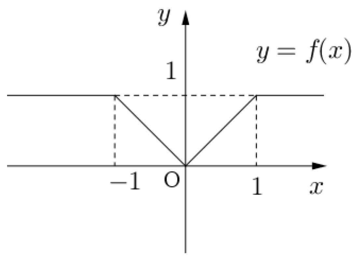
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고, 최댓값이 1이므로

$$f(x)=\begin{cases}|x| & (|x|\le1)\\ 1 & (|x|>1)\end{cases}$$

이다.

(i), (ii)에서

$$f(x)=\begin{cases}|x| & (|x|\le1)\\ 1 & (|x|>1)\end{cases}$$



따라서

$f\left(-\frac{4}{3}\right)=1,\ f(0)=0,\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

이므로

$f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)=1+0+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

58. ④

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1+}f(x)=f(-1)$$

이 성립해야 한다. 이때,

$$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1-}(2x+a)=-2+a$$

$$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1+}(x^2-5x-a)=6-a$$

$f(-1)=-2+a$

이므로

$-2+a=6-a$

따라서 $a=4$

59. 6

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$이어야 하고

$$\lim_{x\to1-}f(x)=-3+a$$

이므로

$$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}\frac{x+b}{\sqrt{x+3}-2}=-3+a$$

즉, $x\to1+$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

따라서 $b=-1$이므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(x+3)-4}$$

$$=\lim_{x\to1+}(\sqrt{x+3}+2)$$

$$=4$$

즉, $-3+a=4$이므로 $a=7$

따라서 $a+b=6$

60. ④

함수 $f(x)$가 $x=a$를 제외한 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $\{f(x)\}^2$이 $x=a$에서 연속이면 함수 $\{f(x)\}^2$은 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수 $\{f(x)\}^2$이 $x=a$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to a+}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to a-}\{f(x)\}^2=\{f(a)\}^2$$

이어야 한다.

이때,

$$\lim_{x\to a+}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to a+}(2x-a)^2=a^2$$

$$\lim_{x\to a-}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to a-}(-2x+6)^2=(-2a+6)^2$$

$$\{f(a)\}^2=(2a-a)^2=a^2$$

이므로

$a^2=(-2a+6)^2$에서

$3(a-2)(a-6)=0$

$a=2$ 또는 $a=6$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은

$2+6=8$

61. 6

$x=2$에서 연속이므로 $a+2=3a-2$이다. 따라서 $a=2$이고

$f(2)=\lim\limits_{x\to2}4$이다.

62. ④

함수 $f(x)$는 $x=0$에서만 불연속이고, 함수 $g(x)$는 $x=a$에서만 불연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$, $x=a$에서만 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다.

만일 $a<0$이면

$f(0)g(0)=2\times(-1)=-2$

$$\lim_{x\to0+}f(x)g(x)=2\times(-1)=-2$$

$\lim\text{for}m x\to0-f(x)g(x)=3\times(-1)=-3$이므로

함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 불연속이다.

즉, $a\ge0$이다.

이때, $x=a$에서 함수 $f(x)g(x)$의 연속성을 조사하면

$f(a)g(a)=(-2a+2)(2a-1)$

$$\lim_{x\to a+}f(x)g(x)=(-2a+2)(2a-1)$$

$\lim\limits_{x\to a-}f(x)g(x)=(-2a+2)\times2a$ 이므로 함수 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속이려면

$(-2a+2)(2a-1)=(-2a+2)\times2a$이어야 한다.

따라서 $a=1$

63. ①

함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $x=2$에서 연속이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to2-}\{f(x)\}^2=\lim\limits_{x\to2+}\{f(x)\}^2=\{f(2)\}^2$이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to2-}\{f(x)\}^2=(5-2a)^2$, $\lim\limits_{x\to2+}\{f(x)\}^2=1$, $\{f(2)\}^2=1$에서

$(5-2a)^2=1$

따라서 $a=2$ 또는 $a=3$

모든 상수 a의 값의 합은 $2+3=5$이다.

64. ④

방정식 $f(x)=0$의 실근은 0, m, n이고

m, n은 자연수이므로 사잇값의 정리에 의하여

$f(1)f(3)<0$에서 $f(2)=0$

$f(3)f(5)<0$에서 $f(4)=0$

$f(x)=x(x-2)(x-4)$이므로 $f(6)=6\times4\times2=48$

65. ②

함수 $(x^2+ax+b)f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to1-}(x^2+ax+b)f(x)=\lim_{x\to1+}(x^2+ax+b)f(x)$$

그래프에서 $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to1+}f(x)=3$이므로

$$\lim_{x\to1-}(x^2+ax+b)f(x)=(1+a+b)\times1=1+a+b,$$

$$\lim_{x\to1+}(x^2+ax+b)f(x)=(1+a+b)\times3=3(1+a+b)$$

에서 $1+a+b=3(1+a+b)$

따라서 $a+b=-1$

66. ⑤

ㄱ. $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to1-}g(x)=-1$이므로

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to1-}f(x)\times\lim\limits_{x\to1-}g(x)=0\times(-1)=0$ (거짓)

ㄴ. $f(1)=0$, $g(1)=-1$이므로 $f(1)g(1)=0\times(-1)=0$ (참)

ㄷ. $\lim\limits_{x\to1+}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to1+}g(x)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to1+}f(x)\times\lim\limits_{x\to1+}g(x)=1\times1=1$

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)g(x)=0$에서

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)g(x)\neq\lim\limits_{x\to1-}f(x)g(x)$이므로

극한값 $\lim\limits_{x\to1}f(x)g(x)$는 존재하지 않는다.

그러므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ

67. ①

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$$f(2)=\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)$$

$f(2)=\lim_{x\to 2+}f(x)=b-4$이므로

$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2-}\frac{x^2+3x+a}{x-2}=b-4$

$\lim_{x\to 2-}(x-2)=0$이므로 $\lim_{x\to 2-}(x^2+3x+a)=0$

$a+10=0$에서 $a=-10$

$\lim_{x\to 2-}\frac{x^2+3x-10}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{(x-2)(x+5)}{x-2}=7$이므로

$b-4=7,\ b=11$

따라서 $a+b=-10+11=1$

68. ③

[출제의도] 함수의 연속 이해하기

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2-}(x-1)=\lim_{x\to 2+}(x^2-ax+3)=f(2)$

$1=7-2a$

따라서 $a=3$

69. ⑤

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x=3$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 3-}f(x)=\lim_{x\to 3+}f(x)=f(3)$

$\lim_{x\to 3-}\frac{x^2+ax+b}{x-3}$의 값이 존재하고, $x\to 3-$ 일 때

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 3-}(x^2+ax+b)=0$이므로

$9+3a+b=0,\ b=-3a-9$

$\lim_{x\to 3-}\frac{x^2+ax-3a-9}{x-3}=\lim_{x\to 3-}\frac{(x-3)(x+3+a)}{x-3}$

$=\lim_{x\to 3-}(x+3+a)$

$=6+a$

한편, $\lim_{x\to 3+}f(x)=f(3)=7$

그러므로 $6+a=7$

따라서 $a=1,\ b=-12$이므로 $a-b=13$

70. ⑤

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-}(-2x+1)=\lim_{x\to 1+}(x^2-ax+4)=f(1)$

$-1=5-a$

따라서 $a=6$

71. 24

함수 $h(x)=f(x)g(x)$가 구간 $(-2,\ 2)$에서 연속이므로

함수 $h(x)$가 $x=-1$과 $x=1$에서 연속이다.

그러므로 이차함수 $g(x)$는 $g(-1)=0,\ g(1)=0$을 만족해야 한다.

이차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$g(x)=(x+1)(x-1)=x^2-1$

따라서 $g(5)=5^2-1=24$

72. ②

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x=1$에서 연속이다.

$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$

$a+3=5,\ a=2$

73. ②

$x\neq 1$일 때 $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=x-2$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}(x-2)=-1$

74. ④

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2-}(x+1)=\lim_{x\to 2+}(x^2-4x+a)=f(2)$

$3=-4+a$

따라서 $a=7$

75. ④

직선 l의 기울기가 1이고 y절편은 $g(t)$이므로

직선 l의 방정식은 $y=x+g(t)$이다.

두 점 A, B의 x좌표를 각각 $\alpha,\ \beta$라 하면

$\alpha,\ \beta$는 이차방정식 $x^2=x+g(t)$즉, $x^2-x-g(t)=0$의 두 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-g(t)$ …… ㉠

한편 $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha+g(t))$, $\mathrm{B}(\beta,\ \beta+g(t))$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}^2=(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2=2(\alpha-\beta)^2$이고

㉠에서 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1+4g(t)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}^2=2+8g(t)$에서 $4t^2=2+8g(t)$

$g(t)=\frac{2t^2-1}{4}$

따라서 $\lim_{t\to\infty}\frac{g(t)}{t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{2t^2-1}{4t^2}=\frac{1}{2}$

76. ④

두 점 A, B의 x좌표를 각각 $\alpha,\ \beta(\alpha<\beta)$라 하면

$\alpha,\ \beta$는 이차방정식 $x^2-tx-1=tx+t+1$,

즉 $x^2-2tx-2-t=0$의 두 실근이므로

$\alpha=t-\sqrt{t^2+t+2},\ \beta=t+\sqrt{t^2+t+2}$

$\beta-\alpha=2\sqrt{t^2+t+2}$이고

직선 AB의 기울기가 t이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{t^2+t+2}\,\sqrt{t^2+1}$

$\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{2\sqrt{(t^2+t+2)(t^2+1)}}{t^2}$

$=2\lim_{t\to\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{t}+\frac{2}{t^2}\right)\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}=2$

77. ③

[출제의도] 함수의 연속을 이해하여 상수의 값을 구한다.

함수 $f(x)$는 $f(1)=0$, $f(a)=0$이고, $\lim_{x\to2-}f(x)=-1$,

$\lim_{x\to2+}f(x)=-4+2a$에서 $\lim_{x\to2-}f(x)\neq\lim_{x\to2+}f(x)$이므로

$x=2$에서 불연속이다. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $h(x)$는 $x=1$, $x=a$, $x=2$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{f(x)}=h(1)$, $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=h(a)$에서

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=0$, $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)=0$이므로

$\lim_{x\to1}g(x)=0$, $\lim_{x\to a}g(x)=0$ 즉, $g(1)=0$, $g(a)=0$

또, $\lim_{x\to2-}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to2+}\frac{g(x)}{f(x)}$, $\frac{g(2)}{-1}=\frac{g(2)}{-4+2a}$ 이므로

$g(2)=0$이고 $g(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$이다.

$$\lim_{x\to1}h(x)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-2)(x-a)}{x-3}=\frac{1-a}{2}$$

$$\lim_{x\to a}h(x)=\lim_{x\to a}\frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{-x(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-1)(x-2)}{-x}=-\frac{(a-1)(a-2)}{a}$$

$h(1)=h(a)$이므로

$$\frac{1-a}{2}=-\frac{(a-1)(a-2)}{a}$$

$a>2$이므로 $a=4$

따라서

$$h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\begin{cases}\frac{(x-2)(x-4)}{x-3} & (x\le2)\\ -\frac{(x-1)(x-2)}{x} & (x>2)\end{cases}$$

이므로

$$h(1)+h(3)=-\frac{3}{2}+\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{13}{6}$$

78. 19

[출제의도] 연속함수의 성질을 이용하여 극한값을 계산할 수 있는가?

함수

$$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0)\\ (x+a)f(x-b) & (x\ge0)\end{cases}$$

이 실수 전체에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 한다.

따라서

$\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0+}g(x)=g(0)$ …… ㉠

이 성립한다.

이때

$\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0-}(x+3)f(x)=3f(0)$,

$\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0+}(x+a)f(x-b)=af(-b)$,

$g(0)=af(-b)$

이므로 ㉠에서

$3f(0)=af(-b)$ …… ㉡

한편,

$$\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$$
$$=\lim_{x\to-3}\frac{|g(x)|}{(x+3)^2\{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\}}$$
$$=\lim_{x\to-3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\}}$$
$$=\lim_{x\to-3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\{\sqrt{0+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\}}$$
$$=\lim_{x\to-3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\times2|g(t)|}\quad\cdots\cdots ㉢$$

이때 $t\neq-3$이고 $t\neq6$인 모든 실수 t에 대하여 ㉢의 값이 존재하므로

$f(x)=(x+3)(x+k)$ (k는 상수)

의 꼴이어야 하고, ㉢에서

$$\lim_{x\to-3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\times2|g(t)|}$$
$$=\lim_{x\to-3}\frac{|(x+3)(x+k)|}{(x+3)^2\times2|g(t)|}$$
$$=\lim_{x\to-3}\frac{|x+k|}{2|g(t)|}\quad\cdots\cdots ㉣$$

이때 $t=3$과 $t=6$에서만 ㉣의 값이 존재하지 않으므로 방정식 $g(x)=0$의 모든 실근은 $x=-3$과 $x=6$ 뿐이다.

주어진 식에서 $g(-3)=0$이므로

$g(6)=0$, 즉 $(6+a)f(6-b)=0$

이어야 한다.

이때 $a>0$이므로

$f(6-b)=0$에서

$6-b=-3$ 또는 $6-b=-k$

따라서 $b=9$ 또는 $k-b=-6$

(ⅰ) $b=9$인 경우

$x<0$에서

$g(x)=(x+3)f(x)=(x+3)^2(x+k)$

이때

$x<0$에서 $g(x)=0$의 해는 -3뿐이므로

$-k\ge0$ 또는 $k=3$ …… ㉤

$x\ge0$에서

$g(x)=(x+a)f(x-9)$

$=(x+a)(x-6)(x-9+k)$

이때 $x\ge0$에서 $g(x)=0$의 해는 6뿐이므로

$9-k<0$ 또는 $9-k=6$ …… ㉥

㉤, ㉥에서

$k=3$

따라서 $f(x)=(x+3)^2$이므로 ㉡에서

$3\times3^2=af(-9),\ 27=36a$

$a=\dfrac{3}{4}$

따라서

$g(4)=(4+a)f(4-b)$

$=\left(4+\dfrac{3}{4}\right)f(-5)$

$=\dfrac{19}{4}\times(-2)^2=19$

(ii) $k-b=-6$인 경우

$x<0$에서

$g(x)=(x+3)f(x)=(x+3)^2(x+k)$

이때 $x<0$에서 $g(x)=0$의 해는 -3뿐이므로

$-k\ge0$ 또는 $k=3$

$x\ge0$에서

$g(x)=(x+a)f(x-b)$

$=(x+a)(x-b+3)(x-b+k)$

$=(x+a)(x-b+3)(x-6)$

이때 $x\ge0$에서 $g(x)=0$의 해는 6뿐이고, $b>3$이므로

$b-3=6$에서

$b=9$

$k-b=-6$에서

$k=3$

따라서 (i)과 같은 결과이므로

$g(4)=19$이다.

79. ②

[출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이용하여 주어진 선분의 길이를 t에 대한 식으로 나타낸 후, 함수의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

두 점 A, B의 좌표를 각각 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$, $\mathrm{B}(b,\ b^2)$이라 하면 x에 대한 이차방정식 $x^2-x-t=0$의 두 근이 a, b이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $a+b=1$, $ab=-t$

그러므로

$\overline{\mathrm{AH}}=a-b=\sqrt{(a-b)^2}$

$=\sqrt{(a+b)^2-4ab}$

$=\sqrt{1+4t}$

또, 점 C의 좌표가 $\mathrm{C}(-a,\ a^2)$이므로

$\overline{\mathrm{CH}}=b-(-a)$

$=b+a=1$

따라서

$\displaystyle\lim_{t\to0+}\frac{\overline{\mathrm{AH}}-\overline{\mathrm{CH}}}{t}$

$\displaystyle=\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt{1+4t}-1}{t}$

$\displaystyle=\lim_{t\to0+}\frac{(\sqrt{1+4t}-1)(\sqrt{1+4t}+1)}{t(\sqrt{1+4t}+1)}$

$\displaystyle=\lim_{t\to+}\frac{(1+4t)-1}{t(\sqrt{1+4t}+1)}$

$\displaystyle=\lim_{t\to0+}\frac{4t}{t(\sqrt{1+4t}+1)}$

$\displaystyle=\lim_{t\to0+}\frac{4t}{\sqrt{1+4t}+1}$

$=\dfrac{4}{1+1}=2$

80. 226

[출제의도] 함수의 극한의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

조건 (가)에 의하여

$\displaystyle\lim_{x\to0}|f(x)-1|=0$이므로

삼차식 $f(x)-1$은 x를 인수로 갖는다.

이차식 $g(x)$에 대하여 $f(x)-1=xg(x)$라 하자.

$\displaystyle\lim_{x\to0+}\frac{|f(x)-1|}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{|xg(x)|}{x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0+}\frac{|x||g(x)|}{x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0+}|g(x)|=|g(0)|$

$\displaystyle\lim_{x\to0-}\frac{|f(x)-1|}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{|xg(x)|}{x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0-}\frac{|x||g(x)|}{x}$

$\displaystyle=-\lim_{x\to0-}|g(x)|=-|g(0)|$

$|g(0)|=-|g(0)|$에서 $g(0)=0$

이차식 $g(x)$도 x를 인수로 가지므로

$f(x)-1=x^2(x+a)$ (a는 실수)라 하면

$f(x)=x^3+ax^2+1$

$xf(x)\ge-4x^2+x$에서

$x(x^3+ax^2+1)\ge-4x^2+x$

$x^4+ax^3+4x^2\ge0$

$x^2(x^2+ax+4)\ge0$

$x^2\ge0$이므로 모든 실수 x에 대하여

$x^2+ax+4\ge0$이 성립한다.

이차방정식 $x^2+ax+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-16\le0$

$-4\le a\le4$

$f(5)=25a+126$이므로 구하는 $f(5)$의 최댓값은

$a=4$일 때, 226이다.

81. ②

$h(x)=2f(x)-3g(x)$라 하면 $f(x)=\dfrac{3g(x)+h(x)}{2}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty,\ \lim_{x\to\infty}h(x)=1$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{g(x)}=0$

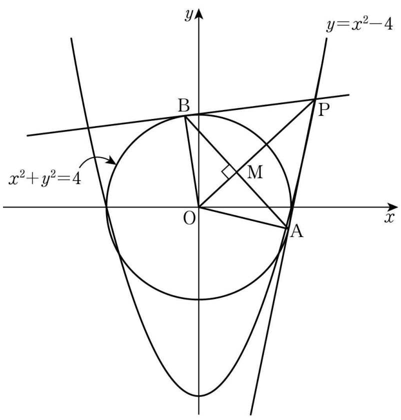
$$\lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)+g(x)}{3f(x)-g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4\left\{\dfrac{3g(x)+h(x)}{2}\right\}+g(x)}{3\left\{\dfrac{3g(x)+h(x)}{2}\right\}-g(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{14g(x)+4h(x)}{7g(x)+3h(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{14+4\times\dfrac{h(x)}{g(x)}}{7+3\times\dfrac{h(x)}{g(x)}}$$

$$=2$$

82. ②



두 선분 AB, OP의 교점을 M이라 하면 직선 OP는 선분 AB를 수직이등분하므로 직각삼각형 OAP와 직각삼각형 OMA는 서로 닮음이다.

삼각형 OAP와 삼각형 OMA의 닮음비는 $\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{OA}}$이므로 넓이의 비는 $\overline{\mathrm{OP}}^2:\overline{\mathrm{OA}}^2$이다.

삼각형 OAP의 넓이는 $\dfrac{S(t)+T(t)}{2}$,

삼각형 OMA의 넓이는 $\dfrac{S(t)}{2}$이므로

$$\overline{\mathrm{OP}}^2:\overline{\mathrm{OA}}^2=\frac{S(t)+T(t)}{2}:\frac{S(t)}{2}$$

$$\overline{\mathrm{OA}}^2\times\frac{S(t)+T(t)}{2}=\overline{\mathrm{OP}}^2\times\frac{S(t)}{2},$$

$$\frac{T(t)}{S(t)}=\frac{\overline{\mathrm{OP}}^2-\overline{\mathrm{OA}}^2}{\overline{\mathrm{OA}}^2}$$

$\overline{\mathrm{OA}}=2$, $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{t^2+(t^2-4)^2}$이므로

$$\frac{T(t)}{S(t)}=\frac{t^2+(t^2-4)^2-2^2}{2^2}=\frac{1}{4}(t+2)(t-2)(t^2-3)$$

따라서

$$\lim_{t\to2+}\frac{T(t)}{(t-2)S(t)}+\lim_{t\to\infty}\frac{T(t)}{(t^4-2)S(t)}$$

$$=\lim_{t\to2+}\frac{(t+2)(t^2-3)}{4}+\lim_{t\to\infty}\frac{(t+2)(t-2)(t^2-3)}{4(t^4-2)}$$

$$=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

83. 6

최고차항의 계수가 1이고 두 점 A$(-2,\ 0)$, P$(t,\ t+2)$를 지나는 이차함수 $f(x)$는

$f(x)=(x+2)(x-t+1)$

그러므로 점 Q의 좌표는 Q$(0,\ 2-2t)$

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{\{t-(-2)\}^2+(t+2-0)^2}=|t+2|\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{AQ}}=\sqrt{\{0-(-2)\}^2+\{(2-2t)-0\}^2}=2\sqrt{t^2-2t+2}$

$$\lim_{t\to\infty}(\sqrt{2}\times\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{AQ}})=\lim_{t\to\infty}\left(2|t+2|-2\sqrt{t^2-2t+2}\right)$$

$$=2\lim_{t\to\infty}\frac{|t+2|^2-(t^2-2t+2)}{|t+2|+\sqrt{t^2-2t+2}}$$

$$=2\lim_{t\to\infty}\frac{6t+2}{|t+2|+\sqrt{t^2-2t+2}}$$

$$=2\lim_{t\to\infty}\frac{6+\dfrac{2}{t}}{\left|1+\dfrac{2}{t}\right|+\sqrt{1-\dfrac{2}{t}+\dfrac{2}{t^2}}}$$

$$=2\times\frac{6+0}{1+1}$$

$$=6$$

84. ⑤

두 점 A$(\sqrt{2},\ 0)$, B$(0,\ \sqrt{2})$를 지나는 직선을 l이라 할 때, 직선 l의 방정식은 $x+y-\sqrt{2}=0$이고

원의 중심 O와 직선 l 사이의 거리는 1이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=2$이므로 원 위의 한 점 P와 직선 l 사이의 거리를 h라 하면 삼각형 ABP의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times2\times h=h$$

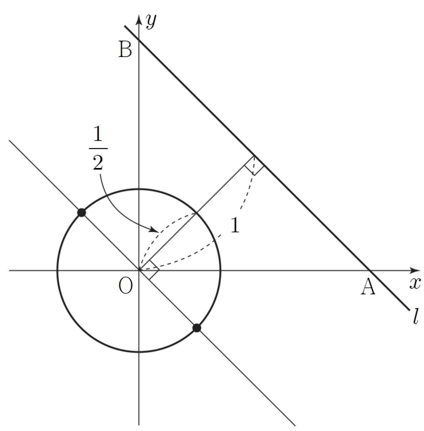
따라서 삼각형 ABP의 넓이가 자연수가 되도록 하는 점 P의 개수는 h가 자연수가 되도록 하는 점 P의 개수와 같다.

ㄱ. $t=\dfrac{1}{2}$일 때,

중심이 원점이고 반지름의 길이가 $\dfrac{1}{2}$인 원 위의 점 중 h가 자연수가 되는 경우는 $h=1$인 경우뿐이다.

$h=1$이 되는 원 위의 점의 개수는 2이므로

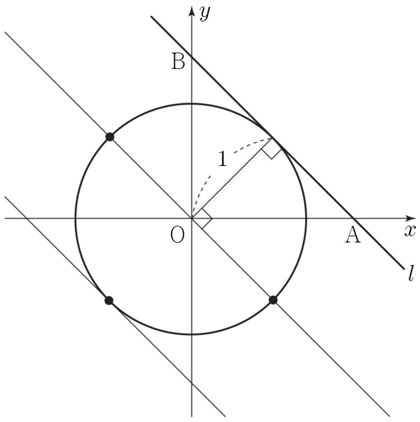
$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$ (참)



ㄴ. $t=1$일 때,

중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 중 h가 자연수가 되는 경우는 $h=1$인 경우와 $h=2$인 경우이다.

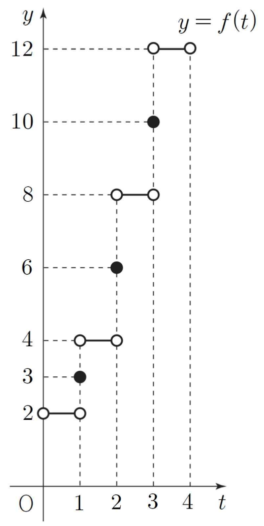
$h=1$이 되는 원 위의 점의 개수는 2이고
$h=2$가 되는 원 위의 점의 개수는 1이므로
$f(1)=3$



$1<t<2$일 때,
중심이 원점이고 반지름의 길이가 t인 원 위의 점 중 h가 자연수가 되는 경우는 $h=1$인 경우와 $h=2$인 경우이다.
$h=1$이 되는 원 위의 점의 개수는 2이고
$h=2$가 되는 원 위의 점의 개수는 2이므로
$\lim_{t\to 1+}f(t)=4$
$\lim_{t\to 1+}f(t)\neq f(1)$ (참)
ㄷ. ㄴ과 같은 방법으로 구간 $(0,\ 4)$에서 함수 $f(t)$를 구하면

$$f(t)=\begin{cases}2 & (0<t<1)\\ 3 & (t=1)\\ 4 & (1<t<2)\\ 6 & (t=2)\\ 8 & (2<t<3)\\ 10 & (t=3)\\ 12 & (3<t<4)\end{cases}$$

함수 $f(t)$의 그래프는 다음과 같다.



$0<a<4$인 실수 a에 대하여 함수 $f(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값은 1, 2, 3이므로 a의 개수는 3이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

85. ③

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=1$에서 다항함수 $f(x)$는 3차식이고 최고차항의 계수가 1임을 알 수 있다.
$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=2$에서 다항함수 $f(x)$는 $f(-1)=0$이고
$f(x)=x^3+ax^2+bx+c(a,b,c$상수$)$라 하면 $x+1$나눈 몫
$x^2+(a-1)x+(-a+b+1)$에 $x=-1$을 대입 한 값이 2임을 알 수 있다.
정리하면
$f(-1)=0$에서 $a-b+c=1$ •••①
$x^2+(a-1)x+(-a+b+1)$에 $x=-1$대입 한 값이 2 이므로
$2a-b=1$•••②
$f(1)\leq 12$이므로 $a+b+c\leq 11$•••③
②식에서 $b=2a-1$, ①식에서 $c=1+b-a$ 를 ③식에 대입하면
$a+b+1+b-a\leq 11$ 이므로 $b\leq 5$ 그러므로 b의 최댓값은5,
$b=2a-1$이므로 $2a-1\leq 5,\ a\leq 3$그러므로 a최댓값은3
③식에서 a,b의 최댓값이 3,5이므로 c의 값은 3이 된다.
그러므로 $f(x)=x^3+3x^2+5x+3$이 된다.
따라서 $f(2)=33$

86. ③
(ⅰ) $n=1$일 때,
$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^2+1}=6$
$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=4$ 를 만족시키려면
$f(x)=4x^3+3x^2+ax$ (a는 상수) 의 꼴이어야 한다.
이때,
$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}(4x^2+3x+a)=a$ 이므로 $a=4$
즉, $f(x)=4x^3+3x^2+4x$이므로
$f(1)=4+3+4=11$
(ⅱ) $n=2$일 때,
$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^3+1}=6$
$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=4$ 를 만족시키려면
$f(x)=10x^3+bx^2$ (b는 상수) 의 꼴이어야 한다.
이때,
$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}(10x+b)=b$ 이므로 $b=4$
즉, $f(x)=10x^3+4x^2$이므로
$f(1)=10+4=14$
(ⅲ) $n\geq 3$ 일 때,
$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}=6$
$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=4$ 를 만족시키려면
$f(x)=6x^{n+1}+cx^n$ (c는 상수) 의 꼴이어야 한다.
이때,

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to0}(6x+c)=c$ 이므로 $c=4$

즉, $f(x)=6x^{n+1}+4x^n$이므로

$f(1)=6+4=10$

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 구하는 $f(1)$의 최댓값은 14

87. ①

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-3x-5}=2$이므로

$f(x)=2x^2+ax+b$

함수 $f(x)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x=3$에서 연속이다.

$\lim_{x\to3}f(x)g(x)=f(3)g(3)$

$\lim_{x\to3}\frac{2x^2+ax+b}{x-3}=18+3a+b$에서

(분모) → 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) → 0

$\lim_{x\to3}(2x^2+ax+b)=0$이므로 $18+3a+b=0$

$\lim_{x\to3}\frac{2x^2+ax+b}{x-3}=0$

$b=-3a-18$이므로 $f(x)=(x-3)(2x+a+6)$

$\lim_{x\to3}\frac{2x^2+ax+b}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(2x+a+6)}{x-3}$

$=\lim_{x\to3}(2x+a+6)=0$

이므로 $a=-12$, $b=18$

$f(x)=2x^2-12x+18$

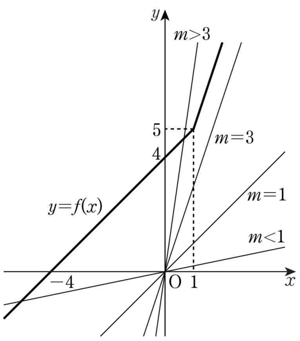
따라서 $f(1)=8$

88. 8

직선 $y=mx$는 실수 m의 값에 관계없이 항상 원점을 지나므로

직선 $y=mx$와 함수

$f(x)=\begin{cases}x+4 & (x<1)\\ 3x+2 & (x\ge1)\end{cases}$의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 함수 $g(m)$은

$g(m)=\begin{cases}1 & (m<1 \text{ 또는 } m>3)\\ 0 & (1\le m\le3)\end{cases}$

즉, 함수 $g(m)$은 $m=1$과 $m=3$에서 불연속이다.

그런데 함수 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x=1$, $x=3$에서도 연속이 되어야 한다.

(ⅰ) $x=1$일 때

$\lim_{x\to1-}g(x)h(x)=1\times h(1)=h(1)$,

$\lim_{x\to1+}g(x)h(x)=0\times h(1)=0$

함수 $g(x)h(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1}g(x)h(x)$의 값이 존재한다.

즉, $\lim_{x\to1-}g(x)h(x)=\lim_{x\to1+}g(x)h(x)$에서 $h(1)=0$

(ⅱ) $x=3$일 때

$\lim_{x\to3-}g(x)h(x)=0\times h(3)=0$,

$\lim_{x\to3+}g(x)h(x)=1\times h(3)=h(3)$

함수 $g(x)h(x)$는 $x=3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to3}g(x)h(x)$의 값이 존재한다.

즉, $\lim_{x\to3-}g(x)h(x)=\lim_{x\to3+}g(x)h(x)$에서 $h(3)=0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $h(1)=h(3)=0$이므로 최고차항의

계수가 1인 이차함수 $h(x)$는 $h(x)=(x-1)(x-3)$

따라서 $h(5)=4\times2=8$

89. ①

$\lim_{x\to2+}f(x)g(x)=\lim_{x\to2+}f(x)\times\lim_{x\to2+}g(x)=\lim_{x\to2+}f(x)$

$\lim_{x\to2-}f(x)g(x)=\lim_{x\to2-}f(x)\times\lim_{x\to2-}g(x)=0$이고

함수 $f(x)g(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$f(2)=\lim_{x\to2+}f(x)=0$

같은 방법으로 $f(-2)=\lim_{x\to-2-}f(x)=0$

그러므로 $f(x)=(x+2)(x-2)$

함수 $f(x-a)g(x)=(x-a+2)(x-a-2)g(x)$의 그래프가 한

점에서만 불연속이 되기 위해서는 $a-2=2$ 또는

$a+2=-2$이므로 $a=4$ 또는 $a=-4$

따라서 구하는 값은 $4\times(-4)=-16$

90. 3

$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{a}{1-0}=2$이므로 $a=2$

$\lim_{x\to1}\frac{a(x-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{a(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

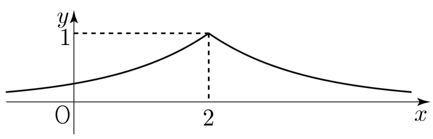
$=\lim_{x\to1}\frac{a}{x+1}=\frac{a}{2}=b$

$a=2$이므로 $b=1$

따라서 $a+b=3$

91. 4

함수 $f(x)=\begin{cases}2^{x-2} & (x<2)\\ 2^{-x+2} & (x\ge2)\end{cases}$의 그래프는 아래와 같다.



$g(x)=|f(x)-k|+k$

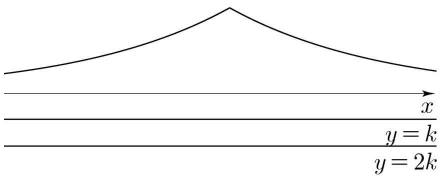
$=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq k) \\ -f(x)+2k & (f(x)<k) \end{cases}$

i) $k\leq 0$일 때,

$f(x)>k$이므로 $g(x)=f(x)>0\geq 2k$

함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=2k$의 그래프가 만나는 점이 없다.

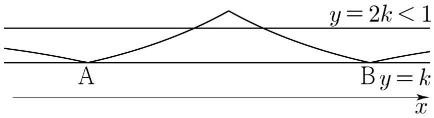
$h(k)=0$



ii) $0<k<\dfrac{1}{2}$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 두 점을 각각 A, B라 하면, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 아래와 같다.

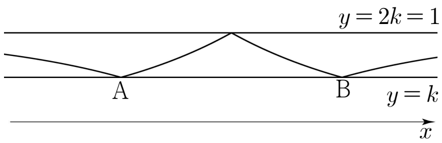
$h(k)=2$



iii) $k=\dfrac{1}{2}$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 두 점을 각각 A, B라 하면, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 아래와 같다.

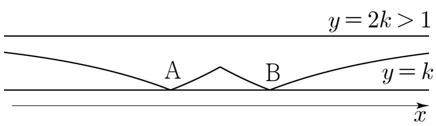
$h\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$



iv) $\dfrac{1}{2}<k<1$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 두 점을 각각 A, B라 하면, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 아래와 같다.

$h(k)=0$

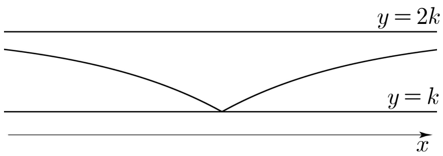


v) $k\geq 1$일 때,

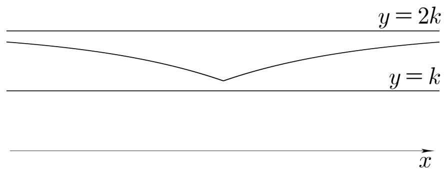
$g(x)=-f(x)+2k<2k$이므로

$h(k)=0$

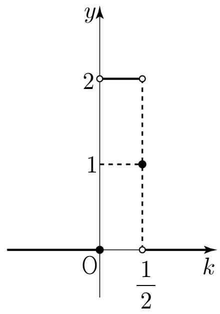
① $k=1$인 경우



② $k>1$인 경우



따라서 $y=h(k)$의 그래프는 아래와 같다.



$\lim\limits_{k\to\frac{1}{4}-}h(k)=2$이고 $\lim\limits_{k\to\frac{1}{4}-}h\left(k+\dfrac{1}{4}\right)=2$

따라서 $\lim\limits_{k\to\frac{1}{4}-}h(k)h\left(k+\dfrac{1}{4}\right)=4$

92. ①

함수 $|f(x)|$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 0-}|f(x)|=\lim\limits_{x\to 0-}|2x+a|=|a|$,

$|f(0)|=\lim\limits_{x\to 0+}|f(x)|=\lim\limits_{x\to 0+}|x^2+bx+c|=|c|$에서

$a=c$ 또는 $a=-c$

조건 (가)에서

4가 함수 $g(t)$의 치역의 원소 중 하나이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 실수 t가 존재해야 한다.

그러므로 직선 $y=t$가

$x<0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와

서로 다른 두 점에서 만나도록 하고,

$x\geq 0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와

서로 다른 두 점에서 만나도록 하는

실수 t가 존재해야 한다.

따라서 $a>0,\ b<0,\ c=a$이고

함수 $y=x^2+bx+c\ (x\geq 0)$의 최솟값이 0보다 작아야 한다.

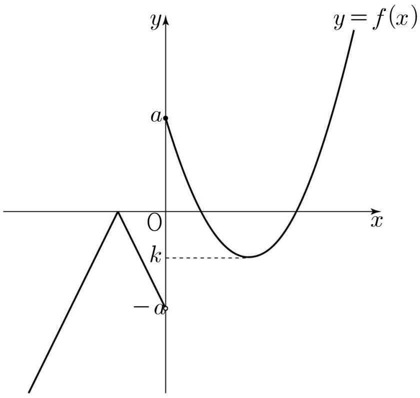
함수 $y=x^2+bx+c\ (x\geq 0)$의 최솟값을 k라 하자.

(i) $-a<k<0$일 때

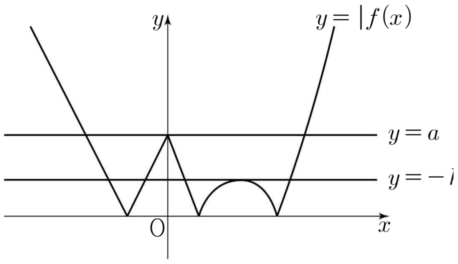
함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은

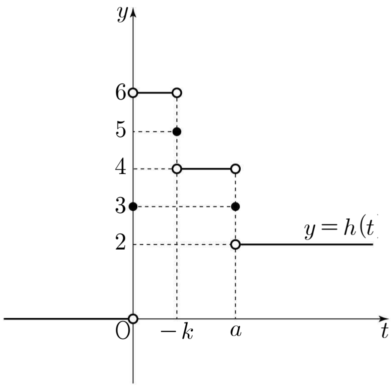
그림과 같으므로 함수 $g(t)$의

치역은 $\{1, 2, 3, 4\}$이다.

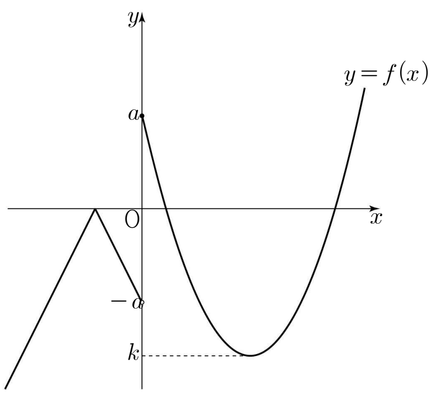


함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형과
함수 $y=h(t)$의 그래프는 그림과 같다.

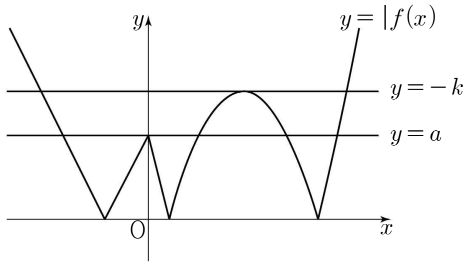


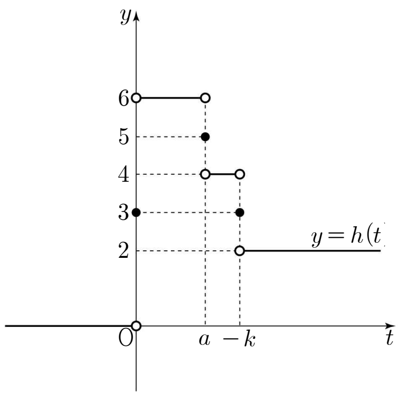


(ii) $k<-a$일 때
함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은
그림과 같으므로 함수 $g(t)$의
치역은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이다.

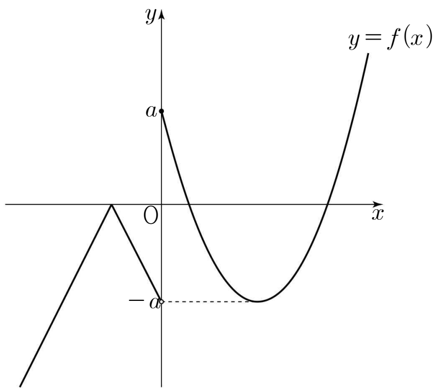


함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형과
함수 $y=h(t)$의 그래프는 그림과 같다.

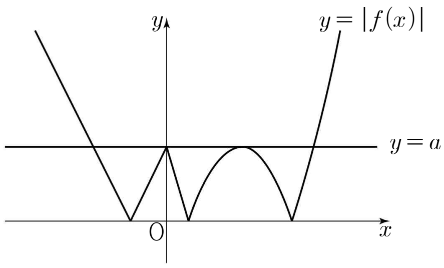


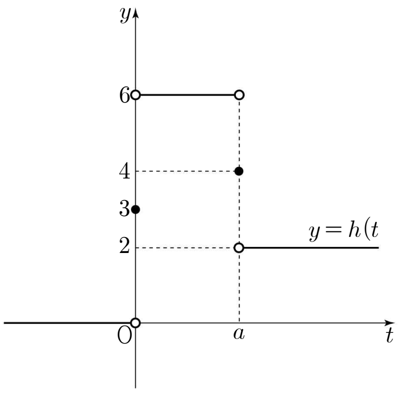


(iii) $k=-a$일 때
함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은
그림과 같으므로 함수 $g(t)$의
치역은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이다.



함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형과
함수 $y=h(t)$의 그래프는 그림과 같다.





(i) ~ (iii)에 의하여
$k=-a$일 때, 함수 $h(t)$가 조건 (나)를 만족시키므로
$a=2$이고 $c=2$, $k=-2$

$x^2+bx+2=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+2-\frac{b^2}{4}$이므로

$2-\frac{b^2}{4}=-2$, $b=-4$ $(b<0)$

함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} -|2x+2| & (x<0) \\ x^2-4x+2 & (x\ge 0) \end{cases}$$

따라서 $f(-2)+f(6)=-2+14=12$

93. 48

정의역이 $\{x\,|\,x\ge m\}$인 함수 $y=\frac{1}{4}(x-3)^2$의 그래프가 직선 $y=mx$와 만나는 점의 개수를 $h_1(m)$이라 하고

정의역이 $\{x\,|\,x<m\}$인 함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 직선 $y=mx$와 만나는 점의 개수를 $h_2(m)$이라 하면 $g(m)=h_1(m)+h_2(m)$이다.

함수 $g(m)$이 $m=0$에서 연속이므로

$g(0)=\lim\limits_{m\to 0+}g(m)=\lim\limits_{m\to 0-}g(m)$이고

함수 $y=\frac{1}{4}(x-3)^2$의 그래프는 $x=3$에서 x축에 접하므로

$\lim\limits_{m\to 0+}h_1(m)=2$, $\lim\limits_{m\to 0-}h_1(m)=0$, $h_1(0)=1$

$\lim\limits_{m\to 0+}g(m)=\lim\limits_{m\to 0+}\{h_1(m)+h_2(m)\}$

$=2+\lim\limits_{m\to 0+}h_2(m)$

$\lim\limits_{m\to 0-}g(m)=\lim\limits_{m\to 0-}\{h_1(m)+h_2(m)\}$

$=0+\lim\limits_{m\to 0-}h_2(m)$

$g(0)=h_1(0)+h_2(0)=1+h_2(0)$

따라서 $2+\lim\limits_{m\to 0+}h_2(m)=0+\lim\limits_{m\to 0-}h_2(m)=1+h_2(0)$

이때, $h_2(m)=0$ 또는 $h_2(m)=1$ 또는 $h_2(m)=2$ 이므로

$h_2(0)=0$일 때

$2+\lim\limits_{m\to 0+}h_2(m)=1+h_2(0)=1$, $\lim\limits_{m\to 0+}h_2(m)=-1$

이므로 성립하지 않는다.

$h_2(0)=2$일 때

$0+\lim\limits_{m\to 0-}h_2(m)=1+h_2(0)=3$,

$\lim\limits_{m\to 0-}h_2(m)=3$이므로 성립하지 않는다.

따라서 $h_2(0)=1$

$\lim\limits_{m\to 0-}h_2(m)=2$, $\lim\limits_{m\to 0+}h_2(m)=0$이므로

$y=x^2+ax+b$의 그래프는 $x<0$에서 x축에 접한다.

따라서 $a>0$, $b=\frac{a^2}{4}$, $g(0)=2$

(i) 직선 $y=mx$와 곡선 $y=\frac{1}{4}(x-3)^2$의 위치관계를 확인하면

$mx=\frac{1}{4}(x-3)^2$

$x^2-(4m+6)x+9=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(4m+6)^2-4\times 9=16m(m+3)$

함수 $y=\frac{1}{4}(x-3)^2$의 그래프와 직선 $y=mx$는

$-3<m<0$에서 만나지 않고

$m=0$, $m=-3$에서 한 점에서 만나고

$m<-3$ 또는 $m>0$에서 두 점에서 만난다.

$x=m$일 때 직선 $y=mx$와

곡선 $y=\frac{1}{4}(x-3)^2$의 y좌표의 대소관계를 확인하면

$\frac{1}{4}(m-3)^2-m^2=-\frac{3}{4}(m+3)(m-1)$이므로

$m<0$에서

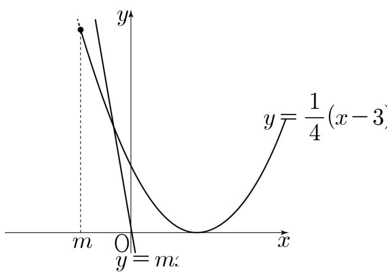
$-3<m<0$일 때 $y=\frac{1}{4}(x-3)^2$의 y좌표가 더 크고

$m<-3$일 때 $y=mx$의 y좌표가 더 크다.

직선 $y=mx$와 함수 $y=\frac{1}{4}(x-3)^2$의 그래프의 교점의 개수는 다음과 같다.

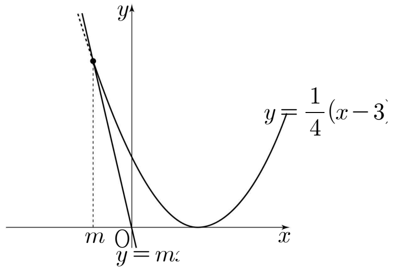
i) $m<-3$일 때

$x\ge m$에서 교점의 개수 $h_1(m)=1$



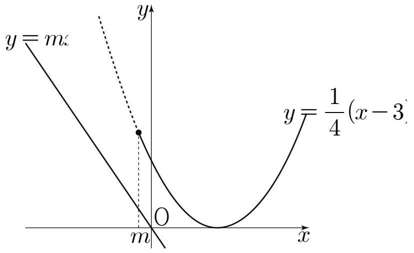
ii) $m=-3$일 때

$x\ge m$에서 교점의 개수 $h_1(m)=1$



iii) $-3<m<0$일 때

$x \geq m$에서 교점의 개수 $h_1(m)=0$



$g(m)$은 $m \leq 0$에서 연속이고 $g(0)=2$이므로

$m<-3$일 때 $h_2(m)=1$

$m=-3$일 때 $h_2(m)=1$

$-3<m<0$일 때 $h_2(m)=2$

(ii) 직선 $y=mx$와 곡선 $y=x^2+ax+\dfrac{a^2}{4}$의 위치관계를 확인하면

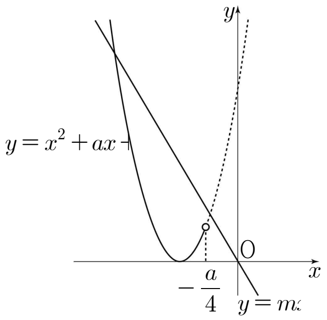
$x=m$일 때

$m^2+am+\dfrac{a^2}{4}-m\times m=a\left(m+\dfrac{a}{4}\right)$이므로

$m=-\dfrac{a}{4}$일 때 함수 $y=x^2+ax+\dfrac{a^2}{4}$의 그래프와 직선 $y=mx$는 $x=m$에서 만난다.

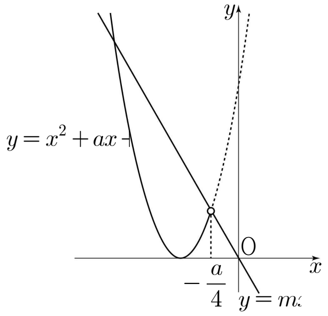
i) $m<-\dfrac{a}{4}$일 때

$x<m$에서 교점의 개수 $h_2(m)=1$



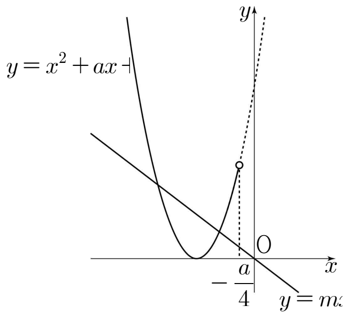
ii) $m=-\dfrac{a}{4}$일 때

$x<m$에서 교점의 개수 $h_2(m)=1$



iii) $-\dfrac{a}{4}<m<0$일 때

$x<m$에서 교점의 개수 $h_2(m)=2$



(i), (ii)에서

$h_2(m)$	1	1	2
(i)	$m<-3$	$m=-3$	$-3<m<0$
(ii)	$m<-\dfrac{a}{4}$	$m=-\dfrac{a}{4}$	$-\dfrac{a}{4}<m<0$

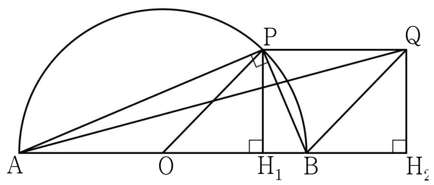
$m \leq 0$에서 함수 $g(m)$이 연속이 되려면

$-\dfrac{a}{4}=-3,\ a=12$

$b=\dfrac{a^2}{4}$이므로 $b=36$

따라서 $a+b=48$

94. ②



그림과 같이 두 점 P, Q에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하자.

직각삼각형 APB에서 $\overline{AP}=\sqrt{4-t^2}$이고

직각삼각형 OH_1P에서 $\overline{OH_1}^2+\overline{PH_1}^2=1$이므로

직각삼각형 AH_1P에서

$\overline{AP}^2=\left(1+\overline{OH_1}\right)^2+\overline{PH_1}^2,\ 4-t^2=2+2\overline{OH_1}$

따라서 $\overline{OH_1}=1-\dfrac{t^2}{2}$

$\overline{PH_1} = \sqrt{1-\overline{OH_1}^2} = \frac{t}{2}\sqrt{4-t^2}$

$\overline{BH_2} = \overline{OH_1}$, $\overline{QH_2} = \overline{PH_1}$이므로

직각삼각형 AH_2Q에서

$\overline{AQ} = \sqrt{(2+\overline{BH_2})^2 + \overline{QH_2}^2}$

$= \sqrt{(2+\overline{OH_1})^2 + \overline{PH_1}^2}$

$= \sqrt{\left\{2+\left(1-\frac{t^2}{2}\right)\right\}^2 + \frac{t^2}{4}(4-t^2)}$

$= \sqrt{9-2t^2}$

따라서

$\lim_{t\to0+}\frac{3-\overline{AQ}}{t^2} = \lim_{t\to0+}\frac{3-\sqrt{9-2t^2}}{t^2}$

$= \lim_{t\to0+}\frac{9-(9-2t^2)}{t^2(3+\sqrt{9-2t^2})}$

$= \lim_{t\to0+}\frac{2}{3+\sqrt{9-2t^2}}$

$= \frac{1}{3}$

95. ④

$A(t, \sqrt{t})$, $B(t+4, \sqrt{t+4})$, $C(t+4, \sqrt{t})$이므로

$\overline{AC} = 4$, $\overline{BC} = \sqrt{t+4} - \sqrt{t}$

삼각형 ABC의 넓이는

$S(t) = \frac{1}{2}\times4\times(\sqrt{t+4}-\sqrt{t}) = 2(\sqrt{t+4}-\sqrt{t})$

$\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t}\times S(t)}{2}$

$= \lim_{t\to\infty}\sqrt{t}\times(\sqrt{t+4}-\sqrt{t})$

$= \lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t}\times(\sqrt{t+4}-\sqrt{t})(\sqrt{t+4}+\sqrt{t})}{\sqrt{t+4}+\sqrt{t}}$

$= \lim_{t\to\infty}\frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{t+4}+\sqrt{t}}$

$= \lim_{t\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{t}}+1}$

$= \frac{4}{1+1} = 2$

96. ⑤

ㄱ. $\lim_{x\to0-}g(x)g(x-3) = -f(0)\times f(-3)$

$\lim_{x\to0+}g(x)g(x-3) = f(0)\times\{-f(-3)\}$

$g(0)g(-3) = f(0)\times\{-f(-3)\}$

함수 $g(x)g(x-3)$은 $x=0$에서 연속이다. (참)

ㄴ. 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=k$에서 불연속인 실수 k의 값이 한 개이므로 $k=-3$ 또는 $k=3$

(i) 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=-3$에서 연속이고, $x=3$에서 불연속인 경우

$\lim_{x\to-3-}g(x)g(x-3) = f(-3)\times f(-6)$

$\lim_{x\to-3+}g(x)g(x-3) = -f(-3)\times f(-6)$

$g(-3)g(-6) = -f(-3)\times f(-6)$이므로

$f(-3)\times f(-6) = 0$ …… ㉠

$\lim_{x\to3-}g(x)g(x-3) = f(3)\times\{-f(0)\}$

$\lim_{x\to3+}g(x)g(x-3) = f(3)\times f(0)$

$g(3)g(0) = f(3)\times f(0)$이므로

$f(3)\times f(0) \neq 0$ …… ㉡

$f(-3) = f(0)$이므로

㉠, ㉡에 의하여 $f(-6)=0$

(ii) 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=3$에서 연속이고, $x=-3$에서 불연속인 경우

(i)과 같은 방법에 의하여 $f(3)=0$

(i), (ii)에 의하여 $f(-6)=0$ 또는 $f(3)=0$이므로

$f(-6)\times f(3)=0$ (참)

ㄷ. $k=-3$이므로 $f(3)=0$

$f(x) = (x-3)(x^2+ax+b)$라 하자. (단, a, b는 상수)

$f(-3) = f(0)$이므로

$-6(9-3a+b) = -3b$, $b=6a-18$

$f(x) = (x-3)(x^2+ax+6a-18)$

(i) 방정식 $x^2+ax+6a-18=0$이 3이 아닌 서로 다른 두 실근을 갖는 경우

방정식 $f(x)=0$의 세 실근의 합은

$3+(-a) = -1$, $a=4$

방정식 $x^2+4x+6=0$은 실근을 갖지 않으므로 모순

(ii) 방정식 $x^2+ax+6a-18=0$이 중근을 갖는 경우

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근의 합은

$3+\left(-\frac{a}{2}\right) = -1$, $a=8$

방정식 $x^2+8x+30=0$은 중근을 갖지 않으므로 모순

(iii) 방정식 $x^2+ax+6a-18=0$이 3과 -4를 실근으로 갖는 경우

$3+(-4) = -a$, $3\times(-4) = 6a-18$에서 $a=1$

$f(x) = (x-3)(x^2+x-12) = (x-3)^2(x+4)$

그러므로 $g(-1) = -f(-1) = -48$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

97. 11

함수 $f(x) = x^3-6x^2+5x$에서 x의 값이 0에서 4까지 변할 때의 평균변화율은

$\frac{f(4)-f(0)}{4-0} = \frac{64-96+20}{4} = -3$

또한, $f'(x) = 3x^2-12x+5$ 이므로

$3a^2-12a+5=-3$, $3a^2-12a+8=0$ …… ㉠

㉠을 만족시키는 모든 실수 a는 $0<a<4$를 만족시키므로 모든 실수 a의 값의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{8}{3}$이다.
따라서 $p=3$, $q=8$이므로
$p+q=11$

98. 3
함수 $f(x)$에서 x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 평균변화율은
$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{a^3-3a^2+5a}{a}$
$=a^2-3a+5$
또, $f'(x)=3x^2-6x+5$이므로
$f'(2)=12-12+5=5$
따라서 $a^2-3a+5=5$에서
$a(a-3)=0$
$a=0$ 또는 $a=3$
$a>0$이므로 $a=3$

99. ⑤
평균변화율 $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=h^2+2h+3$에서
$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}(h^2+2h+3)=3$

100. 13
$f'(x)=3x^2+a$
x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율이
$f'(a)$의 값과 같으므로
$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=f'(a)$
$\frac{3^3+3a-(1^3+a)}{2}=3a^2+a$
따라서 $3a^2=13$

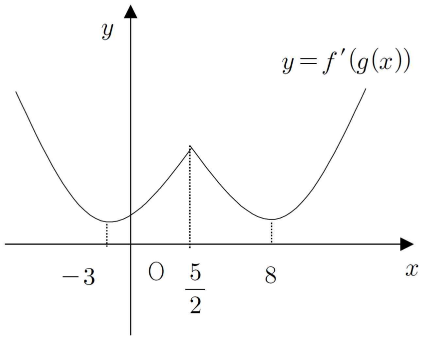
101. ⑤
함수 $f(x)=x^3-3x$에서 x의 값이 1에서 4까지
변할 때의 평균변화율은
$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{(64-12)-(1-3)}{3}=18$
곡선 $y=f(x)$위의 점 $(k,\ f(k))$에서의
접선의 기울기는 $f'(k)=3k^2-3$이므로
$3k^2-3=18$, $k^2=7$
$k>0$이므로 $k=\sqrt{7}$

102. 13
[출제의도] 미분계수의 정의와 연속성을 이용하여 함수 $f(x)$를 구할 수 있는가?
조건 (다)에서 $f(0)=-3$이므로
두 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는
$f(x)=x^3+ax^2+bx-3$
한편, 조건 (가)에서
$f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$
이므로 $x\neq1$일 때,

$$\begin{aligned}f'(g(x))&=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\\&=\frac{(x^3+ax^2+bx-3)-(a+b-2)}{x-1}\\&=\frac{(x^3-1)+a(x^2-1)+b(x-1)}{x-1}\\&=(x^2+x+1)+a(x+1)+b\\&=x^2+(a+1)x+a+b+1 \qquad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

조건 (나)에서 함수 $g(x)$가 최솟값 $\frac{5}{2}$를 가지므로
이 값을 갖는 x의 값을 α라 하자.
이때, $f'(x)$는 이차함수이고
㉠의 우변의 이차함수의 그래프가 대칭이므로
$g(x)$도 $x=\alpha$에 대하여 대칭이어야 한다.
이때, 함수 $y=f'(g(x))$의 그래프는 x에 대하여 대칭이다.
한편, ㉠의 우변의 함수
$y=x^2+(a+1)x+a+b+1$
의 그래프는 직선
$x=-\frac{a+1}{2}$
에 대하여 대칭이다.
그러므로
$\alpha=-\frac{a+1}{2}$
한편, ㉠의 식에 $x=\alpha$를 대입하면
$f'(g(\alpha))=\alpha^2+(a+1)\alpha+a+b+1$
이때, $g(\alpha)=\frac{5}{2}$이므로 대입하면
$f'\left(\frac{5}{2}\right)=\alpha^2+(a+1)\alpha+a+b+1$
한편, $f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로
$\frac{75}{4}+5a+b=\alpha^2+(a+1)\alpha+a+b+1$
즉,
$\frac{75}{4}+5a=\alpha^2+(a+1)\alpha+a+1$
이때, $\alpha=-\frac{a+1}{2}$를 대입하면
$\frac{75}{4}+5a=\frac{(a+1)^2}{4}-\frac{(a+1)^2}{2}+a+1$
$\frac{75}{4}+5a=-\frac{(a+1)^2}{4}+a+1$
$75+20a=-(a^2+2a+1)+4a+4$
$a^2+18a+72=0$
$(a+6)(a+12)=0$
$a=-6$ 또는 $a=-12$
한편, $a=-12$일 때,
$f'(x)=3x^2-24x+b$
이고 이 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 직선 $x=8$에 대하여

대칭이므로
함수 $y=f'(g(x))$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



즉, 함수 $y=f'(g(x))$의 그래프의 개형은
이차함수의 그래프의 개형이 아니다.
그러므로

$a=-6$이고 $\alpha=\frac{5}{2}$

이어야 한다.
그러므로

$f(x)=x^3-6x^2+bx-3$ …… ㉡

$f'(x)=3x^2-12x+b$ …… ㉢

한편, ㉠에서 $f'(x)$와 $g(x)$가 연속이므로

$\lim_{x\to1}f'(g(x))=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$f'(g(1))=f'(1)$

이때, $g(1)=k$라 하면 ㉢으로부터

$3k^2-12k+b=-9+b$

$3k^2-12k+9=0$

$k^2-4k+3=0$

$(k-1)(k-3)=0$

$k=1$ 또는 $k=3$

즉,

$g(1)=1$ 또는 $g(1)=3$

이때, $g(1)=1$은 $g(x)$가 최솟값 $\frac{5}{2}$를 갖는다는 것에 모순이다.

그러므로 $g(1)=3$

한편, 조건 (다)에서 $f(g(1))=6$이므로

$f(3)=6$

이때, ㉡에 대입하면

$27-54+3b=9$

$3b=36$

$b=12$

따라서

$f(x)=x^3-6x^2+12x-3$

이므로

$f(4)=4^3-6\times4^2+12\times4-3$

$\quad=13$

103. ④

$f(x)=2x^3-5x^2+3$에서

$f'(x)=6x^2-10x$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$$
$$=24-20$$
$$=4$$

104. ③

$f'(x)=3x^2-6x-9$

$=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $f(-1)=-7$을 갖고, $x=3$에서 극솟값 $f(3)=-39$를 갖는다.

조건 (가)에서

$xg(x)=|xf(x-p)+qx|$

이므로

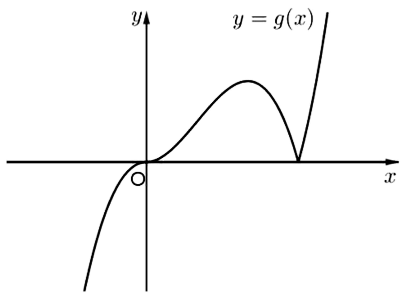
$$g(x)=\begin{cases}|f(x-p)+q| & (x>0)\\ -|f(x-p)+q| & (x<0)\end{cases}$$

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$|f(-p)+q|=-|f(-p)+q|$

즉, $|f(-p)+q|=0$이어야 한다.

한편, 함수 $y=|f(x-p)+q|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동시킨 후, $y<0$인 부분에 그려진 부분을 x축에 대하여 대칭이동시킨 것이다. 이때, p, q가 모두 양수이고 조건 (나)에서 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수가 1이므로 $p=1$, $q=7$이어야 한다. 따라서 $p+q=1+7=8$



105. ④

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$f(1)=b+4$이므로

$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+}\frac{bx+4-b-4}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+}\frac{b(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+}b=b$ …… ㉠

이고

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1-}\frac{x^3+ax+b-b-4}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1-}\frac{x^3+ax-4}{x-1}\qquad\cdots\cdots ㉡$$

이다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하려면

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$의 값이 존재해야 하므로

㉠, ㉡에서

$$\lim_{x\to1-}\frac{x^3+ax-4}{x-1}=b\qquad\cdots\cdots ㉢$$

이어야 한다.

이때 $x\to1-$일 때 (분모)$\to0$이고 ㉢이 수렴하므로

(분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1-}(x^3+ax-4)=1+a-4=0$에서

$a=3$

이때 ㉢에서

$$b=\lim_{x\to1-}\frac{x^3+3x-4}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(x^2+x+4)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1-}(x^2+x+4)$$

$$=1^2+1+4$$

$$=6$$

따라서 $a+b=3+6=9$

106. 21

$$\lim_{h\to0}\frac{f(4+h)-f(4)}{3h}=\frac{1}{3}\times\lim_{h\to0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$$

$$=\frac{1}{3}f'(4)=7$$

따라서 $f'(4)=3\times7=21$

107. ②

다항함수 $p(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0+}p(x)=\lim_{x\to0-}p(x)=p(0)$$

이 성립한다.

ㄱ. $f(0)=0$이고

$$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}(-x)=0,$$

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}(x-1)=-1$$

이므로

$$\lim_{x\to0-}p(x)f(x)=\lim_{x\to0-}p(x)\times\lim_{x\to0-}f(x)=0,$$

$$\lim_{x\to0+}p(x)f(x)=\lim_{x\to0+}p(x)\times\lim_{x\to0+}f(x)=-p(0),$$

$p(0)f(0)=0$

이때 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면

$x=0$에서도 연속이므로

$\lim_{x\to0-}p(x)f(x)=\lim_{x\to0+}p(x)f(x)=p(0)f(0)$이 성립해야 한다.

즉, $-p(0)=0$이어야 하므로

$p(0)=0$ (참)

ㄴ. $g(x)=p(x)f(x)$라 하자.

함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면

$x=2$에서도 미분가능하므로 $\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$의 값이 존재해야

한다.

$$\lim_{x\to2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{p(x)f(x)-p(2)f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2-}\frac{(x-1)p(x)-p(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2-}\frac{(x-2)p(x)+p(x)-p(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2-}p(x)+\lim_{x\to2-}\frac{p(x)-p(2)}{x-2}$$

$$=p(2)+p'(2)$$

이고,

$$\lim_{x\to2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{p(x)f(x)-p(2)f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2+}\frac{(2x-3)p(x)-p(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2+}\frac{2(x-2)p(x)+p(x)-p(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2+}2p(x)+\lim_{x\to2+}\frac{p(x)-p(2)}{x-2}$$

$$=2p(2)+p'(2)$$

이므로

$$\lim_{x\to2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$

가 성립하려면

$p(2)+p'(2)=2p(2)+p'(2)$

즉, $p(2)=0$이어야 한다. (참)

ㄷ. (반례) $h(x)=p(x)\{f(x)\}^2$이라 하자.

$p(x)=x^2(x-2)$이면

$$h(x)=\begin{cases}x^4(x-2) & (x\le0)\\ x^2(x-1)^2(x-2) & (0<x\le2)\\ x^2(2x-3)(x-2) & (x>2)\end{cases}$$

이므로 함수 $h(x)$는 $x\ne0$, $x\ne2$인 실수 전체의 집합에서

미분가능하다.

한편,

$$\lim_{x\to0-}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{h(x)-h(0)}{x}=0$$

이므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

또,

$$\lim_{x\to2-}\frac{h(x)-h(2)}{x}=\lim_{x\to2+}\frac{h(x)-h(2)}{x}=4$$

이므로 함수 $h(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

따라서 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

하지만 함수 $p(x)$는 $x^2(x-2)^2$으로 나누어떨어지지 않는다.

(거짓)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

108. ④
$f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다. 즉, $\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$

$\lim_{x\to1+}f(x)=2+b$,

$\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)=1-a+b$이므로

$2+b=1-a+b$에서 $a=-1$

$f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=3-2a+b=5+b$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=2$$

$5+b=2$에서 $b=-3$

따라서 $a\times b=3$

109. ②
함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(3x+a)=a+3$

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(2x^3+bx+1)=b+3$

$f(1)=a+3$

$a+3=b+3$, $a=b$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{3x+a-(a+3)}{x-1}=3$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(2x^3+ax+1)-(a+3)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(2x^2+2x+a+2)}{x-1}$$

$$=a+6$$

$3=a+6$, $a=-3$, $b=-3$

따라서 $a+b=-6$

110. ③

$$f(x)g(x)=\begin{cases}-(x+3)(2x+a) & (x<-3)\\ (x+3)(2x+a) & (x\ge-3)\end{cases}$$

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=-3$에서 미분가능하다. 즉,

$$\lim_{x\to-3-}\frac{f(x)g(x)-f(-3)g(-3)}{x+3}$$

$$=\lim_{x\to-3+}\frac{f(x)g(x)-f(-3)g(-3)}{x+3},$$

$$\lim_{x\to-3-}(-2x-a)=\lim_{x\to-3+}(2x+a)$$

따라서 $6-a=-6+a$에서 $a=6$

111. ④
[출제의도] 미분계수 이해하기

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-g(x)}{x-3}=1$이고 $\lim_{x\to3}(x-3)=0$이므로

$\lim_{x\to3}\{f(x)-g(x)\}=0$

$f(x)$, $g(x)$가 모두 다항함수이므로

$f(3)=g(3)$이고 $f(3)=2$이므로 $g(3)=2=-2$

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-g(x)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{\{f(x)-f(3)\}-\{g(x)-g(3)\}}{x-3}$$

$$=f'(3)-g'(3)=1$$

$f'(3)=1$이므로 $g'(3)=0$

$g(x)=x^2+ax+b$(a, b는 상수)라 하면

$g'(x)=2x+a$

$g(3)=9+3a+b=2$, $g'(3)=6+a=0$

에서 $a=-6$, $b=11$

따라서 $g(1)=1-6+11=6$

112. ③
[출제의도] 평균변화율을 이해하여 함수의 미분계수를 구한다.

$\frac{f(a+1)-f(a)}{(a+1)-a}=4a-1=7$에서 $a=2$이다.

한편 $f'(x)=4x-3$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}=2\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}$$

$$=2f'(a)$$

$$=2f'(2)=10$$

113. ④
$f'(x)=6x^2+3$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(2h)-f(0)}{2h}\times2$$

$$=2f'(0)=2\times3=6$$

114. ④
미분계수의 정의에 의하여

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$이므로 $f'(2)=3$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)+f(2)-f(2-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$$

$=f'(2)+f'(2)$

$=2f'(2)$

$=6$

115. ③

$f(x)$가 다항함수이므로 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

한편, $\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$에서 $f'(2)=9$

$f(x)=x^3-2x^2+ax+1$에서 $f'(x)=3x^2-4x+a$

그러므로 $f'(2)=3\times2^2-4\times2+a=a+4$

따라서 $a+4=9$에서 $a=5$

116. ①

$\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-4}{2h}=1$이고 $\lim_{h\to0}2h=0$이므로

$\lim_{h\to0}\{f(3+h)-4\}=0$, $f(3)=4$

$\frac{1}{2}\times\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\frac{f'(3)}{2}=1$

$f'(3)=2$

따라서 $f(3)+f'(3)=6$

117. ①

$\lim_{h\to0}\frac{f(4+h)-f(4)}{3h}=\frac{1}{3}\times\lim_{h\to0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$

$=\frac{1}{3}f'(4)=7$

따라서 $f'(4)=3\times7=21$

118. ③

[출제의도] 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

$g(x)=x^2f(x)$에서 미분하면

$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$

이때, $f(2)=1$, $f'(2)=3$이므로

$g'(2)=4f(2)+4f'(2)$

$=4\times1+4\times3$

$=16$

119. ①

$g(x)=(x^3+1)f(x)$

이므로

$g'(x)=3x^2f(x)+(x^3+1)f'(x)$

이때 $f(1)=2$, $f'(1)=3$이므로

$g'(1)=3f(1)\times2f'(1)$

$=3\times2+2\times3$

$=12$

120. 8

$f(x)=(x+1)(x^2+3)$이므로

$f'(x)=(x^2+3)+(x+1)\times2x$

따라서

$f'(1)=(1+3)+2\times2$

$=8$

121. ⑤

$f'(x)=3x^2+6x+1$

이므로

$f'(1)=3+6+1=10$

122. ③

$g(x)=(x^2+3)f(x)$에서

$g'(x)=2xf(x)+(x^2+3)f'(x)$

따라서

$g'(1)=2f(x)+4f'(1)$

$=2\times2+4\times1$

$=8$

123. ⑤

$f(x)=2x^3+4x+5$에서

$f'(x)=6x^2+4$

이므로

$f'(1)=6+4=10$

124. ①

$f'(x)=4x^3+3$이므로

$f'(2)=32+3$

$=35$

125. ①

$f'(x)=3x^2-2$

따라서

$f'(1)=3\times1^2-2=1$

126. ④

$f'(x)=3x^2+7$이므로

$f'(0)=7$

127. ①

$f(x)=x^2+7x+6$에서 $f'(x)=2x+7$

따라서 $f'(2)=11$

128. ③

[출제의도] 도함수의 성질을 이용하여 함숫값을 구한다.

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=0$

다항함수 $f(x)$의 차수를 n이라 하자.

(ⅰ) $n\le1$일 때, 주어진 등식의 좌변의 차수는 1 이하이고, 우변의 차수는 2이므로 등식이 성립하지 않는다.

(ⅱ) $n=2$일 때, 주어진 등식의 좌변의 이차항의 계수는 -1이고, 우변의 이차항의 계수는 2이므로 등식이 성립하지 않는다.

(ⅲ) $n\ge3$일 때, 주어진 등식의 좌변의 n차항의 계수가 $n-3$이고, 우변의 차수는 2이므로 등식이 성립하기 위해서는 $n=3$이어야 한다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $f(x)$가 삼차함수이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx$ (a, b는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이고

$xf'(x)-3f(x)=x(3x^2+2ax+b)-3(x^3+ax^2+bx)$

$=-ax^2-2bx$

주어진 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$-a=2$, $-2b=-8$에서

$a=-2,\ b=4$이고 $f(x)=x^2-2x^2+4x$
따라서 $f(1)=1-2+4=3$

129. ①
[출제의도] 미분계수 계산하기
$f'(x)=3x^2+2$이므로 $f'(1)=5$

130. 2
$f(x)=x^2+ax$에서 $f'(x)=2x+a$
$f'(1)=2+a=4$에서 $a=2$

131. 10
$f'(x)=4x+a$이므로 $f'(2)=8+a=18$에서 $a=10$

132. ②
$f'(x)=2x-a$
$f'(1)=2-a=0$
따라서 $a=2$

133. 10
곱의 미분법에 의해 함수 $f(x)g(x)$의 도함수는
$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
$f'(x)=4x+5,\ g'(x)=3x^2$이므로
$f'(0)g(0)+f(0)g'(0)=5\times2+3\times0=10$

134. ①
$f(x)$가 다항함수이고 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=3$이므로
$f(x)=3x^2+ax+b$ ($a,\ b$는 실수)
$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x^2-x-2}=6$이고 $\lim\limits_{x\to2}(x^2-x-2)=0$이므로
$\lim\limits_{x\to2}f(x)=f(2)=0$
$f(2)=12+2a+b=0,\ b=-2a-12$
$f(x)=3x^2+ax+(-2a-12)$
$=(x-2)(3x+6+a)$
$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(3x+6+a)}{(x-2)(x+1)}$
$=\dfrac{6+6+a}{3}=6$
$a=6,\ b=-24$
$f(x)=3x^2+6x-24,\ f(0)=-24$

135. 24
$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-4}{x^2-4}=2$에서
(분모) $\to$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$
$\lim\limits_{x\to2}\{f(x)-4\}=0$이므로 $f(2)=4$
$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-4}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\left\{\dfrac{1}{x+2}\times\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\right\}$
$=\dfrac{1}{4}f'(2)=2$
$f'(2)=8$

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)+1}{x-2}=8$에서
(분모) $\to$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$
$\lim\limits_{x\to2}\{g(x)+1\}=0$이므로 $g(2)=-1$
$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)+1}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)=8$
$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
따라서 $h'(2)=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)=24$

136. ①
(가)에서 $\lim\limits_{x\to1}\{f(x)g(x)+4\}=0$
함수 $f(x)$와 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로
$f(1)g(1)=-2g(1)=-4$에서 $g(1)=2$ …… ㉠
$g(x)$는 일차함수이므로 $g(x)=ax+b$라 하면
$g'(x)=a$ …… ㉡
(나)에서 $g(0)=g'(0)$이므로 $b=a$
그런데 ㉠에서 $a+b=2$이므로 $a=1,\ b=1$
㉡에서 $g'(1)=1$
$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)g(x)+4}{x-1}$는 함수 $f(x)g(x)$의 $x=1$에서의 미분계수이므로
$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)g(x)+4}{x-1}=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$
즉, $f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=2f'(1)-2=8$
따라서 $f'(1)=5$

137. 19
$f'(x)=4x^3+6x+9$이므로 $f'(1)=19$

138. 17
$f'(x)=4x^3+6x+7$이므로
$f'(1)=4+6+7=17$

139. 4
$f'(x)=3x^2+2x-1$이므로 $f'(1)=3+2-1=4$

140. ⑤
함수 $f(x)=(x-2)(x^3-4x+a)$에서
$f'(x)=(x^3-4x+a)+(x-2)(3x^2-4)$
$f'(1)=(a-3)+1=6$
따라서 $a=8$

141. 112
$f(x)=10x^2+12x$에서 $f'(x)=20x+12$
따라서 $f'(5)=100+12=112$

142. 12
$f'(x)=4x^3-10x,\ f'(2)=12$

143. 25
$f(x)=-x^3+ax^2+2x$에서
$f'(x)=-3x^2+2ax+2$
$f'(0)=2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식은

$y=2x$

이다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x$가 만나는 점의 x좌표를 구해보자.

$f(x)=2x$에서

$-x^3+ax^2+2x=2x$

$x^2(x-a)=0$

$x=0$ 또는 $x=a$

점 A의 x좌표는 0이 아니므로 점 A의 x좌표는 a이다. 즉, 점 A의 좌표는

$(a,\ 2a)$

이다.

점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점이므로

$\angle\mathrm{OAB}=\dfrac{\pi}{2}$

이다. 즉, 두 직선 OA와 AB는 서로 수직이다.

이때,

$f'(a)=-3a^2+2a^2+2$

$\quad=-a^2+2$

이므로

직선 AB의 기울기는 $-a^2+2$이다.

$2\times(-a^2+2)=-1$에서

$a^2=\dfrac{5}{2}$

$a>\sqrt{2}$이므로

$a=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

점 A의 좌표는

$\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2},\ \sqrt{10}\right)$

이다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)+\sqrt{10}$ …… ㉠

㉠에 $y=0$을 대입하면

$0=-\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)+\sqrt{10}$

$x=\dfrac{5\sqrt{10}}{2}$

점 B의 좌표는

$\left(\dfrac{5\sqrt{10}}{2},\ 0\right)$

이다.

따라서

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)^2+(\sqrt{10})^2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\left(\dfrac{5\sqrt{10}}{2}-\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)^2+(0-\sqrt{10})^2}=5\sqrt{2}$

이므로

$\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\times5\sqrt{2}=25$

144. ④

[출제의도] 곡선 밖의 점에서 그은 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

곡선 $y=x^3-x+2$에서

$y'=3x^2-1$

이때 곡선 $y=x^3-x+2$ 위의 점 $(t,\ t^3-t+2)$에서의 접선의 방정식은

$y-(t^3-t+2)=(3t^2-1)(x-t)$

이 직선이 점 $(0,\ 4)$를 지나므로

$4-(t^3-t+2)=(3t^2-1)(0-t)$

정리하면 $t^3=-1$이므로

$t=-1$

따라서 점 $(0,\ 4)$에서 곡선 $y=x^3-x+2$에 그은 접선의 방정식은

$y-2=2(x+1)$

$y=2x+4$

그러므로 직선 $y=2x+4$의 x절편은 -2이다.

145. ⑤

점 $(0,\ 0)$이 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$f(0)=0$ …… ㉠

이때, 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(0)(x-0)+0$

$y=f'(0)x$ …… ㉡

또, 곡선 $y=xf(x)$ 위에 점 $(1,\ 2)$가 있으므로

$1\times f(1)=2$

$f(1)=2$ …… ㉢

$y=xf(x)$에서

$y'=f(x)+xf'(x)$이므로

$(1,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$y=\{f(1)+f'(1)\}(x-1)+2$

$=\{f'(1)+2\}(x-1)+2$

$=\{f'(1)+2\}x-f'(1)$ …… ㉣

이때, $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라 하면

㉠에서

$d=0$

이때, $f(x)=ax^3+bx^2+cx$이므로

㉢에서

$a+b+c=2$ …… ㉤

㉡과 ㉣에서

두 접선이 일치해야 하므로

$f'(0)=f'(1)+2,\ f'(1)=0$

따라서 $f'(0)=2,\ f'(1)=0$

이때, $f'(x)=3ax^2+2bx+c$이므로

$f'(0)=2$에서

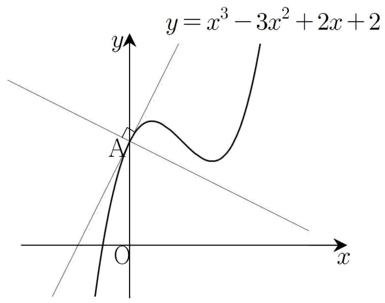
$c=2$

이때, $f'(x)=3ax^2+2bx+2$이므로

$f'(1)=0$에서
$3a+2b+2=0$
㉣에서 $c=2$를 대입하면
$a+b=0$이므로
$b=-a$를 위 식에 대입하여 a, b을 구하면 $a=-2$, $b=2$이므로
$f(x)=-2x^3+2x^2+2x$,
$f'(x)=-6x^2+4x+2$
따라서
$f'(2)=-14$

146. ①
[출제의도] 두 곡선에 동시에 접하는 접선의 방정식을 구할 수 있는가?
$y=x^3-4x+5$에서
$y'=3x^2-4$
이므로 점 $(1,2)$에서의 접선의 방정식은
$y-2=-(x-1)$
$y=-x+3$ …… ㉠
또한, $y=x^4+3x+a$에서
$y'=4x^3+3$
이고 곡선 $y=x^4+3x+a$와 직선 ㉠이 접하므로 접점의 x좌표는
$4x^3+3=-1$, $x^3=-1$
$x=-1$
따라서 접점의 좌표는 $(-1,4)$이고 이점은 곡선
$y=x^4+3x+a$위의 점이므로
$4=1-3+a$
$a=6$

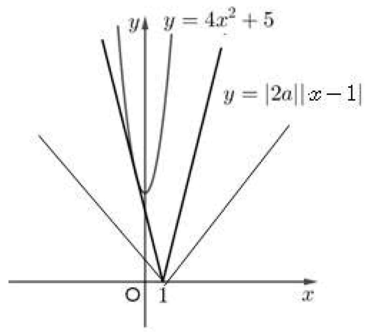
147. ①
$y=x^3-3x^2+2x+2$에서
$y'=3x^2-6x+2$
따라서 점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 2이므로 이 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.



따라서 점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$를 지나고 기울기가 $-\frac{1}{2}$인 직선의 방정식은
$y=-\frac{1}{2}(x-0)+2$
즉, $y=-\frac{1}{2}x+2$
이고 이 직선의 x절편은
$0=-\frac{1}{2}x+2$
에서
$x=4$

148. 10
$y'=3x^2-12x$
이므로 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는
$3\times1^2-12\times1=-9$
따라서 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은
$y-1=9(x-1)$
$y=-9x+10$
이 접선이 $(0,\ a)$를 지나므로
$a=-9\times0+10=10$

149. ②
주어진 조건에 의하여
$f(x)=a(x-1)^2+b$ (b는 상수)로 놓으면
$f'(x)=2a(x-1)$이므로
$|f'(x)|\le 4x^2+5$에서
$|2a(x-1)|\le 4x^2+5$ …… ㉠
즉, ㉠이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 두 곡선 $y=|2a(x-1)|=|2a||x-1|$, $y=4x^2+5$가 그림과 같아야 한다.



즉, 실수 a의 최댓값은 점 $(1,0)$에서 곡선 $y=4x^2+5$에 그은 접선이 $y=-|2a|(x-1)$일 때이므로 접점을
$(k,\ 4k^2+5)\ (k<0)$이라 하면
$y'=8x$에서
$y-(4k^2+5)=8k(x-k)$
이 접선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로
$4k^2-8k-5=0$
$(2k-5)(2k+1)=0$
$k=-\frac{1}{2}$
즉, 접선의 기울기는
$8\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-4$
이므로 $-|2a|=-4$, $|a|=2$
$a=-2$ 또는 $a=2$
따라서 실수 a의 최댓값은 2이다.

150. ①
$f'(x)=-4x^3+16a^2x$

$=-4x(x^2-4a^2)$

$=-4x(x+2a)(x-2a)$

이므로 함수의 증감을 조사하면 $x=2a$, $x=-2a$에서 극댓값을 갖는다.

즉, $b+(2-2b)=2a+(-2a)=0$이므로

$b=2$

또, $b(2-2b)=2a\times(-2a)$이므로

$-4=-4a^2$

$a>0$이므로 $a=1$

따라서 $a+b=1+2=3$

151. 11

직선 $y=4x+5$와 곡선 $y=2x^4-4x+k$가

점 $\mathrm{P}(a, b)$에서 접한다고 하자.

$f(x)=2x^4-4x+k$라 하면 $f'(x)=8x^3-4$

곡선 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 4이므로

$f'(a)=8a^3-4=4$, $a^3=1$즉, $a=1$

점 P는 직선 $y=4x+5$ 위의 점이므로

$b=4\times1+5=9$

이때 $f(1)=2-4+k=k-2=9$

따라서 $k=11$

152. ①

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ f(0))$에서의 접선의 방정식이

$y-f(0)=f'(0)(x-0)$이므로

$f'(0)=3$, $f(0)=-1$

$g'(x)=f(x)+(x+2)f'(x)$

따라서 $g'(0)=f(0)+2f'(0)=-1+2\times3=5$

153. 22

$f(x)=x^3-10$, $g(x)=x^3+k$라 하자.

$f'(x)=3x^2$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(-2,\ -18)$에서의

접선의 기울기는 $f'(-2)=12$

접선의 방정식은

$y-(-18)=12\{x-(-2)\}$, $y=12x+6$

점 Q의 좌표를 $(\alpha,\ \alpha^3+k)$라 하자. (단, α는 상수)

$g'(x)=3x^2$이므로

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^3+k)$에서의

접선의 기울기는 $g'(\alpha)=3\alpha^2$

접선의 방정식은 $y-(\alpha^3+k)=3\alpha^2(x-\alpha)$,

$y=3\alpha^2x-2\alpha^3+k$

두 접선이 일치하므로 $3\alpha^2=12$, $-2\alpha^3+k=6$

$\alpha=2$이면 $k=22$, $\alpha=-2$이면 $k=-10$

$k>0$이므로 $k=22$

154. 22

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3,\ 2)$에서의

접선의 기울기가 4이므로 $f(3)=2$, $f'(3)=4$

$g(x)=(x+2)f(x)$에서

$g'(x)=f(x)+(x+2)f'(x)$이므로

$g'(3)=f(3)+5f'(3)=2+5\times4=22$

155. 7

$f(x)=4x^3-5x+9$라 하면

$f'(x)=12x^2-5$, $f'(1)=7$

156. ③

이차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고

함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축에 접하므로

$f(x)=(x-a)^2$ (단, a는 상수이다.)

$f(x)=(x-a)(x-a)$이므로

$f'(x)=2(x-a)$

$g(x)=(x-3)f'(x)=2(x-a)(x-3)$

$=2x^2-2(a+3)x+6a$

함수 $y=g(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로

x의 계수가 0이다. 즉, $a=-3$

따라서 $f(x)=(x+3)^2$에서 $f(0)=3^2=9$

157. ③

[출제의도] 접선의 방정식을 이용하여 미지수의 값을 구한다.

$f(x)=x^3-2x^2+2x+a$에서 $f'(x)=3x^2-4x+2$

$f(1)=a+1$, $f'(1)=1$이므로

곡선 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 방정식

$y=(x-1)+a+1$, 즉 $y=x+a$

두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(-a,\ 0)$, $(0,\ a)$이다.

$\overline{\mathrm{PQ}}=6$에서 $\sqrt{a^2+a^2}=6$, $a^2=18$

$a>0$이므로 $a=3\sqrt{2}$

158. 24

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[x-1,\ x+1]$에서 연속이고 열린 구간 $(x-1,\ x+1)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$\dfrac{f(x+1)-f(x-1)}{(x+1)-(x-1)}=f'(c)$ $(x+1<c<x+1)$인 c가 존재한다.

즉, $f(x+1)-f(x-1)=2f'(c)$이고,

$x-1<c<x+1$에서 $x\to\infty$일때, $c\to\infty$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}\{f(x+1)-f(x-1)\}=\lim\limits_{x\to\infty}2f'(c)=24$

159. ③

[출제의도] 평균값의 정리를 이용하여 함수의 최솟값을 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1,\ 5]$에서 연속이고 열린구간 $(1,\ 5)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$\dfrac{f(5)-f(1)}{5-1}=f'(c)$ ⋯⋯ ㉠

를 만족하는 상수 c가 열린구간 $(1,\ 5)$에 적어도 하나 존재한다.

이때, 조건 (나)에 의하여

$f'(c)\geq5$

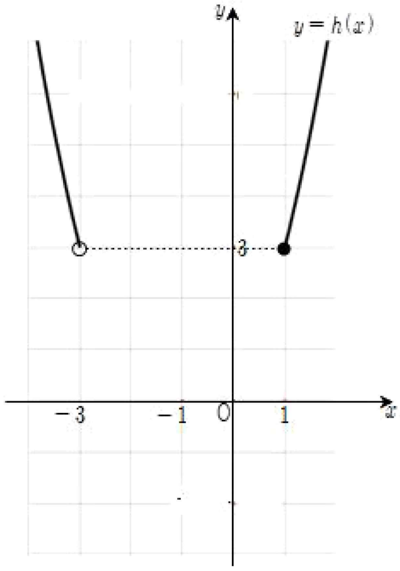
이므로 ㉠에서

$\dfrac{f(5)-3}{4}\geq5$

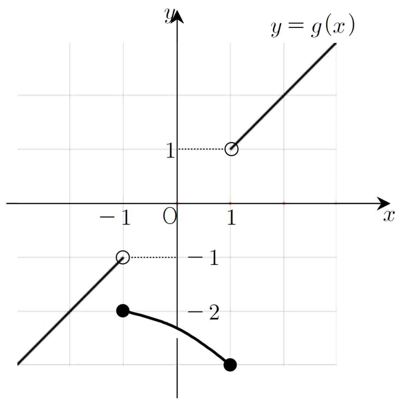
$f(5) \geq 23$
따라서 $f(5)$의 최솟값은 23이다.

160. 6
$f(x)=x^2+ax^2-(a^2-8a)x+3$에서
$f'(x)=3x^2+2ax-(a^2-8a) \geq 0$
이때, 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면
$f'(x) \geq 0$
이때, 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4} \leq 0$이어야 하므로
$\frac{D}{4}=a^2-3(-a^2+8a)$
$=4a^2-24a$
$=4a(a-6) \leq 0$
그러므로
$0 \leq a \leq 6$
따라서 a의 최댓값은 6이다.

161. ①
[출제의도] 극한으로 표현된 함수에 대하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?
ㄱ. $x>1$에서 $g(x)=x$이므로
$h(1)=\lim_{t\to0+}g(1+t)\times\lim_{t\to2+}g(1+t)$
$=\lim_{t\to0+}(1+t)\times\lim_{t\to2+}(1+t)$
$=1\times3$
$=3$ (참)
ㄴ. $h(x)=\lim_{t\to0+}g(x+t)\times\lim_{t\to2+}g(x+t)$
이므로
$x<-3$일 때 $h(x)=x\times(x+2)$
$x=-3$일 때 $h(-3)=-3\times f(-1)$
$-3<x<-1$일 때 $h(x)=x\times f(x+2)$
$x=-1$일 때 $h(-1)=f(-1)\times1$
$-1<x<1$일 때 $h(x)=f(x)\times(x+2)$
$x=1$일 때 $h(1)=1\times3$
$x>1$일 때 $h(x)=x\times(x+2)$
즉, $x<-3$ 또는 $x \geq 1$일 때, 함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$f(-3)\neq3$이면 함수 $h(x)$는 $x=-3$에서 불연속이다.
즉, 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이라 할 수 없다. (거짓)
ㄷ. 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 감소하고, $g(-1)=-2$일 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



이때,
$h(-3)=-3\times f(-1)=-3\times(-2)=6$
$h(-1)=f(-1)\times1=-2\times1=-2$
이다.
$-3<x<-1$에서 $h(x)>0$
또, $-1<x<1$에서
$h(x)=f(x)\times(x+2)$이므로
$h'(x)=f'(x)\times(x+2)+f(x)$
$f'(x)<0,\ x+2>0,\ f(x)<0$이므로
$h'(x)<0$
즉, $-1<x<1$에서 함수 $h(x)$는 감소하고, $f(1)=3$이므로
함수 $h(x)$는 최솟값을 갖지 않는다. (거짓)
이상에서 옳은 것은 ㄱ 뿐이다.

다른 풀이

ㄴ. [반례]
$f(x)=2$라 하자.
$-3<x<-1$일 때, $h(x)=x\times2=2x$

$x=-1$일 때, $h(x)=2\times 1=2$

$-1<x<1$일 때, $h(x)=2(x+2)$

이때,

$\lim\limits_{x\to -1-} h(x)=\lim\limits_{x\to -1-} 2x=-2$

$\lim\limits_{x\to -1+} h(x)=\lim\limits_{x\to -1+} 2(x+2)=2$

$h(-1)=2$

이므로

$\lim\limits_{x\to -1-} h(x)\neq \lim\limits_{x\to -1+} h(x)$

이다.

즉, 함수 $h(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. [반례]

$f(x)=-x-3$이라 하자.

$x<-3$일 때, $h(x)=x(x+2)$

$x=-3$일 때, $h(x)=-3\times(-2)=6$

$-3<x<-1$일 때, $h(x)=x\times\{-(x+2)-3\}=-x(x+5)$

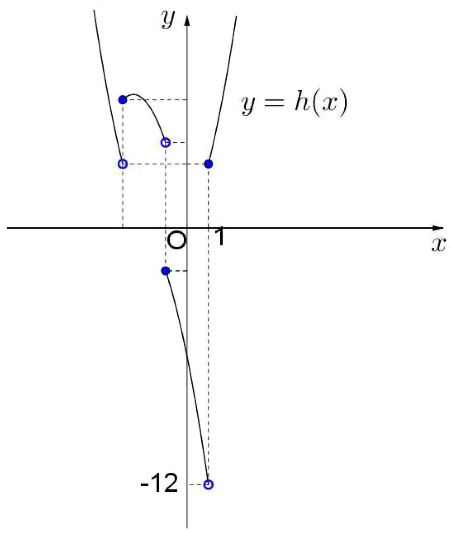
$x=-1$일 때, $h(-1)=-2\times 1=-2$

$-1<x<1$일 때, $h(x)=(-x-3)\times(x+2)=-(x+3)(x+2)$

$x=1$일 때, $h(x)=1\times 3=3$

$x>1$일 때, $h(x)=x(x+2)$

이때, $\lim\limits_{x\to 1-} h(x)=-12$, $h(1)=3$이므로 함수 $h(x)$의 최솟값은 없다. (거짓)



162. ⑤

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2-12x+4$에서

$f'(x)=x^2-4x-12$

$\quad=(x+2)(x-6)$

$f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=6$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	6	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이고,

$x=6$에서 극소이다.

따라서

$\alpha=-2$, $\beta=6$

이므로

$\beta-\alpha=6-(-2)=8$

163. 6

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 -2를 가지므로

$f(1)=-2$에서

$a+b+a=-2$

$2a+b=-2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또, $f'(x)=3ax^2+b$이고 $f'(1)=0$이어야 하므로

$3a+b=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠ 과 ㉡을 연립하면

$a=2$, $b=-6$

그러므로

$f(x)=2x^3-6x+2$이고

$f'(x)=6x-6$

$\quad=6(x+1)(x-1)$

이때 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	6	↘	-2	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 6을 갖는다.

164. 483

문제의 조건으로부터

함수 $f(x)$가 모든 정수 k에 대하여

$f(k-1)f(k+1)\geq 0$을 만족시켜야 한다. $\quad\cdots\cdots$ ㉠

함수 $f(x)$는 삼차함수이므로 방정식 $f(x)=0$은 반드시 실근을 갖는다.

(i) 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수가 1인 경우

방정식 $f(x)=0$의 실근을 a라 할 때, a보다 작은 정수 중 최댓값을 m이라 하면

$f(m)<0<f(m+2)$

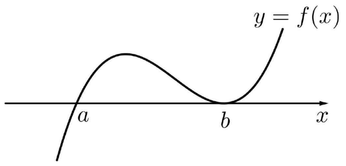
이므로 $f(m)f(m+2)<0$이 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우

방정식 $f(x)=0$의 실근을 a, $b(a<b)$라 할 때,

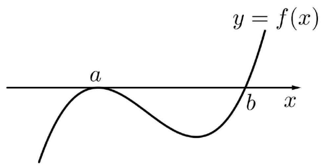
$f(x)=(x-a)(x-b)^2$ 또는 $f(x)=(x-a)^2(x-b)$이다.

(ii −①) $f(x)=(x-a)(x-b)^2$일 때,



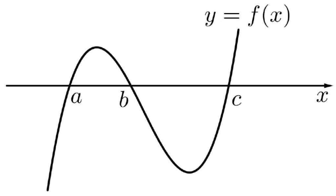
a보다 작은 정수 중 최댓값을 m이라 하면
$f(m-1)<0$, $f(m)<0$, $f(m+1)\geq 0$, $f(m+2)\geq 0$
이다. 이때 ㉠을 만족시키려면
$f(m-1)f(m+1)\geq 0$, $f(m)f(m+2)\geq 0$이어야 하므로
$f(m+1)=f(m+2)=0$이어야 한다.
그러므로 $a=m+1$, $bm+2$이다.
$f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$이므로 $m+1<\frac{1}{4}<m+2$이고
정수 m의 값은 -1이다. …… ㉡
즉, $f(x)=x(x-1)^2$
그러나 이때 함수 $y=f(x)$의 그래프에서
$f'\left(-\frac{1}{4}\right)>0$이므로 $f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$을 만족시키지 않는다.

(ii-②) $f(x)=(x-a)^2(x-b)$일 때



만약 $a<n<b$인 정수 n이 존재한다면 그 중 가장 큰 값을 n_1이라 하자. 그러면
$f(n_1)<0<f(n_1+2)$
이므로 $f(n_1)f(n_1+2)<0$이 되어 ㉠을 만족시키지 않는다. 즉, $a<n<b$인 정수 n은 존재하지 않는다.
…… ㉢
그러므로 a보다 작은 정수 중 최댓값을 m이라 하면
$f(m-1)<0$, $f(m)<0$, $f(m+1)\geq 0$, $f(m+2)\geq 0$
이고, ㉡과 마찬가지로 $a=m+1$, $b=m+2$, 정수 m의 값은 -1이다.
즉, $f(x)=x^2(x-1)$
그러나 이때 함수 $y=f(x)$의 그래프에서
$f'\left(-\frac{1}{4}\right)>0$이므로 $f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$을 만족시키지 않는다.

(iii) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3인 경우
$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ $(a<b<c)$
라 하자.



이때 ㉢과 마찬가지로 $b<n<c$인 정수 n은 존재하지 않는다. 그러므로 a보다 작은 정수 중 최댓값을 m이라 하면
$f(m-1)<0$, $f(m)<0$, $f(m+1)\geq 0$, $f(m+2)\geq 0$
이고 ㉡과 마찬가지 방법으로 $b=m+1$, $c=m+2$, 정수 m의 값은 -1이다.
즉, $f(x)=(x-a)x(x-1)=(x-a)(x^2-x)$
$f'(x)=(x^2-x)+(x-a)(2x-1)$
이므로

$$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{16}+\left(-\frac{1}{4}-a\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)$$
$$=\frac{11}{16}+\frac{3}{2}a$$

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$에서
$\frac{11}{16}+\frac{3}{2}a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{5}{8}$
그리고 $a=-\frac{5}{8}$이면
$$f'\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{16}+\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{8}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{8}$$
이므로 $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$도 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에서 함수 $f(x)$는
$f(x)=\left(x+\frac{5}{8}\right)(x^2-x)$이다.
따라서 $f(8)=\frac{69}{8}\times 56=483$

165. ②
[출제의도] 함수의 극대, 극소의 성질을 이용하여 두 상수의 합을 구할 수 있는가?
$f(x)=2x^3-9x^2+ax+5$에서
$f'(x)=6x^2-18x+a$
함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극대이므로
$f'(1)=6-18+a=0$
$a=12$
이때,
$$f'(x)=6x^2-18x+12$$
$$=6(x-1)(x-2)$$
$f'(x)=0$에서
$x=1$ 또는 $x=2$
이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이므로

$b=2$

따라서 $a+b=12+2=14$

166. 2

[출제의도] 사차함수의 극대, 극소를 구할 수 있는가?

$f(x)=x^4+ax^2+b$에서

$f'(x)=4x^3+2ax$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극소이므로

$f'(1)=4+2a=0$

에서

$a=-2$

그러므로

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x-1)(x+1)$

이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 4를 가지므로

$f(0)=b=4$

따라서 $a+b=(-2)+4=2$

167. 11

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이다.

따라서 $a=1$

$f(a)=f(1)=1^3-3\times1+12=10$

이므로

$a+f(a)=1+f(1)=1+10=11$

168. ⑤

[출제의도] 도함수를 활용하여 다항함수의 극댓값과 극솟값을 구할 수 있는가?

$f(x)=x^3-3x^2+k$에서

$f'(x)=3x^2-6x$

$\quad\;\;=3x(x-2)$

이므로 $f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

주어진 조건에 의하여 함수 $f(x)$의 극댓값이 9이므로

$f(0)=k=9$

따라서

$f(x)=x^3-3x^2+9$

이고 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(2)$이므로 구하는 극솟값은

$f(2)=2^3-3\times2^2+9=5$

169. ③

$f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$에서

$f'(x)=6x^2+6x-12$

$=6(x+2)(x-1)$

이므로 $f'(x)=0$이 되는 x의 값은

$x=-2$ 또는 $x=1$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값

$M=f(-2)=-16+12+24+1=21$

을 갖고, $x=1$에서 극솟값

$m=f(1)=2+3-12+1=-6$

을 갖는다.

따라서 $M+m=15$

170. 108

$i(x)=|f(x)|$로 놓으면 함수 $f(x)$는 다항함수이므로 모든 x의 값에 대하여 $\displaystyle\lim_{h\to0+}\frac{i(x+h)-i(x)}{h}$, $\displaystyle\lim_{h\to0-}\frac{i(x+h)-i(x)}{h}$의 값이 항상 존재한다.

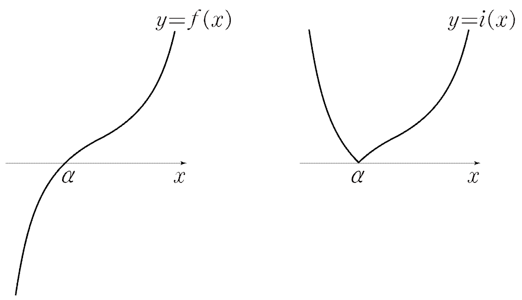
따라서,

$$\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x)|-|f(x-h)|+|f(x)|}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{i(x+h)-i(x)}{h}+\lim_{h\to0+}\frac{i(x-h)-i(x)}{-h}$$

(ⅰ) 함수, $f(x)$의 극값이 존재하지 않고 $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)\neq0$인 경우



$$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

$$=f(x-3)$$

$$\times\left\{\lim_{h\to0+}\frac{i(x+h)-i(x)}{h}+\lim_{h\to0+}\frac{i(x-h)-i(x)}{-h}\right\}$$

$$=\begin{cases} f(x-3)\times\{-2f'(x)\} & (x<\alpha) \\ 0 & (x=\alpha) \\ f(x-3)\times\{2f'(x)\} & (x>\alpha) \end{cases}$$

이때 조건 (가)를 만족시키기 위해서는

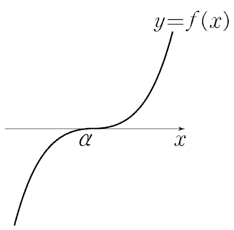
$\lim\limits_{x\to\alpha-} g(x)=\lim\limits_{x\to\alpha+} g(x)=g(\alpha)$

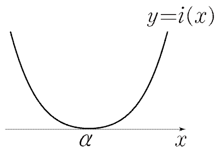
이어야 하므로

$f(\alpha-3)\times\{-2f'(\alpha)\}=f(\alpha-3)\times\{2f'(\alpha)\}=0$

그런데 $f'(\alpha)\neq 0$, $f(\alpha-3)\neq 0$ 이므로 모순이다.

(ii) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하지 않고 $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$인 경우





$g(x)=f(x-3)\times\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$

$=f(x-3)$

$\times\left\{\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{i(x+h)-i(x)}{h}+\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{i(x-h)-i(x)}{-h}\right\}$

$$=\begin{cases} f(x-3)\times\{-2f'(x)\} & (x<\alpha) \\ 0 & (x=\alpha) \\ f(x-3)\times\{2f'(x)\} & (x>\alpha) \end{cases}$$

이때 조건 (가)를 만족시키기 위해서는

$\lim\limits_{x\to\alpha-} g(x)=\lim\limits_{x\to\alpha+} g(x)=g(\alpha)$

이어야 하고 $f'(\alpha)=0$이므로

$f(\alpha-3)\times\{-2f'(\alpha)\}=f(\alpha-3)\times\{2f'(\alpha)\}=0$

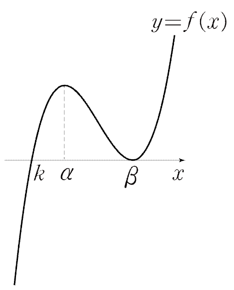
이 성립한다.

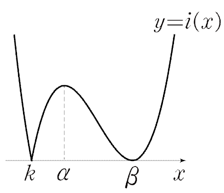
그런데, 방정식 $g(x)=0$을 만족시키는 실근은 $x=\alpha$ 또는 $x=\alpha+3$으로 2개 뿐이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(iii) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하고 $f(\alpha)\neq 0$, $f(\beta)\neq 0$, $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$인 경우

(i)의 경우와 같이 $f(k)=0$을 만족시키는 $x=k$에서 함수 $g(x)$는 연속이 아니므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(iv) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하고 $f(k)=0$, $f(\alpha)\neq 0$, $f(\beta)=0$, $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ $(k<\alpha<\beta)$ 인 경우



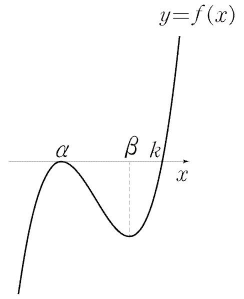


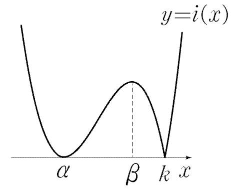
(i)의 경우와 같이 $f(k)=0$을 만족시키는 $x=k$에서 함수 $g(x)$는 연속이 아니므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(v) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하고 $f(k)=0$, $f(l)=0$, $f(m)=0$, $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ $(k<\alpha<l<\beta<m)$ 인 경우

(i)의 경우와 같이 $f(k)=0$을 만족시키는 $x=k$에서 함수 $g(x)$는 연속이 아니므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(vi) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하고 $f(k)=0$, $f(\alpha)=0$, $f(\beta)\neq 0$, $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ $(\alpha<\beta<k)$ 인 경우





$g(x)=f(x-3)\times\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$

$=f(x-3)$

$\times\left\{\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{i(x+h)-i(x)}{h}+\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{i(x-h)-i(x)}{-h}\right\}$

$$=\begin{cases} f(x-3)\times\{-2f'(x)\} & (x<k) \\ 0 & (x=k) \\ f(x-3)\times\{2f'(x)\} & (x>k) \end{cases}$$

이때 조건 (가)를 만족시키기 위해서는

$\lim\limits_{x\to k-} g(x)=\lim\limits_{x\to k+} g(x)=g(k)$

이어야 하므로

$f(k-3)\times\{-2f'(k)\}=f(k-3)\times\{2f'(k)\}=0$

그런데 $f'(k)\neq 0$ 이므로 $f(k-3)=0$이고

$k-3=\alpha$ $\cdots\cdots$ ㉠

즉, $k=\alpha+3$이면 조건 (가)를 만족시킨다.

또한, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근은

$x<k$일 때 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$

$x=k$일 때 $x=k$

$x>k$일 때 $x=k+3$

이고 조건 (나)에서 서로 다른 네 실근의 합이 4이므로

$\alpha+\beta+k+k+3=7$

$\alpha+\beta+2k=4$ $\cdots\cdots$ ㉡

또한,

$f(x)=(x-\alpha)^2(x-k)$

이고 $f'(x)=(x-\alpha)(3x-2k-\alpha)$이므로 $f'(x)=0$에서

$\beta=\dfrac{\alpha+2k}{3}$

㉡에 대입하여 정리하면

$\alpha+2k=3$

㉠, ㉡에서 $\alpha=-1$, $k=2$이므로

$f(x)=(x+1)^2(x-2)$

따라서

$f(5)=(5+1)^2(5-2)=36\times 3=108$

171. ①

$f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+2x^2+mx+1$이므로

$f'(x)=-x^2+4x+m$

이때 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극대이므로 $f'(3)=0$이다.

따라서

$f'(3)=-9+12+m=m+3=0$
이므로
$m=-3$

172. ②
$f'(x)=3x^2-6ax+3(a^2-1)=(3x-(3a+3))(x-(a-1))$
즉 $x=a-1$일 때 극댓값 4를 갖는다. $f(-2)>0$이므로
$f(-2)=-6a^2-12a-2,\ 3a^2+6a+1<0$이 된다.
$\frac{-3-\sqrt{6}}{3}<a<\frac{-3+\sqrt{6}}{3}$ 이므로 $a<0$이다.
$f(a-1)=(a-1)^3-3a(a-1)^2+3(a^2-1)(a-1)$
$=(a-1)^2(a+2)=4$

정리하면 $a^3-3a+2=4$, $a^2-3a-2=(a+1)^2(a-2)=0$이다.
$\therefore a=-1(a<0)$
그러므로 $f(x)=x^3+3x^2$ $f(-1)=2$

173. 8
다항함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극솟값 2를 가지므로
$f(3)=2,\ f'(3)=0$
$g(x)=(x^2-2x)f(x)$에서
$g'(x)=(2x-2)f(x)+(x^2-2x)f'(x)$이므로
$g'(3)=4f(3)+3f'(3)=8$

174. ①
함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극값을 가지므로
$f'(1)=0$
$f'(x)=3x^2+2ax-9$에서
$f'(1)=3+2a-9=0$이므로 $a=3$
$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x-1)(x+3)$
함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극댓값을 갖는다.
따라서 $f(-3)=-27+27+27+4=31$

175. ①
$f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$a+4$	↘	$a-4$	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 $a-4$를 갖는다.
따라서 $a-4=2,\ a=6$

176. ①
$f'(x)=3x^2+12x+9=3(x+1)(x+3)$
함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값을 가지므로
$f(-1)=-1+6-9+a=-6$
따라서 $a=-2$

177. 15
[출제의도] 도함수를 활용하여 함수의 극댓값을 구한다.
$f(x)=x^3-3x^2+ax+10$에서
$f'(x)=3x^2-6x+a$
함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이므로
$f'(3)=27-18+a=0,\ a=-9$
$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$이므로
함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고 극댓값은
$f(-1)=-1-3+9+10=15$

178. ⑤
조건 (가)에 의하여
$f(-1)=0$
또한, 조건 (가), (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는
닫힌구간 $[3,\ 5]$에서 x축과 접하게 된다.
$f(x)=k(x+1)(x-\alpha)^2\ (k\neq 0,\ 3\leq\alpha\leq 5)$
$f'(x)=k(x-\alpha)^2+2k(x+1)(x-\alpha)$
이므로
$\frac{f'(0)}{f(0)}=\frac{k\alpha^2-2k\alpha}{k\alpha^2}$
$=1-\frac{2}{\alpha}$
그런데, $3\leq\alpha\leq 5$이므로
$\alpha=3$일 때 최솟값 $m=\frac{1}{3}$
$\alpha=5$일 때 최댓값 $M=\frac{3}{5}$
$\therefore\ Mm=\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$

179. ③
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$이므로 함수 $f(x)$의 증감표를 나타내면 다음과 같다.

x		-1		1		3
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	↗	7	↘	3	↗	23

$\therefore$구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 3

180. ①
$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$a+20$	↘	a	↗	$a+4$

$x=0$일 때, 최솟값을 가지므로 $a=-4$
따라서 $x=-2$일 때, 최댓값은 16

181. ③
두 곡선 $y=2x^2-1,\ y=x^3-x^2+k$가 만나는 점의 개수가 2가 되려면 방정식 $2x^2-1=x^3-x^2+k$, 즉
$-x^3+3x^2-1=k$ $\cdots\cdots$ ㉠
이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선

$y=-x^3+3x^2-1$과 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$f(x)=-x^3+3x^2-1$이라 하면

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

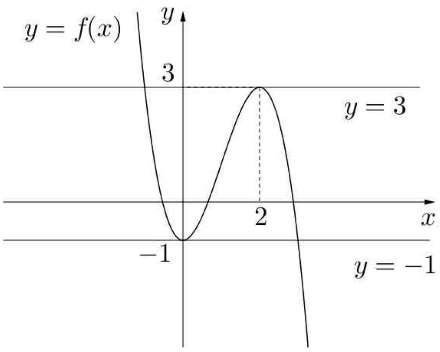
x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값

$f(0)=-1$을 갖고, $x=2$에서 극댓값

$f(2)=3$을 갖는다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 양수 k의 값은 3이다.

182. ③

방정식 $2x^3-3x^2-12x+k=0$, 즉

$2x^3-3x^2-12x=-k$ ...... ㉠

에서

$f(x)=2x^3-3x^2-12x$라 하자.

$f'(x)=6x^2-6x-12$

$=6(x+1)(x-2)$

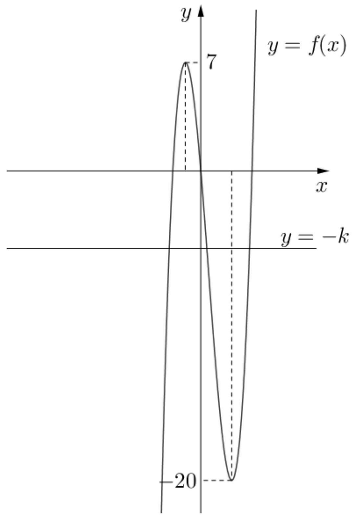
$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 아래와 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	7 (극대)	↘	-20 (극소)	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 7을 갖고, $x=2$에서 극솟값 -20을 갖는다.



방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$-20<-k<7$

즉, $-7<k<20$이다.

따라서 정수 k의 값은

$-6, -5, -4, \cdots, 19$

이고, 그 개수는 26이다.

183. ①

$x\le 2$일 때,

$f(x)=2x^3-6x+1$에서

$f'(x)=6x^2-6=6(x-1)(x+1)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$x\le 2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	↗	5	↘	3	↗	5

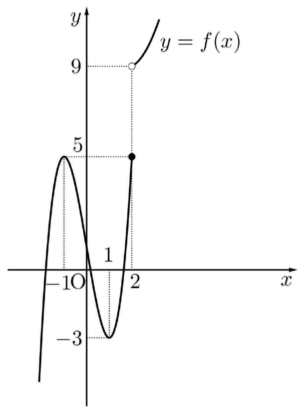
또한 a, b가 자연수이므로 곡선

$y=a(x-2)(x-b)+9$

는 점 $(2, 9)$와 점 $(b, 9)$를 지나고 아래로 볼록한 포물선이다.

(ⅰ) $b=1$ 또는 $b=2$인 경우

함수 $f(x)$는 $x>2$에서 증가하고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 $-3<k<5$인 모든 실수 k에 대하여

$g(k)=\lim\limits_{t\to k-}g(k)=\lim\limits_{t\to k+}g(k)=3$ …… ㉠

이므로

$g(k)+\lim\limits_{t\to k-}g(k)+\lim\limits_{t\to k+}g(k)=9$ …… ㉡

을 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 아니다.

(ii) $b\geq 3$인 경우

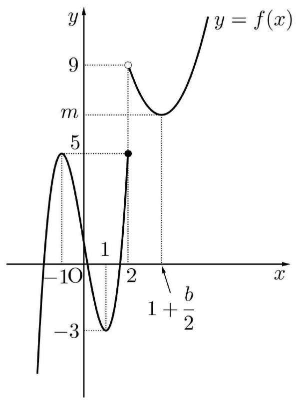
$y=a(x-2)(x-b)+9$는

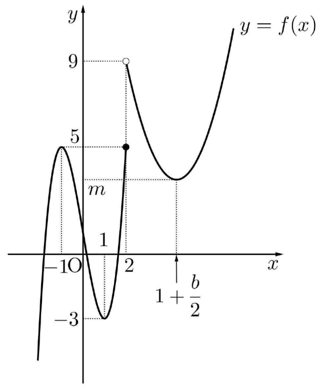
직선 $x=\dfrac{2+b}{2}=1+\dfrac{b}{2}$에 대하여 대칭이므로

함수 $f(x)$는 $x=1+\dfrac{b}{2}$에서 극솟값을 갖는다.

이 극솟값을 m이라 하자.

(ii-①) $m>-3$인 경우





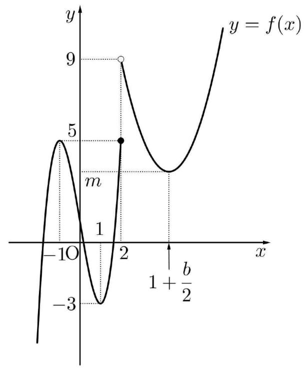
m과 5 중에 크지 않은 값을 m_1이라 하면

$-3<k<m_1$인 모든 실수 k에 대하여 ㉠이

성립하므로 ㉡을 만족시키는 실수 k의 개수가 1이

아니다.

(ii-②) $m<-3$인 경우

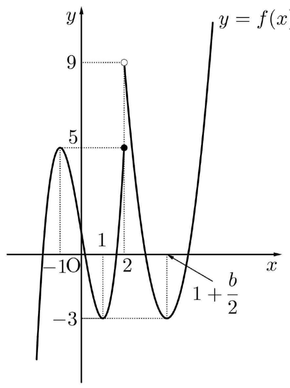


$m<k<-3$인 모든 실수 k에 대하여 ㉠이

성립하므로 ㉡을 만족시키는 실수 k의 개수가 1이

아니다.

(ii-③) $m=-3$인 경우



k의 값에 따라서 $g(k)$, $\lim\limits_{t\to k-}g(k)$, $\lim\limits_{t\to k+}g(k)$의 값을 구하면

다음과 같다.

	$g(k)$	$\lim\limits_{t\to k-}g(k)$	$\lim\limits_{t\to k+}g(k)$
$k<-3$	1	1	1
$k=-3$	3	1	5
$-3<k<5$	5	5	5
$k=5$	4	5	2
$5<k<9$	2	2	2
$k=9$	1	2	1
$k>9$	1	1	1

즉, ㉡을 만족시키는 실수 k의 값은 -3 뿐이므로 문제의 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $b\geq 3$, $m=-3$이다.

$f\left(1+\dfrac{b}{2}\right)=-3$에서

$a\left(\dfrac{b}{2}-1\right)\left(1-\dfrac{b}{2}\right)+9=-3$

$a(b-2)^2=48$

$48=2^4\times 3$이므로 구하는 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(48,\ 3)$, $(12,\ 4)$, $(3,\ 6)$

이다.

따라서 $a+b$의 최댓값은 $48+3=51$이다.

184. 4

[출제의도] 사차방정식이 서로 다른 네 실근을 가질 조건을 구할 수 있는가?

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$이라 하면

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x$

$\quad =12x(x^2-x-2)$

$\quad =12x(x+1)(x-2)$

이므로 $f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=2$

이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 사차함수 $f(x)$는

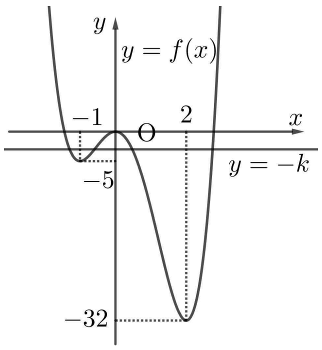
$x=0$에서 극댓값 $f(0)=0$을 갖고,

$x=-1$, $x=2$에서 각각 극솟값

$f(-1)=3+4-12=-5$,

$f(2)=48-32-48=-32$

를 갖는다.



주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$의 교점의 개수와 같으므로 주어진 방정식이 서로 다른 네 실근을 가질 조건은 위의 그래프에서

$-5<k<0$, 즉 $0<k<5$

이어야 한다.

따라서 구하는 자연수 k의 개수는 4이다.

185. 7

[출제의도] 근의 조건이 주어진 방정식에서 미분을 이용하여 정수 k를 구할 수 있는가?

방정식

$2x^3-6x^2+k=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

에서

$f(x)=-2x^3+6x^2+k$

라 하면 방정식의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점 x좌표이다.

한편,

$f'(x)=6x^2-12x$

$\quad =6x(x-2)$

이므로

$f'(x)=0$

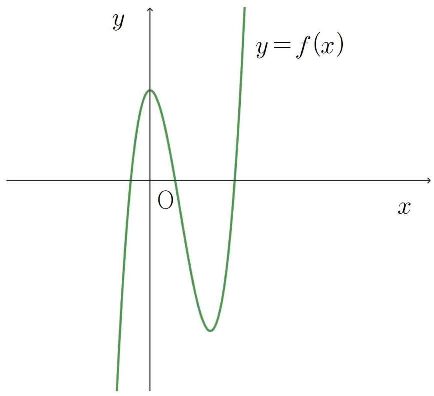
에서

$x=0$ 또는 $x=2$

그러므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	k	↘	$k-8$	↗

이때, ㉠이 2개의 서로 다른 양의 실근을 갖기 위해서는 다음 그림과 같아야 한다.



즉, 함수 $f(x)$의 극댓값은 양수이어야 하고,

함수 $f(x)$의 극솟값은 음수이어야 한다.

그러므로

$k>0$이고 $k-8<0$

이므로

$0<k<8$

따라서 정수 k는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7로 그 개수는 7이다.

186. 61

조건 (가)에서 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 하면

$f(x)=k(x-\alpha)^2(x-\beta)$

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서

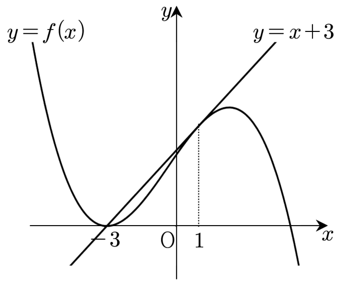
$x-f(x)=\alpha$ 또는 $x-f(x)=\beta$

를 만족시키는 서로 다른 x의 값의 개수가 3이어야 한다.

즉 $f(x)=x-\alpha$ 또는 $f(x)=x-\beta$에서 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=x-\alpha$, $y=x-\beta$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 3이어야 한다.

한편, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 4)$에서의 접선의 기울기가 1이므로 접선의 방정식은 $y=x+3$

그런데 $f(0)>0$, $f'(0)>1$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x+3$는 그림과 같다.



$f(x)-(x+3)=k(x+3)(x-1)^2$이므로

$f(x)=k(x+3)(x-1)^2+x+3$

$f'(x)=k(x-1)^2+k(x+3)\times 2(x-1)+1$ …… ㉠

이때, $f'(-3)=0$이므로

㉠에 $x=-3$을 대입하면

$0=k\times 16+1$에서 $k=-\dfrac{1}{16}$

따라서

$f(x)=-\dfrac{1}{16}(x+3)(x-1)^2+x+3$이므로

$f(0)=-\dfrac{1}{16}\times 3\times 1+3=\dfrac{45}{16}$

즉 $p=16$, $q=45$이므로

$p+q=16+45=61$

187. ⑤

[출제의도] 도함수를 활용하여 함수의 최솟값을 구하고 이를 부등식에 활용할 수 있는가?

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=x^3-x^2-x+6-a$

이때 $x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $h(x)\geq 0$이 성립하려면 $x\geq 0$에서 함수 $h(x)$의 최솟값이 0 이상이어야 한다.

$h'(x)=3x^2-2x-1$

$\quad=(3x+1)(x-1)$

이므로

$h'(x)=0$

에서

$x=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=1$

$x\geq 0$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$	$6-a$	↘	$5-a$	↗

즉, $x\geq 0$에서 함수 $h(x)$의 최솟값이 $5-a$이므로 주어진 조건을 만족시키려면 $5-a\geq 0$이어야 한다.

따라서 $a\leq 5$이므로 구하는 실수 a의 최댓값은 5이다.

188. 15

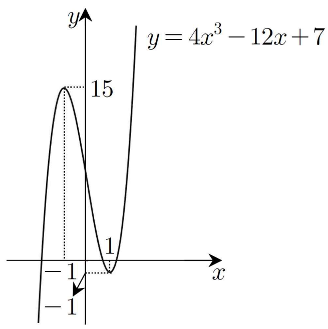
$y=4x^3-12x+7$에서

$y'=12x^2-12=12(x+1)(x-1)$

이므로 $y'=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=-1$과 $x=1$이다.

따라서 함수 $y=4x^3-12x+7$은 $x=-1$에서 극댓값 15, $x=1$에서 극솟값 -1을 갖는다.



이때 곡선 $y=4x^3-12x+7$과 직선 $y=k$의 교점의 개수가 2이므로 직선 $y=k$는 점 $(-1,\ 15)$ 또는 $(1,\ -1)$을 지나야 한다.

따라서 양수 k의 값은 15이다.

189. 12

방정식 $x^3-x^2-8x+k=0$에서

$x^3-x^2-8x=-k$

$f(x)=x^3-x^2-8x$라 하면

$f'(x)=3x^2-2x-8$

$\quad=(3x+4)(x-2)$

$f'(x)=0$에서

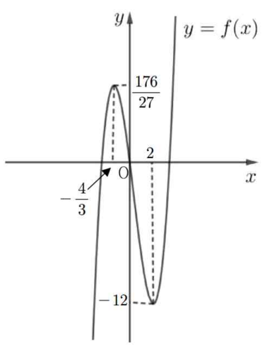
$x=-\dfrac{4}{3}$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\dfrac{4}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f\left(-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{176}{27}$, $f(2)=-12$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



방정식 $f(x)=-k$의 서로 다른 실근의 개수가 2이려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$-k=\dfrac{176}{27}$ 또는 $-k=-12$

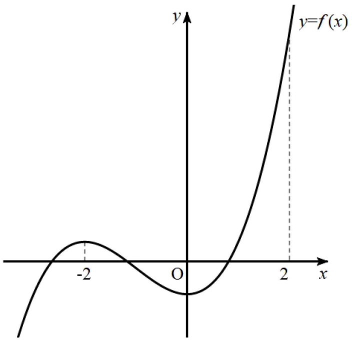
즉, $k=-\dfrac{176}{27}$ 또는 $k=12$

이다.
이때 k는 양수이므로
$k=12$

190. ③
$f(x)=2x^3+6x^2+a$라 하면
$f'(x)=6x^2+12x$
$=6x(x+2)$
이때 $f'(x)=0$에서
$x=-2$ 또는 $x=0$
이고, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

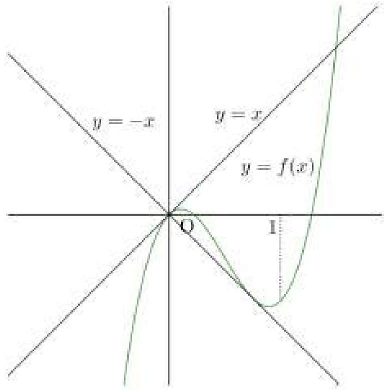
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$8+a$	↘	a	↗

그러므로 방정식 $f(x)=0$이 $-2\le x\le 2$에서 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



이때 $f(2)=40+a$이므로 $f(2)>f(-2)$이다.
그러므로 조건을 만족시키기 위해서는 $f(-2)\ge 0$이고
$f(0)<0$이어야 한다.
$f(-2)\ge 0$에서
$8+a\ge 0$, $a\ge -8$ $\cdots\cdots$ ㉠
또, $f(0)<0$에서
$a<0$ $\cdots\cdots$ ㉡
따라서 ㉠, ㉡에서
$-8\le a<0$
이므로 구하는 정수 a의 개수는 8이다.

191. 51
$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수)로 놓을 수 있다.
$f(0)=0$이므로 $d=0$
$f'(x)=3ax^2+2bx+c$에서 $f'(1)=1$이므로
$3a+2b+c=1$ $\cdots\cdots$ ㉠
조건 (가)와 조건 (나)에서 곡선 $y=f(x)$는 두 직선 $y=x$, $y=-x$와 각각 두 점에서 만나야 한다.
이때 $f(0)=0$, $f'(1)=1$이므로 곡선 $y=f(x)$는 그림과 같이 직선 $y=x$와 원점에서 접하고, 직선 $y=-x$와 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$ $(\alpha>0)$에서 접해야 한다.



즉, $f'(0)=1$이므로
$c=1$
이때 ㉠에서 $3a+2b=0$이므로
$b=-\dfrac{3}{2}a$

따라서 $f(x)=ax^3-\dfrac{3}{2}ax^2+x$이다.
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x$의 접점의 x좌표가 α이므로
$f(\alpha)=-\alpha$에서 $a\alpha^3-\dfrac{3}{2}a\alpha^2+\alpha=-\alpha$
이대 $\alpha>0$이므로
$2a\alpha^2-3a\alpha+4=0$ $\cdots\cdots$ ㉡
$f'(\alpha)=-1$이므로
$3a\alpha^2-3a\alpha+1=-1$
$3a\alpha^2-3a\alpha+2=0$ $\cdots\cdots$ ㉢
㉡, ㉢에서
$\alpha=\dfrac{3}{4}$, $a=\dfrac{32}{9}$
따라서
$f(x)=\dfrac{32}{9}x^3-\dfrac{16}{3}x^2+x$
이므로
$f(3)=32\times 3-16\times 3+3=51$

192. 21
$y=x^3-3x^2+2x-3$과 $y=2x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 $y=2x+k$은 $y=x^3-3x^2+2x-3$의 접선이 된다.
따라서 기울기가 2인 접선의 방정식을 통하여 $y=2x+k$을 구할 수 있다.
접점을 (t,t^3-3t^2+2t-3)이라고 하면 접선의 기울기는 $3t^2-6t+2$이다. 기울기는 $3t^2-6t+2=2$이므로 $t=0,2$이다.
따라서 접점은 $(0,-3),(2,-3)$이다. 직선의 방정식은 다음과 같다.
$y=2x-3,y=2x-7$
따라서 k의 곱은 21이다.

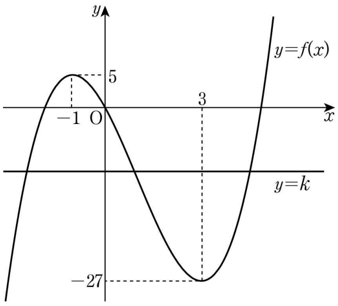
193. 3
$h(x)=f(x)-3g(x)$라 하면
$h(x)=x^3-3x^2-9x+30-k$ 이고,
닫힌 구간 $[-1,\ 4]$에서
$f(x)\ge 3g(x)$ 이므로
$h(x)\ge 0$ 이어야 한다.

이때,
$h'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$ 이므로 닫힌 구간 $[-1,\ 4]$에서 함수 $h(x)$의 증가, 감소를 조사하면 함수 $h(x)$는 $x=3$에서 극소이면서 최소임을 알 수 있다.
즉, 닫힌 구간 $[-1,\ 4]$에서 함수 $h(x)$의 최솟값은 $h(3)=3-k$ 이므로 닫힌구간 $[-1,\ 4]$에서 $h(x)\geq 0$ 이려면
$3-k\geq 0$
즉, $k\leq 3$ 이어야 한다.
따라서 구하는 k의 최댓값은 3

194. ④
$f(x)=x^3-3x^2-9x$라 하면
$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$

이고, 함수 $f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



직선 $y=k$는 x축에 평행하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 세 점에서 만나기 위한 k의 값의 범위는 $-27<k<5$
그러므로 정수 k의 최댓값 $M=4$, 최솟값 $m=-26$
따라서 $M-m=4-(-26)=30$

195. ⑤
$f(x)\leq g(x)$에서 $g(x)-f(x)\geq 0$
즉 $x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2+a\geq 0$
$h(x)=x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2+a$라 하면 $h(x)\geq 0$
$h'(x)=4x^3+4x^2-8x=4x(x-1)(x+2)$
$h'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$
함수 $h(x)$의 증가와 감소를 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	$a-\frac{32}{3}$	$\nearrow$	a	$\searrow$	$a-\frac{5}{3}$	$\nearrow$

함수 $h(x)$는 $x=-2$에서 최솟값 $a-\frac{32}{3}$를 갖는다.
$a-\frac{32}{3}\geq 0$에서 $a\geq\frac{32}{3}$
따라서 실수 a의 최솟값은 $\frac{32}{3}$이다.

196. 32
[출제의도] 함수의 그래프를 이용하여 실수의 최솟값을 구하는 문제를 해결한다.
$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+k$라 하면
$f'(x)=12x^3-12x^2-24x$
$\quad=12x(x+1)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=2$에서 극소, $x=0$에서 극대이다.
이때 $f(-1)=-5+k$, $f(2)=-32+k$이므로
$f(-1)>f(2)$
모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 항상 성립하려면
$f(2)=-32+k\geq 0$ 즉, $k\geq 32$이어야 한다.
따라서 실수 k의 최솟값은 32이다.

197. 11
[출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기
$f(x)=x^4-4x^3+16x+a$라 하면
$f'(x)=4x^3-12x^2+16=4(x+1)(x-2)^2$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$a-11$	$\nearrow$	$a+16$	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 $a-11$을 갖는다.
모든 실수 x에 대하여 부등식
$x^4-4x^3+16x+a\geq 0$이 항상 성립하기 위해서는
$a-11\geq 0$, $a\geq 11$
따라서 a의 최솟값은 11

198. ②
주어진 그래프의 개형에서 $f'(x)$의 부호에 따라 경우를 나누면 다음과 같다.
(i) $f'(x)>0$인 경우
$f'(x)>0$인 구간 $(-3,2)$에서 부등식 $f(x)-2\leq 0$을 만족시키는 정수 x의 값은 -2, -1
(ii) $f'(x)\leq 0$인 경우
$f'(x)\leq 0$인 구간 $[2,7)$에서 부등식 $f(x)-2\geq 0$ 을 만족시키는 정수 x의 값은 2, 3, 4
따라서 (i), (ii)에 의해 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 5

199. ⑤
$f(x)=f(-x)$이고 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이므로 $f(0)=c=0$
$f(1)=a+b+0=-\frac{3}{4}$, $f'(-1)=-4a-2b=1$
$a=\frac{1}{4}$, $b=-1$

ㄱ. $f(0)=0$ (참)

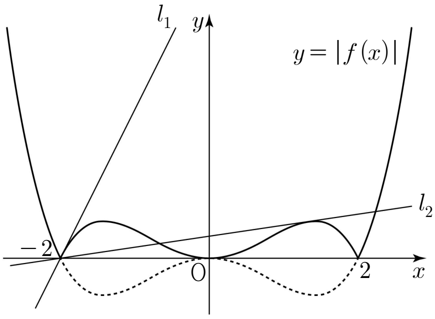
ㄴ. $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2=\frac{1}{4}x^2(x+2)(x-2)$

$\alpha=-2,\ \beta=0,\ \gamma=2$

$f'(x)=x^3-2x$

$f'(\alpha)=f'(-2)=-4$ (참)

ㄷ.



곡선 $y=-f(x)$위의 점 $(-2,\ 0)$에서의 접선 l_1의 기울기는 $-f'(-2)=-(-4)=4$

점 $(-2,\ 0)$에서 곡선 $y=-f(x)$에 그은 접선 중 하나를 l_2라 할 때,

접점을 $\left(t,\ -\frac{1}{4}t^4+t^2\right)(t\neq-2,\ 0)$이라 하자.

직선 l_2의 기울기는

$-f'(t)=-(t^3-2t)=-t^3+2t$

직선 l_2의 방정식은

$y=(-t^3+2t)(x-t)-\frac{1}{4}t^4+t^2$

직선 l_2가 점 $(-2,\ 0)$을 지나므로

$0=(-t^3+2t)(-2-t)-\frac{1}{4}t^4+t^2$

$t(3t-4)(t+2)^2=0,\ t=\frac{4}{3}$

$-f'\left(\frac{4}{3}\right)=-\left(\frac{4}{3}\right)^3+2\times\frac{4}{3}=\frac{8}{27}$

함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=k(x+2)$의 교점의 개수는

(i) $0<k<\frac{8}{27}$일 때, 5개

(ii) $k=\frac{8}{27}$일 때, 4개

(iii) $\frac{8}{27}<k<4$일 때, 3개

(iv) $k\geq4$일 때, 2개

그러므로 방정식 $|f(x)|=k(x+2)$의

서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는

양수 k의 범위는 $\frac{8}{27}<k<4$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

200. 27

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 $v_1,\ v_2$라 하면

$v_1=3t^2-4t+3,\ v_2=2t+12$

이므로

$3t^2-6t-9=0$

$(t+1)(t-3)=0$

$t\geq0$이므로 $t=3$이고 이때 두 점 P, Q의 위치는 각각 18, 45이다.

따라서 구하는 두 점 사이의 거리는

$45-18=27$

201. 6

점 P의 시각 $t(t>0)$에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=6t^3-24t^2+30t-12$

$\quad=6(t-1)^2(t-2)$

$v(t)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=2$

함수 $x(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$v(t)$		$-$	0	$-$	0	$+$
$x(t)$		↘	$-\frac{7}{2}$	↘	-4	↗

점 P는 $0<t<2$에서 운동 방향이 음의 방향이고 $t>2$에서 운동방향이 양의 방향이므로 점 P는 시각 $t=2$에서 운동 방향이 바뀐다.

점 P의 시각 $t(t>0)$에서의 가속도를 $a(t)$라 하면

$a(t)=v'(t)=18t^2-48t+30$

따라서 점 P의 운동 방향이 바뀌는 순간

점 P의 가속도는

$a(2)=18\times2^2-48\times2+30$

$\quad=6$

202. 30

점 P의 시각 $t\ (t\geq0)$에서의

속도 v는 $v=6t^2-2kt$

가속도 a는 $a=12t-2k$

$t=1$일 때, $v=6-2k=0$이므로 $k=3$

따라서 $t=3$에서 점 P의 가속도는

$12\times3-2\times3=30$

203. ④

시각 t에서의 속도를 v라 하면

$x=t^3+kt^2+kt$에서 $v=3t^2+2kt+k$

$t=1$에서 점 P가 운동 방향을 바꾸므로

$t=1$에서 $v=0$

그러므로 $3+2k+k=0$에서 $k=-1$

시각 t에서의 가속도를 a라 하면

$a=6t+2k=6t-2$

따라서 $t=2$에서 점 P의 가속도는 $6\times2-2=10$

204. ②

시각 t에서의 점 P의 속도는 $P'(t)=3t^2-18t+34$이므로,

$3t^2-18t+34=10$

$t^2-6t+8=(t-2)(t-4)=0$

$t=2$ 또는 $t=4$

$\therefore t=2$일 때 위치는 $P(2)=40$

205. 6

점 P의 시각 $t\,(t \ge 0)$에서의 속도 $v(t)$는

$v(t)=3t^2-6t+a$

$v(3)=3\times3^2-6\times3+a=15$

따라서 $a=6$

206. 8

점 P의 시각 t에서의 위치가

$x=t^3-5t^2+6t$ 이므로

시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=3t^2-10t+6$

또, 시각 t 에서의 가속도를 a라 하면

$a=6t-10$

따라서 $t=3$ 에서의 가속도는

$6\times3-10=8$

207. ②

$g(x)=x^3-3x^2+p$라 하면 $f(x)=|g(x)|$

$g'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $x=0$또는 $x=2$

$g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)=|g(x)|$가 극대가 되는 x가

2개가 되려면

$g(0)=p>0,\ g(2)=p-4<0$즉, $0<p<4$

$f(0)=|p|=p,\ f(2)=|p-4|=4-p$

$f(0)=f(2)$이므로 $p=4-p$즉, $p=2$

208. ⑤

$g(x)=x^3-12x+k$라 하면 $f(x)=|g(x)|$

$g'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

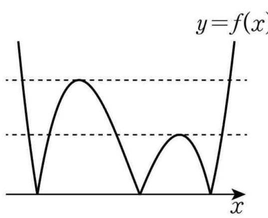
$g'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

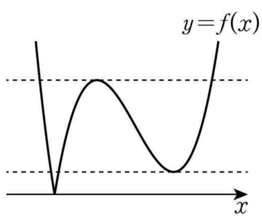
함수 $g(x)$가 $x=-2$에서 극댓값 $k+16$, $x=2$에서

극솟값 $k-16$을 가지므로 k의 값에 따라 다음과 같은 경우로

나누어 생각할 수 있다.

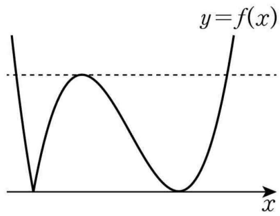
(i) $0<k<16$ 또는 $k>16$인 경우





함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 홀수가 되는 실수 a의 값이 3개 존재하므로 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $k=16$인 경우



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 홀수가 되는 실수 a의 값이 오직 하나이다.

(i), (ii)에서 $k=16$

209. 29

$0<x\le4$에서 $g(x)=x(x-4)^2$이고

함수 $g(x)$가 $x=4$에서 연속이므로

$\lim_{x\to4+}g(x)=\lim_{x\to4-}g(x),\ \lim_{x\to4+}f(x)=\lim_{x\to4-}x(x-4)^2$

$f(4)=0$

함수 $g(x)$가 $x=4$에서 미분가능하므로

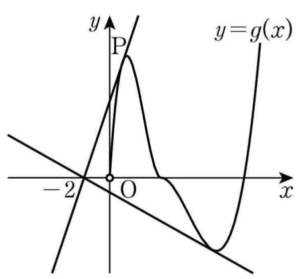
$\lim_{x\to4+}\dfrac{g(x)-g(4)}{x-4}=\lim_{x\to4-}\dfrac{g(x)-g(4)}{x-4}$

$\lim_{x\to4+}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to4-}\dfrac{x(x-4)^2}{x-4}$

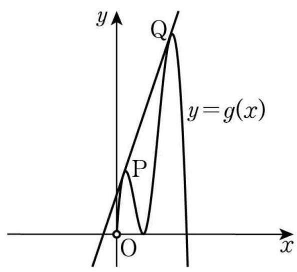
$f'(4)=0$

$f(4)=f'(4)=0$이고 $g\left(\dfrac{21}{2}\right)=f\left(\dfrac{21}{2}\right)=0$이므로

$f(x)=a(x-4)^2(2x-21)(a\ne0)$이라 하자.



[그림 1]



[그림 2]

$a>0$이면 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형이 [그림 1]과 같으므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다. $a<0$이면 [그림 2]와 같이 조건 (나)를 만족시키는 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형이 존재한다.

조건 (나)에 의하여 점 $(-2,\ 0)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 기울기가 0이 아닌 접선은 곡선 $y=g(x)$ 위의 두 점 P, Q에서 곡선 $y=g(x)$에 접한다.

두 점 P, Q의 x좌표를 각각 t, s라 하고

$0<t<4,\ s>4$라 하자.

$0<t<4$에서 $g'(t)=3t^2-16t+16$이므로

접선의 방정식은

$y=(3t^2-16t+16)(x-t)+t^3-8t^2+16t$이다.

접선이 점 $(-2,\ 0)$을 지나므로

$(3t^2-16t+16)(-2-t)+t^3-8t^2+16t=0$

$2t^3-2t^2-32t+32=0,\ (t-4)(t+4)(t-1)=0$

$0<t<4$에서 $t=1$이므로 접선의 방정식은

$y=3x+6$이다. 이 접선이 점 Q에서
곡선 $y=f(x)(x>4)$에 접한다.
$f(x)=a(x-4)^2(2x-21)$에서
$f'(x)=2a(3x^2-37x+100)=2a(x-4)(3x-25)$
점 Q에서의 접선의 방정식은
$y=2a(s-4)(3s-25)(x-s)+a(s-4)^2(2s-21)$
이 접선이 점 $(-2,\ 0)$을 지나므로
$0=2a(s-4)(3s-25)(-2-s)+a(s-4)^2(2s-21)$
$a\neq 0$, $s>4$이므로
$(s-4)(2s-21)=2(s+2)(3s-25)$
$4s^2-9s-184=0$, $(4s+23)(s-8)=0$, $s=8$
$f'(8)=3$이므로 $a=-\dfrac{3}{8}$

$f(x)=-\dfrac{3}{8}(x-4)^2(2x-21)$이므로

$g(10)=f(10)=\dfrac{27}{2}$

따라서 $p=2$, $q=27$이므로 $p+q=29$

210. 729
[출제의도] 도함수를 활용하여 함수를 추론한다.
$\lim\limits_{x\to k}\dfrac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$의 값이 존재할 때,

$\lim\limits_{x\to k-}\dfrac{g(x)-g(k)}{|x-k|}=\lim\limits_{x\to k+}\dfrac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$이다.

$\lim\limits_{x\to k-}\dfrac{g(x)-g(k)}{|x-k|}=\lim\limits_{x\to k-k}\left(\dfrac{g(x)-g(k)}{x-k}\times\dfrac{x-k}{|x-k|}\right)$

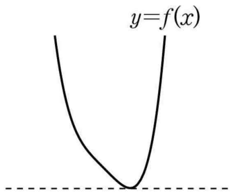
$=\lim\limits_{x\to k-}\dfrac{g(x)-g(k)}{x-k}\times(-1)$ …… ㉠

$\lim\limits_{x\to k+}\dfrac{g(x)-g(k)}{|x-k|}=\lim\limits_{x\to k+}\left(\dfrac{g(x)-g(k)}{x-k}\times\dfrac{x-k}{|x-k|}\right)$

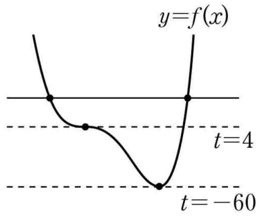
$=\lim\limits_{x\to k+}\dfrac{g(x)-g(k)}{x-k}\times 1$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로 $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{g(x)-g(k)}{x-k}=0$이거나

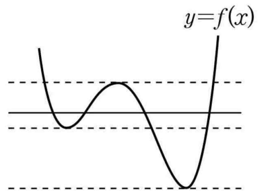
$\lim\limits_{x\to k_-}\dfrac{g(x)-g(k)}{x-k}$와 $\lim\limits_{x\to k^+}\dfrac{g(x)-g(k)}{x-k}$의 절댓값이 같고 부호가
반대이어야 한다.
따라서 $g'(k)=0$즉, $f'(k)=0$이거나
$g(k)=0$ 즉, $f(k)=t$이다.
방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수에 따라
다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.
(i) $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 1인 경우



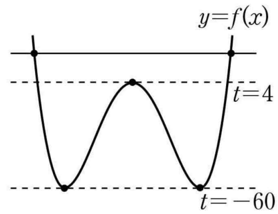
함수 $h(t)$가 불연속이 되는 실수 t가 오직 하나만 존재하므로
조건 (나)를 만족시키지 못한다.
(ii) $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우



함수 $h(t)$가 $t=-60$과 $t=4$에서 불연속이므로
$f'(\alpha)=0$일 때 $f(\alpha)$의 값은 -60과 4이다.
이때 $\lim\limits_{t\to 4+}h(t)=4$가 되어 조건 (가)를 만족시키지 못한다.
(iii) $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3인 경우



[그림 1]



[그림 2]

[그림 1]과 같이 두 극솟값의 크기가 다르면 함수 $h(t)$가
불연속이 되는 서로 다른 실수 t가 3개 존재하므로 조건
(나)를 만족시키지 못한다.
[그림 2]와 같이 두 극솟값의 크기가 같은 경우
조건 (나)를 만족시키고, 함수 $f(x)$의 극댓값이 4이면
$\lim\limits_{t\to 4+}h(t)=5$이므로 조건 (가)를 만족시킨다. 이때 $h(4)=5$
(i), (ii), (iii)에서 사차함수 $f(x)$는 최고차항의 계 수가 1이고
두 극솟값은 모두 -60, 극댓값은 4이다.
$f(2)=4$이고 $f'(2)>0$이므로 방정식 $f(x)=4$의 가장 큰 실근이
2가 된다.
함수 $f(x)$의 그래프를 극대인 점이 원점에 오도록 평행이동한
그래프를 나타내는 함수를 $p(x)$라 하면,
$p(0)=0$이고 $p'(0)=0$이므로 $p(x)$는 x^2을 인수로 갖는다.
또한 함수 $p(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로
양수 a에 대하여 $p(a)=p(-a)=0$이라 하면
$p(x)=x^2(x-a)(x+a)=x^4-a^2x^2$
$p'(x)=4x^3-2a^2x=2x(2x^2-a^2)$이므로
$p'(x)=0$에서

$x=0$또는 $x=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$또는 $x=-\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

$p\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)=p\left(-\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)=-64$이므로

$p\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)=\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^4-a^2\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=-\dfrac{a^4}{4}=-64$

즉, $a^4=256=4^4$이므로 $a=4$이다.
이 때 $p(x)=x^2(x-4)(x+4)$
방정식 $p(x)=0$의 가장 큰 실근이 4이므로 함수 $y=p(x)$의

그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 일치한다. 따라서

$f(x)=(x+2)^2(x-2)(x+6)+4$

$f(4)=724,\ h(4)=5$이므로

$f(4)+h(4)=724+5=729$

211. ③

ㄱ. $f'(x)=3x^2-3t^2=3(x+t)(x-t)$

$f'(x)=0$에서 $x=-t$ 또는 $x=t$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

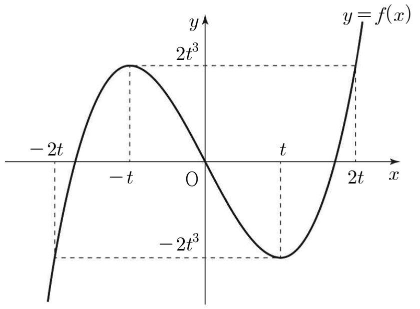
x	$\cdots$	$-t$	$\cdots$	t	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$2t^3$	↘	$-2t^3$	↗

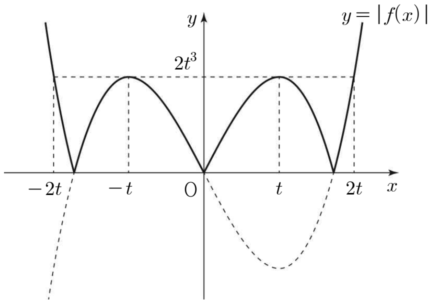
$t=2$일 때, 닫힌구간 $[-2,\ 1]$에서 두 함수 $f(x)$, $|f(x)|$의 최댓값은 모두 $f(-2)=16$이므로 $M_1(2)=M_2(2)=16$

$g(2)=32$ (참)

ㄴ. 방정식 $f(x)=2t^3$에서 $(x+t)^2(x-2t)=0$,

방정식 $f(x)=-2t^3$에서 $(x-t)^2(x+2t)=0$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.





(ⅰ) $-t<-2,\ 1<t$일 때,

$t>2$이고, $M_1(t)=M_2=f(-2)<f(-t)$

이므로 $g(t)=2f(-2)\neq 2f(-t)$

(ⅱ) $-2t\leq -2\leq -t,\ 1\leq t$일 때

$1\leq t\leq 2$이고, $M_1(t)=M_2=f(-t)$

이므로 $g(t)=2f(-t)$

(ⅲ) $-2<-2t,\ t<1\leq 2t$일 때

$\frac{1}{2}\leq t<1$이고,

$M_1(t)=f(-t),\ M_2(t)=-f(-2)>f(-t)$

이므로 $g(t)=f(-t)-f(-2)\neq 2f(-t)$

(ⅳ) $-2<-2t,\ 2t<1$일 때

$0<t<\frac{1}{2}$이고,

$M_1(t)=f(1)>f(-t)$,

$M_2(t)=-f(-2)>f(-t)$

이므로 $g(t)=f(1)-f(-2)\neq 2f(-t)$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 $g(t)=2f(-t)$를 만족시키는 t의 최댓값과 최솟값의 합은 $2+1=3$ (참)

ㄷ. (ⅰ) $\frac{1}{2}\leq t<1$일 때

$g(t)=f(-t)-f(-2)=2t^3-6t^2+8$이므로

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\left(2h^2-3h-\frac{9}{2}\right)=-\frac{9}{2}$$

(ⅱ) $0<t<\frac{1}{2}$일 때

$g(t)=f(1)-f(-2)=-9t^2+9$이므로

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0-}(-9h-9)=-9$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}-\lim_{h\to 0-}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}$$

$=-\frac{9}{2}-(-9)=\frac{9}{2}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

212. 380

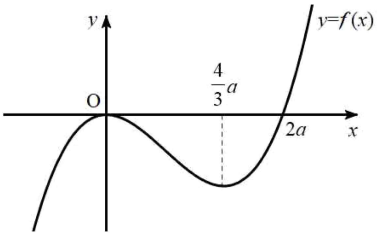
주어진 조건을 만족시키려면 열린구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 두 점 $(x_1,\ f(x_1))$, $(x_2,\ f(x_2))$를 지나는 직선의 기울기와 두 점 $(x_2,\ f(x_2))$, $(x_3,\ f(x_3))$을 지나는 직선의 기울기의 부호가 다른 세 실수 $x_1,\ x_2,\ x_3$이 존재해야 하는데, 그러려면 극대 또는 극소가 되는 점이 구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 존재해야 한다.

이때 $f(x)=x^3-2ax^2$에서

$f'(x)=3x^2-4ax$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 a의 값의 범위에 따라 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) $a>0$일 때



$k=-1$일 때 $x=0$이 구간 $\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$에 존재하므로 조건을 만족시킨다.

또, $x=\frac{4}{3}a$가 구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 존재하려면

$k<\frac{4}{3}a<k+\frac{3}{2}$

이므로

$\frac{4}{3}a-\frac{3}{2}<k<\frac{4}{3}a$

이어야 한다.

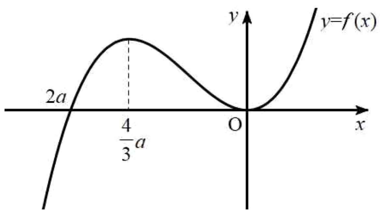
이때 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되려면 이 구간에 $k=3,\ k=4$가 존재해야 하므로

$\frac{4}{3}a-\frac{3}{2}<3,\ \frac{4}{3}a>4$

$3<a<\frac{27}{8}$

그런데 이 부등식을 만족시키는 정수 a는 존재하지 않는다.

(ii) $a<0$일 때



$k=-1$일 때 $x=0$이 구간 $\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$에 존재하므로 조건을 만족시킨다.

또, $x=\frac{4}{3}a$가 구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 존재하려면

$k<\frac{4}{3}a<k+\frac{3}{2}$

이므로

$\frac{4}{3}a-\frac{3}{2}<k<\frac{4}{3}a$

이어야 한다.

이때 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되려면 이 구간에 $k=-4,\ k=-3$이 존재해야 하므로

$\frac{4}{3}a-\frac{3}{2}<-4,\ \frac{4}{3}a>-3$

$-\frac{9}{4}<a<-\frac{15}{8}$

즉, $a=-2$

(i), (ii)에서 $a=-2$이므로

$f(x)=x^3+4x^2$

$f'(x)=3x^2+8x$

따라서

$f'(10)=3\times10^2+8\times10=380$

213. ⑤

[출제의도] 함수의 증가와 감소를 이해하여 실수의 최솟값을 구하는 문제를 해결한다.

$f(x)=x^2+2x+k=(x+1)^2+k-1$

이므로 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여

$f(x)\ge k-1$이다.

함수 $g(f(x))$에서 $f(x)=t$라 하면 $t\ge k-1$이므로 함수 $g(t)$는 구간 $[k-1,\ \infty)$에서 정의된 함수이다.

한편 $g(x)=2x^3-9x^2+12x-2$에서

$g'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

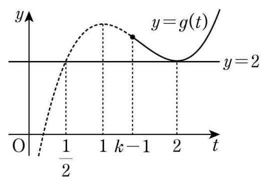
이므로 $g'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$이다.

함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극대, $x=2$에서 극소이다.

$g(t)=2$에서

$2t^3-9t^2+12t-2=2,\ (2t-1)(t-2)^2=0$

즉, 함수 $y=g(t)$의 그래프와 직선 $y=2$는 그림과 같다.



따라서 $\frac{1}{2}\le k-1\le 2$, 즉 $\frac{3}{2}\le k\le 3$이므로 조건을 만족시키는 실수 k의 최솟값은 $\frac{3}{2}$이다.

214. ②

[출제의도] 함수의 그래프를 활용하여 방정식의 실근의 개수를 추론한다.

ㄱ. $k=0$일 때, $f(x)+g(x)=x^3+2x^2+4$

$h_1(x)=x^3+2x^2+4$라 하면

$h_1{}'(x)=3x^2+4x=x(3x+4)=0$

에서 함수 $h_1(x)$는 $x=-\frac{4}{3}$에서 극대, $x=0$에서 극소이다.

$h_1(0)=4>0$이므로 방정식 $h_1(x)=0$은 오직 하나의 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. $f(x)-g(x)=0$에서

$x^3-kx+6-(2x^2-2)=0,\ x^3-2x^2+8=kx$

$h_2(x)=x^3-2x^2+8$이라 하면 곡선 $y=h_2(x)$에 직선 $y=kx$가 접할 때만 방정식 $h_2(x)=kx$의 서로 다른 실근의 개수가 2이다. 접점의 좌표를 $(a,\ a^3-2a^2+8)$이라 하면

$h_2{}'(x)=3x^2-4x$에서 접선의 방정식은

$y-(a^3-2a^2+8)=(3a^2-4a)(x-a)$

이 접선이 원점을 지나므로

$0-(a^3-2a^2+8)=(3a^2-4a)(0-a)$,

$(a-2)(a^2+a+2)=0$, $a=2$

따라서 구하는 k의 값은 $h_2'(2)=4$뿐이다. (참)

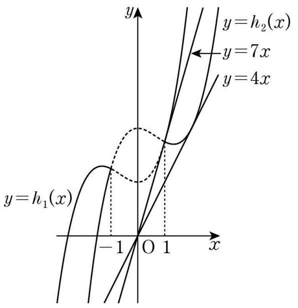
ㄷ. $|x^3-kx+6|=2x^2-2$에서 $2x^2-2\geq 0$이므로 x의 값의 범위는 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 1$이고, 주어진 방정식은

$x^3-kx+6=-(2x^2-2)$ 또는 $x^3-kx+6=2x^2-2$,

즉 $x^3+2x^2+4=kx$ 또는 $x^3-2x^2+8=kx$

$h_1(x)=x^3+2x^2+4$, $h_2(x)=x^3-2x^2+8$이라 하면 주어진 방정식의 실근의 개수는 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 1$일 때 직선 $y=kx$와 두 곡선 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$의 교점의 개수와 같다.

ㄴ에서 $k=4$일 때 직선 $y=kx$와 곡선 $y=h_2(x)$가 접하므로 $k\leq 4$일 때 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 1$에서 직선 $y=kx$와 두 곡선 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$의 교점의 개수의 최댓값은 3이다.



$k>4$일 때, $x\leq -1$에서 직선 $y=kx$와 두 곡선 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$의 서로 다른 교점의 개수는 2이다. 원점에서 곡선 $y=h_1(x)$에 그은 접선의 방정식은 $y=7x$이고 접점의 좌표는 $(1,\ 7)$이므로 $k>4$일 때, $x\geq 1$에서 직선 $y=kx$와 두 곡선 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$의 서로 다른 교점의 개수는 2이다. 즉, $k>4$일 때, $x\leq -1$ 또는 $x\geq 1$에서 직선 $y=kx$와 두 곡선 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$의 서로 다른 교점의 개수는 4이다.

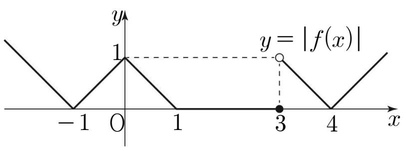
따라서 방정식 $|f(x)|=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수의 최댓값은 4이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

215. ④

[출제의도] 도함수를 이용하여 추론하기

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이므로 함수 $g(x)$는 $x=k+3$에서만 불연속이다.

ㄱ. $k=-3$일 때

$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0-}|f(x+3)|=0$,

$g(0)=|f(0+3)|=0$에서 $\lim_{x\to 0-}g(x)=g(0)$

ㄴ. $\lim_{x\to 0-}f(x)=1$, $f(0)=-1$에서 $\lim_{x\to 0-}f(x)\neq f(0)$

$k\neq -3$일 때 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0-}\{f(x)+g(x)\}\neq f(0)+g(0)$

$k=-3$일 때 $\lim_{x\to 0-}g(x)=g(0)$이므로

$\lim_{x\to 0-}\{f(x)+g(x)\}\neq f(0)+g(0)$

그러므로 모든 정수 k에 대하여

함수 $f(x)+g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하기 위해서는 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to 0-}f(x)g(x)=\lim_{x\to 0-}g(x)$,

$\lim_{x\to 0+}f(x)g(x)=-\lim_{x\to 0+}g(x)$,

$f(0)g(0)=-g(0)$

에서 $\lim_{x\to 0-}g(x)=-\lim_{x\to 0+}g(x)=-g(0)$

모든 정수 k에 대하여 $\lim_{x\to 0-}g(x)=g(0)$이므로

$\lim_{x\to 0}g(x)=g(0)=0$

그러므로 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 정수 k의 값은 -4, -2, -1, 1

(ⅰ) $k=-4$ 또는 $k=1$일 때,

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{(x+1)(-x)}{x}=-1$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{(x-1)x}{x}=-1$$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(ⅱ) $k=-2$일 때,

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=0$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=0$$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(ⅲ) $k=-1$일 때,

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{(x+1)(-x)}{x}=-1$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=0$$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 모든 정수 k의 값의 합은 $-4+(-2)+1=-5$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

216. 240

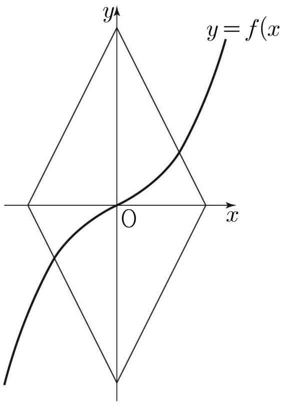
[출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로

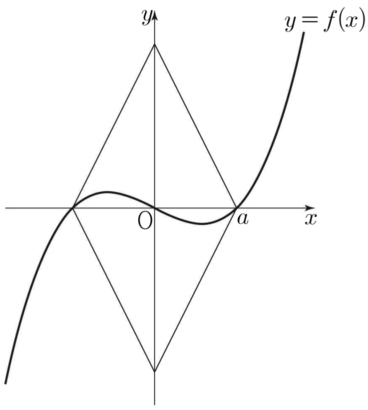
곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점의 개수는 1 또는 3이다.

(ⅰ) 곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점의 개수가 1인 경우
모든 양수 t에 대하여 $g(t)=2$이므로
함수 $g(t)$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.



(ⅱ) 곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점의 개수가 3인 경우
$f(x)=x(x-a)(x+a)(a>0)$이라 하자.
두 점 $(t,\ 0)$, $(0,\ -2t)$를 지나는 직선의 기울기는
t의 값에 관계없이 2이므로
$f'(a)$의 값에 따라 함수 $g(t)$가 $t=k$에서
불연속이 되는 k의 개수가 달라진다.

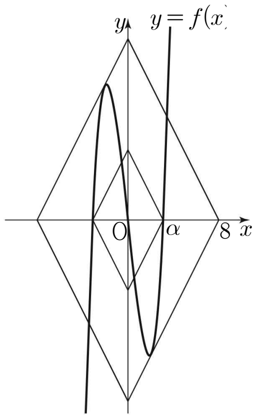
(a) $f'(a)\le 2$일 때
모든 양수 t에 대하여 $g(t)=2$이므로
함수 $g(t)$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.



(b) $f'(a)>2$일 때
곡선 $y=f(x)$의 기울기가 2인 두 접선의 x절편을 각각
β, $-\beta(\beta>a)$라 하면

$$g(t)=\begin{cases}2 & (0<t<a \text{ 또는 } t>\beta)\\ 4 & (t=a \text{ 또는 } t=\beta)\\ 6 & (a<t<\beta)\end{cases}$$

함수 $g(t)$는 $t=a$, $t=\beta$에서 불연속이므로
$a=\alpha$, $\beta=8$



함수 $g(t)$가 $t=8$에서 불연속이므로
두 직선 $y=2x+16$과 $y=2x-16$은
곡선 $y=f(x)$에 접한다.
직선 $y=2x-16$이 곡선 $y=f(x)$에 접하는 점의
x좌표를 $p(0<p<\alpha)$라 하면

$p^3-\alpha^2p=2p-16$ …… ㉠

$f'(x)=3x^2-\alpha^2$이므로 $f'(p)=3p^2-\alpha^2=2$에서

$\alpha^2=3p^2-2$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$p^3-(3p^2-2)p=2p-16$, $-2p^3=-16$

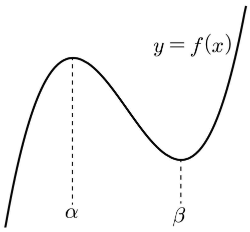
에서 $p=2$, $\alpha^2=10$이므로 $f(x)=x^3-10x$

따라서 $\alpha^2\times f(4)=10\times(4^3-10\times 4)=240$

217. ③

[출제의도] 함수의 극대와 극소를 활용하여 문제 해결하기

함수 $f(x)$가 극값을 가지므로
함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극댓값을 갖고
$x=\beta$에서 극솟값을 갖는다고 하자.



(ⅰ) $\alpha<\beta\le -2$인 경우
$x\ge -2$에서 함수 $g(x)$는 증가한다.
$f(-2)<g(-2)<g(2)$
$g(2)\ne f(-2)$이므로 모순

(ⅱ) $\alpha<-2<\beta$인 경우
방정식 $g(x)=f(-2)$의 실근이 열린구간 $(-\infty,\ \alpha)$에서
존재하므로 모순

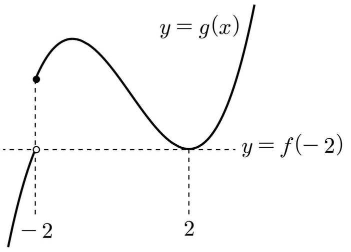
(ⅲ) $\alpha=-2$인 경우
방정식 $g(x)=f(-2)$의 실근이 2뿐이므로
함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.
$f'(x)=3(x+2)(x-2)$

$f(x)=x^3-12x+\dfrac{1}{2}$

$g(2) \neq f(-2)$이므로 모순

(ⅳ) $-2 < \alpha < \beta$인 경우

함수 $y = g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g(2) = f(-2)$이므로 $f(2) + 8 = f(-2)$

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + \dfrac{1}{2}$ (a, b는 상수)라 하자.

$8 + 4a + 2b + \dfrac{1}{2} + 8 = -8 + 4a \pm 2b + \dfrac{1}{2}$

$b = -6$, $f(x) = x^3 + ax^2 - 6x + \dfrac{1}{2}$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax - 6$

함수 $f(\ )$가 $x = 2$에서 극솟값을 가지므로

$f'(2) = 12 + 4a - 6 = 0$, $a = -\dfrac{3}{2}$

$f(x) = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 - 6x + \dfrac{1}{2}$이므로

$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x+1)(x-2)$

함수 $f(x)$는 $x = -1$에서 극댓값을 갖는다.

따라서 극댓값은 $f(-1) = 4$

218. 121

[출제의도] 접선의 방정식과 그래프의 개형을 활용하여 문제 해결하기

$f(0) = 0$이므로

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(0) = c$, $g(x) = cx$

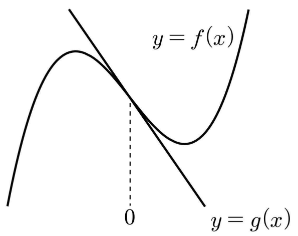
곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 기울기 c에 대하여

(ⅰ) $c = 0$이면 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $c > 0$이면 $h(12) > 0$이므로

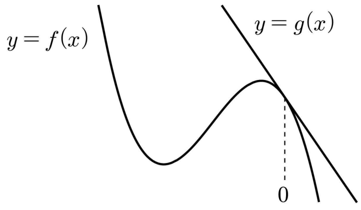
조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $c < 0$, $a > 0$이면 두 함수 $y = f(x)$와 $y = g(x)$의 그래프가 다음과 같으므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

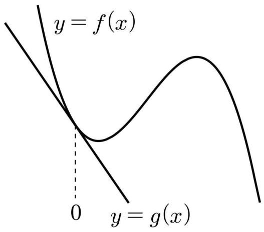


(ⅳ) $c < 0$, $a < 0$이면

두 함수 $y = f(x)$와 $y = g(x)$의 그래프가 다음과 같은 경우에는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.



그러므로 두 함수 $y = f(x)$와 $y = g(x)$의 그래프가 다음과 같은 경우에만 조건 (가), (나)를 만족시킨다.



조건 (가)에 의하여

$f(x) + g(x) = ax(x-k)^2$ …… ㉠

조건 (나)에 의하여

$-f(x) + g(x) = -ax^2(x-12)$ …… ㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면

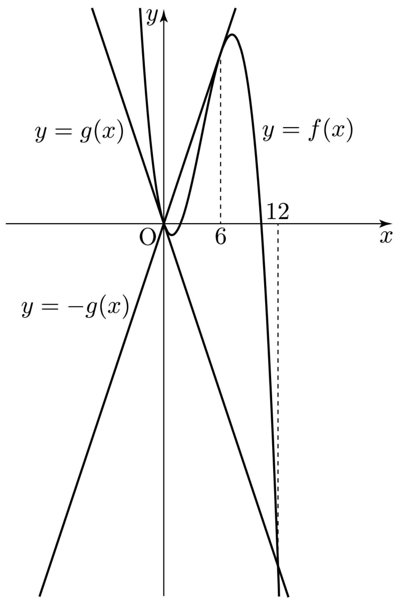
$2g(x) = 2a(6-k)x^2 + ak^2x$

$6 - k = 0$, $k = 6$

$g(x) = 18ax$

$f(x) = ax(x-6)^2 - 18ax$

$= ax(x^2 - 12x + 18)$



방정식 $x^2 - 12x + 18 = 0$의 두 근을 α, $\beta(\alpha < \beta)$라 하면

$\alpha = 6 - 3\sqrt{2}$, $\beta = 6 + 3\sqrt{2}$

함수 $h(x)$는 다음과 같다.

$$h(x) = \begin{cases} ax(x-6)^2 & (x < 0 \text{ 또는 } \alpha \le x < \beta) \\ -ax^2(x-12) & (0 \le x < \alpha \text{ 또는 } x \ge \beta) \end{cases}$$

$\alpha < 3 < \beta$이므로

$h(3)=a\times3\times(3-6)^2=27a=-\dfrac{9}{2}$

$a=-\dfrac{1}{6}$, $c=-3$

$$h(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{6}x(x-6)^2 & (x<0 \text{ 또는 } \alpha\le x<\beta)\\ \dfrac{1}{6}x^2(x-12) & (0\le x<\alpha \text{ 또는 } x\ge\beta)\end{cases}$$

$\alpha=6-3\sqrt{2}$, $\beta=6+3\sqrt{2}$이므로

$\alpha<6<\beta<11$

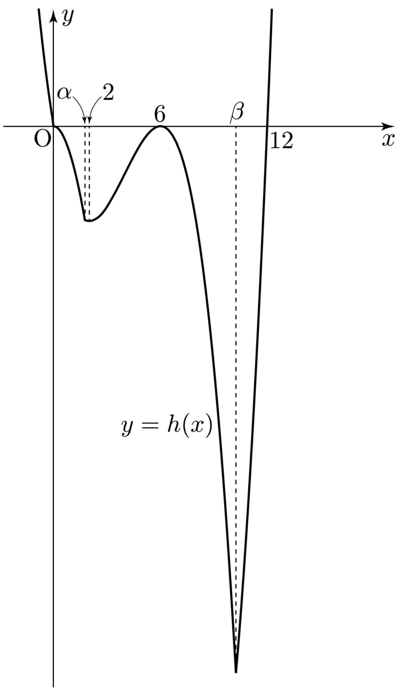
$h(6)=0$, $h(11)=\dfrac{1}{6}\times11^2\times(-1)=-\dfrac{121}{6}$

따라서

$k\times\{h(6)-h(11)\}=6\times\left\{0-\left(-\dfrac{121}{6}\right)\right\}=121$

[참고]

함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



219. 58

[출제의도] 삼차함수의 그래프와 함수의 연속성을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & (x\ge t)\\ -f(x)+2f(t) & (x<t)\end{cases}$$

에서 $\lim\limits_{x\to t-}g(x)=\lim\limits_{x\to t+}g(x)=g(t)=f(t)$

이므로 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=k$에서 극솟값을 갖는다고 하자.

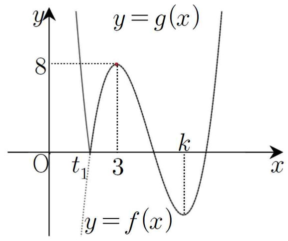
이때 함수 $y=-f(x)+2f(t)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후, y축의 방향으로 $2f(t)$만큼 평행이동한 것이다.

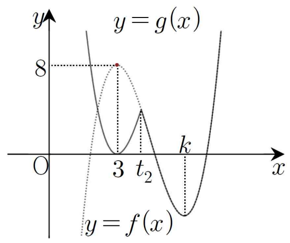
방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=g(x)$의 그래프와

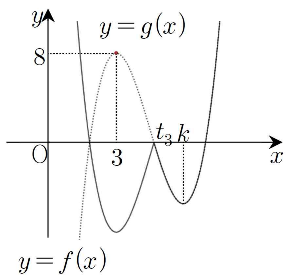
x축과의 교점의 개수와 같으므로 $f(k)$의 값에 따라 나누어 생각할 수 있다.

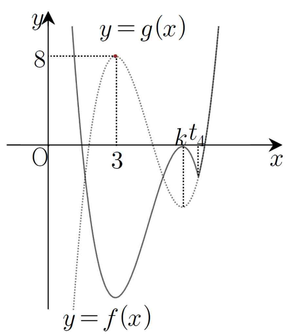
우선, $f(k)<0$인 경우를 생각해보면 함수 $y=g(x)$가 불연속일 때의

그래프는 다음과 같다.





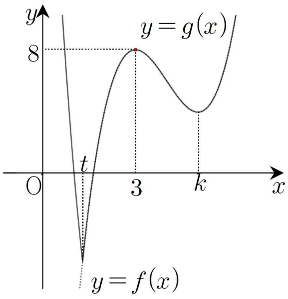




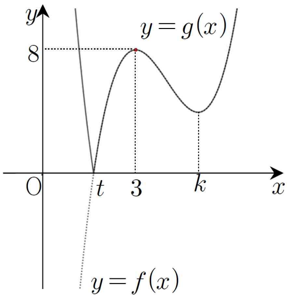
따라서 함수 $h(t)$는

$t=t_i$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$에서 불연속이므로 주어진 조건에 위배된다.

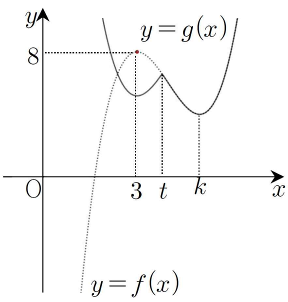
위와 같은 방법으로 함수 $y=f(x)$의 그래프에 따라 함수 $y=g(x)$의 그래프를 그려보면 함수 $h(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 두 개인 경우는 다음과 같이 $t=k$일 때 $g(3)=0$이 되는 경우 뿐 이다.



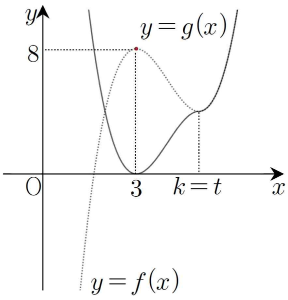
[교점 2개]



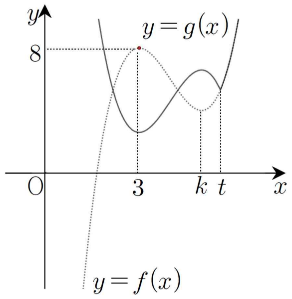
[교점 1개]



[교점 0개]



[교점 1개]



[교점 0개]

$t=k$일 때

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq t) \\ -f(x)+2f(t) & (x < t) \end{cases}$$

이고 이때 $g(3)=0$에서

$-f(3)+2f(k)=0$, 즉 $-8+2f(k)=0$에서

$f(k)=4$

한편, 최고차항의 계수가 1인 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극댓값을 가지고 $x=k$에서 극솟값을 가지므로 $k>3$이고

$f'(x)=3(x-3)(x-k)$

$\quad =3x^2-3(3+k)x+9k$

따라서

$f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}(3+k)x^2+9kx+C$ (C 는 적분상수)

이고 $f(3)=8$이므로

$27-\dfrac{27}{2}(3+k)+27k+C=8$,

$C=\dfrac{43}{2}-\dfrac{27}{2}k$

따라서

$f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}(3+k)x^2+9kx+\dfrac{43}{2}-\dfrac{27}{2}k$

이때 $f(k)=4$이므로

$k^3-\dfrac{3}{2}(3+k)k^2+9k^2+\dfrac{43}{2}-\dfrac{27}{2}k=4$,

$-\dfrac{k^3}{2}+\dfrac{9}{2}k^2-\dfrac{27}{2}k+\dfrac{35}{2}=0$,

$k^3-9k^2+27k-35=0$

$(k-5)(k^2-4k+7)=0$

모든 실수 k에 대하여 $k^2-4k+7>0$이므로

$k=5$

따라서

$f(x)=x^3-12x^2+45x-46$

이므로

$f(8)=512-768+360-46=58$

220. ④

[출제의도] 연속함수의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구한다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

조건 (가)와 (나)에서

$f(4)=\lim\limits_{x\to4-}f(x)=16a+4b-24$이고

$f(0)=f(4)$이므로 $-24=16a+4b-24$에서

$b=-4a \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$0 \leq x < 4$에서 $f(x)=a(x-2)^2-4a-24$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$이므로

$1<x<2$일 때 방정식 $f(x)=0$이 실근을 갖지 않으면

$1<x<10$일 때 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 4 이하이다.

$1<x<2$일 때 방정식 $f(x)=0$이 실근을 1개 가지면
$1<x<10$일 때 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 5이다.
함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 연속이므로

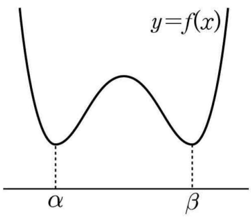
$$\begin{aligned} f(1)f(2) &= (-3a-24)(-4a-24) \\ &= 12(a+8)(a+6)<0 \end{aligned}$$

$-8<a<-6$이고 a는 정수이므로 $a=-7$
㉠에 의하여 $b=28$
따라서 $a+b=-7+28=21$

221. 82
[출제의도] 다항함수의 도함수를 활용하여 함수에 대한 문제를 해결한다.
사차함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서만 극솟값을 갖는다고 하면 함수 $g(t)$는

$$g(t)=\begin{cases} f(t)-f(\alpha) & (t<\alpha) \\ f(\alpha)-f(t) & (t\geq\alpha) \end{cases}$$

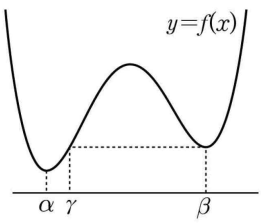
구간 $(-\infty,\ \alpha)$에서 함수 $f(t)$가 감소하므로 함수 $g(t)$도 감소하고,
구간 $[\alpha,\ \infty)$에서 함수 $f(t)$가 증가하므로 함수 $g(t)$는 감소한다.
실수 전체의 집합에서 함수 $g(t)$가 감소하므로
조건을 만족시키는 양수 k가 존재하지 않는다.
그러므로 함수 $f(x)$는 극댓값을 가져야 한다.
함수 $f(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta(\alpha<\beta)$에서 극솟값을 가지고,
$f(\alpha)=a$, $f(\beta)=b$라 하자.
(i) $f(\alpha)=f(\beta)$인 경우



함수 $f(x)$의 최솟값은 a이므로

$$g(t)=\begin{cases} f(t)-a & (t<\alpha) \\ 0 & (\alpha\leq t\leq\beta) \\ a-f(t) & (t>\beta) \end{cases}$$

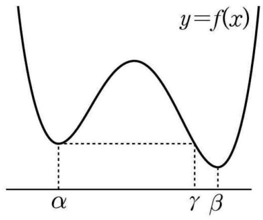
따라서 조건을 만족시키는 양수 k가 존재하지 않는다.
(ii) $f(\alpha)<f(\beta)$인 경우



$\alpha<x<\beta$일 때, $f(x)=f(\beta)$의 해를 γ라 하면

$$g(t)=\begin{cases} f(t)-a & (t<\alpha) \\ a-f(t) & (\alpha\leq t<\gamma) \\ a-b & (\gamma\leq t\leq\beta) \\ a-f(t) & (t>\beta) \end{cases}$$

$a-b<0$이므로 조건을 만족시키는 양수 k가 존재하지 않는다.
(iii) $f(\alpha)>f(\beta)$인 경우



$\alpha<x<\beta$일 때, $f(x)=f(\alpha)$의 해를 γ라 하면

$$g(t)=\begin{cases} f(t)-b & (t<\alpha) \\ a-b & (\alpha\leq t\leq\gamma) \\ f(t)-b & (\gamma<t<\beta) \\ b-f(t) & (t\geq\beta) \end{cases}$$

$a-b>0$이므로 $k=a-b$, $\alpha=0$, $\gamma=2$이면 k는 주어진 조건을 만족시킨다.
(i), (ii), (iii)에서
$f'(0)=0$, $f(0)=f(2)$이다.
또 $g(4)=0$이므로 $\beta=4$이고 $f'(4)=0$이다.
$f(x)-f(0)=x^2(x-2)(x-p)$(p는 상수)라 하자.
$f'(x)=2x(x-2)(x-p)+x^2(2x-p-2)$이므로
$f'(4)=0$에서 $16(4-p)+16(6-p)=0$
$10-2p=0$, $p=5$
그러므로
$f(x)=x^2(x-2)(x-5)+f(0)$

$$\begin{aligned} k&=f(\alpha)-f(\beta)=f(0)-f(4) \\ &=f(0)-\{-32+f(0)\}=32 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(-1)&=f(-1)-f(4) \\ &=\{18+f(0)\}-\{-32+f(0)\}=50 \end{aligned}$$

따라서 $k+g(-1)=82$

222. ③
조건 (가)에서 $x\to1$일 때, (분모)$\to0$이므로
(분자)$\to0$이다. 즉, $f(1)=g(1)$ …… ㉠

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-g(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)-f(1)\}-\{g(x)-g(1)\}}{x-1}=5$$

즉, $f'(1)-g'(1)=5$ …… ㉡
조건 (나)에서

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to1}\frac{f(x)+g(x)-2f(1)}{x-1} \\ &=\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)-f(1)\}+\{g(x)-g(1)\}}{x-1}=7 \end{aligned}$$

즉, $f'(1)+g'(1)=7$ …… ㉢
$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)-a}{x-1}=b\times g(1)$에서 $x\to1$일 때,
(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.
즉, $a=f(1)$이고 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$
㉠에서 $f(1)=g(1)$이므로 $f'(1)=b\times f(1)=ab$
㉡, ㉢을 연립해서 풀면 $f'(1)=6$
따라서 $ab=6$

223. ①

함수 $g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하고 $g(a)=0$이므로

$$\lim_{x\to a-}\frac{g(x)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{g(x)}{x-a},$$

$$\lim_{x\to a-}\frac{|(x-a)f(x)|}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{|(x-a)f(x)|}{x-a},$$

$$\lim_{x\to a-}\frac{-(x-a)|f(x)|}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{(x-a)|f(x)|}{x-a}$$

그러므로 $-|f(a)|=|f(a)|$에서 $f(a)=0$

$f(x)=(x-a)(x-k)$(k는 상수)라 하면

함수 $g(x)=|(x-a)^2(x-k)|$가 $x=3$에서만 미분가능하지 않으므로 $k=3$이다.

그러므로 $g(x)=|(x-a)^2(x-3)|$

$h(x)=(x-a)^2(x-3)$이라 하면

$a<3$이고 함수 $g(x)$의 극댓값이 32이므로 함수 $h(x)$의 극솟값은 -32이다.

$h'(x)=2(x-a)(x-3)+(x-a)^2=(x-a)(3x-6-a)=0$

함수 $h(x)$는 $x=\dfrac{6+a}{3}$에서 극솟값 -32를 갖는다.

$$h\left(\frac{6+a}{3}\right)=\left(\frac{6+a}{3}-a\right)^2\left(\frac{6+a}{3}-3\right)=-4\left(1-\frac{a}{3}\right)^3=-32$$

$\left(1-\dfrac{a}{3}\right)^3=8$이므로 $1-\dfrac{a}{3}=2$에서 $a=-3$

따라서 $f(x)=(x+3)(x-3)$에서 $f(4)=7$

224. 64

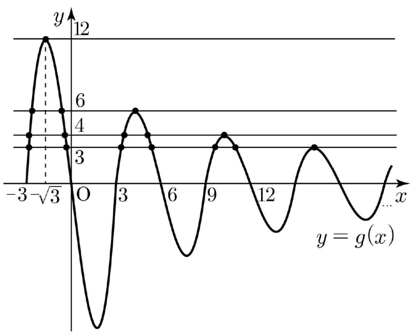
$f(x)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x(x-3)(x+3)$

$f'(x)=2\sqrt{3}(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$이므로

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	12 (극대)	↘	-12 (극소)	↗

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



자연수 k에 대하여

$6k-3\le x<6k+3$일 때

함수 $g(x)=\dfrac{1}{k+1}f(x-6k)$

$k+1$이 12의 양의 약수가 될 때

함수 $g(x)$의 극댓값이 자연수이므로

$k=1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 11$일 때

함수 $g(x)$의 극댓값은

각각 6, 4, 3, 2, 1이다.

$a_1=2\times11+1=23$

$a_2=2\times5+1=11$

$a_3=2\times3+1=7$

$a_4=2\times2+1=5$

$a_5=2\times2=4$

$a_6=2\times1+1=3$

$7\le n\le11$일 때, $a_n=2\times1=2$

$a_{12}=1$

따라서

$$\sum_{k=1}^{12}a_n=23+11+7+5+4+3+2\times5+1=64$$

225. 39

$h(0)=|f(0)-g(0)|=0$에서

$f(0)=g(0)$

또한, $x<1$일 때,

함수 $h(x)=|f(x)-g(x)|$가 미분가능하고 $f(0)=g(0)$이므로 $x=0$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 접해야 한다.

즉, $f'(0)=g'(0)$이다.

또한, $x=1$에서 함수 $h(x)$는 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to1-}h(x)=\lim\limits_{x\to1+}h(x)$에서

$$\lim_{x\to1-}|f(x)-g(x)|=\lim_{x\to1+}\{f(x)+g(x)\}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

(i) 1보다 작은 근방 x에서 $f(x)>g(x)$일 때, 함수 $h(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{\Delta x\to0-}\frac{h(1+\Delta x)-h(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0+}\frac{h(1+\Delta x)-h(1)}{\Delta x}$$

$f'(1)-g'(1)=f'(1)+g'(1)$

$g'(1)=0$

그런데 $g(x)$는 일차함수이므로 모순이다.

(ii) 1보다 작은 근방 x에서 $f(x)<g(x)$일 때, 함수 $h(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{\Delta x\to0-}\frac{h(1+\Delta x)-h(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0+}\frac{h(1+\Delta x)-h(1)}{\Delta x}$$

$-f'(1)+g'(1)=f'(1)+g'(1)$

$f'(1)=0$

또한, ㉠에서 $-f(1)+g(1)=f(1)+g(1)$

이므로

$f(1)=0$

따라서

$f(x)=(x-1)^2(x+a)$, $g(x)=px+q$

(a, q는 상수, p는 0이 아닌 상수)

로 놓을 수 있으므로

$f'(x)=2(x-1)(x+a)+(x-1)^2$

$g'(x)=p$

이때 $f(0)=g(0)$, $f'(0)=g'(0)$에서

$a=q$, $-2a+1=p$

이고
$h(2)=f(2)+g(2)$
$=(2+a)+2p+q$
$=2+a+2p+q=5$
$a+2p+q=3$
즉, $a=-\frac{1}{2}$, $p=2$, $q=-\frac{1}{2}$이므로
$f(x)=(x-1)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)$
$g(x)=2x-\frac{1}{2}$
$h(4)=f(4)+g(4)$
$=9\times\frac{7}{2}+8-\frac{1}{2}$
$=39$

226. 6
함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이고 미분가능하다.
함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이므로
$\lim_{x\to3-}g(x)=\lim_{x\to3+}g(x)=g(3)$
$b-f(3)=f(3)$
$b=6a-34$
함수 $g(x)$가 $x=3$에서 미분가능하므로
$\lim_{x\to3-}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}=\lim_{x\to3+}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}$
$\lim_{x\to3-}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}=\lim_{x\to3-}\frac{b-f(x)-f(3)}{x-3}$
$=\lim_{x\to3-}\frac{-f(x)+\{b-f(3)\}}{x-3}$
$=\lim_{x\to3-}\frac{-\{f(x)-f(3)\}}{x-3}$
$=-f'(3)$
$=a-9$
$\lim_{x\to3+}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}=\lim_{x\to3+}\frac{f(x)-g(3)}{x-3}$
$=f'(3)$
$=-a+9$
따라서 $a=9$, $b=20$
$g(x)=\begin{cases}-x^3+6x^2-9x+10 & (x<3)\\ x^3-6x^2+9x+10 & (x\geq3)\end{cases}$
$x<3$에서
$g'(x)=-3x^2+12-9=-3(x-1)(x-3)$
$g'(x)=0$에서 $x=1$
$x\geq3$에서
$g'(x)=3x^2-12+9=3(x-1)(x-3)$
$g'(x)=0$에서 $x=3$
함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↗

$g(1)=-1+6-9+10=6$이므로
함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값 6을 갖는다.

227. 160
$f'(x)=6x^2-6(a+1)x+6a=6(x-1)(x-a)$
이므로 $f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=a$
$f(1)=2-3(a+1)+6a=3a-1$,
$f(a)=2a^3-3a^2(a+1)+6a^2=-a^2(a-3)$
이므로 삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖기 위해서는
$f(1)f(a)=-a^2(3a-1)(a-3)<0$
$a^2>0$이므로 $(3a-1)(a-3)>0$
그런데 a는 자연수이므로 $a>3$
그러므로 $a_1=4$, $a_2=5$, $\cdots$, $a_n=n+3$
$a=a_n$일 때, $f(x)=2x^3-3(a_n+1)x^2+6a_nx$이고
$f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $b_n=f(1)=3a_n-1$
따라서 $\sum_{n=1}^{10}(b_n-a_n)=\sum_{n=1}^{10}(2n+5)=160$

228. 105
삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 $p(\neq0)$라 하면
조건 (가)에서
$f(x)=p(x-1)(x-3)(x-q)$ (p,q는 상수)
로 놓을 수 있고,
조건 (나)에서 $q<1$이다.
이때
$f(a-x)$
$=p(a-x-1)(a-x-3)(a-x-q)$
$=-p(x-a+1)(x-a+3)(x-a+q)$
이므로
$f(x)f(a-x)=-p^2(x-1)(x-3)(x-q)$
$\times(x-a+1)(x-a+3)(x-a+q)$
따라서
$g(x)=|f(x)f(a-x)|$
$=p^2|(x-1)(x-3)(x-q)(x-a+1)(x-a+1)(x-a+q)|$
이고 $q<1<3$이고, $a-3<a-1<a-q$이므로 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면
$g(x)=p^2|(x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)^2|$
꼴이어야 한다.
따라서
$a-3=q, a-1=1, a-q=3$
이어야 한다.
따라서 $a=2$, $q=-1$이므로
$f(x)=p(x+1)(x-1)(x-3)$,
$f(a-x)=-p(x+1)(x-1)(x-3)=-f(x)$
이다.
따라서

$g(x) = |f(x)f(a-x)| = \{f(x)\}^2$이므로

$\dfrac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)} = \dfrac{\{f(8)\}^2}{f(0)\times f(8)}$

$= \dfrac{f(8)}{f(0)}$

$= \dfrac{p\times 9\times 7\times 5}{p\times 1\times(-1)\times(-3)}$

$= 105$

229. 38

이차함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극대이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=-1$에서 대칭이다. 그러므로

$f(-2) = f(0) = h(0)$

이때 $h(0) = k$라 하면 $f(x)$는

$f(x) = ax(x+2)+k$

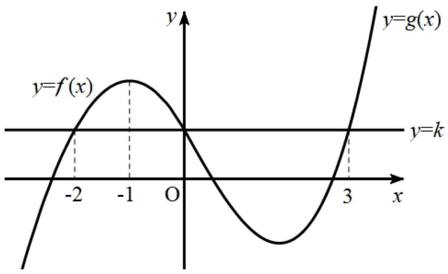
$= ax^2+2ax+k \ (a<0)$

로 놓을 수 있다.

한편, $g(x)$가 삼차함수이므로 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 $x=0$에서의 곡선 $y=g(x)$에 접하는 접선의 기울기는 음수이어야 한다.

또, 방정식 $h(x) = h(0)$의 모든 실근이 합이 1이어야 하므로 다음 두 가지로 나눌 수 있다.

(i) $g(x)$의 최고차항의 계수가 양수인 경우



$g(x) = px(x-3)(x-q)+k$

$= p\{x^3-(q+3)x^2+3qx\}+k$

한편, $g(x)$의 이차항의 계수가 0이므로

$q=-3$

이고

$g(x) = p(x^3-9x)+k$

이때, $g'(x) = p(3x^2-9)$이므로 $g'(x)=0$

에서

$x=\sqrt{3}$ 또는 $x=-\sqrt{3}$

그러므로 함수 $h(x)$는 $x=\sqrt{3}$에서 극소이다.

한편, $x=0$에서의 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기와 $x=0$에서의 곡선 $y=g(x)$의 접선의 기울기가 같아야 하고

$f'(x) = 2ax+2a$, $g'(x) = p(3x^2-9)$이므로

$2a = -9p$ ...... ㉠

또, 구간 $[-2,\ 3]$에서 $h(x)$의 최댓값은 $f(-1)$, 최솟값은 $g(\sqrt{3})$이므로 ㉠을 이용하면

$f(-1)-g(\sqrt{3}) = (-a+k)-(-6\sqrt{3}p+k)$

$= -a+6\sqrt{3}p$

$= \dfrac{9}{2}p+6\sqrt{3}p$

$= \dfrac{9+12\sqrt{3}}{2}p$

$= 3+4\sqrt{3}$

그러므로

$p = \dfrac{2}{3}$

이고

$a = -\dfrac{9}{2}p = -3$

따라서

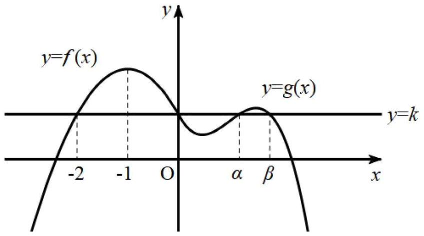
$f'(x) = -6x-6$, $g'(x) = 2x^2-6$

이므로

$h'(-3)+h'(4) = f'(-3)+g'(4)$

$= 12+26 = 38$

(ii) $g(x)$의 최고차항의 계수가 음수인 경우



$g(x) = px(x-\alpha)(x-\beta)+k \ (\alpha+\beta=3)$

로 놓으면

$g(x) = p\{x^3-(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x\}+k$

$= p\{x^3-3x^2+\alpha\beta x\}+k$

이므로 이차항의 계수가 0이 아니다.

그러므로 이러한 경우는 없다.

따라서 (i)에서 구하는 값은 38이다.

230. 108

조건 (가)에서 $x\neq 0$, $x\neq 2$일 때,

$g(x) = \dfrac{x(x-2)}{|x(x-2)|}(|f(x)|-a)$

$x<0$ 또는 $x>2$일 때, $x(x-2)>0$이고

$0<x<2$일 때, $x(x-2)<0$이므로

$g(x) = \begin{cases} |f(x)|-a & (x<0 \text{ 또는 } x>2) \\ a-|f(x)| & (0<x<2) \end{cases}$

조건 (나)에 의해 함수 $g(x)$는 $x=0$, $x=2$에서 미분가능하므로 $x=0$, $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 0-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0+} g(x)$에서 $|f(0)|-a = a-|f(0)|$

그러므로 $|f(0)|=a$에서 $g(0) = \lim\limits_{x\to 0+} g(x) = 0$

같은 방법으로 $|f(2)|=a$에서 $g(2)=0$

그러므로 $g(x) = \begin{cases} |f(x)|-a & (x<0 \text{ 또는 } x>2) \\ a-|f(x)| & (0\le x\le 2) \end{cases}$

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{g(x)-g(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{g(x)-g(0)}{x}$

즉, $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{|f(x)|-a}{x} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{a-|f(x)|}{x}$ ...... ㉠

(ⅰ) $f(0)=a$인 경우

$f(x)$는 $x=0$에서 연속이고 $f(0)>0$이므로 $\lim_{x\to0}f(x)>0$이다.

그러므로

$$\lim_{x\to0-}\frac{|f(x)|-a}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0),$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{a-|f(x)|}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{f(0)-f(x)}{x}=-f'(0)$$

㉠에서 $f'(0)=-f'(0)$, $f'(0)=0$

(ⅱ) $f(0)=-a$인 경우

$f(x)$는 $x=0$에서 연속이고 $f(0)<0$이므로 $\lim_{x\to0}f(x)<0$이다.

그러므로

$$\lim_{x\to0-}\frac{|f(x)|-a}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{-f(x)+f(0)}{x}=-f'(0),$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{a-|f(x)|}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{-f(0)+f(x)}{x}=f'(0)$$

㉠에서 $-f'(0)=f'(0)$, $f'(0)=0$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 $f'(0)=0$이다.

함수 $g(x)$가 $x=2$에서도 미분가능하므로 같은 방법으로 $f'(2)=0$이다.

그러므로 삼차함수 $f(x)$는 $x=0$과 $x=2$에서 극값을 갖고 최고차항의 계수가 1이므로 $x=0$에서 극댓값 $f(0)=a$, $x=2$에서 극솟값 $f(2)=-a$를 갖는다.

$f(x)=x^3+px^2+qx+a$ (p, q는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2px+q$이고 $f'(0)=f'(2)=0$이므로

$p=-3$, $q=0$이다. 즉, $f(x)=x^3-3x^2+a$

$f(2)=2^3-3\times2^2+a=-a$이므로 $a=2$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+2$이므로

$g(3a)=g(6)=|f(6)|-2=|6^3-3\times6^2+2|-2=108$

[참고]

[1] $f(0)=f(2)=a$ 또는 $f(0)=f(2)=-a$인 경우

삼차함수 $f(x)$는 극댓값과 극솟값이 서로 같을 수 없으므로 모순이다.

[2] $f(0)=-a$, $f(2)=a$인 경우

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 모순이다.

231. ④

$f(x)=x^3-6x^2+9x+a$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9$

$=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	a	↗	$a+4$	↘	a

닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$f(1)=a+4$이므로 $a+4=12$에서 $a=8$

232. 64

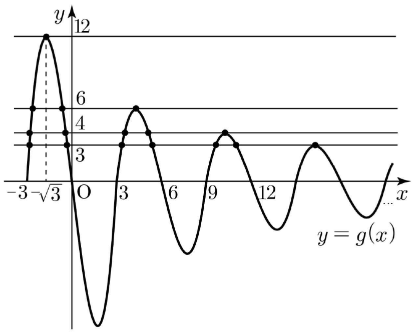
$f(x)=\frac{2\sqrt{3}}{3}x(x-3)(x+3)$

$f'(x)=2\sqrt{3}(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$이므로

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	12 (극대)	↘	-12 (극소)	↗

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



자연수 k에 대하여

$6k-3\le x<6k+3$일 때

함수 $g(x)=\frac{1}{k+1}f(x-6k)$

$k+1$이 12의 양의 약수가 될 때

함수 $g(x)$의 극댓값이 자연수이므로

$k=1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 11$일 때

함수 $g(x)$의 극댓값은

각각 6, 4, 3, 2, 1이다.

$a_1=2\times11+1=23$

$a_2=2\times5+1=11$

$a_3=2\times3+1=7$

$a_4=2\times2+1=5$

$a_5=2\times2=4$

$a_6=2\times1+1=3$

$7\le n\le11$일 때, $a_n=2\times1=2$

$a_{12}=1$

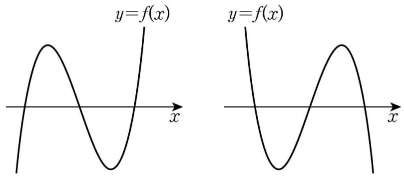
따라서

$$\sum_{k=1}^{12}a_n=23+11+7+5+4+3+2\times5+1=64$$

233. ①

함수 $f(x)$의 삼차항의 계수를 a라 하면 조건 (가)에 의해 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 서로 다른 세 점에서 만나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

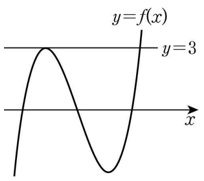
$a>0$일 때 $a<0$일 때



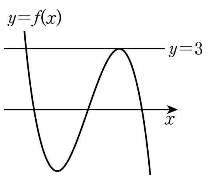
함수 $f(x)$는 삼차함수이므로 실수 전체의 집합을 치역으로 갖고, 이차함수 $g(x)=x^2-6x+10=(x-3)^2+1$은 $x=3$에서 최솟값 1을 갖는다.

그러므로 조건 (나)에서 함수 $g(f(x))=\{f(x)-3\}^2+1$은 $f(x)=3$인 x에서 최솟값 1을 가지므로 $m=1$
한편, 방정식 $g(f(x))=1$의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로 방정식 $f(x)=3$을 만족시키는 서로 다른 실근의 개수는 2
그러므로 직선 $y=3$과 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

$a>0$일 때

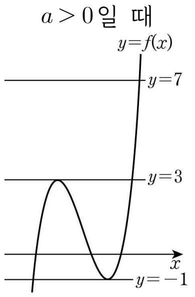


$a<0$일 때

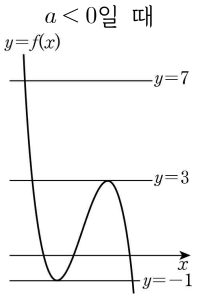


즉, 함수 $f(x)$의 극댓값은 3
조건 (다)의 방정식 $g(f(x))=17$을 풀면
$\{f(x)-3\}^2+1=17$, $\{f(x)-3\}^2=16$
$f(x)=-1$ 또는 $f(x)=7$
조건 (다)에서 방정식 $g(f(x))=17$은 서로 다른 세 실근을 갖고 위의 그래프에서 방정식 $f(x)=7$의 실근의 개수를 유추하면 1이므로 방정식 $f(x)=-1$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
그러므로 세 직선 $y=-1$, $y=3$, $y=7$과 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

$a>0$일 때

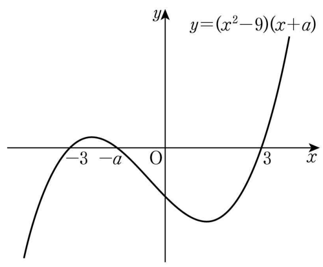


$a<0$일 때

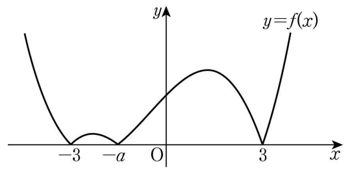


즉, 함수 $f(x)$의 극솟값은 -1
따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 3, 극솟값은 -1이므로 그 합은 $3+(-1)=2$

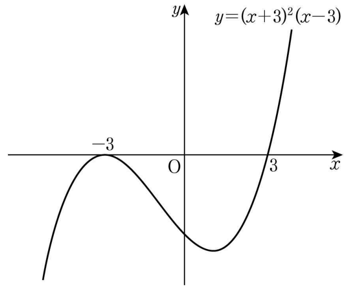
234. ①
(i) $0<a<3$일 때
함수 $y=(x^2-9)(x+a)$의 그래프는 x축과 세 점 $(-3, 0)$, $(-a, 0)$, $(3, 0)$에서 만나므로 그래프의 개형은 그림과 같다.



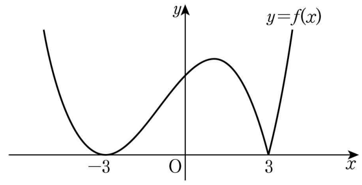
그러므로 함수 $f(x)=|(x^2-9)(x+a)|$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



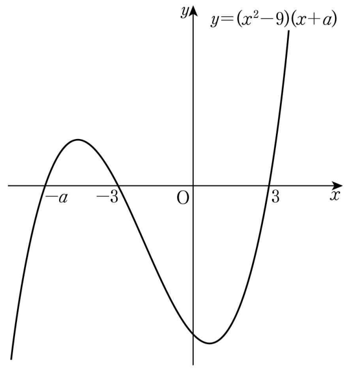
함수 $f(x)$는 $x=-3$, $x=-a$, $x=3$에서 미분가능하지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $a=3$일 때
함수 $y=(x^2-9)(x+a)=(x+3)^2(x-3)$의 그래프는 x축과 점 $(-3, 0)$에서 접하고 점 $(3, 0)$에서 만나므로 그래프의 개형은 그림과 같다.



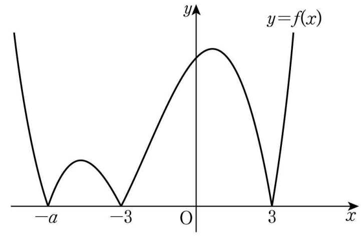
그러므로 $f(x)=|(x+3)^2(x-3)|$의 그래프 개형은 그림과 같다.



$f(x)$는 $x=3$에서만 미분가능하지 않으므로 주어진 조건을 만족시킨다.
(iii) $a>3$일 때
함수 $y=(x^2-9)(x+a)$의 그래프는 x축과 세 점 $(-a, 0)$, $(-3, 0)$, $(3, 0)$에서 만나므로 그래프의 개형은 그림과 같다.



그러므로 함수 $f(x)=|(x^2-9)(x+a)|$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



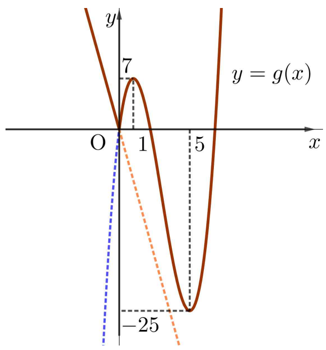
함수 $f(x)$는 $x=-a$, $x=-3$, $x=3$에서
미분가능하지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
그러므로 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 $a=3$
함수 $y=(x^2-9)(x+3)$의 극솟값의 절댓값이
함수 $f(x)=|(x^2-9)(x+3)|$의 극댓값이다.
$y=(x^2-9)(x+3)$의 도함수는
$y'=2x(x+3)+(x^2-9)=3(x+3)(x-1)$이므로
$y'=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$
$y=(x^2-9)(x+3)$의 증가와 감소를 표로 나타내면
다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	0	$\searrow$	-32	$\nearrow$

그러므로 함수 $y=(x^2-9)(x+3)$은 $x=1$에서
극소이고 극솟값은 -32
따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고 극댓값은
$f(1)=|-32|=32$
[보충 설명]
$a=3$일 때 함수 $f(x)$가 $x=3$에서만 미분가능하지 않음을
보이자.
$f(x)=|(x^2-9)(x+3)|$
$=|(x+3)^2(x-3)|$
$$=\begin{cases} (x+3)^2(x-3) & (x\ge 3) \\ -(x+3)^2(x-3) & (x<3) \end{cases}$$
함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, 3)$과 구간 $(3, \infty)$에서 각각
다항함수이므로 함수 $f(x)$는 $x\neq 3$인 모든 실수 x에서
미분가능하다.
그런데
$$\lim_{x\to 3-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3-}\frac{-(x+3)^2(x-3)}{x-3}=-36$$
$$\lim_{x\to 3+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3+}\frac{(x+3)^2(x-3)}{x-3}=36$$
이므로 극한값 $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$이 존재하지 않는다.
그러므로 $f(x)$는 $x=3$에서 미분가능하지 않다.
따라서 $f(x)$는 오직 한 개의 x 값에서만 미분가능하지 않다.

235. 21
함수 $g(x)$를
$g(x)=f(x)+|f(x)+x|-6x$
라 하면
$$g(x)=\begin{cases} -7x & (f(x)<-x) \\ 2f(x)-5x & (f(x)\ge -x) \end{cases}$$
이고, 주어진 방정식은
$g(x)=k$와 같다.
$f(x)=-x$에서
$\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x=-x$,
$\frac{x}{2}(x^2-9x+22)=0$

이때 모든 실수 x에 대하여
$x^2-9x+22=\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$
이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x$는 오직 원점 $(0,\ 0)$에서만
만난다.
따라서 함수 $h(x)$를
$h(x)=2f(x)-5x$
$=x^3-9x^2+15x$
라 하면
$$g(x)=\begin{cases} -7x & (x<0) \\ h(x) & (x\ge 0) \end{cases}$$
이다.
$h'(x)=3x^2-18x+15$
$=3(x-1)(x-5)$
이므로 $h'(x)=0$에서
$x=1$ 또는 $x=5$
따라서 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극댓값
$h(1)=1-9+15=7$
을 갖고, $x=5$에서 극솟값
$h(5)=125-225+75=-25$
를 갖는다.
따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되기 위해서는
곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 4이어야 하므로
실수 k의 값의 범위는
$0<k<7$
이다.
따라서 모든 정수 k의 값의 합은
$1+2+3+\cdots+6=\frac{6}{2}(1+6)=21$

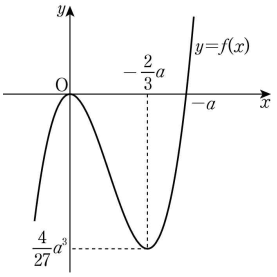
236. ①
조건 (가)에서 $f(0)=0$이고 $g(0)=0$이므로
$g(x)=f(x)+|f'(x)|$에서 $f'(0)=0$
$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로
$f(x)=x(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)로 놓으면
$f'(x)=(x^2+ax+b)+x(2x+a)$에서 $f'(0)=b=0$
그러므로 $f(x)=x^2(x+a)$, $f'(x)=x(3x+2a)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-\frac{2}{3}a$

조건 (나)에서 $-a>0$이므로 $-\frac{2}{3}a>0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$-\frac{2}{3}a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\frac{4}{27}a^3$	$\nearrow$

이고, 함수 $f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



조건 (다)에서 $\left|f\left(-\frac{2}{3}a\right)\right|=4$이므로

$f\left(-\frac{2}{3}a\right)=\frac{4}{27}a^3=-4$이고 $a^3=-27$에서 $a=-3$

그러므로 $f(x)=x^2(x-3)$이고

$g(x)=x^2(x-3)+|3x(x-2)|$

따라서 $g(3)=9$

237. ①

ㄱ. 함수 $g(x)$의 역함수가 존재하고 최고차항의 계수가 양수이므로 모든 실수 x에 대하여

$g'(x)=3x^2+2ax+b\geq 0$이 성립해야 한다.

그러므로 방정식 $3x^2+2ax+b=0$의 판별식을

D라 하면 $\frac{D}{4}=a^2-3b\leq 0$, $a^2\leq 3b$ (참)

ㄴ. $2f(x)=g(x)-g(-x)$에서

$f(x)=\frac{g(x)-g(-x)}{2}=\frac{(x^3+ax^2+bx+c)-(-x^3+ax^2-bx+c)}{2}$

$=x^3+bx$

$f'(x)=3x^2+b$이므로 $f'(x)=0$에서 $3x^2+b=0$

이차방정식 $3x^2+b=0$의 판별식을 D'이라 하면

$D'=0^2-4\times3\times b=-12b$

ㄱ에 의해 $b\geq\frac{a^2}{3}\geq 0$이므로 $D'=-12b\leq 0$

그러므로 이차방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. 방정식 $f'(x)=0$이 실근을 가지므로 $3x^2+b=0$의 실근이 존재한다. 즉, $b\leq 0$

또한, ㄱ에 의해 $b\geq 0$이므로 $b=0$이고 ㄱ에 의해 $a=0$이다.

$g'(x)=3x^2$이므로 $g'(1)=3$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

238. 34

모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\leq 12x+k\leq g(x)$를 만족시키는 자연수 k의 값의 범위를 구하여 보자.

(ⅰ) $f(x)\leq 12x+k$

모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\leq 12x+k$를 만족시키는 k의 값의 범위를 구하면 다음과 같다.

$h(x)=f(x)-12x$라고 하면

$h(x)=-x^4-2x^3-x^2-12x$

$h'(x)=-4x^3-6x^2-2x-12=-2(x+2)^2(2x^2-x+3)$

$h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	$\nearrow$	20	$\searrow$

$h(x)$는 $x=-2$에서 최대이고 최댓값은 20

그러므로 모든 실수 x에 대하여 부등식

$f(x)\leq 12x+k$를 만족시키는 k의 값의 범위는

$k\geq 20$

(ⅱ) $g(x)\geq 12x+k$

모든 실수 x에 대하여 부등식 $g(x)\geq 12x+k$를 만족시키는 k의 값의 범위를 구하면 다음과 같다.

부등식 $3x^2-12x+a-k\geq 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $3x^2-12x+a-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-6)^2-3\times(a-k)\leq 0$, $k\leq a-12$

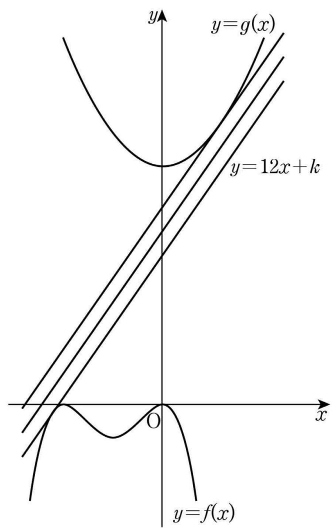
모든 실수 x에 대하여 부등식 $g(x)\geq 12x+k$를 만족시키는 k의 값의 범위는 $k\leq a-12$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 $20\leq k\leq a-12$이고 이를 만족시키는 자연수 k의 개수는 3이므로 $22\leq a-12<23$

따라서 $34\leq a<35$이므로 자연수 a의 값은 34

[보충 설명]

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=12x+k$의 관계는 그림과 같다.



239. ⑤

ㄱ. $f'(0)=g'(0)=0$

$x<0$에서 $f'(x)>0$, $g'(x)>0$

$0<x<4$에서 $f'(x)<0$, $g'(x)<0$

이므로 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 모두 $x=0$에서 극대이다. (참)

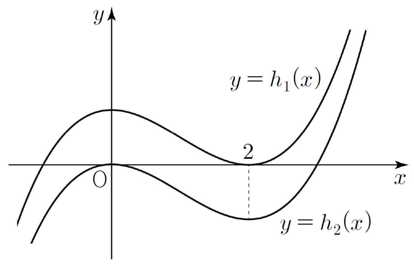
ㄴ. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+C_1$, $g(x)=-x^2+C_2$

(단, C_1, C_2는 적분상수)

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h'(x)=f'(x)-g'(x)=x(x-2)$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서만 만나는 경우는 삼차함수 $h(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서만 만나는 경우이므로 삼차함수 $h(x)$의 그래프의 개형은 다음 $y=h_1(x)$와 $y=h_2(x)$의 두 가지이다.



$h(x)=h_1(x)$일 때, $h_1(2)=0$이므로

$h_1(0)\times h_1(2)=0$

$h(x)=h_2(x)$일 때, $h_2(0)=0$이므로

$h_2(0)\times h_2(2)=0$

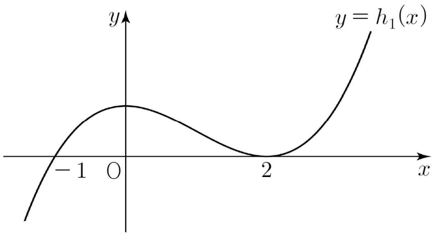
따라서 $\{f(0)-g(0)\}\times\{f(2)-g(2)\}=0$ (참)

ㄷ. $\int_{-1}^{0}h_2(t)dt<0$이므로 함수 $h_2(x)$는 모든 실수 x에 대하여

$\int_{-1}^{x}\{f(t)-g(t)\}dt\ge 0$을 만족시키는 함수 $h(x)$가 아니다.

$h_1(2)=-\frac{4}{3}+C_1-C_2=0$, $C_1-C_2=\frac{4}{3}$

$h_1(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{4}{3}=\frac{1}{3}(x+1)(x-2)^2$



$x<-1$일 때, $h_1(x)<0$이므로 $\int_{-1}^{x}h_1(t)dt>0$

$x\ge -1$일 때, $h_1(x)\ge 0$이므로 $\int_{-1}^{x}h_1(t)dt\ge 0$

그러므로 모든 실수 x에 대하여

$\int_{-1}^{x}\{f(t)-g(t)\}dt\ge 0$을 만족시키는 함수 $h(x)$는 함수 $h_1(x)$이다.

$\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{4}{3}\right)dx=2$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

240. 16

두 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=x^2+ax+b$라 하면 $f'(x)=2x+a$

모든 실수 x에 대하여 $2f(x)=(x+1)f'(x)$이므로

$2(x^2+ax+b)=(x+1)(2x+a)$

등식 $2x^2+2ax+2b=2x^2+(a+2)x+a$는 항등식이므로

$2a=a+2$, $2b=a$에서 $a=2$, $b=1$

따라서 $f(x)=x^2+2x+1$이므로 $f(3)=16$

241. 61

$f(x)=x^2+bx+c$ (b, c는 상수)라 하자.

조건 (가)에서

$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-x+a)f(x)-f(x)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-x+a-1)f(x)}{x-1}=0$

$\lim_{x\to 1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to 1}(x^2-x+a-1)f(x)=(a-1)f(1)=0$

따라서 $a=1$ 또는 $f(1)=0$

$a\ne 1$이라 하면 $f(1)=0$이어야 하므로

$c=-b-1$, $f(x)=(x-1)(x+b+1)$

$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-f(x)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-x+a-1)(x-1)(x+b+1)}{x-1}$

$=(a-1)(b+2)=0$

이므로 $b=-2$, $f(x)=(x-1)^2$

$g'(x)=(2x-1)(x-1)^2+(x^2-x+a)(2x-2)$에서

$g'(1)=0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$f(1)\ne 0$이라 하면 $a=1$이고

$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)f(x)}{x-1}=f(1)=0$

이므로 모순이다.

따라서 $a=1$이고 $f(1)=0$이며 $b\ne -2$

$f(x)=(x-1)(x+b+1)$에서 $f'(x)=2x+b$

$g(x)=(x^2-x+1)f(x)$에서

$g'(x)=(2x-1)f(x)+(x^2-x+1)f'(x)$

조건 (다)에서

$f(\alpha)=f'(\alpha)$이므로

$(\alpha-1)(\alpha+b+1)=2\alpha+b$ … ㉠

$g'(\alpha)=(2\alpha-1)f(\alpha)+(\alpha^2-\alpha+1)f'(\alpha)=2f'(\alpha)$

$(2\alpha-1)f'(\alpha)+(\alpha^2-\alpha+1)f'(\alpha)=2f'(\alpha)$

$(\alpha^2+\alpha-2)f'(\alpha)=0$

$(\alpha+2)(\alpha-1)(2\alpha+b)=0$

따라서 $\alpha=-2$ 또는 $\alpha=1$ 또는 $\alpha=-\frac{b}{2}$

$\alpha=1$ 또는 $\alpha=-\frac{b}{2}$일 때

㉠에서 $b=-2$이므로 $b\ne -2$인 것에 모순이다.

$\alpha=-2$이므로 ㉠에서 $b=\frac{7}{4}$

$g(x)=(x^2-x+1)(x-1)\left(x+\frac{11}{4}\right)$

$g(\alpha+4)=g(2)=3\times 1\times \frac{19}{4}=\frac{57}{4}$

따라서 $p=4$, $q=57$이므로 $p+q=61$

242. 42

$f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$가 등차수열이므로 네점을 연결하는 직선을 $y=mx+n$이라고 하자.

그러면 $f(x)-(mx+n)=x(x+1)(x-1)(x-2)$라고 할수 있다.

$f(x)=x(x-1)(x+1)(x-2)+mx+n$이라고 하면

$f'(-1)=m-6$, $f'(2)=m+6$, $f(-1)=m+n$, $f(2)=2m+n$이다.

-1에서의 접선은 $y=(m-6)(x+1)-m+n$

2에서의 접선은 $y=(m+6)(x-2)+2m+n$

$(k,0)$에서 두 접선이 만나므로

$0=(m-6)(k+1)-m+n$,

$0=(m+6)(k-2)+2m+n$

두식을 k에 관하여 정리하면

$k=\frac{m-n}{m-6}-1$,

$k=-\frac{2m+n}{m+6}+2$

연립하면 $m+2n=18$

$m=-2n+18$을 $k=\frac{m-n}{m-6}-1$에 대입하면 $k=\frac{1}{2}$가 나온다.

따라서 $f(2k)=f(1)=m+n=10$이므로 $m=22$, $n=-2$가 된다.

$f(x)=x(x-1)(x+1)(x-2)+22x-2$

$f(4k)=f(2)=42$

243. ⑤

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수) 라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

이때, 함수 $g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & (x<0)\\ f(x) & (x\geq 0)\end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$f(0)=\frac{1}{2}$, $f'(0)=0$ 이어야 한다.

즉, $c=\frac{1}{2}$, $b=0$ 이므로

$f(x)=x^3+ax^2+\frac{1}{2}$

ㄱ. $g(0)+g'(0)=f(0)+f'(0)=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. $f'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a)=0$ 이므로

$x=0$, $x=-\frac{2a}{3}$에서 극값을 갖는다.

만일 $-\frac{2a}{3}<0$이면 함수 $g(x)$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $-\frac{2a}{3}>0$이므로 $a<0$이다.

이때, $g(1)=f(1)=1+a+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}+a$ 이므로

$g(1)<\frac{3}{2}$ (참)

ㄷ. 함수 $g(x)$는 $x=-\frac{2a}{3}$에서 최솟값을 갖고, 최솟값은

$g\left(-\frac{2a}{3}\right)=f\left(-\frac{2a}{3}\right)$

$=-\frac{8}{27}a^3+\frac{4}{9}a^3+\frac{1}{2}=\frac{4}{27}a^3+\frac{1}{2}$ 이므로

$\frac{4}{27}a^3+\frac{1}{2}=0$ 에서

$a^3=\frac{27}{8}$

즉, $a=-\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}$이므로

$g(2)=f(2)=8-6+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

244. ④

점 $(0,\ t)$를 지나는 직선이

곡선 $y=x^3-ax^2+3x-5$와 접할 때의 접점을

$(k,\ k^3-ak^2+3k-5)$라 하자.

$y'=3x^2-2ax+3$이므로

접선의 방정식은

$y=(3k^2-2ak+3)(x-k)+k^3-ak^2+3k-5$

이고, 이 접선이 점 $(0,\ t)$를 지나므로

$t=-2k^3+ak^2-5$

$f(t)$는 곡선 $y=-2k^3+ak^2-5$와

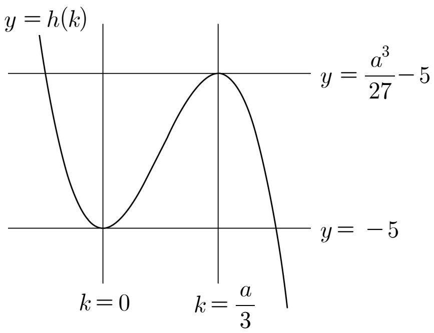
직선 $y=t$의 교점의 개수이다.

$h(k)=-2k^3+ak^2-5$라 하면,

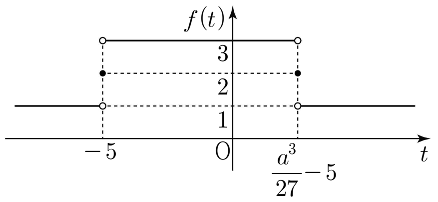
$h'(k)=-6k^2+2ak=-2k(3k-a)$

$h'(0)=h'\left(\frac{a}{3}\right)=0$

$h(0)=-5$, $h\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{a^3}{27}-5$



$$f(t)=\begin{cases} 1 & (t<-5) \\ 2 & (t=-5) \\ 3 & \left(-5<t<\dfrac{a^3}{27}-5\right) \\ 2 & \left(t=\dfrac{a^3}{27}-5\right) \\ 1 & \left(t>\dfrac{a^3}{27}-5\right) \end{cases}$$



$$g(t)=f(f(t))=\begin{cases} f(1) & (t<-5) \\ f(2) & (t=-5) \\ f(3) & \left(-5<t<\dfrac{a^3}{27}-5\right) \\ f(2) & \left(t=\dfrac{a^3}{27}-5\right) \\ f(1) & \left(t>\dfrac{a^3}{27}-5\right) \end{cases}$$

함수 $g(t)$에서

(i) $\dfrac{a^3}{27}-5<3$인 경우

$-5<t<\dfrac{a^3}{27}-5$일 때, $g(t)=f(3)=1$이므로

조건(가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $\dfrac{a^3}{27}-5=3$인 경우

$t<-5$, $t>\dfrac{a^3}{27}-5$일 때, $g(t)=f(1)=3$

$t=-5$, $\dfrac{a^3}{27}-5$일 때, $g(t)=f(2)=3$

$-5<t<\dfrac{a^3}{27}-5$일 때, $g(t)=f(3)=2$

함수 $g(t)$의 치역의 원소의 개수가 2이므로 조건(나)를 만족시키지 않는다.

(iii) $\dfrac{a^3}{27}-5>3$인 경우

실수 전체의 집합에서 $f(t)\leq 3<\dfrac{a^3}{27}-5$이므로 $g(t)=3$이다.

이는 조건(가), (나)를 모두 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 a의 범위는

$a^3>8\times 27=6^3$

자연수 a의 최솟값 $m=7$,

$g(m)=f(f(7))=3$

따라서 $m+g(m)=7+3=10$

245. ⑤

ㄱ. $h(x)=(x-1)f(x)$이므로 $h'(x)$는 곱의 미분에 의해 $f(x)+(x-1)f'(x)$이다. (참)

ㄴ. $x=-1$에서 극값 0을 가지므로 $f(-1)=0, f'(-1)=0$이다.

따라서 $f(x)$에 대입하여 연립하면 $a=-1, b=-1$이므로

$f(x)=x^3+x^2-x-1$

$\displaystyle\int_0^1 g(x)dx=[h(x)]_0^1=[(x-1)(x^3+x^2-x-1)]_0^1=-1$이다. (참)

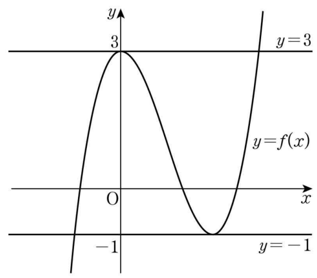
ㄷ. $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx=[(x-1)f(x)]_0^1=-f(0)$이다. 그런데 $f(0)=0$이므로 $g(x)$를 0부터 1까지 적분한 값이 0이 된다. 따라서 어떤 경우에서도 $g(x)=0$이 되는 지점이 열린구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나 존재한다. (참)

246. 19

조건 (나)에 의해 삼차함수 $f(x)$는 극값 -1을 갖는다.

조건 (가)에 의해 $f(0)=3$, $f'(0)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값 3을 갖는다.

그러므로 두 직선 $y=3$, $y=-1$과 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$f(x)=x^3+ax^2+bx+3$이라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$에서 $f'(0)=0$이므로 $b=0$

$f\left(-\dfrac{2a}{3}\right)=\left(-\dfrac{2a}{3}\right)^3+a\times\left(-\dfrac{2a}{3}\right)^2+3=-1$에서

$a=-3$

그러므로 $f(x)=x^3-3x^2+3$

따라서 $f(4)=19$

247. ②

조건에서 $f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)$

ㄱ. $f'(x)=(x-\alpha)(3x-\alpha-2\beta)$

그러므로 $f'(\alpha)=0$ (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=\dfrac{\alpha+2\beta}{3}$에서 극솟값 -4를 가지므로

$f\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right)=\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3}-\alpha\right)^2\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3}-\beta\right)=-4$

$(\beta-\alpha)^3=3^3$에서 $\beta-\alpha=3$

그러므로 $\beta=\alpha+3$ (참)

ㄷ. $f(0)=-\alpha^2\beta=16$이고 ㄴ에서 $\beta=\alpha+3$이므로

$\alpha^3+3\alpha^2+16=(\alpha+4)(\alpha^2-\alpha+4)=0$

$\alpha=-4$이고 $\beta=-1$

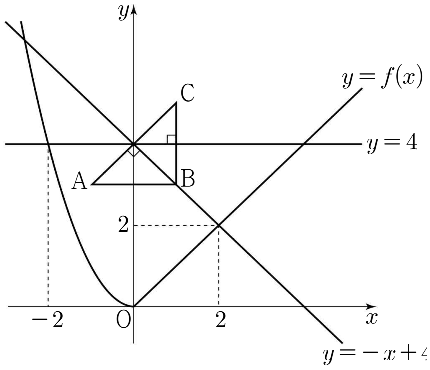
그러므로 $\alpha^2+\beta^2=17$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

248. ③

$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$이므로 $f(\alpha)$, $f(\beta)$는 함수 $f(x)$의 극값이다.
조건에서 $\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\{f(\beta)-f(\alpha)\}^2}=26$이므로
$(\beta-\alpha)^2+\{f(\beta)-f(\alpha)\}^2=10^2+\{f(\beta)-f(\alpha)\}^2=26^2$
$\{f(\beta)-f(\alpha)\}^2=26^2-10^2=24^2$
$|f(\beta)-f(\alpha)|=24$
따라서 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차는 24

249. ③



그림과 같이 선분 BC의 수직이등분선 $y=4$는
함수 $y=f(x)$ $(x<0)$의 그래프와 점 $(-2, 4)$에서
만나고, 선분 AC의 수직이등분선 $y=-x+4$는
함수 $y=f(x)$ $(x \geq 0)$의 그래프와 점 $(2, 2)$에서
만난다.
점 $\mathrm{P}(x, f(x))$에 대하여
$\overline{\mathrm{PQ}}^2$의 값이 최대가 되도록 하는 점 Q는
$x<-2$일 때 점 $\mathrm{B}(1, 3)$,
$-2 \leq x<2$일 때 점 $\mathrm{C}(1, 5)$,
$x \geq 2$일 때 점 $\mathrm{A}(-1, 3)$이다.
(ⅰ) $x<-2$일 때
점 $\mathrm{P}(x, x^2)$에 대하여 $g(x)=\overline{\mathrm{PB}}^2$이므로
$g(x)=(x-1)^2+(x^2-3)^2=x^4-5x^2-2x+10$
(ⅱ) $-2 \leq x<0$일 때
점 $\mathrm{P}(x, x^2)$에 대하여 $g(x)=\overline{\mathrm{PC}}^2$이므로
$g(x)=(x-1)^2+(x^2-5)^2=x^4-9x^2-2x+26$
(ⅲ) $0 \leq x<2$일 때
점 $\mathrm{P}(x, x)$에 대하여 $g(x)=\overline{\mathrm{PC}}^2$이므로
$g(x)=(x-1)^2+(x-5)^2=2x^2-12x+26$
(ⅳ) $x \geq 2$일 때
점 $\mathrm{P}(x, x)$에 대하여 $g(x)=\overline{\mathrm{PA}}^2$이므로
$g(x)=(x+1)^2+(x-3)^2=2x^2-4x+10$
(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여

$$g(x)=\begin{cases} x^4-5x^2-2x+10 & (x<-2) \\ x^4-9x^2-2x+26 & (-2 \leq x<0) \\ 2x^2-12x+26 & (0 \leq x<2) \\ 2x^2-4x+10 & (x \geq 2) \end{cases}$$

ㄱ. $g(0)=26$ (참)
ㄴ. $\lim_{x \to 2-} g(x)=\lim_{x \to 2-}(2x^2-12x+26)=10$,
$g(2)=\lim_{x \to 2+} g(x)=\lim_{x \to 2+}(2x^2-4x+10)=10$
이므로 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 연속이다.
$0 \leq x \leq 2$에서 함수 $y=2(x-3)^2+8$은
$x=2$일 때 최솟값 10을 갖고,
$2 \leq x \leq 3$에서 함수 $y=2(x-1)^2+8$은
$x=2$일 때 최솟값 10을 가지므로
닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수 $g(x)$의
최솟값은 10이다. (참)
ㄷ. $\lim_{x \to -2-}\frac{g(x)-g(-2)}{x-(-2)}$
$=\lim_{x \to -2-}\frac{x^4-5x^2-2x+10-10}{x+2}=-14$
$\lim_{x \to -2+}\frac{g(x)-g(-2)}{x-(-2)}$
$=\lim_{x \to -2+}\frac{x^4-9x^2-2x+26-10}{x+2}=2$이므로
함수 $g(x)$는 $x=-2$에서 미분가능하지 않다.
$\lim_{x \to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}$
$=\lim_{x \to 0-}\frac{x^4-9x^2-2x+26-26}{x}=-2$
$\lim_{x \to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}$
$=\lim_{x \to 0+}\frac{2x^2-12x+26-26}{x}=-12$이므로
함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.
$\lim_{x \to 2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$
$=\lim_{x \to 2-}\frac{2x^2-12x+26-10}{x-2}=-4$
$\lim_{x \to 2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$
$=\lim_{x \to 2+}\frac{2x^2-4x+10-10}{x-2}=4$이므로
함수 $g(x)$는 $x=2$에서 미분가능하지 않다.
따라서 미분가능하지 않은 모든 a의 값의 합은
$-2+0+2=0$이다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

250. ⑤
ㄱ. $v(t)=3t^2-6t=3t(t-2)$
$t<2$일 때 $v(t)<0$
$t=2$일 때 $v(2)=0$
$t>2$일 때 $v(t)>0$
$t=2$에서 점 P의 움직이는 방향이 바뀐다. (참)
ㄴ. 시각 t에서의 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면
$x(2)=0+\int_0^2(3t^2-6t)\,dt=\left[t^3-3t^2\right]_0^2=-4$ (참)
ㄷ. 시각 t에서의 점 P의 가속도를 $a(t)$라 하면
$a(t)=6t-6$
$6t-6=12$, $t=3$

$t=0$에서 $t=3$까지 움직인 거리를 s라 하면

$s=\int_0^3 |3t^2-6t|\,dt$

$=-\int_0^2 (3t^2-6t)\,dt+\int_2^3 (3t^2-6t)\,dt$

$=4+\left[t^3-3t^2\right]_2^3=8$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

251. 33

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int (8x^3-1)dx$

$=2x^4-x+C$ (C 는 적분상수)

$f(0)=3$이므로 $C=3$

따라서

$f(x)=2x^4-x+3$이므로

$f(2)=32-2+3=33$

252. ④

$f'(x)=3x^2-6x$이므로

$f(x)=\int (3x^2-6x)\,dx$

$=x^3-3x^2+C$ (C는 적분상수)

$f(1)=1-3+C=6$에서 $C=8$

따라서

$f(2)=8-12+8=4$

253. 15

[출제의도] 부정적분을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

$f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int (4x^3-2x)\,dx$

$=x^4-x^2+C$ (C는 적분상수)

이때 $f(0)=3$이므로 $C=3$

따라서

$f(x)=x^4-x^2+3$이므로

$f(2)=16-4+3=15$

254. 15

[출제의도] 부정적분을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

$f(x)=\int (8x^3+6x^2)\,dx$

$=2x^4+2x^3+C$ (단, C는 적분상수)

이므로

$f(0)=C=-1$

따라서

$f(x)=2x^4+2x^3-1$

그러므로

$f(-2)=32-16-1=15$

255. 16

[출제의도] 부정적분을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

$f(x)=\int (6x^2-4x+3)\,dx$

$=2x^3-2x^2+3x+C$

(단, C는 적분상수)

이므로

$f(1)=2-2+3+C=3+C=5$

에서

$C=2$

따라서

$f(2)=16-8+6+2=16$

256. 4

$f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int (3x^2+2x)dx$

$=x^3+x^2+C$ (단, C는 적분상수)

이때, $f(0)=2$이므로 $C=2$

따라서

$f(x)=x^3+x^2+2$이므로

$f(1)=1+1+2=4$

257. 8

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int (8x^3-12x^2+7)dx$

$=2x^4-4x^3+7x+C$ (C는 적분상수)

이때 $f(0)=3$이므로

$C=3$

따라서

$f(x)=2x^4-4x^3+7x+3$

이므로

$f(1)=2-4+7+3=8$

258. ⑤

$f(x)=\int (3x^2-2)dx$

$=x^3-x^2+C$ (C는 적분상수)

$f(1)=1^3-1^2+C=1$에서

$C=1$

따라서 $f(x)=x^3-x^2+1$이므로

$f(2)=2^3-2^2+1=5$

259. 12

주어진 식을 부정적분하면

$f'(x)=3x^2+4x+5$에서

$f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int (3x^2+4x+5)dx$

$=x^3+2x^2+5x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=4$이므로

$C=4$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2+5x+4$이므로
$f(1)=1+2+5+4=12$

260. 8
$f(x)=\int(-x^2+3x)\,dx$
$=-\frac{1}{4}x^4+3x+C$
(단, C는 적분상수이다.)
$f(2)=-\frac{1}{4}\times 2^4+3\times 2+C=10$에서
$C=8$
따라서 $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+3x+8$이므로
$f(0)=8$

261. 9
$f(x)=\int f'(x)\,dx$
$=\int(x^3+x)dx$
$=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+C$ (단, C는 적분상수)
이때 $f(0)=3$이므로 $C=3$
따라서 $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+3$이므로
$f(2)=4+2+3=9$

262. 20
$f(x)=\int(9x^2-8x+1)dx$
$=3x^3-4x^2+x+C$ (단, C는 적분상수)
$f(1)=3-4+1+C=10$, $C=10$
$f(x)=3x^3-4x^2+x+10$
따라서 $f(2)=24-16+2+10=20$

263. 9
$F(x)$는 함수 $f(x)$의 한 부정적분이므로
$$F(x)=\begin{cases}-x^2+C_1 & (x<0)\\ k\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)+C_2 & (x\ge 0)\end{cases}$$
(단, C_1, C_2는 적분상수)
그런데 $F(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 $C_1=C_2$
즉, $F(x)=\begin{cases}-x^2+C_1 & (x<0)\\ k\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)+C_1 & (x\ge 0)\end{cases}$
그러므로 $F(2)-F(-3)=21$에서
$\left(\frac{4}{3}k+C_1\right)-(-9+C_1)=21$
따라서 $k=9$
[다른 풀이]
$F(x)$는 함수 $f(x)$의 한 부정적분이므로
$F(2)-F(-3)=\Big[F(x)\Big]_{-3}^{2}=\int_{-3}^{2}f(x)dx$

$\int_{-3}^{2}f(x)dx=\int_{-3}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{2}f(x)dx$
$=\int_{-3}^{0}(-2x)dx+\int_{0}^{2}k(2x-x^2)dx=\Big[-x^2\Big]_{-3}^{0}+k\Big[x^2-\frac{1}{3}x^3\Big]_{0}^{2}$
$=9+\frac{4}{3}k=21$
따라서 $k=9$

264. 20
$f(x)=\int(9x^2-8x+1)dx$
$=3x^3-4x^2+x+C$ (단, C는 적분상수)
$f(1)=3-4+1+C=10$, $C=10$
$f(x)=3x^3-4x^2+x+10$
따라서 $f(2)=24-16+2+10=20$

265. 9
[출제의도] 부정적분을 활용하여 문제해결하기
$F(x)=(x+2)f(x)-x^3+12x$의 양변을
x에 대하여 미분하면
$f(x)=f(x)+(x+2)f'(x)-3x^2+12$
$(x+2)f'(x)=3(x+2)(x-2)$
$f(x)$는 다항함수이므로 $f'(x)=3x-6$
$f(x)=\int(3x-6)\,dx$
$=\frac{3}{2}x^2-6x+C$ (C는 적분상수)
$F(0)=2f(0)=30$에서 $f(0)=15$이므로 $C=15$
따라서 $f(2)=6-12+15=9$

266. 17
$f(x)=\int(3x^2+6x-4)\,dx$
$=x^3+3x^2-4x+C$
(단, C는 적분상수이다.)
$f(1)=1+3-4+C=5$, $C=5$
$f(x)=x^3+3x^2-4x+5$
따라서 $f(2)=8+12-8+5=17$

267. 13
[출제의도] 부정적분 이해하기
$f(x)=\int(6x^2-2x-1)\,dx$
$=2x^3-x^2-x+C$ (단, C는 적분상수)
$f(1)=2-1-1+C=3$, $C=3$
$f(x)=2x^3-x^2-x+3$
따라서 $f(2)=16-4-2+3=13$

268. ③
$f'(x)=2x+4$에서
$f(x)=\int(2x+4)dx$
$=x^2+4x+C$ (C는 적분상수)
$f(-1)+f(1)=0$에서

$(-3+C)+(5+C)=2C+2=0$

$C=-1$이므로 $f(x)=x^2+4x-1$

따라서 $f(2)=11$

269. 27

$f(x)=\int(4x^3+4x+1)dx$

$=x^4+2x^2+x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=1$이므로 $C=1$

$f(x)=x^4+2x^2+x+1$

$f(2)=16+8+2+1=27$

270. 8

$f(x)=x^3-12x^2+45x+3$에서

$f'(x)=3x^2-24x+45$

$=3(x-3)(x-5)$

$g(x)=\int_a^x\{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4dt$

$=f(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt-\int_a^x\{f(t)\}^5dt$

$g'(x)=f'(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt+\{f(x)\}^5-\{f(x)\}^5$

$=f'(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt$

$g'(x)=0$에서

$f'(x)=0$ 또는 $x=a$

(i) $a\neq3$, $a\neq5$일 때,

$g'(x)=0$에서

$x=3$ 또는 $x=5$ 또는 $x=a$

함수 $g(x)$는 $x=3$, $x=5$, $x=a$에서 모두 극값을 갖는다.

(ii) $a=3$일 때

$g'(x)=0$에서 $x=3$ 또는 $x=5$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	극소	↗

함수 $g(x)$는 $x=5$에서만 극값을 갖는다.

(iii) $a=5$일 때

$g'(x)=0$에서

$x=3$ 또는 $x=5$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗

함수 $g(x)$는 $x=3$에서만 극값을 갖는다.

(i), (ii), (iii)에서

함수 $g(x)$가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a의 값은 3 또는 5이다.

따라서 모든 a의 값의 합은

$3+5=8$

271. ②

$xf(x)-f(x)=3x^4-3x$에서

$(x-1)f(x)=3x(x-1)(x^2+x+1)$ …… ㉠

$f(x)$가 삼차함수이고

㉠이 x에 대한 항등식이므로

$f(x)=3x(x^2+x+1)$

따라서

$\int_{-2}^{2}f(x)dx=\int_{-2}^{2}3x(x^2+x+1)dx$

$=\int_{-2}^{2}(3x^3+3x^2+3x)dx$

$=2\int_0^2 3x^2dx$

$=2\left[x^3\right]_0^2$

$=2\times2^3$

$=16$

272. ①

$\int_0^2(3x^2+6x)dx=[x^3+3x^2+c]_0^2=20$

273. ④

$\int_0^3(x+1)^2dx=\int_0^3(x^2+2x+1)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_0^3=21$

274. ④

$\int_0^1(2x+3)dx=\left[x^2+3x\right]_0^1=1+3=4$

275. ②

[출제의도] 다항함수의 정적분의 값을 계산한다.

$\int_0^2(2x^3+3x^2)dx=\left[\frac{x^4}{2}+x^3\right]_0^2=16$

276. ①

$\int_2^{-2}(x^3+3x^2)dx=\left[\frac{1}{4}x^4+x^3\right]_2^{-2}$

$=(4-8)-(4+8)$

$=-16$

277. 9

$\int_0^3x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3=9$

278. ⑤

$\int_5^2 2tdt-\int_5^0 2tdt=\int_2^5 2tdt+\int_0^5 2tdt$

$=\int_0^5 2tdt+\int_5^2 2tdt=\int_0^2 2tdt$

$=\left[t^2\right]_0^2=4$

279. ③

$\int_0^1(3x^2+2)\,dx=\left[x^3+2x\right]_0^1$

$=(1+2)-(0+0)=3$

280. ①

$\int_0^3(x^2-2)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-2x\right]_0^3=3$

281. ④

$\int_{-3}^{3}(x^3+4x^2)dx+\int_{3}^{-3}(x^3+x^2)dx$

$=\int_{-3}^{3}(x^3+4x^2)dx-\int_{-3}^{3}(x^3+x^2)dx$

$=\int_{-3}^{3}(x^3+4x^2-x^3-x^2)dx$

$=\int_{-3}^{3}3x^2\,dx=\left[x^3\right]_{-3}^{3}=54$

282. 13

[출제의도] 정적분으로 나타낸 함수를 이해하고 극솟값을 가질 조건을 구할 수 있는가?

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이면

$g(x)=\int_x^{x+1}|f(t)|dt$

$\quad=\int_x^{x+1}f(t)\,dt$

이므로 $g(x)$는 이차함수이고 이때 $g(x)$가 극소인 x의 값은 1개뿐이다.

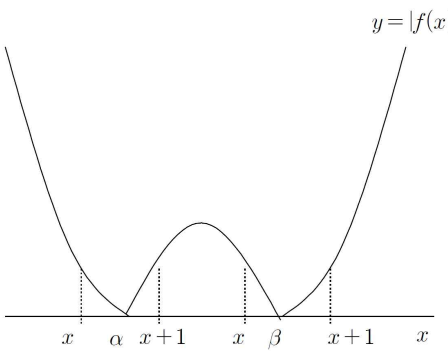
따라서 조건을 만족시키지 못한다.

$f(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)(\alpha<\beta)$라 하면

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같고

$x=1,\ x=4$에서 함수 $g(x)$가 극소이므로

$g'(1)=0,\ g'(4)=0$이다.



(i) $x<\alpha<x+1$일 때

$g(x)=\int_x^{x+1}|f(t)|\,dt$

$\quad=\int_x^{\alpha}f(t)\,dt+\int_{\alpha}^{x+1}\{-f(t)\}\,dt$

$\quad=-\int_{\alpha}^{x}f(t)\,dt-\int_{\alpha}^{x+1}f(t)\,dt$

$\quad=-\int_{\alpha}^{x}2(t-\alpha)(t-\beta)\,dt-\int_{\alpha}^{x+1}2(t-\alpha)(t-\beta)\,dt$

$\quad=-\int_{\alpha}^{x}2(t-\alpha)(t-\beta)\,dt-\int_{\alpha-1}^{x}2(t+1-\alpha)(t+1-\beta)\,dt$

이므로

$g'(x)=-2(x-\alpha)(x-\beta)-2(x+1-\alpha)(x+1-\beta)$

$g'(1)=-2(1-\alpha)(1-\beta)-2(2-\alpha)(2-\beta)$

$\quad=6\alpha+6\beta-4\alpha\beta-10=0$

$3\alpha+3\beta-2\alpha\beta-5=0$ …… ㉠

(ii) $x<\beta<x+1$일 때

$g(x)=\int_x^{x+1}|f(t)|\,dt$

$\quad=\int_x^{\beta}\{-f(t)\}\,dt+\int_{\beta}^{x+1}f(t)\,dt$

$\quad=\int_{\beta}^{x}f(t)\,dt-\int_{\beta}^{x+1}f(t)\,dt$

$\quad=\int_{\beta}^{x}2(t-\alpha)(t-\beta)\,dt+\int_{\beta}^{x+1}2(t-\alpha)(t-\beta)\,dt$

$\quad=\int_{\beta}^{x}2(t-\alpha)(t-\beta)\,dt-\int_{\beta-1}^{x}2(t+1-\alpha)(t+1-\beta)\,dt$

이므로

$g'(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)+2(x+1-\alpha)(x+1-\beta)$

$g'(1)=2(4-\alpha)(4-\beta)-2(5-\alpha)(5-\beta)$

$\quad=82-18\alpha-18\beta+4\alpha\beta=0$

$9\alpha+9\beta-2\alpha\beta-41=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\alpha\beta=\frac{13}{2}$

이므로

$f(0)=2\alpha\beta=2\times\frac{13}{2}=13$

283. 5

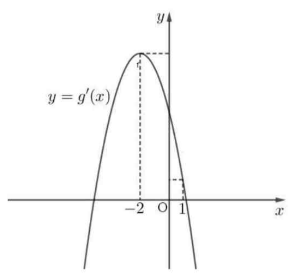
$f(x)=-x^2-4x+a$

$g(x)=\int_0^x f(t)dt$에서

$g'(x)=f(x)$

$=-x^2-4x+a$

$=-(x+2)^2+a+4$



함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[0,1]$에서 증가해야 하므로

$g'(1)=a-5 \geq 0$
즉, $a \geq 5$이어야 한다.
따라서 a의 최솟값은 5이다.

284. ①

$\int_0^1 f(t)dt=k$로 놓으면

$f(x)=4x^3+kx$
이때

$k=\int_0^1 (4x^3+kx)dx$

$=\left[x^4+\frac{k}{2}x^2\right]_0^1$

$=1+\frac{k}{2}$

이므로 $k=2$
따라서 $f(x)=4x^3+2x$이므로
$f(1)=4+2=6$

285. ①

$\int_0^1 tf(t)dt = k$라 하면, $f(x) = x^2-2x+k$

$\int_0^1 t(t^2-2t+k)\,dt = k$를 계산하면 $k=-\frac{5}{6}$

$f(x) = x^2-2x-\frac{5}{6}$

$\therefore f(3) = \frac{13}{6}$

286. 7
조건 (가)에 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(1)+\frac{x-1}{2}f'(x)$

즉,
$f(x)=f(1)+(x-1)f'(x)$ $\cdots\cdots$ ㉠
㉠의 좌편인 $f(x)$의 최고차항을
ax^n (a는 0이 아닌 상수, n은 자연수)
라 하면 ㉠의 우변의 최고차항은
$x\times anx^{n-1}=anx^n$
이므로 $ax^n=anx^n$에서
$n=1$
이대 $f(0)=1$이므로 일차함수 $f(x)$는
$f(x)=ax+1$
로 놓을 수 있다.
이때

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 (ax+1)dx$

$=\left[\frac{a}{2}x^2+x\right]_0^2=2a+2$

이고,

$\int_{-1}^1 xf(x)dx=\int_{-1}^1 (ax^2+x)dx$

$2\int_0^1 ax^2dx=2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2a}{3}$

이므로 조건 (나)에서

$2a+2=5\times\frac{2a}{3}$

$a=\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x+1$이므로

$f(4)=\frac{3}{2}\times 4+1=7$

287. ④
[출제의도] 함수의 그래프를 이해하고 명제의 참, 거짓을 판단할 수 있는가?

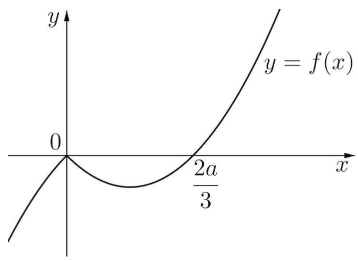
ㄱ. $x<0$일 때 $g'(x)=-f(x)$
$x\geq 0$일 때 $g'(x)=f(x)$
그런데 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하고 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로
$\lim_{x\to 0-}\{-f(x)\}=\lim_{x\to 0+}f(x)$
$-f(0)=f(0)$, $2f(0)=0$
$f(0)=0$ (참)

ㄴ. $g(0)=\int_0^0 f(t)\,dt=0$이고 함수 $g(x)$는 삼차함수이므로
$g(x)=x^2(x-a)$ (단, a는 상수)
로 놓으면
$g'(x)=2x(x-a)+x^2=x(3x-2a)$

(i) $a>0$일 때

$$f(x)=\begin{cases} -x(3x-2a) & (x<0) \\ x(3x-2a) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

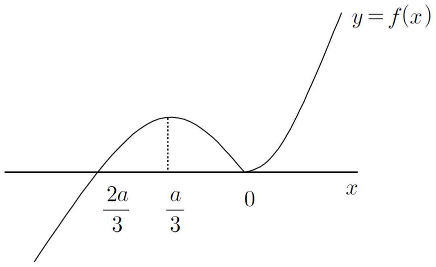


(ii) $a<0$일 때

$$f(x)=\begin{cases} -x(3x-2a) & (x<0) \\ x(3x-2a) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고

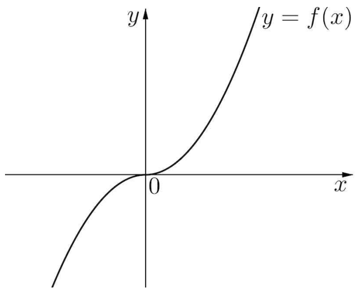
$x=\frac{a}{3}$에서 극댓값을 갖는다.



(iii) $a=0$일 때

$$f(x)=\begin{cases} -3x^2 & (x<0) \\ 3x^2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 극댓값이 존재하지 않는다.



(거짓)

ㄷ. (ⅰ) ㄴ. (ⅰ)인 경우

$f(1)=3-2a$이므로 $2<3-2a<4$에서

$0<a<\frac{1}{2}$

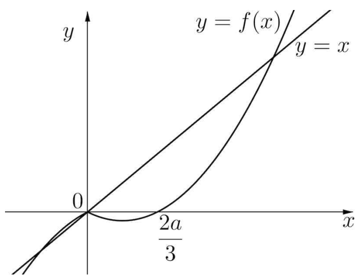
또한, $x<0$일 때

$f'(x)=-(3x-2a)-3x=-6x+2a$

이므로

$\lim_{x \to 0-} f'(x)=2a$

이때 $0<2a<1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 그림과 같이 세 점에서 만난다.



따라서 $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

(ⅱ) ㄴ. (ⅱ)인 경우

$f(1)=3-2a$이므로 $2<3-2a<4$에서

$-\frac{1}{2}<a<0$

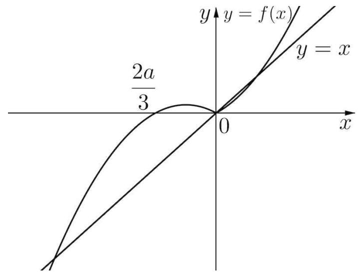
또한, $x>0$일 때

$f'(x)=(3x-2a)+3x=6x-2a$

이므로

$\lim_{x \to 0+} f'(x)=-2a$

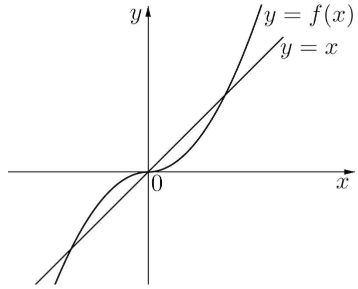
이때 $0<-2a<1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 그림과 같이 세 점에서 만난다.



따라서 $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

(ⅲ) ㄴ. (ⅲ)인 경우

$f(1)=3$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 그림과 같이 세 점에서 만난다.



따라서 $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

다른 풀이

ㄷ. (ⅰ) ㄴ. (ⅰ)인 경우

$0<a<\frac{1}{2}$이고

① $x<0$일 때, $-x(3x-2a)=x$

$-3x+2a=1$, $x=\frac{2a-1}{3}$

② $x \geq 0$일 때, $x(3x-2a)=x$

$x(3x-2a-1)=0$

$x=0$ 또는 $x=\frac{2a+1}{3}$

따라서 $2<f(1)<4$일 때,

방정식 $f(x)=x$은 서로 다른 실근

$\frac{2a-1}{3}$, 0, $\frac{2a+1}{3}$을 갖는다.

288. 182

방정식 $g(x)=0$에서

$x=t$일 때 $f(t)-t-f(t)+t=0$이므로

$g(t)=0$

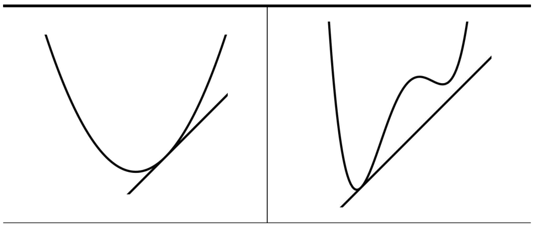
$x \neq t$일 때 $f(x)-x-f(t)+t=0$에서

$\frac{f(x)-f(t)}{x-t}=1$이다.

그러므로 함수 $h(t)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 $(t, f(t))$를 지나고 기울기가 1인 직선 l과 곡선 $y=f(x)$의 교점의 개수이다.

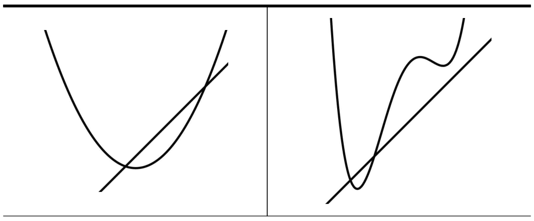
임의의 실수 s에 대하여 $h(s) \geq 1$이다.

(ⅰ) $h(s)=1$인 경우

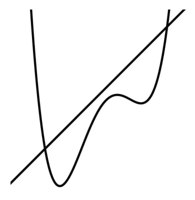
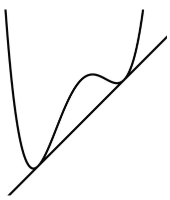


$\lim\limits_{t \to s} h(t)=2$이므로 $\lim\limits_{t \to s}\{h(t)-h(s)\}=1$

(ⅱ) $h(s)=2$인 경우



$\lim\limits_{t \to s} h(t)=2$이므로 $\lim\limits_{t \to s}\{h(t)-h(s)\}=0$

	
$\lim\limits_{t \to s} h(t)=2$이므로 $\lim\limits_{t \to s}\{h(t)-h(s)\}=0$	$\lim\limits_{t \to s} h(t)=4$이므로 $\lim\limits_{t \to s}\{h(t)-h(s)\}=2$

(ⅲ) $h(s) \geq 3$인 경우

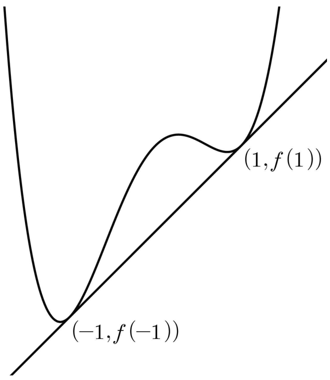
$\lim\limits_{t \to s} h(t)=4$이거나 극한값이 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

곡선 $y=f(x)$와 직선 l이

두 점 $(-1, f(-1))$, $(1, f(1))$에서 접할 때

$\lim\limits_{t \to -1}\{h(t)-h(-1)\}=\lim\limits_{t \to 1}\{h(t)-h(1)\}=2$를 만족시킨다.



함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a, 직선 l의 방정식을 $y=x+b$라 하자. (단, a, b는 상수)

$f(x)-(x+b)=a(x-1)^2(x+1)^2$

$f(x)=a(x-1)^2(x+1)^2+x+b$

조건 (나)에서 $\int_0^{\alpha}\{f(x)-|f(x)|\}dx=0$을

만족시키는 실수 α의 최솟값이 -1이므로

$-1 \leq x \leq 0$에서 $f(x) \geq 0$, $f(-1) \geq 0$

$f(-1)>0$이면 실수 α의 최솟값이 -1이 아니므로 $f(-1)=0$

$f(-1)=-1+b=0$, $b=1$

$f(x)=a(x-1)^2(x+1)^2+x+1$

조건 (다)에서

$\frac{d}{dx}\int_0^x\{f(u)-ku\}du=f(x)-kx \geq 0$

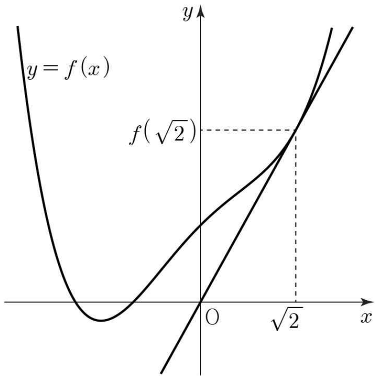
$f(x) \geq kx$이므로 곡선 $y=f(x)$와

직선 $y=kx$가 접하거나 만나지 않는다.

실수 k의 최댓값이 $f'(\sqrt{2})$이므로 그림과 같이

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f'(\sqrt{2})x$가

점 $(\sqrt{2}, f(\sqrt{2}))$에서 접한다.



$f(x)=a(x-1)^2(x+1)^2+x+1$

$\quad =ax^4-2ax^2+x+a+1$

$f'(x)=4ax^3-4ax+1$

$f(\sqrt{2})=4a-4a+\sqrt{2}+a+1=a+\sqrt{2}+1$

$f'(\sqrt{2})=8\sqrt{2}a-4\sqrt{2}a+1=4\sqrt{2}a+1$

$f(\sqrt{2})=f'(\sqrt{2})\times\sqrt{2}$이므로

$a+\sqrt{2}+1=(4\sqrt{2}a+1)\times\sqrt{2}$

$\qquad =8a+\sqrt{2}$

$a=\frac{1}{7}$, $f(x)=\frac{1}{7}(x-1)^2(x+1)^2+x+1$

따라서 $f(6)=\frac{1}{7}\times 5^2\times 7^2+6+1=182$

289. ②

$\int_1^x f(t)dt=x^3-ax+1$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $1-a+1=0$, $a=2$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하고 $a=2$를 대입하면

$f(x)=3x^2-2$이므로

$f(2)=12-2=10$

290. ⑤

$3xf(x)=9\int_1^x f(t)dt+2x$의 양변에

$x=1$을 대입하면

$3f(1)=0+2,\ f(1)=\dfrac{2}{3}$

$3xf(x)=9\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt+2x$의 양변을

x에 대하여 미분하면

$3\{f(x)+xf'(x)\}=9f(x)+2$

$x=1$을 대입하면

$3\{f(1)+f'(1)\}=9f(1)+2$

$3f'(1)=6f(1)+2=6\times\dfrac{2}{3}+2=6$

따라서 $f'(1)=2$

291. ③

$\displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt=a$라 하면 (가)에서 $f(x)=2x+2a$

$g(x)$는 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$g(x)=\displaystyle\int f(x)\,dx=x^2+2ax+C$ (C는 적분상수)

(나)에서 $C-\displaystyle\int_0^1(t^2+2at+C)\,dt=\dfrac{2}{3}$

$C-\left(\dfrac{1}{3}+a+C\right)=\dfrac{2}{3}$에서 $a=-1$

$\displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt=a$에서 $\left[\dfrac{1}{3}t^3-t^2+Ct\right]_0^1=-1$

즉, $C=-\dfrac{1}{3}$이므로 $g(x)=x^2-2x-\dfrac{1}{3}$

따라서 $g(1)=1-2-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{4}{3}$

292. ②

$f(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$이므로 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(2,\ 0)$, $(3,\ 0)$이다.

이때

(A의 넓이)$=\displaystyle\int_0^2 f(x)dx$,

(B의 넓이)$=\displaystyle\int_2^3\{-f(x)\}dx$이므로

(A의 넓이)$-$(B의 넓이)

$$=\int_0^2 f(x)dx-\int_2^3\{-f(x)\}dx$$

$$=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx$$

$$=\int_0^3 f(x)dx=3$$

이어야 한다.

이때

$$\int_0^3 f(x)dx=k\int_0^3(x^3-5x^2+6x)dx$$

$$=k\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+3x^2\right]_0^3$$

$$=k\left(\frac{81}{4}-45+27\right)$$

$$=\frac{9}{4}k$$

이므로

$\dfrac{9}{4}k=3$

따라서

$k=\dfrac{4}{3}$

293. ③

함수 $g(x)$는 $x\ge t$일 때, 점 $(t,\ f(t))$를 지나고 기울기가 -1인 직선이므로 이 직선은 x축과 점 $(t+f(t),\ 0)$에서 만난다.

그러므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\displaystyle\int_0^t f(x)\,dx+\dfrac{1}{2}\times\{f(t)\}^2$

이때, 양변을 미분하면

$S'(t)=f(t)+f(t)\cdot\{f(t)\}'$

$\quad=f(t)\{1+\{f(t)\}'\}$

한편, $f(x)=\dfrac{1}{9}x(x-6)(x-9)$이므로

$0<t<6$에서 $f(t)>0$

또,

$1+f'(t)$

$=1+\dfrac{1}{9}\{(t-6)(t-9)+t(t-9)+t(t-6)\}$

$=1+\dfrac{1}{9}\{(t^2-15t+54)+(t^2-9t)+(t^2-6t)\}$

$=1+\dfrac{1}{9}(3t^2-30t+54)$

$=1+\dfrac{1}{3}(t^2-10t+18)$

$=\dfrac{1}{3}(t^2-10t+21)$

$=\dfrac{1}{3}(t-3)(t-7)$

그러므로 $0<t<6$에서 $S(t)$의 증가와 감소는 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	3	$\cdots$	(6)
$S'(t)$		+	0	−	
$S(t)$		↗	(극대)	↘	

그러므로 $S(t)$는 $t=3$일 때 극대이면서 최대이다.

따라서 최댓값은

$$S(3)=\int_0^3 f(d)\,dx+\frac{1}{2}\{f(3)\}^2$$

$$=\frac{1}{9}\int_0^3 x(x-6)(x-9)\,dx+\frac{1}{2}\times\left\{\frac{1}{9}\times3\times(-3)\times(-6)\right\}^2$$

$$=\frac{1}{9}\int_0^3(x^3-15x^2+54x)\,dx+18$$

$= \frac{1}{9}\left[\frac{1}{4}x^4 - 5x^3 + 27x^2\right]_0^3 + 18$

$= \frac{1}{9} \times \left(\frac{1}{4} \times 81 - 5 \times 27 + 27 \times 9\right) + 18$

$= \left(\frac{9}{4} - 15 + 27\right) + 18$

$= \left(\frac{9}{4} + 12\right) + 18$

$= \frac{9}{4} + 30$

$= \frac{129}{4}$

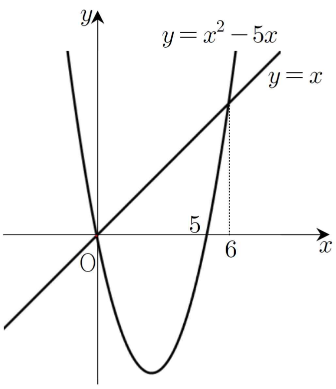
294. ①

$x^2 - 5x = x$에서

$x^2 - 6x = 0$

$x = 0$ 또는 $x = 6$

곡선 $y = x^2 - 5x$와 직선 $y = x$가 만나는 점은 원점과 $(6,\ 6)$이다.



곡선 $y = x^2 - 5x$와 직선 $y = x$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_0^6 \{x - (x^2 - 5x)\}\, dx$

$= \int_0^6 (6x - x^2)\, dx$

$= \left[3x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^6$

$= 36$

따라서 직선 $x = k$가 넓이를 이등분하므로

$18 = \int_0^k \{x - (x^2 - 5x)\}\, dx$

$= \int_0^k (6x - x^2)\, dx$

$= \left[3x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^k$

$= 3k^2 - \frac{1}{3}k^3$

정리하면

$k^3 - 9k^2 + 54 = 0$

$(k-3)(k^2 - 6k - 18) = 0$

즉, $0 < k < 6$이므로

$k = 3$

295. ④

[출제의도] 정적분과 넓이의 관계를 이해하고 있는가?

$\mathrm{A} = \mathrm{B}$이므로

$\int_0^2 \{(x^3 + x^2) - (-x^2 + k)\} dx = 0$

이어야 한다.

이때,

$\int_0^2 \{(x^3 + x^2) - (-x^2 + k)\} dx$

$= \int_0^2 (x^3 + 2x^2 - k) dx$

$= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - kx\right]_0^2$

$= 4 + \frac{16}{3} - 2k$

$= \frac{28}{3} - 2k = 0$

$2k = \frac{28}{3}$

$k = \frac{14}{3}$

296. ②

[출제의도] 정적분과 넓이의 관계를 이용하여 함수를 구한 후, 정적분의 값을 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$n - 1 \le x \le n$일 때,

$f(x) = 6(x - n - 1)(x - n)$

또는

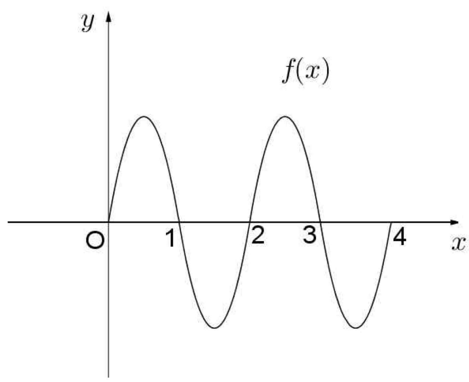
$f(x) = -6(x - n - 1)(x - n)$

함수 $g(x)$가 $x = 2$에서 최솟값 0을 가지므로

$g(2) = \int_0^2 f(t) dt - \int_2^4 f(t) dt = 0$

$\int_0^2 f(t) dt = \int_2^4 f(t) dt$

이때, 함수 $g(x)$가 $x = 2$에서 최솟값을 가져야 하므로 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 함수 $y = f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$\int_{\frac{1}{2}}^4 f(x) dx$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)\,dx+\int_{1}^{2} f(x)\,dx+\int_{2}^{3} f(x)\,dx+\int_{3}^{4} f(x)\,dx$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx-\int_{0}^{1} f(x)\,dx+\int_{0}^{1} f(x)\,dx-\int_{0}^{1} f(x)\,dx$$

$$=-\int_{0}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$$

$$=-\int_{0}^{\frac{1}{2}} \{-6x(x-1)\}\,dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{1}{2}} (6x^2-6x)\,dx$$

$$=\left[2x^3-6x^2\right]_{0}^{\frac{1}{2}}$$

$$=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=-\frac{1}{2}$$

297. ④

곡선 $y=3x^2-x$와 직선 $y=5x$의 교점의 x좌표는

$3x^2-x=5x$

$3x^2-6x=0$

$3x(x-2)=0$

$x=0$ 또는 $x=2$

구간 $[0,\ 2]$에서 직선 $y=5x$가 곡선 $y=3x^2-x$보다 위쪽에 있거나 만나므로 구하는 넓이는

$$S=\int_{0}^{2}\{5x-(3x^2-x)\}dx$$

$$=\int_{0}^{2}(6x-3x^2)dx$$

$$=\left[3x^2-x^3\right]_{0}^{2}$$

$$=3(4-0)-(8-0)$$

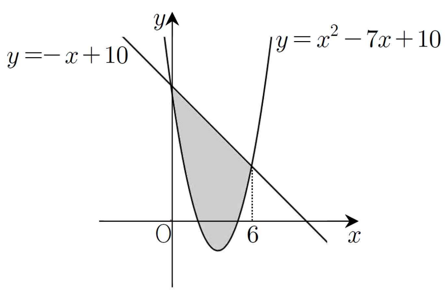
$$=4$$

298. 36

곡선 $y=x^2-7x+10$과 직선 $y=-x+10$이 만나는 점의 x좌표는 $x^2-7x+10=-x+10$에서

$x^2-6x=x(x-6)=0$

이므로 $x=0$과 $x=6$이다.



따라서 곡선 $y=x^2-7x+10$과 직선 $y=-x+10$으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{0}^{6}\{(-x+10)-(x^2-7x+10)\}dx=\int_{0}^{6}(-x^2+6x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2\right]_{0}^{6}$$

$$=-\frac{1}{3}\times 6^3+3\times 6^2$$

$$=-72+108$$

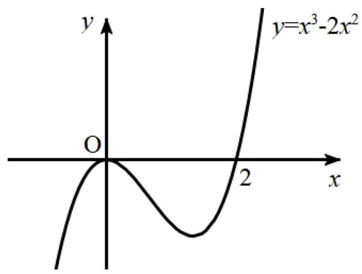
$$=36$$

299. ②

$y=x^3-2x^2$

$=x^2(x-2)$

곡선 $y=x^3-2x^2$은 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{0}^{2}|x^3-2x^2|\,dx$$

$$=-\int_{0}^{2}(x^3-2x^2)\,dx$$

$$=-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3\right]_{0}^{2}$$

$$=\frac{4}{3}$$

300. 80

[출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구한 후 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

$f(x)=x^3+x^2-x$에서

$f'(x)=3x^2+2x-1$

$\quad=(3x-1)(x+1)$

이므로 $f'(x)=0$에서

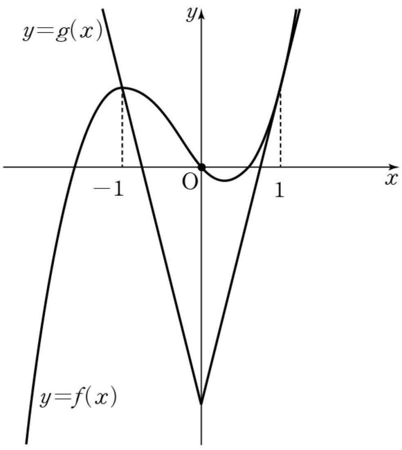
$x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극소	↘	극대	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값이 $f(-1)=1$, $x=\frac{1}{3}$에서 극솟값이 $f\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{5}{27}$이므로 두 함수 $f(x)=x^3+x^2-x$, $g(x)=4|\ x\ |+k$의 그래프가 만나는 점의 개수가 2이기 위해서는 그림과 같이 $x>0$인 부분에서 두 함수 $f(x)=x^3+x^2-x$,

$g(x)=4|x|+k$의 그래프가 접해야 한다.



$x>0$일 때 $g(x)=4x+k$이므로

$f'(x)=3x^2+2x-1=4$

에서

$3x^2+2x-5=0,\ (3x+5)(x-1)=0$

즉, $x=1$이므로 접점의 좌표는 $(1,\ 1)$이고

$g(1)=4+k=1$

따라서, $k=-3$

또한, $x<0$일 때 $g(x)=-4x-3$이므로

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는

$x^3+x^2-x=-4x-3,\ x^3+x^2+3x+3=0$

$(x+1)(x^2+3)=0$

$x=-1$

따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{0}(x^3+x^2+3x+3)\,dx+\int_{0}^{1}(x^3+x^2-5x+3)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+3x\right]_{0}^{1}$$

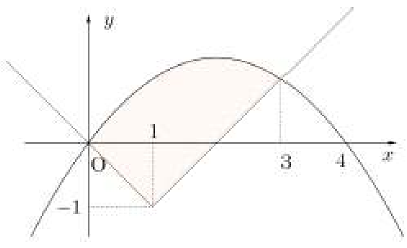
$$=\frac{19}{12}+\frac{13}{12}=\frac{8}{3}$$

$30\times S=30\times\frac{8}{3}=80$

301. 14

두 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x(4-x)$, $g(x)=|x-1|-1$

의 그래프는 다음과 같다.



$x<1$일 때, $g(x)=-x$이므로

$\frac{1}{3}x(4-x)=-x$에서

$4x-x^2=3x-6,$

$x^2-x-6=(x-3)(x+2)=0$

$x=3$

따라서 구하는 넓이는

$$S=\int_{0}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx+\int_{1}^{3}\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_{0}^{1}\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{7}{3}x\right)dx+\int_{1}^{3}\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+2\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{9}x^3+\frac{7}{6}x^2\right]_{0}^{1}+\left[-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{6}x^2+2x\right]_{1}^{3}$$

$$=\left(-\frac{1}{9}+\frac{7}{6}\right)+\left\{\left(-3+\frac{3}{2}+6\right)-\left(-\frac{1}{9}+\frac{1}{6}+2\right)\right\}$$

$$=\frac{7}{2}$$

이므로

$4S=1414$

302. ①

구하는 부분의 넓이는

$$\int_{0}^{3}\left(\frac{1}{3}x^2+1\right)dx=\left[\frac{1}{9}x^3+x\right]_{0}^{3}=3+3=6$$

303. ③

구하는 부분의 넓이는

$$\int_{0}^{2}(|x^2-2x|+1)dx=\int_{0}^{2}(-x^2+2x+1)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{0}^{2}=\frac{10}{3}$$

304. ①

[출제의도] 정적분을 활용하여 도형의 넓이를 구한다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분에서 $0\le x\le 2$인 부분과 $2\le x\le 4$인 부분의 넓이가 같으므로

구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{0}^{4}\{g(x)-f(x)\}\,dx$$

$$=2\int_{0}^{2}(-2x^2+6x)\,dx$$

$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2\right]_{0}^{2}=\frac{40}{3}$$

305. ②

[출제의도] 정적분을 이해하여 곡선과 직선 및 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.

$f(x)=x^2-4x+6$이라 하면

$f'(x)=2x-4$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $A(3,\ 3)$에서의 접선의 기울기가

$f'(3)=2$이므로 접선 l의 방정식은

$y-3=2(x-3),\ y=2x-3$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 l 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^3 \{x^2-4x+6-(2x-3)\}dx$$
$$=\int_0^3 (x^2-6x+9)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_0^3=9$$

306. 32

[출제의도] 정적분 이해하기

곡선 $y=-x^2+4x-4$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_0^2 |-x^2+4x-4|dx$$
$$=\int_0^2 (x^2-4x+4)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_0^2=\frac{8}{3}$$

따라서 $12S=32$

307. ③

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=ax$의 교점의 좌표는

방정식 $x^2=ax$에서 $(0,\ 0)$, $(a,\ a^2)$

따라서 구하는 넓이는

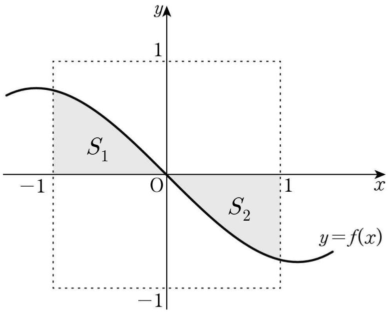
$$\int_0^a |ax-x^2|dx=\left[\frac{a}{2}x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{3}=\frac{a^3}{6}$$

308. ②

모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로

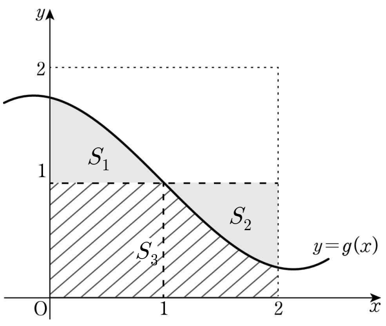
함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

그림과 같이 색칠된 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하면 $S_1=S_2$



함수 $y=g(x)$의 그래프에서 빗금 친 부분의 넓이를 S_3이라 하면

$$\int_0^2 g(x)dx=S_1+S_3=S_2+S_3=2\times1=2$$



309. ③

$x(0)=0$, $x(1)=0$이므로

점 P의 위치는 $t=0$일 때 수직선의 원점이고, $t=1$일 때도 수직선의 원점이다.

또, $\int_0^1 |v(t)|dt=2$이므로

점 P가 $t=0$에서 $t=1$까지 움직인 거리가 2이다.

ㄱ. 점 P의 $t=0$에서 $t=1$까지

위치의 변화량이 0이므로

$\int_0^1 v(t)dt=0$ (참)

ㄴ. $|x(t_1)|>1$이면

점 P와 원점 사이의 거리가 1보다 큰 시각 t_1이 존재하므로

점 P가 $t=0$에서 $t=1$까지

움직인 거리가 2보다 크다. (거짓)

ㄷ. $0\le t\le 1$인 모든 시각 t에서

점 P와 원점 사이의 거리가 1보다 작고,

점 P가 $t=0$에서 $t=1$까지 움직인 거리가 2이므로

점 P는 $0<t<1$에서 적어도 한 번 원점을 지나간다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

310. ③

$a\neq0$, $a\neq\frac{1}{2}$, $a\neq1$이면 점 P는 출발 후 운동 방향을 세 번 바꾼다.

그러므로 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(i) $a=0$일 때

$v(t)=-t^3(t-1)$

이때 점 P는 출발 후 운동 방향을 $t=1$에서 한 번만 바꾸므로 조건을 만족시킨다.

그러므로 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^2 -t^3(t-1)dt=\int_0^2(-t^4+t^3)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{4}t^4\right]_0^2$$
$$=-\frac{32}{5}+4$$
$$=-\frac{12}{5}$$

(ii) $a=\frac{1}{2}$일 때

$v(t)=-t\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)^2$

이때 점 P는 출발 후 운동 방향을 $t=\frac{1}{2}$에서 한 번만 바꾸므로 조건을 만족시킨다.

그러므로 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^2 -t\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)^2 dt$$
$$=\int_0^2 -\left(t^2-\frac{1}{2}t\right)(t^2-2t+1)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{5}t^5+\frac{5}{8}t^4-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{4}t^2\right]_0^2$$
$$=-\frac{32}{5}+10-\frac{16}{3}+1$$
$$=-\frac{32}{5}-\frac{16}{3}+11$$
$$=\frac{(-96)+(-80)+165}{15}$$
$$=-\frac{11}{15}$$

(iii) $a=1$일 때

$v(t)=-t(t-1)^2(t-2)$

이때 점 P는 출발 후 운동방향을 $t=2$에서 한 번만 바꾸므로 조건을 만족시킨다.

그러므로 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^2 -t(t-1)^2(t-2)dt$$
$$=\int_0^2 -t(t^2-2t+1)(t-2)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{5}t^5+t^4-\frac{5}{3}t^3+t^2\right]_0^2$$
$$=-\frac{32}{5}+16-\frac{40}{3}+4$$
$$=-\frac{32}{5}-\frac{40}{3}+20$$
$$=\frac{(-96)+(-200)+300}{15}$$
$$=\frac{4}{15}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은 $\frac{4}{15}$이다.

311. ②

시각 t에서 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하면

$$x_1(t)=0+\int_0^t (t^2-6t+5)dt$$
$$=\frac{1}{3}t^3-3t^2+5t,$$
$$x_2(t)=0+\int_0^t (2t-7)dt$$
$$=t^2-7t$$

이므로

$$f(t)=|x_1(t)-x_2(t)|$$
$$=\left|\frac{1}{3}t^3-4t^2+12t\right|$$

이다. 함수 $g(t)$를

$g(t)=\frac{1}{3}t^3-4t^2+12t$라 하면

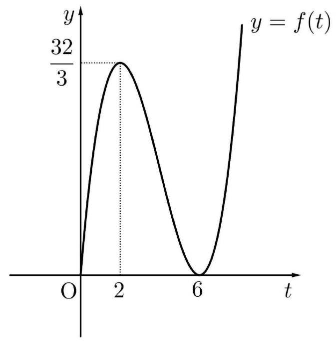
$g'(t)=t^2-8t+12=(t-2)(t-6)$

$g'(t)=0$에서 $t=2$ 또는 $t=6$

$t\geq 0$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	0	↗	$\frac{32}{3}$	↘	0	↗

$t\geq 0$인 모든 실수 t에 대하여 $g(t)\geq 0$이므로 $f(t)=g(t)$이고 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.



$f(t)$는 구간 $[0,\ 2]$에서 증가하고, 구간 $[2,\ 6]$에서 감소하고, 구간 $[6,\ \infty)$에서 증가한다. 즉, $a=2$, $b=6$이다.

시각 $t=2$에서 $t=6$까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\int_2^6 |v_2(t)|dt=\int_2^6 |2t-7|dt$$
$$=\int_2^{\frac{7}{2}}(7-2t)dt+\int_{\frac{7}{2}}^6(2t-7)dt$$
$$=\left[7t-t^2\right]_2^{\frac{2}{7}}+\left[t^2-7t\right]_{\frac{7}{2}}^6$$
$$=\frac{9}{4}+\frac{25}{4}=\frac{17}{2}$$

312. 17

[출제의도] 속도와 가속도를 이용하여 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

$t\ \geq\ 2$일 때

$v(t)=3t^2+4t+C$ (C는 적분상수)

이때 $v(2)=0$이므로

$12+8+C=0$에서 $C=-20$

즉, $0\leq t\leq 3$에서

$$v(t)=\begin{cases}2t^3-8t & (0\leq t\leq 2)\\ 3t^2+4t-20 & (2\leq t\leq 3)\end{cases}$$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3|v(t)|dt=\int_0^2|v(t)|dt+\int_2^3|v(t)|dt$$
$$=-\int_0^2 v(t)dt+\int_2^3 v(t)dt$$

$$=-\int_0^2(2t^3-8t)dt+\int_2^3(3t^2+4t-20)dt$$
$$=-\left[\frac{1}{2}t^4-4t^2\right]_0^2+\left[t^3+2t^2-20t\right]_2^3$$
$$=-(-8)+9$$
$$=17$$

313. 6
시각 t에서 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면 시각 $t=0$에서 점 P의 위치가 0이므로
$v(t)=3t^2-4t+k$에서
$x(t)=t^3-2t^2+kt$
이때 $x(1)=-3$에서
$-1+k=-3,\ k=-2$
따라서 $x(t)=t^3-2t^2-2t$이고,
$x(3)=27-18-6=3$이다.
그러므로 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량은
$x(3)-x(1)=3-(-3)=6$

314. ⑤
[출제의도] 수직선 위를 움직이는 점의 움직인 거리를 구할 수 있는가?
점 P의 시각 $t(t\ge 0)$에서의 위치를 $x_1(t)$라 하면
$$x_1(t)=\int_0^t(2-t)\,dt$$
$$=\left[2t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^t$$
$$=2t-\frac{1}{2}t^2$$
따라서 출발 후 점 P가 원점으로 돌아온 시각은
$2t-\frac{1}{2}t^2=0,\ t^2-4t=0$
$t(t-4)=0$
$t=4$
이므로
출발한 시각부터 점 P가 원점으로 돌아올 때까지 점 Q가 움직인 거리는
$$\int_0^b|3t|\,dt=\int_0^4 3t\,dt$$
$$=\left[\frac{3}{2}t^2\right]_0^4$$
$$=24$$

315. ③
$k>3$이므로
$$\int_3^k|2t-6|\,dt=\int_3^k(2t-6)dt$$
$$=\left[t^2-6t\right]_3^k$$
$$=(k^2-6k)-(9-18)$$
$$=k^2-6k+9=25$$
$k^2-6k-16=0$
$(k-8)(k+2)=0$
따라서 $k>3$이므로 $k=8$이다.

316. ④
$v(t)=-4+5$
이므로
점 P의 시각 t에서의 위치를 $x(t)$라 하면
$x(t)=-2t^2+5t+C$ (단, C는 적분상수)
이때 $x(3)=11$이므로
$-2\times 9+5\times 3+C=11$
에서
$C=14$
따라서
$x(0)=C=14$

317. ③
점 P가 움직이는 방향을 바꾸는 시각을 $k\ (k>0)$이라 하면
$v(k)=k^2-ak=0$에서
$k=a$
따라서 점 P가 $t=0$일 때부터 시각 $t=a$일 때까지 움직인 거리는
$$\int_0^a|v(t)|\,dt$$
$$=\int_0^a(-t^2+at)\,dt$$
$$=\left[-\frac{t^3}{3}+\frac{at^2}{2}\right]_0^a$$
$$=-\frac{a^3}{3}+\frac{a^3}{2}$$
$$=\frac{a^3}{6}$$
이므로 $\frac{a^3}{6}=\frac{9}{2}$에서
$a^3=27$
따라서 $a=3$

318. ②
점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v(t)=0$
$v(t)=t^2-4t+3=(t-1)(t-3)=0$
점 P가 $t=1,\ t=3$에서 운동 방향을 바꾸므로 $a=3$
점 P가 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 움직인 거리는
$$\int_0^3|v(t)|\,dt$$
$$=\int_0^1 v(t)dt+\int_1^3\{-v(t)\}dt$$
$$=\int_0^1(t^2-4t+3)dt+\int_1^3(-t^2+4t-3)dt$$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\right]_1^3$

$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$

319. 102

원점에서 출발한 점 P의 시각 $t=k$에서의 위치는

$\int_0^k(12t-12)dt=\left[6t^2-12t\right]_0^k=6k^2-12k$

원점에서 출발한 점 Q의 시각 $t=k$에서의 위치는

$\int_0^k(3t^2+2t-12)dt=\left[t^3+t^2-12t\right]_0^k=k^3+k^2-12k$

시각 $t=k$에서 두 점 P, Q의 위치가 같으므로

$6k^2-12k=k^3+k^2-12k,\ k^2(k-5)=0$

$k>0$이므로 $k=5$

시각 $t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_5^0|12t-12|dt=\int_0^1(12-12t)dt+\int_1^5(12-12t)dt$

$=\left[12t-6t^2\right]_0^1+\left[6t^2-12t\right]_1^5=102$

320. 80

[출제의도] 정적분을 활용하여 수직선 위의 점이 움직인 거리를 구한다.

점 P의 시각 t에서의 가속도 $a(t)$는

$a(t)=v'(t)=12t^2-48$

$a(k)=12(k^2-4)=0$에서 $k>0$이므로 $k=2$이다.

$0\le t\le 2$일 때, $v(t)\le 0$이므로

시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^2|v(t)|dt=\int_0^2(-4t^3+48t)dt$

$=\left[-t^4+24t^2\right]_0^2=-16+96=80$

321. 16

[출제의도] 정적분을 활용하여 속도와 거리 이해하기

시간 t에서의 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면

시각 $t=3$에서의 점 P의 위치는

$x(3)=x(0)+\int_0^3 v(t)\,dt=\int_0^3(3t^2+6t-a)\,dt$

$=\left[t^3+3t^2-at\right]_0^3=54-3a=6$

따라서 $a=16$

322. 18

[출제의도] 속도와 위치의 관계를 이해하여 상수의 값을 구한다.

시각 t에서 두 점 P, Q의 위치를 각각

$x_1(t),\ x_2(t)$라 하면

$x_1(t)=t^3-\frac{15}{2}t^2+kt,\ x_2(t)=-t^3+\frac{9}{2}t^2$

두 점 P, Q가 출발한 후 한 번만 만나므로 $t>0$에서

방정식 $x_1(t)=x_2(t)$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

$x_1(t)-x_2(t)=t(2t^2-12t+k)=0$에서 $k>0$이고 $t>0$이므로

이차방정식 $2t^2-12t+k=0$은 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-12)^2-4\times 2\times k=0$

따라서 $k=18$

323. 20

$0\le t\le 3$일 때 $v(t)\ge 0$, $3\le t\le 4$일 때 $v(t)\le 0$이므로 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^4|v(t)|dt=\int_0^3|v(t)|dt+\int_3^4|v(t)|dt$

$=\int_0^3(12-4t)dt+\int_3^4(4t-12)dt=18+2=20$

324. 8

점 P가 운동 방향을 바꿀 때 속도는 0이므로

$v(t)=3t^2-12t+9=3(t-1)(t-3)=0$

$t=1$ 또는 $t=3$

$0\le t<1$에서 $v(t)>0$,

$1<t<3$에서 $v(t)<0$

$t>3$에서 $v(t)>0$

이므로 점 P는 $t=1$일 때 처음으로 운동 방향을 바꾸고 $t=3$일 때 다시 운동 방향을 바꾼다.

그러므로 점 P가 A에서 방향을 바꾼 순간부터 다시 A로 돌아올 때까지 움직인 거리는 점 P가 $t=1$부터 $t=3$까지 이동한 거리의 2배이다.

따라서 구하는 값은

$2\int_1^3|v(t)|dt=\int_1^3(-3t^2+12t-9)dt$

$=2\left[-t^3+6t^2-9t\right]_1^3$

$=8$

[다른 풀이]

점 P다 다시 A로 돌아올 때의 시각을 $t=a$ (단, $a>1$)라 하면

$\int_1^a v(t)dt=0$이므로

$\int_1^a v(t)dt=\int_1^a(3t^2-12t+9)dt$

$=\left[t^3-6t^2+9t\right]_1^a$

$=a^3-6a^2+9a-4$

$=(a-1)^2(a-4)=0$

그러므로 $t=4$일 때 점 P가 다시 A로 돌아온다.

따라서

$\int_1^4|v(t)|dt=-\int_1^3 v(t)dt+\int_3^4 v(t)dt$

$=-\int_1^3(3t^2-12t+9)dt+\int_3^4(3t^2-12t+9)dt$

$=-\left[t^3-6t^2+9t\right]_1^3+\left[t^3-6t^2+9t\right]_3^4$

$=8$

325. 10

$$\int_0^3 |v(t)|\,dt=\int_0^3 |-4t+8|\,dt$$

$$=\int_0^2(-4t+8)\,dt+\int_2^3(4t-8)\,dt$$

$$=\Big[-2t^2+8t\Big]_0^2+\Big[2t^2-8t\Big]_2^3$$

$$=8+2=10$$

326. ⑤

[출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

$G(x)=\int_1^x(x-t)f(t)\,dt$라 하자.

함수 $G(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_1^x(x-t)f(t)\,dt=\lim_{x\to2}\frac{G(x)}{x-2}=3$에서

$G(2)=0,\ G'(2)=3$

$G(x)=x\int_1^x f(t)\,dt-\int_1^x tf(t)\,dt$에서

$G'(x)=x\int_1^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=\int_1^x f(t)\,dt$

$G'(2)=\int_1^2 f(t)\,dt=3$

$G(2)=2\int_1^2 f(t)\,dt-\int_1^2 tf(t)\,dt=0$에서

$\int_1^2 tf(t)\,dt=2\int_1^2 f(t)\,dt=6$

따라서

$$\int_1^2(4x+1)f(x)\,dx=4\int_1^2 xf(x)\,dx+\int_1^2 f(x\,dx)$$

$$=4\times6+3=27$$

327. 66

$g(0)=0$이므로

$\lim_{x\to0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x-p)-f(-p)}{x}=f'(-p)$

$\lim_{x\to0+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{f(x+p)-f(p)}{x}=f'(p)$

$g'(0)=0$이므로 $f'(-p)=f'(p)=0$

$f'(x)$는 이차항의 계수가 3인 이차식이므로

$f'(x)=3(x+p)(x-p)=3x^2-3p^2$

따라서 $f(x)=x^3-3p^2x+C$(단, C는 적분상수)

$f(0)=1$이므로 $f(x)=x^3-3p^2x+1$

$x\ge0$에서 $g(x)=f(x+p)-f(p)$이므로

$$\int_0^p g(x)dx=\int_0^p\{f(x+p)-f(p)\}dx$$

$$=\int_0^p(x^3+3px^2)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}+px^3\right]_0^p=\frac{5}{4}p^4=20$$

$p>0$이므로 $p=2$이고, $f(x)=x^3-12x+1$

따라서 $f(5)=66$

328. 32

조건 (나)에서 $|x|<2$일 때 $g'(x)=-x+a$이고

조건 (다)에서 함수 $g(x)$가 $x=1$에서

극값을 가지므로 $g'(1)=-1+a=0,\ a=1$

$|x|<2$일 때 $g'(x)=-x+1$에서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서만

극값을 가지므로 $|b|\ge2$

함수 $g'(x)$가 $x=-2,\ x=2$에서 연속이므로

$g'(-2)=\lim_{x\to-2+}g'(x)$

$=\lim_{x\to-2+}(-x+1)$

$=3$ …… ㉠

$g'(2)=\lim_{x\to2-}g'(x)$

$=\lim_{x\to2-}(-x+1)$

$=-1$ …… ㉡

에서 $b\ne\pm2$이므로 $|b|>2$ …… ㉢

조건 (나)에서 $|g'(b)|=f(b)=0$이고

$|x|\ge2$인 모든 실수 x에 대하여 이차함수 $f(x)$는

$f(x)=|g'(x)|\ge0$이므로

$f(x)=m(x-b)^2\ (m>0)$

㉠, ㉡에 의하여

$f(-2)=|g'(-2)|=3,\ f(2)=|g'(2)|=1$ …… ㉣

이고 $f(-2)>f(2)$에서

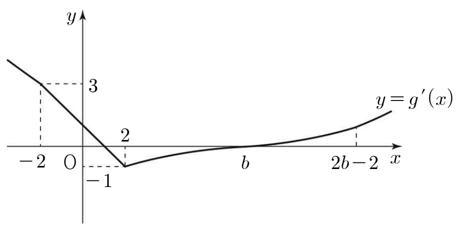
$m(-2-b)^2>m(2-b)^2$

$b^2+4b+4>b^2-4b+4$에서 $b>0$

㉢에 의하여 $b>2$이고

조건을 만족시키는 함수 $g'(x)$는

$$g'(x)=\begin{cases}m(x-b)^2 & (x\le-2)\\ -x+1 & (-2<x<2)\\ -m(x-b)^2 & (2\le x<b)\\ m(x-b)^2 & (x\ge b)\end{cases}$$



㉣에 의하여 $f(-2)=m(-2-b)^2=3,\ f(2)=m(2-b)^2=1$

두 식을 연립하면

$m(-2-b)^2=3m(2-b)^2$

$b^2-8b+4=0$

에서 $b>2$이므로 $b=4+2\sqrt{3}$

조건 (나)에서 $g(0)=\int_0^0(-t+1)dt=0$이므로

$g(k)=\int_0^k g'(x)dx$에서

(i) $k<0$일 때

$x\le 0$에서 $g'(x)>0$이므로

$$g(k)=\int_0^k g'(t)dt$$
$$=-\int_k^0 g'(t)dt<0$$

그러므로 $g(k)=0$을 만족시키지 않는다.

(ii) $k=0$일 때

$g(0)=\int_0^0 g'(t)dt=0$이므로

$g(k)=0$을 만족시킨다.

(iii) $0<k\le 2$일 때

$$\int_0^k g'(t)dt=\int_0^k(-t+1)dt$$
$$=\left[-\frac{t^2}{2}+t\right]_0^k$$
$$=-\frac{k^2}{2}+k$$
$$=0$$

에서 $k=2$일 때 $g(k)=0$을 만족시킨다.

(iv) $k>2$일 때

$2<k<b$에서 $g'(x)<0$이므로

$\int_0^k g'(t)dt=0$이려면 $k>b$

$$\int_0^k g'(t)dt$$
$$=\int_0^2 g'(t)dt+\int_2^b g'(t)dt+\int_b^k g'(t)dt$$
$$=0-\int_2^b m(t-b)^2dt+\int_b^k m(t-b)^2dt$$
$$=-m\int_2^b(t^2-2bt+b^2)dt+m\int_b^k(t^2-2bt+b^2)dt$$
$$=-m\left[\frac{t^3}{3}-bt^2+b^2t\right]_2^b+m\left[\frac{t^3}{3}-bt^2+b^2t\right]_b^k$$
$$=-\frac{m}{3}(b^3-6b^2+12b-8)+\frac{m}{3}(k^3-3k^2b+3kb^2-b^3)$$
$$=-\frac{m}{3}(b-2)^3+\frac{m}{3}(k-b)^3=0$$

에서 $(k-b)^3=(b-2)^3$

$k-b$, $b-2$는 모두 실수이므로 $k-b=b-2$

그러므로 $k=2b-2=6+4\sqrt{3}$일 때

$g(k)=0$을 만족시킨다.

(i)~(iv)에 의하여 $g(k)=0$을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은

$0+2+(6+4\sqrt{3})=8+4\sqrt{3}$이므로 $p=8$, $q=4$

따라서 $p\times q=32$

329. 39

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라 하면

$F'(x)=f(x)$

이고

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt$$
$$=F(x)-F(0)$$

이므로

$g'(x)=f(x)$

그러므로 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$인 삼차함수이다.

조건에서 $x\ge 1$인 모든 실수 x에 대하여

$g(x)\ge g(4)$이므로 삼차함수 $g(x)$는 구간 $[1, \infty)$에서

$x=4$일 때 최소이자 극소이다. …… ㉠

즉, $g'(4)=f(4)=0$이므로

$f(x)=(x-4)(x-a)$ (a는 상수) …… ㉡

로 놓을 수 있다.

(i) $g(4)\ge 0$인 경우

$x\ge 1$인 모든 실수 x에 대하여

$g(x)\ge g(4)\ge 0$이므로 이 범위에서

$|g(x)|=g(x)$

이다.

조건에서 $x\ge 1$인 모든 실수 x에 대하여

$|g(x)|\ge|g(3)|$, 즉 $g(x)\ge g(3)$이어야 한다 …… ㉢

그런데 ㉠에서 $g(3)>g(4)$이므로 ㉢을 만족시키지 않는다.

(ii) $g(4)<0$인 경우

$x\ge 1$인 모든 실수 x에 대하여

$|g(x)|\ge|g(3)|$ 이려면

$g(3)=0$ …… ㉣

이어야 한다.

㉡에서 $f(x)=x^2-(a+4)x+4a$이므로

$F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{a+4}{2}x^2+4ax+C$ (단, C는 적분상수)

그러므로

$$g(x)=F(x)-F(0)$$
$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{a+4}{2}x^2+4ax$$

㉣에서

$$g(3)=9-\frac{9}{2}(a+4)+12a=0$$
$$\frac{15}{2}a=9$$
$$a=\frac{6}{5}$$

따라서 $f(x)=(x-4)\left(x-\frac{6}{5}\right)$이므로

$f(9)=(9-4)\left(9-\frac{6}{5}\right)$

$=5\times\frac{39}{5}=39$

[다른 풀이]
최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$g(x)=\int_0^x f(t)dt$ …… ㉠

는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$인 삼차함수이다.

㉠에서
$g(0)=0$ …… ㉡
조건에서 $x\ge 1$인 모든 실수 x에 대하여
$g(x)\ge g(4)$이므로 삼차함수 $g(x)$는 구간 $[1,\ \infty)$에서 $x=4$일 때 최소이자 극소이다. …… ㉢
그러므로 $g'(4)=0$ …… ㉣
(ⅰ) $g(4)\ge 0$인 경우
$x\ge 1$인 모든 실수 x에 대하여
$g(x)\ge g(4)\ge 0$이므로 이 범위에서
$|g(x)|=g(x)$
이다.
조건에서 $x\ge 1$인 모든 실수 x에 대하여
$|g(x)|\ge |g(3)|$, 즉 $g(x)\ge g(3)$이어야 하므로
$g(3)=g(4)$이어야 한다.
이는 ㉢에 모순이다.
(ⅱ) $g(4)<0$인 경우
$x\ge 1$인 모든 실수 x에 대하여
$|g(x)|\ge |g(3)|$ 이려면
$g(3)=0$ …… ㉤
이어야 한다.
㉡, ㉤에서

$g(x)=\frac{1}{3}x(x-3)(x+a)$

$=\frac{1}{3}x^3+\frac{a-3}{2}x^2-ax$ (a는 상수)

로 놓을 수 있다.

$g'(x)=x^2+\frac{2(a-3)}{3}x-a$

㉣에서

$g'(4)=16+\frac{8}{3}(a-3)-a=8+\frac{5}{3}a=0,$

$a=-\frac{24}{5}$

㉠에서

$f(x)=g'(x)=x^2-\frac{26}{5}x+\frac{24}{5}$

이므로

$f(9)=81-\frac{234}{5}+\frac{24}{5}=81-\frac{210}{5}=39$

330. ①
$f(1+x)+f(1-x)=0$에 $x=0$을 대입하면 $f(1)=0$
$f(x)=(x-1)(x^2+ax+b)$ (단, a, b는 상수)
조건 (나)에서

$\int_{-1}^3 f'(x)dx=f(3)-f(-1)=12$ …… ㉠

$f(1+x)+f(1-x)=0$에 $x=2$를 대입하면
$f(3)+f(-1)=0$ …… ㉡
두 식 ㉠, ㉡을 연립하면
$f(3)=6,\ f(-1)=-6$
$f(3)=2(9+3a+b)=6,\ 3a+b=-6$ …… ㉢
$f(-1)=-2(1-a+b)=-6,\ a-b=-2$ …… ㉣
두 식 ㉢, ㉣을 연립하면 $a=-2,\ b=0\,f(x)=x(x-1)(x-2)$
따라서 $f(4)=24$

331. ③
$f'(2)=0$이므로 실수 k에 대하여
$f(x)=x^2-4x+k$라 하자.
ㄱ. 만약 $f(2)\ge 0$이면 >2일 때 $f(x)>0$이므로

정적분과 넓이의 관계에 의하여 $\int_2^4 f(x)dt>0$,

즉 $\int_4^2 f(x)dx=-\int_2^4 f(x)dx<0$이므로 주어진 조건을

만족시키지 못한다. 즉 $f(2)<0$ (참)

ㄴ. $\int_4^3 f(x)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+kx\right]_4^3=-k+\frac{5}{3}$

$-k+\frac{5}{3}\ge 0$이므로 $k\le\frac{5}{3}$

$\int_4^2 f(x)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+kx\right]_4^2=-2k+\frac{16}{3}$

$\int_4^3 f(x)dx-\int_4^2 f(x)dx=k-\frac{11}{3}$

$k\le\frac{5}{3}$에서 $k-\frac{11}{3}\le -2<0$이므로

$\int_4^3 f(x)dx<\int_4^2 f(x)dx$ (거짓)

ㄷ. ㄴ에서 $k\le\frac{5}{3}$이므로 $f(3)=k-3\le-\frac{4}{3}<0$

$f(3)=f(1)<0$이므로 구간 $[1,\ 3]$에서
$f(x)<0$이고, $n=1$ 또는 $n=2$일 때 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=n$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이가

$-\int_n^3 f(x)dx$와 같다.

즉 $\int_3^n f(x)dx=-\int_n^3 f(x)dx>0$ …… ㉠

$\int_4^5 f(x)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+kx\right]_4^5=k+\frac{7}{3}$

$k+\frac{7}{3}\ge 0$에서 $k\ge-\frac{7}{3}$이므로

$f(5)=5+k\ \geq\ \dfrac{8}{3}>0$

구간 $[5,\ \infty)$에서 $f(x)>0$이다.

그러므로 6 이상의 모든 자연수 n에 대하여

곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=5,\ x=n$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\displaystyle\int_5^n f(x)dx$와 같다.

즉 $\displaystyle\int_5^n f(x)dx>0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\displaystyle\int_4^3 f(x)dx\geq 0,\ \int_4^5 f(x)dx\geq 0$이면

함수 $f(x)$가 주어진 조건을 만족시킨다.

따라서 $-\dfrac{7}{3}\leq k\leq \dfrac{5}{3}$ …… ㉢

$\displaystyle\int_4^6 f(x)dx=2k+\frac{32}{3}$이므로 ㉢에서

$6\ \leq\ \displaystyle\int_4^6 f(x)dx\ \leq 14$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ 이다.

332. ①

$f(x)=\displaystyle\int(3x^2-4x+1)dx$

$=x^3-2x^2+x+C$ (C 는 적분상수)

함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$\displaystyle\int_0^x f(t)dt=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=F'(0)=f(0)$

$f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(2)=8-8+2+1=3$

333. 24

$2x^2f(x)=3\displaystyle\int_0^x(x-t)\{f(x)+f(t)\}dt$에서

$$2x^2f(x)=3\int_0^x(x-t)f(x)dt+3\int_0^x(x-t)f(t)dt$$

$$=3f(x)\int_0^x(x-t)dt+3\int_0^x(x-t)f(t)dt$$

$$=3f(x)\left[xt-\frac{1}{2}t^2\right]_0^x+3\int_0^x(x-t)f(t)dt$$

$$=\frac{3}{2}x^2f(x)+3\int_0^x(x-t)f(t)dt$$

$$x^2f(x)=6\int_0^x(x-t)f(t)dt$$

$x^2f(x)=6x\displaystyle\int_0^x f(t)dt-6\int_0^x tf(t)dt$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2xf(x)+x^2f'(x)=6\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ …… ㉡

$f'(2)=4$이므로 다항함수 $f(x)$의 차수는 1이상이다.

함수 $f(x)$의 차수를 n이라 하고, 최고차항의 계수를 $a(a\neq0)$이라 하자.

㉡의 양변의 최고차항의 계수를 비교하면

$a(2+n)=\dfrac{6a}{n+1}$

$(n+1)(n+2)=6,\ (n-1)(n+4)=0$

n은 자연수이므로 $n=1$

함수 $f(x)$가 일차함수이고 $f'(2)=4$이므로 $a=4$

$f(x)=4x+b$(단, b는 상수)라 하면 ㉡에서

$2x(4x+b)+4x^2=6\left[2t^2+bt\right]_0^x$

$12x^2+2bx=12x^2+6bx$ …… ㉢

모든 실수 x에 대하여 ㉢이 성립하므로 $b=0$

$f(x)=4x$이므로 $f(6)=24$

334. 30

[출제의도] 정적분을 이용하여 추론하기

$g(x)=\displaystyle\int_0^x\{f'(t+a)\times f'(t-a)\}dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f'(x+a)\times f'(x-a)$

$f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로

방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는

0 또는 1 또는 2이다.

(ⅰ) 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 0 또는 1인 경우

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq0$이므로

$g'(x)=f'(x+a)\times f'(x-a)\geq0$

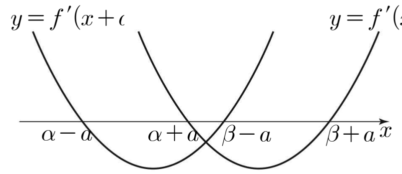
함수 $g(x)$가 극값을 갖지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우

$f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)(\alpha<\beta)$라 하자.

(a) $\alpha+a<\beta-a$일 때

두 함수 $y=f'(x+a),\ y=f'(x-a)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	$\alpha-a$	$\cdots$	$\alpha+a$
$f'(x+a)$	$+$	0	$-$	$-$
$f'(x-a)$	$+$	$+$	$+$	0
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0
$g(x)$	↗	극대	↘	극소

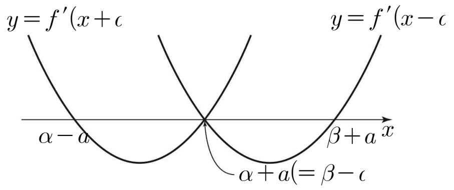
$\cdots$	$\beta-a$	$\cdots$	$\beta+a$	$\cdots$
$-$	0	$+$	$+$	$+$
$-$	$-$	$-$	0	$+$
$+$	0	$-$	0	$+$
$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $g(x)$는

$x=\alpha-a$, $x=\alpha+a$, $x=\beta-a$, $x=\beta+a$에서 극값을 가지므로 조건을 만족시키지 않는다.

(b) $\alpha+a=\beta-a$일 때

두 함수 $y=f'(x+a)$, $y=f'(x-a)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	$\alpha-a$	$\cdots$	$\alpha+a$ $(=\beta-a)$
$f'(x+a)$	$+$	0	$-$	0
$f'(x-a)$	$+$	$+$	$+$	0
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0
$g(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	

$\cdots$	$\beta+a$	$\cdots$
$+$	$+$	$+$
$-$	0	$+$
$-$	0	$+$
$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $g(x)$는 $x=\alpha-a$, $x=\beta+a$에서만 극값을 가지므로 조건에 의하여

$(\beta+a)-(\alpha-a)=\dfrac{13}{2}-\dfrac{1}{2}=6$

$\beta-\alpha=2a$이므로

$(\beta+a)-(\alpha-a)=(\beta-\alpha)+2a=4a$

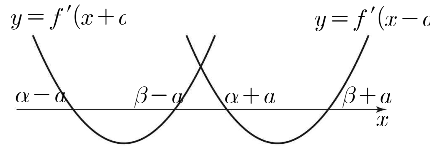
$4a=6$에서 $a=\dfrac{3}{2}$

그러므로 $\alpha-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$에서 $\alpha=2$이고,

$\beta+\dfrac{3}{2}=\dfrac{13}{2}$에서 $\beta=5$이다.

(c) $\beta-a<\alpha+a$일 때

두 함수 $y=f'(x+a)$, $y=f'(x-a)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	$\alpha-a$	$\cdots$	$\beta-a$
$f'(x+a)$	$+$	0	$-$	0
$f'(x-a)$	$+$	$+$	$+$	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0
$g(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소

$\cdots$	$\alpha+a$	$\cdots$	$\beta+a$	$\cdots$
$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$+$	0	$-$	0	$+$
$+$	0	$-$	0	$+$
$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $g(x)$는

$x=\alpha-a$, $x=\beta-a$, $x=\alpha+a$, $x=\beta+a$에서 극값을 가지므로 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $f'(x)=3(x-2)(x-5)$

$f(x)=\displaystyle\int(3x^2-21x+30)\,dx$

$\quad=x^3-\dfrac{21}{2}x^2+30x+C$ (C는 적분상수)

$f(0)=-\dfrac{1}{2}$이므로 $f(x)=x^3-\dfrac{21}{2}x^2+30x-\dfrac{1}{2}$

따라서 $a\times f(1)=\dfrac{3}{2}\times\left(1-\dfrac{21}{2}+30-\dfrac{1}{2}\right)=30$

335. ②

[출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 함수를 추론한다.

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 주어진 방정식은

$\displaystyle\int_t^x f(s)\,ds=F(x)-F(t)=0$이므로

$F(x)=F(t)$이다.

따라서 $g(t)$는 곡선 $y=F(x)$와 직선 $y=F(t)$의 서로 다른 교점의 개수와 같다.

ㄱ. $F'(x)=f(x)=x^2(x-1)$

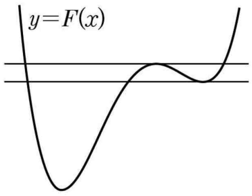
함수 $F(x)$는 $x<1$에서 감소, $x>1$에서 증가하므로 $x=1$에서 극소이면서 최소이다.

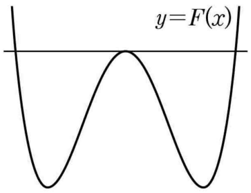
따라서 곡선 $y=F(x)$와 직선 $y=F(1)$은

오직 한 점에서 만나므로 $g(1)=1$이다. (참)

ㄴ. 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3일 때,

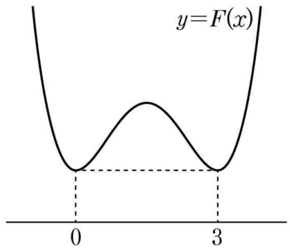
함수 $F(x)$의 두 극솟값이 같은 경우와 두 극솟값이 다른 경우가 있다. 각 경우 곡선 $y=F(x)$와 직선 $y=F(a)$가 서로 다른 세 점에서 만나는 실수 a가 존재한다.





따라서 $g(a)=3$인 실수 a가 존재한다. (참)

ㄷ. 함수 $F(x)$가 극댓값을 갖지 않거나, 극댓값을 갖지만 두 극솟값의 크기가 다른 경우에는 $\lim_{t\to b} g(t)+g(b)=6$인 실수 b가 존재하지 않는다. 따라서 곡선 $y=F(x)$의 개형은 다음과 같고, $F(0)=F(3)$이다.



$f(0)=F'(0)=0$이고, $f(3)=F'(3)=0$이므로

$$F(x)-F(0)=\frac{x^2(x-3)^2}{4}=\frac{x^4-6x^3+9x^2}{4}$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x$이므로

$f(4)=64-72+18=10$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

336. ④

[출제의도] 정적분 이해하기

$$\int_0^1 f'(x)dx=\int_0^2 f'(x)dx=0$$

$f(1)-f(0)=f(2)-f(0)=0$

$f(0)=f(1)=f(2)=k$ (k는 상수)

$f(x)=x(x-1)(x-2)+k=x^3-3x^2+2x+k$

$f'(x)=3x^2-6x+2$

따라서 $f'(1)=-1$

337. ①

[출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 활용하여 문제 해결하기

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$x=0$에서 연속이다.

$g(0)=0$이므로 $\lim_{x\to 0-} g(x)=f(2)=0$

$f(x)=(x-2)(x-p)$ (p는 상수)라 하면

$f(x+2)=x(x+2-p)$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=2-p$$

함수 $xf(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{F(h)-F(0)}{h}$$

$$=F'(0)=0$$

$g'(0)=2-p=0,\ p=2$

$f(x)=(x-2)^2$

그러므로

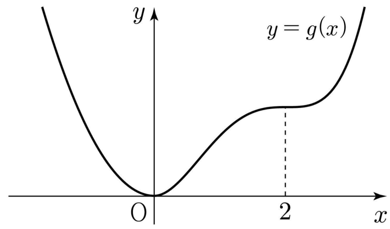
$$g(x)=\begin{cases} x^2 & (x<0) \\ \displaystyle\int_0^x t(t-2)^2\,dt & (x\ge 0)\end{cases}$$

$$g'(x)=\begin{cases} 2x & (x<0) \\ 0 & (x=0) \\ x(x-2)^2 & (x>0)\end{cases}$$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗		↗

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(i) $g(a)=0$인 경우

$h(x)=g(x)$이므로 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수는 0

(ii) $0<g(a)<g(2)$ 또는 $g(2)<g(a)$인 경우

방정식 $h(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면

$$\lim_{x\to\alpha-}\frac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha}\neq\lim_{x\to\alpha+}\frac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha}$$

$$\lim_{x\to\beta-}\frac{h(x)-h(\beta)}{x-\beta}\neq\lim_{x\to\beta+}\frac{h(x)-h(\beta)}{x-\beta}$$

함수 $h(x)$는 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 미분가능하지 않다.

함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수는 2

(iii) $g(a)=g(2)$인 경우

방정식 $h(x)=0$의 두 근을 $\gamma(\gamma<0)$, 2라 하면

$$\lim_{x\to\gamma-}\frac{h(x)-h(\gamma)}{x-\gamma}\neq\lim_{x\to\gamma+}\frac{h(x)-h(\gamma)}{x-\gamma}$$

함수 $h(x)$는 $x=\gamma$에서 미분가능하지 않다.

$0<x<2$일 때, $h(x)=g(2)-g(x)$이므로

$$\lim_{x\to 2-}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=-g'(2)=0$$

$x>2$일 때, $h(x)=g(x)-g(2)$이므로

$$\lim_{x\to 2+}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=g'(2)=0$$

함수 $h(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수는 1

$g(2)=\int_0^2 t(t-2)^2\,dt=\frac{4}{3}$이므로

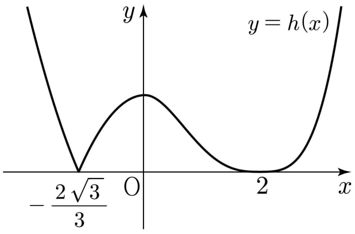
$g(\gamma)=\gamma^2=\frac{4}{3}$, $\gamma=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

따라서 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은

$2\times\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

[참고]

함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



338. 4

[출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 이용하여 함수를 구하는 문제를 해결한다.

삼차함수 $g(x)$의 상수항이 0이므로 $g(x)$는 x를 인수로 갖는다.
…… ㉠

조건 (가)의 $x|g(x)|=\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)\,dt$에 $x=2a$를 대입하면

$2a|g(2a)|=0$

a가 양수이므로 $g(2a)=0$이고 $g(x)$는 $(x-2a)$를 인수로 갖는다.
……㉡

㉠, ㉡에서 $g(x)=x(x-2a)(x-b)$ (단, b는 실수)

함수 $(a-x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수

$\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)\,dt$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고,

$\frac{d}{dx}\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)\,dt=(a-x)f(x)$이다.

즉, 함수 $x|g(x)|$는 $x=2a$에서 미분가능하다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2a+}\frac{x|g(x)|-2a|g(2a)|}{x-2a}&=\lim_{x\to 2a+}\frac{x|x(x-2a)(x-b)|}{x-2a}\\&=\lim_{x\to 2a+}x^2|x-b|\\&=4a^2|2a-b|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2a-}\frac{x|g(x)|-2a|g(2a)|}{x-2a}&=\lim_{x\to 2a-}\frac{x|x(x-2a)(x-b)|}{x-2a}\\&=\lim_{x\to 2a-}\left(-x^2|x-b|\right)\\&=-4a^2|2a-b|\end{aligned}$$

이므로 $4a^2|2a-b|=-4a^2|2a-b|$에서 $b=2a$이다.

따라서 $g(x)=x(x-2a)^2$

$$\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)\,dt=\begin{cases}-x^2(x-2a)^2 & (x<0)\\ x^2(x-2a)^2 & (x\ge 0)\end{cases}$$

이고 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

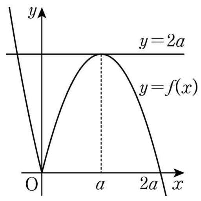
$$(a-x)f(x)=\begin{cases}-4x(x-a)(x-2a) & (x<0)\\ 4x(x-a)(x-2a) & (x\ge 0)\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}4x(x-2a) & (x<0)\\ -4x(x-2a) & (x\ge 0)\end{cases}$$

방정식 $g(f(x))=0$에서

$f(x)=0$ 또는 $f(x)=2a$

방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근 0, $2a$를 가지므로 조건 (나)에 의해 방정식 $f(x)=2a$는 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2a$의 교점의 개수가 2이어야 하므로

$$\begin{aligned}f(a)&=-4a(a-2a)\\&=4a^2=2a\end{aligned}$$

$a=\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\int_{-2a}^{2a}f(x)\,dx&=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\\&=\int_{-1}^{0}(4x^2-4x)\,dx+\int_0^1(-4x^2+4x)\,dx\\&=\left[\frac{4}{3}x^3-2x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{4}{3}x^3+2x^2\right]_0^1\\&=4\end{aligned}$$

339. 8

[출제의도] 정적분을 활용하여 문제 해결하기

$$\begin{aligned}g'(x)&=2x\int_0^x f(t)\,dt+x^2f(x)-x^2f(x)\\&=2x\int_0^x f(t)\,dt\end{aligned}$$

$h(x)=\int_0^x f(t)\,dt$라 하면 $h(0)=0$

조건 (나)에 의하여

방정식 $h(x)=0$의 실근은 0과 3이므로

(i) $h(x)=ax^2(x-3)$ (a는 상수)라 하면

$g'(x)=2ax^3(x-3)$이고

함수 $g(x)$는 $x=0$, $x=3$에서 극값을 가지므로 모순

(ii) $h(x)=ax(x-3)^2$ (a는 상수)라 하면

$g'(x)=2ax^2(x-3)^2$이므로

함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.

$$\begin{aligned}h'(x)&=f(x)\\&=a(3x^2-12x+9)=3a(x-1)(x-3)\end{aligned}$$

$f(x)$의 최고차항의 계수가 3이므로 $a=1$

$f(x)=3(x-1)(x-3)$

따라서

$$\int_0^3 |f(x)|\,dx$$

$$=3\int_0^3 |(x-1)(x-3)|\,dx$$

$$=3\int_0^1 (x-1)(x-3)\,dx-3\int_1^3 (x-1)(x-3)\,dx$$

$$=3\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_0^1-\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_1^3$$

$$=3\left(\frac{1}{3}-2+3\right)-3\left(9-18+9-\frac{1}{3}+2-3\right)=8$$

340. ⑤

[출제의도] 함수의 그래프를 이해하고 명제의 참, 거짓을 판단할 수 있는가?

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$, $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$를

$f(x)=x(x-1)(x-a)$ (a는 상수) ⋯ ㉠

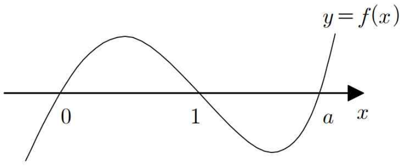
라 하자.

ㄱ. $g(0)=\int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^1 |f(x)|\,dx=0$

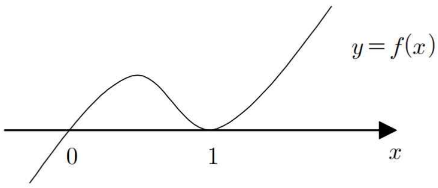
$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 |f(x)|\,dx$$

따라서 $0\le x\le 1$일 때 $f(x)\ge 0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다

(ⅰ) $a>1$일 때



(ⅱ) $a=1$일 때



(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$\int_{-1}^0 f(x)\,dx<0$ 이므로

$g(-1)=\int_{-1}^0 f(x)\,dx-\int_0^1 |f(x)|\,dx<0$ 이다. (참)

ㄴ. $g(-1)>0$이면 $0\le x\le 1$일 때 $f(x)\le 0$이므로

$$g(-1)=\int_{-1}^0 f(x)dx-\int_0^1 |f(x)|\,dx$$

$$=\int_{-1}^0 f(x)dx+\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$=\int_{-1}^1 f(x)\,dx$$

$$=\int_{-1}^1 x(x-1)(x-a)\,dx$$

$$=\int_{-1}^1 \{x^3-(a+1)x^2+ax\}dx$$

$$=2\int_0^1 \{-(a+1)x^2\}dx$$

$$=2\left[-\frac{a+1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=-\frac{2(a+1)}{3}>0$$

즉, $a<-1$이므로 $f(k)=0$을 만족시키는 $k<-1$인 실수 k가 존재한다. (참)

ㄷ. $g(-1)=-\frac{2(a+1)}{3}>1$에서 $a<-\frac{5}{2}$

$0\le x\le 1$일 때 $f(x)\le 0$이므로

$$g(0)=\int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^1 |f(x)|\,dx$$

$$=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$=2\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$=2\int_0^1 \{x^3-(a+1)x^2+ax\}dx$$

$$=2\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=2\left(\frac{1}{4}-\frac{a+1}{3}+\frac{a}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}a-\frac{1}{6}<-1 \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

341. ①

[출제의도] 속도와 위치의 변화량을 이해하여 점이 움직인 거리를 구한다.

시각 $t=0$에서의 점 P의 위치와 시각 $t=6$에서의 점 P의 위치가 서로 같으므로 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 점 P의 위치의 변화량이 0이다. 점 P의 시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=3t^2+at$이므로

$$\int_0^6 v(t)\,dt=\int_0^6 (3t^2+at)\,dt$$

$$=\left[t^3+\frac{a}{2}t^2\right]_0^6$$

$$=36\left(6+\frac{a}{2}\right)=0$$

$a=-12$

$v(t)=3t^2-12t$이므로 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 움직인 거리는

$$\int_0^6 |v(t)|\,dt=\int_0^6 |3t^2-12t|\,dt$$

$$=\int_0^4 (-3t^2+12t)\,dt+\int_4^6 (3t^2-12t)\,dt$$

$= \left[-t^3+6t^2\right]_0^4 + \left[t^3-6t^2\right]_4^6$

$= 32+32=64$

342. ②
[출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기
점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 위치를 $x(t)$라 하면
점 P의 시각 $t=0$에서의 위치는 0이므로 $x(0)=0$

$x(t)=x(0)+\int_0^t v(t)\,dt$

$= \int_0^t 3(t-2)(t-a)\,dt$

$= \int_0^t \{3t^2-3(a+2)t+6a\}\,dt$

$= t^3-\frac{3}{2}(a+2)t^2+6at$

점 P가 $0<t<2$, $t>a$에서 양의 방향으로,
$2<t<a$에서 음의 방향으로 움직이고
$t>0$에서 점 P의 위치가 0이 되는 순간이
한 번 뿐이므로 $x(a)=0$

$a^3-\frac{3}{2}(a+2)a^2+6a^2=0$에서 $a>2$이므로 $a=6$

따라서 $v(8)=3\times6\times2=36$

343. ④
[출제의도] 정적분을 이용하여 두 점 사이의 거리를 구할 수 있는가?
$t=2$에서 점 P의 위치는

$\int_0^2 v(t)\,dt = \int_0^2 (3t^2+at)\,dt$

$= \left[t^3+\frac{a}{2}t^2\right]_0^2$

$= 8+2a$

점 $P(8+2a)$와 점 $A(6)$ 사이의 거리가 10이려면
$|(8+2a)-6|=10$, 즉
$2a+2=\pm10$
이어야 하므로 양수 a의 값은
$2a+2=10$에서
$a=4$

344. 110
$f(x+1)-xf(x)=ax+b$에
$x=0$을 대입하면
$f(1)=b$
닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)=x$이므로
$b=1$
또, $f(x+1)=xf(x)+ax+1$이므로
$0 \leq x \leq 1$에서
$f(x+1)=xf(x)+ax+1$
$=x^2+ax+1$
$x+1=t$로 치환하면

$f(t)=(t-1)^2+a(t-1)+1$
$=t^2+(a-2)t+2-a$ …… ㉠
$f'(t)=2t+(a-2)$이고,
닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)=x$이고, 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수이므로 $f'(1)=1$이므로
$a=1$
따라서 ㉠에서 $1 \leq x \leq 2$일 때
$f(x)=x^2-x+1$이다.

$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 (x^2-x+1)\,dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_1^2$

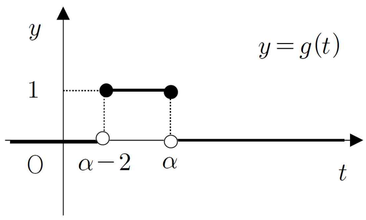
$= \frac{8}{3}-\frac{5}{6}$

$= \frac{11}{6}$

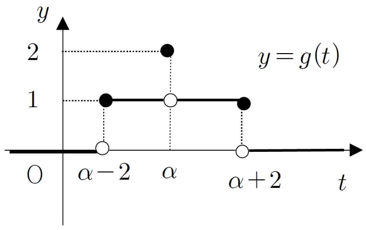
즉, $60\times\int_1^2 f(x)\,dx = 60\times\frac{11}{6}$

$=110$

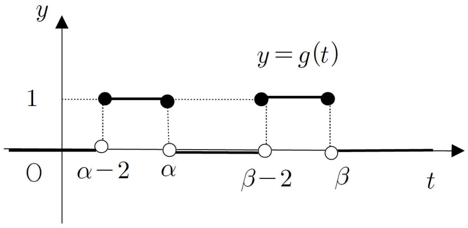
345. 9
이차방정식 $f'(x)=0$이 근을 갖지 않는 경우에는
$g(t)=0$
이는 조건 (나)에서
$g(t)$가 함숫값 1 또는 2를 갖는 것에 모순이다.
이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 α를 갖는 경우에는 $y=g(t)$는 그림과 같다.



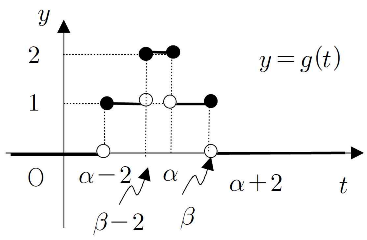
이는 조건 (나)에서
$g(t)$가 함숫값 2를 갖는 것에 모순이다.
그러므로 이차방정식 $f'(x)=0$는 서로 다른 두 실근 α, $\beta(\alpha<\beta)$를 갖는다.
(i) $\beta=\alpha+2$일 때,
함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음과 같다.



이는 조건 (가)를 만족한다.
(ii) $\beta>\alpha+2$일 때,
함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음과 같다.



이는 조건 (나)에서
$g(t)$가 함숫값 2를 갖는 것에 모순이다.
(iii) $\beta<\alpha+2$일 때,
함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음과 같다.



이때, $\beta-2\le a\le\alpha$인 a에 대하여 조건 (가)를 만족시키지 못한다.
따라서 위에서 조건을 만족시키는 것은 (i)의 경우이다.
한편, 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이므로
함수 $f'(x)$의 최고차항의 계수는 $\frac{3}{2}$이다.
그러므로
$$f'(x)=\frac{3}{2}(x-\alpha)\{x-(\alpha+2)\}$$
$$=\frac{3}{2}\{x^2-(2\alpha+2)x+\alpha^2+2\alpha\}$$
로 놓을 수 있다.
이때,
$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}(\alpha+1)x^2+\frac{3}{2}(\alpha^2+2\alpha)x+C$$
(단, C는 적분상수) …… ㉠
한편, 조건 (나)에서
$g(f(1))=g(f(4))=2$
이고 $g(t)$의 함숫값이 2인 t의 값의 개수는 1이므로
$f(1)=f(4)$
㉠에서
$$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(\alpha+1)+\frac{3}{2}(\alpha^2+2\alpha)+C$$
$$=32-24(\alpha+1)+6(\alpha^2+2\alpha)+C$$
따라서
$$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(\alpha+1)+\frac{3}{2}(\alpha^2+2\alpha)$$
$$=32-24(\alpha+1)+6(\alpha^2+2\alpha)$$
양변에 2를 곱하면
$$1-3(\alpha+1)+3(\alpha^2+2\alpha)$$
$$=64-48(\alpha+1)+12(\alpha^2+2\alpha)$$
이 식을 정리하면
$$3\alpha^2+3\alpha-2=12\alpha^2-24\alpha+16$$
$$9\alpha^2-27\alpha+18=0$$
$$\alpha^2-3\alpha+2=0$$
$$(\alpha-1)(\alpha-2)=0$$
$\alpha=1$ 또는 $\alpha=2$
((i)-①) $\alpha=1$일 때,
$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x+C$$
이때, $f(1)=\alpha$에서
$f(1)=1$이어야 하므로
$$\frac{1}{2}-3+\frac{9}{2}+C=1$$
$$2+C=1$$
$$C=-1$$
이때, $f(0)=-1$이므로
$g(f(0))=g(-1)=1$
그러므로 조건을 만족시킨다.
((i)-②) $\alpha=2$일 때,
$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+12x+C$$
이때, $f(1)=\alpha$에서
$f(1)=2$이어야 하므로
$$\frac{1}{2}-\frac{9}{2}+12+C=2$$
$$8+C=1$$
$$C=-6$$
이때, $f(0)=-6$이므로
$g(f(0))=g(-6)=0$
그러므로 조건을 만족시키지 못한다.
따라서 ((i)-①)에서
$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x-1$$
이므로
$$f(5)=\frac{1}{2}\times5^3-3\times25+\frac{9}{2}\times5-1$$
$$=\frac{125}{2}-75+\frac{45}{2}-1$$
$$=9$$

346. ②
[출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?
함수 $y=-f(x+1)+1$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동시킨 후, x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 것이다.
$$f(0)=0,\ f(1)=1,\ \int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{6}$$
이므로
조건 (가)에서
$$\int_{-1}^{0}g(x)dx=\int_{-1}^{0}\{-f(x+1)+1\}dx$$
$$=1-\frac{1}{6}$$

$=\frac{5}{6}$

$\int_{0}^{1} g(x)dx=\int_{0}^{1} f(x)dx=\frac{1}{6}$

$\int_{-1}^{1} g(x)dx=\int_{-1}^{0} g(x)dx+\int_{0}^{1} g(x)dx$

$=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}$

$=1$

조건 (나)에서

$g(x+2)=g(x)$

이므로

$\int_{-3}^{2} g(x)dx=\int_{-3}^{-1} g(x)dx+\int_{-1}^{1} g(x)dx+\int_{1}^{2} g(x)dx$

$=2\int_{-1}^{1} g(x)dx+\int_{-1}^{0} g(x)dx$

$=2\times 1+\frac{5}{6}$

$=\frac{17}{6}$

347. 16

[출제의도] 정적분으로 정의된 함수가 포함된 문제를 해결한다.

$g'(x)=(x^2-4)\{|f(x)|-a\}$에서 $x=-2$, $x=2$가 방정식 $g'(x)=0$의 근이지만 조건 (가)에서 함수 $g(x)$가 극값을 갖지 않아야 하므로 $x=-2$와 $x=2$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 변하지 않아야 하고,

$\lim_{x\to\infty}\{|f(x)|-a\}=\lim_{x\to-\infty}\{|f(x)|-a\}=\infty$이므로 $g'(x)$, x^2-4, $|f(x)|-a$의 부호를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$+$	0	$+$
x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$
$\|f(x)\|-a$	$+$	0	$-$	0	$+$

함수 $|f(x)|-a$는 연속함수이므로 사잇값의 정리에 의해

$|f(-2)|-a=0$, $|f(2)|-a=0$

두 실수 m, n에 대하여 일차함수 $f(x)=mx+n$이라 하면

$m\neq 0$이고, $|2m+n|=|-2m+n|=a$가 성립한다.

(ⅰ) $2m+n=-2m+n$인 경우

$m=0$이 되어 모순이다.

(ⅱ) $2m+n=-(-2m+n)$인 경우

$n=0$이고 $|m|=\frac{a}{2}$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $|f(x)|=|mx|=\frac{a}{2}|x|$

$g(2)=\int_{0}^{2}(t^2-4)\{|f(t)|-a\}dt$

$=\int_{0}^{2}(t^2-4)\left(\frac{a}{2}|t|-a\right)dt$

닫힌구간 $[0, 2]$에서 $|t|=t$이므로

$g(2)=\frac{a}{2}\int_{0}^{2}(t^2-4)(t-2)dt$

$=\frac{a}{2}\int_{0}^{2}(t^3-2t^2-4t+8)dt=\frac{a}{2}\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{2}{3}t^3-2t^2+8t\right]_{0}^{2}$

$=\frac{a}{2}\times\left(4-\frac{16}{3}-8+16\right)=\frac{10}{3}a$

조건 (나)에서 $g(2)=5$이므로 $\frac{10}{3}a=5$, $a=\frac{3}{2}$

$g(0)=\int_{0}^{0}(t^2-4)\left(\frac{3}{4}|t|-\frac{3}{2}\right)dt=0$이고

닫힌구간 $[-4, 0]$에서 $|t|=-t$이므로

$g(-4)=\int_{0}^{-4}(t^2-4)\left(\frac{3}{4}|t|-\frac{3}{2}\right)dt$

$=\frac{3}{4}\int_{0}^{-4}(t^2-4)(-t-2)dt=\frac{3}{4}\int_{0}^{-4}(-t^3-2t^2+4t+8)dt=-16$

따라서 $g(0)-g(-4)=0-(-16)=16$

348. 251

[출제의도] 정적분을 이용하여 추론하기

$f(x)=3x+a$이므로

$g(x)=\int_{2}^{x}(t+a)(3t+a)dt$

$=\int_{2}^{x}(3t^2+4at+a^2)dt$

$=\left[t^3+2at^2+a^2t\right]_{2}^{x}$

$=x^3+2ax^2+a^2x-(2a^2+8a+8)$

$g(2)=0$이므로

$g(x)=(x-2)\{x^2+2(a+1)x+(a+2)^2\}$

$h(x)=(x-2)(3x+a)\{x^2+2(a+1)x+(a+2)^2\}$

조건 (가)에 의해 곡선 $y=h(x)$위의

어떤 점에서의 접선이 x축이므로

$h(k)=h'(k)=0$을 만족시키는 실수 k가 존재한다.

그러므로 다항식 $h(x)$는 $(x-k)^2$을 인수로 갖는다.

(ⅰ) $k=2$인 경우

다항식 $h(x)$가 $(x-2)^2$을 인수로 가지므로

다항식 $3x+a$가 $3(x-2)$이거나

다항식 $x^2+2(a+1)x+(a+2)^2$이 $x-2$를

인수로 가진다.

(a) $3x+a=3(x-2)$인 경우

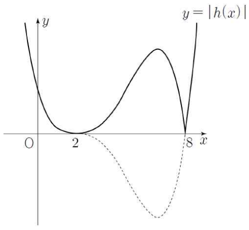
$a=-6$이므로

$h(x)=(x-2)(3x-6)(x^2-10x+16)$

$=3(x-2)^3(x-8)$

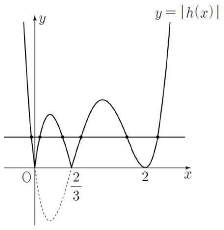
곡선 $y=|h(x)|$는 그림과 같으므로

함수 $h(x)$는 조건 (나)를 만족시킨다.



이 경우 $h(-1)=729$이다.

(b) 다항식 $x^2+2(a+1)x+(a+2)^2$이
$x-2$를 인수로 갖는 경우
$4+4(a+1)+(a+2)^2$
$=a^2+8a+12$
$=(a+2)(a+6)=0$
에서 $a=-2$ 또는 $a=-6$
$a=-6$이면 (a)와 같다.
$a=-2$이면
$h(x)=(x-2)(3x-2)(x^2-2x)$
$=x(3x-2)(x-2)^2$
곡선 $y=|h(x)|$는 그림과 같으므로
함수 $h(x)$는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.



(ⅱ) $k=-\dfrac{a}{3}(a\neq-6)$인 경우

다항식 $h(x)$가 $\left(x+\dfrac{a}{3}\right)^2$을 인수로 가지므로

다항식 $x^2+2(a+1)x+(a+2)^2$이 $x+\dfrac{a}{3}$를

인수로 가진다.

$\dfrac{1}{9}a^2-\dfrac{2}{3}a(a+1)+(a+2)^2$

$=\dfrac{4}{9}a^2+\dfrac{10}{3}a+4$

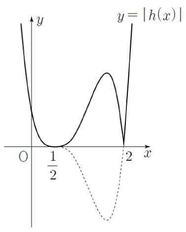
$=\dfrac{2}{9}(2a+3)(a+6)=0$

에서 $a=-\dfrac{3}{2}$이므로

$h(x)=(x-2)\left(3x-\dfrac{3}{2}\right)\left(x^2-x+\dfrac{1}{4}\right)$

$=3\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^3(x-2)$

곡선 $y=|h(x)|$는 그림과 같으므로
함수 $h(x)$는 조건 (나)를 만족시킨다.



이 경우 $h(-1)=\dfrac{243}{8}$

(iii) $x^2+2(a+1)x+(a+2)^2=(x-k)^2$인 경우
$x^2+2(a+1)x+(a+2)^2=x^2-2kx+k^2$
$a+1=-k,\ \ (a+2)^2=k^2$

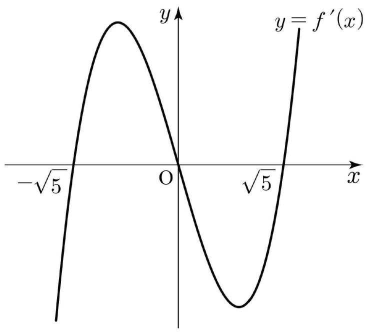
$(a+1)^2=(-a-1)^2$에서 $a=-\dfrac{3}{2}$

$a=-\dfrac{3}{2}$이면 (ⅱ)와 같다.

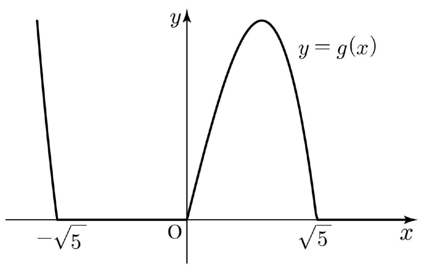
따라서 $h(-1)$의 최솟값은 $\dfrac{243}{8}$이므로

$p=8,\ \ q=243$에서 $p+q=251$

349. ②
[출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기
방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 세 실근 $\alpha,\ 0,\ \beta(\alpha<0<\beta)$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $\beta=-\alpha$
$f'(x)=4x(x-\alpha)(x+\alpha)$
$f(x)=x^4-2\alpha^2x^2+C$ (단, C는 적분상수이다.)
$f(-x)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, 조건 (가)에 의하여
$f(0)=9,\ \ C=9$
조건 (나)에 의하여 $f(\alpha)=\alpha^4-2\alpha^4+9=-16$
$\alpha=-\sqrt{5}$
함수 $f'(x)=4x(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $g(x)=|f'(x)|-f'(x)$이므로
함수
$$g(x)=\begin{cases}0 & (f'(x)\geq 0)\\ -2f'(x) & (f'(x)<0)\end{cases}$$
이고, 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$\displaystyle\int_0^{10}g(x)\,dx=-2\int_0^{\sqrt{5}}f'(x)\,dx$

$=-2\Big[f(x)\Big]_0^{\sqrt{5}}=-2\{f(\sqrt{5})-f(0)\}$

$=-2\times(-16-9)=50$

350. ④

$g'(x)=2x\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt-x^2f(x)+x^2f(x)$

$= 2x\int_0^x f(t)\,dt$

이고

$f(x) = (x+1)(x-1)(x-a)\ \ (a>1)$

이므로

$g'(x) = 0$을 만족시키는 x의 값의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 변하는 값이 오직 한 개만 존재해야 한다.

이때, $g'(x) = 0$을 만족시키는 x의 값은 $x=0$ 또는 방정식 $\int_0^x f(t)\,dt = 0$의 실근이다.

(i) $\int_0^\alpha f(t)\,dt = 0$을 만족시키는 실수 $\alpha(\alpha < -1)$가 반드시 존재하고, $x=\alpha$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호는 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x=\alpha$에서 극값을 갖는다.

(ii) $\int_0^0 f(t)\,dt = 0$이고,

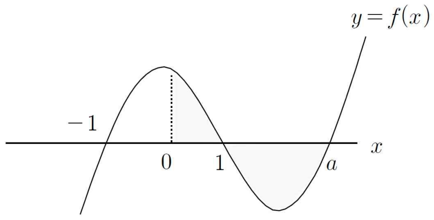
$-1 < x < 0$인 임의의 실수 x에 대하여 $\int_0^x f(t)\,dt < 0$,

$0 < x < 1$인 임의의 실수 x에 대하여 $\int_0^x f(t)\,dt > 0$이므로

$x=0$의 좌우에서 $\int_0^x f(t)\,dt$의 부호는 음에서 양으로 바뀐다.

따라서 $g'(x) = 2x\int_0^x f(t)\,dt$의 부호는 $x=0$의 좌우에서 항상 0 이상이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.

따라서 a가 최대가 되는 조건을 만족시키는 경우는 그림과 같이 색칠된 두 부분의 넓이가 같을 때이다.



즉, $\int_0^a f(x)\,dx = 0$이어야 하므로

$\int_0^a (x+1)(x-1)(x-a)\,dx$

$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{2}x^2 + ax\right]_0^a$

$= \frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{3}a^4 - \frac{1}{2}a^2 + a^2$

$= -\frac{a^4}{12} + \frac{a^2}{2} = 0$

$a^2 = 6$

즉, a의 최댓값은 $\sqrt{6}$이다.

351. ⑤

[출제의도] 다항함수의 미분과 정적분을 활용하여 주어진 명제의 참과 거짓을 판정할 수 있는가?

삼차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고

$f'(0) = f'(2) = 0$이므로

$f'(x) = 3x(x-2) = 3x^2 - 6x$

이다.

따라서

$f(x) = \int f'(x)dx$

$= x^3 - 3x^2 + C$ (C는 적분상수)

따라서

$f(x) - f(0) = x^3 - 3x^2$

이고

$f(x+p) - f(p) = (x+p)^3 - 3(x+p)^2 + C - (p^3 - 3p^2 + C)$

$= x^3 + (3p-3)x^2 + (3p^2 - 6p)x$

이므로

$$g(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 & (x \le 0) \\ x^3 + (3p-3)x^2 + (3p^2-6p)x & (x > 0) \end{cases}$$

이다.

ㄱ. $p=1$이면

$$g(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 & (x \le 0) \\ x^3 - 3x & (x > 0) \end{cases}$$

이므로

$$g'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x & (x < 0) \\ 3x^2 - 3 & (x > 0) \end{cases}$$

따라서 $g'(1) = 3 - 3 = 0$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to 0-} g(x) = \lim_{x\to 0+} g(x) = g(0) = 0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

이때

$\lim_{x\to 0-} g'(x) = \lim_{x\to 0-} (3x^2 - 6x) = 0$

$\lim_{x\to 0+} g'(x) = \lim_{x\to 0+} \{3x^2 + 2(3p-3)x + (3p^2 - 6p)\}$

$= 3p^2 - 6p$

이므로 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$3p^2 - 6p = 0$

이어야 한다.

따라서 양수 p의 값은 $p=2$뿐이므로 양수 p의 개수는 1이다. (참)

ㄷ. $\int_{-1}^0 g(x)\,dx = \int_{-1}^0 (x^3 - 3x^2)\,dx$

$= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3\right]_{-1}^0 = 0 - \left(\frac{1}{4}+1\right) = -\frac{5}{4}$

이고,

$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \{x^3 + (3p-3)x^2 + (3p^2-6p)x\}\,dx$

$= \left[\frac{1}{4}x^4 + (p-1)x^3 + \frac{3p^2-6p}{2}x^2\right]_0^1$

$= \frac{1}{4} + (p-1) + \frac{3p^2-6p}{2}$

$= \frac{3}{2}p^2 - 2p - \frac{3}{4}$

이므로

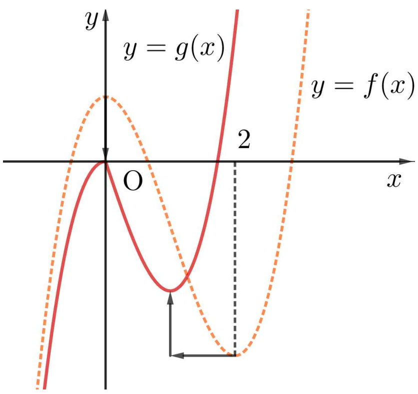
$$\int_{-1}^{1} g(x)\,dx = \int_{-1}^{0} g(x)\,dx + \int_{0}^{1} g(x)\,dx$$
$$= \left(-\frac{5}{4}\right) + \frac{3}{2}p^2 - 2p - \frac{3}{4}$$
$$= \frac{3}{2}p^2 - 2p - 2$$
$$= \frac{1}{2}(3p+2)(p-2)$$

따라서 $p \geq 2$일 때 $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx \geq 0$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

다른 풀이

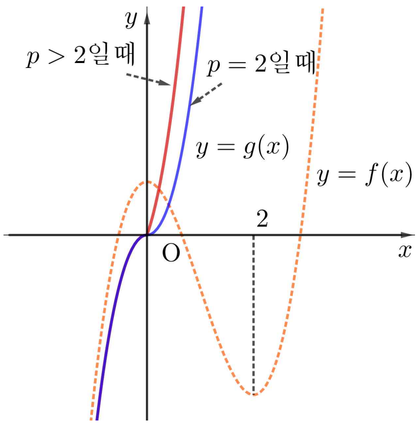
삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고
$f'(0) = f'(2) = 0$
이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 $x=2$에서 극소이다.
이때, 곡선 $y=f(x)-f(0)$은 곡선 $y=f(x)$를 y축의 방향으로 $-f(0)$만큼 평행이동한 것이고, 곡선 $y=f(x+p)-f(p)$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 $-p$만큼, y축의 방향으로 $-f(p)$만큼 평행이동한 것이다.
따라서 두 곡선 $y=f(x)-f(0)$, $y=f(x+p)-f(p)$는 모두 원점을 지나고 함수 $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. $p=1$일 때, 곡선 $y=f(x+1)-f(1)$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 $-f(1)$만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $g'(1)=0$이다. (참)

ㄴ. $\lim\limits_{x\to 0-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0+} g(x) = g(0) = 0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
이때
$\lim\limits_{x\to 0-} g'(x) = \lim\limits_{x\to 0-} (3x^2-6x) = 0$
이므로 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면
$\lim\limits_{x\to 0+} g'(x) = 0$
이어야 한다.
그런데 $f'(x)=0$인 양수 x의 값은 2뿐이므로 양수 p의 값은 2뿐이다.
따라서 양수 p의 개수는 1이다. (참)

ㄷ. $p \geq 2$일 때 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



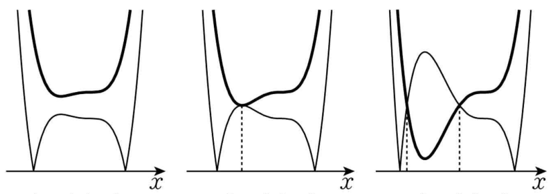
$p=2$일 때,
함수 $y=g(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로
$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = 0$$
$p>2$일 때, 모든 실수 x에 대하여
$f(x+p)-f(p) \geq f(x+2)-f(2)$
이므로
$$\int_{-1}^{1} g(x)dx \geq 0$$
따라서 $p \geq 2$일 때 $\int_{-1}^{1} g(x)dx \geq 0$ (참)

352. ⑤
[출제의도] 정적분으로 정의된 함수가 포함된 문제를 해결한다.
최고차항의 계수가 4이고 $f(0)=0$이므로
$f(x) = 4x^3 + ax^2 + bx$(a, b는 상수)라 하면
$f'(x) = 12x^2 + 2ax + b$에서 $f'(0)=0$이므로 $b=0$
즉, $f(x) = 4x^3 + ax^2$에서 $\int_0^x f(t)dt = x^4 + \frac{a}{3}x^3$이므로

$$g(x) = \begin{cases} x^4 + \frac{a}{3}x^3 + 5 & (x < c) \\ \left| x^4 + \frac{a}{3}x^3 - \frac{13}{3} \right| & (x \geq c) \end{cases}$$

곡선 $y = x^4 + \frac{a}{3}x^3 - \frac{13}{3}$은 곡선 $y = x^4 + \frac{a}{3}x^3 + 5$를 y축의 방향으로 $-\frac{28}{3}$만큼 평행이동한 것이다.

다음은 a의 값에 따른 곡선 $y = x^4 + \frac{a}{3}x^3 + 5$와 곡선 $y = \left| x^4 + \frac{a}{3}x^3 - \frac{13}{3} \right|$의 개형 중 c의 개수가 0, 1, 2인 경우이다.



[c의 개수가 0] [c의 개수가 1] [c의 개수가 2]

함수 $g(x)$가 연속이 되도록 하는 실수 c의 개수가 1이기 위해서는 함수 $y = x^4 + \frac{a}{3}x^3 + 5$ (→ ㉠)의 극솟값과

함수 $y=-\left(x^4+\frac{a}{3}x^3-\frac{13}{3}\right)$ ($\rightarrow$ ㉡)의 극댓값이 서로 같아야 한다.
㉠, ㉡의 함수의 도함수는 각각 $f(x)$, $-f(x)$이고
$f(x)=x^2(4x+a)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-\frac{a}{4}\ (a\neq 0)$
㉠, ㉡의 함수는 각각 $x=-\frac{a}{4}$에서 극값을 갖고 $c=-\frac{a}{4}$이다.
$\left(-\frac{a}{4}\right)^4+\frac{a}{3}\left(-\frac{a}{4}\right)^3+5=-\left\{\left(-\frac{a}{4}\right)^4+\frac{a}{3}\left(-\frac{a}{4}\right)^3-\frac{13}{3}\right\}$
이를 정리하여 풀면 $\begin{cases}a=4\\c=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}a=-4\\c=1\end{cases}$
그러므로 $a=4$일 때, $g(1)=\left|1+\frac{4}{3}-\frac{13}{3}\right|=2$,
$a=-4$일 때, $g(1)=\left|1-\frac{4}{3}-\frac{13}{3}\right|=\frac{14}{3}$
따라서 $g(1)$의 최댓값은 $\frac{14}{3}$

353. ②
$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt+f(x)$에서
$g'(x)=f(x)+f'(x)$,
$g(0)=\int_0^0 f(t)\,dt+f(0)=0+f(0)$,
$g'(0)=f(0)+f'(0)$
조건 (가)에 의해
$g(0)=f(0)=0$
$g'(0)=f(0)+f'(0)=0+f'(0)=0$이므로 $f'(0)=0$
그러므로 x^2은 $f(x)$의 인수이다.
$f(x)=x^2(x-k)$(단, k는 상수)라 하면
$g'(x)=x^3-kx^2+3x^2-2kx$
$=x^3+(3-k)x^2-2kx$
조건 (나)에 의해 모든 실수 x에 대하여
$g'(-x)=-g'(x)$가 성립한다.
즉, $-x^3+(3-k)x^2+2kx=-x^3-(3-k)x^2+2kx$,
$2(3-k)x^2=0$에서 $k=3$
그러므로 $f(x)=x^2(x-3)$
따라서 $f(2)=-4$
[다른 풀이]
$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라고 놓으면
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
조건 (가)에 의해 $f(0)=0$이므로 $c=0$,
$f'(0)=0$이므로 $b=0$
즉, $f(x)=x^3+ax^2$
$g'(x)=f(x)+f'(x)$
$=x^3+ax^2+3x^2+2ax$
$=x^3+(a+3)x^2+2ax$
조건 (나)에 의해 함수 $y=g'(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 x^2의 계수는 0이다. 즉, $a=-3$
따라서 $f(x)=x^3-3x^2$에서 $f(2)=8-12=-4$

354. ⑤
다항함수 $f(x)$에 대하여
$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$
(a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_n은 실수)라 하면
$f(-x)=a_n(-x)^n+a_{n-1}(-x)^{n-1}+\cdots+a_1(-x)+a_0$이고
k가 홀수인 경우 $\int_{-3}^3 x^k\,dx=0$이므로
$\int_{-3}^3 f(-x)\,dx=\int_{-3}^3 f(x)\,dx$
조건 (가)에 의하여
$f(x)+f(-x)=3x^2+ax+b$ (a, b는 상수)
이고 $f(x)+f(-x)$는 차수가 홀수인 항을 갖지 않으므로 $a=0$
조건 (나)에 의하여
$f(0)+f(0)=-2=b$
그러므로 $f(x)+f(-x)=3x^2-2$
$\int_{-3}^3\{f(x)+f(-x)\}dx$
$=\int_{-3}^3 f(x)\,dx+\int_{-3}^3 f(-x)\,dx$
$=2\int_{-3}^3 f(x)\,dx$
따라서 $\int_{-3}^3 f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-3}^3\{f(x)+f(-x)\}dx$
$=\frac{1}{2}\int_{-3}^3(3x^2-2)\,dx$
$=21$

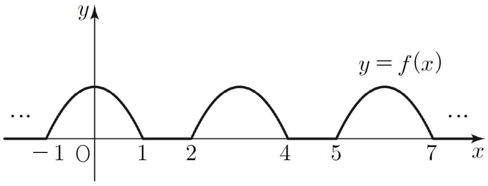
355. ②
점 P_n의 좌표를 $(a_n,\ b_n)$이라 하자.
$a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$이고
선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$과 직선 $x=a_n$, 직선 $x=a_{n+1}$ 및 x축과 둘러싸인 도형의 넓이 S_n은
$S_n=\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx$
$=\frac{1}{2}\times(a_{n+1}-a_n)\times(b_n+b_{n+1})$
$=b_n+b_{n+1}$
$a_1=1$, $a_6=11$이므로
$\int_1^{11} f(x)\,dx=\int_{a_1}^{a_6} f(x)\,dx$
$=S_1+S_2+S_3+S_4+S_5$
$=(b_1+b_2)+(b_2+b_3)+(b_3+b_4)$
$\quad+(b_4+b_5)+(b_5+b_6)$
조건 (다)에 의하여
직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 기울기는
$\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=\frac{1}{2}a_{n+1}$, $b_{n+1}=b_n+a_{n+1}$
$b_1=1=a_1$
$b_2=b_1+a_2=a_1+a_2=4$

$b_3 = b_2 + a_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 9$
$b_4 = b_3 + a_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 16$
$b_5 = b_4 + a_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 25$
$b_6 = b_5 + a_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 36$

따라서 $\int_1^{11} f(x)dx = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$

$= (1+4) + (4+9) + (9+16)$
$\quad + (16+25) + (25+36)$
$= 145$

356. 12
모든 실수 x에 대하여
$\{f(x)+x^2-1\}^2 \geq 0,\ f(x) \geq 0$이므로
정적분 $\int_{-1}^{2} \{f(x)+x^2-1\}^2 dx$의 값이 최소가 되기 위해서는
(ⅰ) $-1 \leq x \leq 1$에서
$x^2 - 1 \leq 0$이므로 $f(x) = -(x^2-1) = -x^2+1$
(ⅱ) $1 < x \leq 2$에서
$x^2 - 1 > 0$이므로 $f(x) = 0$
$f(x+3) = f(x)$이고, (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



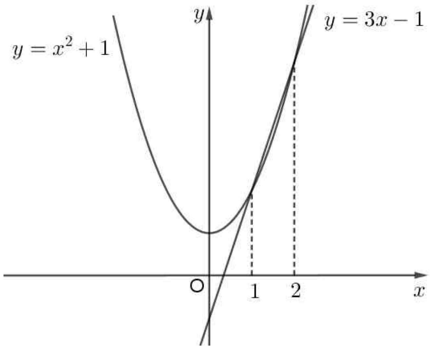
$\int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{2}^{5} f(x)dx = \int_{5}^{8} f(x)dx$

$= \cdots = \int_{23}^{26} f(x)dx$

따라서 $\int_{-1}^{26} f(x)dx = 9\int_{-1}^{2} f(x)dx$

$= 9\int_{-1}^{1} (-x^2+1)dx = 12$

357. ③
$x^2 + 3x = (x^2+1) + (3x-1)$
이고 두 함수 $y = x^2+1,\ y = 3x-1$의 교점의 x좌표는
$x^2 + 1 = 3x - 1,\ x^2 - 3x + 2 = 0$
$(x-1)(x-2) = 0$
$x = 1$ 또는 $x = 2$
이므로 두 함수의 그래프는 그림과 같다.



즉, $x \leq 1$또는 $x \geq 2$일 때
$x^2 + 1 \geq 3x - 1$
$1 < x < 2$일 때
$x^2 + 1 < 3x - 1$
이므로 조건 (가)를 만족시키는 함수
$f(x),\ g(x)$는 각각

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & (x \leq 1) \\ 3x-1 & (1 < x < 2) \\ x^2+1 & (x \geq 2) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 3x-1 & (x \leq 1) \\ x^2+1 & (1 < x < 2) \\ 3x-1 & (x \geq 2) \end{cases}$$

따라서

$\int_0^2 f(x)dx$

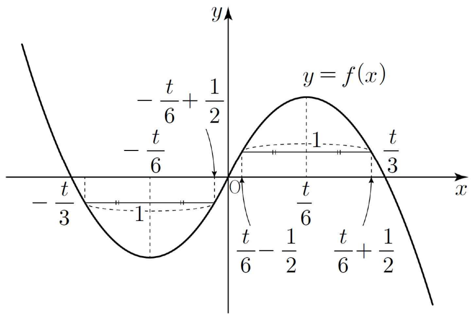
$= \int_0^1 (x^2+1)dx + \int_1^2 (3x-1)dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_0^1 + \left[\frac{3}{2}x^2 - x\right]_1^2$

$= \frac{4}{3} + \left(4 - \frac{1}{2}\right)$

$= \frac{29}{6}$

358. 37
함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고,
$x < 0$일 때, $f'(x) = 6x + t$,
$x > 0$일 때, $f'(x) = -6x + t$이므로
함수 $f(x)$는 $x = -\frac{t}{6}$에서 극소, $x = \frac{t}{6}$에서 극대이다.
$f(x) = 0$을 만족시키는 x의 값은
$x = -\frac{t}{3}$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = \frac{t}{3}$
$f_1(x) = 3x^2 + tx,\ f_2(x) = -3x^2 + tx$라 하자.
(ⅰ) $\frac{t}{3} \geq 1$인 경우 (즉, $t \geq 3$)



조건 (가)에서 닫힌구간 $[k-1,\ k]$의 길이는 k의 값에 관계없이 항상 1로 일정하다.

함수 $f_1(x)$의 그래프는 직선 $x=-\frac{t}{6}$에 대하여 대칭이므로

방정식 $f_1(k-1)=f_1(k)$를 만족시키는 k의 값은 $k=-\frac{t}{6}+\frac{1}{2}$

함수 $f_2(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{t}{6}$에 대하여 대칭이므로 방정식

$f_2(k-1)=f_2(k)$를 만족시키는 k의 값은 $k=\frac{t}{6}+\frac{1}{2}$

함수 $f(x)$는 $x=\frac{t}{6}$에서 극대이므로 조건 (가)를 만족시키는 k의 값의 범위는

$-\frac{t}{6}+\frac{1}{2}\le k\le\frac{t}{6}$ …… ㉠

조건 (나)에서 닫힌구간 $[k,\ k+1]$의 길이는 k의 값에 관계없이 항상 1로 일정하고 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{t}{6}$에서 극소이므로 조건 (나)를 만족시키는 $k+1$의 값의 범위는

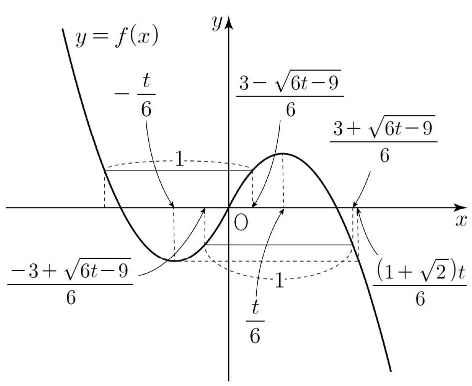
$k+1\le-\frac{t}{6}$ 또는 $k+1\ge\frac{t}{6}+\frac{1}{2}$

즉, $k\le-\frac{t}{6}-1$ 또는 $k\ge\frac{t}{6}-\frac{1}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $t\ge3$에서 조건 (가), (나)를 만족시키는 k의 값의 범위는

$\frac{t}{6}-\frac{1}{2}\le k\le\frac{t}{6}$이므로 $g(t)=\frac{t}{6}-\frac{1}{2}=\frac{t-3}{6}$

(ii) $\frac{t}{3}<1$인 경우 (즉, $6-3\sqrt{2}\le t<3$)



$f_1\left(-\frac{t}{6}\right)=3\times\left(-\frac{t}{6}\right)^2+t\left(-\frac{t}{6}\right)=-\frac{t^2}{12}$이므로

$f_2(x)=-\frac{t^2}{12}$을 만족시키는 양수 x의 값은 x에 대한 방정식

$-3x^2+tx=-\frac{t^2}{12}$의 양이 실근인 $x=\frac{(1+\sqrt{2})t}{6}$

$t\ge6-3\sqrt{2}$이므로

$$\frac{(1+\sqrt{2})t}{6}-\left(-\frac{t}{6}\right)$$
$$=\frac{(2+\sqrt{2})t}{6}\ge\frac{(2+\sqrt{2})(6-3\sqrt{2})}{6}=1$$

조건 (가)에서 닫힌구간 $[k-1,\ k]$의 길이는 k의 값에 관계없이 항상 1로 일정하다.

$6-3\sqrt{2}\le t<3$에서 방정식 $f_1(k-1)=f_2(k)$를 만족시키는 k의 값은 k에 대한 방정식 $3(k-1)^2+t(k-1)=-3k^2+tk$의 실근인

$k=\frac{3-\sqrt{6t-9}}{6}$ 또는 $k=\frac{3+\sqrt{6t-9}}{6}$

함수 $f(x)$는 $x=\frac{t}{6}$에서 극대이므로 조건 (가)를 만족시키는 k의 값의 범위는

$\frac{3-\sqrt{6t-9}}{6}\le k\le\frac{t}{6}$ …… ㉢

조건 (나)에서 닫힌구간 $[k,\ k+1]$의 길이는 k의 값에 관계없이 항상 1로 일정하고 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{t}{6}$에서 극소이므로 조건 (나)를 만족시키는 $k+1$의 값의 범위는

$k+1\le-\frac{t}{6}$ 또는 $k+1\ge\frac{3+\sqrt{6t-9}}{6}$

즉, $k\le-\frac{t}{6}-1$ 또는 $k\ge\frac{-3+\sqrt{6t-9}}{6}$ …… ㉣

㉢, ㉣에 의하여 $6-3\sqrt{2}\le t<3$에서 조건 (가), (나)를 만족시키는 k의 값의 범위는

$\frac{3-\sqrt{6t-9}}{6}\le k\le\frac{t}{6}$이므로

$g(t)=\frac{3-\sqrt{6t-9}}{6}$

(i), (ii)에 의하여

$$g(t)=\begin{cases}\frac{3-\sqrt{6t-9}}{6} & (6-3\sqrt{2}\le t<3)\\ \frac{t-3}{6} & (t\ge3)\end{cases}$$

따라서

$$3\int_2^4\{6g(t)-3\}^2dt$$
$$=3\int_2^3\left\{6\times\frac{3-\sqrt{6t-9}}{6}-3\right\}^2dt$$
$$+3\int_3^4\left\{6\times\left(\frac{t-3}{6}\right)-3\right\}^2dt$$
$$=3\int_2^3(6t-9)dt+3\int_3^4(t-6)^2dt$$
$$=18+19$$
$$=37$$

359. 35

조건 (가)에서

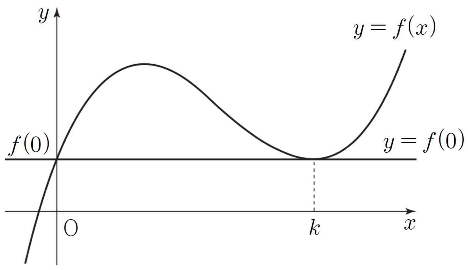
$g(k)=0$인 양수 k가 존재한다.

$g(k)=\dfrac{f(k)-f(0)}{k}=0$

$f(k)=f(0)$

조건 (가)에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프는

점 $(k,\ f(k))$에서 직선 $y=f(0)$과 접한다.



$f(x)=x(x-k)^2+f(0)$

$f'(x)=(x-k)^2+2x(x-k)$

$=(3x-k)(x-k)$ …… ㉠

$g(t)=\dfrac{f(t)-f(0)}{t}=\dfrac{t(t-k)^2}{t}=(t-k)^2$

조건 (나)에서 $f'(a)=g(a)$

$(3a-k)(a-k)=(a-k)^2$

$2a(a-k)=0$

$a>0$이므로 $a=k$

㉠에서 $f'(k)=0$이므로

$g(a)=0$ …… ㉡

조건 (나)에서 $f'\left(\dfrac{5}{3}\right)=g(a)$이고

㉡에서 $g(a)=0$이므로 $f'\left(\dfrac{5}{3}\right)=0$

㉠에서 $f'(x)=0$에서

$x=\dfrac{k}{3}$ 또는 $x=k$이므로

$\dfrac{k}{3}=\dfrac{5}{3}$ 또는 $k=\dfrac{5}{3}$

조건 (나)에서 $a>\dfrac{5}{3}$이므로 $k>\dfrac{5}{3}$

따라서 $k=5$

$f'(x)=(3x-5)(x-5)$

$g(t)=(t-5)^2$

이차방정식 $f'(x)=g(m)$에서

$3x^2-20x-m^2+10m=0$

이차방정식 $f'(x)-g(m)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-20)^2-4\times3\times(-m^2+10m)$

$=12(m-5)^2+100>0$

이므로 이차방정식 $f'(x)-g(m)=0$은

m의 값에 관계없이 서로 다른 두 실근을 갖는다.

서로 다른 두 실근을 c_1, $c_2(c_1<c_2)$라 하자.

$n(A_m)=2$이려면

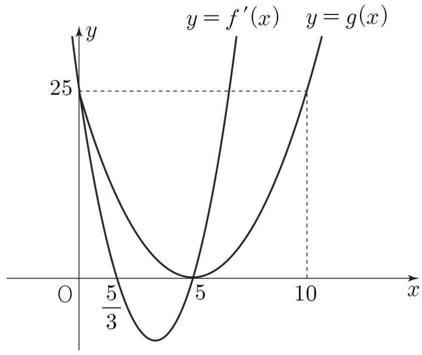
$0<c_1<c_2\le m$이어야 한다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$c_1c_2=\dfrac{-m^2+10m}{3}>0$

$0<m<10$

두 함수 $y=f'(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



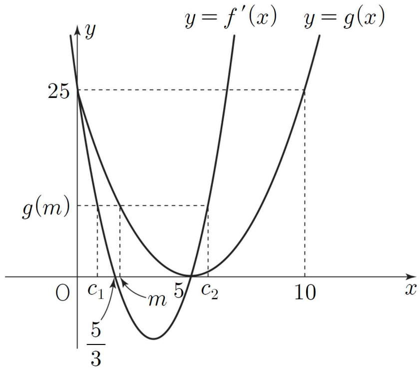
$g(m)=(m-5)^2\ge0$이므로

$f'(x)=g(m)$에서

$f'(x)=(3x-5)(x-5)\ge0$

$x\le\dfrac{5}{3}$ 또는 $x\ge5$

(i) $0<m<5$인 경우



$0<c_1<m<5<c_2$이므로

$A_m=\{c_1\}$

$n(A_m)\neq2$

(ii) $m=5$인 경우

$g(5)=0$이므로

$f'(x)=g(5)=0$

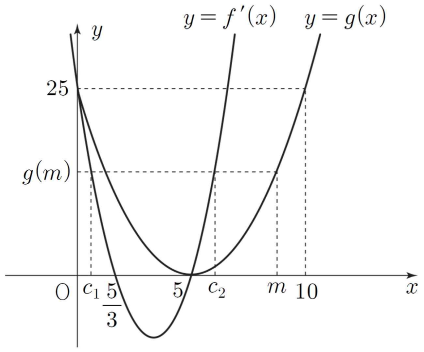
$(3x-5)(x-5)=0$

$x=\dfrac{5}{3}$ 또는 $x=5$

$A_5=\left\{\dfrac{5}{3},\ 5\right\}$

$n(A_5)=2$

(iii) $5<m<10$인 경우



$0 < c_1 < c_2 < m$이므로

$A_m = \{c_1,\ c_2\}$

$n(A_m) = 2$

(i), (ii), (iii)에 의해 $n(A_m)=2$를 만족시키는 자연수 m은

5, 6, 7, 8, 9

따라서 $5+6+7+8+9=35$

360. ⑤

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

함수 $f(x)$는 $x=k$에서 미분가능하다.

이때 함수 $f(x)$는 $x=k$에서 연속이므로

$f(k) = \lim_{x \to k-} f(x) = ak$

한편, 함수 $f(x)$가 $x=k$에서 미분가능하므로

$f'(k) = \lim_{x \to k-} \frac{f(x)-f(k)}{x-k} = \lim_{x \to k-} \frac{ax-ak}{x-k} = a$

ㄱ. $f'(k)=a$이고 $a=1$이므로 $f'(k)=1$이다. (참)

ㄴ. $g(x) = -x^2+4bx-3b^2$이라 하자.

직선 $y=ax$는 원점에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 기울기가 양수인 접선 중 하나이고,

접점의 좌표는 $(k,\ g(k))$이다.

$g'(x) = -2x+4b$이므로 곡선 $y=g(x)$위의 점 $(k,\ g(k))$에서의 접선의 방정식은

$y-(-k^2+4bk-3b^2) = (-2k+4b)(x-k)$

이 직선이 원점을 지나므로

$0-(-k^2+4bk-3b^2) = (-2k+4b)(0-k)$

$k^2-3b^2=0$

$k>0,\ b>0$이므로 $k=\sqrt{3}b$

$k=3$이므로 $b=\sqrt{3}$이고

$a = g'(k) = -2k+4b = (4-2\sqrt{3})b$

$= -6+4\sqrt{3}$ (참)

ㄷ. ㄴ에서

$$f(x) = \begin{cases} (4-2\sqrt{3})bx & (x < \sqrt{3}b) \\ -x^2+4bx-3b^2 & (x \ge \sqrt{3}b) \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} (4-2\sqrt{3})b & (x < \sqrt{3}b) \\ -2x+4b & (x \ge \sqrt{3}b) \end{cases}$$

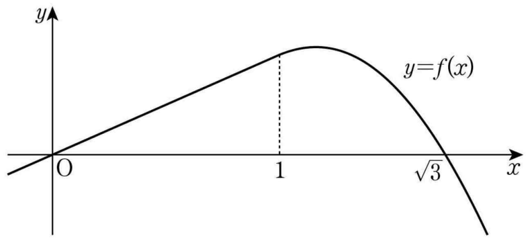
$f(k)=f'(k)$에서 $f(\sqrt{3}b) = f'(\sqrt{3}b)$이므로

$-3b^2+4\sqrt{3}b^2-3b^2 = -2\sqrt{3}b+4b$

따라서 $b=\frac{\sqrt{3}}{3}$이고

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4\sqrt{3}-6}{3}x & (x<1) \\ -x^2+\frac{4\sqrt{3}}{3}x-1 & (x \ge 1) \end{cases}$$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축은 $x=0$, $x=\sqrt{3}$에서 만나므로

구하는 넓이는

$$\int_0^{\sqrt{3}} f(x)dx$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{4\sqrt{3}-6}{3} + \int_1^{\sqrt{3}} \left(-x^2+\frac{4\sqrt{3}}{3}x-1\right)dx$$

$$= \frac{2\sqrt{3}-3}{3} + \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2-x\right]_1^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}-3}{3} + \frac{4-2\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3} \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

361. ②

$f'(x) = 3x^2-12x+8$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $B(k,\ f(k))$에서의 접선의 방정식은

$y-(k^3-6k^2+8k+1) = (3k^2-12k+8)(x-k)$

이 직선이 점 $A(0,\ 1)$을 지나므로

$2k^3-6k^2 = 2k^2(k-3) = 0$

에서 $k>0$이므로 $k=3$이고 직선 AB의 방정식은 $y=-x+1$

$$S_1 = \int_0^3 |f(x)-(-x+1)|dx$$

$$= \int_0^3 \{f(x)+x-1\}dx$$

$$S_2 = \int_0^3 |g(x)-(-x+1)|dx$$

$$= \int_0^3 \{-g(x)-x+1\}dx$$

$S_1 = S_2$에서

$$\int_0^3 \{f(x)+x-1\}dx = \int_0^3 \{-g(x)-x+1\}dx$$

$$\int_0^3 g(x)dx = \int_0^3 \{-f(x)-2x+2\}dx$$

$$= \int_0^3 (-x^3+6x^2-10x+1)dx$$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^3-5x^2+1\right]_0^3$

$=-\frac{81}{4}+54-45+3=-\frac{33}{4}$

362. 54

$f(x)=|x^2-3|-2x$

$=\begin{cases} x^2-2x-3 & (x \le -\sqrt{3} \text{ 또는 } x \ge \sqrt{3}) \\ -x^2-2x+3 & (-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}) \end{cases}$

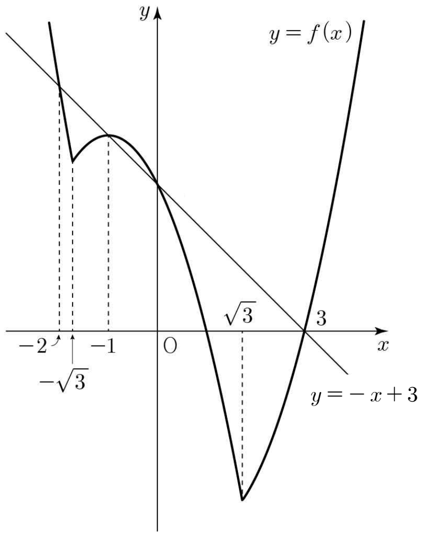
x_1, x_4는 이차방정식 $x^2-2x-3=-x+t$의
두 근이므로 근과 계수와의 관계에 의하여

$x_1+x_4=1$, $x_1x_4=-t-3$

$x_4-x_1=5$이므로 $x_1=-2$, $x_4=3$

$x_1x_4=-t-3=-6$, $t=3$

x_2, x_3은 이차방정식 $-x^2-2x+3=-x+3$의
두 근이므로 $x_2=-1$, $x_3=0$



닫힌구간 $[0, 3]$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로
둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_0^3 |f(x)-g(x)|dx$

$=\int_0^{\sqrt{3}} \{(-x+3)-(-x^2-2x+3)\}dx$

$+\int_{\sqrt{3}}^3 \{(-x+3)-(x^2-2x-3)\}dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{3}}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x\right]_{\sqrt{3}}^3$

$=\frac{27}{2}-4\sqrt{3}$

따라서 $p\times q=\frac{27}{2}\times 4=54$

363. ③

[출제의도] 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.
구하고자 하는 도형의 넓이를 S라 하면

$S=\int_0^2 |f(x)-g(x)|dx$

$=\int_0^2 \{g(x)-f(x)\}dx$

$g(x)-f(x)$는 최고차항의 계수가 3이고
삼차방정식 $g(x)-f(x)=0$은 한 실근 0과 중근 2를 가지므로
$g(x)-f(x)=3x(x-2)^2$

따라서 $S=\int_0^2 3x(x-2)^2dx$

$=\int_0^2 (3x^3-12x^2+12x)dx$

$=\left[\frac{3}{4}x^4-4x^3+6x^2\right]_0^2$

$=12-32+24=4$

364. 2

[출제의도] 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.
$f(1-x)=-f(1+x)$에 $x=0$, $x=1$을 각각 대입하면
$f(1)=-f(1)$에서 $f(1)=0$,
$f(0)=-f(2)$에서 $f(2)=0$
삼차함수 $f(x)$는 $f(0)=f(1)=f(2)=0$이고 최고차항의 계수가
1이므로 $f(x)=x(x-1)(x-2)$
방정식 $f(x)=-6x^2$에서 $x^3+3x^2+2x=0$이므로
$x(x+1)(x+2)=0$, $x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=-2$
$-2\le x\le -1$에서 $x^3+3x^2+2x\ge 0$이고
$-1\le x\le 0$에서 $x^3+3x^2+2x\le 0$이므로

$S=\int_{-2}^0 |x^3+3x^2+2x|dx$

$=\int_{-2}^{-1}(x^3+3x^2+2x)dx+\int_{-1}^0\{-(x^3+3x^2+2x)\}dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+x^3+x^2\right]_{-2}^{-1}+\left[-\frac{1}{4}x^4-x^3-x^2\right]_{-1}^0=\frac{1}{2}$

따라서 $4S=2$

365. ②

[출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기
함수 $f(x)=(x-a)(x-b)$에 대하여
곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_a^b |f(x)|dx=-\int_a^b f(x)dx$

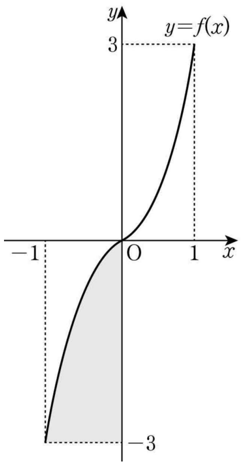
$=-\left(\int_0^b f(x)dx-\int_0^a f(x)dx\right)$

$=-\left(-\frac{8}{3}-\frac{11}{6}\right)$

$=\frac{9}{2}$

366. 41

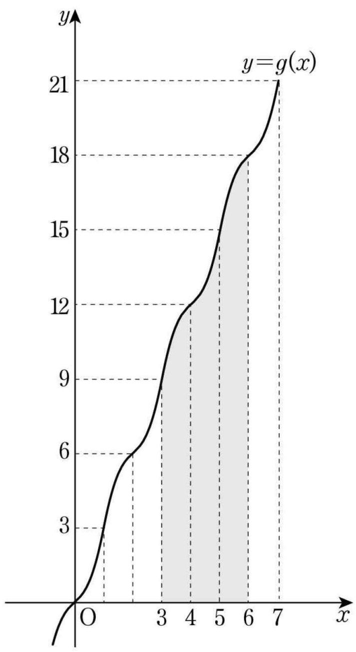
문제에서 $\int_0^1 f(x)dx=1$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에
대하여 대칭이다.



그러므로 그림에서 색칠된 영역의 넓이는 $3-1=2$

닫힌구간 $[3,\ 6]$에서 $\int_3^6 g(x)dx=\int_3^6 |g(x)|dx$는

곡선 $y=g(x)$와 x축 및 두 직선 $x=3,\ x=6$으로 둘러싸인 도형의 넓이이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 구하는 영역을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



닫힌구간 $[3,\ 5]$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동하고 y축의 방향으로 12만큼 평행이동한 그래프이므로 $\int_3^5 g(x)dx=2\times 12=24$

닫힌구간 $[5,\ 7]$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 6만큼 평행이동하고 y축의 방향으로 18만큼 평행이동한 그래프이므로 $\int_5^6 g(x)dx=15\times 1+2=17$

따라서 $\int_3^6 g(x)dx=\int_3^5 g(x)dx+\int_5^6 g(x)dx=41$

367. ②

$g'(x)=f(x)-\{f(x)+xf'(x)\}=-xf'(x)$

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 4이므로 $f'(x)$는 이차항의 계수가 12인 이차함수이다.

그러므로 $g'(x)=-xf'(x)$에서 $g'(x)$는 최고차항의 계수가 -12인 삼차함수이다.

또, 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\le g(3)$이므로 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 최댓값을 가지고 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 극값을 가진다. 즉, $g'(3)=0$

그러므로 $f'(3)=0$에서 $g'(x)=-12x(x-3)(x-a)$

사차함수 $g(x)$가 오직 1개의 극값을 가지므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극값을 가질 수 없다. 즉, $a=0$

$g'(x)=-12x^2(x-3)=-12x^3+36x^2$

따라서 $\int_0^1 g'(x)\,dx=\left[-3x^4+12x^3\right]_0^1=9$

368. 80

$g(x)=\int_0^x (t-1)f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$g'(x)=(x-1)f(x)=\begin{cases}-3x^3+3x^2 & (x<1)\\ 2x^2-8x+6 & (x\ge 1)\end{cases}$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 적분하면

$$g(x)=\begin{cases}-\dfrac{3}{4}x^4+x^3+C_1 & (x<1)\\ \dfrac{2}{3}x^3-4x^2+6x+C_2 & (x\ge 1)\end{cases}$$ (단, C_1, C_2는 적분상수)

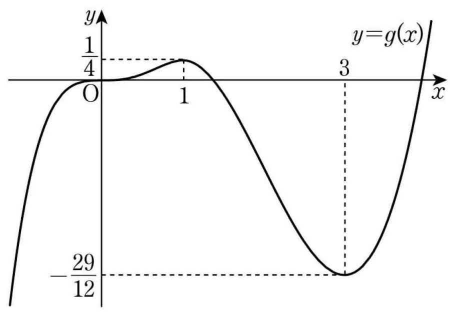
$g'(1)=0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$g(0)=0$에서 $C_1=0$이고 $-\dfrac{3}{4}+1=\dfrac{2}{3}-4+6+C_2$에서

$C_2=-\dfrac{29}{12}$

$$g(x)=\begin{cases}-\dfrac{3}{4}x^4+x^3 & (x<1)\\ \dfrac{2}{3}x^3-4x^2+6x-\dfrac{29}{12} & (x\ge 1)\end{cases}$$

함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



위의 그래프를 이용하여 함수 $h(t)$를 구하면

$$h(t)=\begin{cases}1 & \left(t<-\dfrac{29}{12}\ \text{또는}\ t>\dfrac{1}{4}\right)\\ 2 & \left(t=-\dfrac{29}{12}\ \text{또는}\ t=\dfrac{1}{4}\right)\\ 3 & \left(-\dfrac{29}{12}<t<\dfrac{1}{4}\right)\end{cases}$$

이므로 $\left|\lim_{t\to a+}h(t)-\lim_{t\to a-}h(t)\right|=2$를 만족시키는 실수 a의 값은 $\dfrac{1}{4}$과 $-\dfrac{29}{12}$뿐이다.

그러므로 $S=\left|\frac{1}{4}\right|+\left|-\frac{29}{12}\right|=\frac{8}{3}$

따라서 $30S=30\times\frac{8}{3}=80$

참고 $g(x)=\int_0^x (t-1)f(t)dt$는 다음과 같이 구할 수도 있다.

(ⅰ) $x<1$일 때,

$g(x)=\int_0^x (t-1)(-3t^2)dt=-\frac{3}{4}x^4+x^3$

(ⅱ) $x\geq 1$일 때,

$g(x)=\int_0^1 (t-1)(-3t^2)dt+\int_1^x 2(t-1)(t-3)dt$

$=\frac{2}{3}x^3-4x^2+6x-\frac{29}{12}$

369. ③

두 이차함수가 둘러싸인 부분의 넓이는 제 4 사분면에 존재한다. 그러므로

두 이차함수를 x축으로 대칭 이동하여 정적분으로 넓이를 구한다.

$y=-f(x-1)-1=-(x-1)^2+2(x-1)=-x^2+4x-4$

$y=x^2-2x$ 와 교점은 $(2,0),(1,-1)$이다. 두 그래프를 x축으로 대칭이

이동하여 정적분을 구하면

$\int_1^2(-x^2+2x)-(x^2-4x+4)dx=\int_1^2(-2x^2+6x-4)dx$

$\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2-4x\right]_1^2=-\frac{4}{3}+\frac{5}{3}=\frac{1}{3}$

370. 40

$b=\frac{a^3}{2}$, $S_1=S_2$이므로

$\int_0^1 \frac{1}{2}x^3dx=\int_1^a\left(\frac{a^3}{2}-\frac{1}{2}x^3\right)dx$

$\left[\frac{1}{8}x^4\right]_0^1=\left[\frac{a^3}{2}x-\frac{1}{8}x^4\right]_1^a$

$a^3(3a-4)=0$, $a>1$이므로 $a=\frac{4}{3}$

따라서 $30a=30\times\frac{4}{3}=40$

371. 80

모든 실수 t에 대해서 $|f'(t)|\geq 0$이고,

$g(a)=\int_0^a |f'(t)|dt=-8<0$이므로 $a<0$

$x\geq -3$에서 $|f'(x)|\geq 0$이므로

함수 $g(x)=\int_0^x |f'(t)|dt$ 는 증가한다.

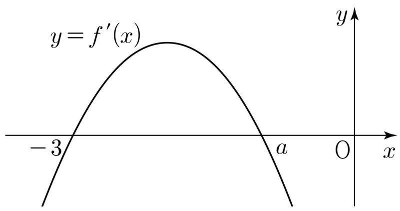
삼차함수 $f(x)$는

$x=-3$과 $x=a\ (a>-3)$에서 극값을 가지므로 $f(x)$의

최고차항의 계수가 양수이면 $x<-3$에서 $f(x)$는 증가한다.

이때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하므로 극솟값을 갖지 않는다.

따라서 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 음수이다.



(ⅰ) $x<-3$일 때, $g(x)=f(x)$

(ⅱ) $-3\leq x<a$일 때,

$g(x)=\int_0^a\{-f'(t)\}dt+\int_a^x f'(t)dt$

$=f(x)+f(0)-2f(a)$

(ⅲ) $x\geq a$일 때,

$g(x)=\int_0^x\{-f'(t)\}dt=-f(x)+f(0)$

함수 $g(x)$는 $x=-3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-3-}g(x)=\lim_{x\to-3-}f(x)=f(-3)$

$\lim_{x\to-3+}g(x)=\lim_{x\to-3+}\{f(x)+f(0)-2f(a)\}=f(-3)+f(0)-2f(a)$

$f(-3)=f(-3)+f(0)-2f(a)$

$f(0)=2f(a)$ ······ ㉠

$g(a)=-f(a)+f(0)=-8$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $f(0)=-16$, $f(a)=-8$

$f'(x)=k(x+3)(x-a)$

$=k\{x^2+(3-a)x-3a\}$ $(k<0)$이라 하면

$f(x)=k\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{3-a}{2}x^2-3ax\right)-16$

$g(-3)=f(-3)=\frac{9}{2}k(a+1)-16=-16$

$k\neq 0$이므로 $a=-1$

$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-1) \\ -f(x)-16 & (x\geq -1)\end{cases}$

$\int_a^4\{f(x)+g(x)\}dx$

$=\int_{-1}^4\{f(x)+(-f(x)-16)\}dx$

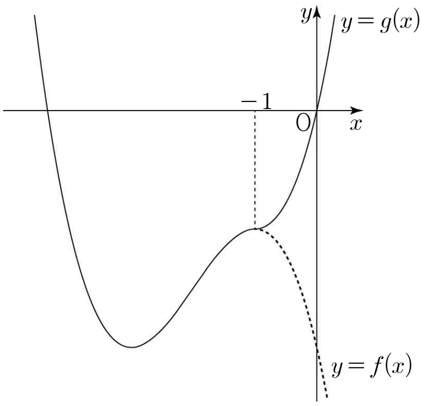
$=\int_{-1}^4(-16)dx=-16\times5=-80$

따라서 $\left|\int_a^4\{f(x)+g(x)\}dx\right|=80$

(참고)

$f(x)=-2x^3-12x^2-18x-16$

함수 $g(x)$의 그래프의 개형



372. 340

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$는 조건 (나)에서 $f(0)=0$, $f'(0)=0$이므로 $f(x)=x^2$

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$는 조건 (가), (나)에서 $g(0)=0$, $g(a)=0$, $g'(a)=0$이므로 $g(x)=x(x-a)^2$

$$\int_0^a \{g(x)-f(x)\}dx=\int_0^a \{x^3-(2a+1)x^2+a^2x\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2a+1}{3}x^3+\frac{a^2}{2}x^2\right]_0^a$$

$$=\frac{1}{12}a^4-\frac{1}{3}a^3=36$$

그러므로 $(a-6)(a^3+2a^2+12a+72)=0$

$a>0$이므로 $a=6$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점을 구하면 $(0, 0)$, $(4, 16)$, $(9, 81)$

$$\int_0^6 |f(x)-g(x)|dx=\int_0^4 \{g(x)-f(x)\}dx+\int_4^6 \{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{13}{3}x^3+18x^2\right]_0^4+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{13}{3}x^3-18x^2\right]_4^6$$

$$=\frac{340}{3}$$

따라서 $3\int_0^a |f(x)-g(x)|dx=340$

373. ③

점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 가속도를 $a(t)$라 하면

$v(t)=-4t^3+12t^2$

이므로

$a(t)=v'(t)=-12t^2+24t$

시각 $t=k$에서 점 P의 가속도가 12이므로

$-12k^2+24k=12$

$k^2-2k+1=0$

$(k-1)^2=0$

$k=1$

한편, $v(t)=-4t^3+12t^2=-4t^2(t-3)$이므로 $3\le t\le 4$일 때 $v(t)\le 0$이다.

따라서 $t=3$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_3^4 |v(t)|dt=\int_3^4 \left|-4t^3+12t^2\right|dt$$

$$=\int_3^4 (4t^3-12t^2)dt$$

$$=\left[t^4-4t^3\right]_3^4$$

$$=0-(-27)=27$$

374. ③

점 P의 시각 $t=1$에서의 위치와

점 P의 시각 $t=k$ $(k>1)$에서의 위치가 서로 같으므로

시각 $t=1$에서 $t=k$까지 점 P의 위치의 변화량은 0이다.

$$\int_1^k v(t)dt=\int_1^k (4t-10)dt$$

$$=\left[2t^2-10t\right]_1^k$$

$$=(2k^2-10k)-(2-10)$$

$$=2k^2-10k+8$$

$$=2(k-1)(k-4)=0$$

따라서 $k=4$