

[객관식]

1. 곡선  $y = -x^3 + 4x$  위의 점  $(1, 3)$ 에서의 접선의 방정식은

$y = mx + n$ 이다.  $10m + n$ 의 값은?

- ① 12                      ② 10                      ③ 8  
④ 6                      ⑤ 4

2. 다음 식을 만족시킬 때,  $p + q + r$ 의 값은?

(단,  $p, q, r$ 는 상수이고,  $C$ 는 적분상수이다.)

$$\int (3x-4)^2 dx + \int (3x+4)^2 dx = px^3 + qx^2 + rx + C$$

- ① 22  
② 26  
③ 30  
④ 34  
⑤ 38

3. 모든 실수  $x$ 에 대하여 부등식  $x^4 - 4x^2 - a > 0$ 가 항상

성립하도록 하는 정수  $a$ 의 최댓값은?

- ① -6                      ② -5                      ③ -4  
④ -2                      ⑤ -1

4. 다항함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에서

$$\int_{-2}^x f(t) dt = x^3 - ax^2 + a$$

를 만족시킬 때,  $f(-3)$ 의 값은? (단,  $a$ 는 상수)

- ① 10                      ② 11                      ③ 12  
④ 13                      ⑤ 14

5. 좌표가  $-3$ 인 점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점  $P$ 의  
시각  $t$ 에서의 속도가  $v(t) = 20 - 4t$ 일 때, 점  $P$ 가 움직이는 방향이  
바뀌는 시각에서의 점  $P$ 의 위치는?

- ① 41                      ② 43                      ③ 45  
④ 47                      ⑤ 50

6. 두 다항함수  $f(x), g(x)$ 가

$$\int f(x) dx = xg(x), \quad \frac{d}{dx} \left( \int \{f(x) + 2g(x)\} dx \right) = 5x^2 + 8x - 6$$

를 만족시킬 때,  $g(3)$ 의 값은?

- ① 11                      ② 13                      ③ 15  
④ 17                      ⑤ 19

7. 곡선  $y = \frac{1}{2}x^2 + x$  위의 점 P와 두 점 A(0, -1), B(1, 0)에

대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최솟값은?

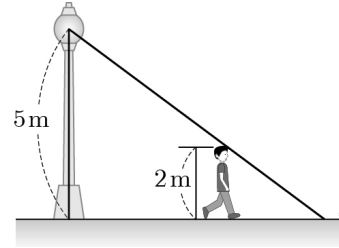
- ①  $\frac{1}{8}$       ②  $\frac{1}{4}$       ③  $\frac{1}{2}$   
④ 1      ⑤  $\frac{3}{2}$

8. 방정식  $|2x^3 - 3x^2 - 12x + 1| = k$ 가 서로 다른 네 실근을 갖도록

하는 정수 k의 개수는?

- ① 8      ② 9      ③ 10  
④ 11      ⑤ 12

9. 키가 2m인 선운이가 지면으로 부터의 높이가 5m인 가로등 바로 밑에서 출발하여 일직선으로 초속 1.2m의 속도로 걸어가고 있을 때, 선운이의 그림자의 끝이 움직이는 속도는?



- ① 1m/초      ② 2m/초      ③ 3m/초  
④ 4m/초      ⑤ 5m/초

10. 최고차항의 계수가 1인 두 사차함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 함수  $y = f(x)$ 와  $y = g(x)$ 의 그래프가 만나는 세 점의 x좌표는 각각 -1, 0, 1이다.

(나)  $\int_0^4 f(x)dx = 80$ ,  $\int_0^4 g(x)dx = -16$

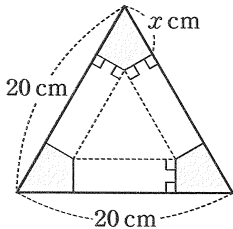
$f(2) - g(2)$ 의 값은?

- ① 4      ② 6      ③ 8  
④ 10      ⑤ 12

11. 다항함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시킨다.  $\int_{-2}^2 (x-3)f'(x)dx = 18$ 일 때,  $f(-2)$ 의 값은?

- ① -3                      ② -1                      ③ 0  
④ 1                        ⑤ 3

12. 한 변의 길이가 20cm인 정삼각형 모양의 종이에 세 모퉁이에서 합동인 사각형 모양의 종이를 다음 그림과 같이 잘라내고 남은 부분을 접어서 뚜껑이 없는 상자를 만들 때, 그 부피가 최대가 되는  $x$ 의 값은? (단, 단위는  $\text{cm}^3$ )



- ①  $\frac{5}{3}$                       ②  $\frac{10}{3}$                       ③ 4  
④  $\frac{11}{2}$                       ⑤ 8

13. 두 다항함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다. 곡선  $y = g(x)$  위의 점  $(2, g(2))$ 에서의 접선의 방정식이  $y = ax + b$ 일 때,  $a + b$ 의 값은? (단,  $a$ ,  $b$ 는 상수이다.)

(가)  $g(x) = x^2 f(x) - 3$

(나)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - g(x)}{x - 2} = 5$

- ① 5                      ② 6                      ③ 7  
④ 8                      ⑤ 9

14. 함수  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 30$ 이  $x = 1$ 에서 극댓값 7을 갖는다. 함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[c, d]$ 에서 감소하고,  $c$ 의 최솟값을  $\alpha$ ,  $d$ 의 최댓값을  $\beta$ 하고 할 때,  $a + b + \alpha + \beta$ 의 값은? (단,  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ 는 상수이다.)

- ① 11                      ② 9                      ③ 7  
④ 5                      ⑤ 3

15. 자연수  $k$ 에 대하여 함수  $f(x) = x^2$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로  $k$ 만큼  $y$ 축의 방향으로  $k^2$ 만큼 평행이동한 그래프를  $y = g_k(x)$ 라 하자. 이때,  $\sum_{k=1}^{20} \left( \int_{k+1}^{k+2} g_{k+1}(x) dx - \int_k^{k+1} g_k(x) dx \right)$ 의 값은?
- ① 400      ② 420      ③ 440      ④ 460      ⑤ 480

16. 수열  $\{a_n\}$ 이

$$a_n = 2 - \frac{1}{2^{n-2}}$$

일 때, 구간  $[0, 2)$ 에서 정의된 함수  $f(x)$ 가 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$f(x) = (-2)^{n-1} \left( x - \frac{a_n + a_{n+1}}{2} \right) \quad (a_n \leq x \leq a_{n+1})$$

이다.  $t$ 에 대한 방정식  $\int_0^t f(x) dx = p$ 의 서로 다른 실근의 개수가

11이 되도록 하는 모든 상수  $p$ 의 값의 합은?

- ①  $-\frac{1}{2^{12}}$       ②  $\frac{1}{2^{13}}$       ③  $-\frac{1}{2^{14}}$
- ④  $\frac{1}{2^{15}}$       ⑤  $-\frac{1}{2^{16}}$

[주관식]

17. 다음 물음에 답하시오.

(1)  $\int_0^3 (2x+1)^2 dx - \int_{-1}^3 (2x-1)^2 dx + \int_{-1}^0 (2x-1)^2 dx$ 의 값을 구하시오.

(2) 곡선  $y = x(x-a)(x-2)$ 와  $x$ 축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 최소가 되도록 하는 상수  $a$ 의 값을 구하시오. (단,  $0 < a < 2$ )

18. 함수  $f(x) = -2x^3 + kx^2 + 4k^2x - 2$ 가  $-1 < x < 1$ 인  $x$ 의 값에서 극솟값을 갖고,  $x > 1$ 인  $x$ 의 값에서 극댓값을 갖도록 하는 실수  $k$ 의 값의 범위를 구하시오.

19. 최고차항의 계수가 1인 사차함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, 실수  $k$ 의 값을 구하시오.

(가)  $f'(0) = 0$ ,  $f'(2) = 16$ ,  $f(1) = \frac{5}{3}$

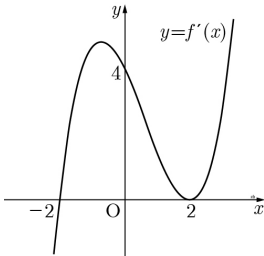
(나) 어떤 양수  $m$ 에 대하여 두 열린구간  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, m)$ 에서  $f'(x) < 0$ 이다.

(다) 방정식  $|f(x) - f(0)| = k$ 를 만족시키는 서로 다른 실근의 개수가 3이다.

21. 두 삼차함수  $f(x)$ 와  $g(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여

$f(x)g(x) = (x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$ 을 만족시킨다.  $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 3이고  $g(x)$ 가  $x=2$ 에서 극댓값을 가질 때,  $f'(7)$ 의 값은? ( $f'(x)$ 는  $f(x)$ 의 도함수이다.) [5.0점]

20. 사차함수  $f(x)$ 의 도함수  $y = f'(x)$ 의 그래프가 다음의 그림과 같고  $f'(-2) = f'(2) = 0$ ,  $f'(0) = 4$ 이다. 함수  $f(x)$ 의 극솟값이  $-5$ 일 때,  $f(m)f(m+1) < 0$ 을 만족시키는 모든 정수  $m$ 의 값을 구하시오.



정답 및 풀이

1. 정답 ①

$$y = -x^3 + 4x \text{에서 } y' = -3x^2 + 4$$

이때  $x = 1$ 일 때, 접선의 기울기는  $-3 + 4 = 1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 3 = 1(x - 1) \quad \therefore y = x + 2$$

따라서  $m = 1, n = 2$ 이므로

$$10m + n = 10 + 2 = 12$$

2. 정답 ⑤

$$\int (9x^2 - 24x + 16)dx + \int (9x^2 + 24x + 16)dx$$

$$= \int (18x^2 + 32)dx = 6x^3 + 32x + C$$

$$p = 6, q = 0, r = 32 \quad \therefore p + q + r = 38$$

3. 정답 ②

$$f(x) = x^4 - 4x^2 - a \text{라고 하면}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -\sqrt{2}, x = 0, x = \sqrt{2}$$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	...	$-\sqrt{2}$	...	0	...	$\sqrt{2}$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

$$f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = -4 - a$$

함수  $f(x)$ 의 최솟값이  $-4 - a$ 이므로

모든 실수  $x$ 에서  $f(x) > 0$ 이 성립하려면  $-4 - a > 0$ 이어야 한다.

즉,  $a < -4$

$\therefore$  정수  $a$ 의 최댓값은  $-5$ 이다.

4. 정답 ②

$$\int_{-2}^x f(t)dt = x^3 - ax^2 + a$$

양변에  $x = -2$ 를 대입하면

$$0 = -8 - 4a + a, 3a = -8$$

위 식을  $x$ 에 대해 미분하면

$$f(x) = 3x^2 - 2ax$$

$$f(-3) = 27 + 6a = 27 - 16 = 11$$

5. 정답 ④

$$v(t) = 0 \text{에서 } t = 5$$

$\therefore t = 5$ 일 때 점 P의 위치는

$$-3 + \int_0^5 v(t)dt = -3 + [20t - 2t^2]_0^5 = 47$$

6. 정답 ②

$\int f(x)dx = xg(x)$ 의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$f(x) = g(x) + xg'(x) \quad \dots\dots ㉠$$

$f(x) + 2g(x) = 5x^2 + 8x - 6$ 에 ㉠을 대입하면

$$3g(x) + xg'(x) = 5x^2 + 8x - 6 \quad \dots\dots ㉡$$

함수  $g(x)$ 는 이차함수이므로

$$g(x) = ax^2 + bx + c \text{라고 하면 } g'(x) = 2ax + b$$

이를 ㉡에 대입하면

$$5ax^2 + 4bx + 3c = 5x^2 + 8x - 6$$

$$a = 1, b = 2, c = -2$$

$$g(x) = x^2 + 2x - 2 \quad \therefore g(3) = 13$$

7. 정답 ③

삼각형 PAB의 넓이는 점 P에서의 접선의 기울기가 직선 AB와 같아질 때 최소이다.

직선 AB는  $y = x - 1$ 이므로 점 P의  $x$ 좌표를  $c$ 라 할 때,

$$c + 1 = 1 \text{에서 } c = 0 \text{ 즉, } P(0, 0)$$

$$\therefore \text{구하는 넓이의 최솟값은 } \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

8. 정답 ③

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10 \text{이라 하면}$$

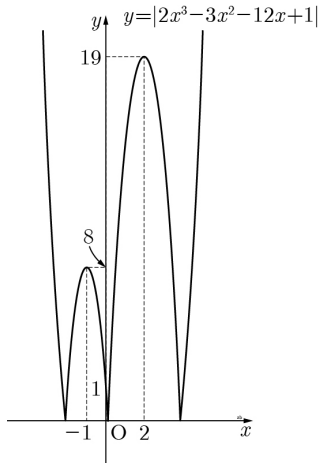
$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x - 2)(x + 1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 2 \text{ 또는 } x = -1$$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내고

$y = f(x)$ 의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.

$x$	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	8	$\searrow$	-19	$\nearrow$

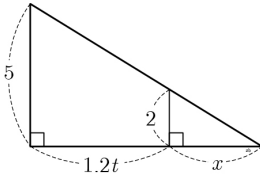


방정식  $|f(x)| = k$ 가 서로 다른 4개의 실근을 갖기 위한  $k$ 의 값의 범위는  $8 < k < 19$ 이다.

$\therefore$  정수  $k$ 의 개수는 10이다.

9. 정답 ②

선운이의 그림자의 길이를  $x$ 라 하자.



$t$ 초 동안 선운이가 움직인 거리는  $1.2t$ m이므로 다음의 비례식이 성립한다.

$$5 : (1.2t + x) = 2 : x, \quad x = 0.8t$$

따라서 시각  $t$ 에서의 가로등으로부터 그림자 끝까지의 거리는  $2t$ (m)이므로 속도는 2m/초이다.

10. 정답 ⑤

$h(x) = f(x) - g(x)$ 라 하면  $h(x)$ 는 삼차함수이므로

조건 ㉠에서  $h(x) = ax(x+1)(x-1) = ax^3 - ax$

조건 ㉡에서  $\int_0^4 h(x)dx = 96$ 이므로

$$\left[ \frac{a}{4}x^4 - ax^2 \right]_0^4 = 96 \text{에서 } a = 2$$

$$h(x) = 2x(x+1)(x-1) \quad \therefore h(2) = 12$$

11. 정답 ⑤

$f(x)$ 는 기함수이므로  $f'(x)$ 는 우함수이다.

$$\int_{-2}^2 xf'(x)dx - 3 \int_{-2}^2 f'(x)dx = 18$$

$$f(2) - f(-2) = -6$$

$$-2f(-2) = -6 \quad \therefore f(-2) = 3$$

12. 정답 ②

상자의 밑면인  $\triangle A'B'C'$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2}(20-2x)(20-2x)\sin 60^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(20-2x)^2$$

상자의 높이는

$$x \tan 30^\circ = \frac{x}{\sqrt{3}} \text{ 이므로 상자의 부피는}$$

$V(x)$ 라 하면

$$V(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(20-2x)^2 \times \frac{x}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{4}(4x^3 - 80x^2 + 400x) \quad (\text{단, } 0 < x < 10)$$

$$V'(x) = \frac{1}{4}(12x^2 - 160x + 400) = \frac{1}{4}(2x-20)(6x-20)$$

$$V(x) = 0 \text{에서 } x = \frac{10}{3}$$

$V(x)$ 의 증가와 감소를 나타내면 다음 표와 같다.

$x$	(0)	...	$\frac{10}{3}$	...	(10)
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		↗	극대	↘	

따라서 부피가 최대가 되는  $x$ 의 값은  $\frac{10}{3}$

13. 정답 ⑤

조건 ㉠에서  $f(2) = g(2)$  ..... ㉠

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = 5$$

$$f'(2) - g'(2) = 5 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

조건 ㉡의 식에  $x = 2$ 를 대입하면

$$g(2) = 4f(2) - 3$$

㉠과 연립하면  $f(2) = 1, g(2) = 1$

조건 ㉢의 식을 미분하여  $x = 2$ 를 대입하면

$$g'(2) = 4f(2) + 4f'(2)$$

㉡에서  $f'(2) = g'(2) + 5$ 이므로 대입하면

$$3g'(2) = -24, \quad g'(2) = -8$$

따라서 곡선  $y = g(x)$  위의 점 (2, 1)에서의 접선의 방정식은

$$y = -8(x-2) + 1 \quad \therefore y = -8x + 17$$

$$a = -8, \quad b = 17 \quad \therefore a + b = 9$$

14. 정답 ③

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f(1) = 7 \text{에서 } a + b = 3 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$f'(1) = 0 \text{에서 } 2a + b = -3 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠과 ㉡을 연립하면  $a = -6, b = 9$





$$= \int_0^3 (4x^2 + 4x + 1)dx - \int_0^3 (4x^2 - 4x + 1)dx$$

$$= \int_0^3 8xdx = [4x^2]_0^3 = 36$$

(2) 곡선  $y = x(x-a)(x-2)$ 와  $x$ 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를  $S(a)$ 라 하면

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^a x(x-a)(x-2)dx + \int_a^2 \{-x(x-a)(x-2)\}dx \\ &= \int_0^a \{x^3 - (a+2)x^2 + 2ax\}dx \\ &\quad + \int_a^2 \{-x^3 + (a+2)x^2 - 2ax\}dx \\ &= \left[ \frac{1}{4}x^4 - \frac{a+2}{3}x^3 + ax^2 \right]_0^a + \left[ -\frac{1}{4}x^4 + \frac{a+2}{3}x^3 - ax^2 \right]_a^2 \\ &= \left( -\frac{1}{12}a^4 + \frac{1}{3}a^3 \right) + \left( -\frac{1}{12}a^4 + \frac{1}{3}a^3 - \frac{4}{3}a + \frac{4}{3} \right) \\ &= -\frac{1}{6}a^4 + \frac{2}{3}a^3 - \frac{4}{3}a + \frac{4}{3} \\ \therefore S'(a) &= -\frac{2}{3}a^3 + 2a^2 - \frac{4}{3} \\ &= -\frac{2}{3}(a-1)(a^2 - 2a - 2) \end{aligned}$$

$S'(a) = 0$ 에서  $a = 1$  ( $\because 0 < a < 2$ )

$a$	0	...	1	...	2
$S'(a)$		-	0	+	
$S(a)$		\	극소	/	

따라서  $S(a)$ 는  $a = 1$ 일 때 최소이다.

18. **정답**  $1 < k < \frac{3}{2}$

$-1 < x < 1$ 인  $x$ 의 값에서 극솟값을 갖고

$x > 1$ 인  $x$ 의 값에서 극댓값을 가지려면

$f'(-1) < 0$ ,  $f'(1) > 0$ 을 만족시켜야 한다.

$$f'(x) = -6x^2 + 2kx + 4k^2 \text{이므로}$$

$$f'(-1) = 4k^2 - 2k - 6 = 2(2k-3)(k+1) < 0 \text{에서}$$

$$-1 < k < \frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$f'(1) = 4k^2 + 2k - 6 = 2(2k+3)(k-1) > 0 \text{에서}$$

$$k < -\frac{3}{2} \text{ 또는 } k > 1 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

㉠과 ㉡을 공통으로 만족하는  $k$  값의 범위는  $1 < k < \frac{3}{2}$

19. **정답**  $\frac{11}{3}$

조건 (가), (나)에 의해

$$f'(x) = 4(x-m)x^2 \text{이므로}$$

$$f'(2) = 16(2-m) = 16$$

$$\therefore m = 1$$

$$f'(x) = 4x^2(x-1) = 4x^3 - 4x^2$$

$$f(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 + C \text{에서}$$

$$f(1) = -\frac{1}{3} + C = \frac{5}{3} \text{이므로 } C = 2$$

$$\therefore f(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2$$

방정식  $|f(x) - f(0)| = k$ 를 만족시키는 서로 다른 실근의 개수가

$$3\text{개} \text{이려면 } k = f(0) + \frac{5}{3} = \frac{11}{3}$$

20. **정답**  $-1, -3$

$$f'(x) = a(x+2)(x-2) \text{에서 } f'(0) = 8a = 4 \text{이므로 } a = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-2)^2 = \frac{1}{2}(x^3 - 2x^2 - 4x + 8)$$

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4x + C \text{에서}$$

$$f(-2) = -\frac{22}{3} + C = -5$$

$$C = \frac{7}{3}$$

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4x + \frac{7}{3}$$

사잇값 정리에 의해

$$f(-3) > 0 \text{이고 } f(-2) < 0 \text{이므로 } m = -3 \text{이고}$$

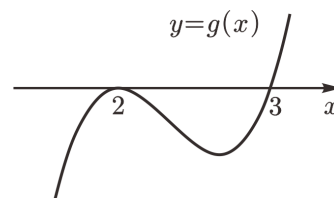
$$f(-1) < 0 \text{이고 } f(0) > 0 \text{이므로 } m = -1$$

21. **정답** 28

$$f(x)g(x) = (x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2 \text{에서}$$

$g(x)$ 가  $x = 2$ 에서 극댓값을 가지므로  $g(x)$ 는  $(x-2)^2$ 을 인수로

갖고,  $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 양의 실수이므로 다음 그림의 개형을 통해  $(x-3)$ 을 인수로 가짐을 알 수 있다.



$g(x)$ 의 최고차항의 계수가 3이므로  $g(x) = 3(x-2)^2(x-3)$ 이다.

$$f(x)g(x) = (x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2 \text{에서}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}(x-1)^2(x-3)$$

$$f(x) \text{를 미분하면 } f'(x) = \frac{2}{3}(x-1)(x-3) + \frac{1}{3}(x-1)^2$$

$$\therefore f'(7) = \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 6^2 = 28$$