내신대비 모의고사

범위 : 미분–적분

시험시간 : 50분

이름 :

[객관식]

1. 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(3)$의 최솟값은?

(가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.
(나) $f(0)=f'(0)$
(다) $x \geq -1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq f'(x)$이다.

① 91 ② 92 ③ 93 ④ 94 ⑤ 95

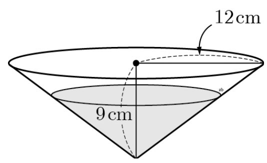
2. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$가 $x(t)=t^3-3kt^2-(8k-80)t+1$이다. 점 P가 출발 후 운동방향을 바꾸지 않는다고 할 때, 모든 자연수 k의 값의 합은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

3. 다음 중 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^4+(a-1)x^2-2ax$가 극값을 하나만 갖도록 하는 실수 a의 값이 아닌 것은?

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ -1 ⑤ -2

4. 다음 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 $12\,\mathrm{cm}$, 높이가 $9\,\mathrm{cm}$인 원뿔 모양의 그릇이 있다. 매초 $1\,\mathrm{cm}$씩 수면의 높이가 올라가도록 물을 넣을 때, 물을 넣기 시작한 지 3초 후에 그릇에 담긴 물의 부피의 변화율 $(\mathrm{cm}^3/\mathrm{s})$을 구하면?



① 2π ② 4π ③ 8π ④ 10π ⑤ 16π

5. 삼차함수 $f(x)=3x^3+ax^2+bx+c$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.)

(가) $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ (단, $\alpha\neq\beta$)
(나) 두 점 $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$의 중점은 $(0, 2)$이다.
(다) $|f(\alpha)-f(\beta)|=\dfrac{1}{18}$

① $\dfrac{9}{2}$ ② $\dfrac{19}{4}$ ③ 5
④ $\dfrac{21}{4}$ ⑤ $\dfrac{11}{2}$

6. 다항함수 $f(x)$와 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)+F(3)$의 값은?

(가) $f'(x)=2x$ (나) $f(0)=F(0)$
(다) $f(3)=F(3)$

① 14 ② 16 ③ 18
④ 20 ⑤ 22

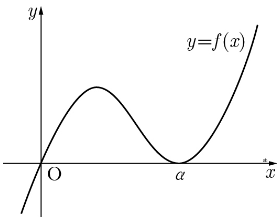
7. 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $P(x, y)$에서의 접선의 기울기가 $3x^2-27$이고 함수 $f(x)$의 극댓값이 4일 때, 함수 $f(x)$의 극솟값을 구하면?

① -105 ② -104 ③ -103
④ -102 ⑤ -101

8. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 $f(x)=\int xg(x)dx$, $\dfrac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=4x^3+2x$를 만족시킬 때, $g(3)$의 값은?

① 42 ② 44 ③ 46
④ 48 ⑤ 50

9. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 그래프와 같이



$f(0)=0$, $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$이고 함수 $g(x)$가 다음 두 조건을 만족시킬 때, $g\left(\frac{\alpha}{3}\right)$의 값은? (단, α는 양수이다.)

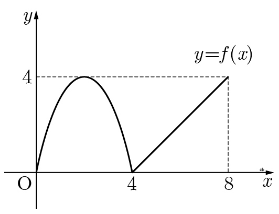
> 가) $g'(x)=f(x)+xf'(x)$
> (나) $g(x)$의 극댓값이 81이고 극솟값이 0이다.

① 52　② 56　③ 60
④ 64　⑤ 68

10. 구간 $[0,8]$에서 정의된 함수 $f(x)$는

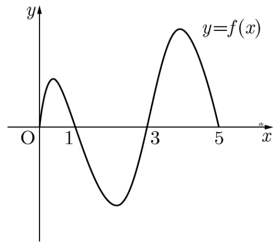
$f(x)=\begin{cases}-x(x-4) & (0\le x<4)\\ x-4 & (4\le x\le 8)\end{cases}$이다. 실수 $a(0\le a\le 4)$에 대하여

$\int_a^{a+4} f(x)dx$가 최솟값을 가질 때 a값은?



① 3　② $\frac{5}{2}$　③ 2
④ $\frac{3}{2}$　⑤ 1

11. $g(x)=\int_0^x f(t)dt$인 관계가 성립한다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?



> | 보기 |
> ㄱ. 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.
> ㄴ. 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 극댓값을 갖는다.
> ㄷ. $\int_1^3 g'(x)dx<0$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. 곡선 $y=x^2+1$에 대하여 원점 O에서 이 곡선에 그은 두 접선의 접점을 A, B라 할 때, $\triangle\mathrm{OAB}$의 넓이는?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

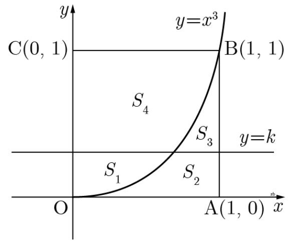
13. 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=3x^2-3$이고 $f(0)=0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $4S$의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

14. 지면에서 $20\mathrm{m/s}$의 속도로 지면과 수직으로 위로 던진 공의 t초 후의 속도 $v(t)\mathrm{m/s}$가 $v(t)=20-10t(0 \le t \le 4)$일 때, 공을 던진 후 공이 아래로 움직인 거리는?

① 15 ② 17.5 ③ 20
④ 22.5 ⑤ 25

15. 좌표평면 위에 네 점 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$, $C(0,1)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형 $OABC$가 있다. 곡선 $y=x^3$과 직선 $y=k$ $(0<k<1)$에 의해 정사각형 $OABC$를 네 영역으로 나눌 때, 그림과 같이 네 영역의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3, S_4라 하자. 이때, $|S_1-S_3|+|S_2-S_4|$의 최솟값을 구하면?



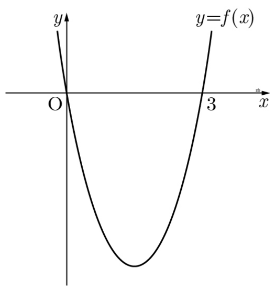
① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

[주관식]

16. 함수 $f(x)=x^3+3x^2-9x+9$에 대하여 방정식 $|f(x)-k|=k$가 서로 다른 세 개의 실근을 갖도록 하는 상수 k의 값의 합을 구하시오.

17. 두 조건 $\frac{d}{dx}\{f(x)+xf'(x)\}=3x^2-4x$, $f(0)=1$을 만족시키는 다항함수 $f(x)$구하시오.

18. 이차항의 계수가 3인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다. $g(x)=\int_{x}^{x+1} f(t)dt$라 할 때, 함수 $g(x)$의 최솟값을 구하시오.



19. 두 곡선 $y=a^2x^2$, $y=-x^2$과 직선 $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(a)$라고 할 때, $\frac{S(a)}{a}$의 최솟값을 구하시오. (단, $a>0$)

20. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도가 각각 $v_1(t)=3t^2+t$, $v_2(t)=2t^2+3t+8$이다. 출발한 후 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 점 P, Q사이의 거리를 a라 할 때, a의 값을 구하시오.

정답 및 풀이

1. 정답 ⑤

(가)에 의해 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, $f'(x)=3x^2+2ax+b$라고 하자.

(나)에 의해 $f(0)=f'(0)$이므로 $c=b$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+b$, $f'(x)=3x^2+2ax+b$에서

$f(x)-f'(x)=x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x$이고 $x=0$에서 x축과 만난다.

(다)에 의해 $x\ge -1$에서 $f(x)-f'(x)\ge 0$이므로 $x=0$에서 x축과 접해야 한다. 따라서 $b=2a$

$f(x)-f'(x)=x^3+(a-3)x^2=x^2\{x-(3-a)\}$

또한 0이 아닌 실근은 -1보다 작거나 같아야 하므로

$3-a\le -1 \qquad \therefore\ 4\le a$

$f(x)=x^3+ax^2+2ax+2a$이므로

$f(3)=17a+27\ge 95$

2. 정답 ④

$v(t)=3t^2-6kt-(8k-80)$

$\quad =3(t-k)^2-(8k-80)-3k^2$

$v(t)$는 최고차항의 계수가 양수인 이차함수이므로 시간이 지나면 $v(t)$는 양의 값을 가지게 된다.

운동방향을 바꾸지 않는다고 했으므로 $t=k$일 때 $v(t)$의 최솟값을 가지고 $v(k)\ge 0$이어야 한다.

$v(k)=-3k^2-8k+80$

$\quad =-(3k+20)(k-4)\ge 0$

$(3k+20)(k-4)\le 0$

$\therefore\ -\dfrac{20}{3}\le k\le 4$

따라서 조건을 만족하는 자연수 $k=1,\ 2,\ 3,\ 4$이므로

k의 값의 합은 10

3. 정답 ④

$f(x)=\dfrac{1}{2}x^4+(a-1)x^2-2ax$

$f'(x)=2x^3+2(a-1)x-2a$

$\quad =2(x-1)(x^2+x+a)$

$f(x)$가 극값을 하나만 가지기 위해서는

$f'(x)=0$이 한 실근과 중근을 가지거나 한 실근과 두 허근, 또는 삼중근을 가져야 한다.

(ⅰ) $x=1$이 중근일 때,

$x^2+x+a=0$이 $x=1$을 근으로 가져야 하므로

$a=-2$

이때 한 실근과 중근을 가지므로 삼중근인 경우는 없다.

(ⅱ) $x^2+x+a=0$이 중근 또는 허근을 가질 때,

$D\le 0$이므로

$1-4a\le 0,\ \dfrac{1}{4}\le a$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 $a=-2$ 또는 $\dfrac{1}{4}\le a$일 때 $f(x)$는 극값을 하나만 갖는다.

따라서 범위에 포함되지 않는 a의 값은 -1

4. 정답 ⑤

매초 $1\,\text{cm}$씩 수면의 높이가 올라가므로 t초 후 수면의 높이는 $t\,\text{cm}$

높이와 반지름의 길이비가 $3:4$이므로 t초 후 반지름은 $\dfrac{4}{3}t\,\text{cm}$

따라서 t초 후 그릇에 담긴 물의 부피는

$V(t)=\left(\dfrac{4}{3}t\right)^2\pi\times t\times\dfrac{1}{3}$

$\quad =\dfrac{16}{27}\pi t^3$

부피의 변화량 $V'(t)=\dfrac{16}{9}t^2\pi$

$\therefore\ V'(3)=16\pi$

5. 정답 ②

(가)에서 $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$이므로 $\alpha<\beta$라 하면 $x=\alpha$에서 극대, $x=\beta$에서 극소를 갖는다.

$f'(x)=9x^2+2ax+b$

$\quad =9(x-\alpha)(x-\beta)$

(나)에서 두 점 $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$의 중점은 $(0, 2)$이므로

$\alpha+\beta=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

(다)에서 $|f(\alpha)-f(\beta)|=\dfrac{1}{18}$이므로 극대 극소 차 공식에 의해

$\dfrac{|3|}{2}|\beta-\alpha|^3=\dfrac{1}{18}$

$|\beta-\alpha|^3=\dfrac{1}{27}$

$\therefore\ \beta-\alpha=\dfrac{1}{3} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $\beta=\dfrac{1}{6}$, $\alpha=-\dfrac{1}{6}$

$f'(x)=9\left(x-\dfrac{1}{6}\right)\left(x+\dfrac{1}{6}\right)$

$\quad =9x^2-\dfrac{1}{4}$

$f(x)=3x^3-\dfrac{1}{4}x+c$

$(0,\ 2)$는 삼차함수 위의 점이므로 $c=2$

따라서 $f(x)=3x^3-\dfrac{1}{4}x+2$

$\therefore\ f(1)=\dfrac{19}{4}$

6. 정답 ③

(가)에서 $f'(x)=2x$이므로 $f(x)=x^2+C_1$ (단, C_1은 적분상수)

$F(x)=\dfrac{1}{3}x^3+C_1x+C_2$ (단, C_2는 적분상수)

(나)에서 $f(0)=F(0)$이므로 $C_1=C_2=C$라 하자.

(다)에서 $f(3)=F(3)$이므로

$f(3)=9+C,\ F(3)=9+4C$에서 $C=0$

따라서 $f(x)=x^2,\ F(x)=\dfrac{1}{3}x^3$

$\therefore\ f(3)+F(3)=18$

7. 정답 ②

$f'(x)=3x^2-27$

$\quad =3(x+3)(x-3)$

따라서 $x=-3$에서 극댓값 4를 갖고 $x=3$에서 극솟값을 갖는다.

$f(x)=x^3-27x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(-3)=-27+81+C=4$

$\therefore\ C=-50$

$f(x)=x^3-27x-50$

$\therefore\ f(3)=27-81-50=-104$

8. 정답 ③

$f'(x)=xg(x)$

$f'(x)-g'(x)=4x^3+2x$에서

$xg(x)-g'(x)=4x^3+2x$

$g(x)$의 최고차항을 ax^n이라 하면

$ax^{n+1}=4x^3$이므로 $a=4,\ n=2$

$g(x)=4x^2+bx+c$라 하면

$g'(x)=8x+b$

$xg(x)-g'(x)=4x^3+bx^2+(c-8)x-b=4x^3+2x$이므로

$b=0,\ c=10$

따라서 $g(x)=4x^2+10$

$\therefore\ g(3)=46$

9. 정답 ④

$f(x)=x(x-\alpha)^2$

$f'(x)=(x-\alpha)(3x-\alpha)$

$g'(x)=x(x-\alpha)^2+x(x-\alpha)(3x-\alpha)$

$\quad =4x^3-6\alpha x^2+2\alpha^2x$

$\quad =2x(2x-\alpha)(x-\alpha)$

따라서 $x=0,\ x=\alpha$에서 극솟값, $x=\dfrac{\alpha}{2}$에서 극댓값을 갖는다.

$g(x)=x^4-2\alpha x^3+\alpha^2x^2+C$ (단, C는 적분상수)에서

$g(x)$의 극솟값은 0, 극댓값은 81이므로

$g(0)=C=0$

$g\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{\alpha^4}{16}=81$

$\therefore\ \alpha=6$ ($\because\ \alpha>0$)

따라서 $g(x)=x^4-12x^3+36x^2$

$\therefore\ g\left(\dfrac{\alpha}{3}\right)=g(2)=16-96+144=64$

10. 정답 ①

$$\int_a^{a+4}f(x)dx=\int_a^4 f(x)dx+\int_4^{a+4}f(x)dx$$
$$=\int_a^4 f(x)dx+\int_0^a f(x+4)dx$$
$$=\int_a^4\{-x(x-4)\}dx+\int_0^a xdx$$

이므로 최소가 되기 위한 a의 값은 $y=x$와 $y=-x(x-4)$의 교점의 x좌표와 같다. (단, $x>0$)

$x=-x(x-4)$

$x^2-3x=0,\ x=3$

$\therefore\ a=3$

11. 정답 ③

$g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$에서 $g'(x)=f(x)$

따라서 주어진 그래프는 $g(x)$의 도함수의 그래프이다.

ㄱ. 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 갖는다. (거짓)

ㄴ. 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 갖는다. (거짓)

ㄷ. $\displaystyle\int_1^3 g'(x)dx=\int_1^3 f(x)dx<0$ (참)

12. 정답 ②

원점에서 그은 접선의 접점을 $(t,\ t^2+1)$이라 하면

접선의 기울기는 $2t$

접선의 방정식은 $y=2t(x-t)+t^2+1$

$\quad =2tx-t^2+1$

이 접선이 $(0,\ 0)$을 지나므로 $t^2=1,\ \therefore\ t=\pm1$

따라서 $\mathrm{A}(-1,\ 2),\ \mathrm{B}(1,\ 2)$라 하면

$\triangle\mathrm{OAB}$의 넓이는 $2\times2\times\dfrac{1}{2}=2$

13. 정답 ⑤

$f(x)=x^3-3x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=0$이므로 $C=0$

$f(x)=x^3-3x$은 원점에 대해 대칭인 함수이므로 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$S=2\int_0^{\sqrt{3}}(3x-x^3)dx=2\left[\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_0^{\sqrt{3}}=2\left(\frac{9}{2}-\frac{9}{4}\right)=\frac{9}{2}$$

$\therefore\ 4S=18$

14. 정답 ③

$v(t)=20-10t(0\le t\le 4)$이므로

공이 아래로 움직인 것은 2초 이후이다.

공이 아래로 움직인 거리는

$$\int_2^4|v(t)|dt=\int_2^4(10t-20)dt=\left[5t^2-20t\right]_2^4=20$$

15. 정답 ①

$$|S_1-S_3|=|(S_1+S_2)-(S_2+S_3)|=\left|k-\frac{1}{4}\right|$$

$$|S_2-S_4|=|(S_2+S_1)-(S_4+S_1)|=\left|k-\frac{3}{4}\right|$$

$|S_1-S_3|+|S_2-S_4|=\left|k-\frac{1}{4}\right|+\left|k-\frac{3}{4}\right|$이므로

최솟값은 $\frac{1}{4}lek\le\frac{3}{4}$ 일 때 $\frac{1}{2}$

16. 정답 20

$f(x)=x^3+3x^2-9x+9$

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x-1)(x+3)$이므로

$f(x)$는 $x=-3$에서 극댓값 36, $x=1$에서 극솟값 4를 갖는다.

$|f(x)-k|=k$의 근은

$f(x)=0$ 또는 $f(x)=2k$를 만족해야 하고,

$f(x)=0$의 근은 1개이므로 $f(x)=2k$가 서로 다른 두 실근을 가져야한다.

극대와 극소를 지날 때이므로

$2k=36$ 또는 $2k=4$

$\therefore\ k=18$ 또는 $k=2$이므로 합은 20

17. 정답 $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{2}{3}x^2+x$

$\frac{d}{dx}\{f(x)+xf'(x)\}=3x^2-4x$에서

$f(x)+xf'(x)=x^3-2x^2+C_1$ (단, C_1은 적분상수)

$f(0)=1$이므로 $C_1=1$

$f(x)+xf'(x)=x^3-2x^2+1$

$f(x)+xf'(x)$는 $xf(x)$를 미분한 것과 같으므로

$xf(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+x+C_2$ (단, C_2는 적분상수)

항등식이므로 $C_2=0$

$\therefore\ f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{2}{3}x^2+x$

18. 정답 $-\frac{13}{2}$

그래프에서

$f(x)=3x(x-3)$이므로

$$\begin{aligned}g'(x)&=f(x+1)-f(x)\\&=3(x+1)(x-2)-3x(x-3)\\&=3(x^2-x-2)-3x^2+9x\\&=6x-6\end{aligned}$$

따라서 $g(x)$는 $x=1$일 때 최소이다.

$$\begin{aligned}g(1)&=\int_1^2 f(x)dx\\&=\int_1^2(3x^2-9x)dx\\&=\left[x^3-\frac{9}{2}x^2\right]_1^2\\&=(8-18)-\left(1-\frac{9}{2}\right)=-\frac{13}{2}\end{aligned}$$

19. 정답 18

$y=a^2x^2$과 $x=3$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^3 a^2x^2dx=\left[\frac{a^2}{3}x^3\right]_0^3=9a^2$$

$y=-x^2$과 $x=3$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^3 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3=9$$

따라서 $S(a)=9a^2+9$이므로

$$\frac{S(a)}{a}=9a+\frac{9}{a}$$

산술 기하 평균에 의해

$$9a+\frac{9}{a}\ge 2\sqrt{9a\times\frac{9}{a}}=18$$

20. 정답 $\frac{80}{3}$

$3t^2+t=2t^2+3t+8$을 정리하면

$t^2-2t-8=(t-4)(t+2)$이므로

$t=4$일 때 두 점의 속도가 같아진다. ($\because$ $t>0$)

두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하면

$x_1(t)=t^3+\frac{1}{2}t^2$, $x_2(t)=\frac{2}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2+8t$

따라서 4초일 때 두 점의 거리는

$a=x_2(4)-x_1(4)=\frac{80}{3}$