수학 II (고2)

총 21문항 : 객관식 16, 주관식 5

내신대비 모의고사

범위 : 미분-적분

시험시간 : 50분

이름 :

[객관식]

1. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족할 때, $f(1)$의 값은?

(가) $f(0)=-3,\ f(2)=7$
(나) $0<x<2$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 5$이다.

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

2. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+ax$가 극값을 갖지 않도록 하는 정수 a의 값의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

3. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $y=f(x)$가 $x=-2,\ x=0,\ x=2$에서 극값을 가지고 $f(0)=4$이다. $f(1)$의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2
④ -1 ⑤ 0

4. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치가 각각 $x_{\mathrm{P}}(t)=t^3-3t^2$, $x_{\mathrm{Q}}(t)=t^3-6t^2$일 때, 두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이는 t의 값의 범위는 $a<t<b$일 때, $a+b$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 9

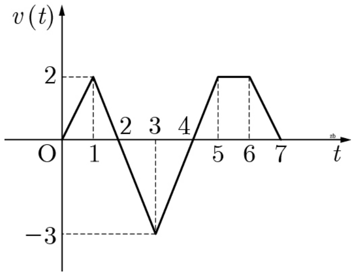
5. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치가 각각 $x_{\mathrm{P}}(t)=t^2(t^2-8t+18)$, $x_{\mathrm{Q}}(t)=mt$일 때, 점 P와 점 Q의 속도가 같은 시각이 3번 존재하도록 하는 정수 m의 개수는?

① 13 ② 14 ③ 15
④ 16 ⑤ 17

6. 함수 $f(x)=2x^3+6x^2-4$에 대하여 $\lim_{x\to2}\frac{1}{x^3-8}\int_2^x f(t)dt$의 값은?

① -6 ② -2 ③ 1
④ 3 ⑤ 7

7. 좌표가 -2인 점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(0 \le t \le 7)$에서의 속도 $v(t)$의 그래프가 그림과 같을 때, 점 P가 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있을 때의 위치는?

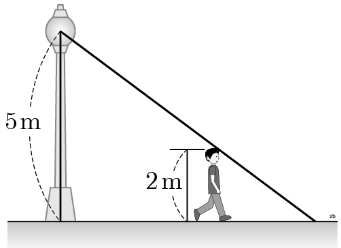


① -3 ② -1 ③ 2
④ 4 ⑤ 6

8. 삼차함수 $f(x)=x^3-12x+a$에 대하여 함수 $\mathrm{F}(x)=\int_0^x f(t)dt$가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 양수 a의 최솟값은?

① 14 ② 16 ③ 18
④ 20 ⑤ 22

9. 키가 $2\mathrm{m}$인 선운이가 지면으로 부터의 높이가 $5\mathrm{m}$인 가로등 바로 밑에서 출발하여 일직선으로 초속 $1.2\mathrm{m}$의 속도로 걸어가고 있을 때, 선운이의 그림자의 끝이 움직이는 속도는?



① $1\mathrm{m}/$초 ② $2\mathrm{m}/$초 ③ $3\mathrm{m}/$초
④ $4\mathrm{m}/$초 ⑤ $5\mathrm{m}/$초

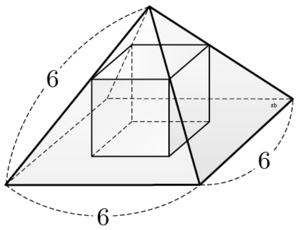
10. 최고차항의 계수가 음수인 삼차함수 $y=f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(-1)=0$
(나) $f(1)=f'(1)=0$
(다) x에 대한 방정식 $f(x)=k$가 음의 실근 2개와 양의 실근 1개를 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $-16<k<-8$이다.

x에 대한 방정식 $f(x)=k$가 양의 실근 2개, 음의 실근 1개를 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $a<k<b$일 때, a^2+b^2의 값은?

① 36 ② 40 ③ 64
④ 81 ⑤ 90

11. 다음 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 6인 정사각뿔에 내접하는 직육면체의 부피의 최댓값은?



① $8\sqrt{2}$ ② $10\sqrt{2}$ ③ $12\sqrt{2}$
④ $14\sqrt{2}$ ⑤ $16\sqrt{2}$

12. 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x (x-t)f(t)dt = 4x^3 - ax^2 + 2$$

을 만족시킬 때, $f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은?

① -24 ② -12 ③ 0
④ 12 ⑤ 24

13. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $f(0)=0$, $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$이고 함수 $g(x)$가 다음 두 조건을 만족시킬 때, $g\left(\frac{\alpha}{4}\right)$의 값은? (단, α는 양수이다.)

(가) $g'(x) = f(x) + xf'(x)$
(나) $g(x)$의 극댓값이 2이고 극솟값이 1이다.

① $\frac{9}{16}$ ② $\frac{21}{16}$ ③ $\frac{25}{16}$
④ $\frac{33}{16}$ ⑤ $\frac{39}{16}$

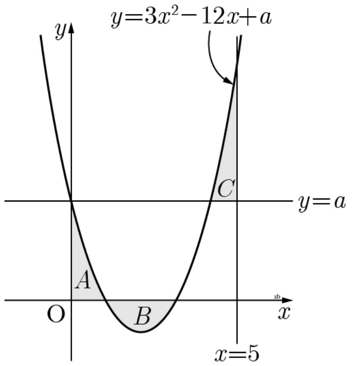
14. 곡선 $y=x^3-3x^2+3x$ 위의 점 $(2, 2)$에서의 접선과 이 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{13}{2}$ ② $\frac{27}{4}$ ③ 7
④ $\frac{29}{4}$ ⑤ $\frac{15}{2}$

15. 자연수 n에 대하여 a_n을 다음과 같이 정의하자.
$a_n = \int_{-2n}^{2n} \frac{|x-n|}{n} dx$ 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값의 십의 자리 숫자는?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

16. 그림과 같이 곡선 $y=3x^2-12x+a$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 A, 이 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 B, 이 곡선과 $y=a$ 및 $x=5$로 둘러싸인 도형의 넓이를 C라 하자. $\mathrm{A} : \mathrm{B} = 1 : 2$일 때, $a-\mathrm{C}$의 값은?
(단, a는 상수이고, A, B, C는 양수이다.)



① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

[주관식]

17. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 $x=-1$에서 극댓값을 갖고, $x=3$에서 극솟값 -24를 가질 때 실수 a, b, c의 값과 극댓값을 구하시오.

(1) a의 값

(2) b의 값

(3) c의 값

(4) 극댓값

18. 함수 $f(x)=ax^3-3x^2+(a+2)x+1$이 $x_1<x_2$인 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 항상 $f(x_1)>f(x_2)$일 때, 상수 a의 값의 범위를 구하시오.

19. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치는 각각 t^3-2t^2+t+1, $-t^3+t^2+t-4$이다. 출발 후 두 점 P, Q 사이의 거리가 최소가 되는 순간의 점 P의 속도를 구하시오.

20. 실수 전체의 집합에서 다음과 같이 정의된 함수 $y=f(x)$가 있다.

$$f(x)=\begin{cases} x & (0\le x<1) \\ 1 & (1\le x<3) \\ 4-x & (3\le x<4) \end{cases},\ f(x+4)=f(x)$$

실수 t에 대하여, xy 좌표평면의 두 함수 $y=f(x)$, $y=-3x+t$의 그래프 교점의 x좌표를 $g(t)$라 할 때, 다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\displaystyle\int_0^8 g(t)dt$

(2) $\displaystyle\int_0^{40} g(t)dt$

21. 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+8)=f(x)$를 만족시키고, $f(x)=\begin{cases} x & (0\le x\le 4) \\ \frac{1}{4}(x-8)^2 & (4\le x\le 8) \end{cases}$일 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) $\displaystyle\int_0^4 f(x)dx$의 값을 구하시오.

(2) $\displaystyle\int_4^8 f(x)dx$의 값을 구하시오.

(3) $\displaystyle\int_{-k}^{k} f(x)dx=40$일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

정답 및 풀이

1. 정답 ②

함수 $f(x)$는 연속이고 미분가능하므로 평균값정리에 의하여

$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(c_1)$, $\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f'(c_2)$인 c_1, c_2가 구간

$(0,\ 1$과 구간 $(1,\ 2$에 적어도 하나씩 존재한다.

$f(0)=-3$, $f(2)=7$이고, $f'(x)\le 5$이므로

$f(1)\le 2$, $f(1)\ge 2\quad \therefore f(1)=2$

2. 정답 ④

$f'(x)=3x^2+2ax+a$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면

방정식 $f'(x)=0$에 대하여 판별식 $D\le 0$이 성립해야 한다. 즉,

$D/4=a^2-3a\le 0$

$0\le a\le 3$

$\therefore$ 정수 a의 개수는 4

3. 정답 ②

$f'(x)=4(x-2)x(x+2)=4x^3-16x$이므로

$f(x)=x^4-8x^2+C$에서

$f(0)=4$이므로 $f(x)=x^4-8x^2+4$

$\therefore\ f(1)=-3$

4. 정답 ③

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 $v_{\mathrm{P}}(t)$, $v_{\mathrm{Q}}(t)$라고 하면

$v_{\mathrm{P}}(t)=3t^2-6t=3t(t-2)$

$v_{\mathrm{Q}}(t)=3t^2-12t=3t(t-4)$

두 점이 반대방향으로 움직일 때 $v_{\mathrm{P}}(t)v_{\mathrm{Q}}(t)<0$이므로

$v_{\mathrm{P}}(t)v_{\mathrm{Q}}(t)<0$에서 $2<t<4$

$a=2$, $b=4\quad \therefore a+b=6$

5. 정답 ③

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 $v_{\mathrm{P}}(t)$, $v_{\mathrm{Q}}(t)$라고 하면

$v_{\mathrm{P}}(t)=4t^3-24t^2+36t$, $v_{\mathrm{Q}}(t)=m$

$4t^3-24t^2+36t=m$을 만족하는 서로 다른 t의 값이 세 개 존재해야 한다.

$f(t)=4t^3-24t^2+36t$라 하면

$f'(t)=12t^2-48t+36=12(t-1)(t-3)$

$f'(t)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=3$

$f(1)=16$, $f(3)=0$이므로 $f(t)=m$의 실근이 3개가 되도록 하는

m의 값의 범위는 $0<m<16$

즉, 정수 m의 개수는 15

6. 정답 ④

$\mathrm{F}(x)=\int f(x)dx$라 하면 주어진 식은

$$\lim_{x\to 2}\frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{\mathrm{F}'(2)}{12}=\frac{f(2)}{12}=\frac{36}{12}=3$$

7. 정답 ①

$x(2)=-2+\int_0^2 v(t)dt=-2+2=0$

$x(4)=-2+\int_0^4 v(t)dt=-2+(-1)=-3$

$x(7)=-2+\int_0^7 v(t)dt=-2+3=1$

이므로 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있을 때의 위치는 -3이다.

8. 정답 ②

$\mathrm{F}(x)=\int_0^x f(t)dt$에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$\mathrm{F}'(x)=f(x)=x^3-12x+a$

이때 사차함수 $F(x)$가 오직 하나의 극값을 가지려면

삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 한 점에서만 만나거나

한 점에서 만나고 다른 한 점에서 접해야 한다.

$f(x)=0$에서 $x^3-12x+a=0$

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

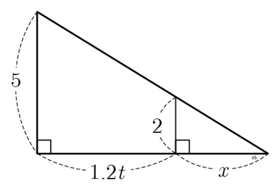
이므로 $f(-2)f(2)\ge 0$

$(a+16)(a-16)\ge 0\qquad \therefore a\le -16$ 또는 $a\ge 16$

따라서 양수 a의 최솟값은 16이다.

9. 정답 ②

선운이의 그림자의 길이를 x라 하자.



t초 동안 선운이가 움직인 거리는 $1.2t\,\mathrm{m}$이므로 다음의 비례식이 성립한다.

$5:(1.2t+x)=2:x$, $x=0.8t$

따라서 시각 t에서의 가로등으로부터 그림자 끝까지의 거리는

$2t\,(\mathrm{m})$이므로 속도는 $2\mathrm{m}/$초이다.

10. 정답 ③

조건 (가)와 (나)에 의해 $f(x)=a(x+2)(x-1)^2$

$f(x)=k$가 음의 실근 2개와 양의 실근 1개를 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위가 $-16<k<-8$이려면

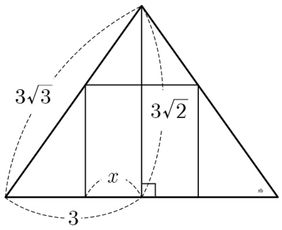
$f(0)=2a=-8$에서 $a=-4$

$f(x)=k$가 양의 실근 2개, 음의 실근 1개를 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $-8<k<0$

$\therefore\ a^2+b^2=(-8)^2+0^2=64$

11. 정답 ⑤

한 변의 길이가 6인 정삼각형의 높이는 $3\sqrt{3}$이므로 정사각뿔의 네 옆면의 꼭짓점이 만나는 점을 기준으로 두 옆면에 수직하게 자른 단면은 다음과 같다.



단면인 삼각형의 높이는 $\sqrt{(3\sqrt{3})^2-3^2}=3\sqrt{2}$

직육면체가 내접하기 위해서는 밑면이 정사각형이어야 하고, 그 한 변의 길이를 $2x$라 하면 $(0<x<3)$ 위쪽 잘린 정사각뿔의 높이는 $\sqrt{2}x$가 되어 직육면체의 높이는 $(3-x)\sqrt{2}$가 된다.

따라서 직육면체의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=4x^2\times(3-x)\sqrt{2}$

$V(x)=4\sqrt{2}(-x^3+3x^2)$

$V'(x)=4\sqrt{2}(-3x^2+6x)=-12\sqrt{2}x(x-2)$

$V'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

열린구간 $(0,\ 3)$에서 함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗		↘	

함수 $V(x)$는 $x=2$에서 극대이자 최대이다.

따라서 부피의 최댓값은 $V(2)=4\times2^2\times\sqrt{2}=16\sqrt{2}$

12. 정답 ③

$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=4x^3-ax^2+2$ …… ㉠

양변에 $x=1$을 대입하면 $0-0=4-a+2$

즉, $a=6$이다.

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)dt=12x^2-12x$

한 번 더 x에 대하여 미분하면

$f(x)=24x-12$

따라서 $f\left(\frac{1}{2}\right)=12-12=0$이다.

13. 정답 ③

$f(x)=x(x-\alpha)^2$이므로

$g(x)=xf(x)+C=x^2(x-\alpha)^2+C$

$g(x)$의 극댓값이 2이므로 $g\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\alpha^4}{16}+C=2$ …… ㉠

$g(x)$의 극솟값이 1이므로 $g(0)=C=1$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의해 $C=1,\ \alpha=2$

$g(x)=x^2(x-2)^2+1$

$\therefore\ g\left(\frac{\alpha}{4}\right)=g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{25}{16}$

14. 정답 ②

$y'=3x^2-6x+3$에서 구하는 접선의 기울기는 3이고, 접선의 방정식은 $y=3(x-2)+2$,

즉 $y=3x-4$이다.

곡선과 접선의 교점의 x좌표는

$x^3-3x^2+3x=3x-4,\ (x-2)^2(x+1)=0$

$x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{2}|x^3-3x^2+4|dx=\int_{-1}^{2}(x^3-3x^2+4)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+4x\right]_{-1}^{2}=\frac{27}{4}$$

15. 정답 ④

$$a_n=\int_{-2n}^{2n}\frac{|x-n|}{n}dx$$

$$=\frac{1}{n}\int_{-2n}^{n}(-x+n)dx+\frac{1}{n}\int_{n}^{2n}(x-n)dx$$

$$=\frac{1}{n}\left[-\frac{1}{2}x^2+nx\right]_{-2n}^{n}+\frac{1}{n}\left[\frac{1}{2}x^2-nx\right]_{n}^{2n}$$

$$==\frac{\frac{1}{2}n^2+4n^2}{n}+\frac{0+\frac{1}{2}n^2}{n}$$

$$=5n$$

$\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}5n=5\times\frac{10\times11}{2}=275$이므로 $\sum_{n=1}^{10}a_n$의 십의 자리의 숫자는 7

16. 정답 ④

$y=3(x-2)^2+a-12$

$\int_0^2 (3x^2-12x+a)dx=0$이므로

$[x^3-6x^2+ax]_0^2=0,\ 2a=16,\ a=8$

곡선과 직선 $y=8$의 교점의 x좌표를 구하면

$3x^2-12x+8=8$에서 $3x(x-4)=0$

$x=0$ 또는 $x=4$

$\mathrm{C}=\int_4^5(3x^2-12x)dx=[x^3-6x^2]_4^5=7$

$\therefore a-\mathrm{C}=1$

17. 정답 (1) $a=-3$

(2) $b=-9$

(3) $c=3$

(4) 극댓값 : 8

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(3)=f'(-1)=0$이므로

$f'(x)=3(x-3)(x+1)=3x^2-6x-9$

$a=-3,\ b=-9$

$\therefore f(x)=x^3-3x^2-9x+c$

$f(3)=-24$에서 $c=3$

따라서 극댓값은 $f(-1)=8$

18. 정답 $a\le -3$ 또는 $a\ge 1$

$f'(x)=3ax^2-6x+a+2$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소해야 하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

따라서 $a<0$이고, $f'(x)$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9-3a(a+2)\le 0$에서 $3(a+3)(a-1)\ge 0$

$a\le -3$ 또는 $a\ge 1$

19. 정답 0

두 점 사이의 거리를 $h(t)$라 하면

$h(t)=\left|(t^3-2t^2+t+1)-(-t^3+t^2+t-4)\right|=\left|2t^3-3t^2+5\right|$

이때 $f(t)=2t^3-3t^2+5$라 하면 $f'(t)=6t^2-6t=6t(t-1)$

$f'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=1$

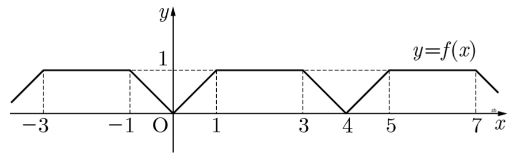
이때 $f(t)$는 $t=1$에서 극소이자 최소이다.

따라서 점 P의 속도는 $3t^2-4t+1$이므로 $t=1$일 때의 속도는

$3-4+1=0$

20. 정답 (1) $\frac{26}{3}$ (2) 207

$y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



구간 $[0,\ 4)$에서 $y=f(x)$와 $y=-3x+t$의 교점의 x좌표를 구해보면

(ⅰ) $0\le x<1$

$x=-3x+t$에서 $x=\frac{t}{4}$

이때 t의 값은 직선 $y=-3x+t$가 점 $(0,\ 0)$을 지날 때 최소, 점 $(1,\ 1)$을 지날 때 최대이다.

즉, $0\le t<4$

(ⅱ) $1\le x<3$

$1=-3x+t$에서 $x=\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}$

이때 t의 값은 직선 $y=-3x+t$가 점 $(1,\ 1)$을 지날 때 최소, 점 $(3,\ 1)$을 지날 때 최대이다.

즉, $4\le t<10$

(ⅲ) $3\le x<4$

$4-x=-3x+t$에서 $x=\frac{1}{2}t-2$

이때 t의 값은 직선 $y=-3x+t$가 점 $(3,\ 1)$을 지날 때 최소, 점 $(4,\ 0)$을 지날 때 최대이다. 즉 $10\le t<12$

따라서 $g(t)=\begin{cases}\frac{t}{4} & (0\le t<4)\\ \frac{1}{3}t-\frac{1}{3} & (4\le t<10)\\ \frac{1}{2}t-2 & (10\le t<12)\end{cases}$ 이고 $g(0)=0$,

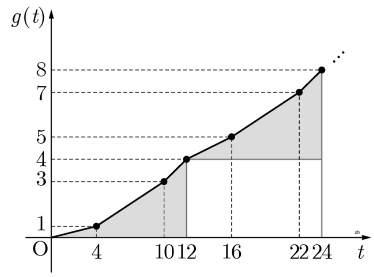
$g(12)=4$이므로 $g(t)$는 12를 주기로 값이 4만큼 증가하는 함수이다.

즉, $g(t+12)=g(t)+4$

(1) $\int_0^8 g(t)dt=\int_0^4\frac{t}{4}dt+\int_4^8\left(\frac{t}{3}-\frac{1}{3}\right)dt=\left[\frac{t^2}{8}\right]_0^4+\left[\frac{t^2}{6}-\frac{1}{3}t\right]_4^8$

$=2+\frac{20}{3}=\frac{26}{3}$

(2) 함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음과 같다.



$\int_0^{12}g(t)dt=\int_0^{10}g(t)dt+\int_{10}^{12}\left(\frac{t}{2}-2\right)dt=14+\left[\frac{t^2}{4}-2t\right]_{10}^{12}$

$=14+7=21$

$\int_{12}^{24}g(t)dt=21+12\times 4=69$

$\int_{24}^{36} g(t)dt = 69 + 12 \times 4 = 117$

$\therefore \int_{0}^{36} g(t)dt = 21 + 69 + 117 = 207$

21. 정답 (1) 8 (2) $\frac{16}{3}$ (3) 12

(1) $\int_{0}^{4} x dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4 = 8$

(2) $\int_{4}^{8} \frac{1}{4}(x^2 - 16x + 64)dx$

$= \left[\frac{1}{12}x^3 - 2x^2 + 16x\right]_4^8 = \frac{16}{3}$

(3) $\int_{-4}^{4} f(x)dx = \int_{-4}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{4} f(x)dx$

$= \int_{4}^{8} f(x)dx + \int_{0}^{4} f(x)dx = 8 + \frac{16}{3} = \frac{40}{3} = \frac{160}{12}$

$\int_{-8}^{8} f(x)dx = \frac{320}{12}$, $\int_{-12}^{12} f(x)dx = \frac{480}{12} = 40$이므로

$k = 12$