

1. 다항식

1. 다항식의 연산(step1)

다항식의 덧셈과 뺄셈

1. 두 다항식 $A = 2x^2 + xy - 4y^2$, $B = 3x^2 - xy + 2y^2$ 에 대하여 $X - 3(A - 2B) = A + 3B$ 를 만족시키는 다항식 X 는? [4.0점]

- ① $x^2 - 5xy - 22y^2$ ② $x^2 + 7xy - 22y^2$ ③ $-x^2 + 5xy - 22y^2$
 ④ $-x^2 + 7xy + 22y^2$ ⑤ $-x^2 + 7xy - 22y^2$

2. 두 다항식 $A = 4x^2 - 3x + 1$, $B = x^2 - x - 3$ 에 대하여 $A - 2B$ 를 간단히 한 것은? [4.2점]

- ① $2x^2 - x + 7$ ② $2x^2 - 5x - 5$ ③ $2x^2 - 4x - 5$
 ④ $3x^2 - 2x + 4$ ⑤ $3x^2 - x - 2$

3. 두 다항식 $A = -x^2 - 2xy + 3y^2$, $B = 2x^2 + 3xy - y^2$ 에 대하여 $(3A - B) - (A - 2B)$ 를 간단히 하면? [3.8점]

- ① $x^2 - xy$ ② $-xy + y^2$ ③ $-xy + 5y^2$
 ④ $3x^2 - 2xy$ ⑤ $-2xy + 3y^2$

4. 두 다항식 $A = x^2 - xy$, $B = 2xy + 2y^2$ 에 대하여 $A - X = B$ 를 만족시키는 다항식 X 를 구하면? [4.4점]

- ① $x^2 - 3xy - 2y^2$ ② $x^2 - 2xy - 2y^2$ ③ $x^2 + xy - 2y^2$
 ④ $2x^2 - 6xy - 4y^2$ ⑤ $2x + 2xy + 4y^2$

5. 두 다항식

$$A = 2x^3 + x^2 - 4x + 1$$

$$B = -3x^2 + 4x - 2$$

에 대하여 $A + B$ 는? [3.8점]

- ① $2x^3 + 2x^2 - 1$ ② $2x^3 - 2x^2 - 1$
 ③ $x^3 + 5x^2 - 6x - 1$ ④ $-x^3 + 5x^2 + 6x - 1$
 ⑤ $-x^3 + 5x^2 - 6x + 1$

6. 두 다항식 $A = x^2 - 3xy + 4y^2$, $B = 2x^2 + 6xy - 5y^2$ 에 대하여 $A + B$ 를 간단히 하면? [3.6점]

- ① $-12xy + 18y^2$ ② $3x^2 + 3xy - y^2$ ③ $4x^2 - 12xy + 3y^2$
 ④ $4x^2 + 3y^2$ ⑤ $6x^2 + 6xy - 2y^2$

7. 세 다항식 $A = x^2 - 2xy + 3y^2$, $B = 3xy - 2y^2$,

$C = -x^2 + 5xy$ 에 대하여 $A - (-B + C) = ax^2 + bxy + cy^2$ 일 때, $a + b + c$ 값은? (단, a, b, c 는 상수) [4.1점]

- ① -3 ② -1 ③ 7
 ④ 11 ⑤ 15

8. 두 다항식 $A = x^3 + 2x^2 - x + 3$, $B = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ 에 대하여 $A + B$ 를 간단히 하면? [3.9점]

- ① $x^3 - 6x^2 + 6x - 4$
 ② $x^3 + 2x^2 - 4x + 2$
 ③ $3x^3 + 2x^2 - 4x + 2$
 ④ $3x^3 - 2x^2 + 4x + 2$
 ⑤ $3x^3 - 2x^2 + 4x - 2$

9. 두 다항식 $A = x^3 + 4x^2 - ax + 1$, $B = x^3 + bx^2 + 1$ 에 대하여 $2(A + B) - B$ 에서 x^2 의 계수가 4, x 의 계수가 -6일 때, ab 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [4.9점]

- ① -15 ② -12 ③ -9
 ④ -6 ⑤ -3

10. 두 다항식 $A = 2x^2 + xy - y^2$, $B = x^2 + 3xy + 2y^2$ 의 합은? [3.3점]

- ① $3x^2 - 2xy + y^2$ ② $3x^2 + 2xy + y^2$ ③ $3x^2 + 4xy + y^2$
 ④ $3x^2 - 4xy + y^2$ ⑤ $3x^2 + 4xy - y^2$

11. 두 다항식 A , B 에 대하여

$$2A + B = 4x^2 - 4x + 5, \quad A - 2B = 5x^3 + 2x^2 - 7x - 5$$

일 때, 다항식 A 는? [3.8점]

- ① $3x^2 + x + 1$ ② $-x^3 - x^2 + 7$ ③ $-x^3 - 3x + 53$
 ④ $x^3 - 2x^2 - x + 4$ ⑤ $x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

12. 두 다항식 $A = x^2 - xy + 3y^2$, $B = -x^2 + 2xy + y^2$ 에 대하여 $A - B$ 를 간단히 하면? [3.8점]

- ① $2x - 3xy$ ② $2x^2 - 3xy + y^2$ ③ $2x^2 - 3xy + 2y^2$
 ④ $2x^2 + xy + y^2$ ⑤ $2x^2 + xy + 2y^2$

13. 두 다항식 $A = 3x^2 - 5xy - y^2$, $B = -x^2 + 2xy + 4y^2$ 에 대하여 $2A - X = -B$ 를 만족시키는 $X = ax^2 + bxy + cy^2$ 일 때, $a + b + c$ 의 값은? [4.2점]

- ① -2 ② -1 ③ 0
 ④ 1 ⑤ 2

14. 두 다항식 $A = x^2 + 1$, $B = x^2 + x$ 에 대하여 $A + 2B$ 의 전개식에서 x^2 의 계수는? [4점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

15. $(x^2 + 3x + 5) + (x + 3)$ 을 옳게 계산한 것은? [4.3점]

- ① $x^2 + 2x + 8$ ② $x^2 + 3x + 8$ ③ $x^2 - 3x + 8$
④ $x^2 + 4x + 8$ ⑤ $x^2 - 4x + 8$

16. 다항식 $(x - 2y)^3$ 을 전개한 식에서 xy^2 의 계수는? [4.7점]

- ① -12 ② -4 ③ 0
④ 4 ⑤ 12

17. $(3x - y)(2x + y + 3)$ 의 전개식에서 xy 항의 계수는? [3.8점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

18. $(2x + 3y + 4z)^2$ 의 전개식에서 yz 의 계수는? [4.4점]

- ① 6 ② 8 ③ 12
④ 16 ⑤ 24

19. $(x^3 - x + 2)(x^2 - 2x - 2)$ 를 전개한 식에서 x^2 과 x^3 의 계수의 합은? [3.2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

20. 다항식 $(a^2 + a + 1)^2 - (a + 1)(a^2 - a + 1)$ 의 전개식에서 모든 항의 계수의 합은? [3.8점]

- ① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

치환을 이용한 다항식의 전개

21. $(2x + 3)(x^2 - x + 1)$ 을 전개하여 내림차순으로 정리하였더니 $2x^3 + ax^2 + bx + 3$ 이 되었다. 실수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값은? [4.0점]

- ① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

22. $x^2 - 4x + 1 = 0$ 일 때, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하면? [4.2점]

- ① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

23. $x^2 - 5x + 2 = 0$ 일 때, $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$ 의 값은? [4.5점]

- ① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

곱셈공식의 변형(1)

24. $x = \sqrt{3} + 1, y = \sqrt{3} - 1$ 일 때, $x^2y + x^2 - xy^2 + y^2$ 의 값은? [4.5점]

- ① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

25. $x = \sqrt{3} + 1, y = \sqrt{3} - 1$ 일 때, $x^3 + y^3$ 의 값은? [4.3점]

- ① $4\sqrt{3}$ ② $6\sqrt{3}$ ③ $8\sqrt{3}$
④ $10\sqrt{3}$ ⑤ $12\sqrt{3}$

26. 두 실수 x, y 에 대하여 $x+y=2$, $x^2+y^2=3$ 일 때, x^3+y^3 의 값은? [4.4점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

27. 두 양수 a, b 에 대하여 $a+b=4$ 이고, $a^3+b^3=28$ 일 때, a^5+b^5 의 값은? [4.2점]

- ① 242 ② 244 ③ 246
④ 248 ⑤ 250

28. $a+b=1$, $ab=-1$ 일 때, a^3+b^3 의 값은? [3.3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

29. $a=\sqrt{2}-\sqrt{3}$, $b=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 일 때, a^3+b^3 의 값은? [4.1점]

- ① $18\sqrt{2}$ ② $20\sqrt{2}$ ③ $22\sqrt{2}$
④ $24\sqrt{2}$ ⑤ $26\sqrt{2}$

30. $x-y=2$, $x^3-y^3=12$ 일 때, xy 의 값은? [3.8점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

31. $x+y=3$, $x^2+y^2=13$ 일 때, x^3+y^3 의 값은? [3.8점]

- ① 33 ② 36 ③ 39
④ 42 ⑤ 45

32. $ab - a - b = 44$, $bc - b - c = 8$, $ca - c - a = 4$ 일 때,

$$a + 2b + c$$

의 값은? (단, a , b , c 는 양수이다.)

- ① 24 ② 25 ③ 26
④ 27 ⑤ 28

33. $a + b + c = 4$, $ab + bc + ca = 2$ 일 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값은?

[3.8점]

- ① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

34. $a + b + c = 6$, $a^2 + b^2 + c^2 = 48$, $abc = -2$ 일 때,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \text{의 값은? [4.3점]}$$

- ① -5 ② -3 ③ -1
④ 1 ⑤ 3

몫과 나머지의 변형

35. 다음 나눗셈의 몫과 나머지로 옳은 것은? [4.1점]

$$(3x^3 - 7x^2 + 10) \div (x^2 - 4x + 2)$$

몫	나머지
① $3x + 5$	$14x$
② $3x + 5$	$26x$
③ $3x + 7$	$14x$
④ $3x + 7$	$26x$
⑤ $3x + 7$	$14x + 7$

36. 다항식 $x^3 - x^2 - x + a$ 가 $x^2 + x + 1$ 로 나누어 떨어질 때, 상수 a 의 값은? [3.8점]

- ① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

37. 다항식 $x^3 - x^2 - x + a$ 가 $x^2 + x + 1$ 로 나누어 떨어질 때, 상수 a 의 값은? [3.8점]

- ① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

다항식의 나눗셈과 도형의 활용

38. 빗변의 길이가 10인 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a , b 라 하면 $ab=22$ 가 성립한다. a^3+b^3 의 값은? (단, a , b 는 상수이다.) [4점]

- ① 324 ② 525 ③ 728
④ 936 ⑤ 1339

1. 다항식의 연산(step2)

다항식의 덧셈과 뺄셈

39. 세 다항식

$$A = x^3 + mx^2 + 2x - 1$$

$$B = x^3 + x^2 - 3$$

$$C = x^3 + nx - 2$$

에 대하여 다항식 $2A - \{B - (C - 3A)\}$ 의 전개식에서 x^2 의 계수가 -4 , x 의 계수가 2 일 때, $m+n$ 의 값은? (단, m , n 은 상수이다.) [5.3점]

- ① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

40. 세 다항식 $A = x^3 - 2x^2 + 7x$, $B = 2x^3 - x - 4$,

$C = -3x^3 + 2$ 에 대하여 $A - (B + 2C)$ 를 구하면? [3.5점]

- ① $5x^2 + 2x^2 + 8x$ ② $5x^3 - 2x^2 + 8x$
③ $5x^3 + x^2 + 4x$ ④ $5x^3 + x^2 + 2x$
⑤ $5x^3 + x^2 + 4$

41. $a+b=1$, $ab=-4$, $x+y=-2$, $xy=3$ 이고

$$m = ax + by, \quad n = bx + ay$$

라 할 때, $m^3 + n^3$ 의 값은? [4.1점]

- ① 198 ② 199 ③ 200
④ 201 ⑤ 202

곱셈공식을 이용한 다항식의 전개

42. 두 다항식 A, B 에 대하여 $\langle A, B \rangle$ 를

$$\langle A, B \rangle = A^2 - AB + B^2$$

으로 정의하자. 다항식 $\langle x^2 - 1, 3x^2 + x \rangle$ 의 전개식에서 x^2 의 계수는? [3.4점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

43. 세 양수 x, y, z 에 대하여

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx + 2x + 2y + 8 = 107$$

이 성립한다고 할 때, $5x + 5y + 5z$ 의 값을 구하고 풀이과정을 논술하시오. [5점]

44. $a = 23$ 일 때, $a^3 - 9a^2 + 27a - 27$ 의 값을 N 이라 하자. $\frac{N}{50}$ 의

값은? [3.4점]

- ① 80 ② 120 ③ 160
④ 200 ⑤ 240

곱셈공식의 변형

45. $a + b + c = 2$, $a^2 + b^2 + c^2 = 4$, $a^3 + b^3 + c^3 = 8$ 일 때,

$a^8 + b^8 + c^8$ 의 값은? [5.3점]

- ① 144 ② 139 ③ 196
④ 225 ⑤ 256

46. $a + b = 2$, $a^2 + b^2 = 6$ 일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4.6점]

[보 기]

$$\neg. a^2 = 2a + 1$$

$$\angle. a^3 + b^3 = 14$$

$$\sqsubset. a^5 + b^5 + a^4 + b^4 = 118$$

- ① $\neg$ ② $\sqsubset$ ③ $\neg, \angle$
④ $\angle, \sqsubset$ ⑤ $\neg, \angle, \sqsubset$

47. $a + b = -1$, $a^2 + b^2 = 4$ 일 때, $a^6 + b^6$ 의 값은? [4.5점]

- ① 37 ② 38 ③ 39
④ 40 ⑤ 41

48. $a+b+c=3$, $ab+bc+ca=2$ 일 때,
 $(a+b)(b+c)+(b+c)(c+a)+(c+a)(a+b)$
 의 값은? [4.8점]

- ① 11 ② 12 ③ 13
 ④ 14 ⑤ 15

49. $a+b+c=5$, $ab+bc+ca=5$, $a^3+b^3+c^3=65$ 일 때,
 $\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$ 의 값은? [3.8점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

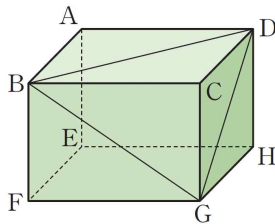
다항식의 나눗셈과 도형의 활용

50. 오른쪽 그림과 같은

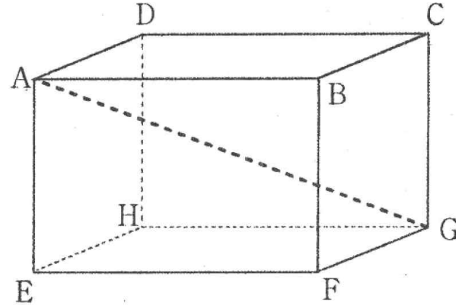
직육면체의 겹넓이가 42이고,
 $\triangle BGD$ 의 세 변의 길이의 제곱의
 합이 44일 때, 이 직육면체의
 모든 모서리의 길이의 합은?

[4.3점]

- ① 32 ② 33
 ③ 34 ④ 35
 ⑤ 36

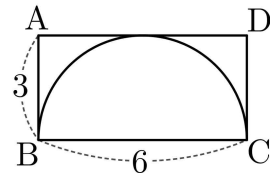


51. 그림과 같이 모든 모서리의 길이의 합이 32이고 겹넓이가
 40인 직육면체 $ABCD-EFGH$ 가 있다. $\overline{AG}$ 의 길이는? [4.2점]



- ① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{6}$
 ④ $2\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{10}$

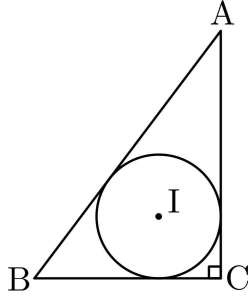
52. $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=6$ 인 직사각형과 선분 BC를 지름으로 하는
 반원이 있다. 호 BC 위에 있는 점 P에서 선분 AB에 내린
 수선의 발을 Q, 선분 AD에 내린 수선의 발을 R이라 할 때,
 직사각형 AQPR의 둘레의 길이는 14이다. 직사각형 AQPR의
 넓이는?
 [4.7점]



- ① 6 ② $\frac{13}{2}$ ③ 7
 ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 8

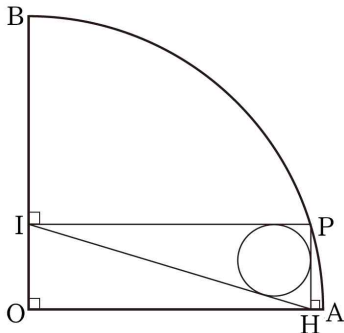
53. $\angle C = 90^\circ$ 이고 $\overline{BC} < \overline{AC}$ 인 직각삼각형 ABC가 있다.

그림과 같이 점 I는 삼각형 ABC의 내심이고 삼각형 ABC의 내접원의 반지름은 1이다. 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 12일 때, 선분 BC의 길이는? [4.8점]



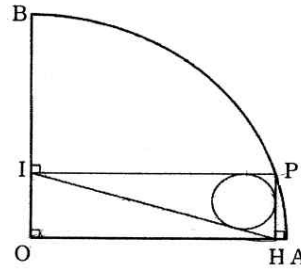
- ① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

54. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 6이고 중심각의 크기가 90° 인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 두 선분 OA, OB에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하자. 삼각형 PIH에 내접하는 원의 넓이가 π 일 때, $\overline{PH}^3 + \overline{PI}^3$ 의 값은? (단, 점 P는 점 A도 아니고 점 B도 아니다.) [5.4점]



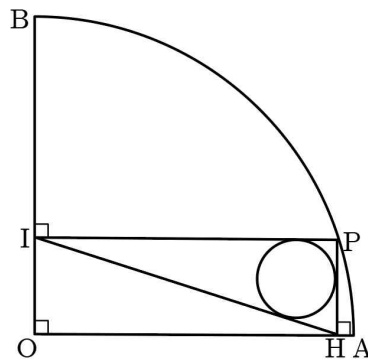
- ① 172 ② 176 ③ 180
④ 186 ⑤ 192

55. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 8이고 중심각의 크기가 90° 인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 두 선분 OA, OB에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하자. 삼각형 $\triangle PIH$ 에 내접하는 원의 넓이가 π 일 때, $\overline{PH}^3 + \overline{PI}^3$ 의 값은? (단, 점 P는 점 A도 아니고 점 B도 아니다.) [5.3점]



- ① 450 ② 455 ③ 457
④ 460 ⑤ 462

56. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 6이고 중심각의 크기가 90° 인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 두 선분 OA, OB에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하자. 삼각형 PIH에 내접하는 원의 넓이가 π 일 때, $\frac{1}{8}(\overline{PH}^3 + \overline{PI}^3)$ 의 값은? [4.3점]

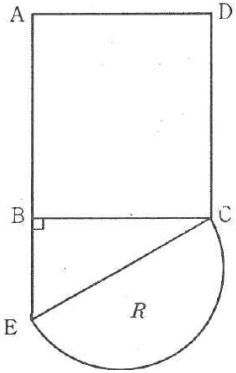


- ① 14 ② 16 ③ 18
④ 20 ⑤ 22

57. 그림과 같이 직사각형 $ABCD$, 직각삼각형 BEC , 선분 EC 를 지름으로 하는 반원 R 이 있다. 직사각형 $ABCD$ 의 세로의 길이는 $(x+1)^2$ 이고, 직사각형 $ABCD$, 직각삼각형 BEC , 반원 R 의 넓이는 각각 x^3+5x^2+7x+a , $\frac{1}{2}x^2+bx+a$,

$\frac{\pi}{4}(x^2+5x+c)$ 이다.

상수 a, b, c 에 대하여 $a+b+c$ 의 값은? [4.8점]



- ① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

1.

다항식(step3)

58. 실수 x, y, z 가 $x+y+z=5$, $xy+yz+zx=5$, $xyz=1$ 을 만족시킬 때, $x^5+y^5+z^5$ 의 값을 구하고, 그 이유를 논하시오. [7.0점]

59. 실수 x, y, z 에 대하여 $x+y+z=4$, $x^2+y^2+z^2=12$, $xyz=-4$ 일 때, $x^4+y^4+z^4$ 의 값을 구하는 풀이과정과 답을 논술하시오.[8.0점]

2.

항등식과 나머지 정리(step1)

계수비교법, 수치대입법

60. 등식 $x(x+1)+2(x+1)=x^2+ax+b$ 가 x 에 대한 항등식일 때, 두 상수 a, b 에 대하여 $a-b$ 의 값은? [3.9점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

61. 등식 $x^2-4x+3=a(x+1)^2+b(x+1)+c$ 가 x 에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b, c 의 값을 정할 때, $2a-b+c$ 의 값은? [4.3점]

- ① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

62. 등식 $3x^2+ax-16=(bx+4)(x+c)$ 가 x 에 대한 항등식일 때, $a+b+c$ 의 값은? (단, a, b, c 는 상수이다.) [4점]

- ① -10 ② -9 ③ -8
④ -7 ⑤ -6

63. 모든 실수 x 에 대하여 등식 $x^2+ax+5=x(x+3)+b$ 가 성립할 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수) [3.6점]

- ① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

64. 등식 $3x^2+5x-1=ax^2+bx+c$ 가 x 에 대한 항등식이 되도록 하는 상수 a, b, c 의 합 $a+b+c$ 의 값은? [3.7점]

- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

65. 등식 $ax^2+bx+c=(x+1)^2+2(x-1)$ 가 x 에 대한 항등식이 되도록 하는 상수 a, b, c 의 값을 구하고, 그 풀이 과정을 논술하시오. (부분 점수 있음) [4.0점]

66. 등식

$$a(x-1)^2+b(x+1)(x-1)+c=2(x-1)(x-2)-(x+1)(x-2)+3(x-1)(x+1)$$

이 x 에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c 의 값을 각각 구하고 그 과정을 서술하시오. [5.0점]

67. 등식 $ax(x+1)+bx(x-1)=x^2+4x+c$ 가 x 에 대한
항등식이 되도록 하는 세 상수 a, b, c 에 대하여 $4a-2b+c$ 의
값은? [4.1 점]

- ① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

68. 모든 실수 x 에 대하여 등식

$$x^2+3x+5=a(x-1)^2+b(x-1)+9$$

가 항상 성립할 때, 상수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값은? [4.4점]

- ① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

69. 등식 $(k+2)x-(2k+1)y-1=0$ 이 k 의 값에 관계없이
항상 성립할 때, $x+y$ 의 값은? (단, x, y 는 상수이다.) [3.9점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

70. 등식 $ax^2+bx-7=3x^2+2x-c$ 가 x 의 항등식일 때, 실수
 a, b, c 에 대하여 abc 의 값은? [3.4점]

- ① 35 ② 36 ③ 42
④ 48 ⑤ 49

71. 다항식 $P(x)$ 와 상수 a 에 대하여 등식

$$x^3-x^2+3x-2=(x+2)P(x)+ax$$

가 x 에 대한 항등식일 때, $P(4)$ 의 값은? [4.3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

일차식으로 나눌 때의 나머지정리

72. 다항식 x^3-2x+1 을 일차식 $x-2$ 로 나누었을 때의
나머지는? [4.1점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

73. 다항식 x^3-2x^2+ax-4 가 $x-1$ 로 나누어떨어질 때, 상수
 a 의 값은? [4.6점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

74. 다항식 $x^3 + 2x^2 - x - 6$ 을 $x + 3$ 으로 나누었을 때의 나머지는? [4.8점]

- ① -14 ② -13 ③ -12
④ -11 ⑤ -10

75. 다항식 $8x^3 - 6x + 4$ 를 일차식 $x - 2$ 로 나누었을 때의 나머지는? [4.2점]

- ① 50 ② 52 ③ 54
④ 56 ⑤ 58

76. 다항식 $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + ax - 3$ 을 $2x + 1$ 로 나누었을 때의 나머지가 2일 때, 상수 a 의 값은? [4.3점]

- ① -8 ② -7 ③ -6
④ -5 ⑤ -4

77. 다항식 $4x^3 - 3x + 1$ 을 $x - 1$ 로 나누었을 때의 나머지는? [3.1점]

- ① 1 ② 2 ③ $3z$
④ 4 ⑤ 5

이차식으로 나눌 때의 나머지 정리

78. 다항식 $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ 를 $x^2 + x + 1$ 로 나누었을 때의 몫은? [4.7점]

- ① $x - 3$ ② $x - 2$ ③ $x - 1$
④ x ⑤ $x + 1$

79. 다항식 $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$ 가 $(x - 1)(x + 2)$ 로 나누어떨어질 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오. [5.0점]

80. 삼차다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(x)-5$ 는 $2x^2-4x+2$ 로 나누어 떨어지고, $f(x)+3$ 은 x^2+2x+1 로 나누어떨어질 때, 삼차다항식 $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나눌 때의 나머지는? [4.6 점]

- ① -3 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 3

81. 다항식 $P(x)$ 에 대하여 다항식 $P(x)-4$, $x^2P(x)$ 가 모두 일차식 $x-\alpha$ 로 나누어떨어질 때, $3P(x)+2$ 를 x 로 나눈 나머지는? (단, α 는 상수이다.) [4.4점]

- ① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

82. 다항식 $f(x)$ 를 $x-a$, $x-b$ 로 나눈 나머지가 각각 a^2 , b^2 일 때, $f(x)$ 를 $(x-a)(x-b)$ 로 나눈 나머지를 구하는 풀이 과정을 쓰고 답을 구하시오. (단, a , b 는 $a \neq b$ 인 상수이다.) [6 점]

83. 다항식 A 를 x^2+x-3 로 나누었을 때의 몫이 $2x^2-5$ 이고 나머지가 -7 이라고 한다. 이 다항식 A 를 $2x^2-2x+1$ 로 나누었을 때, 몫과 나머지의 합은? [4.2점]

- ① $x^2-13x+8$ ② $x^2-14x+8$
③ $x^2-15x+8$ ④ $x^2-16x+8$
⑤ $x^2-17x+8$

84. 다항식 $P(x)=x^3-ax^2+bx+5$ 를 x^2+2 로 나누었을 때의 나머지가 $2x+1$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, a , b 는 상수이다.) [4.8점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

$P(ax+b)$ 를 $x-\alpha$ 로 나눌때의 나머지 정리

85. x 에 대한 삼차다항식 $P(x)$ 에 대하여 $P(x+2)$ 를 x^2-1 로 나누었을 때의 나머지가 $2x+1$ 일 때, $P(x)$ 를 $x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지는? [4.1점]

- ① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

몫의 활용

86. 다항식 $f(x)$ 를 $3x+2$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 할 때, $f(x)$ 를 $x+\frac{2}{3}$ 로 나눈 몫과 나머지를 순서대로 적은 것은?
(단 $Q(x) \neq 0$, $R \neq 0$ 이다.) [3.9점]

- ① $\frac{1}{3}Q(x), \frac{1}{3}R$ ② $\frac{1}{3}Q(x), R$ ③ $Q(x), R$
④ $3Q(x), R$ ⑤ $3Q(x), 3R$

나머지 정리와 수의 나눗셈

87. $2024^{99} + 2022^{99}$ 를 2023으로 나누었을 때 나머지는?
[5.4점]

- ① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

조립제법

88. 다음은 조립제법을 이용하여 $(2x^3 - 7x^2 + 4) \div (x-2)$ 의 몫과 나머지를 구하는 과정이다. 상수 a, b, c, d, e 의 값으로 옳은 것은? [4.4점]

a	2	-7	b	4
		4	d	e
	2	c	-6	-8

- ① $a=-2$ ② $b=0$ ③ $c=-6$
④ $d=-4$ ⑤ $e=-9$

89. 다항식 $4x^3 - 3x^2 + x + 2$ 를 $2x+1$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하기 위하여 조립제법을 이용하였다. 이때, 몫을 $Q(x)$ 라 할 때, $Q(0)$ 과 a 의 값의 합은? [5.0점]

$-\frac{1}{2}$	4	-3	1	2
	4		a	

- ① $\frac{7}{4}$ ② $\frac{7}{2}$ ③ $\frac{15}{4}$
④ $\frac{21}{4}$ ⑤ 7

90. 다음은 다항식 $2x^3 + 3x^2 - x - 4$ 를 $2x + 1$ 로 나눈 몫과 나머지를 구하기 위하여 조립제법을 이용하는 과정이다.

$-\frac{1}{2}$	2	3	-1	-4
		a	b	1
	2	c	d	-3

이므로

$$2x^3 + 3x^2 - x - 4 = \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(\boxed{\text{(가)}}\right) - 3$$

$$= (2x + 1) \left(\boxed{\text{(나)}}\right) - 3$$

따라서, 몫은 $\boxed{\text{(나)}}$ 이고, 나머지는 -3 이다.

위의 (가), (나)에 들어갈 식을 각각 $f(x)$, $g(x)$ 라 할 때, $f(a+b) + g(c+d)$ 의 값은? (단, a, b, c, d 는 상수이다.) [4.1점]

- ① 1 ② 3 ③ 5
 ④ 7 ⑤ 9

91. 다음은 다항식 $ax^3 + bx^2 + cx + d$ 를 $(x+1)(x-2)$ 로 나누었을 때의 몫 $Q(x)$ 와 나머지 $R(x)$ 를 구하기 위해 조립제법을 이용하는 과정이다.

-1	a	b	c	d
2	2			-2
	2	-1	5	

$Q(b) + R(a)$ 의 값은? (단, a, b, c, d 는 상수이다.) [4.4점]

- ① -6 ② -3 ③ 0
 ④ 3 ⑤ 6

92. $(x+3)^4 - 2(x+3)^3 + 5(x+3)^2 + 4(x+3) - 7$
 $= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
 가 x 에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c, d, e 에 대하여 $a - b + c + d - e$ 의 값은? [4.3점]

- ① 39 ② 40 ③ 41
 ④ 42 ⑤ 43

2.

항등식과 나머지 정리(step2)

계수의 합

93. 다항식 $(x^3 - x^2 + 3x - 1)^2$ 을 전개하였을 때, 상수항을 포함한 모든 항들의 계수의 합은? [3.4점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

94. 등식

$(x^2 + 4x + 2)^{10} = a_{20}(x+1)^{20} + a_{19}(x+1)^{19} + \cdots + a_1(x+1) + a_0$
이 x 에 대한 항등식일 때, 상수 $a_0, a_1, \cdots, a_{19}, a_{20}$ 에 대하여
 $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{18} + a_{20}$ 의 값은? [4.1점]

- ① 1021 ② 1022 ③ 1023
④ 1024 ⑤ 1025

95. 등식 $(x^2 - 2x - 1)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{10}x^{10}$ 이 x 의 값에 관계없이 항상 성립할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ 은 상수이다.) [4.7점]

[보 기]

- ㄱ. $a_0 = -1$
ㄴ. $a_1 = -5$
ㄷ. $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = -32$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

96. x 에 대한 항등식

$(1 + x - 2x^2)^{10} = a_{20}x^{20} + a_{19}x^{19} + a_{18}x^{18} + \cdots + a_1x + a_0$ 에서
 $a_1 + a_3 + \cdots + a_{17} + a_{19}$ 의 값은? (단, $a_0, a_1, \cdots, a_{20}$ 은 상수이다.) [4.4점]

- ① -2^9 ② -2^{10} ③ -2^{11}
④ -2^{12} ⑤ -2^{13}

97. 다항식 $\{(1-x) + (1-x)^2 + (1-x)^3\}^4$ 의 전개식에서 x 의 계수는? [4.7점]

- ① -645 ② -646 ③ -647
④ -648 ⑤ -649

98. 등식

$(x^2 + 3x + 1)^7 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{13}x^{13} + a_{14}x^{14}$ 이 x 값에 관계없이 항상 성립할 때,

$\frac{1}{9}(a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + a_9 - a_{11} + a_{13})$ 의 값은?

(단, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{14}$ 은 상수이다.) [5.4점]

- ① -243 ② -81 ③ -27
④ -9 ⑤ -3

99. 등식 $(2x^2 - x)^6 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{11}x^{11} + a_{12}x^{12}$ 이 x 에 대한 항등식일 때, $a_8 + a_{10} + a_{12} - 5a_5$ 의 값은? (단, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{11}, a_{12}$ 는 상수이다.) [4.3점]

- ① 364 ② 365 ③ 366
④ 367 ⑤ 368

100. 모든 실수 x 에 대하여 등식

$(2x + 1)^6 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6$ 이 성립할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $a_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ 은 상수이다.) [4.6점]

[보 기]

$$\neg. a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 3^6$$

$$\angle. 2a_0 - a_1 + \frac{a_2}{2} - \frac{a_3}{4} + \frac{a_4}{8} - \frac{a_5}{16} + \frac{a_6}{32} = 0$$

$$\sqsubset. \frac{a_1}{4} + \frac{a_3}{16} + \frac{a_5}{64} = 32$$

- ① $\neg$ ② $\angle$ ③ $\neg, \angle$
④ $\neg, \sqsubset$ ⑤ $\neg, \angle, \sqsubset$

계수비교법, 수치대입법

101. 자연수 n 에 대하여

$P_n(x) = (x-1)(x-2)(x-3) \cdots (x-n)$ 이라 하자. 등식

$aP_3(x) + bP_2(x) + cP_1(x) + d = x^3 + 4x^2 - 6x - 2$ 가 x 의 값에 관계없이 항상 성립한다고 할 때, 상수 a, b, c, d 에 대하여 $ab - cd$ 의 값은? [4.9점]

- ① 45 ② 46 ③ 47
④ 48 ⑤ 49

102. 모든 실수 x 에 대하여 등식

$$(3x-2)^3 = ax(x-1)(x-2) + b(x-1)(x-2) + c(x-2) + d$$

성립할 때, 상수 a, b, c, d 에 대하여 $2a-b+c-d$ 의 값은? [4.2점]

- ① 22 ② 23 ③ 24
④ 25 ⑤ 26

103. 다항식 $f(x)$ 에 대하여 등식

$$(x+4)f(x) = x(x^2+kx-22)+8$$

이 x 에 대한 항등식일 때, $f(k)$ 의 값은? (단, k 는 상수)[4.0점]

- ① 9 ② 18 ③ 27
④ 36 ⑤ 45

104. 등식 $x^3-ax+6=(x-2)(x+b)(x+c)$ 가 x 에 대한

항등식일 때, 물음에 답하시오. (단, $b < c$) [총 7.0점]

(1) 상수 a 의 값을 구하고, 그 과정을 논술하시오. [3.0점]

(2) (1)의 결과를 이용하여 $b+c$ 의 값을 구하고, 그 과정을 논술하시오. [4.0점]

다항식의 나눗셈과 항등식

105. 다항식 $P(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 등식

$$(x-2)(x^2+x+1)P(x) = x^4 - 2x^3 + ax + b$$

를 만족시킬 때, $P(2)+a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [5.1점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

106. 모든 실수 x 에 대하여 다항식 $P(x)$ 가

$$\{P(x)+7\}^2 = (x+2a)(x+4a)+9$$

를 만족시킬 때, 모든 $P(2)$ 의 값의 합은? (단, a 는 실수이다.) [4.3점]

- ① -44 ② -36 ③ -28
④ -20 ⑤ -12

107. 이차항의 계수가 2인 이차다항식 $P(x)$ 와 일차항의 계수가 1인 일차다항식 $Q(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \ P(1) = Q(1)$$

$$(나) \ P(-2) - P(4) = Q(-2) - Q(4)$$

다항식 $P(x)+Q(x)$ 가 $x-3$ 으로 나누어떨어질 때, $P(3)$ 의 값은? [4.4점]

- ① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

108. 이차항의 계수가 1인 이차식 $P(x)$ 와 일차항의 계수가 1인 일차식 $Q(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 다항식 $P(x+1)-Q(x+1)$ 은 $x+1$ 로 나누어떨어진다.
 (나) 방정식 $P(x)+Q(x)=0$ 은 중근을 갖는다.

다항식 $P(x)-Q(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지가 8일 때, $P(2)$ 의 값은? [5.1점]

- ① 6 ② 9 ③ 12
 ④ 15 ⑤ 18

109. 모든 실수 x 에 대하여 다항식 $P(x)$ 가

$\{P(x)+3\}^2 = (x-a)(x-3a)+4$ 를 만족시킬 때, 모든 $P(1)$ 의 값의 합은? (단, a 는 실수이다.)

- ① -14 ② -12 ③ -10
 ④ -8 ⑤ -6

110. 삼차다항식 $P(x)$ 와 일차다항식 $Q(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $P(x)Q(x)$ 는 $(x^2-2x+2)(x-2)$ 로 나누어떨어진다.
 (나) 모든 실수 x 에 대하여 $2x^3+x^2-42x+73 = P(x) + \{Q(x)\}^2$ 이다.

$Q(1) > Q(2)$ 일 때, $P(1)+Q(2)$ 의 값은? [4.6점]

- ① 1 ② 3 ③ 6
 ④ 9 ⑤ 12

111. 최고차항의 계수가 음수인 다항식 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\{f(x)\}^3 = 4x^2f(x) + 8x^2 - 6x + 1$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [5.0점]

—<보 기>—

- ㄱ. 다항식 $f(x)$ 를 $x+1$ 로 나눈 나머지는 3이다.
 ㄴ. 다항식 $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 -4이다.
 ㄷ. 다항식 $\{f(x)\}^3$ 을 x^2-x-2 로 나눈 나머지는 $-18x-27$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

112. 최고차항의 계수가 양수인 다항식 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $\{f(x)\}^3 = 4x^2f(x) + 8x^2 + 6x + 1$ 을 만족시킨다. $\{f(x)\}^3$ 을 $x^2 - 1$ 로 나눈 나머지가 $px + q$ 일 때, $p + 2q$ 의 값은? [4.7점]

- ① 40 ② 42 ③ 44
④ 46 ⑤ 48

113. x^2 의 계수가 1인 두 이차식 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 모든 x 에 대하여 $(x+2)f(x) = (x-3)g(x)$
(나) $f(x)g(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$

두 이차식의 합 $f(x) + g(x)$ 를 구하고, 풀이 과정을 논술하시오. [7점]

114. 다항식 $f(x)$ 가 $f(1) = 2$ 이고 임의의 실수 x , y 에 대하여

$$16f(x) \times f(y) = \{f(x+y) - f(x-y)\}^2$$

이 성립할 때, $f(5)$ 의 값은? (단, $f(x) \geq 0$) [5.2점]

- ① 8 ② 12 ③ 26
④ 50 ⑤ 64

몫과 나머지

115. 다항식 $2x^3 + 3x^2 + 2x - 4$ 를 $2x - 1$ 로 나누었을 때 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 할 때 $Q(1) + R$ 의 값은? [3.6점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

116. 다항식 $x^{2023} + x^9 + 19$ 을 다항식 $x^4 - 1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$ 라 하자. $Q(1) + R(2)$ 의 값은? [5.0점]

- ① 534 ② 536 ③ 538
④ 540 ⑤ 542

117. 다항식 $P(x) = 3x^3 - x + 1$ 를 일차식 $3x - 1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라 할 때, $Q(-2) - R$ 의 값은? (단, R 은 상수이다.) [4.4점]

- ① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{23}{9}$ ③ $\frac{25}{9}$
④ $\frac{28}{9}$ ⑤ $\frac{77}{9}$

118. 다항식 $f(x)$ 를 x^2+1 로 나누었을 때의 몫은 $2x+1$ 이고 나머지는 $-2x+4$ 이다. $f(x)$ 를 x^2-x+1 로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(3)$ 의 값은? [4.3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

119. 최고차항의 계수가 2인 다항식 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 다항식 $f(x)$ 를 다항식 $g(x)$ 로 나눈 몫과 나머지는 모두 $g(x)-2x^2$ 이다.
(나) $f(-1)=-\frac{9}{4}$

$f(x)$ 를 $2x+1$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라 할 때, $Q(1)+R$ 의 값은? [5.1점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{5}{12}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{7}{12}$

일차식으로 나눌 때의 나머지정리

120. 다항식 $P(x)=x^3-2x^2+1$ 을 $2x-1$ 로 나누었을 때의 나머지는? [3.6점]

- ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

121. 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $f(x)+g(x)$ 는 $x+1$ 로 나누어 떨어지고, $f(x)-g(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지는 4이다. <보기>의 다항식 중 $x+1$ 로 나누어 떨어지는 것만을 있는 대로 고른 것은? [4.8점]

[보 기]

- ㉠. $f(x)+2x^3$
㉡. $g(x)-2x^2$
㉢. $f(x)g(x)-4$

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

122. 다항식 $P(x) = x^2 + ax + b$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 다항식 $P(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는 4이다.
 (나) 실수 p 에 대하여 이차방정식 $P(x)=0$ 의 한 근은 $p+2i$ 이다.

$a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 실수이고, $i = \sqrt{-1}$ 이다.) [4.7점]

- ① 3 ② 4 ③ 5
 ④ 6 ⑤ 7

123. 다항식 $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ 을 $x-k$ 로 나눈 나머지와 $x+k$ 로 나눈 나머지의 합이 12이다. $P(x)$ 를 $x-k^2$ 으로 나눈 나머지는? (단, k 는 상수)[4.3점]

- ① 156 ② 157 ③ 158
 ④ 159 ⑤ 160

이차식으로 나눌 때의 나머지 정리

124. 다항식 $P(x) = x^3 + x^2 + 1$ 을 $x-a, x+a$ 로 나누었을 때, 나머지를 각각 R_1, R_2 라고 하면 $R_1 + R_2 = 10$ 이다. $P(x)$ 를 $x-a^2$ 으로 나누었을 때, 나머지는? (단, a 는 상수이다.) [4.6점]

- ① 78 ② 80 ③ 81
 ④ 82 ⑤ 83

125. 다항식 $3x^4 + 5x^3 + 4x - 3$ 을 $x^2 - 2$ 로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라고 할 때, $R(1)$ 의 값은? [4.3점]

- ① 15 ② 17 ③ 19
 ④ 21 ⑤ 23

126. 다항식 $P(x)$ 를 $x^2 - x$ 로 나누었을 때의 몫이 $x^2 - 3x - 5$ 이고, 나머지가 $ax+b$ 이었다. $P(x)$ 가 $x+1$ 을 인수로 가질 때, 상수 a, b 에 대하여 $a-b$ 의 값은? [3.8점]

- ① -1 ② -2 ③ -3
 ④ -4 ⑤ -5

127. 다항식 $x^3 - ax^2 + (b+1)x + b^2 + 2$ 를 $(x-a)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $x+2$ 일 때, 두 상수 a, b 에 대하여 $b-a$ 의 값은? (단, $a \neq 0$) [5.0점]

- ① -2 ② -3 ③ -4
④ -5 ⑤ -6

128. x 에 대한 다항식 $x^{11}(x^2 - ax + b)$ 를 $(x+2)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $2^{11}(x+2)$ 일 때, 두 상수 a, b 에 대하여 $2a+b$ 의 값은?

[4.4 점]

- ① -7 ② -6 ③ -5
④ -4 ⑤ -3

129. 최고차항의 계수가 1인 사차다항식 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)$ 의 값은? [5.4점]

- $f(x)$ 를 $x+2$ 로 나눈 나머지와 $f(x)$ 를 x^2-6 으로 나눈 나머지는 서로 같다.
- $f(x+2)-3$ 은 x^2+2x 로 나누어떨어진다.

- ① -25 ② -24 ③ -22
④ -21 ⑤ -20

130. 최고차항의 계수가 1인 두 이차식 $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 다항식 $f(x)+g(x)$ 는 x^2-4 로 나누어떨어진다.
- (나) 다항식 $f(x)+3g(x)$ 를 $x-1, x-3$ 으로 각각 나누었을 때의 나머지는 모두 6이다.

다항식 $f(x)g(x)$ 를 $\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)\}$ 로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(2)$ 의 값을 구하고 풀이과정을 논술하시오. [7점]

131. 다음 조건을 만족시키는 다항식 $f(x)$ 중에서 가장 차수가 낮은 다항식을 $g(x)$ 라 하자. $g(1)$ 의 값은? [4.4점]

- $f(x)$ 는 x^2-2x-3 과 x^2+6x+5 로 나누었을 때 모두 나머지가 3이다.
- $f(x)$ 는 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는 45이다.

- ① 47 ② 48 ③ 49
④ 50 ⑤ 51

132. 다항식 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족할 때, $g(6)$ 의 값은? [4.5점]

- 모든 실수 x 에 대하여 $f(4+x)+f(4-x)=20$ 이다.
- $f(x)$ 를 $(x-3)(x-4)$ 로 나눈 나머지는 $g(x)$ 이다.
- $g(x)$ 를 $(x-5)$ 로 나눈 나머지는 15이다.

- ① 10 ② 20 ③ 30
④ 40 ⑤ 50

133. 최고차항의 계수가 1인 사차다항식 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값은? [4.5점]

- (가) $f(x)$ 를 $x+2$ 로 나눈 나머지와 $f(x)$ 를 x^2-5 로 나눈 나머지는 서로 같다.
 (나) $f(x+1)-5$ 는 x^2+2x 로 나누어떨어진다.

- ① 11 ② 13 ③ 15
 ④ 17 ⑤ 19

134. 삼차다항식 $P(x)$ 에 대하여 $P(x)-4$ 는 $(x-1)^2$ 으로 나누어떨어지고 $-2x+2-P(x)$ 는 x^2-x-2 로 나누어떨어질 때, $P(0)$ 의 값은? [5.1점]

- ① -4 ② -2 ③ 0
 ④ 2 ⑤ 4

135. 삼차식 $f(x)$ 에 대하여 $f(x)+7$ 은 $(x-2)^2$ 으로 나누어 떨어지고, $2-f(x)$ 는 x^2-1 로 나누어 떨어진다. $f(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지는? [5.0점]

- ① -55 ② -52 ③ -48
 ④ -45 ⑤ -43

136. 다항식 $P(x)$ 가 삼차식일 때, $P(x)+30$ 은 $(x-4)^2$ 으로 나누어 떨어지고, $6-P(x)$ 는 x^2-4 로 나누어 떨어진다고 한다. 다항식 $P(x)$ 를 구하였을 때, x^2 의 계수는? [4.8점]

- ① -8 ② -9 ③ -10
 ④ -11 ⑤ -12

삼차식으로 나눌 때의 나머지 정리

137. 다항식 $P(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지가 5이고 x^2+x+1 로 나누었을 때의 나머지가 $3x-7$ 이다. 다항식 $P(x)$ 를 $5x^3-5$ 로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(-1)$ 의 값은? [4.9점]

- ① -10 ② -9 ③ -8
 ④ -7 ⑤ -6

138. 다항식 $P(x)$ 는 다음 두 조건을 만족시킨다.

- (가) $P(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지가 7이다.
 (나) $P(x)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $x+4$ 이다.

$P(x)$ 를 $(x-1)(x-2)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(-1)$ 의 값은? [5.0점]

- ① 9 ② 12 ③ 15
 ④ 18 ⑤ 21

139. $f(-1)=2$ 인 사차다항식 $f(x)$ 를 $(x+1)^3$ 으로 나눈 몫과 나머지가 같다. $f(x)$ 를 $(x+1)^4$ 으로 나눈 나머지의 이차항의 계수는? [4.7점]

- ① -6 ② -3 ③ 0
④ 3 ⑤ 6

140. 다항식 $f(x)$ 를 x^5+1 로 나누었을 때의 나머지가 x^3+1 이고, 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지가 -2 이다. 다항식 $f(x)$ 를 $(x^5+1)(x-1)$ 로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(-2)$ 의 값은? [4.8점]

- ① 54 ② 55 ③ 56
④ 57 ⑤ 58

141. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $x-3$ 을 나누었을 때의 나머지는 5이고, $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $x-6$ 이다. $f(x)$ 를 $(x+1)^2(x-3)$ 으로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$ 라고 할 때, $R(9)$ 의 값은? [4.1점]

- ① 49 ② 50 ③ 51
④ 52 ⑤ 53

$P(ax+b)$ 를 $x-\alpha$ 로 나눌때의 나머지 정리

142. 두 다항식 $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x^2) = xg(x) + x^3 - 2x + 3 \text{ 이다.}$$

(나) $f(x-1)g(x-1) - 2x$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는 5이다.

$\{f(x)\}^4 + \{f(x)g(x)\}^2 + \{g(x)\}^4$ 을 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지는? [5.2점]

- ① 321 ② 362 ③ 403
④ 445 ⑤ 486

143. x 에 대한 삼차다항식 $f(x)$ 에 대하여 다항식

$(x+2)f(x)$ 가 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지가 2, $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지가 3, $x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지가 4이다. $f(0) = \frac{3}{10}$ 일 때, $f(5)$ 의 값은? [5.4점]

- ① $\frac{9}{5}$ ② $\frac{88}{35}$ ③ 4
④ 6 ⑤ $\frac{42}{5}$

몫의 활용

144. 다항식 $P(x)$ 와 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식

$Q(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\{Q(x+2)\}^2 + \{Q(x)\}^2 = (x^2 - 2x)P(x)$$

를 만족시킨다. $P(x)$ 를 $Q(x)$ 로 나누었을 때 몫을 $G(x)$, 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $G(8)+R(3)$ 의 값을 구하고, 그 과정을 서술하시오. (단, 다항식 $Q(x)$ 의 계수는 실수이다.) [5점]

145. x 에 대한 다항식 $x^{2023} + x + 1$ 을 $x^2 - 1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라고 할 때, $Q(x)$ 의 모든 계수의 합을 구하고 풀이 과정을 논술하시오.

146. 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$ 가

$f(1)=3$ 이고, $f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫과 나머지가 같다. $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 할 때, $Q(3)$ 의 값은? [4.0점]

- ① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

147. $x^6 - 1$ 을 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$ 라 하자. $Q(x)$ 를 $R(x)$ 로 나눈 나머지는? [5.0점]

- ① 7 ② 9 ③ 11
④ 13 ⑤ 15

148. x 에 대한 다항식 $x^4 + 2ax + b$ 가 $(x+1)^2$ 으로 나누어 떨어질 때, 몫을 $Q(x)$ 라 하자. 두 상수 a, b 에 대하여 $a+b+Q(2)$ 의 값은? [4.1점]

- ① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

149. 계수가 실수이고 삼차항의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f(3)=5$
(나) $f(x)$ 를 $(x-3)^2$ 으로 나누었을 때의 몫과 나머지가 같다.

$f(x)$ 를 $x-3$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 할 때, $Q(4)$ 의 값은? [4.5점]

- ① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

150. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 2라 하고, $Q(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지를 3이라 하자. $\{f(x)\}^2$ 을 $(x-1)^2$ 으로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(2)$ 의 값은? [4.7점]

- ① 16 ② 17 ③ 18
④ 19 ⑤ 20

151. 다항식 $P(x)=15x^3-2x^2+17x+2$ 를 $Q(x)$ 로 나눈 몫이 $5x+1$, 나머지가 $3x-1$ 일 때, 다항식 $Q(x)$ 를 $3x+1$ 로 나눈 몫과 나머지를 구하고, 풀이 과정과 답을 자세히 논술하시오. [7.0점]

152. 다항식 $3x^3+5x^2-4x+2$ 를 $2x-1$ 로 나눈 몫을 $Q_1(x)$, $4x-2$ 로 나눈 몫을 $Q_2(x)$, $6x-3$ 으로 나눈 몫을 $Q_3(x)$ 라 할 때, $\frac{Q_2(x)-Q_3(x)}{Q_1(x)-Q_2(x)}=k\frac{Q_2(x)+Q_3(x)}{Q_1(x)+Q_2(x)}$ 이다. $10k$ 의 값은? (단, k 는 실수이고, $Q_1(x) \neq 0$ 이다.) [4.2점]

- ① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

153. 최고차항의 계수가 양수인 두 다항식 $f(x), g(x)$ 가 있다. $g(x)$ 는 $f(x)$ 로 나누어떨어지고, $g(x)$ 를 $x^2+f(x)$ 로 나눈 몫은 $x+3$ 이고 나머지는 $\{f(x)\}^2-x^2$ 이다. $g(0) \neq 0$ 일 때, $g(1)$ 의 값은? [5.3점]

- ① 24 ② 25 ③ 26
④ 27 ⑤ 28

나머지 정리와 수의 나눗셈

154. 모든 실수 x 에 대하여 다항식 $P(x)$ 가

$$\{P(x)-2\}^2=(x-a)(x-2a-2)+4$$

를 만족시킨다. 모든 $P(1.2)$ 의 값의 합을 m 이라 하고 모든 a 값의 곱을 n 이라 할 때, $m-n$ 의 값은? (단, a 는 실수, m, n 은 상수이다.) [4.5점]

- ① 14 ② 16 ③ 18
④ 20 ⑤ 22

155. 다항식 $f(x)=x^3+2x^2-7x+4$ 에 대하여 $f(101)$ 의 값은? [4.9점]

- ① 1010000 ② 1020000 ③ 1030000
④ 1040000 ⑤ 1050000

156. 나머지정리를 활용하여 2022^{99} 을 2023으로 나누었을 때의 나머지를 구하고 그 과정을 서술하시오. [7.0점]

157. 15^6 을 13으로 나누었을 때의 나머지를 r_1 이라 하고, 9^7 을 11로 나누었을 때의 나머지를 r_2 라 할 때, $r_1 - r_2$ 의 값은? [4.9점]

- ① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

158. $2^{2023} + 2^{2024} + 2^{2025} + 2^{2026}$ 을 255로 나누었을 때의 나머지는? [4.4점]

- ① 135 ② 136 ③ 137
④ 138 ⑤ 139

159. 18^6 을 321로 나눈 나머지는? [4.0점]

- ① 8 ② 27 ③ 64
④ 125 ⑤ 216

160. 다음은 2023^9 을 405로 나누었을 때의 나머지를 구하는 과정이다.

다항식 $(5x-2)^9$ 을 x 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라고 하면

$$(5x-2)^9 = xQ(x) + R \text{이다.}$$

이 때, $R = \boxed{\text{(가)}}$ 이다.

등식 $(5x-2)^9 = xQ(x) + \boxed{\text{(가)}}$ 에 $x = 405$ 를 대입하면

$$2023^9 = 405 \times Q(405) + \boxed{\text{(가)}}$$

$$= 405 \times \{Q(405) + \boxed{\text{(나)}}\} + \boxed{\text{(다)}} \text{이다.}$$

따라서 2023^9 을 405로 나누었을 때의 나머지는 $\boxed{\text{(다)}}$ 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c 라 할 때, $ab+c$ 의 값은?

[4.5점]

- ① 1318 ② 1319 ③ 1320
④ 1321 ⑤ 1322

161. 2024 이하인 자연수 n 에 대하여 $x^n - x + 1$ 이 $x^2 - x + 1$ 로 나누어떨어지는 n 의 개수는? [4.7점]

- ① 335 ② 336 ③ 337
 ④ 338 ⑤ 339

2.

항등식과 나머지 정리(step3)

162. 최고차항의 계수가 1인 두 다항식 $P(x)$, $Q(x)$ 는 모든 계수가 정수이고, 다음 조건을 모두 만족한다. [4.9점]

- (가) $P(x)$ 는 x 에 대한 삼차다항식이다.
 (나) $x^4 - x^3$ 을 $P(x)$ 로 나누었을 때의 나머지는 $-x^2$ 이다.
 (다) $P(x)$ 를 $Q(x)$ 로 나누었을 때의 나머지는 $-x + 2$ 이다.

실수 a 에 대하여 $P(x) - Q(x)$ 가 $x - a$ 로 나누어떨어질 때, $P(a)$ 의 값은?

- ① 2 ② 4 ③ 6
 ④ 8 ⑤ 10

163. 100개의 다항식 $x^2 - 2x - 1$, $x^2 + 2x - 2$, $x^2 - 2x - 3$, ..., $x^2 + (-1)^n \times 2x - n$, ..., $x^2 - 2x - 99$, $x^2 + 2x - 100$ 이 있다. 이 중에서 $(x - a)(x - b)$ 꼴로 인수분해 되는 다항식의 개수는? (단, n , a , b 는 1 이상 100 이하의 자연수이다.) [5.3점]

- ① 8 ② 9 ③ 10
 ④ 11 ⑤ 12

164. 세 다항식 $f(x), g(x), h(x)$ 에 대하여 다항식

$2f(x)+3g(x)$ 를 $h(x)$ 로 나눈 나머지가 x^3 이고, 다항식 $f(x)+6g(x)$ 를 $h(x)$ 로 나눈 나머지가 $8x^3$ 이다. 100이하의 두 자연수 m, n 에 대하여 다항식 $mf(x)+ng(x)$ 가 $h(x)$ 로 나누어 떨어질 때, $m+n$ 의 값의 최댓값은? [4.7점]

- ① 164 ② 168 ③ 172
④ 176 ⑤ 180

165. 실수 a, b, c 에 대하여 다항식

$P(x)=x^4-ax^3+bx^2+ax+1$ 은 $x+c$ 로 나누어떨어진다. $P(x)$ 에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [5.1점]

- ㉠. $c=0$
㉡. $P(x)$ 는 $x-\frac{1}{c}$ 로 나누어떨어진다.
㉢. $c=1$ 일 때, $P(x)$ 는 x^2-1 을 인수로 갖는다.

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢
④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

166. 모든 실수 x 에 대하여 다항식 $P(x)$ 가

$\{P(x)+1\}^2 = x^2 - (k+1)x + k^2$ 을 만족시킨다. 이때, 가능한 모든 $P(0)$ 의 값의 합은? (단, k 는 실수이다.) [4.2점]

- ① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

167. 다항식 $x^{16}+3x^8+6$ 을

$x^2+x+1, x^2-x+1, x^4+x^2+1$ 로 나눈 나머지를 각각 $r_1(x), r_2(x), r_3(x)$ 라 할 때, $r_1(x)r_2(x)r_3(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지를 구하고 풀이과정을 논술하시오. [6점]

168. 이차다항식 $f(x)=x^2+4x+7$ 가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

- (가) 다항식 $f(x)$ 를 $x-a$ 로 나눈 나머지는 b 이다.
(나) x 에 대한 이차방정식 $f(x+2a)+a^2-b+13=0$ 은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

두 자연수 a, b 에 대하여 순서쌍(a, b)를 모두 구하고 그 과정을 논술하시오.[9.0점]

169. 다항식 $f(x)$ 가 다음 세 조건을 만족시킬 때, $f(0)$ 의 값은? [4.9점]

- (가) $f(x)$ 를 $x^6 - 1$ 로 나눈 몫은 $2x - 1$ 이다.
 (나) $f(x)$ 를 $x^4 + x^2 + 1$ 로 나눈 나머지는 $x^3 + 2x + 5$ 이다.
 (다) $f(x)$ 를 $x^2 - 1$ 로 나눈 나머지는 5이다.

- ① 4 ② 5 ③ 6
 ④ 7 ⑤ 8

170. 삼차다항식 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $(x+2)f(x-3) = (x-5)f(x+1)$
 (나) $f(x)$ 를 $x^2 + x + 1$ 로 나눈 나머지는 $2x + 10$ 이다.

이때, $f(x)$ 를 $x + 2$ 로 나눈 나머지는? [4.2점]

- ① -28 ② -26 ③ -24
 ④ -22 ⑤ -20

171. 이차다항식 $f(x)$ 가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $xf(x)$ 를 $x - \frac{1}{2}$ 으로 나눈 나머지는? [5.2점]

- (가) $f(0) = 1$
 (나) $f(x)$ 는 $f(x^2)$ 의 인수이다.
 (다) 방정식 $f(x) = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다..

- ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{5}{8}$
 ④ $\frac{7}{8}$ ⑤ $\frac{9}{8}$

172. 이차식 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $2x^3 + x + 3$ 을 $f(x)$ 로 나눈 나머지는 $g(x)$ 이다.
 (나) $2x^3 + x + 3$ 을 $g(x)$ 로 나눈 나머지는 $f(x) - x^2 + x$ 이다.

$f(0) + g(5)$ 의 값은? [5.3점]

- ① 14 ② 15 ③ 16
 ④ 17 ⑤ 18

173. 다음 조건을 만족시키는 모든 이차다항식 $f(x)$ 의 합을 $g(x)$ 라 하자.

(가) $f(-1)=0$

(나) 사차다항식 $f(x)\{f(x)-4\}$ 은 x^2+x-2 로 나누어 떨어진다.

이때 다항식 $g(5)$ 의 값은? [4.2점]

- ① 120 ② 121 ③ 122
④ 123 ⑤ 124

174. 최고차항의 계수가 1인 사차다항식 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값은? [4.8점]

(가) $f(x)$ 를 $x+5$ 으로 나눈 나머지와 $f(x)$ 를 x^2-2 로

나눈 나머지는 서로 같다.

(나) $f(x-1)-7$ 은 x^2-2x 로 나누어 떨어진다.

- ① -130 ② -129 ③ -128
④ -127 ⑤ -126

175. 이차다항식 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 2인 이차다항식 $g(x)$ 가 다음을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 등식

$$f(x)+2f(-x)=3x^2+2x+15$$
을 만족시킨다.

(나) $g(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지와 $g(x)$ 를 $x+2$ 로 나눈 나머지는 서로 같다.

방정식 $g(x)-f(x)=0$ 이 중근을 가질 때, $g(x)$ 를 x 로 나눈 나머지를 구하시오. [7점]

176. 삼차다항식 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-1)=3$

(나) $f(x)$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나눈 몫과 나머지는 같다.

$f(x)$ 를 $(x+1)^3$ 으로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 하자.

$R(0)=R(1)$ 일 때, $R(2)$ 의 값을 구하고 그 풀이과정을 서술하시오.

[6.0점, 부분점수 있음.]

177. 최고차항의 계수가 1인 다항식 $P(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, 물음에 답하시오. [7.0점]

(가) 다항식 $P(x)$ 를 다항식 $Q(x)$ 로 나눈 몫과 나머지는 모두 $Q(x) - 3x^2$ 이다.

(나) 다항식 $P(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지는 -4 이다.

(1) 다항식 $Q(x)$ 의 차수를 구하고, 그 과정을 서술하시오.
[2.0점/부분 점수 있음]

(2) (1)를 이용하여 $P(-2)$ 의 값을 구하고, 그 과정을 서술하시오.

[5.0점/부분 점수 있음]

3.

인수분해(step1)

인수분해 공식을 이용한 다항식의 인수분해

178. 다항식 $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$ 을 바르게 인수분해한 식은?
[3.7점]

- ① $(x-3)^3$
- ② $(x+3)^3$
- ③ $(x-3)(x^2+3x+9)$
- ④ $(x+3)(x^2-3x+9)$
- ⑤ $(x+3)(x^2+3x-9)$

179. 다음 중 다항식 $x^4y - 8xy$ 를 인수분해한 것은? [4.2 점]

- ① $xy(x-2)(x^2+2x+4)$
- ② $xy(x+2)(x^2-2x+4)$
- ③ $xy(x-2)(x^2+2x-4)$
- ④ $xy(x+2)(x^2-2x-4)$
- ⑤ $xy(x-2)(x^2-2x+4)$

치환과 인수분해

180. $x = \sqrt{3} + 2$, $y = \sqrt{3} - 2$ 일 때, $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3$ 의 값은? [4.0점]

- ① 12 ② $12\sqrt{3}$ ③ 24
- ④ $24\sqrt{3}$ ⑤ 48

181. 다항식 $(x^2 - 3x)^2 - (x^2 - 3x) - 12$ 를 인수분해한 것은? [4.5점]

- ① $(x+1)(x-4)(x^2-3x+3)$
 ② $(x+1)(x-4)(x^2+3x+3)$
 ③ $(x-1)(x+4)(x^2-2x+3)$
 ④ $(x-1)(x+4)(x^2+2x+3)$
 ⑤ $(x-1)(x-4)(x^2+3x-3)$

182. 다항식 $(x^2 - x + 1)(x^2 - x - 9) + 21$ 을 인수분해 한 것이 $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$ 일 때, $a-b+c-d$ 의 최솟값을 구하고, 풀이 과정과 답을 자세히 논술하시오. (단, a, b, c, d 는 실수이다.) [6.0점]

183. 다항식 $x^4 - x^2 + 16$ 의 인수인 것은? [4.0점]

- ① $x^2 + x - 4$ ② $x^2 + 2x + 4$ ③ $x^2 + 2x - 4$
 ④ $x^2 + 3x - 4$ ⑤ $x^2 + 3x + 4$

184. 실수 x 에 대하여 $x^4 - 14x^2 + 1 = 0$ 일 때,

$2x^3 + x + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}$ 의 값은? (단, $x > 0$) [4.0점]

- ① 108 ② 109 ③ 110
 ④ 111 ⑤ 112

인수분해의 활용(수)

185. $A = \frac{2023^3 - 2023^2 - 2 \times 2023 + 2}{2023^2 - 2}$ 는 n 자리의

자연수이다. 자연수 A 의 모든 자리의 숫자의 합을 S 라 할 때, $n + S$ 의 값은? [4.0점]

- ① 8 ② 9 ③ 10
 ④ 11 ⑤ 12

186. $A = 102^3 - (100 + 2)(10004 - 200)$ 은 n 자리의

자연수이다. 자연수 A 의 모든 자리의 숫자의 합을 S 라 할 때, $n + S$ 의 값은? [4.7점]

- ① 12 ② 13 ③ 14
 ④ 15 ⑤ 16

187. $A = 102^3 - (100 + 2)(10004 - 200)$ 은 n 자리의 자연수이다. 자연수 A 의 모든 자리의 숫자의 합을 S 라 할 때, $n + S$ 의 값은? [4.7점]

- ① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

인수정리를 이용한 다항식의 인수분해

188. 다항식 $ax^4 + bx^3 + cx - 2$ 가 $(x-1)^2(x+1)$ 을 인수로 가질 때, $ac-b$ 의 값은? (단, a, b, c 는 상수이다.) [4.4점]

- ① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

3.

인수분해(step2)

치환과 인수분해

189. 다항식 $(x^2 - x)(x^2 - x - 8) + 12$ 가

$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$ 로 인수분해될 때, 네 상수 a, b, c, d 에 대하여 $a+b+c+d$ 의 값은? [4.9점]

- ① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

190. 다항식 $(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 2) - 3$ 이

$(x+a)(x-b)(x-1)^2$ 로 인수분해될 때, 두 정수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값은? (단, $a < 0$) [4.7점]

- ① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

191. 두 자연수 $a, b (a < b)$ 에 대하여 모든 실수 x 에 대하여 아래 식이 성립할 때, 모든 상수 k 값들의 합은? [4.3점]

$$(x^2 - 3x)(x^2 - 3x + 3) + k(x^2 - 3x) + 10 = (x^2 - 3x + a)(x^2 - 3x + b)$$

- ① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

192. 다항식 $(x-1)(x-2)(x+4)(x+5)+a$ 가 x 에 대한 이차식의 완전제곱의 꼴로 인수분해되도록 하는 상수 a 의 값은?
[4.9점]

- ① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

193. 다항식 $(x-2)(x-5)(x+5)(x+8)+k$ 가 최고차항의 계수가 -1 인 이차식 $f(x)$ 의 제곱으로 인수분해될 때, $k+f(5)$ 의 값은? (단, k 는 상수이다.) [5.0점]

- ① 120 ② 150 ③ 180
④ 210 ⑤ 240

194. 다항식 $(x^2+x-2)(x^2-11x+28)+k$ 가 최고차항의 계수가 1인 이차식 $f(x)$ 의 제곱으로 인수분해될 때, $k+f(1)$ 의 값을 구하고, 그 과정을 서술하시오. (단, k 는 상수이다.)
[부분점수 있음. 7.0점]

195. $a+b=2$, $a^2+b^2=6$ 일 때, $a^7+b^7+a^4b^3+a^3b^4$ 의 값은?
[4.0점]

- ① 474 ② 476 ③ 478
④ 480 ⑤ 482

196. 두 식 $a^2+b^2-2b+2a-2ab$ 와 a^3-27b^3 을 인수분해 하였을 때 인수가 될 수 없는 것은? [4.0점]

- ① $a-b$ ② $a-b+1$ ③ $a-b+2$
④ $a-3b$ ⑤ $a^2+3ab+9b^2$

197. 두 자연수 a , b 에 대하여

$$a^2b-2ab+2a^2-4a+b+2$$

의 값이 396일 때, $a+b$ 의 값은? [4.5점]

- ① 14 ② 16 ③ 18
④ 20 ⑤ 22

복이차식의 인수분해

198. 다음 중 다항식 $(x+1)^4 + 2(x+1)^2 + 9$ 의 인수는? [4.8점]

- ① $x^2 + 1$ ② $x^2 + x + 1$ ③ $x^2 + 2x + 2$
 ④ $x^2 + 3x + 4$ ⑤ $x^2 + 4x + 6$

199. $x^4 - nx^2 + 64$ 를 계수가 정수인 서로 다른 두 이차식의 곱으로만 인수분해 되도록 하는 자연수 n 의 개수는? (단, $0 < n < 60$) [5.2점]

- ① 7 ② 8 ③ 9
 ④ 10 ⑤ 11

200. x 에 대한 다항식 $P(x) = x^4 - kx^2 + 24^4$ 이 계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 네 개의 다항식의 곱으로 인수분해될 때, 정수 k 의 개수는? [4.7점]

- ① 10 ② 11 ③ 12
 ④ 13 ⑤ 14

201. 다항식 $x^4 + 3x^2 + 4$ 는 모든 항의 계수가 정수이고 최고차 항의 계수가 1인 두 이차식 $f(x), g(x)$ 의 곱으로 인수분해 된다. $f(0) + g(0)$ 의 값은? [3.8점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

202. 다항식 $x^4 - ax^2 + 144$ 이 계수가 모두 정수인 일차식 4개로 인수분해 되도록 하는 모든 양수 a 의 값의 합은? [4.3점]

- ① 25 ② 40 ③ 65
 ④ 145 ⑤ 210

여러 개의 문자를 포함한 다항식의 인수분해

203. x, y 에 대한 이차식

$$x^2 + kxy + 6y^2 - 9x - 22y + 20$$

이 x, y 에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해 되도록 하는 자연수 k 의 값은? [4.1점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

204. $x^2 + y^2 - 10 - a(xy - 3)$ 가 x, y 에 대한 서로 다른 두 일차식의 곱으로 인수분해되도록 하는 상수 a 의 값의 합은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값은? (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.)

[4.5 점]

- ① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

205. x, y 에 대한 다항식 $-x^2 + y^2 + ax + by + 4$ 가 계수가 모두 정수인 x, y 에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해 될 때, $2a+b$ 의 값이 될 수 없는 것은? (단, a, b 는 상수이다.) [5.2점]

- ① -11 ② -4 ③ -1
④ 5 ⑤ 11

206. 자연수 a, b, c 가 $abc + ab + bc + ca + a + b + c = 69$ 를 만족할 때, $a+b+c$ 의 값은? [4.9점]

- ① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

207. $a < b < c$ 인 세 자연수 a, b, c 에 대하여

$$a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 2abc = 126$$

일 때, 자연수 a, b, c 의 값을 구하는 과정이다. 이때, $a+b+c$ 의 값은? [5.1점]

다항식

$$a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 2abc$$

를 인수분해하면

$$a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 2abc$$

$$= a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b + 2abc$$

$$= (\boxed{\text{가}})a^2 + (\boxed{\text{나}})a + (\boxed{\text{다}})(\boxed{\text{가}})$$

$$= (\boxed{\text{가}})\{a^2 + (b+c)a + (\boxed{\text{다}})\}$$

$$= (\boxed{\text{라}})$$

- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

인수정리를 이용한 다항식의 인수분해

208. 최고차항의 계수가 3인 삼차식 $f(x)$ 가

$$3f(1) = \frac{3}{2}f(2) = f(3) = 6$$

를 만족할 때, $f(x)$ 를 $x-5$ 로 나눈 나머지는? [4.8 점]

- ① 66 ② 72 ③ 76
④ 82 ⑤ 88

209. x^3 의 계수가 1인 삼차식 $P(x)$ 에 대하여

$P(1)=2, P(2)=8, P(3)=18$ 일 때, $P(x)$ 를 $x-5$ 로 나누었을때의 나머지는? [4.1점]

- ① 29 ② 44 ③ 59
④ 74 ⑤ 89

210. 구차식 $f(x)$ 를 $x-1, x-3, x-5, \dots, x-17$ 로 나누는 나머지가 차례로 1, 3, 5, $\dots$, 17이고, $f(0)=1$ 일 때, $f(x)$ 를 $x-18$ 로 나누는 나머지는? [4.4점]

- ① 16 ② 17 ③ 18
④ 19 ⑤ 20

211. 두 다항식 $x^3+ax-2, 2x^3+2x^2+bx-8$ 이 모두 일차항의 계수가 1인 두 일차식 $f(x), g(x)$ 를 인수로 가질 때, 두 상수 a, b 에 대하여 $a-b$ 의 값은? [4.5점]

- ① -11 ② -7 ③ -3
④ 1 ⑤ 5

212. 최고차항의 계수가 1인 두 이차식 $f(x), g(x)$ 의 곱이 $x^4-6x^3+9x^2+4x-12$ 이다. 다음 조건을 만족시키는 실수 a 가 존재할 때, $f(4)+g(4)$ 의 값은? [5.0점]

- (가) $x-a$ 는 $f(x)g(x)$ 의 인수이다.
(나) $x-a$ 는 $f(x)+g(x)$ 의 인수이다.

- ① 8 ② 12 ③ 16
④ 20 ⑤ 24

인수분해의 활용(도형)

213. 넓이가 25인 이등변 삼각형의 세 변의 길이를 a, b, c 이고,

$$a^3+ab^2+b^2c+a^2c-c^3-ac^2=0$$

을 만족시킬 때, $\frac{ac}{b}$ 의 값은? [4.3점]

- ① 5 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 15

214. 두 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 등식 $a^3 + a^2c + ac^2 + c^3 = ab^2 + b^2c$ 가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가? [4.0점]

- ① 정삼각형
- ② $a = b$ 인 이등변삼각형
- ③ $b = c$ 인 이등변삼각형
- ④ 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형
- ⑤ 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형

215. 세 자연수 a, b, c 가 $(a^2 - 4b^2 - c^2)c^2 = a^2(c^2 - a^2 + 4b^2)$ 을 만족시킬 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [5.5점]

[보 기]

- ㉠. $a + 2b > c$
- ㉡. $a + 2b < c^2$
- ㉢. 세 자연수 $a, 2b, c$ 는 빗변의 길이가 $2b$ 인 직각삼각형의 세 변의 길이이다.

- ① ㉠
- ② ㉡
- ③ ㉠, ㉡
- ④ ㉠, ㉢
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

216. 삼각형 ABC 의 세 변의 길이를 a, b, c 라고 하자. 등식 $a^3 + c^3 - ab^2 + a^2c - b^2c + ac^2 = 0$ 이 성립할 때, 삼각형 ABC 는 어떤 삼각형인지 구하고 그 과정을 서술하시오.[4.0점 부분점수 있음.]

217. 넓이가 $\sqrt{15}$ 인 삼각형 S 의 세 변의 길이 a, b, c 는 다음 두 조건을 모두 만족시킨다. 이 때, 삼각형 S 의 둘레의 길이는? [4.7점]

- (가) $a^3 - 6a^2c + 12ac^2 - 8c^3 = 0$
- (나) $a^3 + a^2b - ab^2 - ac^2 - b^3 + bc^2 = 0$

- ① 8
- ② 9
- ③ 10
- ④ 11
- ⑤ 12

218. 세 변의 길이가 a, b, c 인 삼각형 ABC 가 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 ABC 의 둘레의 길이는? [5.1점]

- (가) $3a + 4b = 5c$
- (나) $a^4 + b^4 - c^4 + 2a^2b^2 = 0$
- (다) 삼각형 ABC 의 넓이는 54이다.

- ① 12
- ② 18
- ③ 24
- ④ 30
- ⑤ 36

219. 세 변의 길이가 a, b, c 인 삼각형 ABC 가 다음 조건을 만족시킨다.

- $a^2b - bc^2 + ac^2 + a^2c - ab^2 - b^2c = 0$
- $6a + 2b = 5c$
- 삼각형 ABC 의 넓이는 108 이다.

삼각형 ABC 의 둘레의 길이를 구하고, 그 풀이 과정을 논술하시오. (부분 점수 있음) [6.0점]

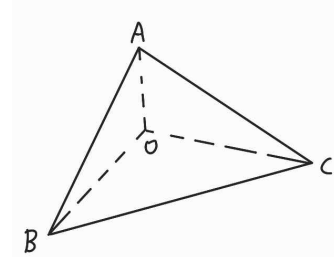
220. 높이가 $2x+1$, 부피가 $2x^3+7x^2+7x+2$ 인 직육면체의 밑면의 넓이를 $f(x)$ 라 할 때, 다음 중 $f(x)$ 의 인수인 것은?

- ① $2x-1$ ② $2x+1$ ③ $x-1$
 ④ $x+2$ ⑤ $x+3$

221. 밑면의 반지름의 길이가 $x+a$, 높이가 $x+b$ 인 원기둥의 부피가 $(x^3+8x^2+20x+16)\pi$, 겉넓이가 $4\pi(x+a)(x+c)$ 일 때, $a+b+c$ 의 값은? (단, $x > 0$ 이고, a, b, c 는 상수이다.) [4.3점]

- ① 6 ② 7 ③ 8
 ④ 9 ⑤ 10

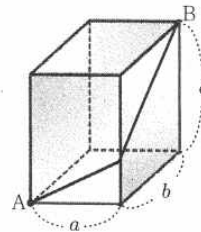
222. 그림과 같은 사면체 $OABC$ 에서 세 모서리 OA, OB, OC 는 점 O 에서 서로 수직이다. 세 모서리 OA, OB, OC 의 길이를 각각 a, b, c 라고 하면 a, b, c 는 다음 두 조건을 만족시킬 때, 다음 물음에 답하시오. 세 삼각형 OAB, OBC, OCA 의 넓이의 합을 구하면? [5.1점]



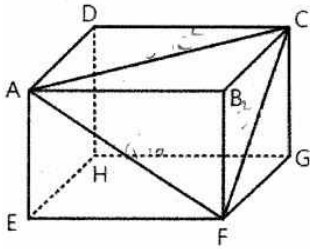
- (가) $a+b+c=9$
 (나) $a^2+b^2+c^2=29$

- ① 12 ② 13 ③ 18
 ④ 45 ⑤ 48

223. 그림과 같이 직육면체의 서로 다른 세 모서리의 길이를 a, b, c 라 하자. 모든 모서리의 길이의 합이 32, 두 꼭짓점 A, B 를 연결한 대각선의 길이가 $\sqrt{30}$, 부피가 10이다. 두 꼭짓점 A, B 를 직육면체의 면을 따라 실로 팽팽하게 연결 시킬 때, 실의 길이의 최솟값을 구하고, 그 과정을 서술 하시오. [부분점수 있음. 8.0점]



224. 그림과 같은 직육면체의 겹넓이는 108, 모든 모서리의 길이의 합은 52일 때, $\overline{AF}^2 + \overline{FC}^2 + \overline{CA}^2$ 의 값은? [4.1점]



- ① 61 ② 102 ③ 122
④ 160 ⑤ 196

225. 직육면체 모양의 네 블록 A, B, C, D의 밑면의 가로, 세로의 길이와 높이는 다음 표와 같다.

	A	B	C	D
가로의 길이	x	x	x	1
세로의 길이	x	x	1	1
높이	x	1	1	1

A블록 4개, B블록 20개, C블록 28개, D블록 12개를 모두 빈틈없이 붙여서 큰 직육면체를 만들었다. 이 직육면체의 가로, 세로의 길이와 높이가 x 에 대한 서로 다른 일차식으로 나타내어질 때, 가능한 가로, 세로, 높이의 합은 $px+q$ 와 $rx+s$ 이다. $p-q+r-s$ 의 값은? (단, p, q, r, s 는 서로 다른 상수이다.) [4.6점]

- ① -10 ② -8 ③ -6
④ -4 ⑤ -2

인수분해의 활용

226. 2이상의 네 자연수 x, y, z, w 에 대하여

$(100+40)^2 - 18 \times 140 - 63 = x \times y \times z \times w$ 일 때, $x+y+z-w$ 의 값은? (단, $x > y > z > w$ 이다.) [5.1점]

- ① 31 ② 32 ③ 33
④ 34 ⑤ 35

227. 모든 실수 x 에 대하여 두 이차다항식 $P(x), Q(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다. 물음에 답하시오. [총 10.0점]

(가) $P(x) + Q(x) = 5$

(나) $\{P(x)\}^3 + \{Q(x)\}^3 = 15x^4 + 30x^3 + 30x^2 + 15x + 35$

(다) $P(x)$ 의 최고차항의 계수는 음수이다.

(1) 곱셈공식 $(a+b)^3$ 을 전개하시오. [2.0점]

(2) 다항식의 곱 $P(x)Q(x)$ 를 구하고 그 과정을 논술하시오. [4.0점]

(3) 두 이차다항식 $P(x), Q(x)$ 를 각각 구하고 그 과정을 논술하시오. [4.0점]

2. 복소수와 방정식

4. (step1)

복소수의 뜻과 분류

228. 복소수인 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?
(단, $i = \sqrt{-1}$) [3.8점]

[보 기]

- | | | |
|-----------|--------------------|---------------|
| ㄱ. π | ㄴ. -2 | ㄷ. $\sqrt{3}$ |
| ㄹ. $1-2i$ | ㅁ. $-\frac{2}{3}i$ | |

- ① ㄱ, ㄷ ② ㄹ, ㅁ ③ ㄱ, ㄷ, ㅁ
④ ㄴ, ㄹ, ㅁ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ

229. 복소수 $5-2i$ 에 대하여 실수부분을 a , 허수부분을 b 라 할 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 실수,) [3.8점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

230. <보기>의 설명 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, $i = \sqrt{-1}$) [4.1점]

- ㄱ. 4의 제곱근은 $2i$ 이다.
ㄴ. $a > 0$ 일 때 $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$ 이다.
ㄷ. 복소수 $5+2i$ 의 허수부분은 2이다.
ㄹ. 복소수 $2i, 3i$ 에 대하여 $2i < 3i$ 이다.

- ① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄹ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄴ, ㄹ ⑤ ㄷ, ㄹ

복소수의 사칙연산

231. $(1-2i) + (2+3i) = a+bi$ 일 때, 두 상수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$) [3.6점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

232. 등식 $(3+2i)-(2-i)=x+yi$ 를 만족시키는 두 실수 x, y 의 합 $x+y$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$ 이다.) [4.0점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

233. 등식 $(3-i)x+(1+i)y=2+6i$ 를 만족시키는 두 실수 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$ 이다.) [4.6점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

234. 다음을 계산하여 올바르게 나타낸 것은? (단, $i = \sqrt{-1}$) [3.7점]

$$(3-5i)+(-1+2i)+(1+i)(1-i)$$

- ① $2-i$ ② $3-2i$ ③ $4-3i$
④ $5-4i$ ⑤ $6-5i$

235. $(x+2)+(y-1)i=3+3i$ 를 만족시키는 두 실수 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$ 이다.) [4.8점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

236. $(1+2i)(2-i)$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$) [4점]

- ① 1 ② $2+2i$ ③ 3
④ $4+3i$ ⑤ $5i$

237. $(1+i)(1-i)$ 의 값은? [4.3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

238. $(1+2i)(1-2i)$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$) [3.9점]

- ① i ② $-i$ ③ 3
 ④ 5 ⑤ $2+4i$

239. $x=2+i, y=2-i$ 일 때, x^3+y^3 의 값은?(단, $i = \sqrt{-1}$ 이다.) [3.8점]

- ① 2 ② 4 ③ 6
 ④ 8 ⑤ 10

240. 두 복소수 $\alpha=4-i, \beta=3+i$ 에 대하여 $\alpha+\beta$ 의 값은? [4.6점]

- ① 5 ② 6 ③ 7
 ④ 8 ⑤ 9

241. 등식 $a+3i=2+(b+2)i$ 를 만족시키는 두 실수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$ 이다.) [3.0점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

242. 실수 a, b 에 대하여 $(2+i)i=a+bi$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$ 이다.) [4.1점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

243. 등식 $3x+(x-6y)i=6-4i$ 를 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$) [3.8점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

244. $x=1+i$ 일 때, $x+\frac{1}{x}=a+bi$ 이다. 실수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값은?[3.8점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

245. $\frac{1+i}{1-i}=a+bi$ (단, $i = \sqrt{-1}$)를 만족시키는 실수 a, b 에 대하여 $a+2b$ 의 값은? [3.8점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

246. 등식 $(x-y) + (2x-3y)i = 3+7i$ 을 만족시키는 두 실수 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$) [3.8점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

247. 등식 $(4x-6) + (x+2y)i = 2-4i$ 을 만족시키는 실수 xy 의 값은? [3.6점]

- ① -4 ② -5 ③ -6
④ -7 ⑤ -8

켈레복소수

248. $(1+i)\bar{z} + 2iz = 1-3i$ 를 만족시키는 복소수 $z = x+yi$ (x, y 는 실수)에 대하여 xy 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켈레복소수이다.) [4.6점]

- ① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

249. 등식 $z(1+i) + \bar{z}(5+i) = 12$ 를 만족시키는 복소수 z 를 근으로 하는 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은? (단, $i = \sqrt{-1}$, $\bar{z}$ 는 z 의 켈레복소수이다.) [4.0점]

- ① $x^2 - 2x + 2 = 0$ ② $x^2 - 2x + 3 = 0$ ③ $x^2 - 4x + 5 = 0$
④ $x^2 - 4x + 6 = 0$ ⑤ $x^2 - 5x + 6 = 0$

250. $3z - 2\bar{z} = 2 + 15i$ 를 만족하는 복소수 z 에 대하여 $z + \bar{z}$ 의 값은? [3.8점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

251. 등식 $(1-i)z + 5i\bar{z} = 5-3i$ 를 만족시키는 복소수 z 는? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켈레복소수이다.) [4.0점]

- ① i ② $1+i$ ③ $1-i$
④ $-1+i$ ⑤ $-1-i$

252. $(1+i)^2z+2=(\bar{z}+1)i$ 를 만족시키는 복소수 z 에 대하여 $z+\bar{z}+\frac{1}{(z-\bar{z})i}$ 의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [5.0점]

- ① $\frac{14}{27}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{19}{21}$
 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{9}{7}$

253. 복소수 $z=2x-1+xi-i$ 에 대하여 $z=-\bar{z}$ 가 성립하도록 하는 실수 x 의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.) [4.1점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
 ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

254. 복소수 $z=x^2-(4+i)x-5+3i$ 에 대하여 $z+\bar{z}=0$ 을 만족시키는 모든 실수 x 의 값의 합은? (단, $i=\sqrt{-1}$ 이고, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.) [3.9점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

255. 복소수 $z=(1+i)x^2+(3i-1)x+2(i-3)$ 가 $z+\bar{z}=0$ 을 만족하도록 하는 실수 x 의 값은? (단, $z \neq 0$ 이고 $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.) [3.8점]

- ① 2 ② 3 ③ 4
 ④ 5 ⑤ 6

256. $\frac{2-i}{3+4i}=z$ 일 때, $\bar{z}$ 를 구하면?

(단, $i=\sqrt{-1}$ 이고, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

- ① $\frac{2}{25}-\frac{11}{25}i$ ② $\frac{2}{5}-\frac{11}{25}i$ ③ $\frac{2}{25}+\frac{11}{25}i$
 ④ $\frac{2}{5}+\frac{11}{25}i$ ⑤ $\frac{2}{7}+\frac{11}{25}i$

켤레복소수의 성질과 식의 값

257. 실수가 아닌 두 복소수 z, w 가 $\bar{z}+w=0$ 을 만족시킬 때, 항상 허수인 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $\bar{z}, \bar{w}$ 는 각각 z, w 의 켤레복소수이다.) [4.8점]

[보 기]

ㄱ. $z-w$ ㄴ. $z+w$ ㄷ. $z\bar{w}$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

258. 실수가 아닌 두 복소수 z, w 가 $z + \bar{w} = 0$ 을 만족시킬 때, 항상 실수인 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?
(단, $\bar{z}, \bar{w}$ 는 각각 z, w 의 켈레복소수이다.) [4.1점]

[보 기]

- ㉠. $i(z+w)$ ㉡. $\bar{z}w$
㉢. $\frac{z}{w}$

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

복소수가 실수가 되는 조건

259. 복소수 $\alpha = (2-n-5i)^2$ 에 대하여 α^2 이 음의 실수가 되도록 하는 자연수 n 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$) [5.7점]

- ① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

260. 복소수 $z = (1-i)a - (3+2i)$ 에 대하여 z^2 이 음의 실수가 되도록 하는 실수 a 의 값은? [4.1점]

- ① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

음수의 제곱근

261. $\sqrt{-3} \sqrt{-12}$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$ 이다.) [4.6점]

- ① -6 ② $-6i$ ③ 4
④ $6i$ ⑤ 6

262. $\sqrt{(-2)^2} + \sqrt{-2} \sqrt{-8} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}} + \frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{2}}$ 을 간단히

하면? [4.1점]

- ① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

263. 복소수 $z = \sqrt{-2} \sqrt{-2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-3}}$ 에 대하여

$(z+2i)(\bar{z}-2i)$ 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켈레복소수이다.) [4.7점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

264. $\sqrt{-3}\sqrt{-9} + \sqrt{3}\sqrt{-9} + \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{-2}} = a + bi$ 일 때, 실수 a , b 의 값을 구하고 풀이과정을 논술하시오. (단, $y = \sqrt{-1}$) [5점]

4.

(step2)

복소수의 식의 값(1) - 허수단위의 거듭제곱

265. $i^2 + 2i^3 + 3i^4 + \dots + 2022i^{2023} = a + bi$ 일 때, $b - 3a$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$ 이고, a, b 는 실수이다.)

- ① 2019 ② 2020 ③ 2021
④ 2022 ⑤ 2023

266. 실수 a, b 에 대하여

$$a + bi = \frac{1-i}{1+i} + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^4 + \dots + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{101}$$

일 때, $a - bi$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$) [4.5점]

- ① $-i$ ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ i

267. 두 복소수 α, β 에 대하여

$\bar{\alpha} + 3\beta = i^{2021} + 2i^{2022} + 3i^{2023}$ 일 때, $\bar{\alpha}\alpha + 3\bar{\alpha}\beta + 3\alpha\beta + 9\beta\bar{\beta}$ 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

[4.5 점]

- ① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

268. 복소수 $z = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ 일 때,

$$18z^{18} + 20z^{20} + 22z^{22} + 24z^{24} + 26z^{26} + 28z^{28} + 30z^{30} = a + bi \text{ 이다.}$$

두 실수 a, b 에 대하여 $b-a$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

[5.2점]

- ① 28 ② 30 ③ 32
④ 34 ⑤ 36

269. 복소수 $z = \frac{1-i}{1+i}$ 에 대하여

$$1+z+z^2+z^3+\dots+z^{2025}=a+bi$$

일 때, $a-b$ 의 값은? (단, a, b 는 실수이고, $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

[4.6점]

- ① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

270. $i+2i^2+3i^3+4i^4+\dots+20i^{20}=a+bi$ ($i = \sqrt{-1}$)일 때,

ab 의 값은? (단, a, b 는 실수) [4.4점]

- ① -100 ② -50 ③ 0
④ 50 ⑤ 100

271. $z = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ 일 때, $z^2+z^4+z^6+z^8+\dots+z^{98}+z^{100}$ 의

값은? [5.0점]

- ① $-1-i$ ② $-i$ ③ -1
④ 0 ⑤ 1

272. $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ 일 때, z^{2024} 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$ 이다.) [3.8점]

- ① 1 ② 0 ③ -1
④ i ⑤ $-i$

273. $z = 1+i$ 일 때, $z^{16} + \left(\frac{z}{z}\right)^{2026}$ 값은? [4.2점]

- ① 155 ② 205 ③ 255
④ 305 ⑤ 355

복소수의 식의 값(2) - w^3 의 값

274. 두 복소수 $z_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $z_2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에 대하여

$z_1^n = z_2^n$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값을 구하고, 그 과정을 논술하시오. (단, $i = \sqrt{-1}$) [5.0점]

275. $\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^n + \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n = 2$ 를 만족시키는 두 자리의

자연수 n 의 개수는? (단, $i = \sqrt{-1}$) [4.5점]

- ① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

276. 1000 이하의 자연수 n , k 에 대하여 $(1+\sqrt{3}i)^n = 16^k$ 가 성립할 때, 순서쌍 (n, k) 의 개수는? [5.0점]

- ① 72 ② 83 ③ 100
④ 122 ⑤ 136

277. 복소수 $z = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $i = \sqrt{-1}$ 이고, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다. [4.2점]

<보 기>

- ㄱ. $z^3 = i$
ㄴ. $z^3 \times (\bar{z})^3 = -1$
ㄷ. $(z+z^3+z^5)(z^2+z^4+z^6) = 2\sqrt{3}+2i$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

278. 복소수 $z = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 에 대하여 다음 값은?

(단, $i = \sqrt{-1}$) [4.5점]

$z^n + z^{2n} + z^{3n} = -1$ 을 만족시키는 100이하의 모든 자연수 n 의 개수

- ① 66 ② 33 ③ 32
④ 17 ⑤ 16

복소수의 식의 값(3) - 여러가지 식의 값

279. 두 복소수 $\alpha = \frac{2i}{1+i}$, $\beta = \frac{2i}{1-i}$ 에 대하여

$(2\alpha^2 + \beta)(2\beta^2 + \alpha)$ 의 값을 $a+bi$ 라 할 때, 실수 a 와 b 에 대하여 $a+b$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$) [4.2점]

- ① 20 ② 21 ③ 22
④ 23 ⑤ 24

280. 두 복소수 z_1, z_2 에 대하여 $\overline{z_1 z_2} = 1, z_1 + \frac{1}{z_1} = -3i$ 일 때,

$\overline{z_2} + \frac{1}{z_2}$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$ 이고, $\bar{z}$ 는 복소수 z 의

켈레복소수이다.) [4.9점]

- ① $-4i$ ② $-3i$ ③ 0
 ④ $3i$ ⑤ $4i$

281. 자연수 n 과 실수부분이 0이 아닌 복소수 z 에 대하여

$$f(n) = \left\{ \frac{(z - \bar{z})i^3 - (z + \bar{z})i}{z} \right\}^n$$

이라 할 때, $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5)$ 의 값을 구하고, 그 과정을 서술하시오. (단, $i = \sqrt{-1}$ 이고, $\bar{z}$ 는 z 의 켈레복소수이다.) [8.0점]

282. 복소수 z 에 대하여 $z + \bar{z} < 0, z^2 = -8 + 8\sqrt{3}i$ 일 때,

$z^3 + 16z - 9 + \frac{160}{z}$ 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켈레복소수) [4.5점]

- ① $2 - 4\sqrt{3}i$ ② $2 - 8\sqrt{3}i$ ③ $3 - 4\sqrt{3}i$
 ④ $3 - 8\sqrt{3}i$ ⑤ $3 - 12\sqrt{3}i$

켈레복소수의 성질과 식의 값

283. 두 복소수 α, β 에 대하여 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4.6 점]

[보 기]

- ㄱ. $\overline{\alpha^2} + \overline{\beta^2} = 0$ 이면 $\alpha = \beta = 0$ 이다.
 ㄴ. $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 또는 $\beta = 0$ 이다.
 ㄷ. $\alpha = \bar{\beta}$ 이면 $\alpha + \beta$ 는 실수이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

284. 복소수 z 에 대하여 $\bar{z} = -z$ 일 때, 옳은 것만을

<보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켈레복소수이다.) [4.3점]

[보 기]

- ㄱ. $z + \bar{z} = 0$
 ㄴ. z^2 은 음수이다.
 ㄷ. $z^2 < -\frac{1}{4}$ 이면, $(1+z)(1+\bar{z}) > \frac{5}{4}$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

285. 복소수 $z = a + bi$ (a, b 는 0이 아닌 실수)에 대하여 $z^2 - \bar{z}$ 가 실수일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수) [4.0점]

(㉠) $\bar{z}^2 - z$ 는 실수이다.

(㉡) $z + \bar{z} = 1$

(㉢) $z\bar{z} > \frac{1}{4}$

- ① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

286. 복소수 z 에 대하여 <보기>에서 옳은 것의 개수는? (단, $i = \sqrt{-1}$ 이고 $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.) [4.6점]

<보 기>

㉠. $z^3 + \bar{z}^3$ 은 실수이다.

㉡. $z\bar{z} = 0$ 이면 $z = 0$ 이다.

㉢. $z\bar{z} = 1$ 을 만족시킬 때, $\left(z - \frac{1}{z}\right)^2$ 은 항상 실수이다.

㉣. $z^2 = -\bar{z}$ 를 만족하는 복소수 z 의 개수는 2이다.

㉤. $z^2 + \bar{z}^2 = 0$ 와 $z\bar{z} = 2$ 를 만족시키는 복소수 z 의 개수는 4이다.

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

287. 복소수 z 와 그 켤레복소수 $\bar{z}$ 에 관한 설명 중 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [4.5점]

[보 기]

㉠. $z = \bar{z}$ 이면 $z^2 \geq 0$ 이다.

㉡. $z^2 < 0$ 이면 $z + \bar{z} = 0$ 이다.

㉢. $z^2 - \bar{z}^2$ 은 항상 허수이다.

㉣. $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}$ 은 항상 실수이다. (단, $z \neq 0$)

- ① ㉠ ② ㉠, ㉡, ㉢ ③ ㉠, ㉡, ㉣
④ ㉠, ㉢, ㉣ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

복소수가 실수가 되는 조건

288. 5이하의 두 자연수 m, n 에 대하여 복소수 z 를 $z = (m+n) + (m-n+4)i$ 라 하자. $z^2 - 30i$ 가 실수가 되도록 하는 m, n 의 모든 순서쌍 (m, n) 을 구하고, 그 과정을 논리적으로 서술하시오. (단, $i = \sqrt{-1}$ 이다.) [5.0점]

289. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 4x + a = 0$ 의 한 근 z 가 $(k+z)^2 < 0$, $(3i+z)^2 > 0$ 을 만족시킬 때, k 와 a 의 값의 합은?
(단, k 와 a 는 실수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.) [4.0점]

- ① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

290. 다음 조건을 만족시키는 30 이하의 두 자연수 m, n 의 순서쌍 (m, n) 의 개수는? (단, $i = \sqrt{-1}$ 이다) [4.0점]

(가) $\alpha = m + ni$

(나) $z = 18 + 12i$ 에 대하여 $z^2 \alpha^2$ 은 음의 실수이다.

- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

서로 같은 복소수

291. 두 자연수 a, b 에 대하여 $(a+bi)^3 = -54+54i$ 가 성립할

때, $\frac{i}{a+bi} - \frac{1-5i}{6}$ 를 간단히 하면? [4.5 점]

- ① $-2i$ ② $-i$ ③ 0
④ i ⑤ $2i$

복소수의 활용

292. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2x + k = 0$ 이 서로 다른 두 허근을 가질 때, 한 허근을 α 라 하자. 복소수 $z = \alpha^2 + 2$ 에 대하여 $z \times \bar{z} = 24$ 일 때, 실수 k 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.) [4.3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

293. 복소수 $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ 에 대하여 $z^n + (z - \sqrt{2})^n = 0$ 을 만족하는 20이하의 자연수 n 을 구하는 과정이다. 다음 물음에 답하시오. (단, $i = \sqrt{-1}$) [총 6.0점]

(1) 표 안의 ㉠ ~ ㉥에 들어갈 복소수를 $a+bi$ 꼴로 쓰시오.
(단, a, b 는 실수이다.) [4.0점]

n	z^n	$(z - \sqrt{2})^n$	$z^n + (z - \sqrt{2})^n$
1	$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$	㉠
2	i	㉡	
3		$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$	㉢
4	㉣	-1	
5	$-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$	㉤	
6	$-i$		㉥
7		$-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$	$-\sqrt{2}i$
8	㉦		㉧
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

(2) $z^n + (z - \sqrt{2})^n = 0$ 을 만족하는 20이하의 자연수 n 을 모두 구하고 그 과정을 논술하시오. [2.0점]

294. 그림과 같이 숫자가 표시되는 화면과 **A**, **B** 두 개의 버튼으로 구성된 장치가 있다.



방정식 $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근 ω 에 대하여 **A** 버튼을 누르면 화면에 표시된 수와 $\frac{4+2\omega}{1-\omega}$ 를 곱한 결과가, **B** 버튼을 누르면 화면에 표시된 수와 $\frac{4+2\omega}{\omega-1}$ 를 곱한 결과가 화면에 나타난다. 화면에 표시된 수가 1일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [5.1점]

[보 기]

- ㄱ. **B** 버튼을 두 번 누른 결과는 4ω 이다.
- ㄴ. **A** 버튼을 세 번 누른 결과는 자연수이다.
- ㄷ. **A** 또는 **B** 버튼을 총 100 번을 누르는 동안 정수는 33 번 나타난다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

음수의 제곱근

295. 0이 아닌 두 실수 a, b 가 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ 를 만족할 때, $\sqrt{-ab} + \sqrt{-a}\sqrt{b} + \sqrt{2b}\sqrt{2b} + \sqrt{4b^2}$ 과 항상 같은 것은? [4.5점]

- ① 0 ② $-4b$ ③ $4b$
- ④ $2\sqrt{-ab}$ ⑤ $-2\sqrt{-ab}$

296. $\sqrt{-2}(\sqrt{3} + \sqrt{-18}) - \frac{\sqrt{18} + \sqrt{-12}}{\sqrt{-3}} = a + bi$ 를

만족시키는 실수 a, b 에 대하여 $a + b^2$ 의 값은? [3.7점]

- ① 16 ② 20 ③ 24
④ 28 ⑤ 32

297. 0이 아닌 세 정수 a, b, c 에 대하여 $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$,
 $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{c}{b}}$ 을 만족한다.

$\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2} + \sqrt{c^2} + |c - a - b| = 10$ 일 때, ac 의 최솟값은? [4.5점]

- ① -6 ② -5 ③ -4
④ -3 ⑤ -2

298. $\sqrt{-2}\sqrt{-8} + \sqrt{3}\sqrt{-4} + \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{-4}} = a + bi$ 일 때, 실수

a, b 에 대하여 ab 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$ 이다.) [3.9점]

- ① $-8\sqrt{3}$ ② $-4\sqrt{3}$ ③ 0
④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $8\sqrt{3}$

299. 0이 아닌 세 실수 a, b, c 에 대하여

$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$, $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{c}{a}}$ 가 성립할 때, <보기>에서 옳은

것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $i = \sqrt{-1}$) [4.3점]

[보 기]

ㄱ. $\sqrt{a^2} + (\sqrt{a})^2 = 0$

ㄴ. $\frac{\sqrt{b-2}}{\sqrt{c+2}} = -\sqrt{\frac{b-2}{c+2}}$

ㄷ. $\sqrt{(c-a)^2} + \sqrt{b-c}\sqrt{c-b} - |a| - \sqrt{(-b)^2}i = c(1+i)$

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

300. 등식 $(1+i)x + (1-i)y = -2 + 4i$ 를 만족시키는 두 실수

x, y 에 대하여 $2x + \sqrt{-x}\sqrt{y} + \frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{y}} = a + bi$ 일 때, 두 실수

a, b 에 대하여 $a^2 + 4ab + 4b^2$ 의 값은? [5.0점]

- ① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

4.

복소수(step3)

301. 자연수 n 에 대하여 $z_n = (1+i)^n + (1-i)^n$ 이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [5.5점]

- ㄱ. 모든 n 에 대하여 z_n 은 실수이다.
 ㄴ. $z_n = -8$ 을 만족하는 n 은 단 하나 존재한다.
 ㄷ. $2 \leq n \leq 100$ 일 때, $z_{n-1} + z_{n+1} = z_n$ 을 만족하는 n 의 개수는 25개다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

302. 두 복소수 z_1, z_2 가 다음 조건을 만족시킬 때,

$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ 값은? (단, $\overline{z_1}, \overline{z_2}$ 는 각각 z_1, z_2 의 켤레복소수이다.)

[5.0점]

- (가) $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$
 (나) $\overline{z_1 z_1} = 2$
 (다) $\overline{z_2 z_2} = 2$

- ① 3 ② 4 ③ 5
 ④ 6 ⑤ 7

303. $\left(\frac{2\sqrt{2}}{1-i}\right)^n + (\sqrt{3}-i)^n = 2^{n+1}$ 을 만족시키는 100이하의

자연수 n 의 개수는? (단, $i = \sqrt{-1}$ 이다.) [4.6점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

304. 실수가 아닌 두 복소수 α, β 에 대하여 $\alpha\beta$ 에 대하여

$\alpha\beta$ 는 실수이고, $3\overline{\alpha} + \overline{\beta} = 3, \alpha\overline{\alpha} = 1$ 일 때, β^3 의 값은? (단, $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$ 는 각각 α, β 의 켤레복소수이다.) [5.1점]

- ① -15 ② -18 ③ -21
 ④ -24 ⑤ -27

305. a, b, c 가 0이 아닌 실수일 때, 두 이차식

$$f(x) = ax^2 + bx - c, \quad g(x) = (a-b)x^2 + ax - a$$

에 대하여 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? [4.7점]

[보 기]

- ㄱ. $\sqrt{a}\sqrt{c} = -\sqrt{ac}$ 이면 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
 ㄴ. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ 이면 이차방정식 $g(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
 ㄷ. $c > b > a$ 이면 $f(x)=0, g(x)=0$ 중 적어도 하나는 실근을 갖는다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

306. 0이 아닌 세 복소수 α, β, γ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \alpha + \beta + \gamma = 0 \quad (나) \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0$$

이때, $\left(\frac{\gamma}{\beta} - \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right)\overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}$ 의 값은? (단, $\overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}$ 는 $\frac{\beta}{\alpha}$ 의 켤레복소수이고, $i = \sqrt{-1}$ 이다.) [5.3점]

- ① 2 ② 3 ③ 4
 ④ 5 ⑤ 6

5.

이차방정식(step1)

한 근이 주어진 이차방정식

307. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax - 2a = 0$ 의 한 근이 2일 때, 다른 한 근을 b 라 하자. ab 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [4.5점]

- ① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

308. 이차방정식 $x^2 + ax - b = 0$ 의 한 근이 $1+i$ 일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}$ 의 값은? (단, a, b 는 실수이고, $i = \sqrt{-1}$ 이다.) [4.4점]

- ① -4 ② -2 ③ 2
④ 4 ⑤ 8

309. 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 - \sqrt{2}i$ 일 때, 실수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$ 이다.) [3.7점]

- ① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

310. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2x + a = 0$ 의 한 근이 $1+3i$ 일 때, 실수 a 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$) [4.1점]

- ① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

이차방정식의 근의 판별

311. 서로 다른 두 허근을 갖는 이차방정식인 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? [4.7점]

[보 기]

㉠. $x^2 - 3x + 4 = 0$

㉡. $x^2 - 6x + 9 = 0$

㉢. $3x^2 + 2x + 1 = 0$

㉤. $x^2 + 4x + 1 = 0$

- ① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉡, ㉤
④ ㉠, ㉢, ㉤ ⑤ ㉡, ㉢, ㉤

312. <보기>에서 서로 다른 두 허근을 갖는 이차방정식만을 고른 것은? [4.0점]

[보 기]

㉠. $3x^2 - 3x + 2 = 0$ ㉡. $2x^2 + 7x + 5 = 0$
 ㉢. $-x^2 + 4x - 4 = 0$ ㉣. $x^2 + 3x + 5 = 0$

- ① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉣
 ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉡, ㉣

313. 이차방정식 $x^2 - 4x + a - 3 = 0$ 이 실근을 갖도록 하는 자연수 a 의 개수는? [3.8점]

- ① 3 ② 4 ③ 5
 ④ 6 ⑤ 7

314. 이차방정식 $x^2 + 5x + k = 0$ 의 서로 다른 두 실근을 가질 때, 정수 k 의 최댓값은? [4.6점]

- ① 0 ② 2 ③ 4
 ④ 6 ⑤ 8

315. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2kx + k^2 - 2k - 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 정수 k 의 최솟값은? [4.0점]

- ① -3 ② -2 ③ -1
 ④ 0 ⑤ 1

316. 이차방정식 $x^2 - 6x + 3k - 7 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 자연수 k 의 최댓값은? [4.6점]

- ① 3 ② 4 ③ 5
 ④ 6 ⑤ 7

317. 이차방정식 $x^2 + 4x + a = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 자연수 a 의 개수는? [4.1점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

318. 이차방정식 $x^2 - 2kx + k^2 + k - 5 = 0$ 이 실근을 갖도록 하는 자연수 k 의 값들의 합은? [4.5점]

- ① 6 ② 10 ③ 15
④ 21 ⑤ 28

319. 이차방정식 $x^2 - 2x - a + 7 = 0$ 이 서로 다른 두 허근을 갖도록 하는 모든 양의 정수 a 의 개수는? [3.5점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

320. x 에 대한 이차방정식

$$x^2 - (2k - a)x + k^2 + 4k - a = 0$$

이 실수 k 의 값과 관계없이 중근을 가질 때, 실수 a 의 값은? [3.9점]

- ① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

이차방정식의 근과 계수와의 관계

321. 이차방정식 $3x^2 - 4x + 5 = 0$ 의 두 근의 합을 a , 곱을 b 라고 할 때, $a + b$ 의 값은? [3.6점]

- ① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

322. 이차방정식 $x^2 - 3x + 5 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha\beta - (\alpha + \beta)$ 의 값은? [3.8점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

323. 이차방정식 $x^2 - 3x + 5 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $(\alpha + 1)(\beta + 1)$ 의 값은? [4점]

- ① 0 ② 3 ③ 6
④ 9 ⑤ 12

324. 이차방정식 $2x^2 - 4x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때,
 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ 의 값은? [4.1점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
 ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

325. 이차방정식 $x^2 - 5x + 4 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때,
 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ 의 값은? [4.3점]

- ① $-\frac{5}{4}$ ② $-\frac{4}{5}$ ③ $\frac{1}{5}$
 ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{5}{4}$

326. 이차방정식 $x^2 + 8x + 4 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때,
 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ 의 값은? [4.6점]

- ① -8 ② -4 ③ -2
 ④ 2 ⑤ 4

327. 이차방정식 $x^2 + 4x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때,
 $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ 의 값은? [4.8점]

- ① $\sqrt{2}i$ ② $-\sqrt{2}i$ ③ 2
 ④ $\sqrt{6}i$ ⑤ $-\sqrt{6}i$

328. 이차방정식 $x^2 - 2x + 5 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때,
 $\frac{\beta}{\alpha}$ 와 $\frac{\alpha}{\beta}$ 를 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 5인 이차방정식을
 $f(x) = 0$ 이라고 하자. 이 때, $f(-1)$ 의 값은? [4.2점]

- ① 4 ② 5 ③ 6
 ④ 7 ⑤ 8

329. 이차방정식 $x^2 - 3x + 5 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때,
 $(\alpha^2 - 2\alpha)(\beta^2 - 2\beta)$ 의 값은? [5.0점]

- ① 14 ② 15 ③ 16
 ④ 17 ⑤ 18

이차방정식 만들기

330. 이차방정식 $x^2 - 2x + a = 0$ 의 두 근이 α, β 이고,
이차방정식 $x^2 + x + b = 0$ 의 두 근이 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 일 때, $a + b$ 의
값은? (단, a, b 는 실수이다.) [4.8점]

- ① -9 ② -6 ③ -3
④ 6 ⑤ 9

331. 이차방정식 $x^2 - 3x + 4 = 0$ 의 두 근 α, β 에 대하여
이차식 $f(x)$ 가 $f(\alpha) = \beta, f(\beta) = \alpha$ 를 만족할 때, 방정식
 $f(x) + x - 3 = 0$ 의 모든 근의 합을 구하고 풀이 과정을
논술하시오. [8점]

5.

이차방정식(step2)

이차방정식의 풀이

332. 다음 이차방정식이 순허수를 근으로 갖는다고 한다.

$$(1 - 3i)x^2 - (a - 2i)x - 10i = 0$$

이때, 실수 a 의 값은? [4.7점]

- ① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

한 근이 주어진 이차방정식

333. 0이 아닌 복소수 z 에 대하여 최고차항의 계수가 1이고
모든 계수가 실수인 이차식 $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 모두
만족시킬 때, $f(x), g(x)$ 의 일차항의 계수의 합은? (단,
 $f(0) = g(0) = 1$ 이다.)
[4.7점]

- (가) $z - 1$ 은 $f(x) = 0$ 의 한 허근이다.
(나) $z - i$ 는 $g(x) = 0$ 의 한 근이다.

- ① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

334. 이차식 $f(x)=x^2+px+q$ 에 대하여 이차방정식 $f(x)=0$ 의 한 근은 $a+bi$ 이고, 이차방정식 $f(x)-2=0$ 의 한 근은 2이다. 정수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 의 개수는?
(단, $i = \sqrt{-1}$ 이고 p, q 는 정수이다.) [4.9점]

- ① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

335. 다음은 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 한 허근이 $p+qi$ 이면 그 켤레복소수 $p-qi$ 도 방정식의 근임을 확인하는 과정이다. (단, $i = \sqrt{-1}$ 이고 a, b, p, q 는 실수, $q \neq 0$ 이다.)

이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 에 $x=p+qi$ 를 대입하면
 $(p+qi)^2+a(p+qi)+b=0$
 $(p^2-q^2+ap+b)+(가)i=0$
 이때, a, b, p, q 는 모두 실수이므로
 $p^2-q^2+ap+b=(나) \dots\dots ①$
 $(가)=(나) \dots\dots ②$
 $q \neq 0$ 이므로 ②에서 $2p+a=0$, 즉 $a=(다) \dots\dots ③$
 ③을 ①에 대입하여 정리하면 $b=(라)$
 따라서 주어진 이차방정식은
 $x^2+(다)x+(라)=0$ 이므로
 $x^2+(다)x+(라)=(x-p)^2-(마)^2$
 $= (x-p-(마))(x-p+(마))$
 에서 주어진 이차방정식의 두 근은 $p+qi, p-qi$ 이다.

(가)~(마)에 들어갈 식 또는 수로 옳지 않은 것은? [4.4점]

- ① (가): $2pq+aq$ ② (나): 0 ③ (다): $-2p$
④ (라): p^2-q^2 ⑤ (마): qi

336. 이차식 $f(x)=x^2+px+q$ 에 대하여 이차방정식 $f(x)=0$ 의 한 근이 $\alpha = \frac{2}{1-i}$ 일 때, $f(\alpha^5+5\alpha-1)$ 의 값을 구하고, 그 과정을 서술하시오. (단, $i = \sqrt{-1}$ 이고 p, q 는 실수이다.) [6점]

이차방정식의 근의 판별

337. x 에 대한 이차방정식 $x^2+2(k-2)x+k^2=0$ 이 실근을 갖고, x 에 대한 이차방정식 $x^2-2kx+k^2+k+3=0$ 이 허근을 갖도록 하는 정수 k 의 개수는? [5.1점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

이차방정식의 근의 판별의 활용

338. x 에 대한 이차방정식 $2x^2-2(2-a+2b)x+4+(a-2b)^2=0$ 이 실근을 가질 때, $a^3-8b^3+12ab+2$ 의 값은? (단, a, b 는 실수이다.) [5.1점]

- ① -6 ② -4 ③ -2
④ 0 ⑤ 2

339. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + ax - 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 α, β 라 할 때, 다음 물음에 답하십시오. (단, a 는 정수이다.) [총 7.0점]

(1) 두 실근의 곱 $\alpha\beta$ 의 값을 구하십시오. [2.0점]

(2) 두 실근 α, β 가 다음 두 조건을 모두 만족하기 위한 정수 a 의 값을 모두 구하고, 그 과정을 서술하십시오. [5.0점]

- (가) $-2 < \alpha < -1$
(나) $2 < \beta$

이차방정식의 근과 계수와의 관계

340. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + x - 3 = 0$ 의 두 근을 각각 α, β 라 할 때, $\frac{36}{\alpha^3 + 3} + \frac{36}{\beta^3 + 3}$ 의 값은? [5.0점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

341. 계수가 실수이고 이차항의 계수가 1인 이차식 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값은? [4.7점]

- (가) 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근의 곱은 5이다
(나) 이차방정식 $x^2 - 4x + 5 = 0$ 의 두 근 α, β 에 대하여 $f(\alpha) + f(\beta) = 4$ 이다.

- ① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

342. 이차방정식 $x^2 - x - 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \beta^5 + 11\beta + 13\alpha\beta$ 의 값은? [5.6점]

- ① 39 ② 48 ③ 56
④ 62 ⑤ 70

343. $f(2x) = x^2 - x + 1$ 일 때, $f(4x) + 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 한다. $(\alpha - 1)(\beta - 1)$ 의 값은? [4.9점]

- ① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$
④ $\frac{7}{4}$ ⑤ 2

344. 이차방정식 $x^2 + 2(m+1)x - 2m - 5 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최솟값은? (단, m 은 실수이다.) [4.5점]

- ① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

345. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \beta = 12$ 이다. 이차방정식 $f(4x - 2) = 0$ 의 x^2 의 계수를 a , x 의 계수를 b 라 할 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은? [4.2점]

- ① -6 ② -5 ③ -4
④ -3 ⑤ -2

346. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + (a-4)x - 4 = 0$ 의 두 근의 차가 4일 때, x 에 대한 이차방정식 $x^2 + (a+4)x + 4 = 0$ 의 두 근의 차는? (단, a 는 상수이다.) [4.8점]

- ① $4\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ $5\sqrt{2}$
④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{5}$

347. 이차방정식 $x^2 + 5x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2$ 의 값은? [4.2점]

- ① -9 ② -7 ③ -5
④ -3 ⑤ -1

348. 이차방정식 $x^2 - 6x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β ($\alpha > \beta$)라 할 때, $\frac{\alpha^{10} - \beta^{10} + \alpha^8 - \beta^8}{\alpha^6 + \alpha^3\beta^3 + \beta^6}$ 의 값은? [4.8점]

- ① $740\sqrt{2}$ ② $760\sqrt{2}$ ③ $780\sqrt{2}$
④ $800\sqrt{2}$ ⑤ $840\sqrt{2}$

349. 이차방정식 $x^2 - kx + 2k - 4 = 0$ 의 두 근의 절댓값의 비가 1:2가 되도록 하는 모든 정수 k 의 값을 구하고, 풀이 과정과 답을 자세히 논술하시오. [6.0점]

350. 두 자연수 a, b 에 대하여 이차방정식 $ax^2 - bx + 70 = 0$ 의 두 근이 모두 소수가 되도록 하는 b 의 값들의 합을 구하고, 그 과정을 논술하시오. [8.0점]

351. 실수 p, q 에 대하여 이차방정식 $x^2 - px + q = 0$ 의 두 근이 α, β 일 때, 다음 조건을 모두 만족시키는 α, β, p, q 가 존재한다. 이때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은? [5.7점]

- (가) 두 수 α, β 는 허수이다.
 (나) 두 수 p, q 는 10보다 크고, 100보다 작은 서로 다른 자연수이다.
 (다) 두 수 p, q 는 각각 홀수개의 약수를 갖는다.

- ① 14 ② 94 ③ 97
 ④ 119 ⑤ 208

이차방정식 만들기

352. 이차방정식 $x^2 - 5x - 3 = 0$ 의 두 근을 $\alpha, \frac{1}{\beta}$ 이라고 할 때, $\frac{1}{\alpha}, \beta$ 를 두 근으로 가지고 x^2 의 계수가 3인 이차방정식을 구하고 풀이 과정을 논술하시오.

353. 이차방정식 $x^2 - 3x + 4 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, 이차방정식 $x^2 - (2\alpha + 1)x = b = 0$ 의 두 근은 $\alpha + 1, \beta + 1$ 이다. ab 의 값은? (단, a, b 는 수이다.) [4.5점]

- ① 8 ② 10 ③ 12
 ④ 14 ⑤ 16

354. 이차방정식 $2x^2 - x + 4 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, x^2 의 계수가 4이고 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ 을 두 근으로 하는 이차방정식은? [3.5점]

- ① $4x^2 - x + 2 = 0$ ② $4x^2 - 4x + 2 = 0$ ③ $4x^2 + 2x - 2 = 0$
 ④ $4x^2 + 4x + 2 = 0$ ⑤ $4x^2 + 4x + 4 = 0$

355. 이차방정식 $x^2 + 4x - 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 이차식 $f(x)$ 에 대하여 $f(-2)$ 의 값은? [4.1점]

- (가) $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = f\left(\frac{1}{\beta}\right) = 5$
 (나) $f(0) = 2$

- ① 62 ② 64 ③ 66
 ④ 68 ⑤ 70

356. 이차방정식 $x^2 - 3x + 4 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때,

이차방정식 $4x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근은 $\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ 이다.

$a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 실수이다.) [4.4점]

- ① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

잘못 푼 이차방정식

357. 두 학생 A, B 가 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 근을 구하였다. 학생 A 가 이차항의 계수 a 만을 잘못 보고 구한 두 근이

$1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}$ 이고, 학생 B 가 상수항 c 만을 잘못 보고 구한 두 근이 $\frac{1 + \sqrt{2}i}{3}, \frac{1 - \sqrt{2}i}{3}$ 이다. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의

두 근을 α, β 라 할 때, $3|\alpha - \beta|$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$ 이고, a, b, c 는 0이 아닌 실수이다.) [5.2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

358. 갑과 을이 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 근을 구하려고

한다. 그런데 갑은 x 의 계수를 잘못 보고 풀어 두 근

$1 + 3i, 1 - 3i$ 를 얻었고, 을은 상수항을 잘못 보고 풀어 두 근

$3 + 2i, 3 - 2i$ 를 얻었다. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근을

바르게 구하고, 그 풀이 과정을 논술하시오. (단, a, b 는

실수이다.) (부분 점수 있음) [5.0 점]

359. 다음은 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 을 푼 후 두 학생이 나눈 대화이다. (단, a, b 는 실수이다.)

학생 A : 나는 a 의 값을 잘못 보고 풀었더니 두 근이 $1+2i, 1-2i$ 로 나왔어.
 학생 B : 나는 b 의 값을 잘못 보고 풀었더니 두 근이 $2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}$ 으로 나왔어.

이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 올바른 근은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [4.5점]

- ① $-2\pm\sqrt{2}$ ② $2\pm\sqrt{2}$ ③ $-1\pm 2i$
 ④ $-2\pm i$ ⑤ $2\pm i$

$f(ax+b)=0$ 의 근 구하기

360. 서로 다른 두 점 $(m, 0), (n, 0)$ 을 지나는 이차함수 $y=f(x)$ 에 대하여 $m+n=3$ 일 때, 이차방정식 $f\left(\frac{x-2}{3}\right)=0$ 의 두 근의 합은? [4.3점]

- ① 10 ② 11 ③ 12
 ④ 13 ⑤ 14

$f(\alpha)=f(\beta)=k$ 를 만족하는 이차식 만들기

361. 이차방정식 $x^2+2x+4=0$ 의 두 근 α, β 에 대하여 이차함수 $f(x)=x^2+px+q$ 가 $f(\alpha^2)=-8\alpha, f(\beta^2)=-8\beta$ 를 만족시킬 때, 두 상수 p, q 에 대하여 $p+q$ 의 값은? [5.0점]

- ① 12 ② 20 ③ 32
 ④ 40 ⑤ 52

362. 이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 두 근 α, β 에 대하여 이차함수 $f(x)=x^2+px+q$ 가 $f(\alpha^2)=-3\alpha$ 와 $f(\beta^2)=-3\beta$ 를 만족시킬 때, 두 상수 p, q 에 대하여 $p+q$ 의 값을 구하는 풀이 과정을 쓰고 답을 구하시오. [7 점]

363. 이차방정식 $x^2+x-3=0$ 의 서로 다른 두 실근을 α, β 라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근 p, q 에 대하여 $|p-q|$ 의 값은? [4.1점]

<조 건>

- $\beta f(\alpha)=1$
- $\alpha f(\beta)=1$
- $f(0)=1$

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

364. x 에 대한 이차방정식 $3x^2 - 6x + 4 = 0$ 의 서로 다른 두 근을 α, β 라 하자. 계수가 실수이고 이차항의 계수가 1인 이차식 $f(x)$ 에 대하여 $f(\alpha) = \frac{\alpha}{2}, f(\beta) = \frac{\beta}{2}$ 일 때, $f(2)$ 의 값은? [5.2점]

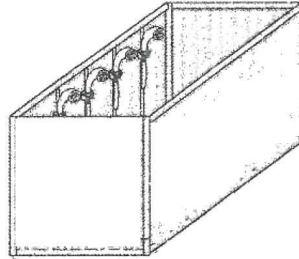
- ① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{6}{5}$
 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{7}{3}$

365. 이차방정식 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 두 근 α, β 에 대하여 계수를 실수로 가지는 이차식 $P(x)$ 가 $P(\alpha) = \beta, P(\beta) = \alpha, P(1) = 1$ 을 만족시킬 때, $P(3)$ 의 값은? [4.6점]

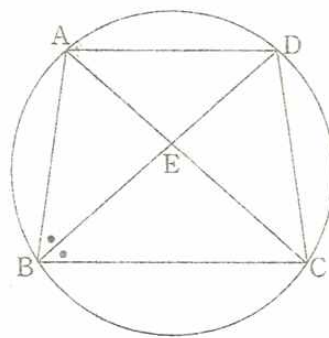
- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

이차방정식 활용

366. 어느 해수욕장에서 그림과 같이 가로와 높이가 같은 직육면체의 모양의 간이 샤워실을 만들려고 한다. 직육면체의 모서리에 사용될 쇠막대의 길이의 합은 60m이고, 옆의 네 면에 사용될 천의 넓이의 합은 72m^2 일 때, 간이 샤워실의 가로($x\text{m}$)와 세로($y\text{m}$)의 길이를 구하고 그 과정을 서술하시오. [5.0점]



367. 그림과 같이 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여 $\overline{BC} = 5, \overline{AC} = 6, \overline{CD} = 4$ 이고 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 이다. 선분 BD가 $\angle ABC$ 를 이등분하고, 두 선분 AC, BD의 교점을 E라 하자. x 에 대한 이차방정식 $3x^2 + mx + n = 0$ 의 두 근이 $\overline{AD}, \overline{EC}$ 일 때, 두 상수 m, n 에 대하여 $m+n$ 의 값은? [4.5점]



- ① 10 ② 14 ③ 18
 ④ 22 ⑤ 26

368. 720개의 사탕을 모여 있던 학생들에게 똑같이 나누어 주었더니 남은 것이 없었다. 그런데 조금 늦게 2명의 학생이 더 와서 나누어 주었던 사탕 중 1명당 4개씩 회수하여 나중에 온 2명의 학생에게 똑같이 나누어 주었더니 모든 학생이 받은 사탕의 개수가 같았다. 이때, 처음 모여 있던 학생 수는? [4.5점]

- ① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

5.

이차방정식(step3)

369. 이차방정식 $x^2 - px + q = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하자. 다음 조건을 모두 만족시키는 상수 p, q 에 대하여 $4p + q$ 의 값은? [5.1점]

- (가) $p + q = 55$
(나) α^2 의 약수의 개수는 5이다.
(다) α, β 는 $|\beta| < |\alpha| < 20$ 인 서로 다른 정수이다.

- ① 4 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 10

370. 50 이하의 자연수 n 에 대하여 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2(n+1)x + n^2 + 1 = 0$ 의 두 근이 모두 정수가 되도록 하는 모든 자연수 n 의 값의 합은? [4.2점]

- ① 80 ② 90 ③ 100
④ 110 ⑤ 120

371. 이차방정식 $x^2 - px + q = 0$ 의 한 근이 $a + i$ 일 때, 다음 조건을 모두 만족시키는 p, q 의 값을 구하는 과정을 근과 계수와의 관계를 이용하여 서술하시오. (단, $i = \sqrt{-1}$) [7.0점/부분 점수 있음]

- (가) p, q 는 50이하의 서로 다른 자연수이다.
(나) a 는 3개의 약수를 갖는 자연수이다..

372. 세 실수 a, b, c 에 대하여 x 에 대한 이차방정식

$ax^2 - bix + c = 0$ 의 한 근이 $\alpha = 2 - i$ 이다. 다른 한 근을 β 라고

할 때, $\frac{5}{\alpha} - \beta$ 의 값은? [4.5점]

- ① -4 ② $-4 - 2i$ ③ $4 - 2i$
 ④ $4 + 2i$ ⑤ 4

373. 이차방정식 $x^2 + 4x - 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, 다음

조건을 만족시키는 이차식 $f(x)$ 에 대하여 이차방정식

$f(x) = 0$ 의 두 근 p, q 에 대하여 $\frac{1}{4}(p^4 + p^2q^2 + q^4)$ 의 값은?

[4.6점]

($\neg$) $\beta f(\alpha) = 1$ ($\neg$) $\alpha f(\beta) = 1$
 ($\sqsubset$) $f(0) = 1$

- ① 132 ② 156 ③ 182
 ④ 210 ⑤ 240

374. 이차방정식 $x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때,

$\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{2}}\right)^{2n} = 2^n$ 이 되도록 하는 100 이하의 자연수 n 의

개수는? [4.9점]

- ① 13 ② 17 ③ 21
 ④ 25 ⑤ 29

6.

이차방정식과 이차함수(step1)

이차함수 x 축과의 위치 관계

375. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 의 그래프가 점 $(-1, 0)$ 에서 x 축과 접할 때, 이차함수 $y = x^2 + bx + a - 8$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점 사이의 거리는? (단, a, b 는 상수이다.) [4.3점]

- ① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

376. 이차함수 $y = \frac{1}{4}(x-a)^2 + 3$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 가 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 두 점 A, B에서 x 축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라고 하자. 선분 CD의 길이가 4일 때, 상수 a 의 값은? [4.7점]

- ① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$
④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

377. 이차함수 $y = -2x^2 + 4x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나도록 하는 실수 k 의 최솟값은? [4.1점]

- ① -3 ② -2 ③ -1
④ 1 ⑤ 2

378. 이차함수 $y = -2x^2 + 4x - k$ 의 그래프가 x 축과 한 점에서 만나도록 하는 실수 k 의 값은? [3.9점]

- ① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

379. 이차함수 $y = x^2 + 4(a-1)x + 3a^2 - 4a + 9$ 의 그래프가 항상 x 축과 한 점에서만 만날 때, 양수 a 의 값은? [3.9점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

380. 이차함수 $y = x^2 + 4x + 2k$ 의 그래프와 x 축이 접하도록 하는 정수 k 의 값은? [3.8점]

- ① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

381. 이차함수 $f(x) = -x^2 + ax + b$ 가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(가) $f(-1) = f(7)$

(나) 이차함수의 그래프와 직선 $y = 11$ 이 접한다.

이때, ab 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [4.0점]

- ① -120 ② -12 ③ 0
④ 12 ⑤ 120

382. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점 $(\alpha, 0), (\beta, 0)$ 에서 만나고 $\alpha + \beta = 10$ 일 때, 방정식 $f(2x - 7) = 0$ 의 모든 실근의 합은? [5.6점]

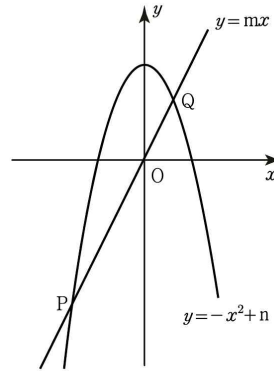
- ① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

383. 이차함수 $y = x^2 + ax - 2a - 1$ 의 그래프는 a 의 값에 관계없이 항상 점 $P(p, q)$ 를 지닌다. $p + q$ 의 값은? (단, a, p, q 는 실수이다.) [4.7점]

- ① -5 ② -3 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

이차함수와 직선의 위치 관계

384. 이차함수 $y = -x^2 + n$ 의 그래프와 직선 $y = mx$ 는 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 점 P의 x 좌표가 $-1 - \sqrt{5}$ 일 때, $m - n$ 의 값은? (단, m, n 은 유리수이다.) [4.2점]



- ① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

385. 이차함수 $y = \frac{1}{2}(x - k)^2$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 가 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 두 점 A, B에서 x 축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. 선분 CD의 길이가 8일 때, 상수 k 의 값은? [5.2점]

- ① $\frac{11}{2}$ ② 6 ③ $\frac{13}{2}$
④ 7 ⑤ $\frac{15}{2}$

386. 직선 $y = 4x - a - 3$ 이 이차함수 $y = -x^2 + x - 2a$ 의 그래프와 만나지 않도록 하는 정수 a 의 최솟값은? [4.3점]

- ① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

387. 이차함수 $y = 2x^2 + 2x$ 의 그래프와 직선 $y = 4x + m - 6$ 이 만나지 않도록 하는 모든 자연수 m 의 값의 합은? [3.9점]

- ① 6 ② 10 ③ 15
④ 21 ⑤ 28

388. 이차함수 $y = x^2 + 3x - 4$ 의 그래프와 직선 $y = x - k$ 가 만나지 않을 때, 실수 k 의 값의 범위는? [4.2점]

- ① $k < -5$ ② $k < 3$ ③ $k < 5$
④ $k > 3$ ⑤ $k > 5$

389. 이차함수 $y = x^2 + 3x - 4$ 의 그래프와 직선 $y = x + k$ 가 서로 만나지 않도록 하는 실수 k 의 값의 범위는? [3.5점]

- ① $k > -5$ ② $k < -5$ ③ $k > -3$
④ $k < -5$ ⑤ $k > -4$

390. 함수 $f(x) = |x^2 - 2x - 8|$ 의 그래프와 직선 $y = 3x + k$ 가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 정수 k 의 개수는? [5.0점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

이차함수와 접선의 방정식

391. 이차함수 $y = x^2 - 5x + 4$ 의 그래프와 직선 $y = m(x - 1)$ 이 접하도록 하는 실수 m 의 값은? [4.9점]

- ① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

392. 이차함수 $y = -2x^2 + 4x + k$ 와 그래프가 직선 $y = x + 1$ 이 접하도록 하는 상수 k 에 대하여 $-16k$ 의 값은? [4.4점]

- ① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

393. 직선 $y = 2x - k$ 와 이차함수 $y = x^2 - 4x + 2k$ 의 그래프가 점 (a, b) 에서 접할 때, ab 의 값은? [3.7점]

- ① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

394. 이차함수 $y = 2x^2 - ax - 8$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점 $A(-4, 0)$, $B(b, 0)$ 에서 만날 때, 실수 a, b 에 대하여 $b - a$ 의 값은? [4.0점]

- ① -7 ② -5 ③ 0
④ 5 ⑤ 7

395. 이차함수 $y = x^2 - 2(2a - k)x + k^2 + 4k + b$ 의 그래프가 실수 k 의 값에 관계없이 x 축에 접할 때, 상수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값은? [4.5점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

396. 이차함수 $f(x) = x^2 + ax - (b - 5)^2$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $x = \frac{3}{2}$ 에서 최솟값을 가진다.
(나) 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = cx$ 가 한 점에서 만난다.

세 상수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c$ 의 값은? [4.5점]

- ① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

397. 이차함수 $f(x) = x^2 + ax + b$ 가 <보기>의 조건을 모두 만족시킬 때, 이차함수 $f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점의 x 좌표를 α, β 라 할 때 $\alpha\beta$ 의 값은? [5.0점]

—[보 기]—

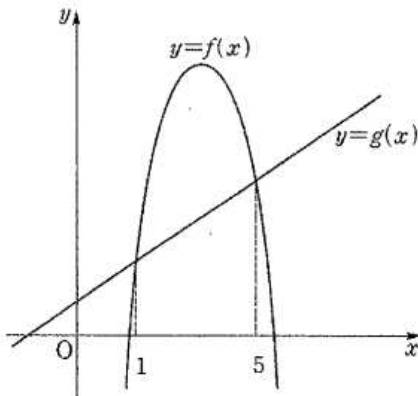
- (가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(3 - x) = f(3 + x)$ 이다.
(나) 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = -4x + 5$ 는 접한다.

- ① -9 ② -6 ③ 0
④ 6 ⑤ 9

이차함수와 이차함수의 위치 관계

398. 두 이차함수 $f(x) = x^2 - 4kx - 6$, $g(x) = -x^2 + 4x - 2k^2$ 가 있다. 방정식 $f(x) = g(x)$ 의 서로 다른 두 실근을 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 할 때, $f(\alpha) + kg(\beta)$ 의 값을 구하시오. (단, k 는 음의정수이다.) [6점]

399. 이차함의 계수가 -1 인 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = g(x)$ 가 만나는 두 점의 x 좌표가 1 과 5 이다. $h(x) = f(x) - g(x)$ 라 할 때, 함수 $h(x)$ 는 $x = p$ 에서 최댓값 q 를 갖는다. $p + q$ 의 값은? [4.4점]



- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

이차함수의 최대최소(1)

400. 이차함수 $y = 3(x+1)^2 - 2$ 의 최댓값과 최솟값에 대한 설명으로 옳은 것은? [3.5점]

- ① 최댓값은 없고, 최솟값은 -2 이다.
② 최댓값은 없고, 최솟값은 -1 이다.
③ 최댓값은 -2 이고, 최솟값은 없다.
④ 최댓값은 -1 이고, 최솟값은 없다.
⑤ 최댓값은 -1 이고, 최솟값은 -2 이다.

401. $1 \leq x \leq 4$ 일 때, 이차함수 $y = -x^2 + 6x + 2$ 의 최솟값은?
[3.9점]

- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

402. 이차함수 $y = x^2 - 6x + 6 (-1 \leq x \leq 2)$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라고 할 때, $M + m$ 의 값은? [3.9점]

- ① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

이차함수의 최대최소(2)

403. $-3 \leq x \leq 3$ 에서 정의된 이차함수 $f(x) = x^2 - 2x + k$ 의 최솟값이 3일 때, 실수 k 의 값과 함수 $f(x)$ 의 최댓값의 합은? [5.0점]

- ① 15 ② 20 ③ 23
④ 27 ⑤ 31

404. $0 \leq x \leq 5$ 에서 이차함수 $y = -x^2 + 4x + k$ 의 최댓값이 5일 때 최솟값은? (단, k 는 상수이다.) [4.1점]

- ① -4 ② -2 ③ -1
④ 1 ⑤ 2

405. $-1 \leq x \leq 2$ 에서 이차함수 $y = x^2 - 2x + a$ 의 최댓값은 8, 최솟값은 m 일 때, 상수 a 에 대하여 $a+m$ 의 값은? [4.3점]

- ① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

406. $1 \leq x \leq 3$ 일 때, 이차함수 $y = ax^2 - 8ax - b$ 의 최댓값이 6, 최솟값이 -2 이다. 실수 a, b 에 대하여 $a-b$ 의 값은? (단, $a > 0$) [4.1점]

- ① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

407. 이차함수 $y = -x^2 + 6x + 8$ ($1 \leq x \leq 6$)의 최댓값을 M , 최솟값은 m 이라 하자. 이때 $M+m$ 의 값은? [4.3점]

- ① 22 ② 23 ③ 24
④ 25 ⑤ 26

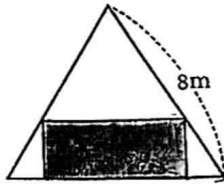
408. $0 \leq x \leq 5$ 에서 이차함수 $y = -x^2 + 4x + a$ 의 최댓값이 12일 때, 최솟값은 m 이다. $a+m$ 의 값은? (단, a 는 실수이다.) [4.4점]

- ① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

409. 실수 전체에서 이차함수 $f(x) = 2x^2 - 2ax + 3$ 의 최솟값은 1이고, $-3 \leq x \leq 3$ 일 때, 이차함수 $f(x)$ 의 최댓값은 M 이라 하자. 이때 a 와 M 의 값을 각각 구하고, 그 과정을 논리적으로 서술하시오. (단, a 는 양의 실수, M 은 실수이다.) [5.0점]

이차함수의 최대최소의 활용

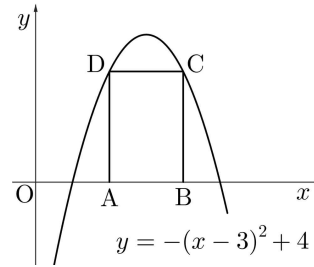
410. 그림과 같이 한 변의 길이가 $8m$ 인 정삼각형 모양의 천막의 한 면에 직사각형 모양의 출입문을 만들려고 한다. 출입문의 넓이의 최댓값은? [5.1점]



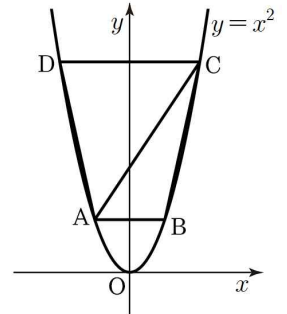
- ① $4\sqrt{3}m^2$ ② $5\sqrt{3}m^2$ ③ $6\sqrt{3}m^2$
 ④ $7\sqrt{3}m^2$ ⑤ $8\sqrt{3}m^2$

411. 그림과 같이 직사각형 $ABCD$ 에서 두 점 A, B 는 x 축, 두 점 C, D 는 이차함수 $y = -(x-3)^2 + 4$ 의 그래프 위의 점이다. 이때, 직사각형 $ABCD$ 의 둘레의 길이의 최댓값은? (단, 점 C, D 는 제1사분면 위의 점이다.) [4.1점]

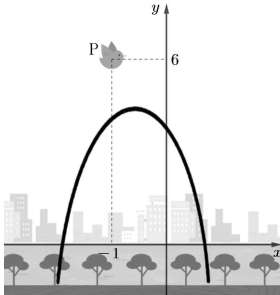
- ① 6 ② 7 ③ 8
 ④ 9 ⑤ 10



412. 그림과 같이 x 축에 평행한 두 직선과 이차함수 $y = x^2$ 의 그래프의 교점을 각각 A, B, C, D 라고 하자. 삼각형 ABC 와 삼각형 ACD 의 넓이의 비가 $1:2$ 이고, 사다리꼴 $ABCD$ 의 대각선 AC 의 길이가 $6\sqrt{5}$ 일 때, 사다리꼴 $ABCD$ 의 넓이를 구하고 풀이 과정을 논술하시오. [10 점]



413. 그림은 곡선 모양의 건축물을 좌표평면 위에 나타낸 것이다. 그림에서 건축물은 이차함수 $y = -2x^2 - 2x + 4$ 의 그래프 모양이고, 새의 위치는 $P(-1, 6)$ 이다. 새가 P 지점에서 건축물을 향해 직선으로만 움직인다고 한다. 새의 이동 경로와 건축물을 나타내는 곡선이 접할 때, 모든 접점의 x 좌표의 합은?



- ① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

414. 원가가 80원인 상품을 80원에 판매하면 하루에 100개가 팔린다. 판매가를 10원씩 x 번 올리면 판매개수는 $5x$ 개만큼 줄어든다고 한다. 이때 최대이익을 얻을 수 있는 판매가와 최대이익을 구하는 과정을 서술하시오. [6.0점/부분 점수 있음]

415. 한쪽 벽면에 길이가 $60m$ 인 철망으로 ㄷ자 모양의 울타리를 만들려고 한다. 울타리로 둘러싸인 직사각형 모양의 넓이가 최대가 되도록 하는 울타리의 가로 길이를 p , 그 때의 직사각형 모양의 넓이를 q 라 할 때, $p+q$ 의 값은? [4.4점]

- ① 450 ② 465 ③ 480
④ 495 ⑤ 510

416. 어느 극단의 공연 관람권의 가격을 x 만 원, 한 달 동안의 공연 이익금을 y 만 원 이라고 하면 x 와 y 사이에는

$$y = -4x^2 + 40x - 30$$

인 관계가 성립한다고 한다. 관람권의 가격을 7만 원 이상 9만 원 이하로 정할 때, 한 달 동안의 공연 이익금의 최댓값과 최솟값의 합은? [3.9점]

- ① 30 ② 40 ③ 50
④ 60 ⑤ 70

6.

이차방정식과 이차함수(step2)

이차함수 x 축과의 위치 관계

417. 이차함수 $y = -x^2 + 2ax + 9 - a^2$ 의 그래프와 x 축이 만나는 두 점을 A, B 라 하고 이 이차함수의 꼭짓점을 C 라 할 때, 삼각형 ABC 의 넓이는? (단, a 는 실수이다.) [4.9점]

- ① 12 ② 18 ③ 24
④ 27 ⑤ 54

이차함수와 직선의 위치 관계

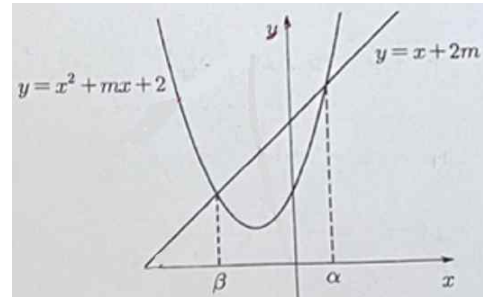
418. 직선 $y = x + k$ 가 이차함수 $y = x^2 - 2x + 2$ 의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나고, 이차함수 $y = x^2 + 2x + 3$ 의 그래프와 만나지 않는다. 실수 k 의 값의 범위가 $a < k < b$ 일 때, $4(b - a)$ 의 값은? [4.2점]

- ① 12 ② 16 ③ 20
④ 24 ⑤ 28

419. 직선 $y = x + 2$ 와 이차함수 $y = x^2 + kx + 4$ 의 그래프가 서로 다른 두 점 A, B 에서 만날 때, 두 점 $(-3, -1), (-1, 1)$ 이 선분 AB 위에 있도록 하는 자연수 k 의 최솟값은? [4.3 점]

- ① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

420. 이차함수 $y = x^2 + mx + 2$ 의 그래프와 직선 $y = x + 2m$ 의 두 교점의 x 좌표를 각각 α, β 라 하자. $\alpha - \beta = 3$ 일 때, 양수 m 의 값은? (단, $\beta < \alpha$) [4.9점]



- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

421. 이차함수 $y = x^2 + 2ax - 15$ 의 그래프와 직선 $y = 2x - n^2$ 이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 자연수 n 의 개수를 $f(a)$ 라 정의하자.
 $\{f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(100)\}$
 $-\{f(0) + f(-1) + f(-2) + \dots + f(-100)\}$
의 값은? (단, a 는 실수이다.) [5.2점]

- ① -199 ② -198 ③ -197
④ -196 ⑤ -195

422. 실수 t 에 대하여 $f(x) = -3x + t$ 라 할 때, 직선 $y = f(x)$ 가 곡선 $y = |x^2 - 9|$ 와 만나는 점의 개수를 $g(t)$ 라 하자. 이때, $g(a) \geq 3$ 를 만족하는 모든 정수 a 의 합은? [5.8점]

- ① 30 ② 31 ③ 32
④ 33 ⑤ 33

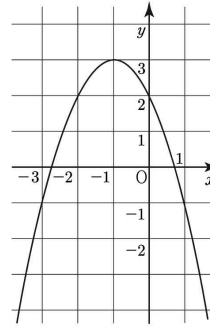
423. 두 이차함수 $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2 + 2x + 4$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 를

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 2) \\ g(x) & (-1 < x < 2) \end{cases}$$

이라 하자. 직선 $y = mx - m + 6$ 과 $y = h(x)$ 의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 m 의 값 중 최솟값은? [4.9점]

- ① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

424. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 그림과 같이 세 점 $(0, 2)$, $(-2, 2)$, $(-3, -1)$ 을 지날 때, 다음 물음에 답하시오. (단, a, b, c 는 실수이고, 좌표평면의 격자는 한 변의 길이가 1인 정사각형 모양이다.) [총 7.0점]



(1) 직선 $y = m(x+3) + 3$ 이 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 접할 때, 상수 m 의 값을 구하고, 그 과정을 논술하시오. [4.0점]

(2) 직선 $y = kx + 2$ 와 이차함수 $y = f(x)$ 의 위치관계에 대하여 가능한 모든 경우를 논술하시오. (단, k 는 상수이다.) [3.0점]

이차함수와 접선의 방정식

425. 실수 a 의 값에 관계없이 이차함수

$y = x^2 - 2ax + a^2 + 4a$ 의 그래프와 항상 접하는 직선이 있다. 이 직선의 방정식을 $y = 2mx - n$ 이라고 할 때, 실수 $m+n$ 의 값은?
[5.0점]

- ① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

426. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + a^2 + 2a$ 의 그래프가 직선

$y = x - b + 1$ 에 접할 때, 실수 a, b 에 대하여 ab 의 값중 가장 큰 값은 $\frac{q}{p}$ 이다. 이 때 $p+q$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.
(단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [6.0점, 부분점수 있음.]

427. 최고차항의 계수가 $a(a > 0)$ 인 이차함수 $y = f(x)$ 와 직선 $y = 4ax - 10$ 의 그래프가 만나는 두 점의 x 좌표는 1과 5이다. $2 \leq x \leq 5$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값은 -6 일 때, a 의 값은?
[5.8점]

- ① 0 ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{2}{5}$
④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

428. 이차함수 $y = -2x^2 + 4x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나고, 직선 $y = 2x + 4$ 와 만나지 않도록 하는 모든 정수 k 의 개수는?
[4.6점]

- ① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

429. 이차함수 $y = x^2 + (a+1)x + b - 1$ 의 그래프가 직선

$y = 4x - 2$ 와 점 $(1, 2)$ 에서 접할 때, $a-b$ 의 값은? (단, a, b 는 실수이다.) [5.1점]

- ① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

430. 이차함수 $y = x^2 + 2(a-k)x + k^2 - 2k + b + 3$ 의 그래프가 실수 k 에 관계없이 항상 x 축에 접할 때, $a-b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [4.3점]

- ① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

431. 이차함수 $y = x^2 + 4x + k^2 + a - 1$ 의 그래프가 실수 k 의 값에 관계없이 직선 $y = 2kx + 2bk - 1$ 과 한 점에서 만난다고 한다. 이때, ab 의 값은? (단, a, b 는 실수이다.) [4.9점]

- ① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

432. 두 함수 $f(x) = \frac{1}{4}x^2$, $g(x) = -x^2 + 4x - \frac{29}{8}$ 와 기울기가 m, y 절편이 k 인 직선 l 이 있다. 실수 k 의 값에 관계없이 직선 l 이 곡선 $y = f(x)$ 또는 곡선 $y = g(x)$ 와 만나는 서로 다른 점의 개수가 항상 2가 되도록 하는 모든 실수 m 의 값의 합은? [4.6점]

- ① $\frac{7}{5}$ ② $\frac{8}{5}$ ③ $\frac{9}{5}$
④ 2 ⑤ $\frac{11}{5}$

433. x 에 대한 이차함수 $y = x^2 - 2(k+a)x + k^2 + 8k + a^2$ 의 그래프가 k 의 값에 관계없이 x 축에 접할 때, 상수 a 의 값은? [3.9점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

434. 이차함수 $y = x^2 - 2kx + k^2 + 1$ 의 그래프가 k 의 값에 관계없이 항상 직선 $y = mx + n$ 에 접할 때, $m+n$ 의 값은? (단, k, m, n 은 실수이다.) [4.8점]

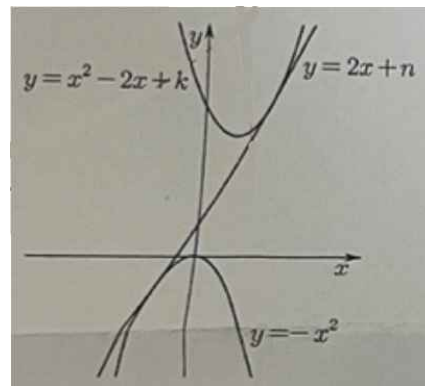
- ① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

435. 이차함수 $y = \frac{1}{k}(x-2k)^2 + 3$ 의 그래프는 실수 k 의 값에 관계없이 항상 서로 다른 두 직선 l, m 과 접한다. 두 직선 l, m 과 직선 $x = \frac{1}{2}$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, $k \neq 0$ 이다.) [4.6점]

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

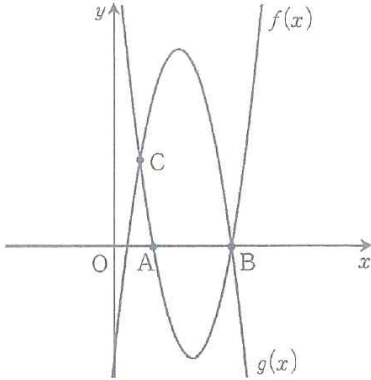
436. 두 이차함수 $y = x^2 - 2x + k$, $y = -x^2$ 의 그래프에 직선 $y = 2x + n$ 이 동시에 접할 때, $n+k$ 의 값은? (단, n, k 는 상수이다.) [4.9점]

- ① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10



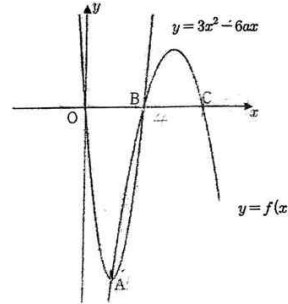
이차함수와 이차함수의 관계

437. 그림과 같이 이차함수 $f(x) = x^2 - 12x + a$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른 두 점 A, B에서 만나고, 이차함수 $g(x) = -x^2 + bx + c$ 의 그래프와는 점 B와 y 좌표가 양수인 점 C에서 만난다. $\overline{AB} = 6$ 이고 삼각형 ABC의 넓이가 21일 때, $g(x)$ 의 최댓값과 $f(x)$ 의 최솟값의 차이는? (단, a, b, c 는 상수이고, 점 A의 x 좌표는 점 B의 x 좌표보다 작으며 점 O는 원점이다.) [4.5점]



- ① 24 ② $\frac{49}{2}$ ③ 25
④ $\frac{51}{2}$ ⑤ 26

438. 양수 a 에 대하여 이차함수 $y = 3x^2 - 6ax$ 의 그래프의 꼭짓점을 A, x 축과 만나는 두 점을 각각 O, B라 하자. 두 점 A, B를 지나고 최고차항의 계수가 -1 인 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 C라 할 때, 선분 BC의 길이는 4이다. [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, O는 원점이다.) [5.3점]



[보 기]

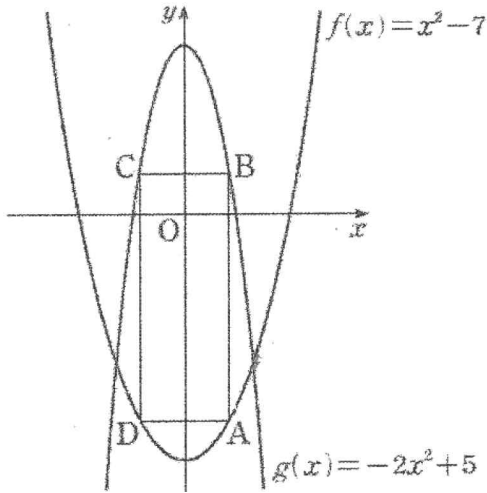
- ㉠. $f(a) = -3a^2$
㉡. $a = 2$
㉢. 삼각형 ACB의 넓이는 24이다.

- ① ㉠ ② ㉢ ③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

439. 두 이차함수 $f(x) = x^2 - 7$ 과 $g(x) = -2x^2 + 5$ 가 있다.

그림과 같이 네 점 $A(a, f(a))$, $B(a, g(a))$, $C(-a, g(-a))$, $D(-a, f(-a))$ 를 꼭짓점으로 하는 직사각형 $ABCD$ 의 둘레의 길이가 최대가 될 때, 직사각형 $ABCD$ 의 넓이를 구하고 그 과정을 서술하시오.

(단, $a > 0$) [6.0점]



이차함수의 최대최소(1)

440. 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x + 2$ 와 서로 다른 두 실수 a, b 가 $f(a) = 2b$, $f(b) = 2a$ 를 만족시킬 때, 이차함수 $y = (x - a)(x - b)$ 의 최솟값은? [4.7점]

- ① 1 ② 0 ③ -1
④ -2 ⑤ -3

441. $-2 \leq x \leq 2$ 일 때, 이차함수

$f(x) = -2x^2 + 4kx - 3k - 2$ 의 최댓값이 3이 되도록 하는 상수 k 의 값을 모두 구하고, 그 과정을 논술하시오.[6.0점]

442. $0 \leq x \leq 4$ 에서 함수

$y = -(x^2 - 4x + k)^2 + 4(x^2 - 4x + k)$ 의 최댓값과 최솟값의 합이 4일 때, 실수 k 의 값은? [5.1점]

- ① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

443. $-2 \leq x \leq 3$ 에서 함수

$$y = (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x - 3) - 5(x^2 - 2x) + 3$$

가 $x = \alpha$ 에서 최댓값 M 을 갖고, $x = \beta, \gamma$ 에서 최솟값 m 을 갖는다.

$\alpha\beta\gamma + M + m$ 의 값은? [4.7점]

- ① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

444. $-1 \leq x \leq 2$ 에서 함수

$y = -(4x^2 + 4x + 1)^2 - 2(4x^2 + 4x + 1) + 24$ 의 최댓값은? [4.1점]

- ① 24 ② 25 ③ 26
④ 27 ⑤ 28

445. 함수 $y = (x^2 + 2x)^2 - 6(x^2 + 2x) + 7$ 의 최솟값은? [4.4점]

- ① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

446. 이차함수 $f(x) = x^2 + ax + b$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f(-4) = f(2)$
(나) 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 -5 이다.

$-6 \leq x \leq 3$ 에서 정의된 함수 $y = f(x)$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, $\frac{2M}{ab}$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [4.8점]

447. $2 \leq x \leq 4$ 에서 이차함수 $y = x^2 - 2ax + a^2 + b$ 의

최솟값이 4가 되도록 하는 두 실수 a, b 에 대하여 $2a + b$ 의 최댓값은? [4.9점]

- ① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

448. $2 \leq x \leq 3$ 에서 이차함수 $f(x) = -(x - a)^2 + b$ 의

최댓값이 4일 때, 다음 물음에 답하시오. (단, a, b 는 실수이다.)
[총 10.0점]

(1) $a = \frac{5}{2}$ 일 때, b 의 값을 구하고 그 과정을 논술하시오. [2.0점]

(2) $a \geq 3$ 일 때, b 를 a 에 관한 식으로 나타내고 그 과정을 논술하시오. [3.0점]

(3) $a \geq 3$ 일 때, $a + b$ 의 최솟값을 구하고 그 과정을 논술하시오. [5.0점]

449. 최고차항의 계수가 a ($a > 0$)인 이차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 직선 $y = 4ax + b$ 와 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 만나는 두 점의 x 좌표는 1과 5이다.
 (나) $1 \leq x \leq 4$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값은 -8 이다.
 (다) $-3 \leq x \leq 3$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값은 24이다.

$a - b$ 의 값은? [5.0점]

- ① 10 ② 12 ③ 14
 ④ 16 ⑤ 18

450. 다음은 함수 $y = -(x^2 - 2x + 4)^2 + 4(x^2 - 2x + 4) - 1$ 의 최댓값을 구하는 과정이다.

$t = x^2 - 2x + 4$ 라 하면 $t = (x - 1)^2 + (가)$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $t \geq (가)$ 이다.
 이때, 주어진 함수는 $y = -t^2 + 4t - 1 = (나) + 3$ 이므로 주어진 함수의 최댓값은 (다)이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 수를 각각 p , q 라 하고, (나)에 알맞은 식을 $f(t)$ 라 하자. $f(3) + pq$ 의 값은? [5.0점]

- ① 4 ② 5 ③ 6
 ④ 7 ⑤ 8

이차함수의 최대최소(2)

451. $0 \leq x \leq 7$ 에서 정의된 이차함수 $f(x)$ 가

$$f(1) = f(5), \quad f(1) + |f(6)| = 0$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 $\frac{19}{2}$ 일 때, $f(4)$ 의 값은? [4.9점]

- ① $\frac{209}{26}$ ② $\frac{11}{2}$ ③ -5
 ④ $-\frac{11}{2}$ ⑤ -6

452. $-3 \leq x \leq 4$ 에서 정의된 이차함수 $f(x)$ 가 $f(-1) = f(3)$, $f(-2) - |f(3)| = 0$ 을 만족시킨다. 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 38일 때, $f(1)$ 의 값은? [4.8점]

- ① -20 ② -22 ③ -24
 ④ -26 ⑤ -28

453. $-2 \leq x \leq 5$ 에서 정의된 이차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(0)$ 의 값은? [4.6점]

- $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 정수이다.
- $f(x)$ 의 최댓값은 27이다.
- $f(2) + f(3) = 0, \quad f(-2) - f(4) = 0$

- ① -7 ② -5 ③ -3
 ④ 3 ⑤ 5

454. 자연수 a, b 에 대하여 $-1 \leq x \leq 3$ 에서 이차함수 $f(x) = ax^2 - 4ax + b$ 의 최댓값과 최솟값의 합이 4일 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? [4.5점]

- ① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

455. 실수 t 와 이차함수 $f(x) = x^2 - 2x + 3$ 에 대하여 $t \leq x \leq t+1$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 차를 $g(t)$ 라 하자. 함수 $g(t)$ 에 대하여 $g(a - \sqrt{2}) = g(a + \sqrt{2})$ 일 때, 실수 a 의 값은? [5.2점]

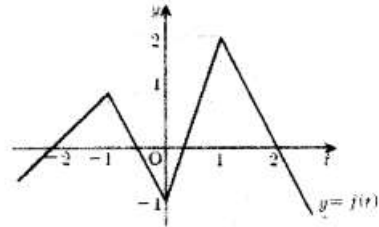
- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

456. 이차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f(0) = 2$
(나) $f(x+1) - f(x) = 4x$

$-2 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 곱을 구하고 그 이유를 논하시오. [6.0점]

457. 함수 $y = f(t)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2xf(t) + f(t) = 0$ 의 근에 대한 설명이다. <보기>의 (가), (나)에 들어갈 알맞은 내용을 순서대로 나열한 것은? [5.3점]



- 이차방정식 $x^2 - 2xf(t) + f(t) = 0$ 는
(1) $f(t)$ 의 값이 최대일 때, (가)을 갖는다.
(2) 중근을 갖게 하는 서로 다른 실수 t 는 (나)개 존재한다.

- ① 서로 다른 두 실근, 7 ② 서로 다른 두 실근, 4
③ 서로 다른 두 실근, 3 ④ 서로 다른 두 허근, 7
⑤ 서로 다른 두 허근, 4

458. 실수 t 에 대하여 $t - \frac{1}{2} \leq x \leq t + \frac{1}{2}$ 에서 함수

$f(x) = x^2 - 2x + 2$ 의 최댓값을 $g(t)$ 라 하자. $0 \leq t \leq \frac{5}{2}$ 에서

$g(t)$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 $M + m = \frac{q}{p}$ 이다. $p + q$ 의 값은?
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [5.5점]

- ① 7 ② 11 ③ 15
④ 21 ⑤ 29

459. 이차함수 $f(x) = a(x^2 + 4x - 12)$ 라 하자. 실수 p 에 대하여 $p \leq x \leq p+4$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값을 $g(p)$ 라 할 때, 함수 $g(p)$ 의 최솟값을 -4 이다. 이때 $f(3)$ 의 값은? (단, $a > 0$ 인 실수이다.) [5.4점]

- ① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

이차함수의 최대최소의 활용

460. 실수 x 에 대하여 t 에 대한 이차함수 $f(t) = -2t^2 + xt + 5$ (단, $-1 \leq t \leq 1$)의 최댓값을 $g(x)$ 라 할 때, 다음 물음에 답하고, 그 과정을 논술하시오. [5.0점]
(1) $g(-6)$ 의 값을 구하시오.

(2) $g(x) = 6$ 을 만족하는 모든 실수 x 의 값의 곱을 구하시오.

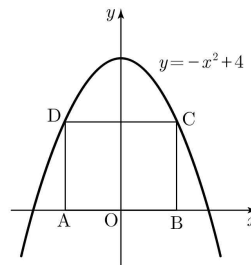
(3) $g(x)$ 의 그래프와 직선 $y = 9$ 으로 둘러싸인 도형의 내부에 있고 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수는 몇 개인지 구하시오. (단, 경계는 제외함)

461. a, b 는 정수이고, $f(x) = x^2 + 2ax + b$ 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 다항식 $f(x)$ 를 $x+1$ 로 나눈 나머지가 음수이다.
(나) $y = f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점이 A, B
이고 꼭짓점이 C일 때, 삼각형 ABC의 각 변의 길이의 제곱의 합이 56이다.

이때, $a+b$ 의 최솟값을 구하는 풀이 과정을 쓰고 답을 구하시오. [7점]

462. 그림과 같이 좌표평면에서 x 축 위의 두 점 A, B와 이차함수 $y = -x^2 + 4$ 의 그래프 위의 두 점 C, D에 대하여 사각형 ABCD는 직사각형을 이룬다. 직사각형 ABCD의 둘레의 길이가 최대일 때, 직사각형 ABCD의 넓이는? (단, 점 O는 원점이고, 점 C는 제1사분면 위의 점이다.) [4.5점]



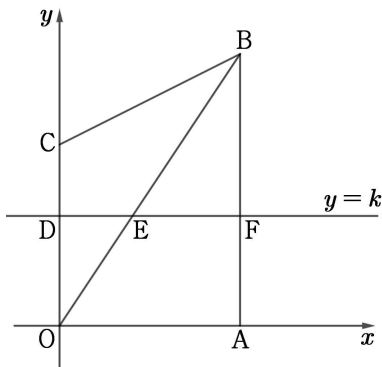
- ① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

463. 그림과 같이 좌표평면 위의 네 점

$O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(2, 3)$, $C(0, 2)$ 를 꼭짓점으로 하는 사각형 $OABC$ 가 있다. 실수 k ($0 < k < 2$)에 대하여 직선 $y = k$ 가

세 선분 OC , OB , AB 와 만나는 점을 각각 D , E , F 라 하자. 삼각형 OED 의 넓이를 S_1 , 사각형 $OAFE$ 의 넓이를 S_2 , 삼각형 EFB 의 넓이를 S_3 , 사각형 $DEBC$ 의 넓이를 S_4 라 할 때, $(S_1 - S_3)^2 + (S_2 - S_4)^2$ 의 최솟값을 구하고, 그 과정을 서술하시오.

[6점]

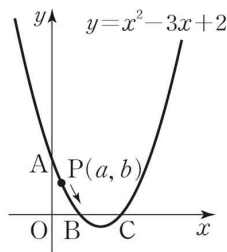


464. 다음 그림과 같이 이차함수

$y = x^2 - 3x + 2$ 의 그래프가 y 축과 만나는 점을 A , x 축과 만나는 점을 각각 B , C 라고 하자. 점 $P(a, b)$ 가 점 A 에서 이차함수 $y = x^2 - 3x + 2$ 의 그래프를 따라 점 B 를 거쳐 점 C 까지 움직일 때, $3a + 2b + 1$ 의 최솟값과 그 때의 b 의 값을 각각 구한 것은?

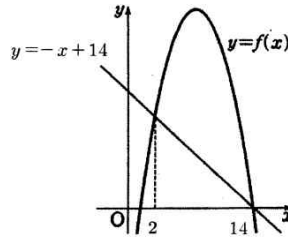
[5.1 점]

- ① $\frac{31}{8}, \frac{5}{16}$ ② $\frac{31}{8}, \frac{5}{8}$ ③ $\frac{3}{4}, \frac{5}{8}$
 ④ $\frac{15}{8}, \frac{5}{16}$ ⑤ $\frac{15}{8}, \frac{5}{8}$



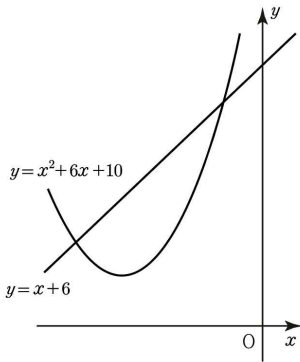
465. 그림과 같이 이차함수 $f(x) = -x^2 + 15x - 14$ 의 그래프와

직선 $y = -x + 14$ 가 있다. 직선 $y = -x + 14$ 위의 한 점 $A(t, -t + 14)$ 에 대하여 점 A 를 지나고 y 축에 평행한 직선이 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 만나는 점을 B , 점 B 를 지나고 x 축과 평행한 직선이 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 만나는 점 중 B 가 아닌 점을 C , 점 A 를 지나고 x 축에 평행한 직선과 점 C 를 지나고 y 축에 평행한 직선이 만나는 점을 D 라 하자. 네 점 A, B, C, D 를 꼭짓점으로 하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은? (단, $2 < t < 14$, $t \neq \frac{15}{2}$) [5.5점]



- ① 78 ② 76 ③ 73
 ④ 71 ⑤ 70

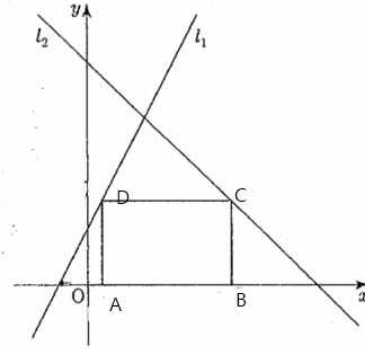
466. 다음 그림은 이차함수 $f(x) = x^2 + 6x + 10$ 의 그래프와 직선 $y = x + 6$ 을 나타낸 것이다. 직선 $y = x + 6$ 위의 한 점 $A(t, t+6)$ 에 대하여 점 A를 지나고 y 축에 평행한 직선이 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 만나는 점을 B, 점B를 지나고 x 축과 평행한 직선이 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 C, 점 A를 지나고 x 축과 평행한 직선과 점 C를 지나고 y 축에 평행한 직선이 만나는 점을 D라 하자. 네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은? (단, $-4 < t < -1$, $t \neq -3$) [5.3점]



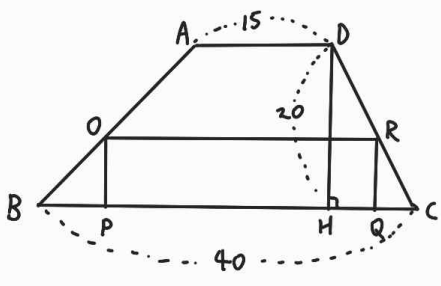
- ① $\frac{9}{4}$ ② $\frac{17}{4}$ ③ $\frac{9}{2}$
 ④ $\frac{41}{8}$ ⑤ $\frac{17}{2}$

467. 그림과 같이 두 직선

$l_1 : 3x - y + 2 = 0$, $l_2 : x + y - 6 = 0$ 과 x 축으로 둘러싸인 부분에 직사각형이 있다. 이 직사각형의 한 변은 x 축 위에 있고 두 꼭지점은 각각 l_1 , l_2 위에 있을 때, 직사각형 넓이의 최댓값을 구하고 풀이과정을 서술하시오.[6.0점, 부분점수 있음.]

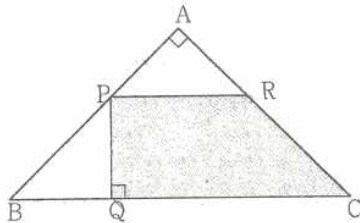


- 468.** 아래 그림과 같이 $\overline{AD}=15$, $\overline{BC}=40$, $\overline{DH}=20$ 인 사다리꼴 $ABCD$ 에 내접하는 직사각형 $OPQR$ 이 있다. 직사각형 $OPQR$ 의 넓이가 최대가 되게 하려면 직사각형의 높이 $\overline{OP}$ 를 얼마로 정해야 하는가? [5.8점]



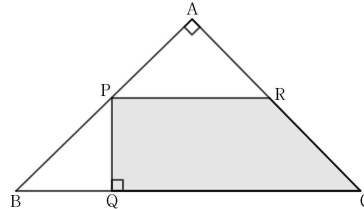
- ① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

- 469.** 그림과 같이 $\angle A = 90^\circ$ 이고 $\overline{AB}=9$ 인 직각이등변삼각형 ABC 가 있다. 변 AB 위의 한 점 P 에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 Q 라 하고, 점 P 를 지나고 변 BC 와 평행한 직선이 변 AC 와 만나는 점을 R 이라 하자. 사각형 $PQCR$ 의 넓이의 최댓값은?
(단, 점 P 는 꼭짓점 A 와 꼭짓점 B 가 아니다.) [4.8점]



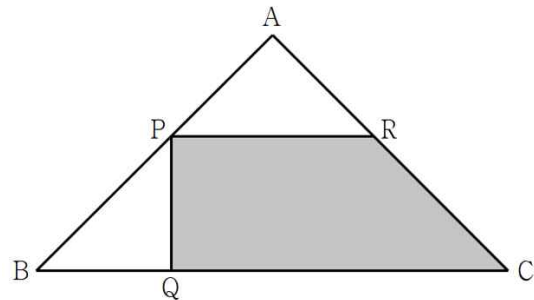
- ① 24 ② 25 ③ 26
④ 27 ⑤ 28

- 470.** 그림과 같이 $\angle A = 90^\circ$ 이고 $\overline{AB}=9$ 인 직각이등변삼각형 ABC 가 있다. 변 AB 위의 한 점 P 에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 Q 라 하고, 점 P 를 지나고 변 BC 와 평행한 직선이 변 AC 와 만나는 점을 R 라 하자. 사각형 $PQCR$ 의 넓이의 최댓값은?
(단, 점 P 는 꼭짓점 A 와 꼭짓점 B 가 아니다.) [4.4점]



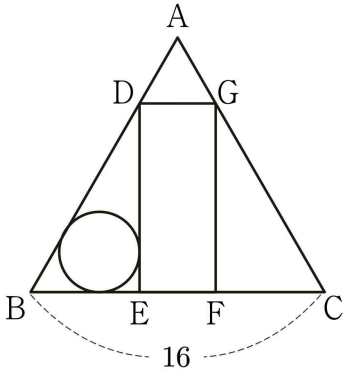
- ① 27 ② 30 ③ 33
④ 36 ⑤ 39

- 471.** 그림과 같이 $\angle A = 90^\circ$ 이고 $\overline{AB}=9$ 인 직각이등변삼각형 ABC 가 있다. 변 AB 위의 한 점 P 에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 Q 라 하고, 점 P 를 지나고 변 BC 와 평행한 직선이 변 AC 와 만나는 점을 R 라 하자. 사각형 $PQCR$ 의 넓이의 최댓값은? [5.5점]



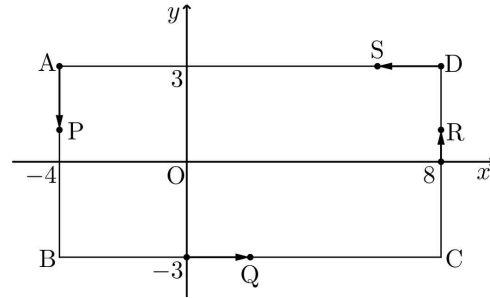
- ① 21 ② 23 ③ 25
④ 27 ⑤ 29

472. 그림과 같이 한 변의 길이가 16인 정삼각형 ABC 에 대하여 변 AB 위의 점 D , 변 AC 위의 점 G , 변 BC 위의 두 점 E, F 를 꼭짓점으로 하는 직사각형 $DEFG$ 가 있다. 직사각형 $DEFG$ 의 넓이가 최대일 때, 사각형 DBE 에 내접하는 원의 반지름의 길이는 $(p\sqrt{3}-q)$ 이다. $p+q$ 의 값은? (단, p, q 는 유리수이다.) [4.2점]



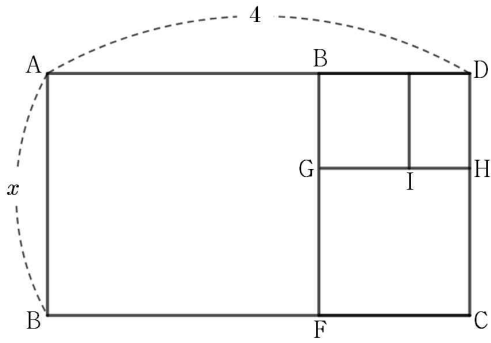
- ① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

473. 좌표평면 위에 점 $A(-4, 3)$, 점 $B(-4, -3)$, 점 $C(8, -3)$, 점 $D(8, 3)$ 을 네 꼭짓점으로 하는 직사각형 $ABCD$ 가 있다. 네 점 P, Q, R, S 가 각각 점 A , 점 $(0, -3)$, 점 $(8, 0)$, 점 D 를 출발하여 직사각형 $ABCD$ 의 네 변 위를 시계 반대 방향으로 움직인다. 네 점 P, Q, R, S 가 매초 2, 2, 1, 2의 일정한 속력으로 움직일 때, 출발한 지 t 초 후에 네 점 P, Q, R, S 로 이루어진 사각형 $PQRS$ 의 넓이를 $S(t)$ 라 하자. $1 \leq t \leq 4$ 에서 $S(t)$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M-m$ 의 값은? (단, 점 O 는 원점이다.) [4.7점]



- ① 15 ② $\frac{33}{2}$ ③ $\frac{69}{2}$
④ $\frac{75}{2}$ ⑤ 48

474. $\overline{AD}=4$, $\overline{AB}=x$ ($0 < x < 4$) 인 직사각형 ABCD 가 있다. 그림과 같이 사각형 ABFE 가 정사각형이 되도록 두 변 AD와 BC 위에 두 점 E, F를 각각 정하면 두 사각형 ABCD와 FCDE는 닮음이다. 또 사각형 GFCH가 정사각형이 되도록 두 변 EF와 DC 위에 두 점 G, H를 각각 정하고, 사각형 EGJI가 정사각형이 되도록 두 변 ED와 GH 위에 두 점 I, J를 각각 정한다. 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? [4.4점]



[보 기]

㉠. $\frac{1}{x} = \frac{x}{4-x}$

㉡. $x^3 - 32x + 64 = 0$

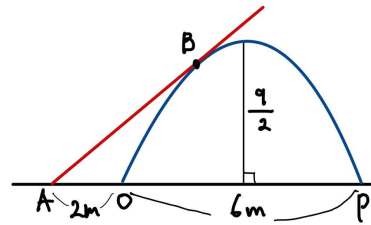
㉢. 사각형 GFCH의 넓이는 $\frac{x^4}{16}$ 이다.

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢
④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

475. 그림과 같이 어느 호수에 설치된 분수의 한 물줄기는 포물선 모양으로 나타나고, 이 물줄기의 시작 점 O와 끝 점 P 사이의 거리는 6m, 수면으로부터의 최고 높이는 $\frac{9}{2}$ m이다. 물줄기의 시작 점 O로부터 뒤쪽으로 2m 떨어진 점 A에서 쏘아 올린 레이저와 물줄기가 접하는 위치를 점 B라 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, 점 O, P, A는 한 직선 위에 있다.) [총 8.0점]

(1) 점 O를 좌표평면의 원점 (0, 0)이라 하자. 직선 AP를 x 축, 점 P를 (6, 0)이라고 할 때, 물줄기의 포물선과 직선 AB를 나타내는 식을 각각 구하고, 그 과정을 서술하시오. [6.0점]

(2) 점 B의 수면으로부터의 높이를 구하고, 그 과정을 서술하시오. [2.0점]



476. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.<보기> 에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[5.8점]

- (가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(2-x)=f(2+x)$ 이다.
 (나) $y=f(x)+9$ 의 그래프는 x 축과 접한다.

—[보 기]—

- ㄱ. $0 \leq x \leq 3$ 에서 $y=f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최솟값,
 $x=0$ 일 때 최댓값을 갖는다.
 ㄴ. 이차방정식 $f(x+3)=0$ 의 두 근의 곱은 16이다.
 ㄷ. $f(0)=k$ 라 할 때, x 에 대한 이차방정식
 $f(x)=kx$ 의 두 실근의 합은 -1 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

477. 이차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(9)$ 의 값은? (단, $a > 0$) [5점]

- (가) $f(-1-x)=f(x-1)$
 (나) $f(x)-14$ 는 $x-a$ 로 나누어떨어진다.
 (다) 직선 $y=2ax+a-4$ 와 $y=f(x)$ 의 그래프가 접한다.

- ① 195 ② 196 ③ 197
 ④ 198 ⑤ 199

478. 이차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f(0)=1$
 (나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+2)-f(x)=4x$ 이다.

$f(1)-f(3)+f(5)-f(7)+f(9)$ 의 값은? [5.2점]

- ① 28 ② 32 ③ 36
 ④ 40 ⑤ 44

479. 최고차항의 계수가 0이 아닌 정수인 두 이차함수 $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족한다.

- (가) 함수 $f(x)$ 는 $x=k$ 에서 최솟값 3을 갖는다.
 (나) 함수 $g(x)$ 의 최솟값은 -1 이다.
 (다) 모든 x 에 대하여 $f(x)+g(x)-2=3x^2-14x+17$

$g(k)=1$ 일 때, $k+g(1)$ 의 값은? (단, $k > 2$) [5.2점]

- ① 2 ② 3 ③ 4
 ④ 5 ⑤ 6

480. 최고차항의 계수가 음수 k 인 이차함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다. 물음에 답하시오. [총 8.0점]

<조 건>

- (가) $f(n) = f(n+2) = g(n+2) = g(n+3) = 0$ (단, n 은 자연수)
 (나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \leq g(x)$ 이다.
 (다) $f(0) - g(0) = -54$

(1) 다음과 같이 $g(x)$ 를 나타내시오. [1.0점]

- (가)에 의해, 이차함수 $f(x)$ 는
 $f(x) = k(x-n)(x-n-2)$ 이다.
 (단, $k < 0$)

(2) 위 (1)의 결과와 $h(x) = f(x) - g(x)$ 임을 활용하여 n 과 k 의 값을 각각 구하고 그 과정을 서술하시오. [5.0점]

(3) $f(8) + g(8)$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. [2.0점]

6.

이차방정식과 이차함수(step3)

481. $k \geq 0$ 인 두 실수 k 에 대하여 $k \leq x \leq k+3$ 에서

이차함수 $f(x) = x^2 - 4kx + 10k$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 $g(k)$ 라 하자. k 에 대한 방정식 $g(k) = -2k + a$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 모든 실수 a 의 값의 범위는 $p < a < q$ 이다. $8p - 7q$ 의 값은?
 (단, p, q 는 상수이다.) [4.8점]

- ① 13 ② 14 ③ 15
 ④ 16 ⑤ 17

482. 이차함수 $f(x) = -x^2 + ax + b$ 가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
 (단, a, b 는 상수) [4.4점]

- (가) $f(-4) = f(2)$
 (나) 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 5이다.

[보 기]

- (ㄱ) $a + b = 2$ 이다.
 (ㄴ) $1 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 1이다.
 (ㄷ) 함수 $|f(x)|$ 와 직선 $y = x + k$ 가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 모든 정수 k 의 값의 합은 15이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

483. $t \geq 0$ 인 실수 t 에 대하여 $t \leq x \leq t+2$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 - 4tx + 3t^2 + 8t$ 의 최댓값과 최솟값의 차를 $g(t)$ 라 하자. t 에 대한 함수 $y = g(t)$ 와 $y = 2t + m$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 m 값의 범위를 구하는 과정을 아래의 단계에 따라 논술하시오.

(1) $f(x)$ 의 꼭짓점의 좌표를 구하시오. [2점]

(2) t 값의 범위에 따른 함수 $g(t)$ 를 구하는 과정을 논술하시오. [6점]

484. 두 이차함수 $f(x) = x^2 - 2x + 2$, $g(x) = -x^2 + 6$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 를

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 2) \\ g(x) & (-1 < x < 2) \end{cases}$$

이라 하자. 직선 $y = mx + 7$ 과 $y = h(x)$ 의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 모든 실수 m 의 값의 합은? [5점]

① $-\frac{9}{2}$

② $-\frac{7}{2}$

③ $-\frac{5}{2}$

④ $-\frac{3}{2}$

⑤ $-\frac{1}{2}$

485. 이차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

- (가) $2 \leq x \leq 5$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 0이다.
(나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \leq f(3)$ 이다.

실수 k 에 대하여 $k \leq x \leq k+2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값을 $g(k)$ 라 하자. 함수 $g(k)$ 의 최댓값이 8일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [5.3점]

- ㄱ. $f(1) = 0$
ㄴ. 이차방정식 $f(x) - 7 = 0$ 의 서로 다른 두 실근의 합은 6이다.
ㄷ. 좌표평면에서 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = 4(x-1)$ 은 한 점에서 접한다.

① ㄱ

② ㄴ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

486. $0 \leq x \leq 1$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x + a^2 + 1$ 의 최솟값이 -1 일 때, $1 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값을 구하고, 풀이 과정과 답을 자세히 논술하시오. (단, a 는 실수이다.) [6.0점]

487. $a \leq x \leq a+1$ 에서 이차함수

$$f(x) = x^2 - 4x + a + 5$$

의 최솟값이 23일 때, 실수 a 의 값을 모두 구하고, 그 이유를 논하시오. [7.0점]

488. 이차함수

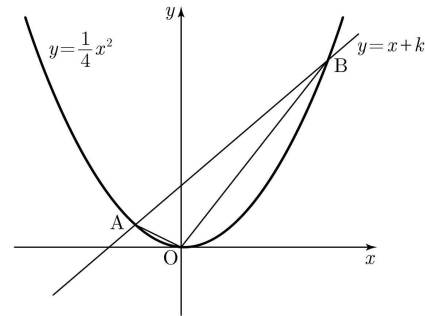
$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 + 15 & (-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}) \\ x^2 - 5 & (x < -\sqrt{5}, x > \sqrt{5}) \end{cases}$$

와 실수 p 에 대하여 $p \leq x \leq p+2$ 에서 이차함수 $f(x)$ 의 최댓값을 $g(p)$ 라 하자. $g(p)$ 의 최솟값이 $\frac{a+3\sqrt{b}}{2}$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [5.6점]

- ① 17 ② 18 ③ 19
④ 20 ⑤ 21

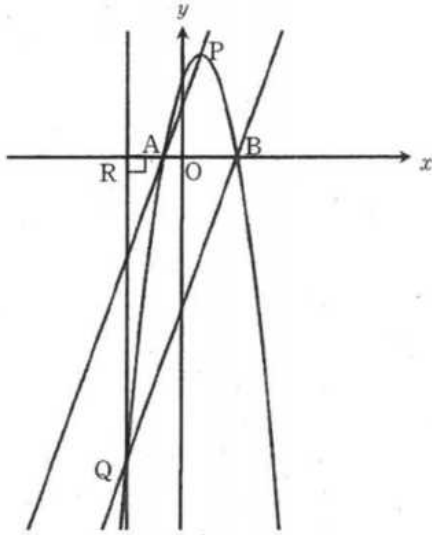
489. 그림과 같이 이차함수 $y = \frac{1}{4}x^2$ 의 그래프와 직선

$y = x + k$ 가 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 두 직선 OA, OB의 기울기의 곱이 $-\frac{3}{4}$ 일 때, 삼각형 AOB의 넓이는? (단, k 는 실수이고, O는 원점이며, 점 A의 x 좌표는 음수이다.) [4.9점]



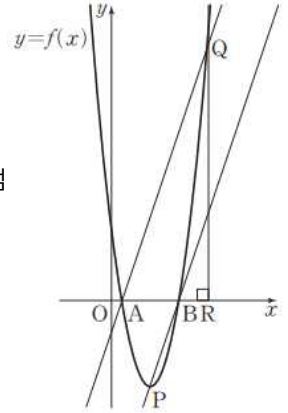
- ① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

490. 최고차항의 계수가 -2 인 이차함수 $f(x)$ 의 그래프가 두 점 $A(-1, 0), B(a, 0)$ 을 지난다. 이 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점을 P , 점 B 를 지나고 직선 AP 에 평행한 직선이 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 만나는 점 중 B 가 아닌 점을 Q , 점 Q 에서 x 축에 내린 수선의 발을 R 라 하자. 삼각형 AQR 의 넓이가 24 이고, 직선 AP 의 기울기를 m 이라 할 때, $a+m$ 의 값을 구하고 풀이과정을 서술하시오. (단, $a > -1$ 이다.) [9.0점]



491. 오른쪽 그림과 같이

최고차항의 계수가 1 인 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 두 점 $A(2, 0), B(a, 0)$ 을 지난다. 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점을 P , 점 A 를 지나고 기울기가 $2m$ 인 직선 PB 에 평행한 직선이 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 만나는 점 중 A 가 아닌 점을 Q , 점 Q 에서 x 축에 내린 수선의 발을 R 이라 하자.



일차함수 $y=2m(x-2)$ 의 그래프가 두 점 A, Q 를 지나는 직선이고, 삼각형 BRQ 의 넓이가 96 일 때, $a+m$ 의 값은?

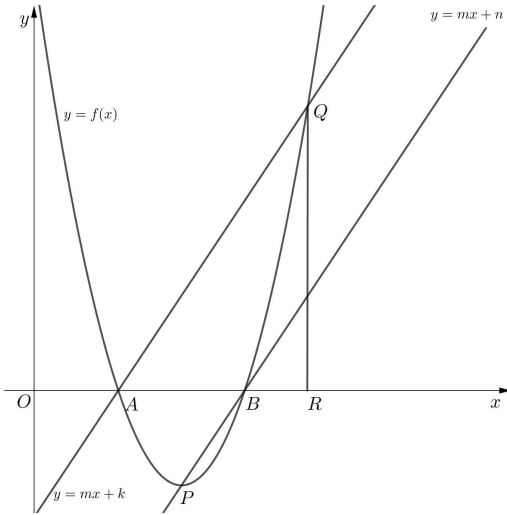
(단, $a > 2$ 이고, m 은 실수이다.) [4.7점]

- ① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

492. 그림과 같이 최고차항의 계수가 1 인 이차함수

$y=f(x)$ 의 그래프가 두 점 $A(2, 0)$, $B(a, 0)$ 을 지나고, 점 P 는 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점이다. 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=mx+n$ 이 서로 다른 두 점 P 와 B 에서 만나고, 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=mx+k$ 가 서로 다른 두 점 A 와 Q 에서 만난다. 점 Q 에서 x 축에 내린 수선의 발을 R 이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, $a > 2$ 이고 a, k, m, n 은 실수이다.) [5.1점]



[보 기]

- ㄱ. $f(-1) = 3a + 3$
 ㄴ. $\overline{QR} = 2m^2$
 ㄷ. 삼각형 ABQ 의 넓이가 $\frac{81}{8}$ 일 때, $2am = 15$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

493. 좌표평면에서 두 이차함수 $f(x) = \frac{1}{2}x^2$,

$g(x) = -x^2 + 8x - \frac{51}{4}$ 의 그래프와 기울기가 m 이고 y 절편이 k 인 직선 l 이 다음 조건을 만족한다.

- (가) m 은 정수이다.
 (나) k 의 값에 관계없이 직선 l 이 곡선 $y=f(x)$ 또는 곡선 $y=g(x)$ 와 만나는 서로 다른 점의 개수는 항상 2이다.

실수 k 에 대해 직선 l 이 곡선 $y=f(x)$ 또는 곡선 $y=g(x)$ 와 만나는 서로 다른 두 점의 x 좌표의 합을 $S(k)$ 라 할 때, $S(k)$ 는 서로 다른 3개의 실수 S_1, S_2, S_3 중 하나의 값을 갖는다. 이 때, $S_1 + S_2 + S_3$ 의 값은? [5.5점]

- ① 7 ② 9 ③ $\frac{21}{2}$
 ④ $\frac{23}{2}$ ⑤ $\frac{27}{2}$

494. 이차함수 $f(x) = a(x-p)^2 + q$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 이차함수 $y = 3x^2 - 12x + 17$ 과 꼭짓점이 같다.
 (나) 직선 $y = 2x + 1$ 과 이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 그래프는 서로 다른 두 점 $A(p, q)$ 와 $B(\alpha, \beta)$ 에서 만난다.
 (다) $(\alpha - p)^2 + (\beta - q)^2 = 20$ 이다.

이때, $a + p + q + \beta$ 의 값은? (단, a, p, q, α, β 는 상수이고, $a < 0$ 이다.) [4.1점]

- ① -19 ② -7 ③ 0
 ④ 7 ⑤ 19

495. 최고차항의 계수가 a 인 이차식 $f(x)$ 가 모든 x 에 대하여 $(x+3)f(x) = (x+1)f(x+1)$ 을 만족한다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $a \neq 0$) [5.0점]

[보 기]

ㄱ. $f(-3) = f(0)$

ㄴ. $a = 1$ 일 때,

$f(x)f(x+2) - 3 = (x^2 + 5x + 3)(x^2 + px + q)$ 이면 $p + q = 12$ 이다.

ㄷ. $f(-3) + |f(0)| = 0$ 일 때, $f\left(-\frac{3}{4}\right) + |f(k)| = 0$ 을 만족하는 실수 k 의 개수는 2 이다. (단, $k \neq -\frac{3}{4}$ 이다.)

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

7.

고차방정식(step1)

삼차방정식과 사차방정식의 풀이

496. 등식 $x^4 - ax^2 - x + b = (x+1)(x-2)f(x)$ 가 x 에 대한 항등식일 때, $f(3)$ 의 값을 구하고, 그 과정을 논술하시오. [5.0점]

497. 사차방정식 $x^4 + 3x^3 + 3x^2 - x - 6 = 0$ 의 두 허근을 α , β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은? [4.5점]

- ① -5 ② -2 ③ 0
④ 3 ⑤ 5

복이차식의 사차방정식

498. 사차방정식 $x^4 - 7x^2 + ax + b = 0$ 의 한 허근이 $1+2i$ 일 때, 이 사차방정식의 서로 다른 두 실근 α , β 와 두 실수 a , b 에 대하여 $\alpha + \beta + a + b$ 의 값은? [4.8점]

- ① -16 ② -18 ③ -20
④ -22 ⑤ -24

근이 주어진 고차방정식의 활용

499. 삼차방정식 $2x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 의 한 근이 $2-i$ 일 때, 세 실수 a, b, c 에 대하여 $b - a + c$ 의 값은?
(단, $i = \sqrt{-1}$ 이다.) [5.0점]

- ① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

500. 삼차방정식 $2x^3 - 3x^2 + x + k = 0$ 의 한 근이 -1 일 때, 나머지 두 근의 곱은? [3.8점]

- ① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

501. 사차방정식 $x^4 - 3x^3 + ax^2 + 2x + b = 0$ 의 두 근이 $-1, 2$ 일 때, 나머지 두 근의 합은? (단, a, b 는 실수이다.) [4.7점]

- ① -4 ② -2 ③ 2
④ 4 ⑤ 6

502. x 에 대한 사차방정식 $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + ax + 12 = 0$ 의 한 근이 2일 때, 네 실근 중 가장 큰 것을 b 라 하자. $a - b$ 의 값은? (단, a 는 상수이다.) [4점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

7.

고차방정식(step2)

삼차방정식과 사차방정식의 풀이

503. 삼차방정식 $x^3 - 2x^2 - 8x - 4 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $(\alpha + \beta - \gamma)(\beta + \gamma - \alpha)(\gamma + \alpha - \beta)$ 의 값은? [4.5점]

- ① -108 ② -104 ③ -100
④ -96 ⑤ -88

공통부분이 있는 사차방정식

504. $1 \leq x \leq 3$ 에서 정의된 함수

$y = (x^2 - 2x + 3)^2 - 6(x^2 - 2x + 3) + 1$ 은 $x = a$ 에서 최댓값 M 을 가지고, $x = b$ 에서 최솟값 m 을 가진다. $a + b + M + m$ 의 값을 구하시오. [7.0점]

복이차식의 사차방정식

505. x 에 대한 사차방정식

$x^4 - (2a - 5)x^2 + a^2 - 5a - 14 = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $f(a)$ 라 할 때, $f(-4) + f(-2) + f(-1) + f(1) + f(7) + f(9)$ 의 값은? (단, a 는 실수이다.) [5.4점]

- ① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

506. $x^4 - 11x^2 + 1 = 0$ 일 때, $x - \frac{1}{x}$ 의 값은? (단, $x > 1$)

[4.3점]

- ① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

507. x 에 대한 사차방정식 $x^4 - (2a-1)x^2 + a^2 - a - 12 = 0$ 이 실근과 허근을 모두 가질 때, 이 사차방정식이 정수인 근을 갖도록 하는 모든 실수 a 의 값들의 합은? [4.2점]

- ① -4 ② -2 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

근이 주어진 고차방정식의 활용

508. 한 근이 $1 + \sqrt{2}i$ 인 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 과 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + 8 = 0$ 이 하나의 공통근을 가질 때, 다항식 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지의 최댓값은? (단, a, b, c 는 실수이고, $i = \sqrt{-1}$ 이다.) [4.5점]

- ① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

509. 방정식 $x^3 + ax^2 + x - 3 = 0$ 의 한근이 i 이고 나머지 두근이

m, n 일 때, $a+m+n$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$ 이고 a 는 실수이다.) [4.1점]

- ① -6 ② -3 ③ -i
④ 0 ⑤ i

510. $x^3 + ax^2 + bx - 4 = 0$ 의 한 근이 $1-i$ 일 때, 나머지 두 근 중 실근을 k 라고 하자. $a+b+k$ 의 값은? (단, a, b 는 실수) [4.0점]

- ① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

511. 계수가 실수인 삼차식 $f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 10$ 은 $(x-3+i)$ 를 인수로 갖는다. 삼차방정식 $f(x) = 0$ 의 실근을 α 라고 할 때, $a+b+\alpha$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$) [4.4점]

- ① 12 ② 16 ③ 20
④ 24 ⑤ 28

512. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4 + x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근이 $1, 2+i$ 일 때, $4a+2b+c$ 값은? [4.5점]

- ① -19 ② -18 ③ -17
 ④ -16 ⑤ -15

513. 음수 x 에 대하여 $x^2 + 2x - 5 = 0$ 일 때,
 $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 4x + 4 = a + b\sqrt{6}$ 이다. $a-b$ 의 값은? (단,
 a, b 는 정수) [4.1점]

- ① 9 ② 19 ③ 29
 ④ 39 ⑤ 49

삼차방정식의 근의 판별

514. 삼차방정식 $x^3 + 2x^2 + (k-3)x - k = 0$ 의 근이 모두 실수가 되도록 하는 실수 k 의 최댓값은? [4.3점]

- ① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ $\frac{9}{4}$
 ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ $\frac{13}{4}$

515. x 에 대한 삼차식 $f(x) = x^3 - 5x^2 + (k-9)x + k - 3$ 에 대하여 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [5점]

[보기]

- ㄱ. $f(x)$ 는 $x+1$ 을 인수로 갖는다.
 ㄴ. $k > 0$ 인 어떤 실수 k 에 대하여 방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
 ㄷ. 방정식 $f(x) = 0$ 이 실근과 허근을 모두 가질 때, 정수 k 의 최솟값은 11이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

516. x 에 대한 삼차방정식

$x^3 - 7x^2 - (7+n^2)x + (1-n^2) = 0$ 의 세 근이 모두 정수가 되도록 하는 모든 자연수 n 의 값의 합은? [5.0점]

- ① 4 ② 5 ③ 6
 ④ 7 ⑤ 8

517. x 에 대한 사차방정식

$$x^4 + (2a-1)x^3 - (1-3a)x^2 + (a+1)x = 0$$

의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 실수 a 의 값의 합은? [5.1점]

- ① -6 ② -3 ③ 0
 ④ 3 ⑤ 6

삼차방정식의 근과 계수와의 관계

518. 사차방정식 $x^4 + x^3 - x^2 - 7x - 6 = 0$ 의 두 허근을 α, β 라고 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은? [4.2점]

- ① -3 ② -2 ③ -1
④ 0 ⑤ 1

519. 사차방정식 $x^4 - kx^3 - (k+1)x^2 + k^2x + k^2 = 0$ 이 서로 다른 네 실근을 갖도록 하는 5이하의 정수 k 의 값을 모두 더한 값은? [4.5점]

- ① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

520. x 에 대한 다항식 $kx^2(kx^2+1)(kx^3+2)(kx+3)-28$ 이 $x+1$ 을 인수로 가질 때, 모든 실수 k 의 값의 제곱의 합은? [4.5점]

- ① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

521. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점 $(3,0), (k,0)$ 에서 만난다. x 에 대한 사차방정식 $(x^2 - kx + 2k)f(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근과 서로 같은 두 실근을 가질 때, 모든 k 의 값의 합은? [4.8점]

- ① 17 ② 18 ③ 19
④ 20 ⑤ 21

 $x^3 = 1, x^3 = -1$ 의 활용

522. 삼차방정식 $x^3 + 1 = 0$ 의 한 허근을 w 라 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, $\bar{w}$ 는 w 의 켤레복소수이다.) [4.0점]

(1) $w^2 - w + 1$ 의 값을 구하고, 그 과정을 논술하시오. [1.0점]

(2) $w^{2023} + \frac{1}{w^{2023}}$ 의 값을 구하고, 그 과정을 논술하시오. [1.0점]

(3) $(\bar{w} - 1)^{2n} = (w + 2\bar{w} - w\bar{w})^n$ 을 만족시키는 200이하의 자연수 n 의 개수를 구하고, 그 과정을 논술하시오. [2.0점]

523. 삼차방정식 $x^3+1=0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때,

$$\left(\frac{\bar{\omega}}{\omega^2+\bar{\omega}^2}\right)^n = (\omega^2-\omega^3)^{3n+1}$$

을 만족시키는 90 이하의 자연수 n 의 개수는? (단, $\bar{\omega}$ 는 ω 의 켤레복소수이다.) [4.9점]

- ① 15 ② 20 ③ 25
④ 30 ⑤ 35

524. $x^2-x+1=0$ 일 때, $x^4-3x^3-6x^2+7x+10$ 의 값을 구하고 그 풀이과정을 서술하시오 [4.0점, 부분점수 있음.]

525. 방정식 $x^3-1=0$ 의 한 허근을 ω 라고 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $\bar{\omega}$ 는 ω 의 켤레복소수이다.) [5.3점]

[보 기]

$$\begin{aligned} \text{ㄱ. } & \omega^2 + \omega + 1 = 0 \\ \text{ㄴ. } & \omega^{110} + \bar{\omega}^{110} = 1 \\ \text{ㄷ. } & \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2 + 1} = 1 \end{aligned}$$

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

526. 삼차방정식 $x^3+1=0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때,

[보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, $\bar{\omega}$ 는 ω 의 켤레복소수이다.) [4.7점]

[보기]

$$\text{ㄱ. } \frac{1}{1+\omega} + \frac{1}{1+\bar{\omega}} = 1$$

$$\text{ㄴ. } \omega^{50} + \frac{4}{\omega^{49}} = 5\omega - 1$$

$$\text{ㄷ. 자연수 } n \text{에 대하여 } f(n) = \frac{\omega^{n+1}}{1+\omega^{2n}} \text{ 일 때}$$

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(48)=0$$

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

527. 방정식 $x^4-8x^3+21x^2-24x+9=0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, $\omega^3+2\omega^2+3\omega=a\omega+b$ 이다. 실수 a, b 의 값을 구하고, 그 과정을 서술하시오. [9.0점]

528. 방정식 $x^3=-8$ 의 한 허근을 ω 라 할 때,

$$\frac{\omega}{2\omega+1} + \frac{\bar{\omega}}{2\bar{\omega}+1}$$

의 값은? (단, $\bar{\omega}$ 는 ω 의 켤레복소수) [3.7점]

- ① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{5}{7}$
④ $\frac{6}{7}$ ⑤ 1

529. 삼차방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 w 라 할 때,

$\frac{1}{w+1} + \frac{1}{w^2+1} + \frac{1}{w^3+1} + \cdots + \frac{1}{w^{36}+1}$ 의 값은? [4.0점]

- ① 9 ② 12 ③ 15
④ 18 ⑤ 21

530. 복소수 $z = a + bi$, $w = c + di$ (a, b, c, d 는 실수)에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, $i = \sqrt{-1}$ 이고, $\bar{z}$, $\bar{w}$ 는 각각 z, w 의 켤레복소수이다.) [4.4점]

[보 기]

- ㄱ. $z = -\bar{z}$ 이면 z 는 항상 순허수이다.
ㄴ. $z^2 + w^2 = 0$ 이면 $z = w = 0$ 이다.
ㄷ. $\frac{1}{1-w} + \frac{1}{1-\bar{w}}$ ($w \neq 1$)은 항상 실수이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

531. x 에 대한 사차방정식 $x^4 - x^3 - 3x^2 + 4x - 4 = 0$ 의

서로 다른 두 허근을 α, β 라 하자. 100이하의 자연수 n 에 대하여 $\alpha^n + \beta^n = 1$ 이 성립하게 하는 자연수 n 의 개수를 구하고 풀이과정을 논술하시오. [7점]

532. 삼차방정식 $x^3 - 3x^2 + 9x + 13 = 0$ 의 근 중에서

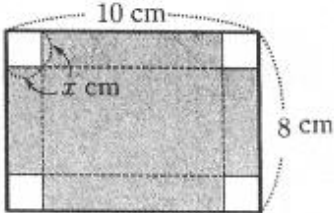
허수부분이 양수인 근을 α 라 할 때, $\frac{\alpha}{\bar{\alpha}} = a + bi$ 를 만족시킨다.

두 실수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$ 이고, $\bar{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이다.) [4.7점]

- ① $\frac{3}{13}$ ② $\frac{4}{13}$ ③ $\frac{5}{13}$
④ $\frac{6}{13}$ ⑤ $\frac{7}{13}$

삼차사차방정식의 활용

533. 그림과 같이 가로의 길이가 10cm , 세로의 길이가 8cm 인 직사각형 모양의 종이가 있다. 이 종이의 네 귀퉁이에서 한 변의 길이가 $x\text{cm}$ 인 정사각형을 잘라 내어 부피가 48cm^3 인 상자가 만들어지도록 하는 모든 x 의 값의 합은? [5.2점]



- ① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

534. 밑면의 반지름의 길이가 $x+1$, 높이가 x^2-x+1 인 원기둥의 부피를 $f(x)$, 밑면의 반지름의 길이가 $x+2$, 높이가 x^2-2x+4 인 원뿔의 부피를 $g(x)$ 라 하자. [총 7.0점]

(1) $f(x)$, $g(x)$ 를 각각 구하시오. [2.0점]

(2) $\frac{2f(x)-3g(x)}{\pi} = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ 일 때, a , b , c , d 의

값을 각각 구하고 그 과정을 논술하시오. (단, a , b , c , d 는 상수이다.) [5.0점]

535. 어느 무인 카페에서 아메리카노를 2000 원에 판매하고 있고, 하루 판매량은 70 잔이다. 아메리카노의 가격을 200 원 올릴 때마다 하루 판매량이 5 잔씩 줄어들 것으로 예상된다. 하루 동안 아메리카노를 판매한 총 금액이 최대가 되게 하려면 아메리카노의 가격을 얼마나 정해야 하는지 구하고 그 과정을 서술하시오. [8.0점]

- 적절한 문자를 사용하여 가격과 하루 판매량을 식으로 나타내는 과정을 포함하여 서술할 것
- 이차함수의 그래프를 그리고 이를 이용하여 설명하는 과정을 포함하여 서술할 것

7.

고차방정식(step3)

536. $x^3 + 3x - 1 = 0$ 의 근을 α 라 할 때,
 $(\alpha^2 + \alpha + 1)P(\alpha) = 1$ 을 만족시키는 차수가 최소인 다항식
 $P(x)$ 에 대하여 $P(3)$ 의 값은? [5.4점]

- ① $\frac{10}{3}$ ② $\frac{11}{3}$ ③ 4
 ④ $\frac{13}{4}$ ⑤ $\frac{14}{3}$

537. $(1 + \sqrt{3})^6 - (1 + \sqrt{3})^5 - 3(1 + \sqrt{3})^4 + 2(1 + \sqrt{3})^3$
 $-(1 + \sqrt{3})^2 - 7$
 의 값이 $m + n\sqrt{3}$ 일 때, 두 정수 m, n 에 대하여 $m - n$ 의 값은?
 [4.3점]

- ① 19 ② 38 ③ 57
 ④ 76 ⑤ 96

538. 다항식 $f(x) = x^3 + ax + b$ 는 $x + 7$ 로 나누어떨어지고,
 다항식 $g(x) = 2x^3 + cx^2 + d$ 는 $x + 3$ 으로 나누어떨어진다.
 두 방정식 $f(x) = 0, g(x) = 0$ 이 모두 $\frac{p + \sqrt{q}i}{2}$ 를 근으로
 갖는다고 할 때, $(a + b + c + d) - (p + q)$ 의 값은? (단,
 $i = \sqrt{-1}$ 이고 a, b, c, d 는 실수, p, q 는 자연수이다.) [4.5점]

- ① 185 ② 190 ③ 195
 ④ 200 ⑤ 205

539. 삼차방정식 $x^3 - 3x^2 + 5x - 6 = 0$ 의 한 허근을 α 라 할
 때, $\alpha^4 - \frac{45}{\alpha^2} + 9$ 의 값은? [4.7점]

- ① 5 ② 10 ③ 15
 ④ 20 ⑤ 25

540. 방정식 $x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = 0$ 의 두 허근을 z_1, z_2 라 할
 때, $(z_1)^5 + (z_2)^5$ 의 값을 구하시오. [8.0점]

541. 삼차방정식 $x^3 = -1$ 의 한 허근 ω 에 대하여

$z = \frac{\omega - 1}{2\omega - 1}$ 이라 할 때, $z(z^5 + \bar{z})$ 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의

켈레복소수이다.)

[4.7점]

- ① $\frac{2}{27}$ ② $\frac{4}{27}$ ③ $\frac{2}{9}$
 ④ $\frac{8}{27}$ ⑤ $\frac{10}{27}$

8.

연립방정식(step2)

연립이차방정식의 풀이(1)

542. x, y 에 대한 두 연립방정식

$$\begin{cases} x+y=a \\ 2x^2+3xy-2y^2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} ax+by=7 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$$

의 공통인 해가 존재할 때, $a+b$ 의 값은? (단 $a > 0, b > 0$)

[4.6점]

- ① 3 ② 4 ③ 5
 ④ 6 ⑤ 7

543. 연립방정식 $\begin{cases} ax-y=4 \\ x+y=6 \end{cases}$ 의 해가 연립방정식

$\begin{cases} x-y=b \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$ 를 만족시킨다고 할 때, 실수 a, b 에 대하여

$a+b$ 의 값은? (단, $b < 0$ 이다.) [4.1점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

544. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=-3 \\ x^2-2xy-y^2=7 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha, y=\beta$ 라

할 때, $\alpha+\beta$ 의 최솟값은? [3.5점]

- ① -5 ② -4 ③ -3
 ④ -2 ⑤ -1

545. 연립방정식

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 10 \\ (x+y)^2 - 2(x+y) = 15 \end{cases}$$

을 만족시키는 양수 x, y 에 대하여 $40xy$ 의 값을 구하고
그 과정을 과정을 서술하시오.[4.0점 부분점수 있음]

연립이차방정식의 풀이(2)

546. 연립이차방정식 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ 2x^2 + 3xy - 2y^2 = 0 \end{cases}$ 의 해를 $x = \alpha$,

$y = \beta$ 라 할 때, $\alpha + \beta$ 의 최댓값은? [4.3 점]

- ① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

547. 연립방정식 $\begin{cases} 2x + y + 2xy = 11 \\ 4x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$ 의 실근을 $x = \alpha$,

$y = \beta$ 라고 할 때, $2\alpha + 2\beta$ 의 최솟값은? [4.3점]

- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

대칭형의 연립방정식

548. 연립방정식 $\begin{cases} xy + (x+y) + 1 = k \\ xy - 2(x+y) + 4 = k \end{cases}$ 가 실근을 갖기 위한
실수 k 의 최댓값은? [5.2점]

- ① $\frac{4}{9}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{9}{4}$
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{13}{2}$

연립방정식의 해의 조건

549. 방정식 $(2x^2 - 3xy - 2y^2)^2 + (2x^2 + y^2 - 36)^2 = 0$ 을

만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $x + y$ 의 최댓값은? [4.2점]

- ① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

550. 다음 <조건>을 만족시키는 실수 a, b 에 대하여

연립방정식 $\begin{cases} ax+y=10 \\ 2x^2-by^2=50 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha, y=\beta$ 라고 할 때,
 $\alpha+\beta$ 의 최댓값은? [4.6점]

[조건]

삼차방정식 $x^3+1=0$ 의 한 허근을 w 라 할 때,
 $4w^3-3w^2+5w-1=aw+b$ 이다

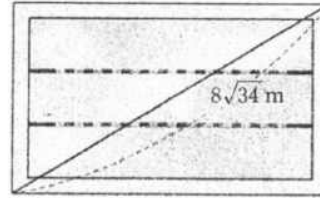
- ① 4 ② 5 ③ 6
 ④ 7 ⑤ 8

연립방정식의 활용

551. 각각 일정한 속도로 제품을 생산하는 기계 A와 기계 B가 있다. 기계 A가 1시간 동안 생산하는 제품의 개수는 기계 B가 1시간 동안 생산하는 제품의 개수보다 5개가 적다. x 시간 동안 기계 A와 기계 B가 생산하는 제품의 개수의 합은 200이고, 기계 A만 가동했을 때 100개의 제품을 생산하는 데 걸리는 시간은 $(x+2)$ 시간이다. 이때 기계 A가 100개의 제품을 생산하는 데 걸리는 시간 동안 기계 B가 생산할 수 있는 제품의 개수는? [4.5점]

- ① 50 ② 80 ③ 100
 ④ 120 ⑤ 150

552. 그림과 같이 넓이가 $960m^2$ 이고 대각선의 길이가 $8\sqrt{34}m$ 인 직사각형 모양의 수영장이 있다. 이 수영장의 가로와 세로의 길이를 am , 세로의 길이를 bm 라 할 때, $\frac{a}{b}$ 의 값은? (단, $a > b$) [5.3점]



- ① $\frac{8}{7}$ ② $\frac{7}{6}$ ③ $\frac{4}{3}$
 ④ $\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

정수 조건의 부정방정식

553. x 에 대한 이차식

$x^2-4(a-b)x+4(a+b)^2-17ab-5a-2b-7$ 이 완전제곱식이 되도록 하는 정수 a, b 에 대하여 ab 의 값 중 가장 큰 값을 구하고, 그 풀이 과정을 논술하시오. (부분 점수 있음) [5.0점]

8.

연립방정식(step3)

554. 방정식 $2x(x-1)+2y(y-1)=(x+y)(x+y-1)$ 을 만족시키는 순서쌍 (x, y) 의 개수는? (단, $10 \leq x < y \leq 100$ 인 자연수이다.) [4.8점]

- ① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12



한눈에 보는 정답

1. ⑤
2. ①
3. ③
4. ①
5. ②
6. ②
7. ②
8. ④
9. ②
10. ③
11. ⑤
12. ③
13. ②
14. ③
15. ④
16. ⑤
17. ①
18. ⑤
19. ①
20. ③
21. ③
22. ③
23. ④
24. ③
25. ⑤
26. ⑤
27. ②
28. ④
29. ③
30. ④
31. ⑤
32. ⑤
33. ①
34. ⑤
35. ①
36. ①
37. ①
38. ④
39. ①
40. ②
41. ⑤
42. ②
43. 45
44. ③
45. ⑤
46. ③

47. ①
48. ①
49. ③
50. ①
51. ③
52. ⑤
53. ②
54. ②
55. ④
56. ⑤
57. ④
58. 725
59. 72
60. ①
61. ④
62. ②
63. ④
64. ②
65. $a = 1, b = 4, c = -1$
66. $a = \frac{5}{2}, b = \frac{3}{2}, c = 2$
67. ③
68. ④
69. ①
70. ③
71. ③
72. ⑤
73. ⑤
74. ③
75. ④
76. ①
77. ②
78. ⑤
79. 5
80. ①
81. ②
82. $(a+b)x - ab$
83. ①
84. ②
85. ①
86. ④
87. ①
88. ②
89. ④
90. ①
91. ③
92. ⑤
93. ④

94. ③
 95. ④
 96. ①
 97. ④
 98. ①
 99. ①
 100. ③
 101. ⑤
 102. ⑤
 103. ②
 104. (1) 7 (2) 2
 105. ②
 106. ③
 107. ②
 108. ③
 109. ②
 110. ①
 111. ①
 112. ①
 113. $2x^2 - 3x + 1$
 114. ④
 115. ③
 116. ②
 117. ①
 118. ⑤
 119. ①
 120. ⑤
 121. ①
 122. ②
 123. ①
 124. ③
 125. ⑤
 126. ②
 127. ③
 128. ④
 129. ②
 130. -1
 131. ⑤
 132. ②
 133. ②
 134. ④
 135. ①
 136. ④
 137. ④
 138. ⑤
 139. ⑤
 140. ②
 141. ⑤
 142. ③
 143. ①
 144. 56
 145. 1011
 146. ④
 147. ⑤
 148. ⑤
 149. ③
 150. ①
 151. 몫 $x - \frac{2}{3}$, 나머지 $\frac{11}{3}$
 152. ①
 153. ①
 154. ④
 155. ⑤
 156. 2022
 157. ④
 158. ①
 159. ②
 160. ⑤
 161. ④
 162. ③
 163. ②
 164. ④
 165. ⑤
 166. ②
 167. -91
 168. $(a, b) = (1, 12), (2, 19)$
 169. ③
 170. ③
 171. ②
 172. ⑤
 173. ①
 174. ②
 175. 9
 176. 3
 177. (1) 2차 (2) $P(-2) = -30$
 178. ①
 179. ①
 180. ⑤
 181. ①
 182. -8
 183. ⑤
 184. ①
 185. ③
 186. ③
 187. ③
 188. ⑤

189. ①

190. ④

191. ⑤

192. ⑤

193. ④

194. 72

195. ②

196. ②

197. ②

198. ⑤

199. ③

200. ①

201. ④

202. ⑤

203. ⑤

204. ③

205. ④

206. ②

207. ③

208. ④

209. ④

210. ②

211. ⑤

212. ②

213. ⑤

214. ④

215. ①

216. ⑤

217. ③

218. ⑤

219. 54

220. ④

221. ④

222. ②

223. $\sqrt{34}$

224. ③

225. ③

226. ④

227. (1) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (2) $P(x)Q(x) = -x^4 - 2x^3 - 2x^2 - x + 6$ (3) $P(x) = -x^2 - x + 2, Q(x) = x^2 + x + 3$

228. ⑤

229. ③

230. ③

231. ④

232. ④

233. ④

234. ③

235. ⑤

236. ④

237. ②

238. ④

239. ②

240. ③

241. ③

242. ①

243. ③

244. ②

245. ②

246. ①

247. ③

248. ①

249. ③

250. ④

251. ④

252. ④

253. ①

254. ④

255. ②

256. ③

257. ②

258. ③

259. ③

260. ②

261. ①

262. ①

263. ⑤

264. $a = -3\sqrt{3}, b = 3\sqrt{3} - 4$

265. ③

266. ⑤

267. ④

268. ②

269. ⑤

270. ①

271. ①

272. ①

273. ③

274. 24

275. ①

276. ②

277. ①

278. ④

279. ③

280. ④

281. $12 - 26i$

282. ⑤

283. ④
 284. ⑤
 285. ③
 286. ④
 287. ③
 288. (2, 1), (2, 3)
 289. ③
 290. ⑤
 291. ④
 292. ④
 293. (1)

n	z^n	$(z - \sqrt{2})^n$	$z^n + (z - \sqrt{2})^n$
1	$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$	㉠ $\sqrt{2}i$
2	i	㉡ $-i$	
3	$-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$	$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$	㉢ $\sqrt{2}i$
4	㉣ -1	-1	-2
5	$-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$	㉤ $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$	$-\sqrt{2}i$
6	$-i$	i	㉥ 0
7	$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$	$-\sqrt{2}i$
8	㉦ 1	1	㉧ 2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

(2) $n=2, 6, 10, 14, 18$ 일 때 성립한다.

294. ③
 295. ①
 296. ①
 297. ①
 298. ②
 299. ③
 300. ②
 301. ①
 302. ①
 303. ④
 304. ⑤
 305. ⑤
 306. ①
 307. ①
 308. ②
 309. ①
 310. ④
 311. ②

312. ③
 313. ⑤
 314. ④
 315. ③
 316. ③
 317. ③
 318. ③
 319. ⑤
 320. ④
 321. ①
 322. ②
 323. ④
 324. ④
 325. ⑤
 326. ③
 327. ①
 328. ①
 329. ②
 330. ①
 331. 3
 332. ⑤
 333. ①
 334. ①
 335. ④
 336. $1-2i$
 337. ④
 338. ①
 339.
 340. ③
 341. ①
 342. ②
 343. ③
 344. ①
 345. ③
 346. ②
 347. ④
 348. ⑤
 349. $-2, 1, 3, 6$
 350. 118
 351. ②
 352. $3x^2 + 5x - 1 = 0$
 353. ⑤
 354. ①
 355. ①
 356. ④
 357. ④
 358. $3+i$ or $3-i$
 359. ⑤

360. ④
 361. ④
 362. 8
 363. ④
 364. ⑤
 365. ⑤
 366. $x=3, y=9$
 367. ③
 368. ⑤
 369. ①
 370. ⑤
 371. $p=8, q=17$
 372. ④
 373. ③
 374. ④
 375. ①
 376. ②
 377. ②
 378. ④
 379. ⑤
 380. ⑤
 381. ④
 382. ②
 383. ⑤
 384. ②
 385. ⑤
 386. ③
 387. ③
 388. ③
 389. ②
 390. ②
 391. ③
 392. ①
 393. ⑤
 394. ⑤
 395. ③
 396. ②
 397. ④
 398. $-8\sqrt{2}$
 399. ②
 400. ①
 401. ②
 402. ②
 403. ③
 404. ①
 405. ③
 406. ⑤
 407. ④

408. ③
 409. $a=2, M=33$
 410. ⑤
 411. ⑤
 412. 72
 413. ①
 414. 판매가 70원. 최대이익 1600원
 415. ③
 416. ④
 417. ④
 418. ①
 419. ④
 420. ②
 421. ②
 422. ①
 423. ①
 424. (1) $f(x)=ax(x+2)+2$ 에서 $(-3, -1)$ 을 지나므로
 이다. $a=-1$ 이므로 $f(x)=-x(x+2)+2=-x^2-2x+2$
 이차함수 $f(x)$ 가 직선 $y=m(x+3)+3$ 과 접하므로
 $-x^2-2x+2=mx+3m+3, x^2+(m+2)x+3m+1=0$
 판별식 $D=(m+2)^2-4(3m+1)=m^2-8m=0$
 $m=0$ 또는 $m=8$
 (2) $-x^2-2x+2=kx+2, x^2+(k+2)x=0$
 판별식 $D=(k+2)^2$ 이므로
 (i) $k=-2$ 일 때 한 점에서 만난다. (접한다.)
 (ii) $k \neq -2$ 일 때 $D>0$ 이므로 두 점에서 만난다.
 425. ③
 426. 89
 427. ⑤
 428. ②
 429. ④
 430. ⑤
 431. ④
 432. ②
 433. ④
 434. ①
 435. ①
 436. ③
 437. ③
 438. ⑤
 439. $\frac{70}{9}$
 440. ⑤
 441. $k=\frac{13}{5}, k=-1$
 442. ③
 443. ③
 444. ①

445. ④

446. ①

447. ③

448. (1) $b=4$ (2) $b=(a-3)^2+4$ (3) 7

449. ⑤

450. ②

451. ④

452. ④

453. ③

454. ②

455. ①

456. 21

457. ①

458. ⑤

459. ①

460. (1) $f(t) = -2\left(t - \frac{x}{4}\right)^2 + \frac{x^2}{8} + 5$ 이다.

$x=-6$ 일 때 $\frac{x}{4} = -\frac{3}{2} < -1$ 이므로

$g(x) = f(-1) = -x + 3$ 이다.

따라서 $g(-6) = 9$ 이다.

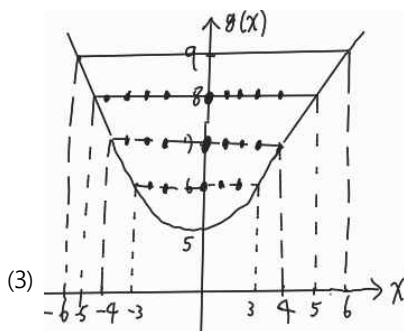
(2) $\frac{x}{4} < -1$ 일 경우 (1)과 같이 $g(x) = -x + 3$ 이다.

$-1 \leq \frac{x}{4} \leq 1$ 일 경우 $g(x) = \frac{x^2}{8} + 5$ 이다.

$1 < \frac{x}{4}$ 일 경우 $g(x) = f(1) = x + 3$ 이다.

따라서, 주어진 조건을 만족하려면 $g(x) = \frac{x^2}{8} + 5 = 6$,

$x = \pm\sqrt{8}$ 이므로, 구하고자 하는 곱은 -8 이다.



그림을 참고하면 구하고자 하는 점의 개수는

$9+7+5=21$ 개다.

461. -4

462. ②

463. $\frac{1}{2}$

464. ①

465. ②

466. ⑤

467. $\frac{25}{3}$

468. ⑤

469. ④

470. ①

471. ④

472. ③

473. ②

474. ⑤

475. (1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$, $y = x + 2$ (2) 4

476. ③

477. ②

478. ④

479. ③

480. (1) (7)에 의해 이차함수 $g(x)$ 는

$g(x) = (x-n-2)(x-n-3)$ 이다.

(2) $n=4$, $k=-\frac{1}{2}$ (3) -2

481. ⑤

482. ⑤

483. (1) $f(x) = x^2 - 4tx + 3t^2 + 8t = (x-2t)^2 - t^2 + 8t$ 이므로

꼭짓점의 좌표는 $(2t, -t^2 + 8t)$ 이다.

(2) x 의 범위가 $t \leq x \leq t+2$ 이므로 꼭짓점의 x 좌표인 $2t$ 가 범위의 중점에서 왼쪽과 오른쪽에 위치할 때와 $2t \geq t+2$ 보다 클 때로 나눠서 생각하면 $g(t)$ 는

i) $0 \leq t < 1$ 일 때

$g(t) = f(t+2) - f(2t) = (t-2)^2$

ii) $1 \leq t < 2$ 일 때

$g(t) = f(t) - f(2t) = t^2$

iii) $t \geq 2$ 일 때

$g(t) = f(t) - f(t+2) = 4t - 4$

(3) $y = 2t + m$ 이 $g(t)$ 와 서로 다른 두 점에서 만나기 위한

m 의 값은 $(0, 4)$ 를 지날 때 최댓값을 갖고, $g(t) = t^2$ 과 접할 때 보다 커야 하므로

$t^2 = 2t + m$

$\Rightarrow t^2 - 2t - m = 0$, $D/4 = 1 + m$ 이므로

$\therefore -1 < m \leq 4$ 이다.

484. ①

485. ③

486. 2

487. $\frac{1-\sqrt{85}}{2}$, 6

488. ④

489. ②

491. ⑤

492. ③

493. ⑤

494. ④

495. ③

496. 11

497. ②

498. ①

499. ②

500. ⑤

501. ③

502. ⑤

503. ②

504. -2

505. ④

506. ④

507. ①

508. ②

509. ②

510. ②

511. ④

512. ④

513. ④

514. ③

515. ②

516. ⑤

517. ⑤

518. ②

519. ③

520. ④

521. ①

522. (1) $w^2 - w + 1 = 0$ (2) 1 (3) 100 개

523. ①

524. 19

525. ①

526. ⑤

527. $a = 15$, $b = -15$

528. ④

529. ④

530. ②

531. 33개

532. ⑤

533. ①

534. (1) $f(x) = \pi(x+1)^2(x^2 - x + 1)$

$$g(x) = \frac{1}{3}\pi(x+2)^2(x^2 - 2x + 4)$$

$$(2) \frac{2\pi(x+1)^2(x^2 - x + 1) - 3 \times \frac{1}{3}\pi(x+2)^2(x^2 - 2x + 4)}{\pi}$$

$$= 2(x+1)(x^3 + 1) - (x+2)(x^3 + 8)$$

$$= 2(x^4 + x^3 + x + 1) - (x^4 + 2x^3 + 8x + 16)$$

$$= x^4 - 6x - 14$$

이므로 $a = 0$, $b = 0$, $c = -6$, $d = -14$ 535. $x = 2$ 일 때, 2400 원

536. ②

537. ①

538. ③

539. ⑤

540. -76

541. ④

542. ③

543. ②

544. ①

545. 210

546. ②

547. ②

548. ③

549. ⑤

550. ④

551. ⑤

552. ⑤

553. 30

554. ②



정답과 풀이

1. ⑤

$$X - 3(A - 2B) = A + 3B \text{에서}$$

$$X = 4A - 3B$$

$$= 4(2x^2 + xy - 4y^2) - 3(3x^2 - xy + 2y^2)$$

$$= -x^2 + 7xy - 22y^2$$

2. ①

$$A - 2B$$

$$= 4x^2 - 3x + 1 - 2(x^2 - x - 3)$$

$$= 4x^2 - 3x + 1 - 2x^2 + 2x + 6$$

$$= 2x^2 - x + 7$$

3. ③

$$(3A - B) - (A - 2B) = 2A + B$$

$$= 2(-x^2 - 2xy + 3y^2) + (2x^2 + 3xy - y^2)$$

$$= -xy + 5y^2$$

4. ①

$$X = A - B \text{이므로 } A - B = x^2 - xy - (2xy + 2y^2) = x^2 - 3xy - 2y^2$$

5. ②

$$\text{풀이) } A = 2x^3 + x^2 - 4x + 1 \text{ 에서}$$

$$B = -3x^2 + 4x - 2$$

$$A + B = 2x^3 - 2x^2 - 1 \text{ 이다.}$$

6. ②

$$A + B = 3x^2 + 3xy - y^2$$

7. ②

$$A - (-B + C) = A + B - C = 2x^2 - 4xy + y^2 \text{이므로, 구하고자 하는 값은 } a + b + c = 2 - 4 + 1 = -1 \text{ 이다.}$$

8. ④

$$A = x^3 + 2x^2 - x + 3, B = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 1$$

$$A + B = 3x^3 - 2x^2 + 4x + 2$$

9. ②

$$2(A + B) - B = 2A + B = 3x^3 + (8 + b)x^2 - 2ax + 3 \text{ 이므로}$$

$$8 + b = 4, b = -4 \text{ 이고 } -2a = -6, a = 3 \text{ 이므로 } ab = -12 \text{ 이다.}$$

10. ③

$$A = 2x^2 + xy - y^2, B = x^2 + 3xy + 2y^2$$

$$A + B = 3x^2 + 4xy + y^2$$

11. ⑤

$$4A + 2B = 8x^2 - 8x + 10$$

$$A - 2B = 5x^3 + 2x^2 - 7x - 5$$

$$\text{연립하면 } 5A = 5x^3 + 10x^2 - 15x + 5$$

$$\text{따라서 } A = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$$

12. ③

$$A - B = 2x^2 - 3xy + 2y^2 \text{를}$$

13. ②

$$A = 3x^2 - 5xy - y^2, B = -x^2 + 2xy + 4y^2,$$

$$X = ax^2 + bxy + cy^2 \text{에서}$$

$$2A - X = -B \text{이므로}$$

$$X = 2A + B$$

$$= 2 \times (3x^2 - 5xy - y^2) + (-x^2 + 2xy + 4y^2)$$

$$= 6x^2 - 10xy - 2y^2 - x^2 + 2xy + 4y^2$$

$$= 5x^2 - 8xy + 2y^2$$

$$\text{그러므로 } a = 5, b = -8, c = 2 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } a + b + c = 5 + (-8) + 2 = -1 \text{ 이다.}$$

14. ③

$$A + 2B = (x^2 + 1) + 2(x^2 + x) = 3x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 \text{의 계수는 } 3$$

15. ④

$$\text{식을 계산하면 } x^2 + 4x + 8 \text{ 이다.}$$

16. ⑤

$$(x - 2y)^3 = x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3 \text{ 이므로 } xy^2 \text{의 계수는 } 12 \text{ 이다.}$$

17. ①

$$\text{풀이) } (3x - y)(2x + y + 3) \text{의 전개식에서 } xy \text{항의 계수는}$$

$$3xy - 2xy = xy \text{ 이다.}$$

18. ⑤

$$(2x + 3y + 4z)^2 = 4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy + 24yz + 16zx \text{ 이므로}$$

$$yz \text{의 계수는 } 24$$

19. ①

[풀이]

$$(x^3 - x + 2)(x^2 - 2x - 2)$$

$$= x^5 - 2x^4 - 2x^3 - x^3 + 2x^2 + 2x + 2x^2 - 4x - 4$$

$$= x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x - 4$$

$$\text{전개한 식에서}$$

$$x^2 \text{의 계수는 } 4$$

$$x^3 \text{의 계수는 } -3$$

$$4 + (-3) = 1$$

20. ③

$$a = 1 \text{을 대입한 값은 모든 항의 계수의 합과 같으므로}$$

$$(1 + 1 + 1)^2 - 2 \times 1 = 7$$

21. ③

$$(2x+3)(x^2-x+1)=2x^3+x^2-x+3$$

따라서 $a+b=0$ 이다.

22. ③

$$x^2-4x+1=0 \text{이므로 } x-4+\frac{1}{x}=0, x+\frac{1}{x}=4 \text{이다.}$$

$$\text{따라서 구하고자 하는 값은 } x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=14 \text{이다.}$$

23. ④

$$x^2-5x=-2 \text{이다. 따라서,}$$

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

$$=(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=2 \times 4=8 \text{이다.}$$

24. ③

$$x=\sqrt{3}+1, y=\sqrt{3}-1 \text{ 이고 } x+y=2\sqrt{3}, xy=2 \text{ 이다.}$$

$$x^2y+x^2-xy^2+y^2=x^2+y^2+xy(x-y) \text{ 이므로}$$

$$x^2y+x^2-xy^2+y^2=12-4+4=12 \text{ 이다.}$$

25. ⑤

$$x=\sqrt{3}+1, y=\sqrt{3}-1 \text{이므로}$$

$$x+y=(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)=2\sqrt{3}$$

$$xy=(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)=3-1=2$$

이다.

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$$

$$=(2\sqrt{3})^3-3 \times 2 \times 2\sqrt{3}$$

$$=24\sqrt{3}-12\sqrt{3}$$

$$=12\sqrt{3}$$

26. ⑤

$$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$$

$$4=3+2xy$$

$$\therefore xy=\frac{1}{2}$$

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$$

$$=2^3-3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2=5$$

27. ②

$$a+b=4 \text{이고 } a^3+b^3=28 \text{이므로}$$

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b) \text{이므로}$$

$$28=64-12ab, \therefore ab=3$$

$$a^5+b^5=(a^2+b^2)(a^3+b^3)-a^2b^2(a+b) \text{에서}$$

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=10 \text{을 이용하여}$$

$$a^5+b^5=10 \times 28-3^2 \times 4=280-36=244$$

28. ④

[풀이]

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b) \text{에}$$

$$a+b=1, ab=-1 \text{대입하면}$$

$$a^3+b^3=1^3-3(-1) \times 1$$

$$a^3+b^3=4$$

29. ③

$$a=\sqrt{2}-\sqrt{3}, b=\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

$$a+b=2\sqrt{2}, ab=-1$$

$$a^3+b^3=(a+b)\{(a+b)^2-3ab\}=22\sqrt{2}$$

30. ④

$$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$$

$$12=8+6xy \quad \therefore xy=\frac{2}{3}$$

31. ⑤

$$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$$

$$9=13+2xy$$

$$xy=-2$$

$$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=27-3 \times (-2) \times 3=45$$

32. ⑤

$$ab-a-b=44 \text{에서 } ab-a-b+1=45$$

$$a(b-1)-(b-1)=45 \quad \therefore (a-1)(b-1)=45 \quad \cdots \textcircled{A}$$

$$bc-b-c=8 \text{에서 } bc-b-c+1=9$$

$$b(c-1)-(c-1)=9 \quad \therefore (b-1)(c-1)=9 \quad \cdots \textcircled{B}$$

$$ca-c-a=4 \text{에서 } ca-c-a+1=5$$

$$c(a-1)-(a-1)=5 \quad \therefore (c-1)(a-1)=5 \quad \cdots \textcircled{C}$$

 $\textcircled{A} \times \textcircled{B} \times \textcircled{C}$ 을 하면

$$\{(a-1)(b-1)(c-1)\}^2=45^2$$

이때, $a > 0, b > 0, c > 0$ 이므로

$$(a-1)(b-1)(c-1)=45$$

$$\textcircled{A} \text{에서 } c-1=1 \text{ 이므로 } c=2$$

$$\textcircled{B} \text{에서 } a-1=5 \text{ 이므로 } a=6$$

$$\textcircled{C} \text{에서 } b-1=9 \text{ 이므로 } b=10$$

$$\therefore a+2b=c=6+2 \times 10+2=28$$

33. ①

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$$

$$=4^2-2 \times 2=12$$

34. ⑤

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$

$$36=48+2(ab+bc+ca)$$

$$ab+bc+ca=-6$$

$$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=3$$

35. ①

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 4x + 2 \overline{) \begin{array}{r} 3x \quad + 5 \\ 3x^3 \quad - 7x^2 \quad \quad + 10 \\ \hline 3x^3 \quad - 12x^2 \quad + 6x \\ \hline \quad 5x^2 \quad - 6x \quad + 10 \\ \quad 5x^2 \quad - 20x \quad + 10 \\ \hline \quad \quad 14x \end{array}}
 \end{array}$$

몫 : $3x + 5$, 나머지 : $14x$

36. ①

$x^3 - x^2 - x + a$ 을 $x^2 + x + 1$ 로 직접 나누어보면 몫은 $x - 2$
 나머지는 $a + 2$ 따라서 $a + 2 = 0$ 이므로 $a = -2$

37. ①

$x^3 - x^2 - x + a$ 을 $x^2 + x + 1$ 로 직접 나누어보면 몫은 $x - 2$
 나머지는 $a + 2$ 따라서 $a + 2 = 0$ 이므로 $a = -2$

38. ④

피타고라스에 의하여

$$a^2 + b^2 = 100, ab = 22 \text{이므로}$$

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \text{에서 } a+b = 12 \quad (a > 0, b > 0)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 1728 - 792 = 936$$

39. ①

$$\text{우선, } C - 3A = x^3 + nx - 2 - 3x^3 - 3mx^2 - 6x + 3$$

$$= -2x^3 - 3mx^2 + (n-6)x + 1 \text{이므로}$$

$$2A - \{B - (C - 3A)\}$$

$$= 2x^3 + 2mx^2 + 4x - 2 - \{x^3 + x^2 - 3 + 2x^3 + 3mx^2 - (n-6)x - 1\}$$

$$= -x^3 - (m+1)x^2 + (n-2)x + 2$$

$$x^2 \text{의 계수가 } -4, x \text{의 계수가 } 2 \text{이므로 } m = 3, n = 4$$

$$\therefore m + n = 7$$

40. ②

$$A = x^3 - 2x^2 + 7x, B = 2x^3 - x - 4,$$

$$C = -3x^3 + 2 \text{에 대하여}$$

$$A - (B + 2C) = 5x^3 - 2x^2 + 8x$$

41. ⑤

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 9$$

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = -2$$

$$(a+b)(x+y) = ax + ay + bx + by = m + n = -2$$

$$mn = (ax + by)(bx + ay) = ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2) = 35$$

$$m^3 + n^3 = (m+n)^3 - 3mn(m+n)$$

42. ②

주어진 조건에 맞춰 전개하면

$$(x^2 - 1)^2 - (x^2 - 1)(3x^2 + x) + (3x^2 + x)^2 \text{이므로 각 항에서 } x^2 \text{의 계수를 계산하면 } -2 + 3 + 1 = 2$$

43. 45

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx + 2z + 2x + 2y + 8 = 107 \text{에서}$$

$$(x+y+z)^2 + 2(x+y+z) - 99 = 0 \text{이고 } x+y+z = A \text{라 하면}$$

$$A^2 + 2A - 99 = 0, (A+11)(A-9) = 0 \text{이므로}$$

$$A = 9 \text{ 또는 } A = -11 \text{이다.}$$

$$x > 0, y > 0, z > 0 \text{이므로 } x+y+z = 9$$

$$\therefore 5x + 5y + 5z = 5(x+y+z) = 45$$

44. ③

$$\text{주어진 식은 } (a-3)^3 \text{이므로 } a = 23 \text{을 대입하면 } N = 20^3$$

45. ⑤

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) \text{에서}$$

$$4 = 4 + 2(ab+bc+ca) \therefore ab+bc+ca = 0$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \text{에서}$$

$$8 - 3abc = 2 \times 4, 8 - 3abc = 8$$

$$\therefore abc = 0$$

$$\text{이때, } a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (ab+bc+ca)^2 - 2(ab^2c + abc^2 + a^2bc)$$

$$\text{이므로 } a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 0 - 2abc(a+b+c) = 0 (\because abc = 0)$$

$$a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

$$= 4^2 - 0 = 16$$

또한,

$$a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4$$

$$= (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2 - 2(a^2b^4c^2 + a^2b^2c^4 + a^4b^2c^2)$$

$$= 0 - 2a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$= 0$$

$$\therefore a^8 + b^8 + c^8$$

$$= (a^4 + b^4 + c^4)^2 - 2(a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4)$$

$$= 16^2 - 0$$

$$= 256$$

46. ③

풀이)

$$a+b=2, a^2+b^2=6 \text{이므로}$$

$$a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab \text{에서}$$

$$6 = 2^2 - 2ab \therefore ab = -1$$

$$\neg. a(2-a) = -1 \text{이므로 } a^2 = 2a+1 \dots\dots (\text{참})$$

$$\sqcup. a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 2^3 - 3 \cdot (-1) \cdot 2 = 14 \dots (\text{참})$$

$$\sqsubset. a^5 + b^5 + a^4 + b^4 = 118 \text{에서}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 2^3 - 3 \cdot (-1) \cdot 2 = 14$$

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = 6^2 - 2 \cdot (-1)^2 = 34$$

$$(a^3 + b^3)(a^2 + b^2) = a^5 + a^2b^3 + a^3b^2 + b^5$$

$$= a^5 + b^5 + a^2b^2(a+b)$$

$$\begin{aligned} \therefore a^5 + b^5 &= (a^3 + b^3)(a^2 + b^2) - a^2b^2(a+b) \\ &= 14 \cdot 6 - (-1)^2 \cdot 2 \\ &= 82 \\ a^5 + b^5 + a^4 + b^4 &= 82 + 34 = 116 \dots\dots (\text{거짓}) \end{aligned}$$

$\therefore \neg, \perp$

47. ①

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + b^2 + 2ab \\ 1 &= 4 + 2ab \\ ab &= -\frac{3}{2} \\ (a^2 + b^2)^3 &= a^6 + b^6 + 3a^2b^2(a^2 + b^2) \\ 64 &= a^6 + b^6 + 3 \times \frac{9}{4} \times 4 \\ \therefore a^6 + b^6 &= 64 - 27 = 37 \end{aligned}$$

48. ①

$$\begin{aligned} a+b+c &= 3, \quad ab+bc+ca = 2 \text{에서} \\ (a+b)(b+c) + (b+c)(c+a) + (c+a)(a+b) \\ &= b^2 + (c+a)b + ca + c^2 + (a+b)c + ab + a^2 + (b+c)a + bc \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 3ab + 3bc + 3ca \\ &= (a+b+c)^2 + ab + bc + ca \\ &= 3^2 + 2 = 11 \end{aligned}$$

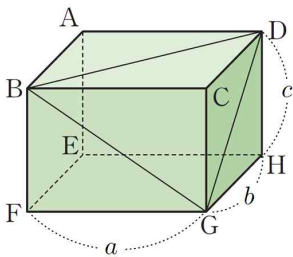
49. ③

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 25 - 10 = 15 \dots \textcircled{1} \\ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ 65 - 3abc &= 5 \times (15 - 5) \\ \therefore abc &= 5 \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①, ②에 의해

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} = \frac{15}{5} = 3$$

50. ①



그림과 같이 $\overline{FG} = a$, $\overline{GH} = b$, $\overline{DH} = c$ 라 하자.

직육면체의 겉넓이가 42 이므로

$$2(ab + bc + ca) = 42 \text{에서 } ab + bc + ca = 21$$

삼각형 BGD의 세 변의 길이의 제곱의 합이 44 이므로

$$\begin{aligned} \overline{BG}^2 + \overline{GD}^2 + \overline{BD}^2 \\ &= (a^2 + c^2) + (b^2 + c^2) + (a^2 + b^2) \end{aligned}$$

$$= 2(a^2 + b^2 + c^2) = 44$$

$$\text{에서 } a^2 + b^2 + c^2 = 22$$

$$\begin{aligned} \text{이때, } (a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) \\ &= 22 + 42 = 64 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } a+b+c = 8 (\because a+b+c > 0)$$

따라서 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은

$$4(a+b+c) = 4 \times 8 = 32$$

51. ③

풀이) 이 상자의 겉넓이는 40 이므로 $2(ab+bc+ca) = 40$

$$\therefore ab+bc+ca = 20 \dots\dots \textcircled{1}$$

또한, 모서리의 길이의 합이 32 이므로 $4(a+b+c) = 32$

$$\therefore a+b+c = 8 \dots\dots \textcircled{2}$$

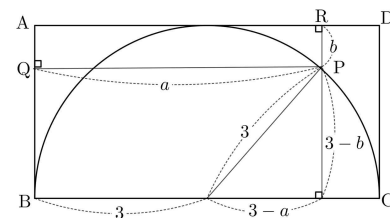
①, ②에서

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \\ &= 8^2 - 2 \cdot 20 \\ &= 24 \end{aligned}$$

따라서 직육면체의 대각선의 길이는

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

52. ⑤



직사각형 AQPR의 둘레의 길이가 14 이므로

$$a+b = 7$$

$$(a-3)^2 + (3-b)^2 = 9$$

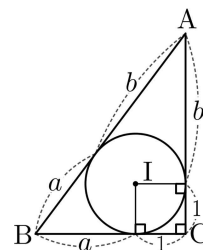
$$a^2 + b^2 - 6(a+b) + 9 = 0$$

$$(a+b)^2 - 2ab - 6(a+b) + 9 = 0$$

$$2ab = (a+b)^2 - 6(a+b) + 9 = 49 - 42 + 9 = 16$$

$$\therefore ab = 8$$

53. ②



둘레의 길이가 12 이므로

$$2(a+b) + 2 = 12$$

$$a+b = 5 \dots \textcircled{1}$$

삼각형 ABC가 직각삼각형이므로

$$(a+1)^2 + (b+1)^2 = (a+b)^2$$

$$a^2 + 2a + 1 + b^2 + 2b + 1 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$ab = a + b + 1 = 6 \cdots ②$$

①, ②에 의해 a, b 는 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 의 두 근이다.

$$(x-2)(x-3) = 0$$

$$x = 2 \text{ 또는 } x = 3$$

$$\overline{BC} < \overline{AC} \text{ 이므로 } a < b$$

$$\therefore a = 2$$

$$\therefore \overline{BC} = a + 1 = 3$$

【다른풀이추가】

$$\overline{AB} = c, \overline{AC} = b, \overline{BC} = a \text{ 하자}$$

$$① a + b + c = 12$$

$$② \frac{r}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}ab$$

$$③ c^2 = a^2 + b^2$$

$$④ c = a - 1 + b - 1$$

연립하면 됩니다.

54. ②

$\angle HPI = 90^\circ$ 이므로 $\overline{HI} = \overline{OP}$ 에서 $\overline{HI} = 6$ 이다.

$\overline{PH} = x, \overline{PI} = y$ 라 하면 삼각형 PIH 에서

$$x^2 + y^2 = 36 \cdots \cdots ㉠$$

삼각형 PIH 의 내접원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\pi r^2 = \pi \text{ 에서 } r^2 = 1 \therefore r = 1$$

$$\text{삼각형 PIH 의 넓이는 } \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2} \times 1 \times (x + y + 6)$$

$$xy = x + y + 6 \text{ 에서}$$

$$x + y = xy - 6 \cdots \cdots ㉡$$

$$㉠, ㉡ \text{ 에서 } (x + y)^2 - 2xy = 36$$

$$(xy - 6)^2 - 2xy = 36, (xy)^2 - 14xy = 0$$

$$xy(xy - 14) = 0$$

$$xy \neq 0 \text{ 이므로 } xy = 14 \cdots \cdots ㉢$$

$$㉡, ㉢ \text{ 에서 } x + y = 8$$

$$\overline{PH}^3 + \overline{PI}^3 = x^3 + y^3$$

$$= (x + y)^3 - 3xy(x + y)$$

$$= 8^3 - 3 \times 14 \times 8$$

$$= 8 \times (8^2 - 3 \times 14)$$

$$= 8 \times 22 = 176$$

55. ④

삼각형의 세 변의 길이를 각각 a, b, c 라 하고, 삼각형의 내접원의 반지름의 길이를 r 라 할 때, 삼각형의 넓이 S 는

$$S = \frac{1}{2}r(a + b + c) \text{ 임을 이용하자.}$$

$$\overline{PH} = a, \overline{PI} = b \text{ 라 하면 } \triangle PIH = \frac{1}{2}r(a + b + 8)$$

$$\overline{IH} = \overline{OP} = 8$$

$\triangle PIH$ 에 내접하는 원의 넓이가 π 이므로 내접원의 반지름의

길이 r 는 $r = 1$

따라서 $\frac{1}{2}(a + b + 8) = \frac{1}{2}ab$ 가 성립하고 이를 정리하면

$a + b + 8 = ab$ 가 됨을 알 수 있다. ... (*)

또, 삼각형 PIH 는 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리를 이용하면 $a^2 + b^2 = 8^2 = 64$ 가 성립한다.

(*) 에서 $a + b = x, ab = y$ 로 치환하면 $x + 8 = y$ 이고,

$a^2 + b^2 = 64$ 에서 곱셈공식의 변형을 이용하면

$64 = (a + b)^2 - 2ab = x^2 - 2y$ 가 성립한다. y 에 $y = x + 8$ 을

대입하면 $64 = x^2 - 2(x + 8)$, 이를 정리하면 $x^2 - 2x - 80 = 0$,

$(x + 8)(x - 10) = 0$ 이 되어 $x = 10, y = 18$ 이 됨을 알 수 있다.

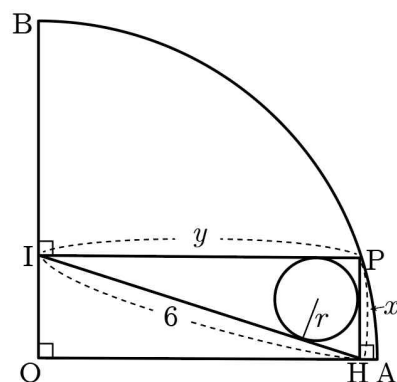
($\therefore x > 0$)

$$\text{따라서 } \overline{PH}^3 + \overline{PI}^3 = a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

$$= x^3 - 3xy = 10^3 - 3 \times 10 \times 18$$

$$= 1000 - 540 = 460$$

56. ⑤



$$\overline{PH} = x, \overline{PI} = y$$

$$\overline{OA} = \overline{OP} = \overline{IH} = 6$$

$$x^2 + y^2 = 6^2$$

$$\pi r^2 = \pi \text{ 에서 } r = 1$$

삼각형 PIH 에서 $\frac{1}{2}xy = \frac{1}{2} \times 1 \times (x + y + 6)$, $x + y = xy - 6$

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = (xy - 6)^2 - 2xy$$

$$= (xy)^2 - 14xy + 36 = 36$$

$(xy)^2 - 14xy = xy(xy - 14) = 0$ 에서 $xy = 14$ 이고, $x + y = 8$ 이다.

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 8^3 - 42 \times 8$$

$$\frac{1}{8}(x^3 + y^3) = 8^2 - 42 = 22 \text{ 이다.}$$

57. ④

풀이) $\overline{AB} = (x + 1)^2$ 이고,

직사각형 ABCD의 넓이가 $x^3 + 5x^2 + 7x + a$

이므로 $x^3 + 5x^2 + 7x + a = (x + 1)^2(x + k)$ 이다.

그러므로 $k = 3, a = 3$

$\overline{BC} = x+3$ 이고 직각삼각형 BEC 의 넓이가 $\frac{1}{2}x^2 + bx + a$

이므로

$$\frac{1}{2}x^2 + bx + 3 = \frac{1}{2}(x+3)(x+p)$$

이므로 $p=2$, $b=\frac{5}{2}$ 이다. $\therefore \overline{BE} = x+2$

피타고라스에 의하여

$$\overline{EC} = \sqrt{(x+3)^2 + (x+2)^2} = \sqrt{2x^2 + 10x + 13}$$

반원 R 의 넓이는 $\frac{1}{4}\pi \times \frac{1}{2}(2x^2 + 10x + 13) = \frac{\pi}{4}(x^2 + 5x + c)$

$$\therefore c = \frac{13}{2}$$

$$a+b+c = 3 + \frac{5}{2} + \frac{13}{2} = 12$$

58. 725

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) = 25 - 10 = 15$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz = 53$$

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = (xy+yz+zx)^2 - 2xyz(x+y+z) = 15$$

$$x^5 + y^5 + z^5$$

$$= (x^2 + y^2 + z^2)(x^3 + y^3 + z^3) - \{x^2y^2(x+y) + y^2z^2(y+z) + z^2x^2(z+x)\} \therefore a+b+c = 7$$

$$= (x^2 + y^2 + z^2)(x^3 + y^3 + z^3) - x^2y^2(5-z) - y^2z^2(5-x) - z^2x^2(5-y)$$

$$= (x^2 + y^2 + z^2)(x^3 + y^3 + z^3) - 5(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + xyz(xy+yz+zx)$$

$$= 725$$

59. 72

[풀이]

$$x+y+z=4, x^2+y^2+z^2=12, xyz=-4 \text{ 이므로}$$

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy+yz+zx) \text{에서}$$

$$4^2 = 12 + 2(xy+yz+zx), xy+yz+zx = 2$$

$$(xy+yz+zx)^2 = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2xyz(x+y+z) \text{에서}$$

$$2^2 = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2 \times (-4) \times 4$$

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 36$$

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) = x^4 + y^4 + z^4$$

$$12^2 - 2 \times 36 = x^4 + y^4 + z^4$$

$$\therefore x^4 + y^4 + z^4 = 72$$

60. ①

$$x(x+1) + 2(x+1) = x^2 + 3x + 2$$

항등식에 성질에 따라

$$a=3, b=2, a-b=1$$

61. ④

$$x^2 - 4x + 3 = a(x+1)^2 + b(x+1) + c$$

① $x=-1$ 대입

$$(-1)^2 - 4 \times (-1) + 3 = C$$

$$\therefore C=8$$

② $x=0$ 대입

$$3 = a+b+c \rightarrow a+b=-5$$

③ $x=-2$ 대입

$$(-2)^2 - 4 \times (-2) + 3 = a-b+c = 15 \rightarrow a-b=7$$

$$\therefore a=1, b=-6$$

$$2a-b+c = 2 \times 1 - (-6) + 8 = 16$$

62. ②

$$3x^2 + ax - 16 = bx^2 + (4+bc)x + 4c \text{ 이므로}$$

$$b=3, c=-4, a=-8$$

$$\therefore a+b+c=-9$$

63. ④

$$x^2 + ax + 5 = x^2 + 3x + b \text{ 이므로}$$

$$a=3, b=5$$

$$\therefore a+b=8$$

64. ②

$$3x^2 + 5x - 1 = ax^2 + bx + c$$

$$a=3, b=5, c=-1$$

65. $a=1, b=4, c=-1$

(1) 우변의 최고차항의 계수가 1 이므로 $a=1$

(2) $x=-1$ 을 대입하면 $a-b+c=-4 \therefore -b+c=-5$

(3) $x=1$ 을 대입하면 $a+b+c=4 \therefore b+c=3$

(2), (3)을 연립하면 $c=-1, b=4$

(1), (2), (3)에 의하여 $a=1, b=4, c=-1$

$$66. a=\frac{5}{2}, b=\frac{3}{2}, c=2$$

풀이)

$$a(x-1)^2 + b(x+1)(x-1) + c \quad \text{에서}$$

$$= 2(x-1)(x-2) - (x+1)(x-2) + 3(x-1)(x+1)$$

$$x=1 \text{ 을 대입 } c=2$$

$$x=-1 \text{ 을 대입 } 4a+c=2 \times 3 \text{ 이므로 } a=\frac{5}{2}$$

$$x=2 \text{ 을 대입 } a+3b+c=9 \text{ 이므로 } b=\frac{3}{2} \text{ 이다.}$$

67. ③

$$ax(x+1) + bx(x-1) = x^2 + 4x + c \text{ 가 } x \text{ 에 대한 항등식이므로}$$

$$x=0 \text{ 일 때, } 0=c$$

$$x=1 \text{ 일 때, } a \times 1 \times 2 = 1 + 4 + c \text{ 에서}$$

$$2a=5 \quad \therefore a=\frac{5}{2}$$

$x=-1$ 일 때, $b \times (-1) \times (-2) = 1 - 4 + c$ 에서

$$2b = -3 \quad \therefore b = -\frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } 4a - 2b + c = 4 \times \frac{5}{2} - 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + 0 = 10 + 3 = 13$$

68. ④

이차항의 계수를 비교하면 $a=1$

$x=0$ 을 대입하면

$$5 = 1 - b + 9$$

$$\therefore b=5$$

$$a+b=6$$

69. ①

항등식이므로 모든 실수 k 에 대하여 등식이 성립한다.

$k+2 = -(2k+1)$ 를 만족하는 k 의 값을 구하면 $k=-1$

주어진 항등식에 $k=-1$ 을 대입하면

$$x+y-1=0 \quad \therefore x+y=1$$

<다른풀이>

주어진 등식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립한다.

$$k(x-2y) + (2x-y-1) = 0$$

위의 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$x-2y=0, \quad 2x-y-1=0$$

$$\therefore x=\frac{2}{3}, \quad y=\frac{1}{3}$$

따라서 $x+y=1$ 이다.

70. ③

$ax^2+bx-7=3x^2+2x-c$ 가 x 의 항등식이므로

$$a=3, \quad b=2, \quad c=7$$

$$\therefore abc=42$$

71. ③

항등식 $x^3-x^2+3x-2=(x+2)P(x)+ax$ 에서

$x=-2$ 를 대입하면

$$-20 = -2a, \quad a=10$$

$x^3-x^2+3x-2=(x+2)P(x)+10x$ 에서

$x=4$ 를 대입하면

$$58 = 6P(4) + 40, \quad P(4) = 3$$

72. ⑤

$$x^3-2x+1=(x-2)Q(x)+R$$

$x=2$ 대입

$$2^3-2 \cdot 2+1=R=5$$

73. ⑤

$f(x)=x^3-2x^2+ax-4$ 라 하자.

$f(x)$ 가 $x-1$ 로 나누어떨어지므로 $f(1)=0$ 이 성립한다.

$$f(1)=1-2+a-4=a-5=0 \quad \therefore a=5$$

74. ③

다항식에 $x=-3$ 을 대입하면 -12 이므로 나머지는 -12 이다.

75. ④

$8x^3-6x+4$ 을 $x-2$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면

$$8x^3-6x+4=(x-2)Q(x)+R$$

$x=2$ 를 대입하면

$$8 \times 2^3 - 6 \times 2 + 4 = (2-2)Q(2) + R$$

$$64 - 12 + 4 = R$$

$$\therefore R=56$$

그러므로 $8x^3-6x+4$ 을 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는 56이다.

76. ①

나머지정리에 의해

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} - \frac{a}{2} - 3 = 2$$

$$\frac{a}{2} = -4$$

$$\therefore a=-8$$

77. ②

[풀이]

$$4x^3-3x+1=(x-1)Q(x)+R$$

나머지 정리에 의하여 $x=1$ 을 대입하면

$$R=2$$

78. ⑤

$$\begin{array}{r} x+1 \\ x^2+x+1 \overline{) x^3+2x^2+3x+4} \\ \underline{x^3+x^2+x} \\ x^2+2x \\ \underline{x^2+x+1} \\ x-1 \end{array}$$

79. 5

$$x^3+2x^2+ax+b=(x-1)(x+2)Q(x)$$

$x=1$ 을 대입 $1+2+a+b=0$

$$a+b=-3 \quad \dots \textcircled{1}$$

$x=-2$ 를 대입 $-8+8-2a+b=0$

$$2a-b=0 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하면 $a=-1, \quad b=-2$

$$\therefore a^2+b^2=5$$

80. ①

삼차다항식 $f(x)-5$ 가 $2x^2-4x+2$ 으로 나누어떨어지므로
몫을

$ax+b$ (a, b 는 상수)라고 하면

$$f(x)-5 = (2x^2-4x+2)(ax+b)$$

$$= 2(x-1)^2(ax+b)$$

$$\therefore f(x) = 2(x-1)^2(ax+b)+5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편, $f(x)+3$ 이 x^2+2x+1 로 나누어떨어지고,

$$f(x)+3 = 2(x-1)^2(ax+b)+5+3$$

$$= 2\{(x+1)^2-4x\}(ax+b)+8$$

$$= 2(x+1)^2(ax+b)-8x(ax+b)+8$$

$$= 2(x+1)^2(ax+b)-8(ax^2+bx-1)$$

이므로 다항식 ax^2+bx-1 도 $(x+1)^2$ 으로 나누어떨어져야
한다.

따라서 $(x+1)^2$ 이 ax^2+bx-1 의 인수이어야 하므로

$$ax^2+bx-1 = a(x+1)^2$$

$$= ax^2+2ax+a$$

이 식이 x 에 대한 항등식이므로

$$b=2a, \quad a=-1 \text{에서 } a=-1, \quad b=-2$$

따라서 $\textcircled{1}$ 에서 $f(x)=2(x-1)^2(-x-2)+5$ 이므로

$f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의해

$$f(2)=2 \times 1 \times (-4)+5=-3$$

81. $\textcircled{2}$

$$P(\alpha)-4=0, \quad \alpha^2 P(\alpha)=0$$

$$P(\alpha)=4 \text{이므로}$$

$$\alpha=0, \quad P(0)=4$$

$3P(x)+2$ 를 x 로 나눈 나머지는 $3P(0)+2$ 이므로

$$3P(0)+2=14$$

82. $(a+b)x-ab$

다항식 $f(x)$ 를 $x-a, x-b$ 로 나눈 나머지가 각각

a^2, b^2 이므로

나머지정리에 의해 $f(a)=a^2, f(b)=b^2$

$f(x)$ 를 $(x-a)(x-b)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를

$mx+n$ (m, n 은 상수)라 하면

$$f(x)=(x-a)(x-b)Q(x)+mx+n$$

$$x=a \text{일 때, } f(a)=am+n=a^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x=b \text{일 때, } f(b)=bm+n=b^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}-\textcircled{2}$ 을 하면

$$am-bm=a^2-b^2, \quad (a-b)m=(a+b)(a-b)$$

이때, $a \neq b$ 이므로 $a-b \neq 0$

따라서 양변을 $(a-b)$ 로 나누면 $m=a+b$

$\textcircled{1}$ 에 $m=a+b$ 를 대입하면

$$a(a+b)+n=a^2 \text{에서 } a^2+ab+n=a^2 \quad \therefore n=-ab$$

따라서 $f(x)$ 를 $(x-a)(x-b)$ 로 나눈 나머지는

$(a+b)x-ab$ 이다.

83. $\textcircled{1}$

$$A=(x^2+x-3)(2x^2-5)-7$$

$$= 2x^4+2x^3-11x^2-5x+8$$

$$= (2x^2-2x+1)(x^2+2x-4)-15x+12$$

몫은 x^2+2x-4 , 나머지는 $-15x+12$ 이므로 합은 $x^2-13x+8$

84. $\textcircled{2}$

$P(x)$ 를 x^2+2 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$P(x)=x^3-ax^2+bx+5=(x^2+2)Q(x)+2x+1 \text{가 성립한다.}$$

위의 등식은 항등식이므로 $Q(x)=x+k$ 로 놓을 수 있다.

$(x^2+2)(x+k)+2x+1$ 을 전개하면

$$x^3+kx^2+2x+2k+2x+1=x^3+kx^2+4x+2k+1$$

계수비교법을 이용하면 $k=-a, b=4, 2k+1=5$ 가 성립하고,

이를 정리하면 $k=2, a=-2, b=4$ 가 됨을 알 수 있다.

따라서 $a+b=2$

85. $\textcircled{1}$

$P(x+2)$ 를 x^2-1 로 나누었을 때 나머지가 $2x+1$ 이므로

$$P(3)=3, \quad P(1)=-1 \text{이다.}$$

$P(x)$ 를 $x-3$ 으로 나누었을 때 나머지는 $P(3)=3$

86. $\textcircled{4}$

$$f(x)=(3x+2)Q(x)+R$$

$$= 3\left(x+\frac{2}{3}\right)Q(x)+R$$

$$= \left(x+\frac{2}{3}\right)\{3Q(x)\}+R$$

따라서 $f(x)$ 를 $x+\frac{2}{3}$ 으로 나눈 몫은 $3Q(x)$, 나머지는 R

87. $\textcircled{1}$

$2024^{99}+2022^{99}$ 을 2023으로 나눈 몫을 Q , 나머지를 R 하면

$$2024^{99}+2022^{99}=2023 \times Q+R$$

2023을 x 로 놓으면

$$(x+1)^{99}+(x-1)^{99}=xQ(x)+R$$

$x=0$ 을 대입하면

$$1^{99}+(-1)^{99}=R$$

$$1-1=R$$

$\therefore R=0$ 이다.

$$\text{그러므로 } 2024^{99}+2022^{99}=2023 \times Q$$

따라서 $2024^{99}+2022^{99}$ 을 2023으로 나눈 나머지는 0이다.

88. $\textcircled{2}$

조립제법의 결과는 아래와 같다.

2	2	-7	0	4
		4	-6	-12
	2	-3	-6	-8

89. ④

왼쪽 위 빈칸은 -2고, 왼쪽 아래쪽 빈칸은 $-3-2=-5$,가운데 위 빈칸은 $\frac{5}{2}$ 이므로 $a=1+\frac{5}{2}=\frac{7}{2}$ 이다. 따라서구하고자 하는 값은 $Q(0)+a=\frac{a}{2}+a=\frac{3}{2}a=\frac{21}{4}$ 이다.

90. ①

$$-\frac{1}{2} \left| \begin{array}{cccc} 2 & 3 & -1 & -4 \\ & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & -3 \end{array} \right|$$

이므로 $2x^3+3x^2-x-4=\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2+2x-2)-3$

$$=(2x+1)(x^2+x-1)-3$$

$$(가) = 2x^2+2x-2, (나) = x^2+x-1$$

따라서 $f(x)=2x^2+2x-2, g(x)=x^2+x-1$

$$a+b=-2, c+d=0$$

$$f(-2)+g(0)=2-1=1$$

91. ③

$$a^3+ab^2+b^2c+a^2c-c^3-ac^2=0$$

$$(a+c)b^2+(a+c)a^2-c^2(a+c)=0$$

$$(a+c)(b^2+a^2-c^2)=0$$

 a, b, c 는 삼각형의 세 변의 길이이므로 a, b 가 각각 삼각형의 한 변의 길이이므로 $a>0, b>0$ 이다.따라서 $a+b>0$ 즉, $b^2+a^2-c^2=0$ 이다. $c^2=a^2+b^2$ 에서 삼각형 ABC 가 빗변이 c 인 $a=b$ 직각이등변삼각형임을 알 수 있다. 따라서 삼각형 ABC 넓이는 $\frac{a^2}{2}=25$

$$a=b=5\sqrt{2}, c=10$$

$$\therefore \frac{ac}{b}=10$$

92. ⑤

 $x+3=X$ 라 하면

$$X^4-2X^3+5X^2+4X-7$$

$$=a(X-3)^4+b(X-3)^2+c(X-3)^2+d(X-3)+e \text{ 이므로}$$

조립제법을 이용해서 풀면

$$a=1, b=10, c=41, d=88, e=77$$

93. ④

[풀이]

$$(x^3-x^2+3x-1)^2=a_6x^6+a_5x^5+\dots+a_0 \text{ 라고 할 수 있으므로}$$

계수의 총합을 구하기 위해서 $x=1$ 대입하면

$$a_6+a_5+a_4+\dots+a_0=2^2=4$$

94. ③

$$(x^2+4x+2)^{10}=a_{20}(x+1)^{20}+a_{19}(x+1)^{19}+\dots+a_1(x+1)+a_0$$

가 x 에 대한 항등식이므로

$$x=-1 \text{ 일 때, } (-1)^{10}=a_0 \quad a_0=1$$

$$x=0 \text{ 일 때 } 2^{10}=a_{20}+a_{19}+a_{18}+\dots+a_1+a_0 \quad \text{㉞}$$

$$x=-2 \text{ 일 때, } (-2)^{10}=a_{20}-a_{19}+a_{18}-\dots-a_1+a_0 \quad \text{㉟}$$

$$\text{㉞}+\text{㉟} \text{ 는 } 2 \cdot 2^{10}=2(a_{20}+a_{18}+\dots+a_2+a_0)$$

$$a_{20}+a_{18}+\dots+a_2+a_0=2^{10}$$

$$\text{따라서 } a_2+a_4+a_6+\dots+a_{18}+a_{20}=2^{10}-a_0=1023$$

95. ④

$$(x^2-2x-1)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_{10}x^{10}$$

$$\neg. x=0 \text{ 을 대입하면 } a_0=-1 \text{ (참)}$$

$$\neg. (x^2-2x-1)^5$$

$$=(x^2-2x-1)(x^2-2x-1)(x^2-2x-1)(x^2-2x-1)(x^2-2x-1)$$

$$x \text{ 의 계수는 } 5 \times (-2) \times (-1)^4 = -10 \text{ (거짓)}$$

ㄷ. $x=1$ 을 대입하면

$$a_0+a_1+a_2+\dots+a_{10}=-32 \quad \dots \text{ ㉠}$$

 $x=-1$ 을 대입하면

$$a_0-a_1+a_2-\dots+a_{10}=32 \quad \dots \text{ ㉡}$$

㉠-㉡하면

$$2(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)=-64$$

$$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=-32 \text{ (참)}$$

96. ①

$$(1+x-2x^2)^{10}=a_{20}x^{20}+a_{19}x^{19}+a_{18}x^{18}+\dots+a_1x+a_0 \text{ 에서}$$

$$x=1 \text{ 을 대입하면 } (1+1-2)^9=a_0+a_1+a_2+\dots+a_{20}$$

$$a_0+a_1+a_2+\dots+a_{20}=0 \quad \dots \text{ ㉠}$$

$$x=-1 \text{ 을 대입하면 } (1-1-2)^{10}=a_0-a_1+a_2-a_3+\dots+a_{20}$$

$$a_0-a_1+a_2-a_3+\dots+a_{20}=1024 \quad \dots \text{ ㉡}$$

$$\text{㉠}-\text{㉡} \text{ 하면 } 2(a_1+a_3+a_5+\dots+a_{19})=-2^{10}$$

$$\therefore a_1+a_3+a_5+\dots+a_{19}=-2^9$$

97. ④

$$\{(1-x)+(1-x)^2+(1-x)^3\}^4$$

$$=(-x^3+4x^2-6x+3)^4 \text{ 에서 일차항의 계수는}$$

$$\Rightarrow (-6x+3)^4=(36x^2-36x+9)^2 \text{ 에서}$$

$$=(-6x+3)^4=(36x^2-36x+9)^2$$

$$\Rightarrow (-36x+9)^2 \rightarrow -648$$

98. ①

$$\text{등식 } (x^2+3x+1)^7 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{13}x^{13} + a_{14}x^{14} \text{이}$$

x 값에 관계없이 항상 성립할 때,

$$\frac{1}{9}(a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + a_9 - a_{11} + a_{13}) \text{의 값}$$

$$x=0 \text{을 대입하면 } 0 = a_0$$

$$x=i \text{을 대입하면 } (3i)^7 = a_0 + a_1i - a_2 - a_3i + \dots + a_{13}i - a_{14} \dots \text{ ①}$$

$$(a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + a_8 - a_{10} + a_{12}) +$$

$$(a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + a_9 - a_{11} + a_{13})i = (3i)^7$$

복소수 상등에 의하여

$$\text{실수부 } (a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + a_8 - a_{10} + a_{12}) = 0$$

$$\text{허수부 } (a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + a_9 - a_{11} + a_{13})i = -3^7i$$

$$\frac{1}{9}(a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + a_9 - a_{11} + a_{13}) = \frac{1}{9} \times (-3^7) = -3^5$$

99. ①

$$x^6(2x-1)^6 \text{이므로 } a_0 = \dots = a_5 = 0,$$

주어진 식에 $x=1$ 을 대입한 식에서 $x=-1$ 을 대입한 식을 더하면,

$$2(a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12}) = 1^6 + 3^6 = 730$$

$$a_6 = 1 \text{이므로 } a_8 + a_{10} + a_{12} = 364$$

100. ③

[풀이]

ㄱ. 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 3^6 \text{ (참)}$$

ㄴ. 양변에 $x = -\frac{1}{2}$ 을 대입하면

$$a_0 - \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} - \frac{a_3}{8} + \frac{a_4}{16} - \frac{a_5}{32} + \frac{a_6}{64} = 0 \quad \dots \text{ ㉠}$$

양변에 2를 곱하면

$$2a_0 - a_1 + \frac{a_2}{2} - \frac{a_3}{4} + \frac{a_4}{8} - \frac{a_5}{16} + \frac{a_6}{32} = 0 \quad \text{(참)}$$

ㄷ. 양변에 $x = \frac{1}{2}$ 을 대입하면

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \frac{a_3}{8} + \frac{a_4}{16} + \frac{a_5}{32} + \frac{a_6}{64} = 64 \quad \dots \text{ ㉡}$$

㉡-㉠을 하면

$$a_1 + \frac{a_3}{4} + \frac{a_5}{16} = 64, \quad \frac{a_1}{4} + \frac{a_3}{16} + \frac{a_5}{64} = 16 \text{ (거짓)}$$

101. ⑤

$$a(x-1)(x-2)(x-3) + b(x-1)(x-2) + c(x-1) + d$$

$$= x^3 + 4x^2 - 6x - 2 \text{ 이고,}$$

$$x=1 \text{을 대입해서 계산하면 } d=-3$$

$$x=2 \text{을 대입하면 } c=13$$

$$x=3 \text{을 대입하면 } b=10$$

a 는 최고차항이므로 $a=1$ 이 된다.

$$ab - cd = 49$$

102. ⑤

[풀이]

$$(3x-2)^3 = ax(x-1)(x-2) + b(x-1)(x-2) + c(x-2) + d$$

$$x=2 \text{를 대입 } d=64$$

$$x=1 \text{를 대입 } -c+d=1 \text{에서 } -c+64=1, \quad c=63$$

$$(3x-2)^3 = ax(x-1)(x-2) + b(x-1)(x-2) + 63(x-2) + 64$$

$$x=0 \text{을 대입 } -8=2b-126+64 \text{에서 } b=27$$

좌변에서 최고차항의 계수는 27이고, 우변에서 최고차항의 계수는 a 이므로 $a=27$

$$2a - b + c - d = 26$$

103. ②

$$x=-4 \text{를 대입하면}$$

$$0 = -4(16 - 4k - 22) + 8$$

$$\text{그러므로 } k=-2$$

$$f(k) = f(-2) \text{이므로 } x=-2 \text{를 대입하면}$$

$$2f(-2) = -2(4 + 4 - 22) + 8$$

$$\text{그러므로 } f(-2) = 18$$

104. (1) 7 (2) 2

$$(1) \quad x^3 - ax + 6 = (x-2)(x+b)(x+c) \text{가 항등식이므로}$$

$$x=2 \text{를 대입하면}$$

$$2^3 - a \times 2 + 6 = (2-2)(2+b)(2+c)$$

$$8 - 2a + 6 = 0$$

$$2a = 14$$

$$\text{그러므로 } a=7$$

$$(2) \quad x^3 - 7x + 6 \text{에서 } (x-2) \text{를 인수로 가지므로}$$

조립제법을 이용하면

2	1	0	-7	6
		2	4	-6
	1	2	-3	0

$$x^3 - 7x + 6 = (x-2)(x^2 + 2x - 3)$$

$$\text{그러므로 } (x+b)(x+c) = x^2 + 2x - 3$$

$$x^2 + (b+c)x + bc = x^2 + 2x - 3$$

계수비교하면

$$b+c=2 \text{이다.}$$

105. ②

양변에 $x=2$ 대입하면, $2a+b=0$ 이므로 $b=-2a$ 이다.

$$x^4 - 2x^3 + ax + b = x^4 - 2x^3 + ax - 2a = (x-2)(x^3 + a)$$

$$(x-2)(x^2+x+1)P(x) = (x-2)(x^3+a) \text{ 양변을 } x-2 \text{로 나누면}$$

$$(x^2+x+1)P(x) = x^3+a \text{ 이므로 } P(x) \text{은 } x \text{의 계수가 1인}$$

일차식이며, $P(x) = x - 1$, $a = -1$ 이고, $b = 2$ 이다.

$$\therefore P(2) + a + b = 1 - 1 + 2 = 2$$

106. ③

$$\{P(x) + 7\}^2 = (x + 2a)(x + 4a) + 9 \text{에서}$$

$$\{P(x) + 7\}^2 = x^2 + 6ax + 8a^2 + 9$$

이때 $x^2 + 6ax + 8a^2 + 9$ 가 완전제곱식이어야 하므로
이차방정식

$$x^2 + 6ax + 8a^2 + 9 = 0 \text{의 판별식을 } D \text{라 하면}$$

$$D = (3a)^2 - 8a^2 - 9 = 0$$

$$a^2 - 9 = 0, (a + 3)(a - 3) = 0$$

$$\therefore a = 3 \text{ 또는 } a = -3$$

(i) $a = 3$ 일 때,

$$\{P(x) + 7\}^2 = x^2 + 18x + 81$$

$$\{P(x) + 7\}^2 = (x + 9)^2$$

$$P(x) + 7 = \pm(x + 9)$$

$$\therefore P(x) = x + 2 \text{ 또는 } P(x) = -x - 16$$

$$\therefore P(2) = 4 \text{ 또는 } P(2) = -18$$

(ii) $a = -3$ 일 때,

$$\{P(x) + 7\}^2 = x^2 - 18x + 81$$

$$\{P(x) + 7\}^2 = (x - 9)^2$$

$$P(x) + 7 = \pm(x - 9)$$

$$\therefore P(x) = x - 16 \text{ 또는 } P(x) = -x + 2$$

$$\therefore P(2) = -14 \text{ 또는 } P(2) = 0$$

따라서 모든 $P(2)$ 의 값의 합은 $4 + (-18) + (-14) + 0 = -28$

107. ②

$$(가) P(1) - Q(1) = 0$$

$$(나) P(-2) - Q(-2) = P(4) - Q(4) = k \text{라 하면}$$

$$P(x) - Q(x) = 2(x + 2)(x - 4) + k \text{이다.}$$

$x = 1$ 대입하면

$$P(1) - Q(1) = -18 + k = 0, k = 18$$

$Q(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 일차식이므로 $Q(x) = x + b$ 라 하자.

$$P(x) = 2(x + 2)(x - 4) + 18 + x + b$$

문제에서 $P(x) + Q(x)$ 가 $x - 3$ 으로 나누어 떨어지므로

$$P(3) + Q(3) = 0 \text{이다.}$$

$$-10 + 18 + 3 + b + 3 + b = 14 + 2b = 0, b = -7$$

$$\text{즉, } Q(x) = x - 7, P(x) = 2(x + 2)(x - 4) + 18 + x - 7$$

$$\text{따라서 } P(3) = 2 \times 5 \times (-1) + 18 + 3 - 7 = 4$$

108. ③

$$(가) P(x + 1) - Q(x + 1) = (x + 1)L(x) \text{ (} L(x) \text{는 1차)}$$

$$(나) P(x) + Q(x) = 0$$

$$P(x) = x^2 + ax + b, Q(x) = x + c \text{라고 하자.}$$

$$(가) (x + 1)^2 + a(x + 1) + b - \{(x + 1) + c\}$$

$$= (x + 1)^2 + (a - 1)(x + 1) + (b - c) \text{이 } (x + 1) \text{으로 묶여야 하므로}$$

$$b - c = 0 \Rightarrow b = c \dots ①$$

$$(나) P(x) + Q(x) = x^2 + ax + b + x + b = 0$$

$$= x^2 + (a + 1)x + 2b = 0$$

$$\text{중근을 가지려면 } D = 0$$

$$(a + 1)^2 - 8b = 0 \dots ②$$

$$P(x) - Q(x) = (x - 2)L_2(x) + 8$$

$$P(2) - Q(2) = 8$$

$$(4 + 2a + b) - (2 + c) = 8 \dots ③$$

$$a = 3, b = 2 = c$$

$$\therefore P(2) = 4 + 2a + b = 12$$

[다른풀이]

(가) $P(x + 1) - Q(x + 1) = (x + 1)L(x)$ 에서 $x \rightarrow x - 1$ 을 대입하면

$$P(x) - Q(x) = x(x + a) \text{로 생각할 수 있다.}$$

(단, $L(x)$ 는 일차항의 계수가 1차인 일차식으로 $x - 1$ 을 대입한 것도 간단한 일차식으로 표현가능)

이때 마지막 문제 조건을 통해 $P(2) - Q(2) = 8$ 이므로

$$2(2 + a) = 8, a = 2, P(x) - Q(x) = x^2 + 2x \text{ 이때, } Q(x) = x + b \text{로 가정하고 양변에 } 2Q(x) \text{를 더하면}$$

$$(나) P(x) + Q(x) = x^2 + 4x + 2b \text{가 중근을 갖아야하므로 } b = 2$$

$$\text{따라서 } P(x) = Q(x) + x^2 + 2x = x^2 + 3x + 2$$

$$P(2) = 12$$

109. ②

$$(x - a)(x - 3a) + 4 = x^2 - 4ax + 3a^2 + 4 \text{가 완전제곱식이므로}$$

$$\text{판별식 } 4a^2 - (3a^2 + 4) = a^2 - 4 = 0, a = 2, -2 \text{이다.}$$

(i) $a = 2$ 일 때

$$\{P(x) + 3\}^2 = x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$$

$$P(x) + 3 = \pm(x - 4),$$

$$P(x) = x - 7 \text{ 또는 } -x + 1 \text{이므로 } P(1) = -6 \text{ 또는 } 0$$

(ii) $a = -2$ 일 때

$$\{P(x) + 3\}^2 = x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$$

$$P(x) + 3 = \pm(x + 4)$$

$$P(x) = x + 1 \text{ 또는 } -x - 7 \text{이므로 } P(1) = 2 \text{ 또는 } -8$$

$$\text{따라서 } -6 + 0 + 2 - 8 = -12$$

110. ①

$$P(x)Q(x) = (x^2 - 2x + 2)(x - 2)H(x), H(x) \text{는 일차식}$$

$$(나) \text{에서 } 2x^3 + x^2 - 42x + 73 - P(x) = \{Q(x)\}^2$$

$$\{Q(x)\}^2 \text{은 이차식이므로 } P(x) = 2x^3 + \sim \text{이다.}$$

$$(i) P(x) = 2(x^2 - 2x + 2)(x - 2) \text{일 때,}$$

$$(나) 2x^3 + x^2 - 42x + 73 - 2(x^2 - 2x + 2)(x - 2)$$

$$= (3x - 9)^2 = \{Q(x)\}^2$$

$$Q(x) = 3x - 9, qx = -(3x - 9)$$

$Q(1) > Q(2)$ 이므로 $Q(x)$ 는 감소함수이다.

$$\text{즉, } Q(x) = -(3x-9) = -3x+9$$

$$\text{따라서 } P(1)+Q(2)=1$$

$$(ii) P(x)=2(x^2-2x+2)(x-b), Q(x)=a(x-2)\text{일 때,}$$

$$(나) 2x^3+x^2-42x+73=2(x^2-2x+2)(x-b)=\{a(x-2)\}^2$$

계수를 비교하면 만족하는 a, b 는 존재하지 않는다.

111. ①

$$f(x)[\{f(x)\}^2-4x^2]=8x^2-6x+1$$

$$\{f(x)+2x\}f(x)\{f(x)-2x\}=(4x-1)(2x-1)$$

$$=(-2x+1)(-4x+1)$$

$f(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수이고,

세 다항식 $f(x)$, $f(x)+2x$, $f(x)-2x$ 중 하나는 상수이므로

$$f(x)=-2x+1$$

ㄱ. (O)

$$f(-1)=3$$

ㄴ. (X)

$f(x)$ 의 최고차항의 계수는 -2 이다.

ㄷ. (X)

$$(-2x+1)^3=(x^2-x-2)Q(x)+ax+b$$

$$x=-1\text{을 대입하면 } -a+b=27$$

$$x=2\text{를 대입하면 } 2a+b=-27$$

$$a=-18, b=9$$

$$\text{나머지 } ax+b=-18x+9$$

112. ①

$f(x)$ 를 n 차식이라 하면

$$\{f(x)\}^3\text{은 } 3n\text{차식, } 4x^2f(x)\text{는 } n+2\text{차식이므로 } 3n=n+2$$

$$n=1$$

$$f(x)=ax+b \quad (a>0)\text{이라 하면}$$

$$\{f(x)\}^3=4x^2f(x)+8x^2+6x+1$$

$$a^3x^3+3a^2bx^2+3ab^2x+b^3=4ax^3+(4b+8)x^2+6x+1$$

$$a^3=4a, 3a^2b=4b+8, 3ab^2=6, b^3=1\text{을 풀면}$$

$$a>0\text{이므로 } a=2, b=1$$

$$f(x)=2x+1$$

$\{f(x)\}^3$ 을 x^2-1 로 나눈 나머지가 $px+q$ 이므로

$$(2x+1)^3=(x-1)(x+1)Q(x)+px+q$$

$$x=1\text{대입 } p+q=27 \quad \dots \text{①}$$

$$x=-1\text{대입 } -p+q=-1 \quad \dots \text{②}$$

$$\text{①, ②를 연립하여 풀면 } p=14, q=13$$

$$\therefore p+2q=14+26=40$$

$$113. 2x^2-3x+1$$

$$\text{조건 (가)에서 } x=-2\text{일 때 } 0=-5g(-2)$$

$$\text{이므로 } g(-2)=0$$

$$x=3\text{일 때 } 5f(3)=0\text{에서 } f(3)=0$$

즉, 다항식 $f(x)$, $g(x)$ 는 각각 $x-3$, $x+2$ 를 인수로 갖는다.

이때, $f(x)$, $g(x)$ 는 x^2 의 계수가 1인 이차식이므로

$$f(x)=(x-3)(x+a), g(x)=(x+2)(x+b) \quad (a, b\text{는 상수})$$

로 놓을 수 있다.

$$\text{조건 (나)에서 } f(x)g(x)=x^4-3x^3-3x^2+11x-6\text{이고,}$$

$$f(x)g(x)\text{ 또한 } x-3, x+2\text{를 인수로 가지므로 우변을}$$

조립제법을

이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 3 & 1 & -3 & -3 & 11 & -6 \\ & & 3 & 0 & -9 & 6 \\ \hline -2 & 1 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ & & -2 & 4 & -2 & \\ \hline & 1 & -2 & 1 & 0 & \end{array}$$

$$\text{즉, } f(x)g(x)=(x-3)(x+2)(x^2-2x+1)$$

$$=(x-3)(x+2)(x-1)^2$$

따라서

$$f(x)=(x-3)(x-1)=x^2-4x+3,$$

$$g(x)=(x+2)(x-1)=x^2+x-2$$

$$\text{이므로 } f(x)+g(x)=2x^2-3x+1$$

114. ④

$$16f(x)\times f(y)=\{f(x+y)-f(x-y)\}^2\text{에서}$$

$$x=0, y=0\text{일 때, } 16\times\{f(0)\}^2=0$$

$$\therefore f(0)=0$$

$$x=1, y=1\text{일 때, } 16\times\{f(1)\}^2=\{f(2)-f(0)\}^2\text{에서}$$

$$16\times 4=\{f(2)\}^2, \{f(2)\}^2=64$$

$$f(x)\geq 0\text{이므로 } f(2)=8$$

$$x=2, y=1\text{일 때, } 16\times f(2)\times f(1)=\{f(3)-f(1)\}^2\text{에서}$$

$$16\times 8\times 2=\{f(3)-2\}^2, \{f(3)-2\}^2=16^2$$

$$f(3)-2\geq -2\text{이므로 } f(3)-2=16$$

$$\therefore f(3)=18$$

$$x=3, y=2\text{일 때, } 16\times f(3)\times f(2)=\{f(5)-f(1)\}^2\text{에서}$$

$$16\times 18\times 8=\{f(5)-2\}^2, \{f(5)-2\}^2=48^2$$

$$f(5)-2\geq -2\text{이므로 } f(5)-2=48$$

$$\therefore f(5)=50$$

115. ③

[풀이]

$$2x^3+3x^2+2x-4=(2x-1)Q(x)+R\text{에서}$$

$$\text{나머지 정리에 의해 } x=\frac{1}{2}\text{을 대입하면}$$

$$R=-2$$

$$2x^3+3x^2+2x-4=(2x-1)Q(x)-2$$

$$\text{위의 식에 } x=1\text{을 대입하면}$$

$$2+3+3-4=(2-1)Q(1)-2$$

$$\text{따라서 } Q(1)=5$$

$$\therefore Q(1)+R=3$$

116. ②

[풀이]

$$x^{2023} + x^9 + 19 = (x^4 - 1)Q(x) + R(x) \quad (\text{단 } R(x) \text{는 } 3\text{차이하의}$$

다항식) 에서 $x^4 = 1$ 을 대입하면

$$x^3 + x + 19 = R(x)$$

$$x^{2023} + x^9 + 19 = (x^4 - 1)Q(x) + x^3 + x + 19$$

$$(x^4 - 1)Q(x) = x^3((x^4)^{505} - 1) + x(x^8 - 1)$$

$$(x^4 - 1)Q(x) = x^3(x^4 - 1)((x^4)^{504} + (x^4)^{503} + \dots + 1) + x(x^4 - 1)(x^4 + 1)$$

$x^4 - 1$ 로 양변을 나누면

$$Q(x) = x^3((x^4)^{504} + (x^4)^{503} + \dots + 1) + x(x^4 + 1)$$

$x = 1$ 을 대입하면

$$Q(1) = 505 + 2 = 507$$

$$x^3 + x + 19 = R(x)$$

$$R(2) = 29$$

117. ①

$$\begin{array}{c|ccc} \frac{1}{3} & 3 & 0 & -1 & 1 \\ & & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} \\ \hline & 3 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{7}{9} \end{array}$$

이므로

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(3x^2 + x - \frac{2}{3}\right) + \frac{7}{9} = (3x - 1)\left(x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}\right) + \frac{7}{9} \text{ 이다.}$$

$$\text{즉, } Q(x) = x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}, \quad R = \frac{7}{9}$$

$$Q(-2) = 4 - \frac{2}{3} - \frac{2}{9} = \frac{28}{9}, \quad R = \frac{7}{9}$$

$$\therefore \frac{28}{9} - \frac{7}{9} = \frac{7}{3}$$

118. ⑤

[풀이]

$$f(x) = (x^2 + 1)(2x + 1) - 2x + 4$$

$$= 2x^3 + x^2 + 5$$

$$\begin{array}{r} 2x+3 \\ x^2-x+1 \overline{) 2x^3+x^2+0x+5} \\ \underline{2x^3-2x^2+2x} \\ 3x^2-2x+5 \\ \underline{3x^2-3x+3} \\ x+2 \end{array}$$

따라서 구하는 나머지는 $R(x) = x + 2$ 이므로 $R(3) = 5$

119. ①

[풀이] 다항식 $f(x)$ 를 다항식 $g(x)$ 로 나눈 몫과 나머지는

모두 $g(x) - 2x^2$ 이므로

$$f(x) = g(x)\{g(x) - 2x^2\} + g(x) - 2x^2$$

$$= \{g(x) + 1\}\{g(x) - 2x^2\}$$

$g(x)$ 는 계수가 2인 2차식이므로 $g(x) = 2x^2 + ax + b$ 라 하면

$f(x) = (2x^2 + ax + b + 1)(ax + b)$ 에서 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 2이므로 $\therefore a = 1$ 이다.

$$f(x) = (2x^2 + x + b + 1)(x + b)$$

$$f(-1) = (2 + b)(-1 + b) = -\frac{9}{4}$$

$$b^2 + b - 2 = -\frac{9}{4}$$

$$4b^2 + 4b + 1 = 0 \text{ 이므로 } b = -\frac{1}{2} \text{ 이다.}$$

$$f(x) = (2x^2 + x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) \text{ 이고,}$$

$$f(x) = (2x^2 + x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})$$

$f(x)$ 를 $2x + 1$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라 하면

$$f(-\frac{1}{2}) = R \text{ 이므로 } R = -\frac{1}{2} \text{ 이고}$$

$$f(x) = (2x + 1)Q(x) - \frac{1}{2} \text{ 에서}$$

$$f(1) = 3 \times Q(1) - \frac{1}{2} = (3 + \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{2}) \text{ 이므로}$$

$$\therefore Q(1) = \frac{3}{4} \text{ 이다. } Q(1) + R = \frac{1}{4}$$

120. ⑤

다항식 $P(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ 을 $2x - 1$ 로 나누었을 때의 나머지는

$P(x) = (2x - 1)Q(x) + R$ 에서 나머지 정리에 의하여

$$R = P(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} - 2 \times \frac{1}{4} + 1$$

$$R = \frac{5}{8}$$

121. ①

$f(x) + g(x)$ 가 $(x + 1)$ 로 나누어 떨어지므로

$$f(-1) + g(-1) = 0$$

$f(x) - g(x)$ 가 $(x + 1)$ 로 나누면 나머지가 4이므로

$$f(-1) - g(-1) = 4 \text{ 이다.}$$

두 식을 연립하면 $f(-1) = 2, g(-1) = -2$ 이다.

ㄱ. $f(-1) - 2 = 0$ 이므로 나눠떨어진다.

ㄴ. $g(-1) - 2 = -4 \neq 0$ 이므로 나누어 떨어지지 않는다.

ㄷ. $f(-1)g(-1) - 4 \neq 0$ 이므로 나누어 떨어지지 않는다.

ㄱ만 참이다.

122. ②

(가) 다항식 $P(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는 4이다.조건 (나)에서 실수 p 에 대하여 이차방정식 $P(x)=0$ 의 한 근은 $p+2i$ 이고 $P(x)=x^2+ax+b$ (단, a, b 는 실수)이므로다른 한 근은 $p-2i$ 이다.

근과 계수와의 관계에 의하여

$$(p+2i)+(p-2i)=-a$$

$$(p+2i)(p-2i)=b$$

$$\therefore a=-2p, b=p^2+4$$

$$\text{그러므로 } P(x)=x^2-2px+p^2+4$$

조건 (가)에서 $P(2)=4$ 이므로

$$4=2^2-2\times 2p+p^2+4$$

$$(p-2)^2=0$$

따라서 $p=2$ 이다.

$$\text{그러므로 } a=-4, b=8$$

따라서 $a+b=-4+8=4$ 이다.

123. ①

$$P(x)=(x-k)Q(x)+R_1$$

$$P(x)=(x+k)Q(x)+R_2$$

$$R_1=k^3+k^2+k+1, R_2=-k^3+k^2-k+1$$

$$R_1+R_2=2k^2+2=12$$

$$k^2=5$$

$$P(x)=(x-k^2)Q(x)+R$$

$$P(k^2)=k^6+k^4+k^2+1=R$$

$$R=k^6+k^4+k^2+1=5^3+5^2+5+1=156$$

124. ③

$$P(x)=x^3+x^2+1 \text{ 에서}$$

$$P(a)=R_1, P(-a)=R_2 \text{ 이고}$$

$$R_1+R_2=10 \text{ 에서 } a^3+a^2+1-a^3+a^2+1=10 \text{ 이다. 즉}$$

$$a^2=4 \text{ 이므로 } P(x) \text{ 를 } (x-a^2) \text{ 으로 나누었다는 것은 } P(4) \text{ 를}$$

$$\text{구하라는 의미는 } 4^3+4^2+1=81$$

125. ⑤

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 5x + 6 \\ x^2 - 2 \overline{) 3x^4 + 5x^3 + 4x - 3} \\ \underline{3x^4} - 6x^2 - 3 \\ 5x^3 + 6x^2 + 4x - 3 \\ \underline{5x^3} - 10x \\ 6x^2 + 14x - 3 \\ \underline{6x^2} - 12 \\ 14x + 9 \end{array}$$

$$R(x)=14x+9$$

$$\therefore R(1)=23$$

[다른 풀이]

$$3x^4+5x^3+4x-3=(x^2-2)Q(x)+ax+b \text{ 라 하면}$$

$$x^2=2 \text{ 를 대입하면 } 12+10x+4x-3=ax+b$$

$$\therefore a=14, b=9$$

$$R(x)=14x+9$$

$$\therefore R(1)=23$$

126. ②

$$P(x) \text{ 를 } x^2-x \text{ 로 나누었을 때의 몫이 } x^2-3x-5$$

이고, 나머지가 $ax+b$ 이므로

$$P(x)=(x^2-x)(x^2-3x-5)+ax+b$$

 $P(x)$ 가 $x+1$ 를 인수로 가지므로

$$P(-1)=(1+1)(1+3-5)-a+b=0$$

$$\therefore a-b=-2$$

127. ③

$$x^3-ax^2+(b+1)x+b^2+2=(x-a)^2Q(X)+(x+2) \text{ 이고}$$

 $x=a$ 를 대입하여 식을 정리하면

$$b(a+b)=0 \text{ 이다. 따라서 } b=0 \text{ 또는 } b=-a \text{ 이다.}$$

i) $b=0$ 일 때,

$$x^3-ax^2+x+2=(x-a)^2Q(X)+(x+2)$$

$$x^3-ax^2=(x^2-2ax+a^2)(x+k)$$

$$x^3-ax^2=x^3+(k-2a)x^2+(a^2-2ak)x+ka^2$$

$$-a=k-2a, a^2-2ak=0, ka^2=0$$

$$\therefore a=k=0$$

ii) $b=-a$ 인 경우

$$x^3-ax^2+(-a+1)x+a^2+2=(x-a)^2Q(X)+(x+2)$$

$$x^3-ax^2-ax+a^2=(x-a)^2(x+k)$$

$$x^3-ax^2-ax+a^2=(x^2-2ax+a^2)(x+k)$$

$$= \{x^3+(k-2a)x^2+(a^2-2ak)x+ka^2\}$$

$$-a=k-2a, a^2-2ak=-a, ka^2=a^2$$

$$a=-b, a=1, b=-1$$

$$\therefore b-a=-2$$

128. ④

$$x^{11}(x^2-ax+b) \text{ 을 } (x+2)^2 \text{ 을 나누었을 때의 몫을 } Q(x) \text{ 라 하면}$$

나머지가 $2^{11}(x+2)$ 이므로

$$x^{11}(x^2-ax+b)=(x+2)^2Q(x)+2^{11}(x+2) \quad \text{..... ㉠}$$

 $x=-2$ 일 때,

$$(-2)^{11}(4+2a+b)=0 \text{ 에서 } 4+2a+b=0$$

$$\therefore b=-2a-4 \quad \text{..... ㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$x^{11}\{x^2-ax-2(a+2)\}=(x+2)^2Q(x)+2^{11}(x+2)$$

$$\text{에서 } x^{11}(x+2)\{x-(a+2)\}=(x+2)^2Q(x)+2^{11}(x+2)$$

$$= (x+2)\{(x+2)Q(x)+2^{11}\}$$

따라서 $x^{11}\{x-(a+2)\}=(x+2)Q(x)+2^{11}$ 에서

$$x=-2 \text{ 일 때, } (-2)^{11}(-a-4)=2^{11}$$

$$-a-4=-1 \therefore a=-3$$

$$\textcircled{C} \text{에 } a=-3 \text{ 을 대입하면 } b=-2 \times (-3)-4=2$$

$$\therefore 2a+b=2 \times (-3)+2=-4$$

129. ②

$f(x)$ 를 $x+2$ 로 나눈 나머지와 x^2-6 으로 나눈 나머지가 서로 같으므로 $f(x)$ 를 $f(x)=(x+2)(x^2-6)(x+a)+b$ 로 놓을 수 있다.

$f(x+2)-3$ 이 $x^2+2x=x(x+2)$ 로 나누어 떨어진다고 하였으므로

(1) $x=0$ 을 대입

$$f(2)=3, 4 \times (-2)(a+2)+b=3 \therefore -8a+b=19$$

(2) $x=-2$ 를 대입

$$f(0)=3, 2 \times (-6) \times a+b=3 \therefore -12a+b=3$$

(1), (2)를 연립하면 $a=4, b=51$ 이 되고,

$$f(x)=(x+2)(x^2-6)(x+4)+51 \text{ 이 됨을 알 수 있다.}$$

$$\text{따라서 } f(1)=3 \times (-5) \times 5+51=-75+51=-24$$

130. -1

$$\text{조건 (가)에 의하여 } f(x)+g(x)=(x^2-4)Q(x) \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\text{조건 (나)에 의하여 } f(x)+3g(x)-6=4(x-1)(x-3) \dots\dots \textcircled{B}$$

($\because f(x), g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1이다. 따라서

$f(x)+3g(x)$ 의 최고차항의 계수는 4이다.)

$$f(x)g(x)=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)\}A(x)+R(x) \text{ 이므로 } (A(x) \text{는 몫}) \dots\dots$$

⑥

$$=\frac{1}{2}(x^2-4)Q(x)A(x)+R(x)$$

$$=\frac{1}{2}(x-2)(x+2)Q'(x)+R(x) \text{ 라 하면 } \dots\dots \textcircled{C}$$

$$\textcircled{A} \text{에 } x=2 \text{ 를 대입하면 } f(2)+g(2)=0$$

$$\textcircled{B} \text{에 } x=2 \text{ 를 대입하면 } f(2)+3g(2)-6=-4, f(2)+3g(2)=2$$

두 식을 연립하면 $f(2)=-1, g(2)=1$ 이다.

$$\text{따라서 } \textcircled{C} \text{에 } x=2 \text{ 를 대입하면 } f(2)g(2)=R(2)$$

$$R(2)=-1$$

131. ⑤

$$g(x)=a(x-3)(x+1)(x+5)+3$$

$$f(2)=g(2)=45 \text{ 이므로 } a=-2$$

$$g(x)=-2(x-3)(x+1)(x+5)+3 \quad g(1)=51$$

132. ②

$f(x)$ 를 $(x-3)(x-4)(x-5)$ 로 나눈 나머지가 $g(x)$, 몫을

$Q(x)$ 라 하면 $f(x)=(x-3)(x-4)(x-5)Q(x)+g(x)$ 이고,
 $f(3)=g(3), f(4)=g(4), f(5)=g(5)$ 이다.

$$\text{또, } g(5)=15 \text{ 이므로 } f(5)=15$$

모든 실수 x 에 대하여 $f(4+x)+f(4-x)=20$ 이므로

$$x=1 \text{ 을 대입하면 } f(5)+f(3)=20 \text{ 이므로 } f(3)=g(3)=5$$

$$x=0 \text{ 을 대입하면 } f(4)+f(4)=20 \text{ 이므로 } f(4)=g(4)=10$$

$$g(3)=5, g(4)=10, g(5)=15 \text{ 이고, } g(x+2)=5x \text{ 이므로}$$

$$g(6)=20 \text{ 이다.}$$

133. ②

조건 (가)에서 최고차항의 계수가 1인 사차다항식

$f(x)$ 를 $x+2$ 로 나눈 나머지와 $f(x)$ 를 x^2-5 로 나눈 나머지가 R 로 같아야 하므로 $f(x)=(x+2)(x^2-5)(x+a)+R \dots\dots \textcircled{A}$

$$f(x+1)-5 \text{ 는 } x^2+2x \text{ 로 나누어 떨어지므로}$$

$$x=0 \text{ 을 대입하면 } f(1)=5$$

$$x=-2 \text{ 를 대입하면 } f(-1)=5$$

$$\textcircled{A} \text{에 대입하면 } f(1)=3 \times (-4) \times (1+a)+R=5$$

$$f(-1)=(-4) \times (a-1)+R$$

$$\text{두 식을 연립하면 } a=-2, R=-7$$

$$\text{따라서 } f(3)=5 \times 4 \times 1+(-7)=13$$

134. ④

$P(x)-4$ 는 $(x-1)^2$ 으로 나누어떨어지고, 삼차다항식이므로

$$P(x)=(x-1)^2(ax+b)+4 \text{ 이다.}$$

$-2x+2-P(x)$ 가 x^2-x-2 로 나누었을 때 몫을 A 라 하면,

$$-2x+2-P(x)=(x+1)(x-2)A \text{ 이므로}$$

$$P(2)=-2, P(-1)=4 \text{ 이다.}$$

위 식에 대입하면 $2a+b=-6, a=b$ 이고 연립하면 $a=-2, b=-2$ 이다.

$$\text{따라서 } P(x)=(x-1)^2(-2x-2)+4 \text{ 이므로 } P(0)=2 \text{ 이다.}$$

135. ①

$$\textcircled{1} f(x)+7=(x-2)^2Q(x)$$

$$\textcircled{2} 2-f(x)=(x^2-1)Q'(x)$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } f(2)+7=0 \Rightarrow f(2)=-7$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } f(1)=f(-1)=2$$

$$f(x)+7=(x-2)^2(ax+b) (\because f(x) \text{가 삼차식})$$

$$f(x)=(x-2)^2(ax+b)-7$$

$$1) f(1)=2$$

$$(a+b)=9$$

$$2) f(-1)=2$$

$$9(-a+b)-7=2$$

$$-a+b=1$$

$$\therefore a=4, b=5$$

$$f(x)=(x+2)Q_3(x)+R$$

$$R=f(-2)=-55$$

136. ④

$$P(x) + 30 = (x-4)^2(ax+b) \text{ 이고}$$

$$6 - P(x) = (x^2 - 4)(cx+d) \text{ 이다 여기서}$$

$$P(2) = 6, P(-2) = 6 \text{ 인 것을 알 수 있고.}$$

$$P(x) + 30 = (x-4)^2(ax+b) \text{ 식에 } x=2, -2 \text{ 를 대입하면}$$

$$9 = 2a+b, 1 = -2a+b \text{ 인 것을 알 수 있다.}$$

$$\text{즉 } a=2, b=5 \text{ 이고}$$

$$P(x) + 30 = (x-4)^2(2x+5) \text{ 를 계산하면 } x^2 \text{ 의 계수는}$$

$$-11 \text{ 이다.}$$

137. ④

$$P(1) = 5$$

$$P(x) = 5(x-1)(x^2+x+1)Q(x) + a(x^2+x+1) + 3x-7$$

$$P(1) = 3a-4 = 5, a=3$$

$$\text{즉 } R(x) = 3(x^2+x+1) + 3x-7 = 3x^2+6x-4$$

$$R(-1) = -7$$

138. ⑤

$P(x)$ 를 $(x-1)(x-2)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면
나머지는 $R(x)$ 이므로

$$P(x) = (x-1)(x-2)^2Q(x) + R(x)$$

$$\text{이다. } R(x) = ax^2 + bx + c \text{ 하면}$$

조건 (나)에서

$P(x)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $x+4$ 이므로

$$P(x) = (x-1)(x-2)^2Q(x) + a(x-2)^2 + x+4$$

이고 조건 (가)에서 $P(1) = 7$ 이므로

$$7 = a+1+4$$

$$\therefore a=2$$

$$\text{그러므로 } R(x) = 2(x-2)^2 + x+4$$

$$\text{따라서 } R(-1) = 2 \times (-1-2)^2 + (-1) + 4 = 21$$

139. ⑤

$f(x)$ 가 사차다항식이고, $(x+1)^3$ 으로 나눈 몫과 나머지가
같으므로

$$f(x) = (x+1)^3(ax+b) + ax+b \cdots \textcircled{1}$$

$$f(-1) = -a+b=2$$

$b=a+2$ 를 ①에 대입하면

$$f(x) = (x+1)^3(ax+a+2) + ax+ax+2$$

$$= a(x+1)^4 + 2(x+1)^3 + a(x+1) + 2$$

$$= a(x+1)^4 + 2(x^3+3x^2+3x+1) + a(x+1) + 2$$

$$= a(x+1)^4 + 2x^3 + 6x^2 + (a+6)x + a+4$$

따라서 $f(x)$ 를 $(x+1)^4$ 으로 나눈 나머지의 이차항의 계수는 6

140. ②

[풀이]

다항식 $f(x)$ 를 $(x^5+1)(x-1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$,
나머지를 $R(x)$ 라 하면

$$f(x) = (x^5+1)(x-1)Q(x) + R(x)$$

다항식 $f(x)$ 를 x^5+1 로 나누었을 때의 나머지는 x^3+1 이므로

$R(x)$ 를 x^5+1 로 나누었을 때의 나머지가 x^3+1 이다.

$R(x)$ 는 5차 이하의 다항식이므로 $R(x) = a(x^5+1) + x^3+1$ 이라
하자.

$$f(x) = (x^5+1)(x-1)Q(x) + a(x^5+1) + x^3+1$$

다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지가 -2 이므로

$$f(1) = -2, a = -2 \therefore R(x) = -2x^5 + x^3 - 1$$

따라서 $R(-2) = 55$ 이다.

141. ⑤

$$f(3) = 5$$

$$f(x) = (x+1)^2Q(x) + x-6$$

$f(x) = (x+1)^2(x-3)H(x) + ax^2 + bx + c$ 라고 할 때, 주어진

식을 다시 $(x+1)^2$ 으로 나누면 나머지가 $x-6$ 이 나와야

하므로 주어진 식을 위의 내용으로 정리하면

$$f(x) = (x+1)^2(x-3)H(x) + a(x+1)^2 + x-6$$

위의 식에 $x=3$ 을 대입하면 $a = \frac{1}{2}$

그러므로 $R(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 + x-6$ 이다.

142. ③

(가)의 조건으로 $f(1) = g(1) + 2$ 이므로 $f(1) - g(1) = 2$ 이고,

(나)의 조건으로 $f(1)g(1) = 9$ 이므로

$\{f(x)\}^4 + \{f(x)g(x)\}^2 + \{g(x)\}^4$ 을 $x-1$ 로 나누었을 때의

나머지는

$$\{f(1)\}^4 + \{f(1)g(1)\}^2 + \{g(1)\}^4$$

$$= 403$$

143. ①

$g(x) = (x+2)f(x)$ 라 하면

$$g(1) = 2, g(2) = 3, g(3) = 4 \text{ 이므로}$$

$g(x) - (x+1) = 0$ 은 $(x-1), (x-2), (x-3)$ 을 인수로 가지고

있는 사차방정식이므로,

$g(x) - (x+1) = (x-1)(x-2)(x-3)(ax+b)$ 라 할 수 있다.

$$\text{즉, } (x+2)f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(ax+b) + (x+1) \cdots \textcircled{1}$$

$x=-2$ 를 대입하면

$$0 = (-3)(-4)(-5)(-2a+b) - 1, -2a+b = -\frac{1}{60} \cdots \textcircled{2}$$

$$f(0) = \frac{3}{10} \text{ 이므로}$$

②에 $x=0$ 을 대입하면

$$2f(0) = 6b+1, \frac{3}{5} = -6b+1, b = \frac{1}{15}$$

$$\textcircled{C} \text{에서 } a = \frac{1}{24}$$

$$\therefore (x+2)f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\left(\frac{1}{24}x + \frac{1}{15}\right) + (x+1)$$

$$x=5 \text{를 대입하면 } f(5) = \frac{9}{5} \text{이다.}$$

144. 56

$$\{Q(x+2)\}^2 + \{Q(x)\}^2 = x(x-2)P(x) \dots \textcircled{A}$$

①에 $x=0$, $x=2$ 를 대입하여 정리하면

$$\{Q(2)\}^2 + \{Q(0)\}^2 = 0,$$

$$\{Q(4)\}^2 + \{Q(2)\}^2 = 0$$

$$Q(0) = Q(2) = Q(4) = 0$$

다항식 $Q(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식이므로

$$Q(x) = x(x-2)(x-4) \dots \textcircled{B}$$

①, ②에서

$$\{(x+2)x(x-2)\}^2 + \{x(x-2)(x-4)\}^2 = x(x-2)P(x)$$

$$P(x) = x(x-2)\{(x+2)^2 + (x-4)^2\}$$

$$= x(x-2)(2x^2 - 4x + 20)$$

$$= 2x(x-2)(x^2 - 2x + 10)$$

$$= 2x(x-2)\{(x-4)(x+2) + 18\}$$

$$= 2x(x-2)(x-4)(x+2) + 36x(x-2)$$

$$= 2(x+2)Q(x) + 36x(x-2)$$

$$R(x) = 36x(x-2), \quad G(x) = 2(x+2)$$

$$G(8) = 20, \quad R(3) = 108$$

$$G(8) + R(3) = 20 + 108 = 128$$

145. 1011

$x^{2023} + x + 1$ 을 $x^2 - 1$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$ 이므로 나머지를

$ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$x^{2023} + x + 1 = (x^2 - 1)Q(x) + ax + b$$

$$= (x+1)(x-1)Q(x) + ax + b$$

$$x=1 \text{일 때, } 1+1+1 = a+b \text{에서}$$

$$a+b=3 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$x=-1 \text{일 때, } -1-1+1 = -a+b \text{에서}$$

$$-a+b=-1 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A} + \textcircled{B} \text{을 하면 } 2b=2 \text{에서 } b=1$$

$$\textcircled{A} \text{에 } b=1 \text{을 대입하면 } a=2$$

따라서

$$x^{2023} + x + 1 = (x+1)(x-1)Q(x) + 2x + 1$$

$$\text{이므로 } x^{2023} - x = (x+1)(x-1)Q(x) \text{㉠}$$

$$\text{즉, } x(x^{2022} - 1) = (x+1)(x-1)Q(x) \text{에서}$$

$$x(x-1)(x^{2021} + x^{2020} + \dots + x + 1) = (x+1)(x-1)Q(x)$$

$$\therefore x(x^{2021} + x^{2020} + \dots + x + 1) = (x+1)Q(x) \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

이때, $Q(x)$ 의 모든 계수의 합은 $Q(1)$ 이므로

$$\textcircled{B} \text{에서 } x=1 \text{일 때, } 2022 = 2Q(1)$$

$$\therefore Q(1) = 1011$$

146. ④

$f(x)$ 가 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식이므로

$f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫은 일차항 계수가 1인 일차식이다.

몫을 $x+k$ 라 하면 나머지도 $x+k$ 이다. 따라서

$$f(x) = (x-1)^2(x+k) + x+k$$

$$= \{(x-1)^2 + 1\}(x+k)$$

$$f(1) = 3 \text{에서 } k=2$$

$$f(x) = \{(x-1)^2 + 1\}(x+2)$$

$f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$ 이고, 나머지가 3이므로

$$f(x) = (x-1)Q(x) + 3$$

$$f(3) = 25 \text{이므로 위의 등식에 } x=3 \text{을 대입하면}$$

$$25 = 2Q(3) + 3$$

$$\therefore Q(3) = 11$$

147. ⑤

$$x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1)$$

$$(x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x-1)^2 Q(x) + ax + b$$

$$x=1 \text{을 대입하면 } a+b=0$$

$$b=-a$$

$$(x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x-1)^2 Q(x) + a(x-1)$$

$x-1$ 로 양변을 나누면

$$(x^3 + 1)(x^2 + x + 1) = (x-1)Q(x) + a \quad \dots \textcircled{1}$$

$$x=1 \text{을 대입하면 } a=6$$

$$R(x) = 6(x-1)$$

$a=6$ 을 ①에 대입하면

$$(x-1)Q(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - 5$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \end{array}$$

$$Q(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$$

$Q(x)$ 를 $R(x)$ 로 나눈 나머지는 $Q(1)$ 이므로

$$\therefore Q(1) = 15$$

148. ⑤

조립제법을 이용하여 $Q(x)$ 를 구하면

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -1 & 1 & 0 & 0 & 2a & b \\ & & -1 & 1 & -1 & 1-2a \\ \hline -1 & 1 & -1 & 1 & 2a-1 & 1-2a+b \\ & & -1 & 2 & -3 & \\ \hline & 1 & -2 & 3 & 2a-4 & \end{array}$$

$$x^4 + 2ax + b = (x+1)^2(x^2 - 2x + 3) \text{이다.}$$

$$2a-4=0, 1-2a+b=0, Q(x)=x^2-2x+3$$

$$a=2, b=3, Q(2)=3$$

$$\therefore a+b+Q(2)=8$$

<다른풀이>

$$x^4+2ax+b=(x^2+2x+1)(x^2+px+q)$$

$x^4+2ax+b$ 의 삼차항 계수와 이차항 계수가 0이므로

$$p+2=0, q+2p+1=0$$

$$p=-2, q=3$$

$$x^4+2ax+b=(x^2+2x+1)(x^2-2x+3)$$

x 의 계수와 상수항에 의하여

$$2a=4, b=3$$

$$a=2, b=3, Q(x)=x^2-2x+3$$

$$\therefore a+b+Q(2)=8$$

149. ③

$$f(x)=(x-3)^2(x+a)+x+a$$

$$f(3)=3+a=5, a=2$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-3)^2(x+2)+(x-3)+5 \\ &= (x-3)\{(x-3)(x+2)+1\}+5 \end{aligned}$$

이므로

$$Q(x)=(x-3)(x+2)+1$$

$$Q(4)=1 \times 6 + 1 = 7$$

150. ①

$$f(x)=(x-1)Q(x)+2$$

$$=(x-1)\{(x-1)Q_1(x)+3\}+2$$

$$\begin{aligned} \{f(x)\}^2 &= (x-1)^2\{(x-1)Q_1(x)+3\}^2+4(x-1)\{(x-1)Q_1(x)+3\}+4 \\ &= (x-1)^2Q_2(x)+12(x-1)+4 \end{aligned}$$

$$R(x)=12(x-1)+4 \quad \therefore R(2)=16$$

151. 몫 $x-\frac{2}{3}$, 나머지 $\frac{11}{3}$

$$15x^3-2x^2+17x+2-(3x-1)=(5x+1)Q(x)$$

$$15x^3-2x^2+14x+3=(5x+1)(3x^2-x+3)$$

$$Q(x)=3x^2-x+3=(3x+1)\left(x-\frac{2}{3}\right)+\frac{11}{3}$$

몫 $x-\frac{2}{3}$, 나머지 $\frac{11}{3}$

152. ①

$$3x^3+5x^2-4x+2=(2x-1)Q_1(x)+r$$

$$=(4x-2)Q_2(x)+r$$

$$=(6x-3)Q_3(x)+r$$

이므로 $Q_1(x): Q_2(x): Q_3(x)=6:3:2$ 이다.

주어진 식에 대입하면 $\frac{1}{3}=k\frac{5}{9}$ $k=\frac{3}{5}$ 이므로 $10k=6$

153. ①

나눗셈의 결과에서

$$g(x)=(x^2+f(x))(x+3)+(f(x)^2-x^2)이다.$$

$f(x)$ 가 상수면 제수와 나머지의 차수가 같아서 모순

$f(x)$ 가 1차다항식이면 제수는 2차, 나머지는 f 의 1차항계수가 1일때만 2차미만 다항식

$f(x)$ 의 최고차항 차수가 2차 이상이면 나머지의 차수가 더 커서 모순

이므로 $f(x)=x+k$ 라 둘 수 있다.

$$\text{대입해서 전개하면 } g(x)=(x^2+x+k)(x+3)+2kx+k^2 \text{이고,}$$

$$g(-k)=0 \text{이므로 } k=2 \text{이다} (\because g(0) \neq 0)$$

$$\text{따라서 } g(1)=24$$

154. ④

$$(x-a)(x-2a-2)+4 \text{은 완전제곱식}$$

$$(x-a)^2-(a+2)(x-a)+4$$

$$a+2=\pm 4$$

$$(i) a=2$$

$$\{P(x)-2\}^2=(x-4)^2$$

$$P(x)-2=\pm(x-4)$$

$$P(1.2) \text{의 합은 } 4$$

$$(ii) a=-6$$

$$\{P(x)-2\}^2=(x+8)^2$$

$$P(x)-2=\pm(x+8)$$

$$P(1.2) \text{의 합은 } 4$$

$$\text{따라서 } m=8, n=-12, m-n=20$$

155. ⑤

$f(1)=0$ 이므로 $x-1$ 을 인수로 갖는다.

1	1	2	-7	4
		1	3	-4
1	1	3	-4	0
		1	4	
		1	4	0

위와 같이 조립제법을 이용하여 이를 정리하면

$f(x)=(x-1)^2(x+4)$ 로 인수분해됨을 알 수 있다. 따라서

$$f(101)=100^2 \times 105=1050000$$

156. 2022

$(x-1)^{99}$ 을 x 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라 하면

$$(x-1)^{99}=xQ(x)+R$$

$$x=0 \text{을 대입하면 } R=-1$$

$$(x-1)^{99}=xQ(x)-1$$

이 식에 $x=2023$ 을 대입하면

$$2022^{99}=2023Q(2023)-1$$

$$=2023\{Q(2023)-1\}+2022$$

따라서 나머지는 2022이다.

【다른풀이추가】

$$x = 2022 \text{ 하자. } (x+1 = 2023)$$

$$x^{99} = (x+1)Q(x) + k$$

$$x = -1 \text{ 대입 } \therefore k = -1$$

$$\text{나머지는 } 2023-1=2022$$

157. ④

15^6 을 13으로 나누었을 때의 나머지를 r_1 일 때

$$15 = a \text{ 라고 하면 } a^6 = (a-2)q' + r_1$$

$$r_1 = 2^6 \div 13 \text{의 나머지이므로 } 12$$

9^7 을 11로 나누었을 때의 나머지를 r_2 일 때

$$9 = b \text{ 라고 하면 } b^7 = (b+2)q'' + r_2$$

$$r_2 = (-2)^7 \div 11 \text{의 나머지와 같으므로 } -7+11=4 \text{와 같다.}$$

$$r_1 - r_2 = 12 - 4 = 8$$

158. ①

[풀이]

$$255 = 2^8 - 1 \text{ 이다.}$$

$$2^{2023} + 2^{2024} + 2^{2025} + 2^{2026}$$

$$= (2^8)^{252} \cdot 2^7 + (2^8)^{253} + (2^8)^{253} \cdot 2 + (2^8)^{253} \cdot 2^2$$

$$= (2^8)^{252} \cdot 2^7 + (2^8)^{253} \cdot 7$$

$$= 128 \cdot (2^8)^{252} + 7 \cdot (2^8)^{253}$$

$128x^{252} + 7x^{253}$ 을 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지는 135이고, 몫을 $Q(x)$ 라 하자.

$$128x^{252} + 7x^{253} = (x-1)Q(x) + 135$$

양변에 $x = 2^8$ 을 대입하면

$$128 \cdot (2^8)^{252} + 7 \cdot (2^8)^{253} = 255 \times Q(2^8) + 135$$

$2^{2023} + 2^{2024} + 2^{2025} + 2^{2026}$ 을 255로 나누었을 때의 나머지는 135이다.

159. ②

$$18^2 = x \text{ 라고 하면}$$

$$18^6 = (x-3)Q + 27 = 321Q + 27$$

160. ⑤

풀이) 다항식 $(5x-2)^9$ 을 x 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라고 하면

$$(5x-2)^9 = xQ(x) + R \text{ 이다.}$$

나머지는 $x=0$ 를 대입 하면 $R=-2^9$ 이다.

등식 $(5x-2)^9 = xQ(x) - 512$ 에 $x=405$ 를 대입하면

나머지가 음수가 나오지 않아야 하므로

$$= 405 \times \{Q(405) - 2 + 2\} - 512$$

$$= 405 \times \{Q(405) - 2\} + 2 \times 405 - 512$$

$$= 405 \times \{Q(405) - 2\} + 2 \times 405 - 512$$

$$= 405 \times \{Q(405) - 2\} + 298$$

따라서 2023^9 을 405로 나누었을 때의 나머지는 298이다.

$$a = -512, b = -2, c = 298$$

$$\therefore ab + c = 1322$$

161. ④

$$f_n(x) = x^n - x + 1, g(x) = x^2 - x + 1 \text{ 라 하자.}$$

$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$ 이므로 $x^3 + 1$ 은 $g(x)$ 로 나누어떨어진다.

$x^6 - 1 = (x^3 + 1)(x^3 - 1)$ 이므로 $x^6 - 1$ 은 $g(x)$ 로 나누어떨어진다.

$$x^{6n} - 1 = (x^6 - 1)(x^{6n-6} + x^{6n-12} + \dots + x^6 + 1) \quad (n \text{는 자연수})$$

이므로 $x^{6n} - 1$ 은 $g(x)$ 로 나누어떨어진다.

$$\text{또한 } x^{6k+r} = x^{6k+r} - x^r + x^r = x^r(x^{6k} - 1) + x^r$$

(k 는 음이 아닌 정수, $0 \leq r \leq 5$, r 은 정수)이므로

x^{6k+r} 을 $g(x)$ 로 나눈 나머지는 x^r 을 $g(x)$ 로 나눈 나머지와 같다.

$f_n(x)$ 를 $g(x)$ 로 나눈 나머지를 $R_n(x)$ 라고 하면

$$f_1(x) = 1 \text{ 이므로 } R_1(x) = 1$$

$$f_2(x) = x^2 - x + 1 \text{ 이므로 } R_2(x) = 0$$

$$f_3(x) = x^3 - x + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1) - x \text{ 이므로 } R_3(x) = -x$$

$$f_4(x) = x^4 - x + 1 = (x^4 + x) - 2x + 1$$

$$= x(x+1)(x^2 - x + 1) - 2x + 1$$

$$\text{이므로 } R_4(x) = -2x + 1$$

$$f_5(x) = x^5 - x + 1 = (x^5 + x^2) - x^2 - x + 1$$

$$= x^2(x+1)(x^2 - x + 1) - (x^2 - x + 1) - 2x + 2$$

$$= (x^2 - x + 1)\{x^2(x+1) - 1\} - 2x + 2$$

$$\text{이므로 } R_5(x) = -2x + 2$$

$$f_6(x) = x^6 - x + 1 = (x^6 - 1) - x + 2 \text{ 이므로 } R_6(x) = -x + 2$$

따라서 $f_n(x)$ 가 $g(x)$ 로 나누어떨어지는 n 은

$n = 6k + 2$ (k 는 음이 아닌 정수)이므로 개수는 338개다.

162. ③

$$x^4 - x^3 = P(x)A(x) - x^2$$

$P(x)$ 가 삼차식이므로 $A(x)$ 는 일차식이고,

$$x^4 - x^3 + x^2 = P(x)A(x) \text{ 에서}$$

$$x^2(x^2 - x + 1) = P(x)A(x)$$

$$\therefore P(x) = x(x^2 - x + 1), A(x) = x$$

$$P(x) = x^3 - x^2 + x = x^3 - x^2 + x$$

$$x^3 - x^2 + x = Q(x)B(x) - x + 2$$

$$Q(x)B(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2$$

$$= (x-1)(x^2+2)$$

$Q(x)$ 가 이차 이상이므로 $Q(x) = x^2 + 2$, $B(x) = x - 1$

$$P(x) - Q(x) = x^3 - x^2 + x - (x^2 + 2)$$

$$= x^3 - 2x^2 + x - 2$$

$$= (x-2)(x^2+1)$$

$x-2$ 로 나누어떨어지므로 $a=2$

$$P(a) = P(2) = 8 - 4 + 2 = 6$$

163. ②

100이하의 자연수 중 차가 2인 두 자연수의 곱으로 표현되는 수의 개수와 같다.

$$1 \cdot 3 = 3, 2 \cdot 4 = 8, 3 \cdot 5 = 15, \dots, 9 \cdot 11 = 99 \text{의 } 9(\text{개})$$

이고, 각각에 대해

$$x^2 - 2x - 3, x^2 + 2x + 8, x^2 - 2x - 15, \dots, x^2 - 2x - 99 \text{로}$$

표현된다.

164. ④

[풀이]

세 다항식 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 에 대하여 두 다항식 $2f(x)+3g(x)$, $f(x)+6g(x)$ 를 $h(x)$ 로 나누었을 때의 나머지는 각각 x^3 , $8x^3$ 이고, 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ 라 하자.

$$2f(x)+3g(x)=h(x)Q_1(x)+x^3 \dots \textcircled{㉠}$$

$$f(x)+6g(x)=h(x)Q_2(x)+8x^3 \dots \textcircled{㉡}$$

$8 \times \textcircled{㉠} - \textcircled{㉡}$ 을 하면

$$15f(x)+18g(x)=h(x)\{8Q_1(x)-Q_2(x)\}$$

$$5f(x)+6g(x)=\frac{1}{3}h(x)\{8Q_1(x)-Q_2(x)\}$$

다항식 $5f(x)+6g(x)$ 는 $h(x)$ 로 나누어떨어지므로 자연수 k 에 대하여 다항식 $5kf(x)+6kg(x)$ 는 $h(x)$ 로 나누어떨어진다.

100 이하의 두 자연수 m , n 에 대하여 다항식 $mf(x)+ng(x)$ 가 $h(x)$ 로 나누어떨어진다. $m:n=5:6$ 이고, m , n 은 100 이하의 자연수이므로 n 의 최댓값은 96이고, m 의 최댓값은 80이다.

따라서 $m+n$ 의 값의 최댓값은 176이다.

165. ⑤

$$P(-c) = c^4 + ac^3 + bc^2 - ac + 1 = 0$$

$$\neg. P(0) = 1 \text{이므로 } c \neq 0$$

$$\neg. P\left(\frac{1}{c}\right) = \frac{1}{c^4} - \frac{a}{c^3} + \frac{b}{c^2} + \frac{a}{c} + 1$$

$$= \frac{1}{c^4} - \frac{a}{c^3} + \frac{b}{c^2} + \frac{a}{c} + 1$$

$$= \frac{1}{c^4}(1 - ac + bc^2 + a^3c + c^4) = \frac{1}{c^4}P(-c) = 0$$

$$\neg. \textcircled{1} \text{과 } \neg \text{에서 } c=1 \text{이면 } P(-1) = P(1) = 0$$

$P(x)$ 는 $x^2 - 1$ 을 인수로 갖는다.

166. ②

$$\{P(x)+1\}^2 = x^2 - (k+1)x + k^2 \text{이 항등식에서}$$

$$x^2 - (k+1)x + k^2 \text{이 완전제곱식이 되어야 하므로}$$

$$D = (k+1)^2 - 4k^2 = -3k^2 + 2k + 1 = (3k+1)(-k+1) = 0$$

$$k = -\frac{1}{3} \text{일 때, } \{P(x)+1\}^2 = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2$$

$$P(x)+1 = x - \frac{1}{3} \text{일 때, } P(0)+1 = -\frac{1}{3} \text{이므로 } P(0) = -\frac{4}{3}$$

$$P(x)+1 = -\left(x - \frac{1}{3}\right) \text{일 때, } P(0)+1 = \frac{1}{3} \text{이므로 } P(0) = -\frac{2}{3}$$

$$k=1 \text{일 때, } \{P(x)+1\}^2 = (x-1)^2$$

$$P(x)+1 = x-1 \text{일 때, } P(0)+1 = -1 \text{이므로 } P(0) = -2$$

$$P(x)+1 = -(x-1) \text{일 때, } P(0)+1 = 1 \text{이므로 } P(0) = 0$$

$$\text{따라서 모든 } P(0) \text{의 값의 합은 } -\frac{4}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) + (-2) + 0 = -4$$

167. -91

$$x^{16} + 3x^8 + 6 = (x^2 + x + 1)Q_1(x) + r_1(x)$$

$$\text{이때 } x^2 + x + 1 = 0 \text{을 만족하는 } x \text{에 대하여 } x^3 = 1,$$

$$x^2 = -x - 1$$

$$(x^3)^5 x + 3(x^3)^2 x^2 + 6 = 0 + r_1(x), \quad x + 3(-x-1) + 6 = -2x + 3$$

$$r_1(x) = -2x + 3$$

$$x^{16} + 3x^8 + 6 = (x^2 - x + 1)Q_2(x) + r_2(x)$$

$$\text{이때 } x^2 - x + 1 = 0 \text{을 만족하는 } x \text{에 대하여 } x^3 = -1,$$

$$x^2 = x - 1$$

$$(x^3)^5 x + 3(x^3)^2 x^2 + 6 = 0 + r_2(x),$$

$$-x + 3(x-1) + 6 = 2x + 3 = r_2(x)$$

$$r_2(x) = 2x + 3$$

$$x^{16} + 3x^8 + 6 = (x^4 + x^2 + 1)Q_3(x) + r_3(x)$$

$$\text{이때 } x^4 + x^2 + 1 = 0 \text{을 만족하는 } x \text{에 대하여 } x^6 = 1,$$

$$x^4 = -x^2 - 1$$

$$(x^6)^2 x^4 + 3(x^6)^1 x^2 + 6 = 0 + r_3(x),$$

$$-x^2 - 1 + 3x^2 + 6 = 2x^2 + 5 = r_3(x)$$

$$r_3(x) = 2x^2 + 5$$

따라서 $r_1(x)r_2(x)r_3(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지는

$$r_1(2)r_2(2)r_3(2) = (-1) \times (7) \times 13 = -91$$

$$168. (a, b) = (1, 12), (2, 19)$$

두 자연수 a, b 에 대하여 순서쌍 (a, b)

$$f(x) = x^2 + 4x + 7 = (x-a)Q(x) + b$$

$$f(a) = a^2 + 4a + 7 = b$$

x 에 대한 이차방정식 $f(x+2a) + a^2 - b + 13 = 0$ 은 서로 다른 두 허근을 갖는다고 부터

$$\therefore (x+2a)^2 + 4(x+2a) + 7 + a^2 - b + 13 = 0$$

$$x^2 + 2(2a+2)x + 4a^2 + 8a + 7 + a^2 - a^2 - 4a - 7 + 13 = 0$$

$$x^2 + 2(2a+2)x + 4a^2 + 4a + 13 = 0 \text{ 이 허근을 가진다.}$$

$$D/4 = (2a+2)^2 - (4a^2 + 4a + 13) < 0$$

$$4a - 9 < 0$$

$$a < \frac{9}{4}$$

$$\therefore a = 1 \text{ or } 2$$

$$169. \textcircled{3}$$

(가)에서 $f(x)$ 를 $x^6 - 1$ 로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 하면

$$f(x) = (x^6 - 1)(2x - 1) + R(x)$$

$$= (x^4 + x^2 + 1)(x^2 - 1)(2x - 1) + R(x)$$

$f(x)$ 를 $x^4 + x^2 + 1$ 로 나눈 나머지는

$R(x)$ 를 $x^4 + x^2 + 1$ 로 나눈 나머지와 같다.

$R(x)$ 는 5차 이하의 다항식이므로

(나)에서

$$R(x) = (x^4 + x^2 + 1)(ax + b) + x^3 + 2x + 5$$

$$f(x) = (x^4 + x^2 + 1)\{(x^2 - 1)(2x - 1) + ax + b\} + x^3 + 2x + 5$$

(다)에서

$$f(1) = R(1) = 3(a+b) + 8 = 5$$

$$f(-1) = R(-1) = 3(-a+b) + 2 = 5$$

두 식을 연립하면

$$a = -1, b = 0$$

$$R(x) = -x(x^4 + x^2 + 1) + x^3 + 2x + 5 = -x^5 + x + 5$$

$$\therefore f(0) = 1 + R(0) = 6$$

$$170. \textcircled{3}$$

삼차다항식 $f(x)$ 에 대해

$$(x+2)f(x-3) = (x-5)f(x+1) \text{에서}$$

$$x = -2 \text{ 일 때, } 0 = -5f(-1) \text{ 이므로 } f(-1) = 0$$

$$x = 5 \text{ 일 때, } 7f(2) = 0 \text{ 이므로 } f(2) = 0$$

$f(x)$ 는 삼차이므로 몫을 $ax+b$ 라 하면

$$f(x) = (x^2 + x + 1)(ax + b) + 2x + 10$$

$$x = -1 \text{ 일 때, } f(-1) = 1 \cdot (-a+b) + 8 = 0 \text{ 이므로 } a-b = 8$$

$$x = 2 \text{ 일 때, } f(2) = 7 \cdot (2a+b) + 14 = 0 \text{ 이므로 } 2a+b = -2$$

$$\text{연립하면 } 3a = 6 \text{ 이므로 } a = 2, b = -6$$

$$\therefore f(x) = (x^2 + x + 1)(2x - 6) + 2x + 10 \text{ 이므로}$$

$$x+2 \text{로 나눈 나머지 } f(-2) = 3 \cdot (-10) + 6 = -24$$

$$171. \textcircled{2}$$

$$f(x) = ax^2 + bx + 1$$

$$f(x^2) = ax^4 + bx^2 + 1 \text{ 가 } f(x) \text{ 를 인수로 가지므로}$$

$$f(x^2) = ax^4 + bx^2 + 1 = (ax^2 + bx + 1)(x^2 + kx + 1)$$

$$= (ax^2 + bx + 1)(x^2 + kx + 1)$$

$$= ax^4 + (ak+b)x^3 + (a+bk+1)x^2 + (k+b)x + 1$$

$$-ak = b, b = -k \text{에서}$$

$$b(a+1) = 0 \quad a = -1, \text{ or } b = 0$$

$$(i) \quad b = 0 \text{ 일 때 } a = -1$$

$$(ii) \quad a = 1 \text{ 일 때, } a + bk + 1 = b \text{에서}$$

$$b^2 + b - 2 = 0 \quad b = -2, \text{ or } b = 1$$

$$(-1, 0), (1, -2), (1, -1)$$

방정식 $f(x) = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 가지므로

판별식 $D = b^2 - 4a > 0$ 를 만족하는 순서쌍 $(-1, 0)$ 은 갖는다.

$$\therefore f(x) = -x^2 + 1$$

$xf(x)$ 를 $x - \frac{1}{2}$ 으로 나눈 나머지는

$$\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

$$172. \textcircled{5}$$

$$(가) \quad 2x^3 + x + 3 = f(x) \cdot Q_1(x) + g(x)$$

$g(x)$: 일차 이하 다항식

$$(나) \quad 2x^3 + x + 3 = g(x)Q_2(x) + f(x) - x^2 + x$$

$$f(x) - x^2 + x: \text{ 상수함}$$

$$\therefore f(x) = x^2 - x + C$$

$$g(x) = (3-2c)(x+1)$$

(나)

$$2x^3 + x + 3 = g(x) \times Q_2(x) + C$$

$$= (3-2c)(x+1)Q_2(x) + C$$

$$x = -1 \text{ 대입}$$

$$2(-1) - 1 + 3 = C = 0$$

$$\therefore f(x) = x^2 - x, \quad g(x) = 3(x+1)$$

$$f(0) + g(5) = 18$$

$$173. \textcircled{1}$$

$$f(x)\{f(x)-4\} = \{x^2+x-2\}Q(x) = (x+2)(x-1)Q(x) \text{에서}$$

$$\textcircled{1} \quad f(-2)\{f(-2)-4\} = 0 \quad f(-2) = 0, \quad f(-2) = 4$$

$$\textcircled{2} \quad f(1)\{f(1)-4\} = 0 \quad f(1) = 0, \quad f(1) = 4$$

조건에 따라

$f(-1)=0, f(-2)=0, f(1)=4$ 를 만족할 때,

$$f(x)=a(x+1)(x+2) \quad f(1)=a \cdot 2 \cdot 3=6a=4 \quad a=\frac{2}{3}$$

$$f(x)=\frac{2}{3}(x+1)(x+2)$$

$f(-1)=0, f(1)=0, f(-2)=4$ 를 만족할 때,

$$f(x)=b(x+1)(x-1) \quad f(-2)=b \cdot (-1) \cdot (-3)=3a=4 \quad b=\frac{4}{3}$$

$$f(x)=\frac{4}{3}(x+1)(x-1)$$

$f(-1)=0, f(-2)=4, f(1)=4$ 를 만족할 때,

$$f(x)=c(x+2)(x-1)+4$$

$$f(-1)=c \cdot 1 \cdot (-2)+4=4-2c=0 \quad c=2$$

$$f(x)=2(x+2)(x-1)+4$$

$$\text{따라서 } g(x)=\left\{\frac{2}{3}(x+1)(x+2)\right\}+\left\{\frac{4}{3}(x+1)(x-1)\right\}$$

$+ \{2(x+2)(x-1)+4\}$ 이므로

$$g(5)=\left(\frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 7\right)+\left(\frac{4}{3} \cdot 6 \cdot 4\right)+(2 \cdot 7 \cdot 4+4)=28+32+60=120$$

174. ②

(나)에서 $f(x-1)-7$ 은 x^2-2x 로 나누어 떨어지므로

$$f(x-1)=x(x-2)Q(x)+7$$

$$x=0 \text{ 을 대입하면 } f(-1)=7 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$x=2 \text{ 를 대입하면 } f(1)=7 \quad \dots \textcircled{2}$$

(가)에서 $f(x)$ 를 $x+5$ 로 나눈 나머지는 상수이고, $f(x)$ 를 x^2-2 로 나눈 나머지와 같으므로

$$f(x)=(x+5)(x^2-2)(x-a)+b \text{ 라 하면}$$

①에 의해

$$f(-1)=4 \times (-1) \times (-1-a)+b=4+4a+b=7$$

$$4a+b=3 \quad \dots \textcircled{3}$$

②에 의해

$$f(1)=6 \times (-1) \times (1-a)+b=-6+6a+b=7$$

$$6a+b=13 \quad \dots \textcircled{4}$$

③, ④를 연립하여 풀면 $a=5, b=-17$

$$f(x)=(x+5)(x^2-2)(x-5)-17$$

$$\therefore f(3)=8 \times 7 \times (-2)-17=-129$$

175. 9

$$(가) f(x)+2f(-x)=3x^2+2x+15 \quad \dots \textcircled{1}$$

x 대신 $-x$ 를 대입하면

$$f(-x)+2f(x)=3x^2-2x+15 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}-2 \times \textcircled{2}$$

$$-3f(x)=-3x^2+6x-15$$

$$\therefore f(x)=x^2-2x+5$$

$$(나) g(x)=(x-1)Q_1(x)+R, g(x)-R=(x-1)Q_1(x)$$

$$g(x)=(x+2)Q_2(x)+R, g(x)-R=(x+2)Q_2(x)$$

즉, $g(x)-R$ 은 $(x+1)(x+2)$ 를 인수로 가진다.

$$g(x)-R=2(x-1)(x+2)$$

$$g(x)-f(x)=2x^2+2x-4+R-x^2+2x-5$$

$$=x^2+4x-9+R$$

$g(x)-f(x)=0$ 이 중근을 가지므로

$$D/4=4+9-R=0, R=13$$

$$\text{따라서 } g(x)=2(x+1)(x+2)+13, g(0)=9$$

176. 3

(나)에서 $f(x)=(x+1)^2(ax+b)+ax+b$ 라 하면

$$(가)에서 f(-1)=-a+b=3$$

$$b=a+3$$

$$f(x)=(x+1)^2(ax+a+3)+ax+a+3$$

$$=a(x+1)^3+3(x+1)^2+a(x+1)+3$$

$$R(x)=3(x+1)^2+a(x+1)+3$$

$$R(0)=3(0+1)^2+a(0+1)+3$$

$$R(1)=3(1+1)^2+a(1+1)+3$$

$$R(0)=3+a+3=a+6$$

$$R(1)=12+2a+3=2a+15$$

$$R(0)=R(1) \text{ 이므로 } a+6=2a+15$$

$$\therefore a=-9$$

$$R(x)=3(x+1)^2-9(x+1)+3$$

$$\therefore R(2)=3$$

$$177. (1) 2차 (2) P(-2)=-30$$

(1) $Q(x)$ 로 나눈 나머지가 $Q(x)-3x^2$ 이므로 나머지의 차수는 나누는 다항식의 차수보다 낮아야 하므로

$$Q(x)-3x^2=ax+b \text{ 꼴}$$

$$\text{따라서 } Q(x)=3x^2+ax+b \text{ 꼴로 2차 다항식}$$

(2)

$$P(x)=Q(x)\{Q(x)-3x^2\}+\{Q(x)-3x^2\}$$

$$=(3x^2+ax+b)(ax+b)+(ax+b)$$

$$=(ax+b)(3x^2+ax+b+1)$$

$$\textcircled{1} \text{ 최고차항의 계수가 1이므로 } a=\frac{1}{3}$$

$\textcircled{2}$ 나머지 정리에 따라

$$P(1)=(a+b)(a+b+4)=-4 \text{ 에서}$$

$$(a+b)^2+4(a+b)+4=0 \quad (a+b+2)^2=0 \quad a+b+2=0$$

$$\textcircled{3} a=\frac{1}{3} \text{ 이므로 } b=-2-a=-2-\frac{1}{3}=-\frac{7}{3}$$

$$P(x)=\left(\frac{1}{3}x-\frac{7}{3}\right)\left(3x^2-\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}\right)$$

$$\text{따라서 } P(-2) = \left(-\frac{2}{3} - \frac{7}{3}\right) \left(12 - \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\right) = (-3) \cdot 10 = -30$$

6번 수정

8번 수정

21번 수정

23번 수정

178. ①

$$x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = x^3 - 3 \times x^2 \times 3 + 3 \times x \times 3^2 - 3^3 = (x-3)^3$$

179. ①

$$\begin{aligned} x^4 y - 8xy &= xy(x^3 - 8) \\ &= xy(x-2)(x^2 + 2x + 4) \end{aligned}$$

180. ⑤

$$\begin{aligned} x+y &= 2\sqrt{3}, \quad x-y=4 \\ x^3 + x^2 y - xy^2 - y^3 &= x^2(x+y) - y^2(x+y) \\ &= (x+y)(x^2 - y^2) \\ &= (x+y)^2(x-y) = 48 \end{aligned}$$

181. ①

$$\begin{aligned} (x^2 - 3x)^2 - (x^2 - 3x) - 12 \text{ 에서 } x^2 - 3x = t \text{ 로 두면} \\ t^2 - t - 12 &= (t-4)(t+3) \text{ 이므로} \\ (x^2 - 3x - 4)(x^2 - 3x + 3) &\text{ 이다.} \\ \text{즉, } (x-4)(x+1)(x^2 - 3x + 3) \end{aligned}$$

182. -8

$$\begin{aligned} x^2 - x &= A \text{ 라 두면} \\ (A+1)(A-9) + 21 &= A^2 - 8A + 12 = (A-2)(A-6) \\ (x^2 - x - 2)(x^2 - x - 6) &= (x-2)(x+1)(x-3)(x+2) \\ a-b+c-d \text{ 의 최솟값은 } -2-1-3-2 &= -8 \end{aligned}$$

183. ⑤

$$\begin{aligned} x^4 - x^2 + 16 &= x^4 + 8x^2 + 16 - 9x^2 \\ &= (x^2 + 4)^2 - (3x)^2 = (x^2 + 3x + 4)(x^2 - 3x + 4) \end{aligned}$$

184. ①

$$\begin{aligned} x^4 - 14x^2 + 1 &= 0 \text{ 에 대해 } x > 0 \text{ 이므로 양변을 } x^2 \text{ 으로 나누면} \\ x^2 - 14 + \frac{1}{x^2} &= 0 \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = 14 \\ \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 &= x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 14 + 2 = 16 \text{ 에서 } x + \frac{1}{x} > 0 \text{ 이므로} \\ x + \frac{1}{x} &= 4 \end{aligned}$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 4^3 - 3 \cdot 4 = 52$$

$$\text{따라서 } 2x^3 + x + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} = 2\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) = 2 \cdot 52 + 4 = 108$$

185. ③

 $x = 2023$ 이라 하면

$$A = \frac{x^3 - x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2}$$

$$= \frac{(x-1)(x^2-2)}{x^2-2}$$

$$= x-1 = 2022$$

$$n=4, \quad S=6 \quad \therefore n+S=10$$

186. ③

 $100 = m, \quad 2 = n$ 이라 할 때

$$A = (m+n)^3 - (m+n)(m^2 + n^2 - mn)$$

$$A = (m+n)^3 - (m^3 + n^3) \text{ 이므로}$$

$$A = 3mn(m+n)$$

$$A = 3 \times 2 \times 100(102) = 61200$$

따라서 $n=5, \quad S=9$

$$n+s=14$$

187. ③

 $100 = m, \quad 2 = n$ 이라 할 때

$$A = (m+n)^3 - (m+n)(m^2 + n^2 - mn)$$

$$A = (m+n)^3 - (m^3 + n^3) \text{ 이므로}$$

$$A = 3mn(m+n)$$

$$A = 3 \times 2 \times 100(102) = 61200$$

따라서 $n=5, \quad S=9$

$$n+s=14$$

188. ⑤

다항식 $ax^4 + bx^3 + cx - 2$ 가 $(x-1)^2(x+1)$ 을 인수로 가지므로

$$ax^4 + bx^3 + cx - 2 = (x-1)^2(x+1)(ax+d)$$

$$d = -2$$

$$ax^4 + bx^3 + cx - 2 = (x-1)^2(x+1)(ax-2)$$

$$(x-1)^2(x+1)(ax-2) = (x^2 - 2x + 1)\{ax^2 + (a-2)x - 2\}$$

$$\text{이차항 계수 } 2-a=0, \quad a=2$$

$$ax^4 + bx^3 + cx - 2 = 2x^4 - 4x^3 + 4x - 2$$

$$b = -4, \quad c = 4$$

$$ac - b = 12$$

189. ①

$x^2 - x = A$ 라 하면 주어진 식은 $A(A-8)+12 = A^2 - 8A + 12$ 가 되어 $(A-2)(A-6)$ 으로 인수분해 되고, 이 식에 $A = x^2 - x$ 를 대입하면 $(x^2 - x - 2)(x^2 - x - 6) = (x+1)(x-2)(x+2)(x-3)$ 으로 인수분해됨을 알 수 있다. 따라서

$$a+b+c+d = 1 + (-2) + 2 + (-3) = -2$$

190. ④

 $x^2 - 2x = t$ 치환하면

$$\text{본식} = t(t-2) - 3 = t^2 - 2t - 3 = (t-3)(t+1)$$

다시 $x^2 - 2x = t$ 를 대입하여 인수분해하면

$$(x-3)(x+1)(x-1)^2$$

$$a = -1, b = 3 \therefore a + b = 2$$

191. ⑤

 $x^2 - 3x = A$ 로 치환하면

$$A(A+3) + kA + 10 = A^2 + (3+k)A + 10 = (A+1)(A+10)$$

또는 $(A+2)(A+5)$ 로 인수분해 되므로 $3+k=11$ 또는 7 따라서 $k=8$ or 4 모든 k 값의 합은 $8+4=12$

192. ⑤

$$(x-1)(x-2)(x+4)(x+5) + a$$

$$= (x^2 + 3x - 4)(x^2 + 3x - 10) + a = (x^2 + 3x - 7)^2 \text{ 이어야 하므로}$$

$$40 + a = 49, a = 9 \text{ 이다.}$$

193. ④

$$(x-2)(x-5)(x+5)(x+8) + k = (x^2 + 3x - 10)(x^2 + 3x - 40) + k$$

$$= (x^2 + 3x)^2 - 50(x^2 + 3x) + 400 + k \text{ 완전제곱식으로 인수분해}$$

$$\text{되므로, } 625 = 400 + k, k = 225 \text{ 이고,}$$

$$(x^2 + 3x)^2 - 50(x^2 + 3x) + 625 = (x^2 + 3x - 25)^2 \text{ 인데 최고차항의}$$

$$\text{계수가 } -1 \text{ 이므로 } f(x) = (-x^2 - 3x + 25)^2 \text{ 이다.}$$

$$\therefore k + f(5) = 225 - 15 = 210$$

194. 72

$$(x^2 + x - 2)(x^2 - 11x + 28) + k$$

$$= (x+2)(x-1)(x-7)(x-4) + k$$

$$= (x+2)(x-7)(x-1)(x-4) + k$$

$$= (x^2 - 5x - 14)(x^2 - 5x + 4) + k$$

$$x^2 - 5x = A \text{ 라고 하자.}$$

$$= (A-14)(A+4) + k$$

$$= A^2 - 10A - 56 + k$$

$$\text{완전제곱식이 되기 위해서는 } -56 + k = (-5)^2$$

$$\therefore k = 81$$

$$A^2 - 10A + 25 = (A-5)^2 = (x^2 - 5x - 5)^2$$

$$\therefore f(x) = x^2 - 5x - 5$$

$$f(1) = -9$$

$$k + f(1) = 72$$

195. ②

$$a+b=2, a^2+b^2=6 \text{ 이므로}$$

$$2ab = (a+b)^2 - (a^2+b^2) = 2^2 - 6 = -2 \quad ab = -1$$

$$a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 2^3 - 3 \cdot (-1) \cdot 2 = 14$$

$$a^4+b^4 = (a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2 = 6^2 - 2 \cdot (-1)^2 = 34$$

따라서

$$a^7+b^7+a^4b^3+a^3b^4 = (a^7+a^4b^3) + (b^7+a^3b^4) = a^4(a^3+b^3) + b^4(a^3+b^3)$$

$$= (a^3+b^3)(a^4+b^4) = 14 \cdot 34 = 476$$

196. ②

$$a^2+b^2-2b+2a-2ab = (a-b)(a-b+2)$$

$$a^3-27b^3 = (a-3b)(a^2+3ab+9b^2)$$

보기 중 두 식의 인수가 될 수 없는 것은 ②번 $a-b+1$ 이다.

197. ②

$$a^2b-2ab+2a^2-4a+b+2 = (a^2-2a+1)b+2(a^2-2a+1)$$

$$= (a-1)^2(b+2)$$

$$396 = 6^2 \times 11 \text{ 이므로}$$

$$a-1=6, b+2=11 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } a+b=16 \text{ 이다.}$$

198. ⑤

$$x+1=A \text{ 치환하면}$$

본식

$$= A^4 + 2A^2 + 9 = (A^2+3)^2 - (2A)^2 = (A^2+2A+3)(A^2-2A+3)$$

여기에서 $x+1=A$ 를 대입하면

$$\text{본식} = (x^2+4x+6)(x^2+2)$$

199. ③

 $x^4 - nx^2 + 64$ 가 인수 분해되는 경우는

(i) 직접 인수분해 되는 경우

$$n=34 \text{ 일 때 가능}$$

$$(ii) x^4 - 16x^2 + 64 - (n-16)x^2$$

$$= (x^2-8)^2 - (n-16)x^2 \text{ 에서}$$

$$n=17, 25, 32, 41, 52 \text{ 일 때 가능}$$

$$(iii) x^4 + 16x^2 + 64 - (n+16)x^2$$

$$= (x^2+8)^2 - (n+16)x^2 \text{ 에서}$$

$$n=9, 33, 48 \text{ 일 때 가능}$$

따라서 9개이다.

200. ①

$$x^2=t \text{ 로 놓으면 } P(t) = t^2 - kt + 24^4$$

 $P(t)$ 는 두 일차식의 곱으로 인수분해되어야 하므로

$$P(t) = (t-p)(t-q)$$

$$\text{즉 } P(x) = (x^2-p)(x^2-q) = (x+a)(x-a)(x+b)(x-b)$$

$$\text{그러므로 } P(x) = x^4 - (a^2+b^2)x^2 + a^2b^2$$

$$k = a^2 + b^2, a^2b^2 = 24^4 = 2^{12}3^4$$

위의 조건을 만족하는 순서쌍(a^2, b^2)은

$(1, 2^{12}3^4), (2^2, 2^{10}3^4), (2^4, 2^83^4) \dots (2^{12}3^4, 1)$ 이렇게 20개가 나온다
(단, $(2^63^2, 2^63^2)$ 은 서로 다른 네 개의 다항식이 아니므로 제외)
순서쌍의 개수는 정수 k 의 개수의 2배이므로 $k=10$

【다른풀이추가】

$$ab = 2^6 \times 3^2 \text{ 에서}$$

약수의 개수 $7 \times 3 = 21$ 에서 $(2^33, 2^33)$ 제외

201. ④

[풀이]

$x^4 + 3x^2 + 4$ 를 인수분해하면

$$x^4 + 4x^2 + 4 - x^2 = (x^2 + 2)^2 - x^2 = (x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2)$$

$$f(x) = x^2 + x + 2, g(x) = x^2 - x + 2 \text{ 또는}$$

$$f(x) = x^2 - x + 2, g(x) = x^2 + x + 2 \text{ 이므로}$$

$$f(0) + g(0) = 2 + 2 = 4$$

202. ⑤

[풀이]

$x^4 - ax^2 + 144 = (x^2 - m)(x^2 - n)$ 에서 m, n 이 자연수의
제곱수이다.

$mn = 144$ 이므로 144를 제곱수의 곱으로 나타낼 수 있는
경우의 수를 생각해보면

$$(x^2 - 1)(x^2 - 144), (x^2 - 9)(x^2 - 16), (x^2 - 4)(x^2 - 36)$$

전개해서 a 값을 구해보면

$$(x^2 - 1)(x^2 - 144) = x^4 - 145x + 144$$

$$(x^2 - 9)(x^2 - 16) = x^4 - 25x + 144$$

$$(x^2 - 4)(x^2 - 36) = x^4 - 40x + 144$$

$$a = 145, 25, 40 \text{ 이다.}$$

$$145 + 25 + 40 = 210$$

203. ⑤

$x^2 + kxy + 6y^2 - 9x - 22y + 20$ 을 x 에 대한 내림차순으로
정리하면

$$x^2 + (ky - 9)x + 6y^2 - 22y + 20 \text{ 이고}$$

$$6y^2 - 22y + 20 = (2y - 4)(3y - 5) \text{ 이므로}$$

$$ky - 9 = 2y - 4 + 3y - 5 = 5y - 9, \therefore k = 5$$

204. ③

$x^2 + y^2 - 10 - a(xy - 3)$ 을 x 에 대하여 정리하면

$$x^2 - axy + y^2 + 3a - 10$$

이때, $x^2 - axy + y^2 + 3a - 10 = 0$ 으로 놓고 근의 공식을
이용하여

방정식을 풀면

$$x = \frac{ay \pm \sqrt{(-ay)^2 - 4(y^2 + 3a - 10)}}{2}$$

$$= \frac{ay \pm \sqrt{(a^2 - 4)y^2 - 12a + 40}}{2}$$

$$\text{즉, } x = \frac{ay + \sqrt{(a^2 - 4)y^2 - 12a + 40}}{2} \text{ 또는}$$

$$x = \frac{ay - \sqrt{(a^2 - 4)y^2 - 12a + 40}}{2}$$

이때,

$$x^2 - axy + y^2 + 3a - 10 = \left(x - \frac{ay + \sqrt{(a^2 - 4)y^2 - 12a + 40}}{2} \right)$$

$$\times \left(x - \frac{ay - \sqrt{(a^2 - 4)y^2 - 12a + 40}}{2} \right)$$

이므로 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면

$\sqrt{(a^2 - 4)y^2 - 12a + 40}$ 이 y 에 대한 일차식 또는 상수이므로

$$a^2 - 4 = 0 \text{ 또는 } -12a + 40 = 0$$

$$a^2 - 4 = 0 \text{ 에서 } a = -2 \text{ 또는 } a = 2$$

이때 $-12a + 40 \geq 0$ 이므로 x, y 에 대한 서로 다른 두
일차식의 곱으로 인수분해된다.

$$-12a + 40 = 0 \text{ 에서 } a = \frac{10}{3}$$

이때 $a^2 - 4 \geq 0$ 이므로 x, y 에 대한 서로 다른 두 일차식의
곱으로 인수분해된다.

$$\therefore a = -2, a = 2, a = \frac{10}{3}$$

따라서 a 의 값의 합은 $\frac{10}{3}$ 이다. $p = 3, q = 10$ 이므로

$$p + q = 13 \text{ 이다.}$$

205. ④

풀이) 양변에 $-$ 를 정리하면 $x^2 - y^2 - ax - by - 4$ 이고,

$$x^2 - y^2 - ax - by - 4 = x^2 - ax - y^2 - by - 4$$

$$= x^2 - ax - y^2 - by - 4$$

주어진 식을 x 에 대한 내림차순으로 정리하면

$$x^2 - y^2 - ax - by - 4 = x^2 - ax - (y^2 + by + 4) \dots \dots \textcircled{1}$$

이 식이 계수가 정수인 x, y 에 대한 두 일차식의 곱으로
인수분해되려면 x 에 대한 다항식 $\textcircled{1}$ 의 상수항은 다음과
같아야 한다.

$$(i) y^2 + by + 4 = (y + 1)(y + 4) = y^2 + 5y + 4 \text{ 인 경우}$$

y 의 계수를 비교하면 $b = 5$ 이다.

이때, $\textcircled{1}$ 에서

$$x^2 - ax - (y + 1)(y + 4) = \{x - (y + 1)\}\{x + (y + 4)\}$$

인 경우 x 의 계수를 비교하면 $a = -3$ 이고,

$$x^2 - ax - (y + 1)(y + 4) = \{x + (y + 1)\}\{x - (y + 4)\}$$

인 경우 x 의 계수를 비교하면 $a = 3$ 이다.

$$(ii) y^2 + by + 2 = (y - 1)(y - 4) = y^2 - 5y + 4 \text{ 인 경우}$$

y 의 계수를 비교하면 $b = -5$ 이다.

이때, ㉠에서

$$x^2 - ax - (y-1)(y-4) = \{x - (y-1)\}\{x + (y-4)\}$$

인 경우 x 의 계수를 비교하면 $a = 3$ 이고,

$$x^2 - ax - (y+1)(y+4) = \{x + (y+1)\}\{x - (y+4)\}$$

인 경우 x 의 계수를 비교하면 $a = -3$ 이다.

(iii) $y^2 + by + 4 = (y+2)(y+2) = y^2 + 4y + 4$ 인 경우

y 의 계수를 비교하면 $b = 4$ 이다.

이때, ㉠에서

$$x^2 - ax - (y+2)(y+2) = \{x - (y+2)\}\{x + (y+2)\}$$

인 경우 x 의 계수를 비교하면 $a = 0$ 이고,

(iv) $y^2 + by + 4 = (y-2)(y-2) = y^2 - 4y + 4$ 인 경우

y 의 계수를 비교하면 $b = -4$ 이다.

$$x^2 - ax - (y-2)(y-2) = \{x - (y-2)\}\{x + (y-2)\}$$

인 경우 x 의 계수를 비교하면 $a = 0$ 이다.

가능한 $2a+b$ 의 값은

$$a = 3, b = 5 \text{에서 } 2a+b = 11$$

$$a = 3, b = -5 \text{에서 } 2a+b = 1$$

$$a = -3, b = 5 \text{에서 } 2a+b = -1$$

$$a = -3, b = -5 \text{에서 } 2a+b = -11$$

$$a = 0, b = 4 \text{에서 } 2a+b = 4$$

$$a = 0, b = -4 \text{에서 } 2a+b = -4$$

따라서 선지 중 $2a+b$ 의 값이 될 수 없는 것은 ④이다.

206. ②

$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$ 에
 $x=1$ 을 대입한 것을 이용하면

$$abc + ab + bc + ca + a + b + c = 69$$

$$abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1 = 70$$

$$(a+1)(b+1)(c+1) = 70$$

a, b, c 가 자연수이므로 $a+1, b+1, c+1$ 은 2 이상의 자연수

$$(a+1)(b+1)(c+1) = 2 \times 5 \times 7$$

$$\therefore a+b+c = 1+4+6 = 11$$

207. ③

$$a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 2abc$$

$$= a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b + 2abc$$

$$= (b+c)a^2 + (b^2+2bc+c^2)a + bc(b+c)$$

$$= (b+c)a^2 + (b+c)^2a + bc(b+c)$$

$$= (b+c)\{a^2 + (b+c)a + bc\}$$

$$= (a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\text{그러므로 } (a+b)(b+c)(c+a) = 126$$

$$a < b < c \text{이고 } 126 = 3 \times 6 \times 7 \text{이므로}$$

$$a+b=3 \quad \dots \text{㉠}$$

$$c+a=6 \quad \dots \text{㉡}$$

$$b+c=7 \dots \text{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하면

$$a=1, b=2, c=5 \text{이다.}$$

$$\text{그러므로 } a+b+c = 1+2+5 = 8$$

208. ④

$$3f(1) = \frac{3}{2}f(2) = f(3) = 6 \text{에서}$$

$$f(1)=2, f(2)=4, f(3)=6$$

$$f(1)-2=0, f(2)-2 \times 2=0, f(3)-2 \times 3=0$$

따라서 $f(x)-2x$ 는 $x-1, x-2, x-3$ 을 인수로 갖는다.

이때, $f(x)$ 는 x^3 의 계수가 3인 삼차식이므로

$$f(x)-2x = 3(x-1)(x-2)(x-3) \text{에서}$$

$$f(x) = 3(x-1)(x-2)(x-3) + 2x$$

따라서 $f(x)$ 를 $x-5$ 로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의해

$$f(5) = 3 \times 4 \times 3 \times 2 + 10 = 82$$

209. ④

$$P(1)=2, P(2)=8, P(3)=18 \text{에서}$$

$$P(x)=2x^2 \text{는 } x=1, 2, 3 \text{을 근으로 가지므로}$$

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3) + 2x^2$$

$$\text{따라서 } P(5) = 74$$

210. ②

나머지정리에 의해

$$f(1)=1, f(3)=3, f(5)=5, \dots, f(17)=17$$

$$\text{이므로 } f(1)-1 = f(3)-3 = f(5)-5 = \dots = f(17)-17 = 0$$

즉, 인수정리에 의해 다항식 $f(x)-x$ 는

$$x-1, x-3, x-5, \dots, x-17 \text{을 인수로 갖는다.}$$

$$\text{따라서 } f(x)-x = a(x-1)(x-3)(x-5) \dots (x-17)$$

$$\text{에서 } f(x) = a(x-1)(x-3)(x-5) \dots (x-17) + x$$

$$\text{이때, } f(0) = a \times (-1) \times (-3) \times (-5) \times \dots \times (-17) = 1$$

$$\text{에서 } a = -\frac{1}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times 17}$$

따라서 $f(x)$ 를 $x-18$ 로 나눈 나머지는 나머지정리에 의해

$$f(18) = a \times 17 \times 15 \times \dots \times 5 \times 3 \times 1 + 18$$

$$= (-1) + 18 = 17$$

211. ⑤

$$x^3 + ax - 2, 2x^3 + 2x^2 + bx - 8 \text{ 두식을 최고차항의 계수를}$$

$$\text{맞춰서 빼면 } 2x^2 + (b-2a)x - 4 = 0 \text{이므로}$$

$$2x^2 + (b-2a)x - 4 \text{의 식에 나누기 2를 하고 } x+1 \text{과 } 2x+4 \text{를}$$

각각 곱하면 원래 식이 나오므로 계수비교법을 이용하여 풀

수 있다.

$$a - b = 5$$

212. ②

$x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12 = (x-2)^2(x+1)(x-3)$ 으로 인수분해가 되며 주어진 조건에 의해 $x-a$ 가 $f(x)$, $g(x)$ 모두의 인수가 되어야 하므로

$(x-2)(x+1)$, $(x-2)(x-3)$ 으로 두 다항식을 정의할 수 있다. 따라서 $f(4)+g(4)=12$ 이다.

213. ⑤

이차함수 $y = x^2 + 3x - 4$ 의 그래프와 직선 $y = x - k$ 가 만나지 않음

$$\text{므로 } x^2 + 3x - 4 = x - k$$

$$x^2 + 2x - 4 + k = 0$$

$$\frac{D}{4} = 1 - (-4 + k) < 0$$

$$k > 5$$

214. ④

[풀이]

$$a^3 + a^2c + ac^2 + c^3 = ab^2 + b^2c$$

$$(a+c)(a^2 - ac + c^2) + ac(a+c) = b^2(a+c)$$

$$(a+c)(a^2 + c^2 - b^2) = 0$$

a, b, c 는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a+b > 0$ 이다.

$a^2 + c^2 - b^2 = 0$ 이므로 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형이다.

215. ①

$$a^2c^2 - 4b^2c^2 - c^4 = a^2c^2 - a^4 + 4a^2b^2$$

$$a^4 - c^4 - 4b^2(a^2 + c^2) = 0$$

$$(a^2 + c^2)(a^2 - c^2 - 4b^2) = 0$$

$$a^2 + c^2 \neq 0 \text{ 이므로 } a^2 = c^2 + 4b^2 \text{ 이다.}$$

$\neg$, a 가 빗변인 직각삼각형으로 성립

$$\perp, c^2 = a^2 - 4b^2 \text{ 이므로}$$

$$a + 2b < c^2$$

$$a + 2b < a^2 - 4b^2 = (a+2b)(a-2b)$$

$1 < a - 2b$, 반례 $a=5, b=2, c=3$ 이면 성립하지 않는다.

$$\sqsubset, a^2 = c^2 + 4b^2 \text{ 이므로 } a \text{가 빗변인 직각삼각형}$$

216. ⑤

$$a^3 + c^3 - ab^2 + a^2c - b^2c + ac^2 = 0$$

$$(-a-c)b^2 + ac(a+c) + (a+c)(a^2 - ac + c^2) = 0$$

$$(-a-c)(b^2 - a^2 - c^2) = 0$$

$$a+c \neq 0 \text{ 이므로 } b^2 = a^2 + c^2$$

$\therefore$ 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형

217. ③

$$(가): (a-2c)^3 = 0$$

$$\therefore a = 2c$$

$$(나): (a^3 - b^3) + ab(a-b) - c^2(a-b) = 0$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2 + ab - c^2) = 0$$

$$(a-b)\{(a+b)^2 - c^2\} = 0$$

$$a+b+c \neq 0 \text{ 이고 } a+b \neq c \text{ 이므로}$$

$$\therefore a = b$$

$$a = b = 2c$$

$$\overline{CH} = \sqrt{(2c)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}c$$

$$S = \frac{1}{2} \times c \times \frac{\sqrt{15}}{2}c = \frac{\sqrt{15}}{4}c^2 = \sqrt{15}$$

$$\therefore c = 2$$

$$(\text{둘레의 길이}) = 5c = 10$$

218. ⑤

(나)에서 $(a^2 + b^2)^2 - c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2) = 0$ 이므로 삼각형 ABC는 c 가 빗변인 직각삼각형이다.

$$(다)에서 \frac{1}{2}ab = 54 \Rightarrow ab = 108$$

$$(가)에서 (3a+4b)^2 = 25c^2$$

$$\Rightarrow (9a^2 + 24ab + 16b^2) = 25(a^2 + b^2)$$

$$\Rightarrow 16a^2 - 24ab + 9b^2 = 0$$

$$\Rightarrow (4a-3b)^2 = 0 \text{ 이므로 } 4a = 3b \text{ 이다. 이 조건을 만족하는 값은 } a=9, b=12, c=15 \text{ 이므로 둘레의 길이는 } 36 \text{ 이다.}$$

219. 54

주어진 식을 a 에 대한 내림차순으로 정리하면

$$(b+c)a^2 - (b^2 - c^2)a - bc(b+c) = 0$$

$$(b+c)a^2 - (b+c)(b-c)a - bc(b+c) = 0$$

양변을 $b+c$ 로 나누면

$$a^2 - (b-c)a - bc = 0, (a-b)(a+c) = 0 \therefore a = b (\because a+c \neq 0)$$

$$b = a \text{ 를 대입하면 } 6a + 2b = 6a + 2a = 8a = 5c \therefore a:b:c = 5:5:8$$

$$a = 5k, b = 5k, c = 8k \text{ 로 놓으면 삼각형 ABC는}$$

이등변삼각형이므로 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$ 에 수선을 내리고,

수선의 발을 H라 하면 $\overline{BC} = 4k$

삼각형 ABH에서 피타고라스의 정리를 이용하면 $\overline{AH} = 3k$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 8k \times 3k = 12k^2 = 108, k = 3$$

따라서 $\overline{AB} = \overline{AC} = 15$, $\overline{BC} = 24$ 가 되므로 삼각형의 둘레의 길이는 54가 됨을 알 수 있다.

220. ④

직육면체의 부피가 $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$ 이므로

$$f(x) \times (2x+1) = 2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$$

이때, $g(x) = 2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$ 라 하면

$$g(-1) = -2 + 7 - 7 + 2 = 0$$

이므로 $g(x)$ 는 $x+1$ 을 인수로 갖는다.

따라서 $g(x)$ 를 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 7 & 7 & 2 \\ & & -2 & -5 & -2 \\ \hline & 2 & 5 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\text{즉, } f(x) \times (2x+1) = (x+1)(2x^2+5x+2)$$

$$= (x+1)(2x+1)(x+2)$$

따라서 $f(x) = (x+1)(x+2)$ 이므로 $f(x)$ 의 인수인 것은 ④이다.

221. ④

밑면의 반지름의 길이가 $x+a$, 높이가 $x+b$ 이므로

$$\text{부피는 } (x+a)^2(x+b)\pi = (x^3+8x^2+20x+16)\pi \text{ 이고}$$

$$x^3+8x^2+20x+16 = (x+2)^2(x+4) \text{ 이므로}$$

$$a=2, b=4 \text{ 이다.}$$

원기둥의 겉넓이는

$$\text{밑면의 넓이가 } (x+2)^2\pi$$

$$\text{옆넓이가 } 2(x+2)\pi \times (x+4) \text{ 이므로}$$

$$2(x+2)^2\pi + 2(x+2)(x+4)\pi = (x+2)\{2(x+2)+2(x+4)\}\pi$$

$$= 4\pi(x+2)(x+3)$$

$$c=3$$

$$\therefore a+b+c=2+4+3=9$$

222. ②

곱셈 공식에 따라

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \text{ 이므로}$$

$$81 = 29 + 2(ab+bc+ca), \quad ab+bc+ca = 26 \text{ 이다. 따라서}$$

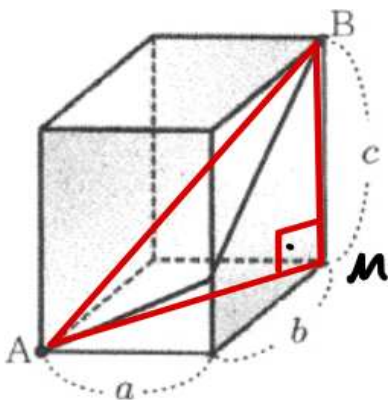
$$\triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCA = \frac{ab}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{ca}{2} = \frac{ab+bc+ca}{2} = 13$$

이다.

223. $\sqrt{34}$

모든 모서리 길이의 합: $4a+4b+4c=32$

$$a+b+c=8 \cdots \textcircled{1}$$

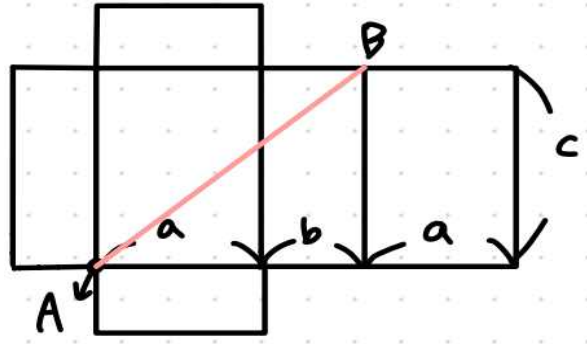


$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{30}$$

$$a^2+b^2+c^2=30 \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{부피: } abc = 10 \cdots \textcircled{3}$$

선의 길이를 알기 위해서 직육면체의 전개도를 그린다.



실의 길이의 최솟값은 $\sqrt{(a+b)^2+c^2}$ 이다.

$$(a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 30$$

$$ab+bc+ca = 17 \cdots \textcircled{4}$$

④의 식에 c 를 곱하자

$$abc + c^2(a+b) = 17c$$

$$10 + c^2(8-c) - 17c = 0$$

$$-c^3 + 8c^2 - 17c + 10 = 0$$

$$(c-2)(c-1)(-c+5) = 0$$

$$\therefore c = 1 \text{ or } 2 \text{ or } 5$$

$$\textcircled{1} c = 1 \text{ 이면 } a+b=7$$

$$a^2+b^2=29$$

$$b=7-a$$

$$a^2+(7-a)^2=29$$

$$2a^2-14a+20=0$$

$$a^2-7a+10=0$$

$$a=2 \text{ or } 5$$

$$\rightarrow (2, 5, 1), (5, 2, 1)$$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2+2ab} = \sqrt{30+10} = \sqrt{40}$$

$$\textcircled{2} c = 2 \text{ 이면}$$

$$a+b=6$$

$$a^2+b^2=26$$

$$a^2+(6-a)^2=26$$

$$2a^2-12a+10=0$$

$$a^2-6a+5=0$$

$$a=1 \text{ or } 5$$

$$\rightarrow (1, 5, 2), (5, 1, 2)$$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2+2ab} = \sqrt{30+5} = \sqrt{35}$$

$$\textcircled{3} c = 5 \text{ 이면}$$

$$a+b=3$$

$$a^2+b^2=5$$

$$a^2+(3-a)^2=5$$

$$2a^2 - 6a + 4 = 0$$

$$a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$a = 1 \text{ or } 2$$

$$\rightarrow (1, 2, 5), (2, 1, 5)$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab} = \sqrt{30 + 4} = \sqrt{34}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ 중 최솟값은 } \sqrt{34}$$

224. ③

직육면체의 가로, 세로, 높이를 a, b, c 라 두면

$$4(a+b+c) = 52, \quad 2(ab+bc+ca) = 108 \text{ 이므로}$$

$$a+b+c = 13, \quad ab+bc+ca = 54$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 169 - 108 = 61$$

$$2(a^2 + b^2 + c^2) = 122$$

225. ③

$$4x^3 + 20x^2 + 28x + 12 = 4(x^3 + 5x^2 + 7x + 3)$$

$$= 4(x+1)(x+3)(x+1)$$

$$= (4x+4)(x+3)(x+1) \quad \dots \textcircled{A}$$

$$= (2x+2)(2x+6)(x+1) \quad \dots \textcircled{B}$$

③, ④의 두 가지 경우가 가능하므로

$$\textcircled{A} \text{에서 } 4x+4+x+3+x+1 = 6x+8$$

$$\textcircled{B} \text{에서 } 2x+2+2x+6+x+1 = 5x+9$$

$$\text{따라서 } p=6, q=8, r=5, s=9 \text{ 이므로 } 6-8+5-9 = -6$$

226. ④

$$140 = x \text{ 라 하자.}$$

$$x^2 - 8x - 63 = (x+3)(x-21) \text{ 이므로}$$

$$(100+40)^2 - 18 \times 140 - 63 = (140+3)(140-21)$$

$$= 143 \times 119$$

$$= 11 \times 13 \times 7 \times 17$$

$$= 17 \times 13 \times 11 \times 7$$

$$x=17, y=13, z=11, w=7 \text{ 이므로}$$

$$x+y+z-w = 41-7 = 34$$

$$227. (1) (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(2) P(x)Q(x) = -x^4 - 2x^3 - 2x^2 - x + 6$$

$$(3) P(x) = -x^2 - x + 2, \quad Q(x) = x^2 + x + 3$$

$$(1) (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

(2)

$$\{P(x)\}^3 + \{Q(x)\}^3 = \{P(x) + Q(x)\}^3 - 3P(x)Q(x)\{P(x) + Q(x)\}$$

$$15x^4 + 30x^3 + 30x^2 + 15x + 35 = 125 - 15P(x)Q(x)$$

$$15P(x)Q(x) = -15x^4 - 30x^3 - 30x^2 - 15x + 90$$

$$P(x)Q(x) = -x^4 - 2x^3 - 2x^2 - x + 6$$

$$(3) P(x)Q(x) = -x^4 - 2x^3 - 2x^2 - x + 6$$

$$= -(x-1)(x^3 + 3x^2 + 5x + 6)$$

$$= -(x-1)(x+2)(x^2 + x + 3)$$

$$= -(x^2 + x - 2)(x^2 + x + 3)$$

$P(x) + Q(x) = 5$ 이고 $P(x)$ 의 최고차항의 계수는 음수이므로.

$$P(x) = -x^2 - x + 2, \quad Q(x) = x^2 + x + 3$$

228. ⑤

모든 수는 복소수이다.

229. ③

$$5-2i \text{의 실수부분 } a=5, \text{ 허수부분 } b=-2$$

$$\text{따라서 } a+b = 5-2 = 3$$

230. ③

ㄱ. 4의 제곱근은 ± 2 이다.(거짓)

ㄴ. $a > 0$ 일 때 $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$ 이다.(참)

ㄷ. 복소수 $5+2i$ 의 허수부분은 2이다.(참)

ㄹ. 복소수 $2i, 3i$ 에 대하여 $2i < 3i$ 이다. (거짓)

231. ④

$$(1-2i) + (2+3i) = (1+2) + (-2+3)i = 3+i$$

$$a=3, b=1, a+b=4$$

232. ④

$$(3+2i) - (2-i) = 3+2i-2+i = 3+i$$

$$x=1, y=3$$

$$\therefore x+y = 1+3 = 4$$

233. ④

$$(3-i)x + (1+i)y = (3x+y) + (-x+y)i \text{ 이므로}$$

$$3x+y=2, -x+y=6 \text{ 두 식을 연립하면 } x=-1, y=5$$

$$\therefore x+y = 4$$

234. ③

$$(3-5i) + (-1+2i) + (1+i)(1-i) = 2-3i+1+1 = 4-3i$$

235. ⑤

$$x+2=3, x=1 \text{ 이고 } y-1=3, y=4 \text{ 이다.}$$

$$\therefore x+y = 5$$

236. ④

$$(1+2i)(2-i) = (2+2) + (4-1)i = 4+3i$$

237. ②

$$(1+i)(1-i) = 1-i^2 = 2$$

238. ④

$$1+4 = 5$$

239. ②

$$x+y=4, xy=5 \text{ 이므로}$$

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 64 - 15 \times 4 = 4$$

240. ③

$$\alpha + \beta = (4+3) + (-1+1)i = 7$$

241. ③

[풀이]

$$a+3i=2+(b+2)i$$

에서 a, b 가 실수이므로 계수비교에 의해

$$a=2, b+2=3$$

따라서

$$a=2, b=1 \quad \therefore a+b=3$$

242. ①

$$(2+i)i = a+bi$$

$$2i+i^2 = a+bi$$

$$-1+2i = a+bi$$

그러므로 $a=-1, b=2$ 이다.따라서 $a+b=(-1)+2=1$ 이다.

243. ③

$$3x+(x-6y)i=6-4i$$
에서

$$3x=6, x-6y=-4 \text{이므로 } x=2, y=1$$

따라서 $x+y=2+1=3$

244. ②

$$1+i+\frac{1}{1+i}=1+i+\frac{1-i}{2}=\frac{3+i}{2}$$

$$a=\frac{3}{2}, b=\frac{1}{2}$$

245. ②

본식을 분모의 실수화 하면 $\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=i$ 이므로

$$a=0, b=1 \quad a+2b=2$$

246. ①

복소수 상등에 의하여

$$(x-y)+(2x-3y)i=3+7i$$
에서

$$x-y=3, 2x-3y=7 \text{ 연립하여 풀면}$$

$$x=2, y=-1$$

$$\therefore x+y=1$$

247. ③

(4x-6)+(x+2y)i=2-4i에서 복소수 상등에 의하여

실수부 $4x-6=2$, 허수부 $x+2y=-4$ 에서연립방정식을 풀면 $x=2, y=-3$ 이므로

$$\therefore xy=-6$$

248. ①

$$(1+i)(x-yi)+2i(x+yi)=1-3i$$

$$x-yi+\xi+y+2\xi-2y=(x-y)+(3x-y)i=1-3i \text{ 이므로}$$

$$x-y=1, 3x-y=-3, \text{ 즉 } x=-2, y=-3 \text{ 이다.}$$

따라서 구하고자 하는 값은 $xy=6$ 이다.

249. ③

$$z(1+i)+\bar{z}(5+i)=12 \text{에 대해 } z=a+bi \text{ (a, b는 실수)라 하면}$$

$$(a+bi)(1+i)+(a-bi)(5+i)=12$$

$$\{(a-b)+(a+b)i\}+\{(5a+b)+(a-5b)i\}=6a+(2a-4b)i=12$$

$$6a=12 \text{에서 } a=2 \text{이고 } 2a-4b=0 \text{에서 } b=1 \text{가 되어 } z=2+i$$

 z 를 근으로 갖는 이차방정식은 $\bar{z}=2-i$ 도 근으로 가지므로

두 근의 합은 4, 두 근의 곱은 5

따라서 최고차항의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-4x+5=0$

250. ④

$$z=a+bi, \bar{z}=a-bi \text{를 본 식에 대입하면}$$

$$3(a+bi)-2(a-bi)=2+15i \text{이므로}$$

$$3a-2a=2, 3b+2b=15$$

$$a=2, b=3 \text{이므로 } z+\bar{z}=2a=4 \text{이다.}$$

[다른 풀이]

$$3z-2\bar{z}=2+15i \text{에서 양변 켈레복소수를 취하면}$$

$$3\bar{z}-2z=2-15i \text{이고 이 두식을 변끼리 더해주면}$$

$$z+\bar{z}=4 \text{이다.}$$

251. ④

$$z=a+bi \text{라 하고 주어진 식에 대입하면}$$

$$(1-i)(a+bi)+5i(a-bi)=5-3i$$

$$\Rightarrow (a+6b)+(4a+b)i=5-3i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+6b=5 \\ 4a+b=-3 \end{cases}, \therefore a=-1, b=1$$

$$z=-1+i \text{ 이다.}$$

252. ④

$$z=a+bi \text{라 하자.}$$

$$2iz+z=\bar{z}i+i \text{에서}$$

$$2i(a+bi)+2=(a-bi)i+i$$

$$2-3b+(a-1)i=0$$

$$a=1, b=\frac{2}{3} \quad \therefore z=1+\frac{2}{3}i$$

$$z+\bar{z}=2, z-\bar{z}=\frac{4}{3}i$$

$$2+\frac{1}{\frac{4}{3}i \times i}=2-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$$

253. ①

$$z=2x-1+xi-i$$

$$=(2x-1)+(x-1)i$$

$z = -\bar{z}$ 이라면 z 의 실수부가 0

$$2x - 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}$$

254. ④

$z + \bar{z} = 0$ 이므로 복소수 z 의 실수부분이 0이다. 따라서

$$z = x^2 - (4+i)x - 5 + 3i = (x^2 - 4x - 5) + (3-x)i \text{에서}$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$x = -1$ 또는 $x = 5$ 이므로 실수 x 의 값의 합은 4이다.

255. ②

$$z = (1+i)x^2 + (3i-1)x + 2(i-3)$$

$$= (x^2 - x - 6) + (x^2 + 3x + 2)i$$

$$= (x-3)(x+2) + (x+1)(x+2)i$$

$$\bar{z} = (x-3)(x+2) - (x+1)(x+2)i$$

$$z + \bar{z} = 2(x-3)(x+2) = 0$$

$$x = 3 \text{ 또는 } x = -2$$

$z \neq 0$ 이므로 $x = 3$

256. ③

$$\text{풀이)} \quad \frac{2-i}{3+4i} = \frac{(2-i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{2-11i}{25} \text{ 이므로}$$

$$\frac{\bar{z}}{z} = \frac{2+11i}{25}$$

257. ②

$z = a+bi$, $w = c+di$ 라고 하면 ($b, d \neq 0$)

$$\bar{z} + w = 0 \rightarrow (a-bi) + (c+di) = 0$$

$$(a+c) + (-b+d)i = 0$$

$$z = a+bi, w = (-a)+bi$$

$$\neg. z - w = (a+bi) - \{(-a)+bi\} = a+bi + a-bi = 2a \text{ (실수)}$$

$$\neg. z + w = a+bi + \{(-a)+bi\} = 2bi \text{ (허수)}$$

$$\neg. z\bar{w} = (a+bi)\{(-a-bi)\} = -(a+bi)^2$$

$$= -(a^2 + 2abi + b^2i^2) = -(a^2 - b^2) - 2abi$$

if) $a = 0$ 이면 실수가 나오므로 항상 허수가 아니다.

258. ③

$$z + \bar{\omega} = 0 \text{ 이므로}$$

$$z = a+bi \text{ 라 하면 } \omega = -a+bi \text{ 이다.}$$

$$\neg. i(z+\omega) = i(a+bi-a+bi) = i(2bi) = -2b$$

$$\neg. \bar{z}\omega = (a-bi)(-a+bi) = -(a-bi)^2 = -a^2 + 2abi + b^2 \text{ 이므로}$$

실수가 아니다.

$$\neg. \frac{z}{\omega} = \frac{a+bi}{-a-bi} = -1$$

259. ③

$$\alpha = (2-n-5i)^2 = (2-n)^2 - 25 - 10(2-n)i$$

$$= (n^2 - 4n - 21) - 10(2-n)i = (n-7)(n+3) - 10(2-n)i$$

따라서 n 은 2, 7 중에 하나인데, $n = 2$ 일 경우 $\alpha = -25$, α^2 은 양의 실수가 되므로 모순이다. 따라서 구하고자 하는 값은 $n = 7$ 이다.

260. ②

z 는 순허수이므로 실수부분이 0이어야하므로 $a-3=0$

따라서 $a = 3$

261. ①

$$\sqrt{-3}\sqrt{-12} = \sqrt{3}i\sqrt{12}i = -6$$

262. ①

$$\sqrt{(-2)^2} + \sqrt{-2}\sqrt{-8} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}} + \frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{2}}$$

$$= 2 - 4 + \sqrt{3} - \sqrt{3} = -2 \text{ 다.}$$

263. ⑤

$$z = \sqrt{-2}\sqrt{-2} + \frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-3}} = -\sqrt{4} + (-\sqrt{-1}) = -2 - i \text{ 이므로}$$

$$(z+2i)(\bar{z}-2i) = (-2+i)(-2-i) = 4 - i^2 = 5$$

$$264. a = -3\sqrt{3}, b = 3\sqrt{3} - 4$$

$$\sqrt{-3}\sqrt{-9} + \sqrt{3}\sqrt{-9} + \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{-2}} = -3\sqrt{3} + 3\sqrt{3}i - 4i$$

$$a = -3\sqrt{3}, b = 3\sqrt{3} - 4$$

265. ③

$$i^2 + 2i^3 + 3i^4 + \dots + 2022i^{2023} =$$

$$(i^2 + 2i^3 + 3i^4 + 4i^5) \times 505 + 2021i^{2022} + 2022i^{2023} \text{ 이므로}$$

$$\text{정리하면 } -1021i - 1011 \text{ 이므로 } a = -1011, b = -1012$$

$$b - 3a = 2021$$

266. ⑤

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i,$$

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i \text{ 이므로}$$

$$a+bi = (-i) + i^2 + (-i)^3 + i^4 + \dots + i^{100} + (-i)^{101}$$

$$= (-i)^{101} = -i$$

$$a = 0, b = -1$$

$$\therefore a - bi = i$$

267. ④

$$\bar{\alpha} + 3\beta = i^{2021} + 2i^{2022} + 3i^{2023}$$

$$= (i^4)^{505} \times i + 2 \times (i^4)^{505} \times i^2 + 3 \times (i^4)^{505} \times i^3$$

$$= i - 2 - 3i$$

$$= -2 - 2i$$

$$\text{이므로 } \alpha + 3\bar{\beta} = \overline{(-2 - 2i)} = -2 + 2i$$

$$\begin{aligned}
 & \therefore \bar{\alpha}\alpha + 3\bar{\alpha}\bar{\beta} + 3\alpha\beta + 9\bar{\beta}\bar{\beta} \\
 & = \bar{\alpha}(\alpha + 3\bar{\beta}) + 3\beta(\alpha + 3\bar{\beta}) \\
 & = (\alpha + 3\bar{\beta})(\bar{\alpha} + 3\beta) \\
 & = (-2 + 2i)(-2 - 2i) \\
 & = 4 + 4 = 8
 \end{aligned}$$

268. ②

 $z^2 = -i, z^4 = -1, z^6 = i, z^8 = 1$ 임을 이용하자.

$$\begin{aligned}
 z^{18} &= (z^8)^2 \times z^2 = z^2 = -i, \quad z^{20} = (z^8)^2 \times z^4 = -1, \\
 z^{22} &= (z^8)^2 \times z^6 = i, \quad z^{24} = (z^8)^3 = 1, \quad z^{26} = (z^8)^3 \times z^2 = -i, \\
 z^{28} &= (z^8)^3 \times z^4 = -1, \quad z^{30} = (z^8)^3 \times z^6 = i \text{ 이므로 주어진 식은} \\
 & -18i - 20 + 22i + 24 - 26i - 28 + 30i = -24 + 8i \text{ 가 되어 } a = -24, \\
 & b = 8 \quad \therefore b - a = 30
 \end{aligned}$$

269. ⑤

$$z = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1+i)}{(1+i)^2} = \frac{2}{2i} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

$$\begin{aligned}
 a+bi &= 1+z+z^2+z^3+\dots+z^{2025} \\
 &= 1+(-i)+(-i)^2+(-i)^3+\dots+(-i)^{2025} \\
 &= (1-i-1+i) \times 506 + (-i)^{2024} + (-i)^{2025} \\
 &= 1-i
 \end{aligned}$$

따라서 $a=1, b=-1$ 그러므로 $a-b=1-(-1)=2$ 이다.

270. ①

$$\begin{aligned}
 i+2i^2+3i^3+4i^4 &= i-2-3i+4=2-2i \\
 4\text{개씩 } 5\text{번 반복되므로 } (2-2i) \times 5 &= 10-10i \\
 a=10, b=-10 \quad ab &= -100
 \end{aligned}$$

271. ①

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{1-i}{\sqrt{2}} \text{ 에서 } z^2 = \frac{-2i}{2} = -i \text{ 이므로} \\
 z^4 &= (-i)^2 = -1, \quad z^6 = i, \quad z^8 = 1 \text{ 이 되어} \\
 \text{연속된 4개의 합은 } -i-1+i+1 &= 0 \\
 \text{따라서 } z^2+z^4+z^6+z^8+\dots+z^{98}+z^{100} &\text{는 총합이 50개이므로} \\
 50 &= 4 \cdot 12 + 2 \text{로 } z^2+z^4+12 \cdot 0 = -i-1
 \end{aligned}$$

272. ①

$$\begin{aligned}
 z^2 &= \frac{(1+i)^2}{2} = i \text{ 이므로, } (z^2)^4 = z^8 = 1 \text{ 이므로} \\
 z^{2024} &= (z^8)^{253} = 1
 \end{aligned}$$

273. ③

$$\begin{aligned}
 z &= 1+i \text{ 일 때 } z^2 = 2i \text{ 이므로} \\
 z^{16} &= (2i)^8 = 2^8 = 256 \\
 \bar{z} &= 1-i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{z}{\bar{z}} &= \frac{1+i}{1-i} = \frac{2i}{2} = i \\
 \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{2026} &= i^{2026} = i^2 = -1 \\
 \therefore z^{16} + \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{2026} &= 255
 \end{aligned}$$

274. 24

$$z_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \text{ 이므로 } z_1^2 = \frac{2i}{2} = i, \quad z_1^4 = -1, \quad z_1^8 = 1 \text{ 이다.}$$

$$z_2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \text{ 이므로 } z_2^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \quad z_2^3 = 1 \text{ 이다.}$$

따라서 조건을 만족하려면 구하고자 하는 자연수 n 의 최솟값은 $3 \times 8 = 24$ 다.

275. ①

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^n + \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n &= \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2\right\}^{\frac{n}{2}} + \left\{\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3\right\}^{\frac{n}{3}} \\
 i^{\frac{n}{2}} + 1^{\frac{n}{3}} &= \{(i^4)^{\frac{n}{8}} + 1^{\frac{n}{3}}\} = 2 \text{ 이므로 } n \text{ 은 } 24 \text{ 의 배수여야 한다.} \\
 \text{따라서 } 24, 48, 72, 96, \text{ 총 } 4\text{개다.}
 \end{aligned}$$

276. ②

 $(1+\sqrt{3}i)^n$ 에서 $n=1$ 일 때, $1+\sqrt{3}i$ $n=2$ 일 때, $(1+\sqrt{3}i)^2 = -2+2\sqrt{3}i$ $n=3$ 일 때, $(1+\sqrt{3}i)^3 = (-2+2\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i) = -8$ 따라서 $n=3m$ (m 은 자연수) 일 때, $(1+\sqrt{3}i)^n$ 의 값은 음의 정수이고, $n=6m$ 일 때, (m 은 자연수)의 값은 양의 정수이다.

$$\text{즉, } (1+\sqrt{3}i)^{6m} = \{(1+\sqrt{3}i)^6\}^m = 16^k$$

$$\text{에서 } 64^m = 16^k, \quad (2^6)^m = (2^4)^k, \quad 2^{6m} = 2^{4k}$$

$$\therefore 6m = 4k \quad (m, k \text{는 자연수})$$

따라서 m 은 2의 배수, k 는 3의 배수이고,

$$1 \leq 6m \leq 1000 \text{ 에서 } \frac{1}{6} \leq m \leq \frac{1000}{6}$$

이므로 자연수 m, k 의 순서쌍 (m, k)는

(2, 3), (4, 6), (6, 9), ..., (163, 249)

따라서 순서쌍 (n, k)는

(12, 3), (24, 6), (36, 9), ..., (978, 249)

의 83개이다.

▶ 다른풀이

$$(1+\sqrt{3}i)^n = 16^k \text{ 에서}$$

$$1+\sqrt{3}i = x \text{ 라 하면 } x-1 = \sqrt{3}i$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2 - 2x + 1 = -3, \quad x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$\text{이때 } (x+2)(x^2-2x+4)=0, \quad x^3+8=0$$

$$\therefore x^3 = -8$$

$$\text{따라서 } x^6 = (-8)^2 = 64 \text{ 이므로 } (1+\sqrt{3}i)^6 = 64$$

따라서 n 이 6의 배수일 때, $(1+\sqrt{3}i)^n$ 의 값은 양의 정수이다.

$$\text{이때, } (1+\sqrt{3}i)^n = 16^k \text{ 에서}$$

$$\{(1+\sqrt{3}i)^6\}^{\frac{n}{6}} = 16^k, \quad 64^{\frac{n}{6}} = 16^k$$

$$(2^6)^{\frac{n}{6}} = (2^4)^k, \quad 2^n = 2^{4k}$$

이때, n 은 6의 배수이고 $4k$ 는 4의 배수이므로 조건을 만족시키는 자연수 n 은 6과 4의 최소공배수인 12의 배수이다.

한편, $1000 = 12 \times 83 + 4$ 이므로 조건을 만족시키는 1000 이하의 두 자연수 n, k 의 순서쌍 (n, k) 의 개수는 83개이다.

277. ①

ㄱ. (O)

$$z^3 = \frac{-3\sqrt{3}+9i+3\sqrt{3}-i}{8} = i$$

ㄴ. (X)

$$z^3 \times (\bar{z})^3 = z^3 \times (\overline{z^3}) = i \times (-i) = 1$$

ㄷ. (X)

$$z^6 = -1, \quad z^6 + 1 = 0$$

$$(z^2+1)(z^4-z^2+1) = 0$$

$$z^2+1 \neq 0 \text{ 이므로 } z^4-z^2+1 = 0$$

$$(z+z^3+z^5)(z^2+z^4+z^6) = z^3(1+z^2+z^4)^2 = z^3(2z^2)^2$$

$$= 4z^7 = -4z = 2\sqrt{3}-2i$$

278. ④

$$\text{풀이) } z = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$$

$z^n + z^{2n} + z^{3n} = -1$ 을 만족시키는 100이하의 모든 자연수 n 의 개수

$$z = \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \text{ 에 대하여}$$

$$z^2 = \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \frac{-2-2\sqrt{3}i}{4} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$z^3 = z^2 \cdot z = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{3}i}{2} = -1$$

$\therefore$ 이므로

$$z^3 = -1 \quad z^2 - z + 1 = 0 \text{ 이고, } z^6 = 1 \text{ 이므로}$$

자연수 k 에 대하여

(i) $n=1$ 일 때,

$$z + z^2 + z^3 = z + z^2 - 1 = 2z - 2$$

(ii) $n=2$ 일 때,

$$z^2 + z^4 + z^6 = z^2 - z + 1 = 0$$

(iii) $n=3$ 일 때,

$$z^3 + z^6 + z^9 = (-1) + 1 + (-1) = -1$$

(iv) $n=4$ 일 때,

$$z^4 + z^8 + z^{12} = -z - z^2 + 1 = -2z + 2$$

(v) $n=5$ 일 때,

$$z^5 + z^{10} + z^{15} = -z^2 + z - 1 = 0$$

(vi) $n=6$ 일 때,

$$z^6 + z^{12} + z^{18} = 1 + 1 + 1 = 3$$

이므로

이상에서 $z^n + z^{2n} + z^{3n} = -1$ 을 성립하도록 하는 n 은 3의 배수에서 6의 배수를 제외한 수이므로 100 이하의 자연수 n 의 개수는

$$33 - 16 = 17$$

279. ③

$$\alpha = \frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2(1+i)}{2} = 1+i, \quad \alpha^2 = 2i$$

$$\beta = \frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2(i-1)}{2} = i-1, \quad \beta^2 = -2i$$

$$(2\alpha^2 + \beta)(2\beta^2 + \alpha) = (4i + i - 1)(-4i + 1 + i) = (5i - 1)(-3i + 1) \\ = 15 + 3i + 5i - 1 = 14 + 8i$$

$$a = 14, \quad b = 8$$

$$\therefore a + b = 22$$

280. ④

$$z_1 \bar{z}_2 = 1 \text{ 이므로 } z_1 = \frac{1}{z_2} \text{ 이고, } \bar{z}_2 = \frac{1}{z_1}, \quad z_2 = \frac{1}{z_1} \text{ 이다.}$$

$$z_1 + \frac{1}{z_1} = \frac{1}{z_2} + z_2 = -3i \text{ 이므로, } \bar{z}_2 + \frac{1}{z_2} = 3i \text{ 이다.}$$

281. $12 - 26i$

$$\frac{(z-\bar{z})i^3 - (z+\bar{z})i}{z} = \frac{(z-\bar{z})(-i) - (z+\bar{z})i}{z} = -2i$$

$$f(n) = (-2i)^n$$

$$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = -2i - 4 + 8i + 16 - 32i \\ = 12 - 26i$$

282. ⑤

$$z = a + bi \text{ 라 할 때, 주어진 조건에 의해 } a^2 - b^2 = -8,$$

$$ab = 4\sqrt{3}$$

$$b = \frac{4\sqrt{3}}{a} \text{ 을 대입하면 } a^4 + 8a^2 - 48 = 0 \text{ 이므로 } a^2 = 4$$

$$z + \bar{z} < 0 \text{ 이므로 } a < 0 \text{ 이다. 그러므로 } a = -2, b = 2\sqrt{3}$$

$$\text{그러므로 } z = -2 - 2\sqrt{3}i$$

$$z^2 = -8 + 8\sqrt{3}i \text{ 에서 } z^2 + 8 = 8\sqrt{3}i \text{ 를 양변 제곱해서 정리하면 } \\ z^4 + 16z^2 = -256 \text{ 이다.}$$

주어진 식을 정리하면

$$\frac{1}{z}(z^4 + 16z^2 - 9z + 160) \text{에 값을 대입해 정리하면 } 3 - 12\sqrt{3}i$$

283. ④

$$\neg. \bar{\alpha} = 1, \bar{\beta} = i \text{ 일 때, } \bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2 = 1^2 + i^2 = 1 + (-1) = 0$$

그런데 $\alpha = 1, \beta = -i$ 이므로 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ (거짓)

$$\neg. \alpha\beta = 0 \text{ 일 때, } \alpha = 0 \text{ 또는 } \beta = 0 \text{ (참)}$$

$$\neg. \alpha = a + bi \text{ (} a, b \text{는 실수)라 하면 } \beta = \bar{\alpha} = a - bi$$

$$\therefore \alpha + \beta = (a + bi) + (a - bi)$$

$$= 2a$$

이므로 실수이다. (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

284. ⑤

$$\neg. z + \bar{z} = z - z = 0 \text{ 참.}$$

$$\neg. \bar{z} = -z \text{는 } z = a + bi \text{라 두면 } a - bi = -a - bi \text{이므로 } a = 0$$

즉 z 는 순허수. 그러므로 $z^2 < 0$ 참.

$$\neg. z = bi \text{라 두면 } z^2 = -b^2 < -\frac{1}{4}, b > \frac{1}{2}$$

$$(1+z)(1+\bar{z}) = 1 + (z+\bar{z}) + z\bar{z} = 1 + bi(-bi) = 1 + b^2 > \frac{5}{4} \text{ 참.}$$

285. ③

$$z = a + bi \text{라 하면 } z^2 - \bar{z} \text{의 허수부분은 } b(2a+1) \text{이 된다.}$$

$$b \neq 0 \text{이므로 } a = -\frac{1}{2}$$

$$\text{그러므로 } z = -\frac{1}{2} + bi$$

$$\neg. z^2 - \bar{z} \text{가 실수이므로 켤레복소수인 } \overline{z^2 - \bar{z}} \text{도 실수이다.}$$

$$\neg. z + \bar{z} = -1$$

$$\neg. z\bar{z} = \frac{1}{4} + b^2 > 0$$

286. ④

$$\neg. (O)$$

$$\bar{z}^3 = \overline{z^3} \text{이므로 } \bar{z}^3 \text{는 } z^3 \text{의 켤레복소수이다.}$$

$$\neg. (O)$$

$$z = a + bi \text{ (} a, b \text{는 실수)라고 하면}$$

$$\bar{z} = a - bi$$

$$z\bar{z} = a^2 + b^2 = 0 \text{이므로 } a = 0, b = 0, z = 0$$

$$\neg. (O)$$

$$z\bar{z} = 1 \text{에서 } \frac{1}{z} = \bar{z}$$

$$\left(z - \frac{1}{z}\right)^2 = (z - \bar{z})^2 = (z + \bar{z})^2 - 4z\bar{z} \text{이므로 실수이다.}$$

$$\neg. (X)$$

$$z = a + bi \text{ (} a, b \text{는 실수)라 하면}$$

$$z^2 + \bar{z} = 0$$

$$a^2 - b^2 + 2abi + a - bi = 0$$

$$a^2 - b^2 + a = 0, 2ab - b = 0$$

$$(a, b) = \left(\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right), (0, 0), (-1, 0) \quad \therefore 4\text{개}$$

<다른풀이>

$$\neg. z^2 + \bar{z} = 0$$

$$\overline{(z^2 + \bar{z})} = \bar{0}, (\bar{z})^2 + z = 0$$

$$(z^2 + \bar{z}) - \{(\bar{z})^2 + z\} = 0$$

$$(z - \bar{z})(z + \bar{z} - 1) = 0$$

$$(i) z = \bar{z}$$

$$z^2 + z = 0, \therefore z = -1, 0$$

$$(ii) z + \bar{z} = 1$$

$$z^2 - z + 1 = 0, \therefore z = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\square. (O)$$

$$z^2 + \bar{z}^2 = 0, z\bar{z} = 2$$

$$(z + \bar{z})^2 = z^2 + \bar{z}^2 + 2z\bar{z} = 4$$

$$z + \bar{z} = \pm 2$$

$$z, \bar{z} \text{는 이차방정식 } x^2 + 2x + 2 = 0 \text{ 또는 } x^2 - 2x + 2 = 0 \text{의}$$

두 근이다. 따라서

$$z = 1 \pm i, -1 \pm i \therefore 4\text{개}$$

<다른풀이>

$$z = a + bi \text{ (} a, b \text{는 실수)라 하면}$$

$$z^2 + \bar{z}^2 = 0, z\bar{z} = 2$$

$$a^2 - b^2 = 0, a^2 + b^2 = 2$$

$$(a^2, b^2) = (1, 1)$$

$$(a, b) = (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$$

$$z = 1 + i, 1 - i, -1 + i, -1 - i \quad \therefore 4\text{개}$$

287. ③

$$\neg. z = a + bi \text{라 하면 } z = \bar{z} \text{을 만족하려면 } b = 0 \text{ 이어야}$$

하므로 z 는 실수이다. 따라서 $z^2 \geq 0$ 은 참이다.

$$\neg. z^2 < 0 \text{을 만족하려면 } z \text{는 순허수이어야 하므로 } z + \bar{z} = 0$$

이므로 참이다.

$$\neg. z^2 - \bar{z}^2 = (a + bi)^2 - (a - bi)^2 = 4abi \text{ 이 때 } a, b \text{는 0이 될}$$

수도 있고 아닐 수도 있으므로 항상 허수가 되지 않는다.

$$\neg. \frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = \frac{2a}{a^2 + b^2} \text{ 이므로 항상 실수이다.}$$

288. (2, 1), (2, 3)

$$z^2 - 30i \text{이 실수가 되려면 } z^2 - 30i \text{의 허수부분이 0이 되어야}$$

$$\text{하므로, } 2(m+n)(m-n+4) - 30 = 0$$

$$(m+n)(m-n+4) = 15 \text{이고, } m+n \text{은 2이상 10이하인 자연수}$$

$$\text{이므로, } m+n = 3, m-n+4 = 5 \text{ 또는}$$

$$m+n = 5, m-n+4 = 3 \text{이어야 한다.}$$

$$m+n = 3, m-n+4 = 5 \text{ 일 때, 5 이하의 두 자연수 } m, n \text{의}$$

순서쌍은 (2,1) $m+n=5, m-n+4=3$ 일 때, 5이하의 두 자연수 m, n 의 순서쌍은 (2,3) 이므로 모든 순서쌍은 (2,1), (2,3) 이다.

289. ③

[풀이]

$$z = 2 \pm \sqrt{4-a}$$

$(k+z)^2 < 0$, 즉 $(k+2 \pm \sqrt{4-a})^2 < 0$ 이다. 순허수의 제곱이 음수이므로

$$k+2=0, 4-a < 0, a > 4, k=-2$$

$(3i+z)^2 > 0$, 즉 $(3i+2 \pm \sqrt{4-a})^2$ 이 양수이면

$3i+2 \pm \sqrt{a-4}i$ 가 실수이다.

$$3i \pm \sqrt{a-4}i = 0$$

$$\sqrt{a-4} > 0 \text{ 이므로 } \sqrt{a-4} = 3$$

$$a = 13$$

$$k+a = 13-2 = 11$$

290. ⑤

[풀이]

$z^2 \alpha^2$ 이 음의 실수이므로 $z \alpha$ 는 순허수이다.

$\alpha = m+ni$ (m, n 은 자연수)이므로

$z \alpha = (18+12i)(m+ni) = 18m-12n + (18n+12m)i$ 이 된다.

$$18m = 12n, 3m = 2n$$

$m=1$ 부터 대입해서 알아보면

$$m=2, n=3$$

$$m=4, n=6$$

$$m=6, n=9$$

$$m=8, n=12$$

$$m=10, n=15$$

$$m=12, n=18$$

$$m=14, n=21$$

$$m=16, n=24$$

$$m=18, n=27$$

$$m=20, n=30$$

30이하의 자연수의 순서쌍의 개수는 10쌍이 된다.

291. ④

$$(a+bi)^3 = a^3 + 3 \times a \times bi \times (a+bi) + (bi)^3$$

$$= a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i$$

$$= (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i$$

$$= -54 + 54i$$

이때, 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a^3 - 3ab^2 = -54 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$3a^2b - b^3 = 54 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$a^3 + 3a^2b - 3ab^2 - b^3 = 0$$

$$(a^3 - b^3) + 3ab(a-b) = 0, (a-b)(a^2 + ab + b^2) + 3ab(a-b) = 0$$

$$(a-b)(a^2 + 4ab + b^2) = 0$$

$$\therefore a = b \text{ 또는 } a^2 + 4ab + b^2 = 0$$

그런데 a, b 는 자연수이므로 $a^2 + 4ab + b^2 > 0$

$$\therefore a = b$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } a^3 - 3a \times a^2 = -54, -2a^3 = -54,$$

$$a^3 = 27 \therefore a = 3 (\because a \text{는 자연수})$$

$$\text{즉, } a = b = 3$$

$$\therefore \frac{i}{a+bi} - \frac{1-5i}{6}$$

$$= \frac{i}{3+3i} - \frac{1-5i}{6}$$

$$= \frac{i}{3(1+i)} \times \frac{1-i}{1-i} - \frac{1-5i}{6}$$

$$= \frac{i+1}{6} - \frac{1-5i}{6}$$

$$= \frac{6i}{6} = i$$

292. ④

방정식 $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1) = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때,

$$\omega^3 + 1 = 0, \omega^2 - \omega + 1 = 0$$

$\omega^3 = -1, \omega^2 = \omega - 1$ 을 대입하여 정리하면

$$4\omega^3 - 3\omega^2 + 5\omega - 1 = a\omega + b$$

$$-4 - 3\omega + 3 + 5\omega - 1 = -2 + 2\omega$$

$$a = 2, b = -2 \text{ 이므로}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 2x^2 + 2y^2 = 50 \end{cases} \text{를 풀면 만족하는 } (x, y) \text{의 순서쌍은}$$

$$(3, 4), (5, 0) \text{ 최댓값은 } \alpha + \beta = 7$$

293. (1)

n	z^n	$(z - \sqrt{2})^n$	$z^n + (z - \sqrt{2})^n$
1	$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$	$\textcircled{1} \sqrt{2}i$
2	i	$\textcircled{2} -i$	
3	$-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$	$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$	$\textcircled{3} \sqrt{2}i$
4	$\textcircled{4} -1$	-1	-2
5	$-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$	$\textcircled{5} \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$	$-\sqrt{2}i$
6	$-i$	i	$\textcircled{6} 0$
7	$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$	$-\sqrt{2}i$
8	$\textcircled{7} 1$	1	$\textcircled{8} 2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

(2) $n=2, 6, 10, 14, 18$ 일 때 성립한다.

294. ③

 $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근이 ω 이므로

$$\omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

ㄱ. **B** 버튼을 두 번 누르면

$$\left(\frac{4+2\omega}{\omega-1}\right)^2 = \left(\frac{4\omega^2+16\omega+16}{\omega^2-2\omega+1}\right) = \left(\frac{-12\omega^2}{-3\omega}\right) = 4\omega \quad (\text{참})$$

ㄴ. **A** 버튼을 세 번 누르면

$$\left(\frac{4+2\omega}{1-\omega}\right)^2 = 4\omega \text{ 이므로}$$

$$\left(\frac{4+2\omega}{1-\omega}\right)^3 = 4\omega \times \left(\frac{4+2\omega}{1-\omega}\right) = \left(\frac{8\omega^2+16\omega}{1-\omega}\right) = \left(\frac{-8\omega-8+16\omega}{1-\omega}\right) = -8 \quad (\text{거짓})$$

ㄷ. **A** 버튼을 3번 누르면 -8 ,같은 방법으로 **B** 버튼을 3번 누르면 8이 나타나므로**A** 또는 **B** 버튼을 100번 누르면 정수는 33번 나타남 (참)

295. ①

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}} \text{ 성립하려면 } a > 0, b < 0$$

$$-a < 0, b < 0, 2b < 0 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{-ab} + \sqrt{-a}\sqrt{b} + \sqrt{2b}\sqrt{2b} + \sqrt{4b^2} \\ &= \sqrt{-ab} - \sqrt{-ab} - \sqrt{4b^2} + \sqrt{4b^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

296. ①

주어진 식을 계산하면 $-8 + 2\sqrt{6}i$ 이므로 $a = -8, b = 2\sqrt{6}$

297. ①

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{a}\sqrt{b} \text{ 이므로 } a < 0, b < 0$$

$$\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{c}{b}} \text{ 이므로 } b < 0, c > 0$$

$$\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2} + \sqrt{c^2} + |c-a-b| = 10$$

$$-a+b+c+c-a-b=10$$

$$c=a+5$$

 $a < 0, c > 0$ 이므로 $-5 < a < 0$, a, c 는 정수만족하는 (a, c) 의 순서쌍은 $(-4, 1), (-3, 2), (-2, 3), (-1, 4)$ 따라서 ac 의 최솟값은 -6

298. ②

$$-4 + 2\sqrt{3}i - \sqrt{3}i = -4 + \sqrt{3}i \text{ 이므로}$$

$$a = -4, b = \sqrt{3} \therefore ab = -4\sqrt{3}$$

299. ③

풀이)

 $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 가 성립하면 $a < 0, b < 0$ 이다.

$$\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{c}{a}} \text{ 이면 } c > 0, a < 0, \text{ 이다.}$$

$$\text{ㄱ. } \sqrt{a^2} + (\sqrt{a})^2 = -a + \sqrt{a}\sqrt{a} = -a + a = 0 \dots\dots (\text{참})$$

$$\text{ㄴ. } \frac{\sqrt{b-2}}{\sqrt{c+2}} = -\sqrt{\frac{b-2}{c+2}} \text{ 에서 } b-2 < 0, c+2 > 0 \dots\dots (\text{거짓})$$

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } & \sqrt{(c-a)^2} + \sqrt{b-c}\sqrt{c-b} - |a| - \sqrt{(-b)^2}i \\ &= (c-a) + (c-b)i + a + bi = c(1+i) \dots\dots (\text{참}) \end{aligned}$$

그러므로 ㄱ, ㄷ

300. ②

$$(1+i)x + (1-i)y = (x+y) + (x-y)i = -2 + 4i \text{ 이므로}$$

$$x+y = -2, x-y = 4 \text{ 두 식을 연립하면 } x = 1, y = -3$$

$$2x + \sqrt{-x}\sqrt{y} + \frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{y}} = 2 + \sqrt{-1}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-3}} \text{ 이므로}$$

$$\text{정리하면 } 2 - \sqrt{3} - i \text{ 이므로 } a = 2 - \sqrt{3}, b = -1$$

$$a^2 + 4ab + 4b^2 = (a+2b)^2 = 3$$

301. ①

n	$(1+i)^n$	$(1-i)^n$	z_n
1	$1+i$	$1-i$	2
2	$2i$	$-2i$	0
3	$-2(1-i)$	$-2(1+i)$	-4
4	-4	-4	-8
5	$-4(1+i)$	$-4(1-i)$	-8
6	$-8i$	$8i$	0
7	$8(1-i)$	$8(1+i)$	16
8	16	16	32
9	$16(1+i)$	$16(1-i)$	32
10	$32i$	$-32i$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

ㄱ. $1+i, 1-i$ 가 서로 켈레관계이므로 $(1+i)^n, (1-i)^n$ 도 서로 켈레관계 $\therefore z_n$ 은 항상 실수

ㄴ. 2개

ㄷ. 5, 9, 13, $\dots$, 97의 24(개)

302. ①

$$z_1 = a+bi, z_2 = c+di \text{ 라 하면 } \overline{z_1} = a-bi, \overline{z_2} = c-di$$

$$(\text{나}), (\text{다}) \text{에서 } \frac{1}{z_1} = \frac{z_1}{2}, \frac{1}{z_2} = \frac{z_2}{2} \text{ 이므로}$$

(가)에 대입하면

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{z_1+z_2}{2} = \frac{(a+c)}{2} + \frac{(b+d)i}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$a+c=3, b+d=-1 \dots\dots \text{①}$$

$$(\text{나}), (\text{다}) \text{에서 } a^2+b^2=2, c^2+d^2=2 \dots\dots \text{②}$$

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = \frac{(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2)}{2}$$

$$= \frac{\{(a+bi)(c-di) + (a-bi)(c+di)\}}{2}$$

$$= (ac+bd)$$

①, ②를 이용하면

$$(a+c)^2 + (b+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ac + 2bd \\ = 4 + 2(ac+bd) = 10$$

$$ac+bd=3$$

$$\therefore \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = 3$$

303. ④

$$\left(\frac{2\sqrt{2}}{1-i}\right)^n = (\sqrt{2}(1+i))^n \text{에서}$$

$$n=2 \text{일 때 } 4i$$

$$n=4 \text{일 때, } -2^4$$

$$n=6 \text{일 때, } -2^6 i$$

$$n=8 \text{일 때 } 2^8$$

$$n=10 \text{일 때, } 2^{10} i$$

$$n=12 \text{일 때 } -2^{12}$$

⋮

$$n=24 \text{일 때, } 2^{24}$$

$$(\sqrt{3}-i)^n \text{에서}$$

$$n=2 \text{일 때 } 2(1-\sqrt{3}i)$$

$$n=3 \text{일 때, } -2^3 i$$

$$n=6 \text{일 때 } -2^6$$

$$n=12 \text{일 때 } 2^{12}$$

⋮

$$n=24 \text{일 때 } 2^{24}$$

$$\text{즉, } n=24 \text{일 때, } 2^{24} + 2^{24} = 2^{24+1}$$

$$n=48 \text{일 때, } 2^{48} + 2^{48} = 2^{48+1}$$

...

즉, n 이 24의 배수일 때 주어진 식을 만족한다.

100 이하의 24의 배수의 개수는 4이다.

304. ⑤

$$3\bar{\alpha} + \bar{\beta} = 3 \text{이므로 } 3\alpha + \beta = 3, \beta = 3 - 3\alpha = 3(1-\alpha)$$

$$\alpha\bar{\alpha} = 1, \bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\alpha\beta \text{는 실수이므로 } \alpha\beta = \bar{\alpha}\bar{\beta} = \frac{1}{\alpha} \times \bar{\beta}, \bar{\beta} = \alpha^2\beta$$

$$3\bar{\alpha} + \bar{\beta} = \frac{3}{\alpha} + \alpha^2\beta$$

$$= \frac{3}{\alpha} + \alpha^2(3-3\alpha)$$

$$= \frac{3}{\alpha} + 3\alpha^2 - 3\alpha^3 = 3$$

$$\text{즉, } 1 + \alpha^3 - \alpha^4 = \alpha,$$

$$\alpha^4 - \alpha^3 + \alpha - 1 = \alpha^3(\alpha-1) + (\alpha-1) = (\alpha^3+1)(\alpha-1) = 0$$

α 는 실수가 아니므로 $\alpha^3+1=0$ 에서 허근이다.

$$\text{즉, } \alpha^2 - \alpha + 1 = 0, \alpha^2 - \alpha = -1 \text{이므로}$$

$$\beta^3 = 3^3(1-\alpha)^3$$

$$= 27(1-3\alpha+3\alpha^2-\alpha^3)$$

$$= 27\{1+3(\alpha^2-\alpha)-\alpha^3\}$$

$$= 27(1-3+1)$$

$$= -27$$

305. ⑤

$$\neg. \sqrt{a}\sqrt{c} = -\sqrt{ac} \text{이면 } a < 0, c < 0 \text{이므로}$$

$$ax^2+bx-c=0 \text{의 판별식을 } D_1 \text{이라 하면}$$

$$D_1 = b^2 + 4ac > 0 \text{이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.}$$

$$\neg. \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}} \text{이면 } a > 0, b < 0 \text{이므로}$$

$$(a-b)x^2+ax-a=0 \text{의 판별식을 } D_2 \text{이라 하면}$$

$$D_2 = a^2 + 4a(a-b) = 5a^2 - 4ab > 0 \text{이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.}$$

$$\neg. c > b > a \text{이면}$$

$$f(x)=0 \text{의 판별식 } D_1 \text{은 } D_1 = b^2 + 4ac \text{에서 } D_1 < 0 \text{인 경우}$$

$$a < 0, c > 0 \text{를 만족해야 한다.}$$

$$\text{이 경우 } g(x)=0 \text{의 판별식 } D_2 = 5a^2 - 4ab \text{에서}$$

$$a < 0 \text{인 경우 } a < b \text{이므로 } a(5a-4b) \geq 0 \text{이고 } \therefore (5a-4b) \leq 0$$

따라서 근이 존재한다. 따라서 적어도 하나는 실근을 갖는다.

306. ①

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \text{에서 } \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} = -1$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0 \text{에서 } \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma}{\beta} = -1$$

$$\frac{\alpha}{\gamma} = p, \frac{\beta}{\gamma} = q \text{라고 하면}$$

$$p+q = -1$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = -1, \frac{p+q}{pq} = -1, pq = 1$$

$$p=q \text{인 } p, q \text{가 존재하지 않으므로 } p \neq q$$

$$p, q \text{는 } x^2+x+1=0 \text{의 두 근이고, } p, q \text{는 켈레복소수이다.}$$

$$p^2+p+1=0, q^2+q+1=0$$

$$\text{양변에 각각 } p-1, q-1 \text{을 곱하면}$$

$$p^3-1=0, q^3-1=0$$

$$\left(\frac{\gamma}{\beta} - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \left(\frac{\gamma}{\beta} + \frac{\alpha}{\gamma}\right)\left(\frac{\beta}{\gamma} \times \frac{\gamma}{\alpha}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{q} + p\right) \times \bar{q} \times \frac{1}{p} = (p+p) \times p \times p$$

$$= 2p^3 = 2$$

307. ①

 $x^2 - ax - 2a = 0$ 의 한 근이 2이므로 대입하면 $4 - 2a - 2a = 0$ 즉 $a = 1$ 이므로본래 식은 $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$ 이므로 $b = -1$ $ab = -1$

308. ②

 $x^2 + ax - b = 0$ a, b 는 실수인데 한 근이 무리수면 다른 한 근은 켤레근이다.두 근: $1+i, 1-i$ 두 근의 합: $2 = -a, \therefore a = -2$ 두 근의 곱: $(1+i)(1-i) = -b, \therefore b = -2$ $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{-2}\sqrt{-2} = \sqrt{2}i\sqrt{2}i = 2i^2 = -2$

309. ①

[풀이]

 $x^2 - ax + b = 0$ 에서 모든 계수가 실수이므로두 근이 $1 + \sqrt{2}i, 1 - \sqrt{2}i$ 이므로

근과 계수의 관계에 의하여

 $(1 + \sqrt{2}i) + (1 - \sqrt{2}i) = a$ $a = 2$ $(1 + \sqrt{2}i)(1 - \sqrt{2}i) = b$ $b = 3$ $\therefore a + b = 5$

310. ④

 $x^2 - 2x + a = 0$ 의 a 가 실수이므로 $1+3i$ 가 근이면 $1-3i$ 도 근이다. $\therefore a = (1+3i)(1-3i) = 10$

311. ②

판별식 D 를 이용한다.ㄱ. $D = 9 - 16 = -7 < 0$ 이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.ㄴ. $\frac{D}{4} = 9 - 9 = 0$ 이므로 중근(실근)을 갖는다.ㄷ. $\frac{D}{4} = 1 - 3 = -2 < 0$ 이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.ㄹ. $\frac{D}{4} = 4 - 1 = 3 > 0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

312. ③

ㄱ. $D = 9 - 24 = -15 < 0$ 서로 다른 두 허근ㄴ. $D = 49 - 40 = 9 > 0$ 서로 다른 두 실근ㄷ. $D/4 = 4 - 4 = 0$ 중근ㄹ. $D = 9 - 20 = -11 < 0$ 서로 다른 두 허근

313. ⑤

판별식 $D/4 = 4 - a + 3 \geq 0, a \leq 7$ 이므로 자연수 a 의 개수는

7개

314. ④

 $x^2 + 5x + k = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖기 때문에 $D > 0$ 이고 $25 - 4k > 0$ 이다 즉 $\frac{25}{4} > k$ 인 최대 정수 $k = 6$ 이다.

315. ③

 $D/4 = k^2 - (k^2 - 2k - 4) = 2k + 4 > 0 \therefore k > -2$

316. ③

 $D/4 = 9 - 3k + 7 > 0$ 이므로 $k < \frac{16}{3}$ 즉 자연수 k 의 최댓값은 5

317. ③

 $D/4 = 4 - a > 0$ $a < 4$

따라서 만족하는 자연수의 개수는 3개

318. ③

 $x^2 - 2kx + k^2 + k - 5 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

실근을 가지므로

 $\frac{D}{4} = (-k)^2 - (k^2 + k - 5) \geq 0$ $k^2 - k^2 - k + 5 \geq 0$ $-k + 5 \geq 0$ $\therefore k \leq 5$ 만족하는 자연수 k 의 값은 1, 2, 3, 4, 5이므로모든 자연수 k 의 합은 $1+2+3+4+5 = 15$ 이다.

319. ⑤

[풀이]

 $x^2 - 2x - a + 7 = 0$ 의 이차방정식이 서로 다른 두 허근을갖기위한 조건은 $D < 0$ 이므로 $D/4 = 1 + a - 7 < 0$ $a < 6$ 이므로 자연수 a 는 $a = 1, 2, 3, 4, 5$ 의 5개다.

320. ④

이차방정식 $x^2 - (2k-a)x + k^2 + 4k - a = 0$ 이실수 k 의 값과 관계없이 중근을 가져야 하므로 $D = (2k-a)^2 - 4(k^2 + 4k) = 0$ 을 만족해야 한다.따라서 $(-4a-16)k + a^2 + 4a = 0, a = -4$

321. ①

 $3x^2 - 4x + 5 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

근과 계수와의 관계에 의해

$$a = \alpha + \beta = \frac{4}{3}, \quad b = \alpha\beta = \frac{5}{3}$$

$$\therefore a + b = 3$$

322. ②

근과 계수의 관계에 따라

$$\alpha + \beta = 3, \quad \alpha\beta = 5$$

$$\alpha\beta - (\alpha + \beta) = 2$$

323. ④

 $x^2 - 3x + 5 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때,

$$\alpha + \beta = 3, \quad \alpha\beta = 5 \text{ 이므로}$$

$$(\alpha + 1)(\beta + 1) = \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = 9$$

324. ④

 $2x^2 - 4x + 1 = 0$ 의 두 근 α, β 라 가정

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

325. ⑤

 $x^2 - 5x + 4 = 0$ 의 두 근을 α, β 이므로

근과 계수와의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = 5, \quad \alpha\beta = 4$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{5}{4}$$

326. ③

$$\alpha + \beta = -8, \quad \alpha\beta = 4 \text{ 이므로 } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-8}{4} = -2$$

327. ①

$$\alpha + \beta = -4, \quad \alpha\beta = 1 \text{ 이므로}$$

$$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = -4 + 2 = -2 \text{ 이다.}$$

따라서 구하고자 하는 값은 $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{2}i$ 이다.

328. ①

풀이)

 $x^2 - 2x + 5 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = 5 \text{ 이고,}$$

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \text{ 이므로 } \alpha^2 + \beta^2 = -6$$

 $\frac{\beta}{\alpha}$ 와 $\frac{\alpha}{\beta}$ 를 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 5인 이차방정식은

$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = -\frac{6}{5} \text{ 이고, } \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = 1$$

$$f(x) = 5x^2 + 6x + 5$$

$$f(-1) = 4$$

329. ②

 $x^2 - 3x + 5 = 0$ 의 두근이 α, β 이므로, $\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 5$ 이며, α, β 을 방정식에 대입하면

$$\alpha^2 - 2\alpha = \alpha - 5, \quad \beta^2 - 2\beta = \beta - 5 \text{ 이다.}$$

$$\therefore (\alpha^2 - 2\alpha)(\beta^2 - 2\beta) = (\alpha - 5)(\beta - 5) = \alpha\beta - 5(\alpha + \beta) + 25 = 15$$

330. ①

근과 계수와의 관계를 이용하면 $\alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = a$ 이차방정식 $x^2 + x + b = 0$ 의 두 근이 $\alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = a$ 이므로근과 계수와의 관계에 의하여 $2 + a = -1, \quad 2a = b$ 가 성립한다.따라서 $a = -3, \quad b = -6$ 이 됨을 알 수 있다. $\therefore a + b = -9$

331. 3

이차방정식 $x^2 - 3x + 4 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 3, \quad \alpha\beta = 4 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이때, $\alpha = 3 - \beta, \quad \beta = 3 - \alpha$ 이므로

$$f(\alpha) = \beta \text{ 에서 } f(\alpha) = 3 - \alpha$$

$$f(\beta) = \alpha \text{ 에서 } f(\beta) = 3 - \beta$$

즉, $f(\alpha) - (3 - \alpha) = 0, \quad f(\beta) - (3 - \beta) = 0$ 이므로 $f(x) - (3 - x) = 0$ 의 두 근이 α, β 이다.따라서 방정식 $f(x) + x - 3 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로두 근의 합은 $\alpha + \beta = 3$

332. ⑤

이차방정식 $(1 - 3i)x^2 - (a - 2i)x - 10i = 0$ 의 한 근을 $x = bi$ ($b \neq 0$ 인 실수)라 하면

$$(1 - 3i) \times (bi)^2 - bi(a - 2i) - 10i = 0$$

$$-b^2 + 3b^2i - abi - 2b - 10i = 0$$

$$(-b^2 - 2b) + (3b^2 - ab - 10)i = 0$$

$$-2b^2 - 2b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$3b^2 - ab - 10 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7} \text{에서 } b^2 + 2b = 0, \quad b(b + 2) = 0$$

$$\therefore b = 0 \text{ 또는 } b = -2$$

그런데 $b \neq 0$ 이므로 $b = -2$ $b = -2$ 를 $\textcircled{8}$ 에 대입하면

$$3 \times (-2)^2 - a \times (-2) - 10 = 0 \text{ 에서}$$

$$12 + 2a - 10 = 0, \quad 2a = -2$$

$$\therefore a = -1$$

333. ①

 $z = a + bi$ (a, b 는 실수)라 하면조건 (가)에서 $z - 1$ 이 $f(x) = 0$ 의 한 허근이고,

$$z - 1 = a + bi - 1 = (a - 1) + bi$$

이므로 켈레근의 성질에 의하여 $(a - 1) - bi$ 고 이차방정식

$$f(x)=0 \text{의}$$

근이다. 따라서

$$(두 \text{ 근의 합})=2(a-1)$$

$$(두 \text{ 근의 곱})=\{(a-1)+bi\}\{(a-1)-bi\}$$

$$=(a-1)^2+b^2$$

이므로 최고차항의 계수가 1인 이차식 $f(x)$ 는

$$f(x)=x^2-2(a-1)x+(a-1)^2+b^2$$

이때, $f(0)=1$ 이므로

$$f(0)=(a-1)^2+b^2=1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

또한, $(a-1)+bi$ 가 허수이므로 $b \neq 0$

조건 (나)에서 $z-i$ 가 $g(x)=0$ 의 한 근이고,

$$z-i=(a+bi)-i=a+(b-1)i$$

이므로 $g(0)=1$ 이고 최고항의 계수가 1인 이차식 $g(x)$ 를

$$g(x)=x^2+mx+1 \text{이라 하면}$$

$$g(z-i)=g(a+(b-1)i)$$

$$=\{a+(b-1)i\}^2+m\{a+(b-1)i\}+1$$

$$=a^2+2a(b-1)i-(b-1)^2+am+m(b-1)i+1$$

$$=\{a^2-(b-1)^2+am+1\}+(b-1)(m+2a)i$$

$$=0$$

에서

$$a^2-(b-1)^2+am+1=0 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$(b-1)(m+2a)=0 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

㉞에서 $b=1$ 또는 $m=-2a$

❶ $b=1$ 일 때,

$$\textcircled{A} \text{에 } b=1 \text{을 대입하면 } (a-1)^2=0 \therefore a=1$$

이때, ㉞에 $a=1, b=1$ 을 대입하면

$$1+m+1=0 \text{에서 } m=-2$$

즉, $f(x)=x^2+1, g(x)=x^2-2x+1$ 이므로 일차항의 계수의 합은 -2 이다.

❷ $m=-2a$ 일 때,

$$g(x)=x^2-2ax+1 \text{이다. } \textcircled{A} \text{에 } m=-2a \text{을 대입하면}$$

$$a^2-(b-1)^2-2a^2+1=0, \quad a^2+(b-1)^2=1$$

$$a^2+b^2-2b=0$$

$$\textcircled{A} \text{에서 } (a-1)^2+b^2=1 \text{이므로 } a^2+b^2-2a=0$$

$$a^2+b^2-2b=0, \quad a^2+b^2-2a=0 \text{에 의하여}$$

$$a=0, \quad b=0 \text{ 또는 } a=1, \quad b=1$$

$a=0, b=0$ 이면 $b \neq 0$ 인 조건에 모순이다.

$$a=1, \quad b=1 \text{이면 } m=-2, \quad f(x)=x^2+1, \quad g(x)=x^2-2x+1$$

따라서 $f(x)=x^2+1, g(x)=x^2-2x+1$ 이고, 두 다항식의 일차항의 계수의 합은 -2 이다.

334. ①

$f(x)=0$ 의 한 근이 $a+bi$ 이므로 다른 근은 $a-bi$ 이다.

따라서 $p=-2a, q=a^2+b^2$ 이고

$f(x)-2=0$ 의 한 근이 2이므로

$$f(2)=4-4a+a^2+b^2-2=0, \quad (a-2)^2+b^2=2 \text{이므로}$$

$$(3, 1), (3, -1), (1, 1), (1, -1)$$

따라서 순서쌍 (a, b) 의 개수는 4개다.

335. ④

(가) $2pq+aq$ 참

(나) 0 참

(다) $-2p$ 참

(라) $p^2-q^2-2p^2+b=0 \quad b=p^2+q^2$ 거짓

(마) qi 참

336. $1-2i$

$f(x)=0$ 의 한 근이 $\alpha=1+i$ 이므로 다른 근은 $1-i$ 이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$$(두 \text{ 근의 합})=1+i+1-i=2$$

$$(두 \text{ 근의 곱})=(1+i)(1-i)=2$$

즉, $f(x)=x^2-2x+2$ 이라 하면

$$\alpha^2-2\alpha+2=0, \quad \alpha^2=(1+i)^2=2i,$$

$$\alpha^4=(\alpha^2)^2=(2i)^2=-4 \text{이므로}$$

$$\alpha^5+5\alpha-1=\alpha\alpha^4+5\alpha-1=-4\alpha+5\alpha-1=\alpha-1$$

$$f(\alpha^5+5\alpha-1)=f(\alpha-1)=f(1+i-1)=f(i)$$

$$=i^2-2i+2=1-2i \text{이다.}$$

337. ④

첫 번째 조건에서 $\frac{D}{4}=(k-2)^2-k^2=-4k+4 \geq 0, \quad k \leq 1$ 이다.

두 번째 조건에서 $\frac{D}{4}=k^2-k^2-k-3=-k-3 < 0,$

$-3 < k$ 이다.

따라서 $-3 < k \leq 1$ 이므로 구하고자 하는 개수는

$-2, -1, 0, 1$ 의 4개다.

338. ①

$$D/4=\{2-(a-2b)\}^2-2\{4+(a-2b)^2\} \geq 0$$

$a-2b=t$ 로 치환하여 정리하면

$$(t+2)^2 \leq 0 \text{ 즉 } (a-2b+2)^2 \leq 0 \text{이므로 } a-2b=-2$$

$$a^3-8b^3+12ab+2=(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)+12ab+2$$

$$=-2(a^2+2ab+4b^2)+12ab+2=-2a^2+8ab-8b^2+2$$

$$=-2(a-2b)^2+2=-8+2=-6$$

339.

(1) 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha\beta=-4$$

(2) 근의 위치관계는

$$f(-2)=4-2a-4 > 0 \therefore a < 0$$

$$f(-1)=1-a-4 < 0 \therefore a > -3$$

$$f(2) = 4 + 2a - 4 < 0 \quad \therefore a < 0$$

공통범위는 $-3 < a < 0$

만족하는 정수 a 는 $-2, -1$

340. ③

주어진 식의 근과 계수의 관계를 이용하면

$$\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = -3$$

$$\text{준 식} = \frac{36(\alpha^3 + \beta^3 + 6)}{(\alpha\beta)^3 + 3(\alpha^3 + \beta^3) + 9} \text{에서}$$

곱셈공식의 변형공식 $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$ 을 이용하면

$$\frac{36(\alpha^3 + \beta^3 + 6)}{(\alpha\beta)^3 + 3(\alpha^3 + \beta^3) + 9} = \frac{36 \times (-10 + 6)}{-27 - 30 + 9} = 3$$

341. ①

$$(가) f(x) = x^2 + px + 5 = 0$$

(나) $x^2 - 4x + 5 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 $\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = 5$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4^2 - 2 \times 5 = 6$$

$$f(\alpha) + f(\beta) = \alpha^2 + \beta^2 + p(\alpha + \beta) + 10 = 6 + 4p + 10 = 4$$

$$p = -3$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^2 - 3x + 5, f(2) = 4 - 6 + 5 = 3$$

342. ②

$$\alpha^2 - \alpha - 3 = 0, \beta^2 - \beta - 3 = 0 \text{이므로}$$

$\alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3$ 를 $\alpha^2 - \alpha - 3$ 로 나누었을 때 나머지는 $30\alpha + 36$

$\beta^5 + 11\beta$ 를 $\beta^2 - \beta - 3$ 로 나누었을 때 나머지는 $30\beta + 21$

$$\alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \beta^5 + 11\beta + 13\alpha\beta = 30\alpha + 36 + 30\beta + 21 + 13\alpha\beta$$

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -3 \text{이므로}$$

$$30\alpha + 36 + 30\beta + 21 + 13\alpha\beta = 30(\alpha + \beta) + 13\alpha\beta + 21 + 36 = 48$$

343. ③

$$f(2x) = x^2 - x + 1 \text{에서}$$

$$f(4x) = f(2 \times 2x)$$

$$= (2x)^2 - (2x) + 1$$

$$= 4x^2 - 2x + 1$$

$$f(4x) + 2 = 0 \text{에서 } 4x^2 - 2x + 1 + 2 = 0$$

$$4x^2 - 2x + 3 = 0$$

이 이차방정식의 두 근이 α, β 이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2}, \alpha\beta = \frac{3}{4}$$

$$\therefore (\alpha - 1)(\beta - 1)$$

$$= \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{4}$$

다른풀이

$$f(2x) = x^2 - x + 1 \text{에서 } 2x = t \text{라 하면 } x = \frac{t}{2} \text{이고,}$$

$$f(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^2 - \frac{t}{2} + 1, f(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t + 1$$

이때, $f(4x) + 2 = 0$ 에서

$$\frac{1}{4} \times (4x)^2 - \frac{1}{2} \times 4x + 1 + 2 = 0$$

$$\text{즉, } 4x^2 - 2x + 3 = 0$$

이 이차방정식의 두 근이 α, β 이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2}, \alpha\beta = \frac{3}{4}$$

$$\therefore (\alpha - 1)(\beta - 1)$$

$$= \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{4}$$

344. ①

$$x^2 + 2(m+1)x - 2m - 5 = 0 \text{의 두 근을 } \alpha, \beta \text{라 하고}$$

$$\alpha + \beta = -2(m+1), \alpha\beta = -2m - 5 \text{이므로}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 4(m+1)^2 + 4m + 10$$

$$= 4m^2 + 12m + 14$$

$$= 4\left(m + \frac{3}{2}\right)^2 + 5$$

따라서 최솟값은 5이다.

345. ③

$$f(x) = 0 \text{의 두 근이 } \alpha, \beta \text{이고 } \alpha + \beta = 12$$

$$f(4x - 2) = 0 \text{의 두 근은 } 4x - 2 = \alpha \text{ 또는 } 4x - 2 = \beta \text{이므로}$$

$$x = \frac{\alpha + 2}{4} \text{ 또는 } x = \frac{\beta + 2}{4}$$

$$f(4x - 2) = 0 \text{에서 } x^2 \text{의 계수가 } a, x \text{의 계수가 } b \text{이므로}$$

근과 계수의 관계에 의해

$$-\frac{b}{a} = \frac{\alpha + \beta + 4}{4} = 4$$

$$\therefore \frac{b}{a} = -4$$

346. ②

$$|\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} \text{에서 } 16 - (a - 4)^2 + 16$$

$$\therefore a = 4$$

$$x^2 + 8x + 4 = 0 \text{의 두 근을 } \gamma, \delta \text{라 하면, 두 근의 차는}$$

$$|\gamma - \delta| = \sqrt{(\gamma + \delta)^2 - 4\gamma\delta} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \text{이다.}$$

347. ④

$$\text{이차방정식 } x^2 + 5x + 1 = 0 \text{의 두 근을 } \alpha, \beta \text{라고 할 때,}$$

$$(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2 \text{의 값}$$

두 근 α, β 사이의 관계식을 정리하면

$$\alpha + \beta = -5, \alpha\beta = 1$$

$$\alpha < 0, \beta < 0$$

$$(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = -5 + 2 = -3$$

348. ⑤

$$\alpha + \beta = 6, \alpha - \beta = 4\sqrt{2}, \alpha\beta = 1$$

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = 6, \beta + \frac{1}{\beta} = 6$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^{10} - \beta^{10} + \alpha^8 - \beta^8}{\alpha^6 + \alpha^3\beta^3 + \beta^6} &= \frac{\alpha^9\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) - \beta^9\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)}{\alpha^6 + \alpha^3\beta^3 + \beta^6} \\ &= \frac{6(\alpha^9 - \beta^9)}{\alpha^6 + \alpha^3\beta^3 + \beta^6} \\ &= 6(\alpha^3 - \beta^3) \\ &= 6(\alpha - \beta)\{(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta\} \\ &= 840\sqrt{2} \end{aligned}$$

349. -2, 1, 3, 6

두 근이 $a, 2a$ 일 때, $3a = k, 2a^2 = 2k - 4$ 두 식을 연립하면,
 $6a = 2a^2 + 4, a^2 - 3a + 2 = 0, a = 1, 2 \quad k = 3, 6$

두 근이 $a, -2a$ 일 때, $-a = k, -2a^2 = 2k - 4$ 두 식을 연립하면,
 $-2a = -2a^2 + 4, a^2 - a - 2 = 0, a = -1, 2 \quad k = 1, -2$

350. 118

이차방정식 $ax^2 - bx + 70 = 0$ 의 두 근을 p, q 라 하면
 (단, p, q 는 소수)
 근과 계수의 관계에 의하여

$$p + q = \frac{b}{a} \text{ 이므로}$$

$$b = a(p + q)$$

$$\text{또, } pq = \frac{70}{a} = \frac{2 \times 5 \times 7}{a}$$

$$apq = 2 \times 5 \times 7$$

그러므로 a 와 p, q 는 70의 약수이다.

p 와 q 는 소수이므로

가능한 자연수 a 는 2, 5, 7이다.

(i) $a = 2$ 이면

$$p + q = 5 + 7$$

$$\text{따라서 } b = 2 \times (5 + 7) = 24$$

(ii) $a = 5$ 이면

$$p + q = 2 + 7$$

$$\text{따라서 } b = 5 \times (2 + 7) = 45$$

(iii) $a = 7$ 이면

$$p + q = 2 + 5$$

$$\text{따라서 } b = 7 \times (2 + 5) = 49$$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$$\text{가능한 } b \text{의 값의 합은 } 24 + 45 + 49 = 118$$

351. ②

조건 가에 따라 $D = p^2 - 4q < 0$ 이다.

조건 다에 따라 p, q 는 제곱수여야 한다.

$p = 16$ 일 경우, $64 < q$, 즉 $q = 81$ 이다.

$p \geq 25$ 일 경우, $q > 100$ 이므로 모순이다.

따라서 $\alpha + \beta = p = 16, \alpha\beta = q = 81$ 이다.

그러므로 구하고자 하는 값은

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 256 - 162 = 94 \text{이다.}$$

$$352. 3x^2 + 5x - 1 = 0$$

이차방정식 $x^2 - 5x - 3 = 0$ 의 두 근이 $\alpha, \frac{1}{\beta}$ 이므로

이차방정식의

근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha + \frac{1}{\beta} = 5 \text{에서 } \frac{\alpha\beta + 1}{\beta} = 5$$

$$\therefore \alpha\beta + 1 = 5\beta \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\alpha \times \frac{1}{\beta} = -3 \text{에서 } \alpha = -3\beta \quad \dots\dots \text{㉡}$$

한편, 두 근이 $\frac{1}{\alpha}, \beta$ 이고 이차항의 계수가 3인

이차방정식은

$$(\text{두 근의 합}) = \frac{1}{\alpha} + \beta$$

$$= \frac{\alpha\beta + 1}{\alpha}$$

$$= \frac{5\beta}{-3\beta}$$

$$= -\frac{5}{3}$$

$$(\text{두 근의 곱}) = \frac{1}{\alpha} \times \beta$$

$$= \frac{\beta}{-3\beta}$$

$$= -\frac{1}{3}$$

$$\text{이므로 } 3\left(x^2 + \frac{5}{x}x - \frac{1}{3}\right) = 0 \text{에서 } 3x^2 + 5x - 1 = 0$$

2번 10번 문항 수정

353. ⑤

$$x^2 - 3x + 4 = 0$$

$$\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 4$$

$x^2 - (2a+1)x + b = 0$ 의 두 근 $\alpha+1, \beta+1$

근과 계수에 의해 두 근의 합은

$$(\alpha+1) + (\beta+1) = 2a+1 = 5$$

$$2a = 4, a = 2$$

두 근의 곱은 $(\alpha+1)(\beta+1) = b$

$$b = \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = 8$$

$$\therefore b = 8$$

$$ab = 2 \times 8 = 16$$

354. ①

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2}, \alpha\beta = 2$$

$\frac{1}{\alpha}$ 과 $\frac{1}{\beta}$ 를 두 근으로 하는 방정식에서

$$\text{두 근의 합은 } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{1}{4}$$

두 근의 곱은 $\frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{2}$ 이므로 최고차항의 계수가 4인

이차방정식은 $4x^2 - x + 2 = 0$ 이다.

355. ①

[풀이]

이차방정식 $x^2 + 4x - 3 = 0$ 의 두 근이 α, β 이다. 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = -4, \alpha\beta = -3$

$f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = f\left(\frac{1}{\beta}\right) = 5$ 이므로 이차방정식 $f(x) - 5 = 0$ 의 두 근이

$\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ 이다.

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = -\frac{1}{3}$$

두 근이 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ 인 이차방정식을

$$k\left(x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right) = 0 \quad (k \neq 0) \text{이라 하면}$$

$$f(x) - 5 = k\left(x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right), f(x) = k\left(x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right) + 5$$

$f(0) = 2$ 이므로

$$2 = -\frac{k}{3} + 5, k = 9$$

$$\therefore f(x) = 9x^2 - 12x + 2$$

따라서 $f(-2) = 62$ 이다.

356. ④

$x^2 - 3x + 4 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 4$$

$4x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 $\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ 이므로

근과 계수의 관계에 의해

$$-\frac{a}{4} = \alpha + \frac{1}{\beta} + \beta + \frac{1}{\alpha} = (\alpha + \beta) + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = 3 + \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$$

$$\therefore a = -15$$

$$\frac{b}{4} = \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = \alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} + 2 = 4 + \frac{1}{4} + 2 = \frac{25}{4}$$

$$\therefore b = 25$$

$$\therefore a + b = 10$$

357. ④

계수 a 를 잘못 본 수를 x' 라고 하고

계수 b 는 제대로 보았으므로

$$\frac{-b}{x'} = 2, \frac{c}{x'} = 3 \dots \textcircled{1}$$

상수항 c 를 잘못 본 수를 y 라고 하자.

$$\frac{-b}{a} = \frac{2}{3}, \frac{y}{a} = \frac{1}{3} \dots \textcircled{2}$$

①에서 $b = -2x', c = -x', \textcircled{2}$ 에서 $a = 3x$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$(3x')x^2 + (-2x')x + (-x') = 0$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 0 (\because x' \neq 0)$$

$$\alpha + \beta = \frac{2}{3}, \alpha\beta = -\frac{1}{3}$$

$$(3|\alpha - \beta|)^2 = 9(\alpha - \beta)^2 = 9\{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\} = 16$$

$$\therefore \sqrt{16} = 4$$

358. $3+i$ or $3-i$

(1) $1+3i$ 와 $1-3i$ 를 두 근으로 갖는 이차방정식은

$x^2 - 2x + 10 = 0$ 이고, 값은 x 의 계수를 잘못 보고 풀었으므로

상수항은 10

(2) $3+2i$ 와 $3-2i$ 를 두 근으로 갖는 이차방정식은

$x^2 - 6x + 13 = 0$ 이고, 옳은 상수항을 잘못 보고 풀었으므로

일차항의 계수는 -6

(1), (2)에 의하여 처음의 이차방정식을 구하면

$x^2 - 6x + 10 = 0$ 이 되고, 근의 공식을 이용하면 $x = 3 \pm i$ 가

됨을 알 수 있다.

359. ⑤

b 를 바르게 보았을 때 두 근이 $1+2i, 1-2i$ 이므로

$$b = (1+2i)(1-2i) = 5 \dots \textcircled{1}$$

a 를 바르게 보았을 때 두 근이 $2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}$ 이므로

$$-a = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}$$

$$a = -4 \dots \textcircled{2}$$

$x^2 + ax + b = 0$ 에 ①, ②를 대입하면

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

$$\therefore x = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm i$$

360. ④

$f(x)=0$ 을 만족하는 근이 m, n 이고

$$f\left(\frac{x-2}{3}\right)=0 \text{의 두 근은 } \frac{x-2}{3}=m \text{ 또는 } \frac{x-2}{3}=n \text{을 만족할}$$

때이므로 $x=3m+2$ 또는 $x=3n+2$ 이므로 두 근의 합은

$$3(m+n)+4=13 \quad (\because m+n=3)$$

361. ④

$x^2+2x+4=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$$\alpha+\beta=-2, \alpha\beta=4$$

$$\alpha^2+2\alpha+4=0 \text{에서 } 2\alpha=-\alpha^2-4$$

$$-8\alpha=4\alpha^2+16 \text{이므로}$$

$$f(\alpha^2)=-8\alpha=4\alpha^2+16$$

$$f(\alpha^2)-4\alpha^2-16=0 \quad \dots \textcircled{1}$$

같은 방법으로 하면

$$f(\beta^2)-4\beta^2-16=0 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②에 의해

$$f(x)-4x-16=0 \quad \dots \textcircled{3} \text{의 두 근이 } \alpha^2, \beta^2 \text{이다.}$$

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4-8=-4$$

$$\alpha^2\beta^2=16$$

$f(x)=x^2+px+q$ 이므로 $f(x)$ 의 이차항의 계수는 1

이차항의 계수가 1이고 두 근이 α^2, β^2 인 이차방정식은

$$x^2+4x+16=0$$

③을 이용하면

$$f(x)-4x-16=x^2+4x+16$$

$$f(x)=x^2+8x+32$$

$$p=8, q=32 \text{이므로 } p+q=40$$

362. 8

이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$\alpha^2+\alpha+1=0, \beta^2+\beta+1=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또한, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha+\beta=-1, \alpha\beta=1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\text{이때, } \textcircled{2} \text{에서 } \alpha=-\beta-1, \beta=-\alpha-1$$

이므로 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $\alpha^2-\beta=0$ 이고 $\beta^2-\alpha=0$

$$\therefore \alpha^2=\beta, \beta^2=\alpha$$

$$f(\alpha^2)=-3\alpha \text{에서 } f(\beta)=-3(-\beta-1)$$

$$\text{즉 } f(\beta)-3\beta-3=0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$f(\beta^2)=-3\beta \text{에서 } f(\alpha)=-3(-\alpha-1)$$

$$\text{즉 } f(\alpha)-3\alpha-3=0 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

따라서 $\textcircled{3}, \textcircled{4}$ 에 의하여 $f(x)-3x-3=0$ 의 두 근이 α, β 이고

$f(x)$ 의 이차항의 계수가 1이므로

$$f(x)-3x-3=(x-\alpha)(x-\beta),$$

$$\text{즉 } f(x)-3x-3=x^2+x+1 \text{에서 } f(x)=x^2+4x+4$$

$$\text{따라서 } p=4, q=4 \text{이므로 } p+q=4+4=8$$

363. ④

근과 계수의 관계에서 $\alpha+\beta=-1, \alpha\beta=-3$

$$\text{조건에서 } f(\alpha)=\frac{1}{\beta}=-\frac{1}{3}\alpha, f(\beta)=\frac{1}{\alpha}=-\frac{1}{3}\beta$$

이차다항식 $g(x)=f(x)+\frac{1}{3}x$ 에 대하여 $g(\alpha)=g(\beta)=0$ 이므로

$$f(x)+\frac{1}{3}x=a(x-\alpha)(x-\beta)=a(x^2+x-3)$$

$$f(0)=1 \text{에서 } 1=-3a, a=-\frac{1}{3}$$

$$f(x)=-\frac{1}{3}(x^2+2x-3)=-\frac{1}{3}(x+3)(x-1)$$

$$f(x)=0 \text{의 두 근이 } x=-3, x=1 \text{이므로}$$

따라서 두 근의 차는 4이다.

364. ⑤

근과 계수와의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2, \alpha\beta=\frac{4}{3}$$

$$f(x)=\frac{x}{2}, g(x)=f(x)-\frac{x}{2} \text{라 하면}$$

$$g(x)=0 \text{의 두 근이 } \alpha, \beta \text{이므로}$$

$$f(x)-\frac{x}{2}=3x^2-6x+4$$

$$f(x)=x^2-\frac{3}{2}x+\frac{4}{3}$$

$$\therefore f(2)=4-3+\frac{4}{3}=\frac{7}{3}$$

365. ⑤

$$\alpha+\beta=1, \begin{cases} P(\alpha)=\beta=1-\alpha \\ P(\beta)=\alpha=1-\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(\alpha)+\alpha-1=0 \\ P(\beta)+\beta-1=0 \end{cases}$$

$$P(x)+x-1=a(x-\alpha)(x-\beta) \quad (a \text{는 상수})$$

$$=a(x^2-x+1)$$

$$P(1)=1 \text{이므로}$$

$$a=1, P(x)=x^2-2x+2$$

$$P(3)=5$$

$$366. x=3, y=9$$

풀이)

식막대의 길이의 합은 60m이고, 옆의 네 면에 사용될 천의

넓이의 합은 72m^2 일 때,

간이 샤워실의 가로(xm)와 세로 (ym)에서

$$8x+4y=60 \text{에서 } 2x+y=15$$

$$2x^2+2xy=72 \text{에서 } x^2+xy=36 \text{을 연립하면}$$

$$y = 15 - 2x \text{를 대입 (단, } 0 < x < \frac{15}{2} \text{)}$$

$$x^2 + x(15 - 2x) = 36$$

$$x^2 - 15x + 36 = (x - 12)(x - 3) = 0 \text{ 이고, 범위에서}$$

$$\therefore x = 3$$

367. ③

[풀이]

선분 BD가 $\angle ABC$ 를 이등분하므로 $\angle ABD = \angle CBD$

원주각의 성질에 의하여 $\angle ABD = \angle ACD$, $\angle CBD = \angle CAD$

$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 이므로 $\angle CAD = \angle ACB$, $\angle CBD = \angle ADB$

삼각형 ACD는 $\overline{AD} = \overline{CD}$ 인 이등변삼각형이므로 $\overline{AD} = 4$

두 이등변삼각형 ADE, BCE는 닮음이고, 닮음비는 4:5이다.

$\overline{AC} = 6$ 이므로

$$\overline{EC} = 6 \times \frac{5}{4+5} = \frac{10}{3}$$

이차방정식 $3x^2 + mx + n = 0$ 의 두 근이 4, $\frac{10}{3}$ 이므로

$$-\frac{m}{3} = 4 + \frac{10}{3}, \quad \frac{n}{3} = 4 \times \frac{10}{3} \quad \therefore m = -22, n = 40$$

따라서 $m + n = 18$ 이다.

368. ⑤

처음 학생 수를 x 명이라 하면

x 명의 학생이 나눠가진 연필의 개수는 $\frac{720}{x}$ 이며

2명의 학생이 더 온 후 $(x+2)$ 명의 학생이 나눠 가진 사탕의

개수는 $\frac{720}{x} - 4$ 이다.

$$\left(\frac{720}{x} - 4\right)(x+2) = 720$$

$$4(180 - x)(x+2) = 720x, \quad (180 - x)(x+2) = 180x$$

정리하면 $-x^2 + 180x - 2x + 360 = 180x$ 에서

$$x^2 + 2x - 360 = 0, \quad (x+20)(x-18) = 0$$

$$\therefore x = 18$$

369. ①

(4)에 의해 $|\alpha|$ 는 (소수)²

$|\alpha|$ 로 가능한 값은 4, 9

(7)에서 $\alpha + \beta + \alpha\beta = 55$

i) $\alpha = 4$ 일 때, $4 + \beta + 4\beta = 55$

$$\beta = \frac{51}{5} \quad (\times)$$

ii) $\alpha = -4$ 일 때, $-4 + \beta - 4\beta = 55$

$$\beta = -\frac{59}{3} \quad (\times)$$

iii) $\alpha = 9$ 일 때, $9 + \beta + 9\beta = 55$

$$\beta = \frac{23}{5} \quad (\times)$$

iv) $\alpha = -9$ 일 때, $-9 + \beta - 9\beta = 55$

$$\beta = -8 \quad (\bigcirc)$$

$$\therefore \alpha = -9, \beta = -8$$

$$p = \alpha + \beta = -17, q = \alpha\beta = 72$$

$$4p + q = -68 + 72 = 4$$

370. ⑤

-1	a	b	c	d
		-2	5	-7
2	2	-5	7	-2
		4	-2	
	2	-1	5	

$$a = 2, b = -3, c = 2, d = 5$$

$$Q(x) = 2x - 1, R(x) = 5x + 3$$

$$\therefore Q(-3) + R(2) = -7 + 13 = 6$$

371. $p = 8, q = 17$

a 가 3개의 약수를 가지므로 제곱수이므로 $a = k^2$ 이라 하면

$x^2 - px + q = 0$ 의 한 근이 $a + i$ 이므로 다른 켈레근은 $a - i$

근과 계수와의 관계에 따라

$p = 2a = 2k^2 \leq 50, q = a^2 + 1 = k^4 + 1 \leq 50$ 이고 서로 소

$k = 1$ 일 때, $p = 2, q = 2$ 로 서로소에 모순

$k = 2$ 일 때, $p = 8, q = 17$ 로 조건이 성립

$k \geq 3$ 일 때. 조건에 모순

따라서 $p = 8, q = 17$

372. ④

$ax^2 - bix + c = 0 \dots$ ①의 한 근이 $\alpha = 2 - i$ 이면 다른 한 근을

$\beta = -2 - i$ 이다.

$$a(x - 2 + i)(x + 2 + i) = 0$$

$$a(x^2 + 2ix - 5) = 0, b = 2a, c = -5a$$

$$ax^2 + 2aix - 5a = 0$$

$$\frac{5}{\alpha} - \beta = \frac{5}{2-i} - (-2-i)$$

$$= 2 + i - (-2 - i) = 4 + 2i$$

[다른풀이]

$\alpha = 2 - i$ 를 ... ①에 대입하여

$$a(2 - i)^2 - bi(2 - i) + c = 0$$

$$a(4 - 4i - 1) - (2bi + 1) + c = 0$$

$$(3a - b + c) + (-4a - 2b)i = 0$$

$$b = -2a, c = -5a$$

$$ax^2 + 2aix - 5a = 0$$

373. ③

$$\alpha\beta = -1 \text{에서 } \frac{1}{\alpha} = -\beta, \frac{1}{\beta} = -\alpha$$

$$\beta f(\alpha) = 1 \text{에서 } f(\alpha) = \frac{1}{\beta} = -\alpha, \text{ 같은 방법으로}$$

$$f(\beta) = -\beta \text{이므로}$$

$$f(x) + x = 0 \text{의 두 근이 } \alpha, \beta \text{이다.}$$

$$f(x) + x = a(x^2 + 4x - 1)$$

$$f(x) = a(x^2 + 4x - 1) - x$$

$$f(0) = 1 \text{이므로 } a = -1$$

$$f(x) = -x^2 - 5x + 1$$

$$p + q = -5, pq = -1 \text{이므로}$$

$$p^2 + q^2 = 27, p^2q^2 = 1 \text{에서 } p^4 + q^4 = (p^2 + q^2)^2 - 2p^2q^2 = 727$$

374. ④

[풀이]

$$\text{이차방정식 } x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0 \text{에서}$$

$$x^2 + 1 = \sqrt{2}x, (x^2 + 1)^2 = (\sqrt{2}x)^2, x^4 = -1$$

$$\text{이차방정식 } x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0 \text{의 두 근이 } \alpha, \beta \text{이다.}$$

$$\alpha + \beta = \sqrt{2}, \alpha\beta = 1$$

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta, \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \text{이므로}$$

$$\alpha - \beta = \pm \sqrt{2}i, \alpha^2 + \beta^2 = 0$$

$$x^4 = -1 \text{이므로}$$

$$\alpha^4 = -1, \beta^4 = -1, \alpha^8 = 1, \beta^8 = 1$$

따라서 자연수 n 에 대하여 α^n, β^n 의 주기는 8이다.

$$\text{어떤 자연수 } n \text{에 대하여 } \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{2}}\right)^{2n} = 2^n \text{이다.}$$

$$\alpha^4 = -1, \beta^4 = -1 \text{이므로 자연수 } m \text{에 대하여}$$

$$\left(\frac{\alpha^{m+4} - \beta^{m+4}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{-\alpha^m + \beta^m}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{\alpha^m - \beta^m}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\text{모든 자연수 } m \text{에 대하여 } \left(\frac{\alpha^{m+4} - \beta^{m+4}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{\alpha^m - \beta^m}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\text{이므로 } \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{2}}\right)^2 \text{의 주기는 4이다.}$$

자연수 k 에 대하여

(i) $n = 4k - 3$ 일 때

$$\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{\alpha^{4k-3} - \beta^{4k-3}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}}\right)^2 = -1$$

$$\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{2}}\right)^{2n} = (-1)^n \text{이므로 } \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{2}}\right)^{2n} = 2^n \text{이 성립하지}$$

않는다.

(ii) $n = 4k - 2$ 일 때

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \pm 2i \text{이므로}$$

$$\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{\alpha^{4k-2} - \beta^{4k-2}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\sqrt{2}}\right)^2 = -2$$

$$\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{2}}\right)^{2n} = (-2)^n \text{이므로 } \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{2}}\right)^{2n} = 2^n \text{이 성립한다.}$$

(iii) $n = 4k - 1$ 일 때

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta) = \pm \sqrt{2}i \text{이므로}$$

$$\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{\alpha^{4k-1} - \beta^{4k-1}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{\alpha^3 - \beta^3}{\sqrt{2}}\right)^2 = -1$$

$$\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{2}}\right)^{2n} = (-1)^n \text{이므로 } \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{2}}\right)^{2n} = 2^n \text{이 성립하지}$$

않는다.

(iv) $n = 4k$ 일 때

$$\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{\alpha^{4k} - \beta^{4k}}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0$$

$$\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{2}}\right)^{2n} = 0 \text{이므로 } \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{2}}\right)^{2n} = 2^n \text{이 성립하지 않는다.}$$

$$\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{2}}\right)^{2n} = 2^n \text{이 성립하는 } 100 \text{ 이하의 자연수 } n \text{은 } 4 \text{로}$$

나누었을 때의 나머지가 2이므로 개수는 25이다.

375. ①

$y = x^2 + ax + b$ 의 그래프가 점 $(-1, 0)$ 에서 x 축과 접하므로

$$x^2 + ax + b = (x + 1)^2 \text{이어야 하므로 } a = 2, b = 1$$

$y = x^2 + x - 6$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점의 x 좌표를 구하면

$$x^2 + x - 6 = 0, x = -3 \text{ 또는 } x = 2 \text{이므로}$$

$(-3, 0), (2, 0)$ 에서 x 축과 만난다.

따라서 두 점 사이의 거리는 5

376. ②

$$\frac{1}{4}(x - a)^2 + 3 = x$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + 12 = 4x$$

$$x^2 - (2a + 4)x + a^2 + 12 = 0$$

$$\text{두 근을 } \alpha, \beta \text{라 하면 } \alpha + \beta = 2a + 4, \alpha\beta = a^2 + 12$$

$$A(\alpha, \alpha), B(\beta, \beta), C(\alpha, 0), D(\beta, 0)$$

$$\overline{CD} = |\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$$

$$= \sqrt{4a^2 + 16a + 16 - 4a^2 - 48}$$

$$= \sqrt{16a - 32} = 4$$

$$16a - 32 = 16$$

$$\therefore a = 3$$

377. ②

풀이) $0 = -2x^2 + 4x + k$ 에서

x 축과 만나려면 $D/4 = 4 + 2k \geq 0$ 이므로 $k \geq -2$

최솟값은 -2 이다.

378. ④

$y = -2x^2 + 4x - k$ 의 그래프가 x 축과 한 점에서 만나므로
 $-2x^2 + 4x - k = 0$ 이 중근을 갖는다.

$$D/4 = 4 - 2k = 0$$

$$\therefore k = 2$$

379. ⑤

x 축과 한 점에서만 만나므로 이차함수의 그래프가 x 축과
 접한다. 따라서 방정식 $x^2 + 4(a-1)x + 3a^2 - 4a + 9 = 0$ 의
 판별식이 0이다.

$$D/4 = 4(a-1)^2 - (3a^2 - 4a + 9) = 0$$

$$a^2 - 4a - 5 = 0 \quad \therefore a = 5 \quad (\because a > 0)$$

380. ⑤

$$y = x^2 + 4x + 2k = (x+2)^2 - 4 + 2k \text{이므로}$$

이차함수가 x 축에 접하려면 꼭지점의 y 값이 0

$$\text{따라서 } -4 + 2k = 0 \text{이므로 } k = 2$$

381. ④

$$f(x) = -x^2 + ax + b = -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} + b \text{에 대해}$$

$$f(-1) = f(7) \text{이므로 대칭축 } x = \frac{a}{2} = \frac{-1+7}{2} = 3 \text{이 되어 } a = 6$$

$y = 11$ 에 접하므로 꼭지점의 y 좌표

$$\frac{a^2}{4} + b = \frac{6^2}{4} + b = 9 + b = 11 \text{이}$$

$$\text{되어 } b = 2$$

$$\text{따라서 } ab = 6 \cdot 2 = 12$$

382. ②

$$f(\alpha) = f(\beta) = 0 \text{이므로 } f(2x-7) = 0 \text{에서}$$

$$x = \frac{7+\alpha}{2}, \frac{7+\beta}{2} \text{이다.}$$

$$\text{따라서 구하고자 하는 값은 } \frac{14+\alpha+\beta}{2} = 7+5 = 12 \text{이다.}$$

383. ⑤

$$p^2 + ap - 2a - 1 = q$$

$$\Rightarrow a(p-2) + p^2 - q - 1 = 0$$

$$p = 2, q = 3 \text{은 } a \text{값과 상관없이 등식을 만족하므로 } p+q = 5$$

384. ②

$-x^2 + n = mx$, 계수가 모두 유리수인 이차방정식은 켈레근을
 가지므로

$$\text{즉, } x^2 + mx - n = 0 \text{의 두 근이 } -1 - \sqrt{5}, -1 + \sqrt{5} \text{이므로}$$

$$\text{두 근의 합 } -2 = -m, m = 2$$

$$\text{두 곱의 곱 } -4 = -n, n = 4$$

$$\text{따라서 } m-n = 2-4 = -2$$

385. ⑤

$$\text{점 C, D의 } x \text{좌표는 } y = \frac{1}{2}(x-k)^2 \text{의 그래프와 직선 } y = x \text{가}$$

$$\text{만나는 점의 } x \text{좌표이다. 따라서 방정식 } \frac{1}{2}(x-k)^2 = x \text{의}$$

방정식을 정리하면 $(x-k)^2 = 2x$, $x^2 - 2(k+1)x + k^2 = 0$ 이 됨을
 알 수 있다.

이 방정식의 근을 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 하면 근과 계수와의 관계에
 의하여 $\alpha + \beta = 2(k+1)$, $\alpha\beta = k^2$ 이 되어

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \text{이 성립하고, 이를 정리하면}$$

$$(\alpha - \beta)^2 = 4(k+1)^2 - 4k^2 = 8k+4 \text{가 성립한다.}$$

$$\text{따라서 } \overline{CD} = \beta - \alpha = \sqrt{8k+4} = 8$$

$$\text{양변을 제곱하여 정리하면 } 8k+4 = 64 \text{가 되어 } k = \frac{15}{2} \text{가 됨을}$$

알 수 있다.

386. ③

$$\text{직선 } y = 4x - a - 3 \text{와 이차함수 } y = -x^2 + x - 2a \text{의 그래프가}$$

$$\text{만나지 않으려면 } 4x - a - 3 = -x^2 + x - 2a,$$

$$x^2 + 3x + a - 3 = 0 \text{에서 } D = 9 - 4(a-3) < 0 \text{을 만족해야 한다.}$$

$$\text{따라서 } 21 - 4a < 0, a > \frac{21}{4}$$

$$\text{따라서 정수 } a \text{의 최솟값은 6이다.}$$

387. ③

$$2x^2 + 2x = 4x + m - 6, 2x^2 - 2x - m + 6 = 0$$

$$\text{판별식 } D/4 = 1 - 2(-m+6) = 2m - 11 < 0$$

$$m < \frac{11}{2} \text{이므로 만족하는 자연수 } m = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$\text{따라서 } 1+2+3+4+5 = 15$$

388. ③

방정식 $x^3 + ax^2 + x - 3 = 0$ 의 한근이 i 이고 계수가 실수이므로
 켈레복소수근 다른 한 허근은 $-i$ 이므로 두근을 가지는

이차방정식은 $x^2 + 1$ 를 인수로 가진다.

$$x^3 + ax^2 + x - 3 = (x^2 + 1)(x - 3) \text{이므로 } a = -3 \text{ 따라서}$$

$$m = -i, n = 3 \text{이므로 } a+m+n = -i$$

389. ②

$$\text{교점 구하는 식 } x^2 + 3x - 4 = x + k \text{를 정리하면}$$

$$x^2 + 2x - (k+4) = 0 \text{이 허근을 갖아야 하므로 판별식}$$

$$D < 0 \text{이다.}$$

$$(b')^2 - ac = 1 + (k+4) < 0 \text{이므로 } k < -5$$

390. ②

$$f(x) = |x^2 - 2x - 8| \text{와 } y = 3x + k \text{가 서로 다른 네 점에서}$$

만나려면

$$y = 3x + k \text{가 } f(x) \text{의 } x \text{절편 중 } (-2, 0) \text{을 지날 때와}$$

$f(x) = -x^2 + 2x + 8$ 과 접할 때 사이로 지나갈 때 이다.

i) $y = 3x + k$ 가 $(-2, 0)$ 을 지날 때, $k = 6$

ii) $y = 3x + k$ 와 $f(x) = -x^2 + 2x + 8$ 가 접할 때,

$$-x^2 + 2x + 8 = 3x + k$$

$$x^2 + x + k - 8 = 0$$

$$1 - 4k + 32 = 0, \therefore k = \frac{33}{4}$$

따라서 k 의 범위는 $6 < k < \frac{33}{4}$ 이고 정수 $k = 7, 8$ 두 개 이다.

391. ③

이차함수와 직선이 접하므로,

$$x^2 - 5x + 4 = m(x - 1)$$

$$x^2 - (m+5)x + 4 + m = 0 \text{ 판별식이 } 0 \text{ 이다.}$$

$$m^2 + 10m + 25 - 4m - 16 = 0, m^2 + 6m + 9 = 0$$

$$m = -3 \text{ 이다.}$$

392. ①

두 본식을 연립하면

$$2x^2 - 3x - k + 1 = 0$$

$$D = 0 \text{ 이므로 } k = -\frac{1}{8} \therefore -16k = 2$$

393. ⑤

직선 $y = 2x - k$ 와 이차함수 $y = x^2 - 4x + 2k$ 의 그래프가

점 (a, b) 에서 접할 때 연립방정식의 판별식 $\frac{D}{4} = 0$ 이므로

$$x^2 - 4x + 2k = 2x - k$$

$$x^2 - 6x + 3k = 0$$

$$\frac{D}{4} = 9 - 3k = 0$$

$$k = 3 \text{ 이므로}$$

$$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 = 0 \text{에서}$$

$$\text{접점좌표는 } (3, 3) \text{ 이므로 } a = 3, b = 3$$

$$\therefore ab = 9$$

394. ⑤

$$y = 2x^2 - ax - 8 \text{에 } (-4, 0) \text{을 대입하면}$$

$$0 = 32 + 4a - 8, \therefore a = -6 \text{ 이다. 이를 } y = 2x^2 - ax - 8 \text{에}$$

대입하면

$$y = 2x^2 + 6x - 8 \text{ 이므로 나머지 } x \text{ 절편은 } 1 \text{ 이므로 } b = 1 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } b - a = 7 \text{ 이다.}$$

395. ③

$y = x^2 - 2(2a - k)x + k^2 + 4k + b$ 의 그래프가 x 축에 접하므로

$$D/4 = (2a - k)^2 - (k^2 + 4k + b) = 0$$

$$(-4a - 4)k + 4a^2 - b = 0$$

k 의 값에 관계없이 성립하므로

$$a = -1, b = 4a^2 = 4$$

$$\therefore a + b = 3$$

396. ②

이차함수 $f(x) = x^2 + ax - (b-5)^2$ 이

조건 (가)에 의하여 $x = \frac{3}{2}$ 에서 최솟값을 가져야 하므로

$$-\frac{a}{2} = \frac{3}{2}, a = -3$$

조건 (나)에 의하여

$$x^2 - 3x - (b-5)^2 = cx \text{가 한 점에서 만나야 하므로}$$

$$x^2 - (3+c)x - (b-5)^2 = 0 \text{에서}$$

$$D = (3+c)^2 + 4(b-5)^2 = 0 \text{을 만족해야 하므로}$$

$$c = -3, b = 5 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } a + b + c = (-3) + (-3) + 5 = -1$$

397. ④

조건 (가)에 의하여 $f(x)$ 는 $x = 3$ 을 대칭축으로 하는 이차함수 이다.

$f(x) = (x-3)^2 + k$ 라 할 수 있고, $y = -4x + 5$ 와 접하므로

연립하여 판별식을 구하면

$$(x-3)^2 + k = -4x + 5$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + k + 4 = 0, D = 1 - k - 4$$

$$\Rightarrow k = -3 \text{ 이고 이를 대입하면 } f(x) = (x-3)^2 - 3 \text{ 이다.}$$

$f(x)$ 가 x 축과 만나는 두 점의 좌표는

$$(x-3)^2 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = 3 + \sqrt{3}, 3 - \sqrt{3} \text{ 이므로}$$

$$\alpha\beta = 9 - 3 = 6 \text{ 이다.}$$

※ $(x-3)^2 - 3 = 0$ 에서 근과 계수의 관계

두 근의 곱: 6임을 알 수 있다.

398. $-8\sqrt{2}$

$$f(x) - g(x) = 2x^2 - 4(k+1)x - 6 + 2k^2 = 0$$

$$x^2 - 2(k+1)x + k^2 - 3 = 0 \text{에서 서로 다른 두 실근을 가지므로}$$

$$D/4 = (k+1)^2 - (k^2 - 3) = 2k + 4 > 0, k > -2$$

$$k \text{는 음의 정수이므로 } k = -1$$

$$\alpha + \beta = 2(k+1) = 0$$

$$\alpha\beta = -3 + k^2 = -2$$

$$\alpha - \beta = -\sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = -2\sqrt{2}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4$$

$$f(\alpha) + kg(\beta) = f(\alpha) - g(\beta)$$

$$= (\alpha^2 + 4\alpha - 6) - (-\beta^2 + 4\beta - 2)$$

$$= \alpha^2 + \beta^2 + 4(\alpha - \beta) - 4$$

$$= 4 - 8\sqrt{2} - 4$$

$$= -8\sqrt{2}$$

399. ②

$$h(x) = f(x) - g(x) = a(x-1)(x-5)$$

$$h(x) = f(x) - g(x) = -x^2 + 6x - 5$$

$$p = 3, q = 4$$

$$\therefore p + q = 7$$

400. ①

$$y = 3(x+1)^2 - 2$$

아래로 볼록이므로 최댓값은 없고 최솟값은 -2

401. ②

이차함수 $y = -x^2 + 6x + 2$ 의 축은 $x = 3$ 이므로 $1 \leq x \leq 4$ 에서 최솟값은 $x = 1$ 에서 7이다.

402. ②

$$y = x^2 - 6x + 6 = (x-3)^2 - 3 \quad (-1 \leq x \leq 2) \text{이므로}$$

$$x = -1 \text{ 일 때, 최댓값 } M = 13$$

$$x = 2 \text{ 일 때, 최솟값 } m = -2$$

$$\therefore m + M = -2 + 13 = 11$$

403. ③

 $f(x) = (x-1)^2 + k - 1$ 이므로 $x = 1$ 에서 최솟값 $k-1$ 을 갖는다.따라서 $k-1 = 3$ 이 되어 $k = 4$ 가 되고, 최댓값은 $x = -3$ 에서

$$f(-3) = (-4)^2 + k - 1 = k + 15 = 4 + 15 = 19 \text{가 됨을 알 수 있다.}$$

$$\therefore k + (\text{최댓값}) = 4 + 19 = 23$$

404. ①

$$y = -(x-2)^2 + 4k + k$$

$$x = 2 \text{ 일 때 최댓값 } 4 + k = 5, k = 1$$

$$x = 5 \text{ 일 때 최솟값 } -3^2 + 4 + 1 = -4$$

405. ③

$$y = x^2 - 2x + a = (x-1)^2 + a - 1$$

$$-1 \leq x \leq 2 \text{ 이므로}$$

$$x = -1 \text{ 일 때 최댓값 } 1 + 2 + a = 8$$

$$a = 5$$

$$x = 1 \text{에서 최솟값 } m = a - 1 = 4$$

$$\therefore a + m = 9$$

406. ⑤

$$y = ax^2 - 8ax - b \text{의 축의 방정식은 } x = 4 \text{이고}$$

 $1 \leq x \leq 3$ 에서 최댓값은 $x = 1$ 에서 최댓값을 갖고, $x = 3$ 에서 최솟값을 갖는다. ($\because a > 0$)

$$a - 8a - b = 6, 9a - 24a - b = -2$$

$$\text{두 식을 연립하면 } a = 1, b = -13$$

$$\therefore a - b = 14$$

407. ④

$$M = f(3) = 17, m = f(6) = 8 \text{이므로 } M + m = 25$$

408. ③

$$y = -x^2 + 4x + a$$

$$= -(x^2 - 4x + 4 - 4) + a$$

$$= -(x-2)^2 + 4 + a$$

$$0 \leq x \leq 5 \text{에서}$$

 $x = 2$ 일 때 y 는 최댓값 $4 + a$ 이고 $x = 5$ 일 때 y 는 최솟값 $-5 + a$ 를 갖는다.

$$\text{최댓값이 } 12 \text{이므로 } 4 + a = 12$$

$$\therefore a = 8$$

$$\text{그러므로 최솟값 } m \text{은 } -5 + a = -5 + 8 = 3$$

$$\therefore a + m = 8 + 3 = 11 \text{이다.}$$

$$409. a = 2, M = 33$$

$$y = 2x^2 - 2ax + 3 = 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{2} + 3 \text{이므로 } x = \frac{a}{2} \text{일 때,}$$

$$\text{최솟값 } -\frac{a^2}{2} + 3 \text{을 갖는다. 따라서 } -\frac{a^2}{2} + 3 = 1 \text{이므로}$$

$$a^2 = 4 \text{이고, } a = \pm 2 \text{인데, } a > 0 \text{이므로 } a = 2 \text{이다. } a = 2 \text{를}$$

주어진 이차함수의 식에 대입하면

$$y = 2x^2 - 4x + 3 = 2(x-2)^2 + 1 \text{이고, } -3 \leq x \leq 3 \text{에서 최댓값은}$$

$$x = -3 \text{일 때 } 33 \text{이므로 } M = 33 \text{이다.}$$

14번 문항 수정 및 수정

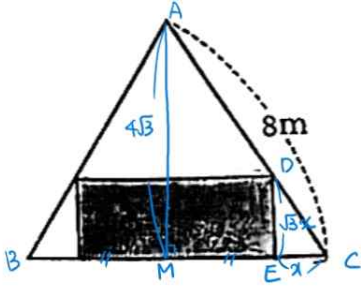
410. ⑤

$$\text{출입문의 가로: } 2(4-x) = 8-2x$$

$$\text{출입문의 세로: } \sqrt{3}x$$

$$\text{넓이} = \sqrt{3}x(8-2x) = 2\sqrt{3}x^2 + 8\sqrt{3}x = -2\sqrt{3}(x-2)^2 + 8\sqrt{3}$$

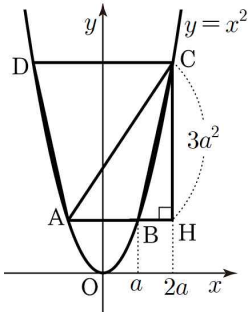
$$\therefore \text{이므로 넓이의 최댓값은 } 8\sqrt{3}$$



411. ⑤

$y = -(x-3)^2 + 4$ 의 그래프에서 $\overline{AB} = 2a$ 라 하면
 $C(3+a, -a^2+4)$ 이므로 $\overline{BC} = 4-a^2$ 이 되어
 사각형 $ABCD$ 의 둘레의 길이는
 $2\{2a + (4-a^2)\} = -2(a^2-2a-4) = -2(a-1)^2 + 10$
 따라서 $a=1$ 일 때, 둘레의 길이의 최댓값은 10

412. 72



삼각형 ABC 와 ACD 의 밑변을 각각 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ 라 하면
 두 삼각형의 높이는 같고, 넓이의 비가 1:2이므로
 $\overline{AB} : \overline{CD} = 1 : 2$ 이다.
 또한, $y = x^2$ 의 그래프가 y 축에 대하여 대칭이므로
 점 B 의 x 좌표를 a 라 하면 점 C 의 x 좌표는 $2a$ 이다.
 즉, $B(a, a^2)$, $C(2a, 4a^2)$ 라 하면 직각삼각형 CAH 에서
 $\overline{AH} = 3a$, $\overline{CH} = 4a^2 - a^2 = 3a^2$
 이때, 대각선 AC 의 길이가 $6\sqrt{5}$ 이므로 피타고라스의 정리에
 의해
 $\overline{AC}^2 = (3a)^2 + (3a^2)^2 = (6\sqrt{5})^2$
 $9a^4 + 9a^2 = 180$, $a^4 + a^2 - 20 = 0$
 $(a^2+5)(a^2-4) = 0 \therefore a^2 = -5$ 또는 $a^2 = 4$
 그런데 $a^2 > 0$ 이므로 $a^2 = 4$ 에서 $a = 2$
 따라서 $\overline{AB} = 4$, $\overline{CD} = 8$, $\overline{CH} = 12$ 이므로
 사다리꼴 $ABCD$ 의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times (8+4) \times 12 = 72$

413. ①

점 $(-1, 6)$ 을 지나는 직선을 $y = m(x+1) + 6$,
 $y = mx + 6 + m$ 이라 하면

$y = -2x^2 - 2x + 4$ 와 접해야 하므로
 $-2x^2 - 2x + 4 = mx + 6 + m$ 이 중근을 가져야 한다.
 $2x^2 + (m+2)x + 2+m = 0$ 에서 ㉠
 $D = (m+2)^2 - 8(2+m) = 0$,
 $m^2 - 4m - 12 = 0$, $m = 6$ 또는 $m = -2$ 이다.
 i) $m = 6$ 인 경우
 ㉠에 $m = 6$ 을 대입하면 $2x^2 + 8x + 8 = 0$, $x = -2$
 ii) $m = -2$ 인 경우
 ㉠에 $m = -2$ 을 대입하면 $2x^2 = 0$, $x = 0$
 따라서 i), ii)에 의하여 $(-2) + 0 = -2$

414. 판매가 70원. 최대이익 1600원
 원가는 $80 \cdot 100 = 8000$ 원
 판매금액은
 $(80+10x)(100-5x) = -50(x^2 - 12x) + 8000 = -50(x-6)^2 + 9600$
 원

따라서 $x = 6$ 일 때,
 판매가는 $80 + 60 = 140$ 원
 최대이익은 9800원

415. ③

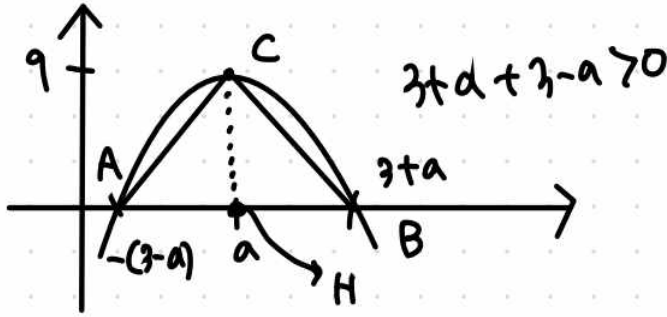
세로: x 가로: $60-2x$ 라 하자.
 $y = x(60-2x) = -2(x-15)^2 + 450$ 이므로
 세로가 15일 때가 넓이가 최대가 된다.
 즉, 가로가 30일 때 넓이의 최댓값은 450이다.

416. ④

축이 $x = 5$ 인 위로 볼록인 이차함수에서 $7 \leq x \leq 9$ 에서
 최댓값과 최솟값은 각각 $f(7)$ 과 $f(9)$ 이다.

417. ④

$y = -x^2 + 2ax + 9 - a^2$
 $y = -(x^2 - 2ax - (9 - a^2))$
 $= -(x^2 - 2ax - (3+a)(3-a))$
 $= -(x + (3-a))(x - (3+a))$
 x 절편: $(3+a)$, $-(3-a)$
 $y = -x^2 + 2ax + 9 - a^2$
 $= -(x^2 - 2ax) + 9 - a^2$
 $= -(x-a)^2 + 9 \rightarrow$ 꼭짓점좌표 $(a, 9)$



$$\begin{aligned} \therefore \triangle ABC \text{의 넓이} &= \overline{AB} \times \overline{CH} \times \frac{1}{2} \\ &= [(3+a) - \{-(3-a)\}] \times 9 \times \frac{1}{2} \\ &= 6 \times 9 \times \frac{1}{2} = 27 \end{aligned}$$

418. ①

$$\begin{aligned} y = x + k \text{가 } y = x^2 - 2x + 2 \text{와 서로 다른 두 점에서 만나므로} \\ x^2 - 2x + 2 = x + k \\ x^2 - 3x + 2 - k = 0 \\ D = 9 - 8 + 4k > 0 \\ k > -\frac{1}{4} \quad \dots \text{①} \end{aligned}$$

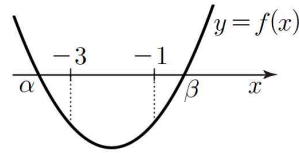
$$\begin{aligned} y = x + k \text{가 } y = x^2 + 2x + 3 \text{의 그래프와 만나지 않으므로} \\ x^2 + 2x + 3 = x + k \\ x^2 + x + 3 - k = 0 \\ D = 1 - 12 + 4k < 0 \\ k < \frac{11}{4} \quad \dots \text{②} \end{aligned}$$

$$\text{①, ②에 의해 } -\frac{1}{4} < k < \frac{11}{4}$$

$$\begin{aligned} a = -\frac{1}{4}, \quad b = \frac{11}{4} \\ \therefore 4(b-a) = 12 \end{aligned}$$

419. ④

직선 $y = x + 2$ 와 이차함수 $y = x^2 + kx + 4$ 의 그래프의 두 교점 A, B의 x좌표를 각각 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 하면 α, β 는 이차방정식 $x^2 + (k-1)x + 2 = 0$ 의 두 실근이다. 이때, 두 점 $(-3, -1), (-1, 1)$ 이 선분 AB 위에 있으려면 $f(x) = x^2 + (k-1)x + 2$ 라 할 때, 다음 그림과 같이 $y = f(x)$ 의 그래프와 x축과의 교점 사이에 α, β 가 위치해야 한다. 즉, 다음 그림에서 $\alpha \leq -3$ 이고 $\beta \geq -1$ 이어야 한다.



따라서 위의 그림에서 $f(-3) \leq 0, f(-1) \leq 0$ 이어야 한다.

$$f(-3) = 9 - 3(k-1) + 2 = -3k + 14 \leq 0$$

$$\text{에서 } -3k \leq -14 \quad \therefore k \geq \frac{14}{3} \quad \dots \text{①}$$

$$f(-1) = 1 - (k-1) + 2 = -k + 4 \leq 0$$

$$\text{에서 } -k \leq -4 \quad \therefore k \geq 4 \quad \dots \text{②}$$

이때, ①, ②을 동시에 만족시키는 k 의 값의 범위는

$$k \geq \frac{14}{3} \text{ 이므로}$$

자연수 k 의 최솟값은 5이다.

420. ②

두 함수의 교점을 구하기 위해 두 식을 연립하면

$$x^2 + (m-1)x + 2 - 2m = 0 \text{ 이고}$$

$$\text{근과 계수의 관계를 이용하면 } \alpha + \beta = -m + 1, \alpha\beta = 2 - 2m$$

이고 주어진 조건을 이용하면

$$m^2 - 2m + 1 - 8 + 8m = 9$$

$$m^2 + 6m - 16 = 0, (m-2)(m+8) = 0$$

$$m = -8, 2 \text{ 조건에 의하여 } m = 2$$

421. ②

$y = x^2 + 2ax - 15$ 와 $y = 2x - n^2$ 를 연립하면

$$x^2 + 2(a-1)x + n^2 - 15 = 0$$

두 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 판별식

$$D > 0$$

$$D/4 = (a-1)^2 - n^2 + 15 > 0$$

$$(a-1)^2 + 15 > n^2$$

$$a = 1, n = 1, 2, 3 \quad f(1) = 3$$

$$f(2) = f(0), f(3) = f(-1), \dots, f(100) = f(-98)$$

$$a = -99, n = 1, 2, 3, \dots, 10 \quad f(-99) = 100$$

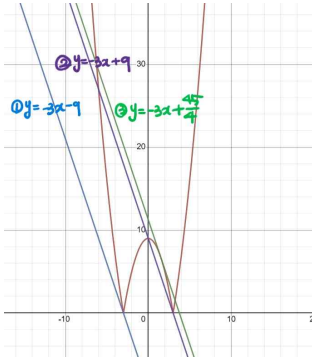
$$a = -100, n = 1, 2, 3, \dots, 11 \quad f(-100) = 101$$

$$\{f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(100)\}$$

$$- \{f(0) + f(-1) + f(-2) + \dots + f(-100)\}$$

$$= f(1) - f(-99) - f(-100) = -198$$

422. ①



그래프를 그리면 위 그림처럼 교점이 발생한다.

$t < -9$ 일 때 $g(t) = 0$
 $t = -9$ 일 때 $g(t) = 1$
 $-9 < t < 9$ 일 때 $g(t) = 2$

$t = 9$ 일 때 $g(t) = 3$

$9 < t < \frac{45}{4}$ 일 때 $g(t) = 4$

$t = \frac{45}{4}$ 일 때 $g(t) = 3$

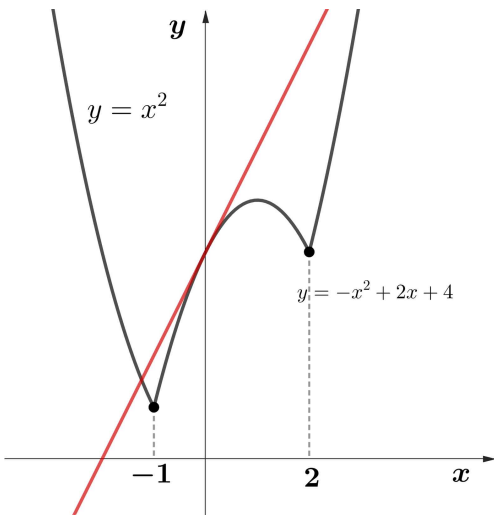
$t > \frac{45}{4}$ 일 때 $g(t) = 2$

$g(a) \geq 3$ 를 만족하는 모든 정수 a 의 합은 $9 + 10 + 11 = 30$

423. ①

풀이) 직선 $y = mx - m + 6$ 과 $y = h(x)$

세 점에서 만나고 최소가 되려면 그림과 같이 접해야 한다.



$y = mx - m + 6$ 와 $g(x) = -x^2 + 2x + 4$ 가 접해야 하므로

$$-x^2 + 2x + 4 = mx - m + 6$$

$x^2 + (m-2)x - m + 2 = 0$ 이 중근을 가지므로

$$D = (m-2)^2 - 4(m-2) = 0$$

$(m-2)(m+2) = 0 \therefore m = 2$ 또는 -2 에서 $m = 2$ 이다.

424. (1) $f(x) = ax(x+2) + 2$ 에서 $(-3, -1)$ 을 지나므로

이다. $a = -1$ 이므로 $f(x) = -x(x+2) + 2 = -x^2 - 2x + 2$

이차함수 $f(x)$ 가 직선 $y = m(x+3) + 3$ 과 접하므로

$$-x^2 - 2x + 2 = mx + 3m + 3, x^2 + (m+2)x + 3m + 1 = 0$$

$$\text{판별식 } D = (m+2)^2 - 4(3m+1) = m^2 - 8m = 0$$

$m = 0$ 또는 $m = 8$

$$(2) -x^2 - 2x + 2 = kx + 2, x^2 + (k+2)x = 0$$

판별식 $D = (k+2)^2$ 이므로

(i) $k = -2$ 일 때 한 점에서 만난다. (접한다.)

(ii) $k \neq -2$ 일 때 $D > 0$ 이므로 두 점에서 만난다.

425. ③

$$x^2 - 2ax + a^2 + 4a = 2mx - n, x^2 - 2(a+m)x + a^2 + 4a + n = 0$$

$$\text{따라서 } \frac{D}{4} = (a+m)^2 - a^2 - 4a - n = 0, 2am + m^2 - 4a - n = 0,$$

$$(2m-4)a + m^2 - n = 0, \text{ 즉 } m = 2, n = 4 \text{여야 한다.}$$

그러므로 구하고자 하는 값은 $m + n = 2 + 4 = 6$

426. 89

$$x - b + 1 = x^2 - 2ax + a^2 + 2a$$

$$x^2 - (2a+1)x + a^2 + 2a + b - 1 = 0$$

이차방정식이 중근을 가짐

$$D = (2a+1)^2 - 4(a^2 + 2a + b - 1) = 0$$

$$= -4a - 4b + 5 = 0$$

$$\text{따라서 } b = -a + \frac{5}{4}$$

$$ab = a\left(-a + \frac{5}{4}\right) = -a^2 + \frac{5a}{4} \text{의 최댓값은 } a = \frac{5}{8} \text{일 때 최댓값}$$

$$\frac{q}{p} = \frac{25}{64} \therefore p + q = 89$$

427. ⑤

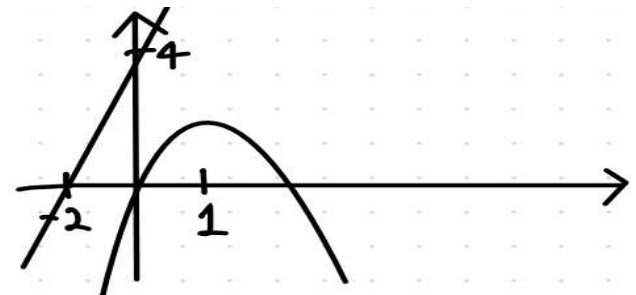
$$f(x) = 4ax - 10, f(x) - 4ax + 10 = a(x-1)(x-5) = 0 \text{이다.}$$

$$f(x) = ax^2 - 2ax + 5a - 10 = a(x-1)^2 + 4a - 10 \text{이므로}$$

최솟값은 $x = 2$ 일 때 $5a - 10 = -6$ 을 가진다. 즉, $a = \frac{4}{5}$ 다.

428. ②

$$y = -2x^2 + 4x + k = -2(x^2 - 2x) + k$$



① x 축과 만난다.

$$x \text{ 축은 } y=0, -2x^2+4x+k=0$$

$$D=16+8k \geq 0, -2 \leq k$$

② $y=2x+4$ 와 만나지 않는다.

$$-2x^2+4x+k=2x+4$$

$$-2x^2+2x+(k-4)=0$$

$$D < 0: 4-4(-2) \times (k-4) < 0$$

$$4+8(k-4) < 0$$

$$k < \frac{7}{2}$$

①과 ②에 의해 $-2 \leq k < 3\frac{1}{2}$ $\therefore$ 정수 $k \Rightarrow -2, -1, 0, 1, 2, 3$

429. ④

(1) 이차함수가 점 $(1, 2)$ 을 지나므로 $1+(a+1)+b-1=2$

$$\therefore a+b=1$$

(2) 방정식 $x^2+(a+1)x+b-1=4x-2$ 가 $x=1$ 을 중근으로 갖는다. 따라서 $x^2+(a-3)x+b+1=(x-1)^2$ 우변을 전개하면 x^2-2x+1 이므로 $a-3=-2, b+1=1$ (1), (2)에 의하여 $a=1, b=0 \therefore a-b=1$

430. ⑤

$$D/4=(a-k)^2-(k^2-2k+b+3)=0$$

$$-2ak+a^2+2k-b-3=0$$

$$(2-2a)k+a^2-b-3=0$$

$$a=1, b=-2$$

$$\therefore a-b=1-(-2)=3$$

431. ④

 $y=x^2+4x+k^2+a-1$ 의 그래프가 직선 $y=2kx+2bk-1$ 과 한 점에서 만나므로

$$x^2+4x+k^2+a-1=2kx+2bk-1 \text{에서}$$

$$x^2+2(2-k)x+k^2+a-2bk=0$$

판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(2-k)^2-(k^2+a-2bk)=0$$

이다.

$$k^2-4k+4-k^2-a+2bk=0$$

$$(2b-4)k+4-a=0$$

실수 k 의 값에 관계없이 성립하므로

$$2b-4=0, 4-a=0 \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } b=2, a=4$$

$$\text{그러므로 } ab=4 \times 2=8 \text{이다.}$$

432. ②

두 함수 $f(x)=\frac{1}{4}x^2, g(x)=-x^2+4x-\frac{29}{8}$ 에 대하여 $f(x)=g(x)$ 에서

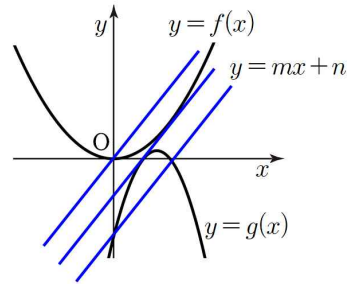
$$\frac{1}{4}x^2=-x^2+4x-\frac{29}{8}, 2x^2=-8x^2+32x-29$$

$$10x^2-32x+29=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 이차방정식 ①의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=(-16)^2-10 \times 29=-34 < 0$$

이므로 이차방정식 ①은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

즉, 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 는 그림과 같이 만나지 않는다.

이때, 기울기가 m , y 절편이 k 인 직선 l 에 대하여 실수 k 의 값에 관계없이 직선 l 이 곡선 $y=f(x)$ 또는 $y=g(x)$ 와 만나는 점의 개수가 항상 2이려면 어떤 실수 k 에 대하여 그림과 같이 직선 l 이 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 와 동시에 접해야 한다.

직선 l 이 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 에 동시에 접하도록 하는 k 의 값을 n 이라 하면 두 방정식 $f(x)=mx+n, g(x)=mx+n$ 이 모두 중근을 가져야 한다.

방정식 $f(x)=mx+n$ 이 중근을 가지므로

$$\frac{1}{4}x^2=mx+n, x^2-4mx-4n=0 \text{에서 판별식을 } D_2 \text{라 하면}$$

$$\frac{D_2}{4}=(-2m)^2-1 \times (-4n)$$

$$=4m^2+4n=0$$

$$\text{에서 } 4n=-4m^2 \therefore n=-m^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또한, 방정식 $g(x)=mx+n$ 이 중근을 가지므로

$$-x^2+4x-\frac{29}{8}=mx+n, -8x^2+32x-29=8mx+8n$$

즉, $8x^2+8(m-4)x+8n+29=0$ 에서 판별식을 D_3 이라 하면

$$\frac{D_3}{4}=\{4(m-4)\}^2-8 \times (8n+29)$$

$$=16(m-4)^2-8(8n+29)$$

$$=8\{2(m-4)^2-(8n+29)\}=0$$

$$\text{에서 } 2(m-4)^2-8n-29=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

②을 ①에 대입하면

$$2(m-4)^2-8 \times (-m^2)-29=0$$

$$10m^2-16m+3=0$$

이때 이 이차방정식의 판별식을 D_4 라 하면

$$\frac{D_4}{4}=(-8)^2-10 \times 3=34 > 0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 조건을 만족시키는 실수 m 의 값의 합은 이차방정식의

근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{16}{10} = \frac{8}{5}$ 이다.

433. ④

이차함수가 x 축에 접하므로 $D=0$ 을 갖는다.

$$(k+a)^2 - k^2 - 8k - a^2 = 2ak - 8k = (2a-8)k = 0$$

k 에 관한 항등식이므로 $a=4$

434. ①

두 그래프가 접한다는 조건을 활용하기 위해 연립하면

$$x^2 + (-2k-m)x + k^2 + 1 - n = 0$$

판별식을 사용하면

$m^2 + 4km - 4 + 4n = 0$ 이고 k 값에 관계없이 식이 성립하기 위해서는

위 식이 k 에 대한 항등식이어야 하므로

$$m=0, n=1$$

$$m+n=1$$

435. ①

직선을 $y=ax+b$ 라 두면

$$\frac{1}{k}(x-2k)^2 + 3 = ax+b \text{ 접하므로,}$$

$$\frac{1}{k}(x^2 - 4kx + 4k^2) + 3 - ax - b = 0 \text{이 중근을 갖는다.}$$

$$x^2 - (4+a)kx + 4k^2 + (3-b)k = 0 \text{ 판별식 } D=0$$

$$(4+a)^2k^2 - 16k^2 - 4(3-b)k = 0 \text{ 이 } k \text{에 관계없이 성립하므로}$$

$$k \text{로 정리하면 } (a^2 + 8a)k^2 - 4(3-b)k = 0 \text{이므로}$$

$$a=0, -8, b=3$$

두 직선은 $y=3, y=-8x+3, x=\frac{1}{2}$ 과 둘러싸인 넓이는

세점 $(0, 3), \left(\frac{1}{2}, -1\right), \left(\frac{1}{2}, 3\right)$ 으로 둘러싸인 삼각형의

넓이=1

436. ③

한 이차함수와 직선을 연립하면

$$x^2 - 4x + k - n = 0 \text{ 이고 접해야하므로 판별식을 이용하면}$$

$$4 - k + n = 0$$

또다른 이차함수와 직선을 연립하면

$$x^2 + 2x + n = 0 \text{ 이고 역시 접해야하므로 판별식을 이용하면}$$

$$1 - n = 0$$

주어진 식 두 개를 연립하면

$$n=1, k=5 \text{ 이고 } n+k=6$$

437. ③

두 점 A, B의 x 좌표의 합이 12, 차가 6이므로

$$A(3, 0), B(9, 0), a=27$$

$$f(x) = x^2 - 12x + 27$$

삼각형 ABC의 넓이가 21이므로 $C(c, 7)$

$$f(c) = 7, c^2 - 12c + 20 = 0$$

$$c=2 \text{ (} \because 0 < c < 3 \text{)}$$

$$g(2) = 7, g(9) = 0$$

$$g(x) = -x^2 + 10x - 9$$

$$g(x) \text{의 최댓값은 } g(5) = 16, f(x) \text{의 최솟값은 } f(6) = -9$$

$$\therefore 25$$

438. ⑤

$B(2a, 0), C(2a+4, 0)$ 이므로 $f(x) = -(x-2a)(x-2a-4)$ 이다.

$\neg$, $f(x)$ 가 $A(a, -3a^2)$ 을 지나므로 성립

$\perp$, $f(x)$ 에 a 를 대입하면, $-3a^2 = -a^2 - 4a$ 이므로 $a=2$ 이다.

$\sqsubset$, $a=2$ 이므로 $A(2, -12), B(4, 0), C(8, 0)$ 이다. 따라서 삼각형 ABC는 밑변이 4 높이가 12 이므로 넓이가 24이다.

$$439. \frac{70}{9}$$

풀이)

$$f(x) = x^2 - 7, g(x) = -2x^2 + 5 \text{이므로}$$

$$\overline{AD} = \overline{BC} = a - (-a) = 2a$$

$$\overline{BA} = \overline{CD}$$

$$= g(a) - f(a)$$

$$= (-2a^2 + 5) - (a^2 - 7)$$

$$= -3a^2 + 12$$

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 $l(a)$ 라 하면

$$l(a) = \overline{AD} + \overline{BC} + \overline{BA} + \overline{CD}$$

$$= 2(\overline{AD} + \overline{BA})$$

$$= 2(2a - 3a^2 + 12)$$

$$= -6a^2 + 4a + 24$$

$$l(a) = -6a^2 + 4a + 24$$

$$= -6\left(a - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{74}{3}$$

따라서 $0 < a < 2$ 이므로 $a = \frac{1}{3}$ 일 때, 최대가 되므로

$$\text{넓이 } S(a) = 2a(-3a^2 + 12) = 6a(4 - a^2)$$

$$S\left(\frac{1}{3}\right) = 6 \cdot \frac{1}{3} \left(4 - \frac{1}{9}\right) = \frac{70}{9} \text{이다.}$$

15번 문항 오타 수정

440. ⑤

$$f(a) = a^2 - 4a + 2 = 2b$$

$$f(b) = b^2 - 4b + 2 = 2a$$

연립하면

$$a^2 - b^2 - 4(a - b) = 2(b - a)$$

$a \neq b$ 이므로 양변을 $a - b$ 로 나누면

$$a + b - 4 = -2$$

$$a + b = 2$$

$$b = 2 - a, a = 2 - b$$

$$f(a) = 4 - 2a, f(b) = 4 - 2b$$

$f(x) + 2x - 4 = 0$ 의 두 근이 a, b 이므로

$$(x - a)(x - b) = x^2 - 2x - 2 = (x - 1)^2 - 3$$

최솟값은 -3

$$441. k = \frac{13}{5}, k = -1$$

$$f(x) = -2x^2 + 4kx - 3k - 2 = -2(x - k)^2 + 2k^2 - 3k - 2$$

$$1) k \geq 2 \text{ 일 때 최댓값은 } f(2) = 3 \text{ 이므로 } k = \frac{13}{5}$$

$$2) -2 \leq k < 2 \text{ 일 때 최댓값은 } f(k) = 3 \text{ 이므로 } k = -1$$

$$3) k < -2 \text{ 일 때 최댓값은 } f(-2) = 3 \text{ 이므로 } k = -\frac{13}{11}$$

($k < -2$ 에 모순)

442. ③

$t = x^2 - 4x + k$ 라고 하면

$$k - 4 \leq t \leq k$$

$$y = -(x^2 - 4x + k)^2 + 4(x^2 - 4x + k)$$

$$= -t^2 + 4t$$

$f(t) = -(t - 2)^2 + 4$, $f(t)$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하자.

(i) $k - 4 \leq 2 \leq k$ 일 때

$y = f(t)$ 의 그래프는 직선 $t = 2$ 에 대하여 대칭이므로

$$M = 4, -12 \leq m \leq 0 \text{ 이고, } M + m = 4 \text{ 이므로}$$

$$m = 0, k = 4$$

(ii) $k - 4 > 2$ 또는 $k < 2$ 일 때

$$M + m = f(k - 4) + f(k) = 4$$

$$-(k - 6)^2 - (k - 2)^2 + 8 = 4$$

$$k^2 - 8k + 18 = 0$$

$D < 0$ 이므로 만족하는 실수 k 가 존재하지 않는다.

따라서 $k = 4$

443. ③

$$y = (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x - 3) - 5(x^2 - 2x) + 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

에서 $x^2 - 2x = t$ 라 하면

$$t = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1 \text{ 이므로 } -2 \leq x \leq 3 \text{ 에서}$$

$x = 1$ 일 때 최솟값 -1 , $x = -2$ 일 때 최댓값 8 을 갖는다.

즉, $-1 \leq t \leq 8$ 이고, ㉠은

$$y = (t + 2)(t - 3) - 5t + 3$$

$$= t^2 - 6t - 3$$

$$= (t - 3)^2 - 12$$

이므로 $t = 3$ 일 때 최솟값 -12 , $t = 8$ 일 때 최댓값 13 을 갖는다.

한편, $t = 3$ 에서 $x^2 - 2x = 3$

$$x^2 - 2x - 3 = 0, (x + 1)(x - 3) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

즉, $x = -1$, $x = 3$ 에서 ㉠은 최솟값 -12 를 갖는다.

또한, $t = 8$ 에서 $x^2 - 2x = 8$

$$x^2 - 2x - 8 = 0, (x + 2)(x - 4) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 4$$

그런데 $-2 \leq x \leq 3$ 이므로 $x = -2$

즉, $x = -2$ 일 때 ㉠은 최댓값 13 을 갖는다.

따라서 $\alpha = -2$, $M = 13$, $\beta = -1$, $\gamma = 3$, $m = -12$

또는 $\alpha = -2$, $M = 13$, $\beta = 3$, $\gamma = -1$, $m = -12$

이므로

$$\alpha\beta\gamma + M + m$$

$$= (-2) \times 3 \times (-1) + 13 + (-12)$$

$$= 7$$

444. ①

$-1 \leq x \leq 2$ 에서 $4x^2 + 4x + 1 = t$ 라 하면 $t = (2x + 1)^2$ 이므로

$x = -\frac{1}{2}$ 일 때, 최솟값 0 , $x = 2$ 일 때, 최댓값 25 로 $0 \leq t \leq 25$

$$y = -t^2 - 2t + 24 = -(t + 1)^2 + 25$$

따라서 $t = 0$ 일 때, 최댓값 $y = -1 + 25 = 24$

445. ④

$x^2 + 2x = t$ 라 하자.

$$(x + 1)^2 - 1 = t \quad (t \geq -1)$$

$y = (t - 3)^2 - 2 \quad (t \geq -1)$ 이므로 최솟값은 $t = 3$ 일 때 최솟값 -2 이다.

446. ①

$f(-4) = f(2)$ 이므로 $x = -1$ 이 대칭축이 된다. 즉 $a = 2$ 이다.

또한 최솟값이 -5 이므로

$$f(x) = (x + 1)^2 - 5 = x^2 + ax + b \text{ 에서 } b = -4$$

이 때 $-6 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $x = -6$ 일 때, 최댓값 $M = f(-6) = 20$ 을 갖는다.

$$\therefore \frac{2M}{ab} = -5$$

447. ③

$$y = (x - a)^2 + b$$

(i) $4 < a$ 일 때

최솟값은 $f(4) = 4$ 이므로

$$16 - 8a + a^2 + b = 4, b = -a^2 + 8a - 12$$

$$2a+b=-a^2+10a-12=-(a-5)^2+13$$

$a=5$ 일때 최댓값 13을 가진다.

(ii) $2 < a \leq 4$ 일 때

최솟값은 $f(a)=b=4$ 이다.

$2a+b=2a+4$ 는 $a=4$ 일 때 최댓값 $8+4=12$ 를 가진다.

(iii) $a \leq 2$ 일 때

최솟값은 $f(2)=4-4a+a^2+b=4$, $b=-a^2+4a$ 이다.

$$2a+b=2a-a^2+4a=-(a-3)^2+9$$

$a=2$ 일 때 최댓값 8을 가진다.

(i)~(iii)에서 최댓값은 13이다.

448. (1) $b=4$ (2) $b=(a-3)^2+4$ (3) 7

$$(1) f(x)=-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+b$$

$2 \leq \frac{5}{2} \leq 3$ 이므로 $x=\frac{5}{2}$ 일 때 최댓값 b 를 갖는다.

$$\therefore b=4$$

$$(2) f(x)=-(x-a)^2+b$$

$a \geq 3$ 이므로 $x=3$ 일 때 최댓값을 갖는다.

$$f(3)=-(3-a)^2+b=4$$

$$\therefore b=(a-3)^2+4$$

$$(3) a+b=a+(a-3)^2+4$$

$$=a^2-5a+13$$

$$=\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{27}{4}$$

$a \geq 3$ 이므로 $a=3$ 때 최솟값을 갖는다.

따라서 $a=3$ 일 때 최솟값 7을 갖는다.

449. ⑤

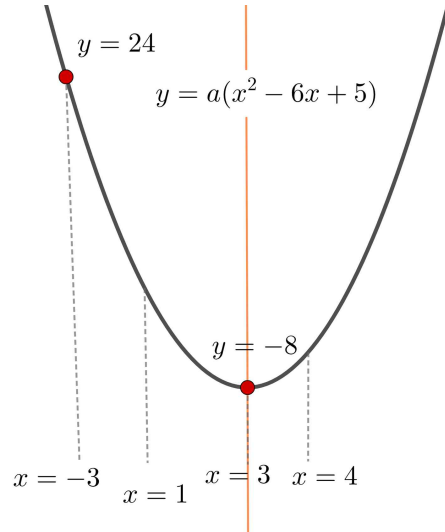
풀이)

직선 $y=4ax+b$ 와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 만나는 두 점의 x 좌표는 1과 5이다.

직선 $y=4ax+b$ 와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 만나는 두 점의 x 좌표는 1과 5이므로

$$f(x)-4a-b=a(x-1)(x-5)=ax^2-6ax+5a$$

이차함수의 축의 방정식은 $x=3$ 이므로



그림과 같이

$$f(x)-4a-b=a(x-1)(x-5)+b=ax^2-6ax+5a+b \text{에서}$$

$1 \leq x \leq 4$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값은 -8 이고, $-3 \leq x \leq 3$ 에서

$f(x)$ 의 최댓값은 24이므로 $f(3)=-8$, $f(-3)=24$

$$f(3)=4a+b=-8, f(-3)=20a+b=24$$

이므로 $a=2$, $b=-16$ 이다.

$$\therefore a-b=18$$

450. ②

$t=(x-1)^2+3$ 으로 치환하면

조건에 의하여 $t \geq 3$

$y=-(t-2)^2+3$ 이고 $t \geq 3$ 이므로 최댓값은 2

풀이에 의하여

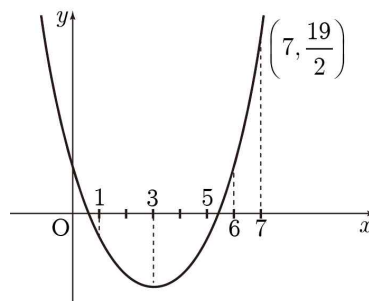
$p=3$, $q=2$, $f(x)=-(t-2)^2$ 이므로

$$f(3)+pq=-1+6=5$$

451. ④

$f(1)=f(5)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 대칭이고,

$f(1)+|f(6)|=0$ 에서 $f(1)<0$, $f(6)>0$ 이다.



$$f(x)=a(x-3)^2+b \quad (a>0) \text{에서}$$

$$f(1)+|f(6)|=0 \text{이므로 } 4a+b+9a+b=0,$$

$$13a+2b=0 \quad \dots \textcircled{7}$$

$0 \leq x \leq 7$ 에서 최댓값은 $x=7$ 일 때 가지고,

$$f(7)=16a+b=\frac{19}{2} \text{ 이다. } \dots \textcircled{C}$$

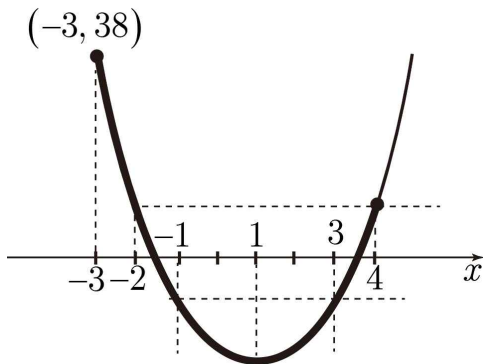
$$\textcircled{A}, \textcircled{C} \text{에서 두 식을 연립하면 } a=1, b=-\frac{13}{2}$$

$$\text{따라서 } f(x)=(x-3)^2-\frac{13}{2}, f(4)=1-\frac{13}{2}=-\frac{11}{2}$$

452. ④

$f(-1)=f(3)$ 에서 $x=1$ 대칭이므로 $f(x)=a(x-1)^2+b$ 라 할 수 있다.

$f(-2)=|f(3)|>0$ 이므로 $a>0$ 이고, $f(3)<0$ 이어야 한다.



$$9a+b=|4a+b| \text{에서 } 9a+b=-4a-b, 2b=-13a \dots \textcircled{A}$$

$$x=-3 \text{ 일 때 최댓값 } 38 \text{ 을 가지므로 } f(-3)=38$$

$$f(-3)=16a+b=38 \dots \textcircled{C}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{C} \text{에서 } a=4, b=-26 \text{ 이므로}$$

$$f(x)=4(x-1)^2-26 \therefore f(1)=-26$$

453. ③

$$f(-2)=f(4) \text{ 이므로 } x=1 \text{ 에 선대칭}$$

$$a<0 \text{ 일 경우, } f(x)=a(x-1)^2+27$$

$$f(2)+f(3)=a+27+4a+27=5a+54=0$$

a 는 정수가 아님.

$$a>0 \text{ 일 경우, } f(5) \text{ 가 최댓값}$$

$$f(x)=a(x-1)^2+b$$

$$16a+b=27$$

$$f(2)+f(3)=a+b+4a+b=5a+2b=0$$

$$a=2, b=-5 \quad f(x)=2(x-1)^2-5$$

$$f(0)=-3$$

454. ②

$$f(x)=ax^2-4ax+b=a(x-2)^2+b-4a$$

$-1 \leq x \leq 3$ 이고, a, b 는 자연수이므로

$$x=2 \text{ 일 때 최솟값 } b-4a$$

$$x=-1 \text{ 일 때 최댓값 } b+5a \text{ 를 갖는다.}$$

$$\text{최댓값과 최솟값의 합은 } 2b+a=4$$

$$a, b \text{는 자연수이므로 } a=2, b=1$$

$$\therefore a^2+b^2=5$$

455. ①

$$f(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$$

$$f(1)=2$$

$$f(t)=t^2-2t+3$$

$$f(t+1)=t^2+2$$

i) $x=t$ 일 때 최댓값, $x=t+1$ 일 때 최솟값을 가질 때

$t+1<1$ 이므로 즉, $t<0$ 일 때

$$g(t)=f(t)-f(t+1)=-2t+1$$

ii) $x=t$ 일 때 최댓값, $x=1$ 일 때 최솟값을 가질 때

$t<1 \leq t+1$ 이므로 $0 \leq t<1$ 이고

$1-t>t+1-1$ 이므로 $t<\frac{1}{2}$ 을 만족해야 한다.

즉, $0 \leq t<\frac{1}{2}$ 일 때 $g(t)=f(t)-f(1)=t^2-2t+1=(t-1)^2$

iii) $x=t+1$ 일 때 최댓값, $x=1$ 일 때 최솟값을 가질 때

$t<1 \leq t+1$ 이므로 $0 \leq t<1$ 이고

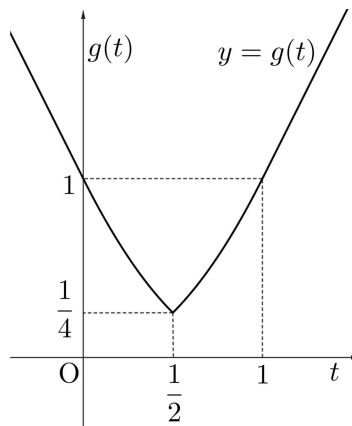
$1-t \leq t+1-1$ 이므로 $t \geq \frac{1}{2}$ 를 만족해야 한다.

즉, $\frac{1}{2} \leq t<1$ 일 때 $g(t)=f(t+1)-f(1)=t^2$

iv) $x=t+1$ 일 때 최댓값, $x=t$ 일 때 최솟값을 가질 때

즉, $t \geq 1$ 일 때 $g(t)=f(t+1)-f(t)=2t-1$

$$g(t)=\begin{cases} -2t+1 & (t<0) \\ (t-1)^2 & (0 \leq t<\frac{1}{2}) \\ t^2 & (\frac{1}{2} \leq t<1) \\ 2t-1 & (t \geq 1) \end{cases}$$



그래프에서 $y=g(t)$ 의 그래프는 $t=\frac{1}{2}$ 에 대하여 대칭이므로

$$g(a-\sqrt{2})=g(a+\sqrt{2}) \text{ 를 만족하는 } a=\frac{1}{2}$$

456. 21

$$f(x)=ax^2+bx+2$$

$$f(x+1)-f(x)=a(x+1)^2+b(x+1)+2-ax^2-bx-2$$

$$2ax+a+b=4x \text{ 이므로 } a=2, b=-2$$

$$f(x)=2x^2-2x+2 \text{에서 축이 } x=\frac{1}{2} \text{ 이므로 최댓값은}$$

$$f(-2) = 14, \text{ 최솟값은 } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$14 \times \frac{3}{2} = 21$$

457. ①

$$x^2 - 2xf(t) + f(t) = (x - f(t))^2 - f(t)^2 + f(t) = 0 \text{이다.}$$

$$f(t) \text{의 값이 2로 최대일 때, } x^2 - 4x + 2 = 0 \text{이고}$$

$$\frac{D}{4} = 4 - 2 = 2 > 0 \text{이므로 이차방정식은 서로 다른 두 실근을}$$

갖는다.

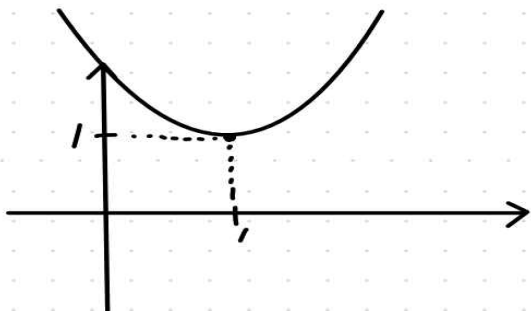
이차방정식이 중근을 가지려면

$$\frac{D}{4} = f(t)^2 - f(t) = f(t)(f(t) - 1) = 0 \text{이어야 하므로}$$

$f(t) = 0, 1$ 이다. 따라서 주어진 그림을 참고하면 이와 부합하는 서로 다른 실수 t 는 $4 + 3 = 7$ 개 존재한다.

458. ⑤

$$f(x) = (x-1)^2 + 1$$



$$\frac{\left(t + \frac{1}{2}\right) + \left(t - \frac{1}{2}\right)}{2} = t \text{이므로 중점의 } x \text{좌표는 } t \text{이다.}$$

그러므로 t 를 기준으로 범위를 잡는다.

$$\textcircled{1} \ t < 1 \text{일 때, } x = \left(t - \frac{1}{2}\right) \text{일 때 최대이므로 } f\left(t - \frac{1}{2}\right) = g(t)$$

$$\textcircled{2} \ t \geq 1 \text{일 때, } x = \left(t + \frac{1}{2}\right) \text{일 때 최대이므로 } f\left(t + \frac{1}{2}\right) = g(t)$$

c) $t \leq 1, t > 1$ 로 잡아도 상관없다.

$$g(t) = \begin{cases} \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + 1 & (t < 1) \\ \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 & (1 \leq t) \end{cases} \quad \text{즉 그래프 상 } t=1 \text{에서 대칭인}$$

그래프가 그려지므로 최솟값은 $t=1$ 일 때, $\frac{5}{4}$ 최댓값은

$$t = \frac{5}{2} \text{일 때, } 5$$

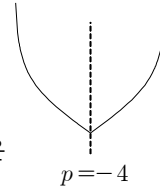
$$M + m = \frac{25}{4} = \frac{g}{p} \quad p + g = 29$$

459. ①

$$p = -4 \text{ 이면, } g(p) = f(p) = f(p+4) \text{이고,}$$

$$p < -4 \text{ 이면, } g(p) = f(p), \ p > -4 \text{ 이면, } g(p) = f(p+4)$$

이므로,



$g(p)$ 의 그래프 개형은 $p = -4$ 이다.

따라서 $p = -4$ 에서 최솟값을 갖는다.

$$g(-4) = -4 \text{ 이므로 } -12a = -4, \ a = \frac{1}{3} \text{ 이다.}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 4x - 12), \therefore f(3) = 3$$

$$460. \textcircled{1} \ f(t) = -2\left(t - \frac{x}{4}\right)^2 + \frac{x^2}{8} + 5 \text{이다.}$$

$$x = -6 \text{일 때 } \frac{x}{4} = -\frac{3}{2} < -1 \text{이므로}$$

$$g(x) = f(-1) = -x + 3 \text{이다.}$$

따라서 $g(-6) = 9$ 이다.

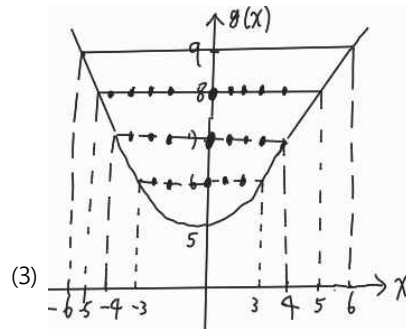
$$\textcircled{2} \ \frac{x}{4} < -1 \text{일 경우 } \textcircled{1} \text{과 같이 } g(x) = -x + 3 \text{이다.}$$

$$-1 \leq \frac{x}{4} \leq 1 \text{일 경우 } g(x) = \frac{x^2}{8} + 5 \text{이다.}$$

$$1 < \frac{x}{4} \text{일 경우 } g(x) = f(1) = x + 3 \text{이다.}$$

$$\text{따라서, 주어진 조건을 만족하려면 } g(x) = \frac{x^2}{8} + 5 = 6,$$

$$x = \pm \sqrt{8} \text{이므로, 구하고자 하는 곱은 } -8 \text{이다.}$$



$$\textcircled{3} \quad -6 \leq x \leq 6$$

그림을 참고하면 구하고자 하는 점의 개수는

$$9 + 7 + 5 = 21 \text{개다.}$$

461. -4

$$f(x) = x^2 + 2ax + b \text{일 때 조건 (가)에서}$$

$$f(-1) = 1 - 2a + b < 0 \therefore 2a - b > 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표는

이차방정식 $x^2 + 2ax + b = 0$ 의 두 실근과 같으므로 두 근을

α, β 라

하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = -2a, \alpha\beta = b$$

또한, $y = f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점 C에서 x 축에 내린 수선의 발을 M이라 하면 점 M은 선분 AB의 중점

이므로 직선 CM이 대칭축이고, $\overline{AC} = \overline{BC}$ 이다.

$$\text{이때, } \overline{AB}^2 = (\beta - \alpha)^2$$

$$= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$= (-2a)^2 - 4b$$

$$= 4(a^2 - b)$$

삼각형 AMC가 직각삼각형이고

$$f(x) = x^2 + 2ax + b$$

$$= (x+a)^2 + b - a^2$$

에서 꼭짓점 C의 좌표가 $C(-a, b-a^2)$ 이다.

이때, 피타고라스의 정리에 의해

$$\overline{AC}^2 = \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2 + \overline{MC}^2$$

$$= (a^2 - b) + (a^2 - b)^2$$

또, $\overline{BC} = \overline{AC}$ 이므로

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$

$$= 4(a^2 - b) + (a^2 - b) + (a^2 - b)^2 + (a^2 - b) + (a^2 - b)^2$$

$$= 6(a^2 - b) + 2(a^2 - b)^2 = 56 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

이때, $a^2 - b = t$ 라 하면 $\textcircled{C}$ 은

$$2t^2 + 6t = 56 \text{에서 } 2t^2 + 6t - 56 = 0$$

$$t^2 + 3t - 28 = 0, (t+7)(t-4) = 0$$

$$\therefore t = -7 \text{ 또는 } t = 4$$

$-t$ 가 점 C의 y 좌표이므로 $-t < 0, t > 0$

$$\therefore t = 4$$

$a^2 - b = 4$, 즉 $b = a^2 - 4$ 이다.

$$\textcircled{A} \text{에서 } 2a - b = 2a - (a^2 - 4) > 1$$

$$-a^2 + 2a + 3 > 0, a^2 - 2a - 3 < 0$$

$$(a+1)(a-3) < 0 \therefore -1 < a < 3$$

따라서 이 범위에 속하는 정수 a 의 값은 0, 1, 2이다.

$$a = 0 \text{ 일 때, } b = -4$$

$$a = 1 \text{ 일 때, } b = -3$$

$$a = 2 \text{ 일 때, } b = 0$$

$a+b$ 의 최솟값은 $a=0, b=-4$ 일 때 $a+b=-4$ 이다.

462. ②

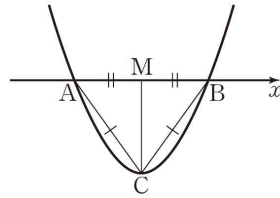
$$(\text{둘레의 길이}) l = 2 \cdot 2x + 2(-x^2 + 4)$$

$$= -2x^2 + 4x + 8$$

$x = 1$ 일 때 최대

$$(\text{넓이}) S = 2x(-x^2 + 4)$$

$x = 1$ 을 대입하면



$$S(1) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$463. \frac{1}{2}$$

삼각형 OAB의 넓이는

$$S_2 + S_3 = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$$

$$\therefore S_3 = 3 - S_2 \quad \dots \textcircled{A}$$

삼각형 OBC의 넓이는

$$S_1 + S_4 = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

$$S_4 = 2 - S_1 \quad \dots \textcircled{B}$$

$$(S_1 - S_3)^2 + (S_2 - S_4)^2$$

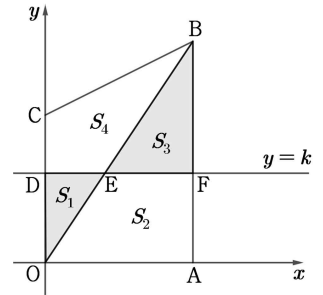
$$= (S_1 + S_2 - 3)^2 + (S_2 + S_1 - 2)^2 (\because \textcircled{A}, \textcircled{B})$$

$$S_1 + S_2 = a \text{라 할 때, } (a-3)^2 + (a-2)^2 = 2a^2 - 10a + 13$$

$$= 2\left(a - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

이때, $0 < a < 4$ 이므로 꼭짓점에서 최솟값을 갖는다.

따라서 $a = \frac{5}{2}$ 일 때, 구하는 식의 최솟값은 $\frac{1}{2}$ 이다.



464. ①

점 $P(a, b)$ 가 $y = x^2 - 3x + 2$ 의 점이므로

$$b = a^2 - 3a = 2 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

또한, $x^2 - 3x + 2 = 0$ 에서 $(x-1)(x-2) = 0$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

즉, x 축과 만나는 두 점 B, C의 좌표는 $B(1, 0), C(2, 0)$

따라서 점 P가 점 A에서 점 C까지 움직이므로

$$0 \leq a \leq 2 \text{이고,}$$

$$3a + 2b + 1$$

$$= 2a + 2(a^2 - 3a + 2) + 1$$

$$= 2a^2 - 3a + 5$$

$$= 2\left(a^2 - \frac{3}{2}a + \frac{9}{16} - \frac{9}{16}\right) + 5$$

$$= 2\left(a - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{31}{8}$$

따라서 $a = \frac{3}{4}$ 일 때 최솟값 $\frac{31}{8}$ 을 갖는다.

한편, 이때의 b 의 값은

$$b = \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3 \times \frac{3}{4} = 2 = \frac{9}{16} - \frac{9}{4} + 2 = \frac{5}{16}$$

465. ②

$$A(t, -t+14), B(t, -t^2+15t-14), C(15-t, -t^2+15t-14),$$

$$D(15-t, -t+14) \text{이므로 } \overline{AB} = -t^2 + 16t - 28, \overline{BC} = 2t - 15$$

따라서 사각형 ABCD의 둘레의 길이 $l(t)$ 는 $l(t) = 2(\overline{AB} + \overline{BC})$

$$\text{이를 정리하면 } l(t) = 2(-t^2 + 18t - 43) (2 < t < 14)$$

$$y = -t^2 + 18t - 43 = -(t-9)^2 + 38 \text{이므로 } t = 9 \text{에서 최댓값}$$

38을 갖는다. 따라서 $l(t)$ 의 최댓값은 $2 \times 38 = 76$ 이 됨을 알 수 있다.

466. ⑤

$$A(t, t+6)$$

직사각형의 둘레의 길이를 $g(t)$ 라 하면

$$g(t) = 4|t+3| + 2\{(t+6) - (t^2 + 6t + 10)\}$$

$$= 2(-t^2 - 5t - 4) + 4|t+3| \quad (-4 < t < -1)$$

(i) $-4 < t < -3$

$$g(t) = -2t^2 - 14t - 20$$

$$= -2\left(t + \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}$$

$$t = -\frac{7}{2} \text{ 일 때, 최댓값 } \frac{9}{2}$$

(ii) $-3 \leq t < -1$

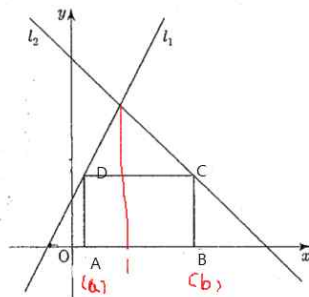
$$g(t) = -2t^2 - 10t - 8 + 4t + 12$$

$$= -2\left(t + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{17}{2}$$

$$t = -\frac{3}{2} \text{ 일 때, 최댓값 } \frac{17}{2}$$

(i), (ii)에서 최댓값은 $\frac{17}{2}$ 이다.

$$467. \frac{25}{3}$$



$A \Rightarrow a, B \Rightarrow b$, 라고 하자

$$-\frac{2}{3} < a < 1, \quad 1 < b < 6$$

$$D(a, 3a+2), C(b, -b+6)$$

$$3a+2 = -b+6$$

$$b = 4-3a$$

직사각형의 넓이를 라고하면

$$S = \overline{AB} \times \overline{AD} = (b-a)(3a+2)$$

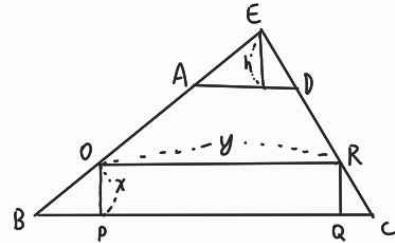
$$= (4-4a)(3a+2)$$

$$= -12a^2 + 4a + 8 = -12\left(a - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{25}{3}$$

$$-\frac{2}{3} < a < 1 \text{ 이므로}$$

$$a = \frac{1}{6} \text{ 일 때 최솟값 } \frac{25}{3}$$

468. ⑤



삼각형 EAD, EBC 가 닮음이므로 $15:40 = h:h+20$, $h = 12$ 다.

삼각형 EOR, EBC 가 닮음이므로 $32-x:32 = y:40$,

$y = \frac{5}{4}(32-x)$ 이다. 따라서 직사각형 $OPQR$ 의 넓이는

$xy = -\frac{5}{4}(x-16)^2 + 320$ 이고, $\overline{OP} = x = 16$ 일 때 최댓값을 갖는다.

469. ④

$$\overline{AB} = 9 \text{ 이므로 } \overline{BC} = 9\sqrt{2}$$

$$\overline{AP} = x \text{ 라 하면 } \overline{PR} = \sqrt{2} \quad (0 < x < 9)$$

$$\overline{PB} = 9-x, \quad \overline{PQ} = \overline{BQ} = \frac{\sqrt{2}}{2}(9-x)$$

$$\overline{QC} = 9\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}(9-x) = \frac{9\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

사각형 $PQCR$ 의 넓이를 $f(x)$ 라 하면

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}(9-x) \times \left(\frac{9\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}x\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}(9-x) \times \frac{3\sqrt{2}}{2}(3+x)$$

$$= \frac{3}{4}(-x^2 + 6x + 27)$$

$$= -\frac{3}{4}(x-3)^2 + 27$$

따라서 $x = 3$ 일 때 최댓값 27을 갖는다.

470. ①

선분 AP 의 길이를 미지수 x 라 하면

점 P 는 선분 AB 위의 점이므로 x 의 범위는 $0 < x < 9$ 이다.

선분 BC 와 선분 PR 이 평행하므로 삼각형 APR 은 선분 PR 를

빗변으로 하는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{PR} = \sqrt{2}x$

각 B 의 크기는 45° 이므로 삼각형 BQP 는 선분 BP 를

빗변으로 하는 직각이등변삼각형이다.

$$\overline{BP} = 9-x \text{ 이므로 } \overline{BQ} = \overline{PQ} = \frac{9-x}{\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}-\sqrt{2}x}{2}$$

$$\overline{CQ} = \overline{BC} - \overline{BQ} \text{ 이고, } \overline{BC} = 9\sqrt{2} \text{ 이므로}$$

$$\overline{CQ} = 9\sqrt{2} - \frac{9\sqrt{2}-\sqrt{2}x}{2} = \frac{9\sqrt{2}+\sqrt{2}x}{2} \text{ 이다.}$$

따라서 사각형 PQCR의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (\overline{PR} + \overline{CQ}) \times \overline{PQ}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{9\sqrt{2} + 3\sqrt{2}x}{2} \right) \times \left(\frac{9\sqrt{2} - \sqrt{2}x}{2} \right) \text{이고}$$

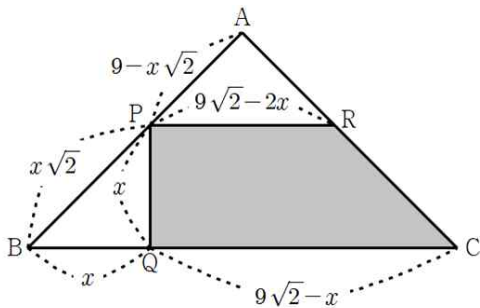
$$\text{이차함수 } f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{9\sqrt{2} + 3\sqrt{2}x}{2} \right) \times \left(\frac{9\sqrt{2} - \sqrt{2}x}{2} \right) \text{의}$$

x 절편이 $-3, 9$ 이므로 축의 방정식은 $x = 3$ 이다.

따라서 $x = 3$ 에서 최댓값을 갖는다.

$$\therefore f(3) = \frac{18\sqrt{2} \times 6\sqrt{2}}{8} = 27$$

471. ④



위의 그림과 같이 $\overline{PQ} = x$ 라 하면

삼각형 BPQ는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{BQ} = x, \overline{BP} = x\sqrt{2}$ 이다.

$\overline{AB} = 9$ 이므로

$$\overline{AP} = \overline{AB} - \overline{BP}$$

$$= 9 - x\sqrt{2}$$

삼각형 ABC는 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{BC} = \overline{AB}\sqrt{2}$$

$$= 9\sqrt{2}$$

$$\overline{QC} = \overline{BC} - \overline{BQ}$$

$$= 9\sqrt{2} - x$$

또, 삼각형 APR은 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{PR} = \overline{AP}\sqrt{2}$$

$$= 9\sqrt{2} - 2x$$

그러므로 사각형 PQCR의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times (\overline{PR} + \overline{QC})$$

$$= \frac{1}{2} \times x \times (9\sqrt{2} - 2x + 9\sqrt{2} - x)$$

$$= \frac{1}{2} \times x \times (18\sqrt{2} - 3x)$$

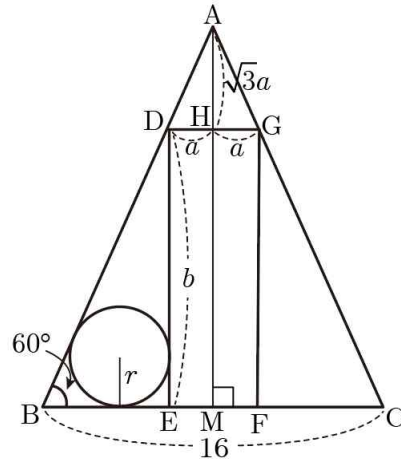
$$= -\frac{3}{2}(x^2 - 6\sqrt{2}x)$$

$$= -\frac{3}{2}(x^2 - 6\sqrt{2}x + 18 - 18)$$

$$= -\frac{3}{2}(x - 3\sqrt{2})^2 + 27$$

따라서 $\overline{PQ} = 3\sqrt{2}$ 일 때 사각형 PQCR의 넓이는 최댓값 27를 갖는다.

472. ③



$$\overline{BM} = 8$$

$$\overline{AM} = \overline{BM} \times \sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

$$\overline{HM} = b = 8\sqrt{3} - \sqrt{3}a = \sqrt{3}(8 - a)$$

직사각형 DEFG의 넓이는

$$2ab = 2a \times \sqrt{3}(8 - a)$$

$$= 2\sqrt{3}\{-(a - 4)^2 + 16\}$$

$$a = 4 \text{ 일 때 최대이고 } b = \sqrt{3}(8 - a) = 4\sqrt{3}$$

삼각형 BDE에서

$$\overline{DE} = b = 4\sqrt{3}, \overline{BE} = 4, \overline{BD} = 2\overline{BE} = 8$$

삼각형 BDE의 넓이

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times r \times (4 + 4\sqrt{3} + 8) \text{에서}$$

$$r = 2(\sqrt{3} - 1) \text{이므로 } p = 2, q = 2 \text{이다.}$$

473. ②

(i) $1 \leq t < 3$ 일 때

점 P, Q, R, S는 각각 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ 위에 있다.

$$S(t) = \square ABCD - (\triangle PBQ + \triangle QCR + \triangle RDS + \triangle SAP)$$

$$= 12 \times 6 - \frac{1}{2} \{ (6 - 2t)(4 + 2t) + (8 - 2t)(3 + t) + 2t(3 - t) + 2t(12 - 2t) \}$$

$$= 6t^2 - 18t + 48$$

$$= 6\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{69}{2}$$

(ii) $3 \leq t \leq 4$ 일 때

점 P, Q, R, S는 각각 $\overline{BC}, \overline{BC}, \overline{DA}, \overline{DA}$ 위에 있고,

사각형 ABCD는 사다리꼴이다.

$$S(t) = \frac{1}{2} \times \{10 + (t + 3)\} \times 6 = 3(t + 13)$$

$$\text{따라서 } M=S(4)=51, m=S\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{69}{2}$$

$$\therefore M-m=\frac{33}{2}$$

474. ⑤

ㄱ. 두 사각형 ABCD와 FCDE는 닮음이므로 다음이 성립한다.

$$\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{FE}:\overline{FC}$$

$$4:x=x:4-x$$

$$\therefore \frac{4}{x}=\frac{x}{4-x} \text{ (거짓)}$$

$$\text{ㄴ. } \frac{4}{x}=\frac{x}{4-x} \text{의 양변에 } x(4-x) \text{를 곱하면}$$

$$x^2=4(4-x) \therefore x^2=16-4x \cdots \textcircled{1}$$

①의 양변에 x 를 곱하여 정리하면

$$x^3=16x-4x^2 \text{이다. 이 식에 } \textcircled{1} \text{을 한번 다시 대입하면}$$

$$x^3=16x-4(16-4x)=32x+64$$

$$\therefore x^3-32x+64=0$$

ㄷ. 사각형 ABCD와 FCDE는 닮음이므로 다음과 같이 나타낼

$$\text{수 있다. } \overline{AD}:\overline{AB}=\overline{FE}:\overline{FC}=4:x$$

$$\text{따라서 } \overline{FC}=\frac{x}{4}\overline{FE}=\frac{x^2}{4} \text{이다.}$$

$$\text{그러므로 사각형 GFCH의 넓이는 } \frac{x^4}{16} \text{이다.}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

$$475. (1) y=-\frac{1}{2}x^2+3x, y=x+2 \quad (2) 4$$

$$(1) f(x)=ax(x-6) \text{이라 하면 } \left(3, \frac{9}{2}\right) \text{를 지나므로}$$

$$\frac{9}{2}=3a \cdot (-3)$$

$$a=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}x(x-6)=-\frac{1}{2}x^2+3x$$

$$g(x)=m(x+2) \text{라 하면}$$

$$f(x)=g(x) \text{가 중근을 가지므로}$$

$$f(x)-g(x)=-\frac{1}{2}x^2+(3-m)x-2m=0 \text{에서}$$

$$D=(3-m)^2-4m$$

$$=m^2-10m+9=0$$

$$(m-1)(m-9)=0$$

$$\therefore m=1$$

$$\therefore g(x)=x+2$$

$$(2) -\frac{1}{2}x^2+3x=x+2 \text{에서}$$

$$-\frac{1}{2}x^2+2x-2=0$$

$$x^2-4x+4=0$$

$$(x-2)^2=0$$

$$\therefore x=2$$

$$\text{접점은 } B(2, 4)$$

높이는 4이다.

476. ③

가)에 의해 이차함수의 대칭축은 $x=2$ 이므로

$$f(x)=(x-2)^2+k, \text{나)에 의해 } f(x)+9=(x-2)^2+k+9=0$$

에서 $D=0$ 이므로

$$k=-9 \therefore f(x)=(x-2)^2-9$$

ㄱ. $0 \leq x \leq 3$ 에서 $y=f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최솟값, $x=0$ 일 때 최댓값을 갖는다.(참)

ㄴ. 이차방정식 $f(x+3)=x^2+2x-8=0$ 의 두 근의 곱은 -8 이다. (거짓)

ㄷ. $f(0)=k$ 라 할 때, $k=-5$ 이므로 x 에 대한 이차방정식 $(x-2)^2-9=-5x$ 에서 두 실근의 합은 -1 이다. (참)

477. ②

조건 (가)에 의하여 $x=-1$ 에서 대칭이고, 이차항의 계수가 2이므로

$$f(x)=2x^2+4x+c,$$

조건 (나)에 의하여 $f(x)-14$ 는 $x-a$ 로 나누어 떨어지므로

$$2x^2+4x+c-14=(x-a)(2x+2a+4) \text{이므로}$$

$$c-14=2a^2-4a, c=-2a^2-4a+14 \text{이다. } \cdots \cdots \textcircled{1}$$

조건 (다)에 의하여

$$y=2ax+a-4 \text{와 } y=f(x) \text{의 그래프가 접해야 하므로}$$

$$2x^2+4x+c=2ax+a-4, 2x^2+2(2-a)x+c-a+4=0 \text{이}$$

중근을 가져야 한다.

$$\text{따라서 } \left(\frac{2-a}{2}\right)^2=\frac{c-a+4}{2} \text{를 만족해야 하므로}$$

$$\text{정리하면 } a^2-4a+4=2c-2a+8 \text{이다. } \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{에 } \textcircled{1} \text{을 대입하면 } a^2-4a+4=-4a^2-8a+28-2a+8$$

$$\text{정리하면 } 5a^2+6a-32=0 \text{이므로}$$

$$(5a+16)(a-2)=0, \therefore a=2 \quad (a>0)$$

$$\textcircled{1} \text{에 } a=2 \text{를 대입하면 } c=-2 \text{이므로}$$

$$f(x)=2x^2+4x-2, f(9)=196$$

478. ④

이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$ 로 두고 나조건을 이용하면

$$a(x+2)^2+b(x+2)-ax^2-bx^2=4x \text{이고}$$

계수비교법을 이용하여 $a=1, b=-2$ 이고

가 조건에 의하여 $c=1$ 이므로

$$f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2, f(9)=64$$

$$\text{나 조건을 이용하면 } f(1)-f(3)=-4, f(7)-f(5)=-20$$

구하는 $f(1)-f(3)+f(5)-f(7)+f(9)=-4-20+64=40$

3번 문항 수정

479. ③

(가)에서 $f(k)=3$ 이고, $g(k)=1$ 이므로 (다)의 식에 $x=k$

대입하면, $f(k)+g(k)=3k^2-14k+19$, $3k^2-14k+15=0$

따라서 $k=3$ 이고, $f(x)$ 의 최고차항을 a 라 할 때,

$f(x)=a(x-3)^2+3$ ($a>0$) 이다. 최고차항의 계수가

정수이므로

$a=1$ 일 때

$f(x)=x^2-6x+12$, $g(x)=2x^2-8x+7$ 이므로 $g(x)$ 은 $x=2$ 일 때, 최솟값 -1 을 갖는다.

$a=2$ 일 때

$f(x)=2x^2-12x+21$, $g(x)=x^2-2x-2$ 이므로 $g(x)$ 은 $x=1$ 일 때, 최솟값 -3 을 가지므로 성립하지 않는다.

따라서 $g(1)=1$, $k+g(1)=4$ 이다.

480. (1) (가)에 의해 이차함수 $g(x)$ 는

$g(x)=(x-n-2)(x-n-3)$ 이다.

(2) $n=4$, $k=-\frac{1}{2}$ (3) -2

(1) (가)에 의해 이차함수 $g(x)$ 는

$g(x)=(x-n-2)(x-n-3)$ 이다.

(2) $h(x)=f(x)-g(x)$

$= (x-n-2)\{k(x-n)-(x-n-3)\}$

$= (x-n-2)\{(k-1)x-(kn-n-3)\}$

(나)에 의해 모든 실수 x 에 대하여 $-h(x) \geq 0$ 이므로 $-h(x)$ 는 완전제곱식이다.

$h(x)=(k-1)(x-n-2)^2$

$kn-n-3=(k-1)(n+2)$

$k=-\frac{1}{2}$, $h(x)=-\frac{3}{2}(x-n-2)^2$

(다)에서 $h(0)=-54$

$(n+2)^2=36$, $n=4$

(3) $f(x)=-\frac{1}{2}(x-4)(x-6)$

$g(x)=(x-6)(x-7)$

$f(8)+g(8)=-4+2=-2$

481. ⑤

$f(x)=x^2-4kx+10k$

$= (x^2-4kx+4k^2)-4k^2+10k$

$= (x-2k)^2-4k^2+10k$

따라서 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 축은 $x=2k$ 이다.

① $k \leq 2k \leq k+3$, 즉 $0 \leq k \leq 3$ ㉠일 때,

함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값은 다음 두 가지 경우로 나누어 구할

수 있다.

(i) $2k-k \leq (k+3)-2k$ 인 경우

$k \leq -k+3$ 에서 $2k \leq 3$

$\therefore k \leq \frac{3}{2}$

그런데 ㉠에 의해 $0 \leq k \leq \frac{3}{2}$

이때의 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같으므로 최댓값은

$f(k+3)=(k+3)^2-4k(k+3)+10k=-3k^2+4k+9$ 이다.

따라서 최솟값은 $f(2k)=-4k^2+10k$ 이므로 최댓값과 최솟값의 합 $g(k)$ 는

$g(k)=f(k+3)+f(2k)$

$= (-3k^2+4k+9)+(-4k^2+10k)$

$= -7k^2+14k+9$

(ii) $2k-k > (k+3)-2k$ 인 경우

$k > -k+3$ 에서 $2k > 3$

$\therefore k > \frac{3}{2}$

그런데 ㉠에 의하여 $\frac{3}{2} < k \leq 3$

이때의 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같으므로 최댓값은

$f(k)=k^2-4k \times k+10k=-3k^2+10k$ 이다.

따라서 최솟값은 $f(2k)=-4k^2+10k$ 이므로 최댓값과 최솟값의 합 $g(k)$ 는

$g(k)=f(k)+f(2k)$

$= (-3k^2+10k)+(-4k^2+10k)$

$= -7k^2+20k$

② $2k > k+3$, 즉 $k > 3$ 일 때,

함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같으므로 최댓값은

$f(k)=k^2-4k \times k+10k$

$= -3k^2+10k$

이고 최솟값은

$f(k+3)=(k+3)^2-4k(k+3)+10k$

$= -3k^2+4k+9$ 이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합 $g(k)$ 는

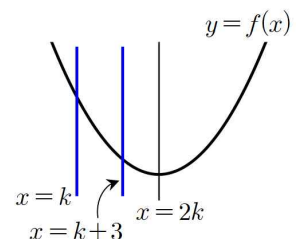
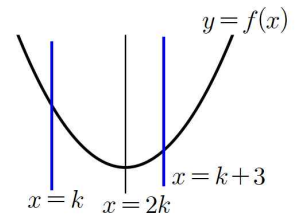
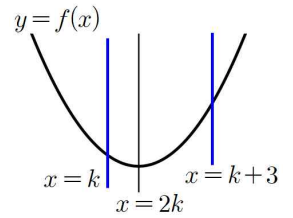
$g(k)=f(k)+f(k+3)$

$= (-3k^2+10k)+(-3k^2+4k+9)$

$= -6k^2+14k+9$

①, ②에 의하여

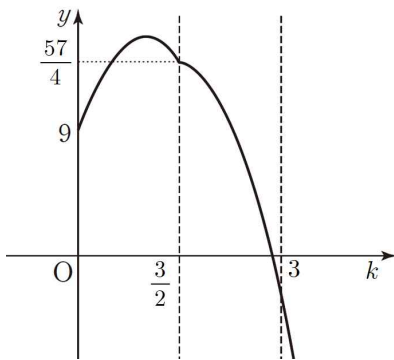
$$g(k)=\begin{cases} -7k^2+14k+9 & \left(0 \leq k \leq \frac{3}{2}\right) \\ -7k^2+20k & \left(\frac{3}{2} < k \leq 3\right) \\ -6k^2+14k+9 & (k > 3) \end{cases}$$



$$= \begin{cases} -7(k-1)^2 + 16 & (0 \leq k \leq \frac{3}{2}) \\ -7\left(k - \frac{10}{7}\right)^2 + \frac{100}{7} & (\frac{3}{2} < k \leq 3) \\ -6\left(k - \frac{7}{6}\right)^2 + \frac{103}{6} & (k > 3) \end{cases}$$

$$\text{이고, } g\left(\frac{3}{2}\right) = -7 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 14 \times \frac{3}{2} + 9 \\ = -\frac{63}{4} + 21 + 9 = \frac{57}{4}$$

이므로 함수 $y=g(k)$ 그래프는 다음 그림과 같다.



이때, 방정식 $g(k) = -2k + a$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4라는 것은

함수 $y=g(k)$ 의 그래프와 직선 $y=-2k+a$ 가 만나는 서로 다른 점의 개수가 4라는 것을 의미한다.

즉, 기울기가 일정한 직선 $y=-2k+a$ 를 평행이동시키면서 함수

$y=g(k)$ 의 그래프와 만나는 점의 개수가 4가 되는 경우를 찾아보면

다음 그림과 같이 직선 $y=-2k+a$ 가 점 $\left(\frac{3}{2}, \frac{57}{4}\right)$ 을 지나는 경우와 직선 $y=-2k+a$ 가 $y=g(k)$ 의 그래프에 접하는 경우 사이에 직선이 존재해야 한다는 것을 알 수 있다.

직선 $y=-2k+a$ 가 점 $\left(\frac{3}{2}, \frac{57}{4}\right)$ 을 지날 때

$$\frac{57}{4} = -2 \times \frac{3}{2} + a \text{에서 } \frac{57}{4} = -3 + a \therefore a = \frac{69}{4} \quad \dots\dots ①$$

또한, $0 \leq k \leq \frac{3}{2}$ 에서 함수 $g(k) = -7k^2 + 14k + 9$ 의 그래프와 직선

$y=-2k+a$ 가 접할 때, 이차방정식 $-7k^2 + 14k + 9 = -2k + a$, 즉 $7k^2 - 16k + a - 9 = 0$ 의 판별식을 D_1 하면 이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로

$$\frac{D_1}{4} = (-8)^2 - 7(a-9) \\ = -7a + 127 = 0$$

$$\text{에서 } a = \frac{127}{7} \quad \dots\dots ②$$

끝으로, $\frac{3}{2} < k \leq 3$ 에서 함수 $g(k) = -7k^2 + 20k$ 의 그래프와

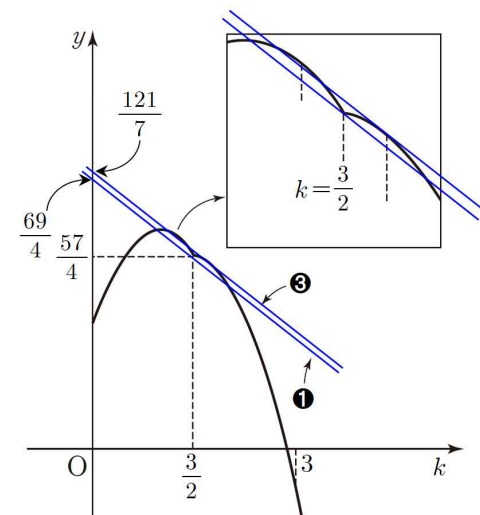
직선

$y=-2k+a$ 가 접할 때, 이차방정식 $-7k^2 + 20k = -2k + a$, 즉 $7k^2 - 22k + a = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면 이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로

$$\frac{D_2}{4} = (-11)^2 - 7a = 121 - 7a = 0$$

$$\text{에서 } a = \frac{121}{7} \quad \dots\dots ③$$

이때, $\frac{121}{7} < \frac{127}{7}$ 이므로 직선 $y=-2k+a$ 와 함수 $y=g(k)$ 의 그래프와 만나는 점의 개수가 4가 되는 경우는 다음 그림과 같다.



따라서 방정식 $g(k) = -2k + a$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 실수 a 의 값의 범위는 $\frac{69}{4} < a < \frac{121}{7}$ 이므로

$$p = \frac{69}{4}, \quad q = \frac{121}{7}$$

$$\therefore 8p - 7q = 8 \times \frac{69}{4} - 7 \times \frac{121}{7} = 138 - 121 = 17$$

482. ⑤

주어진 조건에 의해 축이 $x=-1$ 이며 꼭지점이 $(-1, 5)$ 인

이차함수이므로 $f(x) = -(x+1)^2 + 5 = -x^2 - 2x + 4$ 이다.

$$\therefore a = -2, b = 4$$

$$\therefore 1 \leq x \leq 2 \text{에서 } f(x) \text{의 최댓값은 } f(1) = 1$$

ㄷ. $|f(x)|$ 와 $y=x+k$ 가 서로 다른 네 점에서 만나는 경우는 일차함수가 $f(x)$ 가 x 축과 만나는 $(-1-\sqrt{5}, 0)$ 을 지날때와

$f(x)$ 에 접할 때 사이이므로 k 범위는 $\sqrt{5}+1 < k < \frac{25}{4}$ 이다.

만족하는 정수 $k=4, 5, 6$

483. (1) $f(x) = x^2 - 4tx + 3t^2 + 8t = (x-2t)^2 - t^2 + 8t$ 이므로 꼭짓점의 좌표는 $(2t, -t^2 + 8t)$ 이다.

(2) x 의 범위가 $t \leq x \leq t+2$ 이므로 꼭짓점의 x 좌표인 $2t$ 가 범위의 중점에서 왼쪽과 오른쪽에 위치할 때와 $2t \geq t+2$ 보다

클 때로 나눠서 생각하면 $g(t)$ 는

i) $0 \leq t < 1$ 일 때

$$g(t) = f(t+2) - f(2t) = (t-2)^2$$

ii) $1 \leq t < 2$ 일 때

$$g(t) = f(t) - f(2t) = t^2$$

iii) $t \geq 2$ 일 때

$$g(t) = f(t) - f(t+2) = 4t - 4$$

(3) $y = 2t + m$ 이 $g(t)$ 와 서로 다른 두 점에서 만나기 위한

m 의 값은 $(0, 4)$ 를 지날 때 최댓값을 갖고, $g(t) = t^2$ 과 접할 때보다 커야 하므로

$$t^2 = 2t + m$$

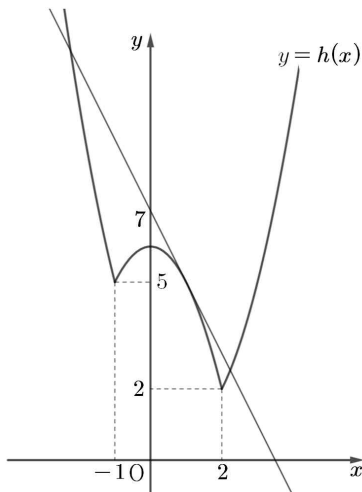
$$\Rightarrow t^2 - 2t - m = 0, \quad D/4 = 1 + m \text{ 이므로}$$

$$\therefore -1 < m \leq 4 \text{ 이다.}$$

484. ①

함수 $h(x)$ 와 $y = mx + 7$ 이 서로 다른 세점에서 만나는 경우는 다음과 같다.

i) $y = g(x)$ 와 접하는 경우

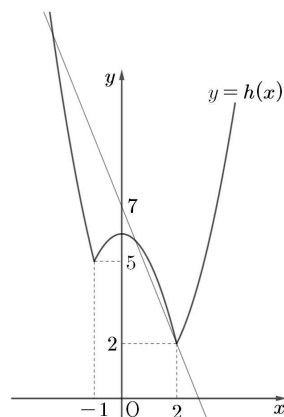


$$mx + 7 = -x^2 + 6, \quad x^2 + mx + 1 = 0 \text{ 이므로}$$

접해야 하므로 $m = -2$ ($m < 0$)

($m = 2$ 인 경우 교점이 두 개다.)

ii) $y = mx + 7$ 이 $(2, 2)$ 를 지나는 경우



$y = mx + 7$ 에 $(2, 2)$ 를 지나야 하므로

$$2 = mx + 7, \quad m = -\frac{5}{2}$$

따라서 모든 실수 m 의 값의 합은 $-2 - \frac{5}{2} = -\frac{9}{2}$

485. ③

(4) $y = f(x)$ 의 꼭짓점이 $x = 3$ 이고, 최고차항의 계수는 음수

(7) 최솟값은 $f(5) = 0$

$$f(x) = a(x-3)^2 + b \text{ 라 하면}$$

$$f(5) = 4a + b = 0$$

$$\therefore b = -4a$$

$$f(x) = a(x-3)^2 - 4a \quad (a < 0)$$

$g(k)$ 가 실수전체에서 정의되므로 $g(k)$ 의 최댓값은 $f(x)$ 의 최댓값과 같다.

$$-4a = 8$$

$$\therefore a = -2$$

$$f(x) = -2(x-3)^2 + 8$$

$$\neg. f(1) = -2 \cdot 4 + 8 = 0$$

$$\neg. f(x) - 7 = 0 \text{ 은}$$

$$-2(x-3)^2 + 1 = 0$$

실근을 가지고 두 근의 합은 $2 \times 3 = 6$

$$\square. f(x) - 4(x-1) = -2x^2 + 8x - 6 = 0 \text{ 에서}$$

$$-2(x-1)(x-3) = 0$$

두 점에서 만난다.

486. 2

$$f(x) = x^2 - 4x + a^2 + 1 = (x-2)^2 + a^2 - 3$$

$$0 \leq x \leq 1 \text{ 에서 } x = 1 \text{ 일 때 최솟값 } a^2 - 2 = -1, \quad a^2 = 1$$

$$1 \leq x \leq 4 \text{ 에서 } x = 4 \text{ 일 때 최댓값 } a^2 + 1 = 2$$

$$487. \frac{1 - \sqrt{85}}{2}, 6$$

$a < 1$ 일 때,

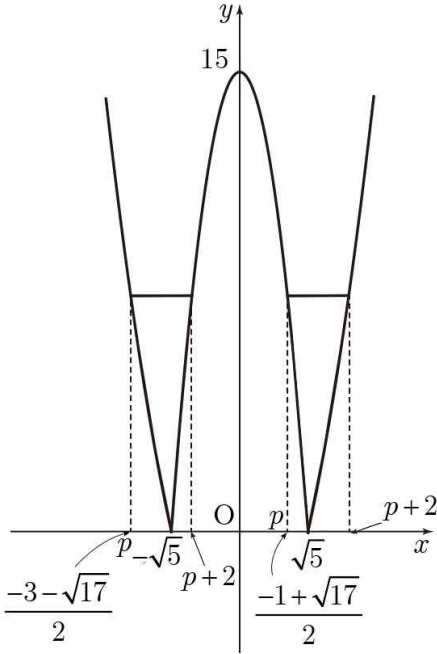
$$f(a+1) = (a+1)^2 - 4(a+1) + a + 5 = a^2 - a + 2 = 23 \text{ 에서}$$

$$a^2 - a - 21 = 0 \text{ 에서 조건에 맞는 } a = \frac{1 - \sqrt{85}}{2}$$

$1 \leq a \leq 2$ 일 때, $f(2) = 4 - 8 + a + 5 = a + 1 = 23$ 에서 만족하는 a 는 존재하지 않는다.

$a > 2$ 일 때, $f(a) = a^2 - 4a + a + 5 = a^2 - 3a + 5 = 23$ 에서 만족하는 $a = 6$

488. ④



$x=p$ 와 $x=p+2$ 일 때 함숫값이 같을 때는

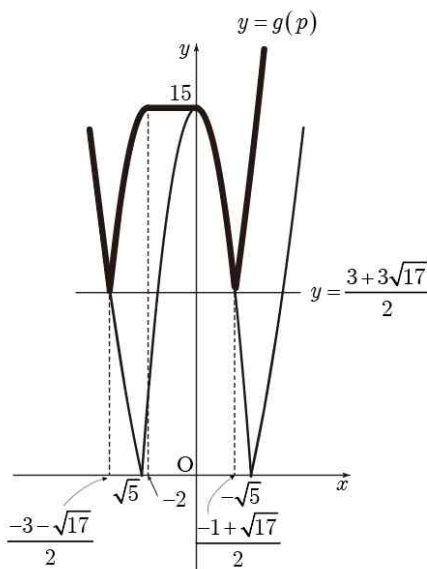
$$x < 0 \text{ 에서 } p^2 - 5 = -3(p+2)^2 + 15 \text{ 에서 } p = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$$

$$x > 0 \text{ 에서 } -3p^2 + 15 = (p+2)^2 - 5 \text{ 에서 } p = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

이다.

즉,

$$g(p) = \begin{cases} p^2 - 5 & \left(p \leq \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} \right) \\ -3(p+2)^2 + 15 & \left(\frac{-3 - \sqrt{17}}{2} < p \leq -2 \right) \\ 15 & (-2 < p \leq 0) \\ -3p^2 + 15 & \left(0 < p \leq \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \right) \\ (p+2)^2 - 5 & \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2} < p \right) \end{cases}$$



따라서 $g(p)$ 의 최솟값은

$$f\left(\frac{-3 - \sqrt{17}}{2}\right) = \left(\frac{-3 - \sqrt{17}}{2}\right)^2 - 5 = \frac{3 + 3\sqrt{17}}{2}$$

489. ②

α, β 는 $\frac{1}{4}x^2 - x - k = 0$ 의 두 근

$$\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = -4k$$

OA, OB의 기울기의 곱이 $-\frac{3}{4}$ 이므로

$$\frac{\alpha}{4} \times \frac{\beta}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$\alpha\beta = -12$$

$$\therefore k = 3$$

$$\frac{1}{4}x^2 - x - 3 = 0 \text{ 에서}$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(x+2)(x-6) = 0$$

$$x = -2, 6$$

$$A(-2, 1), B(6, 9)$$

$$\triangle AOB = \frac{1}{2} |6 \cdot 1 - 9 \cdot (-2)| = 12$$

491. ⑤

$$f(x) = (x-2)(x-b), B(a, 0), P\left(\frac{2+a}{2}, -\left(\frac{a-2}{2}\right)^2\right)$$

$$\overline{PB} \text{의 기울기 } \frac{0 + \left(\frac{a-2}{2}\right)^2}{a - \frac{2+a}{2}} = \frac{a-2}{2} = 2m, a = 4m+2$$

점 R의 좌표를 구하면

$$(x-2)(x-a) = 2m(x-2), x=2, a+2m \text{ 에서}$$

$$R(a+2m, 0) = R(6m+2, 0) \text{ 이므로}$$

$$Q(6m+2, 12m^2) \text{ 이다.}$$

$$\overline{QR} = 12m^2, \overline{BR} = a+2m-a=2m$$

삼각형 BRQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{BR} \times \overline{QR} = \frac{1}{2} \times 2m \times 12m^2 = 12m^3 = 96,$$

$$\therefore m = 2, a = 10$$

492. ③

$$f(x) = (x-2)(x-a)$$

$$= x^2 - (a+2)x + 2a$$

$$= \left(x - \frac{a+2}{2}\right)^2 + 2a - \frac{(a+2)^2}{4}$$

$$= \left(x - \frac{a+2}{2}\right)^2 + \frac{-a^2 + 4a - 4}{4}$$

$$P\left(\frac{a+2}{2}, \frac{-a^2 + 4a - 4}{4}\right)$$

$$\therefore f(-1) = 1 + a + 2 + 2a = 3a + 3 \text{ (참)}$$

ㄴ. 두 점 B, P를 지나는 직선의 기울기가 m 이므로

$$m = \frac{\frac{a^2 - 4a + 4}{4}}{a - \frac{a+2}{2}} = \frac{\frac{(a-2)^2}{4}}{\frac{a-2}{2}} = \frac{a-2}{2}$$

$$a = 2m + 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

두 점 A, Q를 지나는 직선의 방정식은 $y = m(x-2)$

$$(x-2)(x-a) = m(x-2)$$

$$(x-2)(x-a-m) = 0$$

$$Q(m+a, m(m+a-2))$$

①을 대입하면 $\overline{QR} = m(m+a-2) = 3m^2$ (거짓)

ㄷ. $\overline{AB} = a-2 = 2m$ 이므로

$$\triangle ABQ = \frac{1}{2} \times 2m \times 3m^2 = 3m^3 = \frac{81}{8}$$

$$m^3 = \frac{27}{8}$$

$$\therefore m = \frac{3}{2}, a = 2m + 2 = 5$$

$$\therefore 2am = 2 \times 5 \times \frac{3}{2} = 15 \text{ (참)}$$

493. ⑤

주어진 조건을 만족시키려면 두 곡선은 기울기 m 인 공통접선을 가져야한다

$$\text{i) } \frac{1}{2}x^2 = mx + k \text{에서}$$

$$x^2 - 2mx - 2k = 0$$

$$\frac{D}{4} = m^2 + 2k = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{ii) } -x^2 + 8x - \frac{51}{4} = mx + k \text{에서}$$

$$x^2 + (m-8)x + k + \frac{51}{4} = 0$$

$$D = (m-8)^2 - 4k - 51 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서 k 를 소거하면

$$(m-8)^2 + 2m^2 - 51 = 0$$

$$3m^2 - 16m + 13 = 0$$

$$(m-1)(3m-13) = 0$$

$$\therefore m = 1$$

①에 대입하여 풀면

$$k = -\frac{1}{2}$$

두 그래프와 모두 접하는 공통접선은 $y = x - \frac{1}{2}$

a) $\frac{1}{2}x^2 = x + k$ 의 두 근의 합은

$$\frac{1}{2}x^2 - x - k = 0 \text{에서}$$

$$\alpha + \beta = 2$$

b) $-x^2 + 8x - \frac{51}{4} = x + k$ 의 두 근의 합은

$$x^2 - 7x + \frac{51}{4} + k = 0 \text{에서}$$

$$\gamma + \delta = 7$$

c) 공통접선이 각 곡선과 만나는 교점은 1과 $\frac{7}{2}$

$$1 + \frac{7}{2} = \frac{9}{2}$$

$$S_1 + S_2 + S_3 = 2 + 7 + \frac{9}{2} = \frac{27}{2}$$

494. ④

$y = a(x-p)^2 + q$ 에서 꼭짓점은 (p, q)

$y = 3x^2 - 12x + 17 = 3(x^2 - 4x) + 17 = 3(x-2)^2 + 5$ 과 꼭짓점이 같으므로 $(2, 5) = (p, q)$

$y = 2x + 1$ 에 $B(\alpha, \beta)$ 가 존재하므로 $\beta = 2\alpha + 1$

$$(\alpha-p)^2 + (\beta-q)^2 = 20 \text{에서 } (\alpha-2)^2 + \{(2\alpha+1)-5\}^2 = 20$$

$$(\alpha-2)^2 + \{2(\alpha-2)\}^2 = 20 \quad 5(\alpha-2)^2 = 20 \quad (\alpha-2)^2 = 4$$

$$\alpha-2 = \pm 2 \quad \alpha = 0 \text{ 또는 } \alpha = 4 \quad B(\alpha, \beta) \text{는 } (0, 1) \text{ 또는 } (4, 9)$$

$y = a(x-2)^2 + 5$ 에서 $a < 0$ 이므로

$(0, 1)$ 을 대입하면 $1 = 4a + 5$ 이므로 $a = -1$ 성립

$(4, 9)$ 를 대입하면 $9 = 4a + 5$ 이므로 $a = 1$ 로 모순

따라서 $a = -1, p = 2, q = 5, \beta = 1$ 이므로 $a + p + q + \beta = 7$

495. ③

$$(x+3)f(x) = (x+1)f(x+1)$$

$x = -1$ 을 대입하면 $2f(-1) = 0$

$$\therefore f(-1) = 0$$

$x = -3$ 을 대입하면 $-2f(-2) = 0$

$$\therefore f(-2) = 0$$

$$\therefore f(x) = a(x+1)(x+2)$$

$$\neg. f(-3) = a \times (-2) \times (-1) = 2a$$

$$f(0) = a \times 1 \times 2 = 2a \text{ (참)}$$

ㄴ. $a = 1$ 일 때

$$f(x) = (x+1)(x+2)$$

$$f(x+2) = (x+3)(x+4)$$

$$f(x)f(x+2) - 3 = (x^2+5x+4)(x^2+5x+6) - 3$$

$$x^2+5x = A \text{라 하면}$$

$$f(x)f(x+2) - 3 = (A+4)(A+6) - 3$$

$$= A^2 + 10A + 21$$

$$= (A+3)(A+7)$$

$$= (x^2+5x+3)(x^2+5x+7)$$

$$\therefore p = 5, q = 7$$

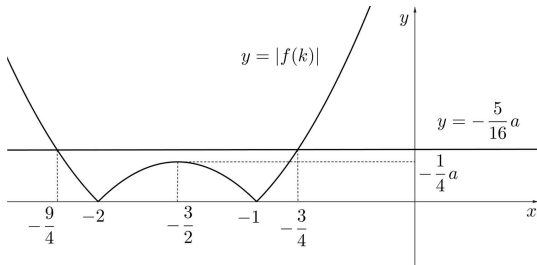
$$\therefore p+q = 12 \text{ (참)}$$

ㄷ. $f(-3) + |f(0)| = 2a + |2a| = 0$ 이므로 $a < 0$

$$f(x) = a(x+1)(x+2) = a\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}a$$

$$f\left(-\frac{3}{4}\right) = a \times \frac{1}{4} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{16}a$$

$$|f(k)| = -\frac{5}{16}a$$



$x = -\frac{3}{2}$ 에 대칭이고 $k \neq -\frac{3}{4}$ 이므로 $k = -\frac{9}{4}$ 1개 존재 (거짓)

496. 11

양변에 $x = -1$ 을 대입하면 $-a + b + 2 = 0$ 이다.

양변에 $x = 2$ 을 대입하면 $-4a + b + 14 = 0$ 이다.

이 두 식을 연립하면 $a = 4$, $b = 2$ 다.

$$x^4 - 4x^2 - x + 2 = (x+1)(x^3 - x^2 - 3x + 2) = (x+1)(x-2)(x^2 + x - 1)$$

따라서 $f(x) = x^2 + x - 1$ 이고 $f(3) = 9 + 3 - 1 = 11$ 이다.

497. ②

$$x^4 + 3x^3 + 3x^2 - x - 6 = 0 \text{에서}$$

조립제법을 이용하면 다음과 같다.

	1	3	3	-1	6
1		1	4	7	6
	1	4	7	6	0
-2		-2	-4	-6	
	1	2	3	0	

$$\text{따라서 } x^4 + 3x^3 + 3x^2 - x - 6 = (x-1)(x+2)(x^2 + 2x + 3)$$

그러므로 $x^2 + 2x + 3 = 0$ 의 두 허근은 α , β 이다.

근과 계수와의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -2, \alpha\beta = 3 \text{이므로}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= (-2)^2 - 2 \times 3$$

$$= 4 - 6 = -2$$

498. ①

사차방정식 $x^4 - 7x^2 + ax + b = 0$ 의 한 허근이 $1 + 2i$ 이므로 켈레근의 성질에 의하여 다른 한 허근은 $1 - 2i$ 이다.

$$\text{즉, } x^4 - 7x^2 + ax + b = \{x - (1 + 2i)\}\{x - (1 - 2i)\}Q(x)$$

$$\text{에서 } x^4 - 7x^2 + ax + b = (x^2 - 2x + 5)Q(x)$$

이때, $x^4 - 7x^2 + ax + b$ 를 $x^2 - 2x + 5$ 로 나누면

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x - 8 \\ x^2 - 2x + 5 \overline{) x^4 - 7x^2 + ax + b} \\ \underline{x^4 - 2x^3 + 5x^2} \\ 2x^3 - 12x^2 + ax + b \\ \underline{2x^3 - 4x^2 + 10x} \\ -8x^2 + (a-10)x + b \\ \underline{-8x^2 + 16x - 40} \\ (a-26)x + b + 40 \end{array}$$

따라서 $x^4 - 7x^2 + ax + b$ 가 $x^2 - 2x + 5$ 로 나누어떨어져야 하므로

$$a - 26 = 0, b + 40 = 0 \text{에서 } a = 26, b = -40$$

따라서 주어진 방정식은 $(x^2 - 2x + 5)(x^2 + 2x - 8) = 0$ 이고,

이차방정식 $x^2 + 2x - 8 = 0$ 의 두 실근이 α , β 이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -2$$

$$\text{따라서 } \alpha + \beta + a + b = -2 + 26 + (-40) = -16$$

499. ②

$2x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 의 한 근이 $2 - i$ 이면 다른 두근을 $2 + i, \alpha$ 라 하자.

근과 계수와의 관계에 의해

$$1) 2 - i + 2 + i + \alpha = -\frac{a}{2}, a = -8 - 2\alpha$$

$$2) (2 - i)(2 + i) + (2 - i)\alpha + (2 + i)\alpha = \frac{b}{2}, b = 10 + 8\alpha$$

$$3) (2 - i)(2 + i)\alpha = -\frac{c}{2}, c = -10\alpha$$

$$b - a + c = 18$$

500. ⑤

삼차방정식 $2x^3 - 3x^2 + x + k = 0$ 의 한 근이 -1 이므로 식에 대입하면 일 때, $-2 - 3 - 1 + k = 0$ 이므로 $k = 6$ 삼차방정식 근과계수의 관계에 의하여 세근의 곱이 -3 이므로 나머지 두 근의 곱은 3

501. ③

$x^4 - 3x^3 + ax^2 + 2x + b = 0$ 의 두 근이 $-1, 2$ 이므로 조립제법을 이용한다.

-1	1	-3	a	2	b
2	1	-4	a+4	-a-2	a+b+2
	1	-2	a	a-2	

$$\textcircled{1} a - 2 = 0$$

$$\textcircled{2} a + b + 2 = 0$$

$$\therefore a = 2, b = -4$$

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 4 = 0$$

$$(x+1)(x-2)(x^2 - 2x + 2) = 0$$

나머지 두 근은 허근이며 $x^2 - 2x + 2 = 0$ 의 근이다.

$x^2 - 2x + 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 하자.

$$\therefore \alpha + \beta = 2$$

502. ⑤

사차방정식 $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + ax + 12 = 0$ 의 한 근이 2이므로

$$2a - 16 = 0, \therefore a = 8$$

조립제법에 의하여

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & -2 & -7 & 8 & 12 \\ & & 2 & 0 & -14 & -12 \\ \hline -1 & 1 & 0 & -7 & -6 & 0 \\ & & -1 & 1 & 6 & \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 & \end{array}$$

$(x-2)(x+1)(x-3)(x+2) = 0$ 으로 인수분해 되므로

근은 $x = 3$ 또는 $x = -2$ 또는 $x = -1$ 또는 $x = 2$ 이다.

따라서 가장 큰 근은 3이므로

$$a - b = 8 - 3 = 5$$

503. ②

$$x^3 - 2x^2 - 8x - 4 = 0$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 2, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -8, \alpha\beta\gamma = 4$$

$$(\alpha + \beta - \gamma)(\beta + \gamma - \alpha)(\gamma + \alpha - \beta)$$

$$= (2 - 2\gamma)(2 - 2\alpha)(2 - 2\beta)$$

$$= 8(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma)$$

$$= 8\{1 - (\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma\}$$

$$= 8 \times (1 - 2 - 8 - 4) = -104$$

504. -2

$$x^2 - 2x + 3 = t \text{라 하면}$$

$$t = (x-1)^2 + 2$$

$$1 \leq x \leq 3 \text{이므로}$$

t 는 $x = 3$ 일 때 최댓값 6, $x = 1$ 일 때 최솟값 2를 갖는다.

$$y = t^2 - 6t + 1 = (t-3)^2 - 8$$

$$2 \leq t \leq 6 \text{이므로}$$

y 는 $t = 6$ 일 때 최댓값 1, $t = 3$ 일 때 최솟값 -8을 갖는다.

$$M = 1, m = -8$$

$$t = 6 \text{일 때 } x = 3 \text{이므로 } a = 3$$

$$t = 3 \text{일 때 } x^2 - 2x + 3 = 3$$

$$x(x-2) = 0$$

$$1 \leq x \leq 3 \text{이므로 } x = 2, b = 2$$

$$\therefore a + b + M + m = 3 + 2 + 1 - 8 = -2$$

505. ④

$$x^4 - (2a-5)x^2 + a^2 - 5a - 14 = x^2 - (a-7)x^2 - (a+2) \text{이므로}$$

$$x^2 = a-7 \text{ 또는 } x^2 = a+2$$

$$a = -4 \text{일 때 } x^2 = -11 \text{ 또는 } -2 \text{이므로 } f(-4) = 0$$

$$a = -2 \text{일 때 } x^2 = -9 \text{ 또는 } 0 \text{이므로 } f(-4) = 1$$

$$a = -1 \text{일 때 } x^2 = -8 \text{ 또는 } 1 \text{이므로 } f(-4) = 2$$

$$a = 1 \text{일 때 } x^2 = -6 \text{ 또는 } 3 \text{이므로 } f(-4) = 2$$

$$a = 7 \text{일 때 } x^2 = 0 \text{ 또는 } 9 \text{이므로 } f(-4) = 3$$

$$a = 9 \text{일 때 } x^2 = 2 \text{ 또는 } 11 \text{이므로 } f(-4) = 4$$

$$f(-4) + f(-2) + f(-1) + f(1) + f(7) + f(9) = 12$$

506. ④

$$\text{본식을 양변에 } x^2 \text{으로 나누면 } x^2 + \frac{1}{x^2} = 11$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 = x^2 + \frac{1}{x^2} \text{이므로 } \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 9$$

$$\therefore x - \frac{1}{x} = 3 \quad (\because x > \frac{1}{x})$$

507. ①

$$x^4 - (2a-1)x^2 + a^2 - a - 12 = 0$$

$$(x^2 - a - 3)(x^2 - a + 4) = 0$$

$$x^2 = a + 3, x^2 = a - 4$$

$$x = \pm \sqrt{a+3}, x = \pm \sqrt{a-4}$$

$a - 4 < a + 3$ 이므로 실근과 허근을 모두 가지려면

$$a - 4 < 0, a + 3 \geq 0$$

$$-3 \leq a < 4$$

정수인 근을 가지려면 $a + 3$ 은 0 이상의 정수를 제공하는 것이다.

$$a + 3 = 0^2, 1^2, 2^2$$

$$a = -3, -2, 1$$

따라서 a 의 값의 합은 -4이다.

508. ②

실계수 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 은 한 실근 α 와 두

허근 $1 + \sqrt{2}i, 1 - \sqrt{2}i$ 을 가진다.

두 실계수 삼차방정식이 허근을 공통근으로 가지면 두 개 이상의 공통근을 가지므로 성립하지 않는다. 따라서 공통근은 실수 α 이다.

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - \alpha)(x^2 - 2x + 3)$$

$$= x^3 - (\alpha + 2)x^2 + (2\alpha + 3)x - 3\alpha$$

위의 등식이 x 에 대한 항등식이므로 x^2 의 계수는

$$a = -(\alpha + 2)$$

$$\text{방정식 } x^3 + ax^2 + 8 = 0, \text{ 즉 } x^3 - (\alpha + 2)x^2 + 8 = 0 \text{에서}$$

$x = \alpha$ 가 근이므로 대입하면

$$\alpha^2 = 4, \alpha = \pm 2$$

$$f(x) \text{를 } x - 1 \text{로 나눈 나머지는 } f(1)$$

(i) $\alpha = 2$ 일 때

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - 2)(x^2 - 2x + 3)$$

$x=1$ 을 대입하면 $1+a+b+c=-2$

$$f(1)=-3$$

(ii) $\alpha=-2$ 일 때

$$x^3+ax^2+bx+c=(x+2)(x^2-2x+3)$$

$x=1$ 을 대입하면 $1+a+b+c=6$

$$f(1)=5$$

$$\therefore 5$$

509. ②

이차함수 $y=x^2-2kx+4k$ 의 그래프가 x 축과 한 점에서

만나도록 하려면 $\frac{D}{4}=k^2-4k=0$ 는 자연수 $k=4$

510. ②

한 근이 $1-i$ 이므로 다른 한 근을 $1+i$, 나머지 한 근을 k 라 하면

세 실근의 곱 $(1-i)(1+i)k=4$ 에서 $k=2$

세 실근의 합 $(1-i)+(1+i)+2=-a$

두 실근의 곱의 합 $(1-i)(1+i)+(1-i)2+(1+i)2=b$

그러므로 $a=-4$, $b=6$, $k=2$

511. ④

풀이)

$(x-3+i)$ 를 인수면 $3-i$ 가 한 근이다.

주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 한 근이 $3-i$ 이면

다른 한 근은 $3+i$

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-10=0$ 의 나머지 한 근을 α 라 하면

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(3+i)+(3-i)+\alpha=a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(3+i)(3-i)+(3-i)\alpha+\alpha(3+i)=b \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$(3+i)(3-i)\alpha=10 \quad \therefore \alpha=1$$

$\alpha=2$ 를 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에 대입하여 정리하면

$$a=7, b=16$$

따라서 $a+b+\alpha=24$

512. ④

계수가 실수이므로 $2+i$ 가 근이면 $2-i$ 도 근이다.

두 근이 $2+i$, $2-i$ 인 이차방정식은

두 근의 합이 4, 곱이 5이므로 $x^2-4x+5=0$

따라서 1, $2+i$, $2-i$ 를 근으로 갖는 방정식은

$$(x-1)(x^2-4x+5)=0$$

$$x^3-5x^2+9x-5=0$$

$x^4+x^3+ax^2+bx+c$ 가 x^3-5x^2+9x-5 으로 나누어

떨어지므로

$$\begin{array}{r} x^3-5x^2+9x-5 \overline{) \begin{array}{r} x^4+x^3+ax^2+bx+c \\ x^4-5x^3+9x^2-5x \\ \hline 6x^3+(a-9)x^2+(b+5)x+c \\ 6x^3-30x^2+54x-30 \\ \hline (a+21)x^2+(b-49)x+c+30 \end{array}} \end{array}$$

$$\therefore a=-21, b=49, c=-30$$

$$\therefore 4a+2b+c=-84+98-30=-16$$

513. ④

$$\begin{array}{r} x^2+2x-5 \overline{) \begin{array}{r} x^4+2x^3+2x^2+4x+4 \\ x^4+2x^3-5x^2 \\ \hline 7x^2+4x+4 \\ 7x^2+14x-35 \\ \hline -10x+39 \end{array}} \end{array}$$

이므로 $x^4+2x^3+2x^2+4x+4=-10x+39$ 이고,

이차방정식의 근의 공식에 의해 $x=-1-\sqrt{6}$ (x 는 음수)

대입하면 $-10x+39=49+10\sqrt{6}$

$$a-b=49-10=39$$

514. ③

$f(x)=x^3+2x^2+(k-3)x-k$ 이라 하면

$$f(1)=1+3+k-3-k=0$$

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 2 & k-3 & -k \\ & & 1 & 3 & k \\ \hline & 1 & 3 & k & 0 \end{array}$$

$$f(x)=(x-1)(x^2+3x+k)$$

$f(x)=0$ 이 중근을 가지려면

i) $x^2+3x+k=0$ 이 $x=1$ 을 근으로 갖는 경우

$$1+3+k=0$$

$$\therefore k=-4$$

ii) $x^2+3x+k=0$ 이 중근을 갖는 경우

$$D=9-4k=0$$

$$\therefore k=\frac{9}{4}$$

i), ii)에 의해 만족하는 k 의 최댓값은 $\frac{9}{4}$

【다른풀이추가】

$x^2+3x+k=0$ 이 실근 가질 때

$$D \geq 0$$

$$9-4k \geq 0$$

$$\therefore k \leq \frac{9}{4}$$

515. ②

$$f(x)=x^3-5x^2+(k-9)x+k-3$$

$$f(x) = (x+1)(x^2 - 6x + k - 3)$$

ㄱ. $f(-1) = -1 - 5 - k + 9 + k - 3 = 0$ 이므로 $x+1$ 을 인수로 갖는다.

ㄴ. $k > 0$ 인 어떤 실수 k 에 대하여 방정식

$$(x^2 - 6x + k - 3) = 0 \text{의 판별식은 } \frac{D}{4} = 9 - k + 3 = 0 \text{이 } k = 12 \text{가}$$

되면 다른 실근의 개수는 2개이다.

ㄷ. 방정식 $f(x) = 0$ 이 실근과 허근을 모두 가지려면

$(x^2 - 6x + k - 3) = 0$ 은 허근을 가져야 할 것이다.

따라서 $\frac{D}{4} = 9 - k + 3 < 0$ 일 때, 정수 k 의 최솟값은 13이다.

ㄱ, ㄴ

516. ㉔

$$\begin{array}{c|ccc} -1 & 1 & -7 & -7-n^2 & 1-n^2 \\ & & -1 & 8 & -1+n^2 \\ \hline & 1 & -8 & 1-n^2 & 0 \end{array}$$

$$(x+1)(x^2 - 8x + 1 - n^2) = 0$$

세 근이 모두 정수이므로 $x^2 - 8x + 1 - n^2 = 0$ 의 두 근이 모두 정수이어야 한다.

$$x = 4 \pm \sqrt{15 + n^2} \text{에서 } 15 + n^2 = k^2 \text{ (} k \text{는 정수)}$$

$$(k-n)(k+n) = 15$$

$$k-n=1, k+n=15 \text{에서 } k=8, n=7$$

$$k-n=3, k+n=5 \text{에서 } k=4, n=1$$

따라서 $n=1, 7$ 이므로 $1+7=8$ 이다.

517. ㉔

$$x^4 + (2a-1)x^3 - (1-3a)x^2 + (a+1)x = 0$$

$$x(x+1)\{x^2 + 2(a+1)x + a+1\} = 0 \text{에서}$$

$$\textcircled{1} x=0: \text{중근} \therefore a=-1$$

$$\textcircled{2} x=-1: \text{중근} \therefore a=4$$

$$\textcircled{3} x^2 + 2(a+1)x + a+1 = 0 \text{는 중근을 가지며 근은}$$

$$x \neq 0, x \neq -1 \text{이며}$$

$$a \neq 4, a \neq -1 \text{이므로}$$

$$\frac{D}{4} = (a-1)^2 - (a-1) = 0$$

$$a^2 - 3a = 0 \text{ 모든 실수 } a = 0, 3$$

$$\text{모든 } a \text{의 합: } -1 + 4 + 0 + 3 = 6$$

518. ㉔

$$f(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 7x - 6 \text{이라 하면}$$

$$f(-1) = 1 - 1 - 1 + 7 - 6 = 0$$

$$f(2) = 16 + 8 - 4 - 14 - 6 = 0$$

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 1 & -1 & -7 & -6 \\ & & -1 & 0 & 1 & 6 \\ \hline 2 & 1 & 0 & -1 & -6 & 0 \\ & & 2 & 4 & 6 & \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 0 & \end{array}$$

$$f(x) = (x+1)(x-2)(x^2 + 2x + 3)$$

따라서 $f(x) = 0$ 의 두 허근은 $x^2 + 2x + 3 = 0$ 의 두 근과 같다.

$x^2 + 2x + 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$$\alpha + \beta = -2, \alpha\beta = 3$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4 - 6 = -2$$

519. ㉔

$$f(x) = x^4 - kx^3 - (k+1)x^2 + k^2x + k^2 \text{라 하면}$$

$$f(-1) = 1 + k - (k+1) - k^2 + k^2 = 0 \text{이므로}$$

$$f(x) = (x+1)\{x^3 - (k+1)x^2 + k^2\}$$

$$= (x+1)(x-k)(x^2 - x - k)$$

이 서로 다른 네 실근을 가진다. 이차방정식 $x^2 - x - k = 0$ 이

서로다른 두실근을 가지며 실근이 존재하려면

$$D = 1 + 4k > 0, x \neq -1, x \neq k$$

$$\therefore k > -\frac{1}{4}, k \neq 2, k \neq 0$$

하는 5이하의 정수 $k = 1, 3, 4, 5$ 의 값을 모두 더한 값은 13

520. ㉔

$$kx^2(kx^2 + 1)(kx^3 + 2)(kx + 3) - 28 \text{이 } x+1 \text{을 인수로 가지므로}$$

$$x = -1 \text{을 대입하면}$$

$$k(k+1)(-k+2)(-k+3) - 28 = 0$$

$$k(k+1)(k-2)(k-3) - 28 = 0$$

$$(k^2 - 2k)(k^2 - 2k - 3) - 28 = 0$$

$$k^2 - 2k = X \text{라 하면}$$

$$X^2 - 3X - 28 = 0$$

$$(X-7)(X+4) = 0$$

$$(k^2 - 2k - 7)(k^2 - 2k + 4) = 0$$

k 가 실수이므로 $k^2 - 2k - 7 = 0$ 일 때만 만족한다.

$$k^2 - 2k - 7 = 0 \text{의 두 근을 } \alpha, \beta \text{라 하면}$$

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -7$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4 + 14 = 18$$

521. ㉔

$$f(x) = a(x-3)(x-k) \text{라고 하면 } x \text{에 대한 사차방정식}$$

$$a(x^2 - kx + 2k)(x-3)(x-k) = 0 \text{에서}$$

1) $k=3$ 이면 중근은 만족하지만 허근이 발생

2) $x^2 - kx + 2k = 0$ 이 중근을 가질 때 $k=0, 8$ 에서 $k=8$

3) $x^2 - kx + 2k = 0$ 이 $x=3$ 을 근으로 가질 때 $k=9$

인수분해를 하면 $a(x-3)^2(x-6)(x-9) = 0$ 이므로 조건을 만족한다.

4) $x^2 - kx + 2k = 0$ 이 $x = k$ 를 근으로 가질 때 $k=0$ 은 조건을 만족하지 않으므로 만족하는 k 값은 8,9이다.

522. (1) $w^2 - w + 1 = 0$ (2) 1 (3) 100 개

(1) $(x+1)(x^2 - x + 1) = 0$ 이므로 $w^2 - w + 1 = 0$

(2) $w^3 = -1$ 이므로

$w^{2023} + \frac{1}{w^{2023}} = w + \frac{1}{w} = 1$ ($\because w^2 - w + 1 = 0$ 에서 양변을 w 로

나눈다.)

(3) 근과 계수와의 관계에 의해 $w + \bar{w} = 1, w\bar{w} = 1$ 이므로

$\bar{w} - 1 = -w, w - 1 = \bar{w}$ 이다.

$(\bar{w} - 1)^{2n} = (w + 2\bar{w} - w\bar{w})^n$ 에 위를 대입하여 정리하면

$(-w)^{2n} = \frac{1}{w^n}$ 이므로 $w^n (-w)^{2n} = 1$ 이 되려면

n 은 짝수이어야하므로 200이하의 자연수 n 의 개수는 100개다.

523. ①

$x^3 + 1 = 0$

$(x+1)(x^2 - x + 1) = 0$

$x^2 - x + 1 = 0$ 의 두 근이 $\omega, \bar{\omega}$ 이므로 $\omega^3 = -1$ 이고

$\omega + \bar{\omega} = 1, \omega\bar{\omega} = 1, \bar{\omega} = \frac{1}{\omega} = \frac{\omega^2}{\omega^3} = -\omega^2$

$\omega^2 + \bar{\omega}^2 = (\omega + \bar{\omega})^2 - 2\omega\bar{\omega} = -1$

$\left(\frac{\bar{\omega}}{\omega^2 + \bar{\omega}^2}\right)^n = (-\bar{\omega})^n = \omega^{2n}$

$(\omega^2 - \omega^3)^{3n+1} = (\omega - 1 + 1)^{3n+1} = \omega^{3n+1}$

$\left(\frac{\bar{\omega}}{\omega^2 + \bar{\omega}^2}\right)^n = (\omega^2 - \omega^3)^{3n+1}$ 에서 $\omega^{2n} = \omega^{3n+1}$

$\omega^{n+1} = 1$

$n = 6k - 5$ (k 는 자연수)일 때 성립한다.

따라서 n 은 90이하의 자연수이므로 15개

524. 19

$x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 7x + 10$

$= x^2(x^2 - x + 1) - 2x(x^2 - x + 1) - 9(x^2 - x + 1) + 19$

$= 19$

[다른풀이]

방정식 $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1) = 0$ 에서

$x^2 - x + 1 = 0 \rightarrow x^3 = -1$

$x^2 - x + 1 = 0 \rightarrow x^2 = x - 1$ 이므로 차수 낮추기

$x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 7x + 10 = -x + 3 - 6(x-1) + 7x + 10$

$= 19$

525. ①

방정식 $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 이므로

$x^3 - 1 = 0$

$(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

그러므로 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근은 $\omega, \bar{\omega}$ 이다.

따라서 $\omega^2 + \omega + 1 = 0, \bar{\omega}^2 + \bar{\omega} + 1 = 0$ 이고 $\omega^3 = \bar{\omega}^3 = 1$ 이다.

또, 근과 계수와의 관계에 의하여 $\omega + \bar{\omega} = -1, \omega\bar{\omega} = 1$ 이다.

ㄱ. $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ (참)

ㄴ. $\omega^{110} + \bar{\omega}^{110} = 1$ 에서

$$\begin{aligned}\omega^{110} + \bar{\omega}^{110} &= (\omega^3)^{36} \times \omega^2 + (\bar{\omega}^3)^{36} \times \bar{\omega}^2 \\ &= \omega^2 + \bar{\omega}^2 \\ &= (\omega + \bar{\omega})^2 - 2\omega\bar{\omega} \\ &= (-1)^2 - 2 \times 1 \\ &= -1\end{aligned}$$

이므로 $\omega^{110} + \bar{\omega}^{110} \neq 1$ 이다. (거짓)

ㄷ. $\frac{\bar{\omega}^{-2}}{\omega^2 + 1} = 1$ 에서

$$\begin{aligned}\frac{\bar{\omega}^{-2}}{\omega^2 + 1} &= \frac{\bar{\omega}^{-2} \times \bar{\omega}}{(\omega^2 + 1) \times \bar{\omega}} \\ &= \frac{\bar{\omega}^{-3}}{\omega \times \omega\bar{\omega} + \bar{\omega}} \\ &= \frac{1}{\omega + \bar{\omega}} \\ &= \frac{1}{-1} \\ &= -1\end{aligned}$$

이므로 $\frac{\bar{\omega}^{-2}}{\omega^2 + 1} \neq 1$ 이다. (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ이다.

526. ⑤

삼차방정식 $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1) = 0$ 의 한 허근이

w 이므로

$w^3 = -1, w^2 - w + 1 = 0$ 이 성립하고 $w + \bar{w} = 1, w\bar{w} = 1$ 이다.

ㄱ. $\frac{1}{1+w} + \frac{1}{1+\bar{w}} = \frac{2+\omega+\bar{\omega}}{1+\omega+\bar{\omega}+\omega\bar{\omega}} = \frac{3}{3} = 1$

ㄴ. $w^3 = -1, w^6 = 1, w^{50} + \frac{4}{w^{49}} = w^2 + \frac{4}{w} = w^2 + 4w = 5w - 1$

ㄷ. 자연수 n 에 대하여 $f(n) = \frac{w^{n+1}}{1+w^{2n}}$ 일 때

$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(48) = 0$

$f(n) = \frac{w^{n+1}}{1+w^{2n}}$

$f(1) = \frac{w^2}{1+w^2} = \frac{w^2}{w} = w$

$f(2) = \frac{w^3}{1+w^4} = \frac{-1}{1-w} = \frac{-1}{-\omega^2} = \frac{1}{\omega^2} = -\omega$

$$f(3) = \frac{\omega^4}{1+\omega^6} = \frac{-\omega}{2}$$

$$f(4) = \frac{\omega^5}{1+\omega^8} = \frac{-\omega^2}{\omega} = -\omega$$

$$f(5) = \frac{\omega^6}{1+\omega^{10}} = \frac{1}{1-\omega} = \frac{1}{-\omega^2} = \omega$$

$$f(6) = \frac{\omega^7}{1+\omega^{12}} = \frac{\omega}{1+1} = \frac{\omega}{2}$$

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(6)=0$$

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(48)=8\{f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)\}$$

$$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(48)=0$$

$$527. a=15, b=-15$$

$$x^4-8x^3+21x^2-24x+9=0$$

양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2-8x+21-\frac{24}{x}+\frac{9}{x^2}=0$$

$$\left(x^2+\frac{9}{x^2}\right)-8\left(x+\frac{3}{x}\right)+21=0$$

$$\left(x+\frac{3}{x}\right)^2-8\left(x+\frac{3}{x}\right)+15=0$$

$$\left(x+\frac{3}{x}-3\right)\left(x+\frac{3}{x}-5\right)=0$$

양변에 x^2 을 곱하면

$$(x^2-3x+3)(x^2-5x+3)=0$$

$$x^2-3x+3=0 \text{에서 판별식 } D=9-12<0 \text{이고}$$

$$x^2-5x+3=0 \text{에서 판별식 } D=25-12>0 \text{이므로}$$

ω 는 $x^2-3x+3=0$ 의 근이다. 따라서

$$w^2-3w+3=0$$

$$\omega^3+2\omega^2+3\omega=(w^2-3w+3)(w+5)+15w-15$$

$$=15w-15$$

$$\therefore a=15, b=-15$$

$$528. ④$$

$x^3+8=0$ 을 인수분해하면

$$(x+2)(x^2-2x+4)=0 \text{이므로 } \omega, \bar{\omega} \text{는 } x^2-2x+4=0 \text{의 근이다.}$$

$$\omega+\bar{\omega}=2, \omega\bar{\omega}=4 \text{이므로}$$

주어진 식을 통분하면

$$\frac{4\omega\bar{\omega}+(\omega+\bar{\omega})}{4\omega\bar{\omega}+2(\omega+\bar{\omega})+1}=\frac{6}{7}$$

$$529. ④$$

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

$x^2+x+1=0$ 의 허근을 ω 라 하면

$$\omega^2+\omega+1=0, \omega^3=1 \text{이므로}$$

$$\frac{1}{\omega+1}+\frac{1}{\omega^2+1}+\frac{1}{\omega^3+1}=\frac{1}{-\omega^2}+\frac{1}{-\omega}+\frac{1}{2}$$

$$=-\frac{1+\omega}{\omega^2}+\frac{1}{2}$$

$$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

세개마다 반복되므로

$$36=3\times 12 \text{에서 } \frac{3}{2}\times 12=18 \text{이다.}$$

$$530. ②$$

풀이)

$z=a+bi, w=c+di$ (a, b, c, d 는 실수)에 대하여

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $z=-\bar{z}$ 이면 $z+\bar{z}=2bi$ 이므로 $b=0$ 이 될 수 있으므로 (거짓)

ㄴ. $z^2+w^2=0$ 이면 $z^2=a^2-b^2+2abi, w^2=c^2-d^2+2cdi$

에서 $z^2+w^2=a^2-b^2+2abi+c^2-d^2+2cdi$

$a^2-b^2+c^2-d^2+2(ab+cd)i=0$ 이므로 $z=w=0$ (거짓)

$$\text{ㄷ. } \frac{1}{1-w}+\frac{1}{1-\bar{w}}=\frac{2-(w+\bar{w})}{(1-w)(1-\bar{w})}=\frac{2-(w+\bar{w})}{(1-(w+\bar{w})+w\bar{w})}$$

$$=\frac{2-2c}{1-2c+c^2+d^2} \text{ 이므로 실수 (참)}$$

옳은 것은 ㄷ 이다.

$$531. 33\text{개}$$

$$x^4-x^3-3x^2+4x-4=(x^4-x^3+x^2)-4(x^2-x+1)$$

$$=x^2(x^2-x+1)-4(x^2-x+1)=(x^2-4)(x^2-x+1)=0$$

서로 다른 두 허근은 $x^2-x+1=0$ 에서의 근과 같고,

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \beta=\frac{1-\sqrt{3}i}{2} \text{이다.}$$

$$\alpha+\beta=1, \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2=-1$$

$$\alpha^3=\beta^3=-1 \text{이므로 } \alpha^3+\beta^3=-2$$

$$\alpha^4+\beta^4=-(\alpha+\beta)=-1, \alpha^5+\beta^5=-\alpha^2-\beta^2=-(\alpha^2+\beta^2)=1$$

$$\alpha^6=\beta^6=1 \text{이므로 } \alpha^6+\beta^6=2$$

...

따라서 $\alpha^{6k-5}+\beta^{6k-5}=1, \alpha^{6k-1}+\beta^{6k-1}=1$ (k 는 자연수)

$6k-5$ 의 개수는 17개, $6k-1$ 의 개수는 16개

(n 은 100이하의 자연수)이므로 총 33개다.

$$532. ⑤$$

$$f(x)=x^3-3x^2+9x+13 \text{이라 하면}$$

$$f(-1) = -1 - 3 - 9 + 13 = 0$$

$$\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -3 & 9 & 13 \\ & & -1 & 4 & -13 \\ & 1 & -4 & 13 & 0 \end{array}$$

$$f(x) = (x+1)(x^2 - 4x + 13)$$

$x^2 - 4x + 13 = 0$ 의 두 근 중 허수부분이 양수인 근이 α 이므로

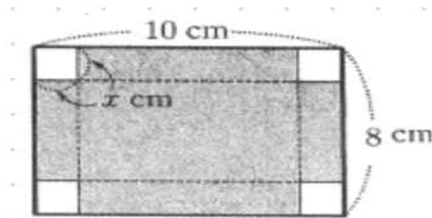
$$\alpha = 2 + \sqrt{4-13} = 2 + 3i$$

$$\therefore \frac{\alpha}{\alpha} = \frac{2+3i}{2-3i} = \frac{-5+12i}{13}$$

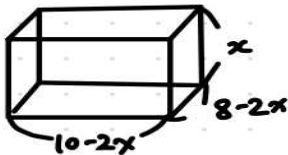
$$a = -\frac{5}{13}, \quad b = \frac{12}{13}$$

$$\therefore a+b = \frac{7}{13}$$

533. ①



상자 :



$$\text{부피: } (10-2x)(8-2x)x = 48$$

$$(4x^2 - 36x + 80)x = 48$$

$$4x^3 - 36x + 80x - 48 = 0$$

$$x^3 - 9x^2 + 20x - 12 = 0$$

$$(x-2)(x-1)(x+6) = 0$$

$$x = 2 \text{ or } 1$$

$$\therefore 2+1=3$$

$$534. (1) f(x) = \pi(x+1)^2(x^2 - x + 1)$$

$$g(x) = \frac{1}{3}\pi(x+2)^2(x^2 - 2x + 4)$$

$$(2) \frac{2\pi(x+1)^2(x^2 - x + 1) - 3 \times \frac{1}{3}\pi(x+2)^2(x^2 - 2x + 4)}{\pi}$$

$$= 2(x+1)(x^3 + 1) - (x+2)(x^3 + 8)$$

$$= 2(x^4 + x^3 + x + 1) - (x^4 + 2x^3 + 8x + 16)$$

$$= x^4 - 6x - 14$$

$$\text{이므로 } a=0, \quad b=0, \quad c=-6, \quad d=-14$$

535. $x=2$ 일 때, 2400 원

가격을 200 원씩 올린 횟수를 x , 판매한 총 금액을 y 라 하면

$$y = (2000 + 200x)(70 - 5x)$$

$$= 1000(10+x)(14-x)$$

$$= 1000(-x^2 + 4x + 140)$$

$$= 1000\{-(x-2)^2 + 144\}$$

$$= -1000(x-2)^2 + 144000$$

판매한 총 금액이 최대가 될 때는

$$x=2 \text{ 일 때 } 2000 + 200 \times 2 = 2400(\text{원})$$

536. ②

삼차방정식 $x^3 + 3x - 1 = 0$ 의 세 근을 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 라 하자.

$x^3 + 3x - 1 = 0$ 이 중근을 가진다고 가정하고 α_2, α_3 가

중근이라고 하면 근과 계수의 관계에 따라

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 & \dots \text{①} \\ 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 = 3 & \dots \text{②} \\ \alpha_1\alpha_2^2 = 1 & \dots \text{③} \end{cases}$$

①식을 ②, ③식에 대입하면

$$\begin{cases} -4\alpha_2^2 + \alpha_2^2 = 3 & \dots \text{④} \\ -2\alpha_2^3 = 1 & \dots \text{⑤} \end{cases}$$

④, ⑤식을 동시에 만족하는 α_2 가 존재하지 않으므로

$x^3 + 3x - 1 = 0$ 은 서로 다른 세 근 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 을 가진다.

$x^3 + 3x - 1 = 0$ 의 근 α 에 대하여

$$(\alpha^2 + \alpha + 1)P(\alpha) = 1$$

양변에 $\alpha - 1$ 을 곱하면

$$(\alpha^3 - 1)P(\alpha) = \alpha - 1$$

$$\alpha^3 + 3\alpha - 1 = 0 \text{ 이므로}$$

$$-3\alpha P(\alpha) = \alpha - 1$$

$$3\alpha P(\alpha) + \alpha - 1 = 0$$

$$\begin{cases} 3\alpha_1 P(\alpha_1) + \alpha_1 - 1 = 0 \\ 3\alpha_2 P(\alpha_2) + \alpha_2 - 1 = 0 \\ 3\alpha_3 P(\alpha_3) + \alpha_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\alpha_1 P(\alpha_1) + \alpha_1 - 1 = 0 \\ 3\alpha_2 P(\alpha_2) + \alpha_2 - 1 = 0 \\ 3\alpha_3 P(\alpha_3) + \alpha_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

인수정리에 의하여 다항식 $3xP(x) + x - 1$ 은 세 일차식 $x - \alpha_1,$

$x - \alpha_2, \quad x - \alpha_3$ 을 인수로 가진다.

$$3xP(x) + x - 1 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)Q(x)$$

$$= (x^3 + 3x - 1)Q(x)$$

$Q(x)$ 가 상수일 경우 $Q(x) = a$ 라 하면

$$3xP(x) + x - 1 = a(x^3 + 3x - 1)$$

$x=0$ 을 대입하면

$$-1 = -a, \quad a = 1$$

$$3xP(x) + x - 1 = x^3 + 3x - 1$$

$$P(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 2)$$

$$\therefore P(3) = \frac{11}{3}$$

537. ①

$x = 1 + \sqrt{3}$ 이라 하면

$$x-1=\sqrt{3}, x^2-2x-2=0$$

$$(1+\sqrt{3})^6-(1+\sqrt{3})^5-3(1+\sqrt{3})^4+2(1+\sqrt{3})^3-(1+\sqrt{3})^2-7$$

$$=x^6-x^5-3x^4+2x^3-x^2-7$$

$$=(x^2-2x-2)(x^4+x^3+x^2+6x+13)+38x+19$$

$$=38x+19=57+38\sqrt{3}$$

$$\therefore m=57, n=38, m-n=19$$

538. ③

다항식의 모든 계수가 실수 이므로,

$$\text{한 근이 } \frac{p+\sqrt{q}i}{2} \text{ 면, 다른 한 근은 } \frac{p-\sqrt{q}i}{2}$$

$$\text{두 근의 합은 } p, \text{ 두 근의 곱은 } \frac{p^2+q}{4}$$

$$x^3+ax+b=(x+7)\left(x^2-px+\frac{p^2+q}{4}\right)=(x+7)(x^2-7x+21)$$

$$2x^3+cx^2+d=(x+3)\left(2x^2-2px+\frac{p^2+q}{2}\right)=(x+3)(2x^2-14x+42)$$

항등식 이므로 계수를 비교하면 $p=7, q=35$,

$$a=-28, b=147, c=-8, d=126$$

$$\text{이므로 } (a+b+c+d)-(p+q)=195$$

539. ⑤

$$f(x)=x^3-3x^2+5x-6 \text{ 이라 하면}$$

$$f(2)=8-12+10-6=0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -3 & 5 & -6 \\ & & 2 & -2 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}$$

$$f(x)=(x-2)(x^2-x+3)$$

$$x^2-x+3=0 \text{ 의 한 허근이 } \alpha \text{ 이므로 } \alpha^2=\alpha-3$$

$$f(\alpha)=\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha-6=0 \text{ 에서}$$

$$\alpha^3=3\alpha^2-5\alpha+6=-2\alpha-3$$

$$\alpha^6=(-2\alpha-3)^2=4\alpha^2+12\alpha+9=16\alpha-3$$

$$\therefore \alpha^4-\frac{45}{\alpha^2}+9=\frac{\alpha^6+9\alpha^2-45}{\alpha^2}$$

$$=\frac{16\alpha-3+9\alpha-27-45}{\alpha-3}$$

$$=\frac{25\alpha-75}{\alpha-3}=25$$

540. -76

$$f(x)=x^3-5x^2+9x-5 \text{ 라 하면 } f(1)=0 \text{ 이므로}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -5 & 9 & -5 \\ & & 1 & -4 & 5 \\ \hline & 1 & -4 & 5 & 0 \end{array}$$

$$f(x)=(x-1)(x^2-4x+5)$$

$$x^2-4x+5=0 \text{ 의 두 근이 } z_1, z_2 \text{ 이므로}$$

$$z_1+z_2=4, z_1z_2=5$$

$$z_1^2+z_2^2=(z_1+z_2)^2-2z_1z_2=16-10=6$$

$$z_1^3+z_2^3=(z_1+z_2)^3-3z_1z_2(z_1+z_2)=64-60=4$$

$$(z_1^2+z_2^2)(z_1^3+z_2^3)=z_1^5+z_2^5+z_1^2z_2^2(z_1+z_2)$$

$$24=z_1^5+z_2^5+100$$

$$\therefore z_1^5+z_2^5=-76$$

20번 해설 수정

18번 해설 오타 수정

541. ④

$$x^3+1=0$$

$$(x+1)(x^2-x+1)=0$$

$$x^2-x+1=0 \text{ 의 허근을 } \omega, \bar{\omega} \text{ 이라 하면}$$

$$\omega^3=-1, \omega+\bar{\omega}=1, \omega\bar{\omega}=1, \omega^2=\omega-1$$

$$z=\frac{\omega-1}{2\omega-1}=\frac{\omega^2}{\omega^2+\omega}=\frac{\omega}{\omega+1}, \bar{z}=\frac{\bar{\omega}}{\bar{\omega}+1}$$

$$z^3=\frac{\omega^3}{\omega^3+3\omega^2+3\omega+1}=\frac{-1}{-1+3\omega-3+3\omega+1}=\frac{-1}{3(2\omega-1)}$$

$$z^6=\frac{1}{9(4\omega^2-4\omega+1)}=\frac{1}{9(4\omega-4-4\omega+1)}=-\frac{1}{27}$$

$$z\bar{z}=\frac{\omega\bar{\omega}}{\omega\bar{\omega}+(\omega+\bar{\omega})+1}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore z(z^5+\bar{z})=z^6+z\bar{z}=-\frac{1}{27}+\frac{1}{3}=\frac{8}{27}$$

542. ③

첫 번째 연립방정식을 풀어본다.

$$2x^2+3xy-2y^2=0$$

$$(2x-y)(x+2y)=0$$

$$\textcircled{1}y=2x \text{ or } \textcircled{2}x=-2y$$

두 번째 연립방정식의 $x^2+y^2=5$ 에 대입해본다.

$$\textcircled{1}y=2x$$

$$x^2+(2x)^2=5$$

$$5x^2=5$$

$$x^2=1$$

$$x=1 \text{ or } -1$$

$$\text{해:}(1, 2), (-1, -2)$$

$$\textcircled{2}x=-2y$$

$$(-2y)^2+y^2=5$$

$$5y^2=5$$

$$y^2=1$$

$$y=1 \text{ or } -1$$

$$\text{해:}(-2, 1), (2, -1)$$

if)해가 $(-2, 1)$ 이면 $x+y=a=-1<0$ 이므로 해가 될 수

없다.

if)해가 $(1, 2)$ 이면 $x+y=a=3$

두 번째 연립방정식에서 $ax+by=7$ 에 근을 대입한다.

$$3x+by=7$$

$$3 \times 1 + b \times 2 = 7$$

$$\therefore b = 2 > 0$$

$$a+b=3+2=5$$

543. ②

$x+y=6$, $x^2+y^2=20$ 을 연립하면 $x=2$, $y=4$ 또는 $x=4$, $y=2$ 이다.

$x-y=b$ 에서 $b < 0$ 이므로 $x=2$, $y=4$ 이고, $b=-2$ 이다.

$ax-y=4$ 에서

$$2a-4=4, a=4$$

$$\text{따라서 } a+b=4+(-2)=2$$

544. ①

$y=x+3$ 을 $x^2-2xy-y^2=7$ 에 대입해서 정리하면

$x^2+6x+8=0$ 이므로 $x=-2$, $y=1$ 또는 $x=-4$, $y=-1$ 이다.

545. 210

$$\{(x+y)-5\}\{(x+y)+3\}=0$$

i) $x+y=5$ 일 때

$$x^2-(5-x)^2=10$$

$$x=\frac{7}{2}$$

$$\therefore x=\frac{7}{2}, y=\frac{3}{2}$$

ii) $x+y=-3$ 일 때

$$x^2-(-3-x)^2=10$$

$$x=-\frac{19}{6} \quad (x \text{가 양수인 조건에 위배})$$

$$\text{따라서 } 40xy=40 \times \frac{7}{2} \times \frac{3}{2}=210$$

546. ②

$$2x^2+3xy-2y^2=0 \text{에서 } (2x-y)(x+2y)=0$$

$$\therefore y=2x \text{ 또는 } x=-2y$$

① $y=2x$ 일 때,

$$x^2+y^2=5 \text{에 대입하면}$$

$$x^2+(2x)^2=5, 5x^2=5$$

$$x^2=1 \therefore x=\pm 1$$

이때, $y=\pm 2$ 이므로 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$$

② $x=-2y$ 일 때,

$$x^2+y^2=5 \text{에 대입하면}$$

$$(-2y)^2+y^2=5, 5y^2=5$$

$$y^2=1 \therefore y=\pm 1$$

이때, $x=\mp 2$ 이므로 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$$

따라서 ①, ②에 의하여 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$$

이므로 $\alpha+\beta$ 의 최댓값은 $x=1$, $y=2$ 일 때, $\alpha+\beta=1+2=3$ 이다.

547. ②

$$2(2x+y+2xy)+(4x^2+y^2)=35$$

$$4x^2+4xy+y^2+2(2x+y)=35$$

$$(2x+y)^2+2(2x+y)-35=0$$

$$2x+y=-7 \text{ 또는 } 2x+y=5$$

(i) $2x+y=-7$ 일 때

$$2xy=18$$

$2x$, y 를 두 근으로 하는 t 에 관한 이차방정식은

$$t^2+7t+18=0$$

판별식이 $7^2-4 \times 18 < 0$, 즉 허근을 가지므로 성립하지 않는다.

(ii) $2x+y=5$ 일 때

$$2xy=6$$

$$(2x, y)=(2, 3), (3, 2)$$

$$(x, y)=(1, 3), \left(\frac{3}{2}, 2\right)$$

$$2\alpha+2\beta=8 \text{ 또는 } 2\alpha+2\beta=7$$

따라서 $2\alpha+2\beta$ 의 최솟값은 $\alpha=\frac{3}{2}$, $\beta=2$ 일 때 7이다.

548. ③

연립방정식 $\begin{cases} xy+(x+y)+1=k \\ xy-2(x+y)+4=k \end{cases}$ 에서 실근을 가지므로

연립방정식의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$ 라 하면

α , β 는 실수이다.

$$\begin{cases} \alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=k & \cdots \text{㉠} \\ \alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4=k & \cdots \text{㉡} \end{cases}$$

$$\text{㉠}-\text{㉡} \text{을 하면}$$

$$3(\alpha+\beta)-3=0$$

$$\therefore \alpha+\beta=1 \quad \cdots \text{㉢}$$

㉠에 ㉢을 대입하면

$$\alpha\beta=k-2 \quad \cdots \text{㉣}$$

이차방정식 $t^2-(\alpha+\beta)t+\alpha\beta=0$ 에서 판별식을 D 라 하면

α , β 가 실수이므로 판별식 $D \geq 0$ 이다.

㉢, ㉣에 의하여

$$t^2-t+k-2=0$$

$$D=1^2-4(k-2) \geq 0$$

$$1-4k+8 \geq 0$$

$$4k \leq 9$$

$$k \leq \frac{9}{4}$$

그러므로 k 의 최댓값은 $\frac{9}{4}$ 이다.

549. ⑤

$$(2x^2 - 3xy - 2y^2)^2 + (2x^2 + y^2 - 36)^2 = 0$$

$$2x^2 - 3xy - 2y^2 = 0 \text{이고 } 2x^2 + y^2 - 36 = 0$$

$$2x^2 - 3xy - 2y^2 = 0 \text{에서 } (2x+y)(x-2y) = 0$$

i) $2x+y=0$, 즉 $y=-2x$ 일 때

$$2x^2 + 4x^2 = 36$$

$$x^2 = 6$$

$$x = \sqrt{6}, y = -2\sqrt{6} \text{ 또는 } x = -\sqrt{6}, y = 2\sqrt{6}$$

ii) $x-2y=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x$ 일 때

$$2x^2 + \frac{1}{4}x^2 = 36$$

$$x^2 = 16$$

$$x = 4, y = 2 \text{ 또는 } x = -4, y = -2$$

i), ii)에 의해 $x+y$ 의 최댓값은 $x=4, y=2$ 일 때 6

550. ④

두 근을 α, β 라고 할 때,

$$\alpha + \beta = 2(n+1), \alpha\beta = n^2 + 1 \text{에서}$$

$$\alpha = n+1+k, \beta = n+1-k$$

$$\alpha\beta = (n+1+k)(n+1-k)$$

$$= (n+1)^2 - k^2 = n^2 + 1 \text{에서}$$

$2n - k^2 = 0$ 따라서 $k = \sqrt{2n}$ 이므로 $\sqrt{2n}$ 은 정수이므로 $2n$ 은 제곱수

$$\text{이므로 } 2n : (2^2, 4^2, 6^2, 8^2, 10^2)$$

모든 자연수 n 의 값의 합은 110

【다른풀이추가】

$$x^2 - 2(n+1)x + n^2 + 1 = 0 \text{에서}$$

$$\text{근의 공식 } x = (n+1) \pm \sqrt{(n+1)^2 - (n^2 + 1)}$$

$$\therefore x = (n+1) \pm \sqrt{2n}$$

$2n$:완전수 이어야 한다.

$$2n = 4, 16, 36, 64, 100$$

551. ⑤

기계 A, B가 1시간 동안 생산하는 제품의 개수를 각각 $a, a+5$ 라 하면

$$\begin{cases} (2a+5)x = 200 & \cdots \textcircled{1} \\ a(x+2) = 100 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

두 식을 연립하여 계산하면

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \times 2 : 5x - 4a = 0, x = \frac{4}{5}a$$

①에 대입하면

$$\frac{4}{5}a(2a+5) = 200$$

$$2a^2 + 5a - 250 = 0$$

$$(a-10)(2a+25) = 0$$

$$a = 10 \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore \frac{100}{10} \times 15 = 150$$

552. ⑤

$$a^2 + b^2 = 64 \times 34 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$ab = 960 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{64 \times 34}{960} = \frac{34}{15}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{34}{15} \quad \frac{a}{b} = x \text{라 하자}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{34}{15}$$

$$15x^2 - 34x + 15 = (3x-5)(5x-3) = 0$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{5}{3}$$

553. 30

주어진 이차식이 완전제곱식이 되기 위해서는

$$x^2 - 4(a-b)x + 4(a+b)^2 - 17ab - 5a - 2b - 7 = 0 \text{ 이 중근을 가져야 한다. 따라서 판별식}$$

$$\frac{D}{4} = 4(a-b)^2 - 4(a+b)^2 + 17ab + 5a + 2b + 7 = 0, \text{ 이를 정리하면}$$

$$ab + 5a + 2b + 7 = 0 \text{ 이 된다.}$$

$$a(b+5) + 2(b+5) = -7 + 10 = 3, (a+2)(b+5) = 3 \cdots \cdots (*)$$

a, b 가 정수이므로 (*)을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는

$(-1, -2), (1, -4), (-3, -8), (-5, -6)$ 이다.

$ab = -4, 2, 24, 30$ 이므로 이 중 가장 큰 값은 30이 됨을 알 수 있다.

554. ②

$$2x(x-1) + 2y(y-1) = (x+y)(x+y-1)$$

전개해서 정리하면

$$x^2 + y^2 - 2xy - x - y = 0$$

$$4x^2 + 4y^2 - 8xy - 4x - 4y = 0$$

$$4y^2 - 4(2x+1)y + 4x^2 - 4x = 0$$

$$(2y-2x-1)^2 = 8x+1$$

$$2y-2x-1 \geq 1 \text{이므로}$$

$$2y-2x-1 = \sqrt{8x+1}$$

$8x+1$ 은 홀수의 제곱수이고, $81 \leq 8x+1 \leq 793$ 이므로

$$8x+1 = (2m+1)^2 \quad (m \text{은 자연수})$$

$$x = \frac{m(m+1)}{2}, y = x + m + 1$$

연속하는 두 자연수의 곱은 항상 2의 배수이므로

$\frac{m(m+1)}{2}$ 는 자연수이고

$m=4$ 일 때 $x=10, y=15$

$\vdots$

$m=12$ 일 때 $x=78, y=91$

$m=13$ 일 때 $x=91, y=105$

$10 \leq x < y \leq 100$ 를 만족하는 자연수 m 의 범위는

$4 \leq m \leq 12$ 이다.

따라서 순서쌍 (x, y) 의 개수는 9이다.