내신대비 모의고사

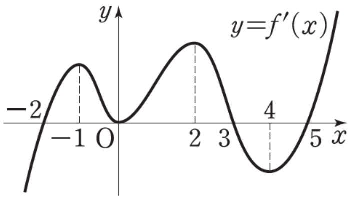
범위 : 미분–적분

시험시간 : 50분

이름 :

[객관식]

1. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프를 나타낸 것이다.



함수 $f(x)$가 극댓값을 갖는 점의 개수를 M, 극솟값을 갖는 점의 개수를 m이라 할 때, $10M+m$의 값을 구하면?

① 13 ② 21 ③ 22
④ 12 ⑤ 32

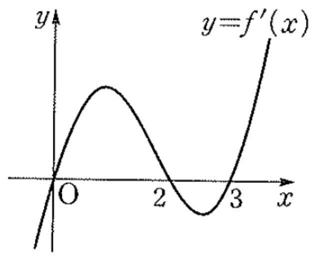
2. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+10$이 $x=\alpha,\ x=\beta$에서 극값을 갖는다고 할 때, $f(\alpha+\beta)$의 값을 구하면?

① $\frac{16}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 0
④ 2 ⑤ 3

3. 함수 $f(x)=x^3-3x^2+2,\ g(x)=x^2-2x$ 닫힌구간 $[0,3]$에서 $(f\circ g)(x)$ 최댓값을 a, 최솟값을 b라 할 때, $10a-b$의 값을 구하면?

① 15 ② 22 ③ 31
④ 43 ⑤ 52

4. 사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프가 그림과 같다. $f(0)<0,\ f(3)=0$ 일 때, 방정식 $f(x)+x=2$의 서로 다른 실근의 개수를 구하면?



① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

5. 수직선 위의 원점에서 동시에 출발하여 3초 동안 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(0 \le t \le 3)$에서의 위치가 각각 $2t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2$, $t^2 - t + 2$이다. 출발 후 두 점 P, Q사이의 거리가 가장 멀리 떨어져 있는 순간의 점 P의 속도를 구하면?

① 18　② 27　③ 45

④ 42　⑤ 51

6. 함수 $f(x) = \int (3x^2 - ax + 1)dx$에 대하여 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 5$일 때, $f(0)$의 값을 구하면?

① 1　② 0　③ $-\frac{1}{2}$

④ $-\frac{3}{2}$　⑤ $-\frac{5}{2}$

7. 함수 $f(x) = \frac{d}{dx}\int (x^4 - 2x^3)dx$

대하여 $\int_a^x f'(t)dt = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt$를 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합을 구하면?

① -5　② -2　③ 0

④ 2　⑤ 7

8. 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 1$
>
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x-1) - f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

$\int_0^1 f(x)dx$의 값을 구하면?

① $\frac{5}{4}$　② $\frac{3}{4}$　③ $\frac{1}{4}$

④ 0　⑤ 1

9. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $xf(x) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 + \int_{-3}^{x} f(t)dt$를 만족시킬 때, $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\int_2^{x+2} f(t)dt$의 값을 구하면?

① 10　② 8　③ 4

④ 3　⑤ 2

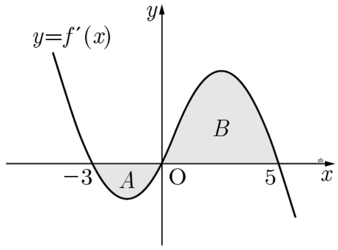
10. 함수 $f(x)=\begin{cases} 4 & (x<0) \\ x-1 & (x \geq 0) \end{cases}$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=\int_{-1}^{x} tf(t)dt$라 하자. 곡선 $y=g(x)+k$가 x축과 만나지 않도록 하는 정수 k의 최솟값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 3

11. 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점 대칭이다. $x=2$에서 극솟값 -16를 갖는다. $\int_{0}^{1} f(x)dx$의 값을 구하면?

① $-\frac{23}{4}$ ② $-\frac{13}{4}$ ③ 0
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

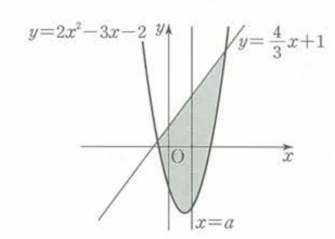
12. 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다.



이 곡선의 x축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이 A, B가 각각 2, 5이고 $f(-3)=7$일 때, $f(5)$의 값을 구하면?

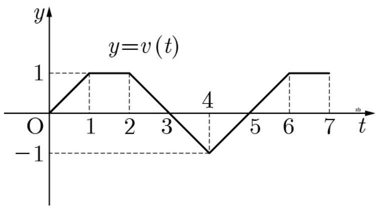
① 1 ② 3 ③ 5
④ 6 ⑤ 10

13. 다음 그림과 같이 곡선 $y=2x^2-3x-2$과 직선 $y=\frac{4}{3}x+1$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 직선 $x=a$가 이등분할 때, 실수 a의 값을 구하면?



① $\frac{13}{12}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

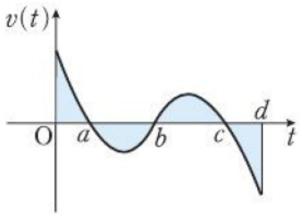
14. 그림은 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(0 \le t \le 7)$에서의 속도 $v(t)$를 나타낸 것이다.



출발 후 운동 방향을 처음으로 바꾸는 지점을 A라 할 때, 원점과 점 A사이의 거리를 구하면?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

15. 그림은 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$의 그래프이다. 어두운 네 부분의 넓이가 모두 같을 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?



| 보기 |

ㄱ. $t=0$에서 $t=c$까지 점 P는 움직이는 방향을 두 번 바꾼다.
ㄴ. $t=a$일 때와 $t=c$일 때의 점 P의 위치는 같다.
ㄷ. $t=0$에서 $t=c$까지 점 P의 위치의 변화량은 $3\int_0^a v(t)dt$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 수직선 위에서 좌표가 4인 점을 출발하여 움직이는 점 P의 시각 t일 때의 속도 $v(t)$는 $v(t)=-4t+2$일 때, 점 P의 운동방향이 바뀔 때, 점 P의 위치를 구하면?

① $\frac{9}{2}$ ② $\frac{13}{2}$ ③ $\frac{29}{3}$
④ 10 ⑤ $\frac{32}{3}$

[주관식]

17. 함수 $f(x)=-x^3+6x^2+15x-1$가 구간 $(-\infty, a)$에서 감소할 때, 실수 a의 최댓값을 구하시오.

18. 지면으로부터 높이가 $50\mathrm{m}$인 건물의 꼭대기에서 지면으로 수직으로 떨어지기 시작한 공의 t초 후의 높이를 $x\mathrm{m}$라고 하면 $x=-3t^2+50$이다. 건물의 꼭대기에서 떨어진 공이 지면에 닿을 때의 속도를 구하시오.

19. 함수 $f(x)$를 적분해야 할 것을 잘못하여 미분하였더니 $12x^2-6x+2$가 되었다. $f(0)=2$일 때, 부정적분 $\int f(x)dx$를 구하시오.

20. 다항함수 $f(x)$가 $f(x)=3x^2+\int_0^1 xf(t)dt$를 만족시킬 때, $f(x)$를 구하시오.

정답 및 풀이

1. 정답 ④

$x=3$일 때 $f(x)$가 극대이므로 $M=1$

$x=-2$, 5일 때 $f(x)$가 극소이므로 $m=2$

$\therefore 10M+m=12$

2. 정답 ②

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+10$에서

$f'(x)=x^2-2x-3=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=2$

$f(2)=\frac{8}{3}$

3. 정답 ②

$f(x)=x^3-3x^2+2$, $g(x)=x^2-2x$

$g(x)=(x-1)^2-1$

$-1\le g(x)\le 3$

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f(-1)=-1-3+2=-2$

$f(0)=2$

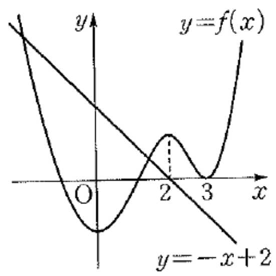
$f(2)=8-12+2=-2$

$f(3)=27-27+2=2$

최솟값 : -2

최댓값 : 2

4. 정답 ③



5. 정답 ③

$f(t)=\left|2t^3-\frac{3}{2}t^2+2-t^2+t-2\right|$

$\quad=\left|2t^3-\frac{5}{2}t^2+t\right|$

$g(t)=2t^3-\frac{5}{2}t^2+t$라 하면

$g'(t)=6t^2-5t+1=(3t-1)(2t-1)$

따라서 $f(t)$는 $t=\frac{1}{3}$에서 극댓값, $t=3$에서 최댓값을 가진다.

$v_p=6t^2-3t$

$v_p=54-9=45$

6. 정답 ③

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=5$에서 $f(1)=2$, $f'(1)=5$

$f'(x)=3x^2-ax+1$이므로

$f'(1)=3-a+1=5$, $a=-1$

$f(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C$

$f(1)=1+\frac{1}{2}+1+C=2$

$C=-\frac{1}{2}$

$f(0)=-\frac{1}{2}$

7. 정답 ④

$f(x)=\frac{d}{dx}\int(x^4-2x^3)dx=x^4-2x^3$

$\int_a^x f'(t)dt=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt$에서

$f(x)-f(a)=f(x)$

$f(a)=0$이므로

$a^3(a-2)=0$에서

$a=0$ 또는 $a=2$

8. 정답 ①

$f(x-1)-f(x)=3x^2+2x+1$의 양변을 적분하면

$F(x-1)-F(x)=x^3+x^2+x+C$에서

$F(1)-F(2)=14+C$

$F(0)-F(1)=3+C$

$F(-1)-F(0)=C$

$F(-2)-F(-1)=-1+C$이므로

$F(-2)-F(2)=16+4C$

$\int_{-2}^{2}f(x)dx=F(2)-F(-2)=1$이므로

$16+4C=-1$에서 $C=-\frac{17}{4}$

$\therefore F(0)-F(1)=3-\frac{17}{4}=-\frac{5}{4}$

$\therefore \int_0^1 f(x)dx=F(1)-F(0)=\frac{5}{4}$

9. 정답 ②

$xf(x)=\frac{2}{3}x^3+x^2+\int_{-3}^{x}f(t)dt$에서

$x=-3$을 대입하면 $-3f(-3)=-18+9$에서 $f(-3)=3$

양변을 미분하면

$f(x)+xf'(x)=2x^2+2x+f(x)$

$f'(x)=2x+2$

$f(x)=x^2+2x+C$

$f(-3)=3$에서 $C=0$

$f(x)=x^2+2x$

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{2}^{x+2}f(t)dt=f(2)=8$

10. 정답 ⑤

$x<0$일 때, $g(x)=\int_{-1}^{x}4tdt=2x^2-2$

$x\geq 0$일 때, $g(x)=\int_{-1}^{0}4tdt+\int_{1}^{x}t(t-1)dt=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2$

$x\geq 0$일 때, $g'(x)=x^2-x=x(x-1)$

$g(x)$의 최솟값은 $g(1)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-2=-\frac{13}{6}$

$g(-1)+k>0$이어야 하므로 $k>\frac{13}{6}$

정수 k의 최솟값은 3

11. 정답 ①

$f(x)=ax^3+bx$라 하면 $f'(x)=3ax^2+b$

$f'(2)=12a+b=0$, $f(2)=8a+2b=-16$에서

$a=1$, $b=-12$

$f(x)=x^3-12x$

$\int_{0}^{1}(x^3-12x)dx=-\frac{23}{4}$

12. 정답 ⑤

넓이A : $-(f(0)-f(-3))=2$에서 $f(-3)=7$이므로 $f(0)=5$

넓이B : $f(5)-f(0)=5$에서

$f(5)=10$

13. 정답 ①

$2x^2-3x-2=\frac{4}{3}x+1$

$2x^2-\frac{13}{3}x-3=0$

대칭축 $x=\frac{13}{12}$에서 넓이가 이등분 된다.

14. 정답 ④

$t=3$에서 운동방향이 처음으로 바뀐다.

$\int_{0}^{3}v(t)dt=2$

15. 정답 ③

ㄱ. $t=a$, $t=b$에서 움직이는 방향을 두 번 바꾼다.

ㄴ. $t=a$일 때와 $t=c$일 때의 점 P의 위치는 같다.

ㄷ. $t=0$에서 $t=c$까지 점 P의 위치의 변화량은 $\int_{0}^{a}v(t)dt$이다.

16. 정답 ①

$-4t+2=0$에서 $t=\frac{1}{2}$

$4+\int_{0}^{\frac{1}{2}}(-4t+2)dt=\frac{9}{2}$

17. 정답 -1

$f'(x)=-3x^2+12x+15<0$

$x<-1$ 또는 $x>5$

따라서 $a\leq -1$

18. 정답 $-10\sqrt{6}\,(m/s)$

$x=-3t^2+50=0$에서 $t=\frac{5\sqrt{6}}{3}$

$v=\frac{dx}{dt}=-6t$이므로

$t=\frac{5\sqrt{6}}{3}$일 때, $v=-10\sqrt{6}$

19. 정답 $x^4-x^3+x^2+2x+C$ (단, C는 상수)

$f'(x)=12x^2-6x+2$

$f(x)=4x^3-3x^2+2x+C_1$

$f(0)=2$이므로 $C_1=2$

$f(x)=4x^3-3x^2+2x+2$

$\int(4x^3-3x^2+2x+2)dx=x^4-x^3+x^2+2x+C$

20. 정답 $f(x)=3x^2+2x$

$f(x)=3x^2+x\int_{0}^{1}f(t)dt$

$\int_{0}^{1}f(t)dt=A$ (단, A는 상수)라 하면 $f(x)=3x^2+Ax$

$\int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1} (3x^2 + Ax)dx = \left[x^3 + \frac{1}{2}Ax^2\right]_0^1 = A$

$A = 2$

$f(x) = 3x^2 + 2x$