1. 수열의 극한

1. 수열의 극한(step1)

수열의 극한에 대한 기본성질

1. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(3a_n-1)=5$, $\lim_{n\to\infty}(2a_n+3b_n)=7$일 때, $\lim_{n\to\infty}(b_n+5)$의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ⑤ 7
④ 8 ⑤ 9

2. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(2a_n+3)=9$, $\lim_{n\to\infty}(3a_n-2b_n)=5$일 때, $\lim_{n\to\infty}(b_n-1)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

3. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}a_n=p$, $\lim_{n\to\infty}\{(-1)^n(2a_n+3)\}=q$일 때, $\lim_{n\to\infty}(8pa_n+q)$의 값은? (단, p와 q는 상수이다.) [3.5점]

① 18 ② 20 ⑤ 22
④ 24 ⑤ 26

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한

4. 다음 수열의 극한값은? [4.0점]

$$\frac{1}{4},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{6},\ \frac{4}{7},\ \cdots,\ \frac{n}{n+3},\ \cdots$$

① 0 ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

5. $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{n^2+2n-4}$의 값은? [3.7점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2-2n+1}{2n^2+3n-2}$ 의 값은? (2.5점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n}{n^2-3}$ 의 값은? [3.4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{(2n+1)(3n+2)}$ 의 값은? [3.5점]

① $\dfrac{1}{12}$ ② $\dfrac{1}{6}$ ③ $\dfrac{1}{3}$
④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 1

$\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한: 부등식

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}}<a_n<\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$$

을 만족시킬 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}{\sqrt{4n+1}}$ 의 값은? (2.7점)

① 1 ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{1}{3}$
④ $\dfrac{1}{4}$ ⑤ $\dfrac{1}{5}$

$\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한:미정계수

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(a+1)n^2+bn-1}{3n+1}=2$ 가 성립할 때, 상수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값은? [4.3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

$\infty-\infty$꼴의 극한

11. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n}-n)$의 값은? [3.8점]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

일반항을 포함한 식의 극한값

12. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}na_n=2$일 때, $\lim_{n\to\infty}(2n-2)a_n$의 값은? [4.7점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

등비수열의 극한

13. $\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}+4^{n+2}}{5^n+3^{n+2}}$ 의 값은? [4.0점]

① 0 ② $\frac{5}{9}$ ③ 1
④ 5 ⑤ 16

등비수열의 수렴조건

14. 등비수열 $\left\{\left(\frac{x+5}{3}\right)^n\right\}$이 수렴하도록 하는 정수 x의 개수는? [3.8점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

15. 다음 수열이 수렴하기 위한 모든 정수 x 의 합은? [3.8점]

$x-2,\ (x-2)(x+4),\ (x-2)(x+4)^2,\ \cdots,$
$(x-2)(x+4)^{n-1},\ \cdots$

① -11 ② -9 ③ -7
④ -5 ⑤ -3

16. 등비수열 $\{r^n\}$ 이 수렴할 때, <보기>의 수열 중 항상 수렴하는 것만을 있는 대로 고른 것은? [4.1점]

[보 기]

ㄱ. $\left\{\left(\frac{1}{r}\right)^n\right\}$ (단, $r\neq 0$)

ㄴ. $\left\{\left(\frac{r-1}{2}\right)^n\right\}$

ㄷ. $\left\{\left(r^2-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1. 수열의 극한(step2)

수열의 수렴과 발산

17. 수열에 대한 설명으로 옳은 것은? [4.4점]

① 수열 $\{\sin n\pi\}$는 발산한다.
② 수열 $\{\cos n\pi\}$는 수렴한다.
③ 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 수렴하면 $\{a_n b_n\}$도 수렴한다.
④ 양수와 음수가 교대로 반복되어 나타나면 항상 진동하는 수열이다.
⑤ 진동하는 수열의 각 항은 항상 일정한 값이 교대로 반복되어 나타난다.

18. 수렴하는 수열만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4.9점]

[보 기]

ㄱ. $\left\{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}$　　ㄴ. $\{\sin n\pi\}$
ㄷ. $\{(-2)^n\}$　　ㄹ. $\{1+(-1)^n\}$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄹ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄹ

$\frac{\infty}{\infty}$꼴의 극한

19. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=\sqrt{2}x+n$ 이 만나는 두 점을 각각 A_n, B_n이라 하자. 선분 A_nB_n의 길이를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{6n+1}}{a_n}$의 값은?

① $\frac{\sqrt{6}}{12}$　② $\frac{\sqrt{2}}{3}$　③ $\frac{\sqrt{6}}{4}$
④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$　⑤ $\sqrt{2}$

$\infty-\infty$꼴의 극한

20. 두 상수 a, b에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{9n^2+4n}-an)=b$일 때, $a+b$의 값은? [4.6점]

① $\frac{7}{3}$　② $\frac{8}{3}$　③ 3
④ $\frac{10}{3}$　⑤ $\frac{11}{3}$

21. 양수 a와 실수 b에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{an^2+n}-bn)=\frac{1}{4}$ 일 때, $a+b$의 값은? [4.5점]

① 4　② 6　③ 8
④ 10　⑤ 12

일반항을 포함한 식의 극한값

22. 수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} + 3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{2}+1\right) = 8$$

일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은? [4.4점]

① 2　② $\frac{5}{2}$　③ 3
④ $\frac{7}{2}$　⑤ 4

23. 수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\{(-1)^n(2a_n-k)\} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 3$$

일 때, 상수 k의 값은? [4.7점]

① 5　② 6　③ 7
④ 8　⑤ 9

24. 일반항이 $a_n = \frac{(-1)^n+3}{2}$, $b_n = p\times(-1)^{n+1}+q$인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\{a_n+b_n\}$, $\{a_nb_n\}$이 모두 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}\{(a_n)^2+(b_n)^2\}$의 값은? (단, p, q는 실수이다.) (3.5점)

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

25. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$\lim_{n\to\infty} a_n = p$, $\lim_{n\to\infty}\{(-1)^n(2a_n+3)\} = q$일 때, $\lim_{n\to\infty}(8pa_n+q)$의 값을 구하는 풀이과정과 답을 수열의 극한에 대한 기본 성질을 사용하여 자세히 논술하시오. (단, p, q는 상수이다.) (10.0점)

26. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 x에 대한 이차방정식 $x^2-2(5n+1)x+a_n=0$은 실근을 갖고 x에 대한 이차방정식 $x^2-10nx+a_n=0$은 허근을 갖는다. 수열 $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=3$ 일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n+5b_n}{a_n+b_n}$ 의 값은?
(단, $b_n\neq 0$, $a_n+b_n\neq 0$이다.) [4.8점]

① $\frac{13}{4}$　② $\frac{15}{4}$　③ $\frac{17}{4}$
④ $\frac{19}{4}$　⑤ $\frac{21}{4}$

27. 수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 이차방정식 $x^2-a_nx-1-a_{2n-1}=0$이 중근을 가질 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{2n}}$의 값은?
(단, $a_n\neq 0$) [4.6점]

① $-\frac{1}{2}$　② $-\frac{1}{3}$　③ $-\frac{1}{4}$
④ $-\frac{1}{5}$　⑤ $-\frac{1}{6}$

부등식으로 나타낸 수열의 극한값

28. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
> $3n^3+4n^2+2n+3 \le f(n) \le 3n^3+4n^2+2n+5$ 이다.
> (나) $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{9}{2}$

$f(1)$의 값은? [4.8점]

① 9 ② $\frac{19}{2}$ ③ $\frac{27}{2}$
④ 18 ⑤ $\frac{41}{2}$

29. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $2n^2+1 < na_n < 2n^2+3$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{n}$의 값은? [4.4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

30. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 곡선 $y=2x^2-(n+1)x+a_n$은 x축과 만나고, 곡선 $y=2x^2-nx+a_n$은 x축과 만나지 않는다.
$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2+n-1}$의 값은? [4.5점]

① $-\frac{3}{8}$ ② $-\frac{1}{8}$ ③ 0
④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{3}{8}$

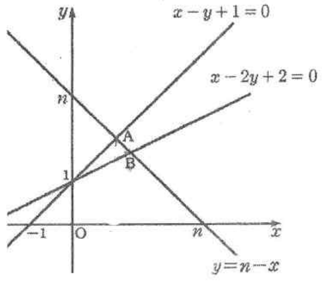
31. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$의 값은? [3.5점]

① $\frac{5}{6}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

32. $\lim_{n\to\infty}a_n=k$ (k는 자연수)인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $|(4n+2)a_n-12n|<a_n+n-1$을 만족시킬 때, k의 값은? [4.2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

33. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 직선 $y=n-x$가 두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+2=0$과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, $l_n=\overline{\mathrm{AB}}^2$이라 하자, 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $l_{2n}\le n^2a_n\le l_{2n+1}$을 만족시킬 때, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$의 값은?



① $\dfrac{1}{9}$ ② $\dfrac{1}{6}$ ③ $\dfrac{2}{9}$
④ $\dfrac{5}{18}$ ⑤ $\dfrac{1}{3}$

등비수열의 극한

34. $\lim\limits_{n\to\infty}(2+2^n+2^{-n})^{\frac{1}{n}}$ 의 값은? [5.5점]

① $\ln 2$ ② 1 ③ $\dfrac{e}{2\ln 2}$
④ 2 ⑤ $\dfrac{e^2}{2}$

35. 24^n의 양의 약수 중에서 짝수들의 총합을 a_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{24^n}$의 값은? [4.2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 6

36. 자연수 k에 대하여 $a_k=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{8}{k}\right)^n}{\left(\dfrac{8}{k}\right)^{n+1}+15}$ 일 때, $\sum\limits_{k=1}^{16}ka_k$의 값은? [4.6점]

① 18 ② 20 ③ 22
④ 24 ⑤ 26

등비수열의 수렴조건

37. 수열 $\left\{\left(\dfrac{x^2-4x-1}{4}\right)^n\right\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 값의 합은? [4.7점]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

38. 모든 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$이

$2^{2n}a_n = (-x^2+4x+1)^n$

을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 값을 구하고, 그 과정을 서술하시오.

x^n을 포함한 수열의 극한

39. 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+2}-5x^{2n+1}-1}{x^{2n}+1}$$

에 대하여 $f(k)=3$을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은? [5.0점]

① $\frac{3}{2}$　② 2　③ $\frac{5}{2}$
④ 3　⑤ $\frac{7}{2}$

태전고/20023년/P1/C

40. 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+3}{x^{2n}+1}$에 대하여

$f(-1)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)$의 값은? [5.0점]

① 2　② 4　③ 6
④ 8　⑤ 10

41. 실수 a에 대하여 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-3)x^{2n+1}+3x}{x^{2n}+1}$ 일 때, 다음 물음에 답하시오. [총 10점]

(1) $f(1)$을 구하시오. [1.0점]

(2) $f(-1)$을 구하시오. [1.0점]

(3) $|x|<1$일 때 $f(x)$를 구하시오. [1.0점]

(4) $|x|>1$일 때, $f(x)$를 구하시오. [2.0점]

(5) $(f\circ f)(1)=2$가 되도록 하는 모든 a의 값을 구하고, 그 과정을 서술하시오. [5.0점]

수열의 극한의 활용

42. $x > -2$에서 정의된 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{4x^{2n}-x^{2n-1}}{x^{2n}+2x^{2n-1}+3}$에 대하여 직선 $y=tx+2t+2$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 오직 한 점에서만 만나도록 하는 모든 양의 실수 t의 값의 곱이 a일 때, $2f(-1)+18a$의 값은? (단, a는 상수이다.) (3.7점)

① 16 ② 14 ③ 10
④ 8 ⑤ 6

43. 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 정의된 함수 $f(x)=\sin\pi x$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{|nf(a)-2|-nf(a)}{n+1}=1$을 만족하는 모든 a의 값의 합은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

44. $x\ge 1$에서 정의된 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{4x^{2n}-x^{2n-1}}{x^{2n}+2x^{2n-1}+6}$에 대하여 직선 $y=tx+2t+2$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 오직 한 점에서 만나도록 하는 실수 t의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은? [5.7점]

① $-\frac{4}{9}$ ② $-\frac{1}{9}$ ③ $\frac{2}{9}$
④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{8}{9}$

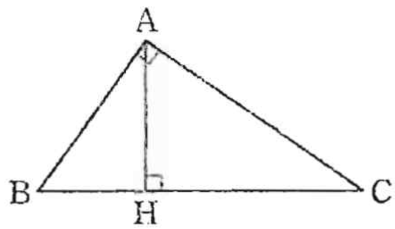
45. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{a+x}-2\sqrt{a} & (x\ge 0)\\ \sqrt{a-x}-2\sqrt{a} & (x<0)\end{cases}$$

라 하자. 자연수 n에 대하여 직선 $y=n$과 곡선 $y=|f(x)|$가 적어도 3개의 점에서 만나도록 하는 양의 실수 a의 최솟값을 a_n이라 할 때, $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{3n^3}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ 3
④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

46. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 $\overline{AB}=\sqrt{n+2}$, $\overline{AC}=\sqrt{3n+4}$, $\angle A=90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC가 있다. 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{AH}=a_n$이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=p$일 때, p^2의 값은? (단, p는 실수이다.) [4점]



① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{5}{6}$
④ $\frac{6}{7}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

47. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(k+1)!} = \frac{3}{(n+3)!}$ 을 만족시킨다. $\lim_{n\to\infty}(a_1 - na_n)$의 값은? [4.1점]

① $\frac{9}{4}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{11}{4}$
④ 3 ⑤ $\frac{13}{4}$

48. 자연수 n 에 대하여 원 $x^2+y^2=4n^2$ 과 직선 $y=x+1$ 이 만나는 두 점을 각각 P_n, Q_n 라 하자. 삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$ 의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$ 의 값은? (단, O 는 원점이다.) [4.2점]

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

49. 함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

> (가) $-1 < x \le 1$일 때, $f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{5x^{2n}+|x|}{x^{2n}+1}$
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) = f(x+2)$이다.

원 $x^2+y^2=a\ (a>0)$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 500이하의 a의 값의 합은? [5.3점]

① 1820 ② 1840 ③ 1860
④ 1880 ⑤ 1900

1. 수열의 극한(step3)

50. $x > -2$에서 정의된 함수 $f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{4x^{2n}-x^{2n-1}}{x^{2n}+2x^{2n-1}+3}$ 에 대하여 직선 $y=tx+2t+2$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 서로 다른 교점의 개수를 함수 $g(t)$라 하자. 실수 t에 대하여 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속일 때, 서로 다른 a의 개수는? [4.5점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

51. $x>-2$에서 정의된 함수

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{4x^{2n}-x^{2n-1}}{x^{2n}+2x^{2n-1}+3}$$

에 대하여 직선 $y=tx+2t$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 오직 한 점에서만 만나도록 하는 모든 양의 실수 t의 값을 구하고 그 과정을 논술하시오. [6.0점]

52. 두 양수 a, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{a+x(bx)^{2n+1}}{1+(bx)^{2n}},\quad g(x)=6-x^2$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 교점의 개수는 m이다.
> (단, m은 홀수인 자연수이다.)

m이 최대일 때, $12(a+b)$의 값은? [5.5점]

① 76 ② 78 ③ 80
④ 82 ⑤ 84

53. 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-3)x^{2n+1}+4x}{4x^{2n}+1}$ 라 하자. $(f\circ f)(-1)=-\frac{3}{5}$이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은? [4.8점]

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ $\frac{11}{4}$
④ $\frac{15}{4}$ ⑤ $\frac{19}{4}$

54. 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-1)x^{2n+1}+x}{15x^{2n}+1}$ 라 하자. $f\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{1}{2}$가 되도록 하는 모든 a의 값의 합은? [4.4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

55. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0\le x<2$일 때, $f(x)=x-2$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x-2)=-f(x)$이다.

자연수 n에 대하여 직선 $y=\frac{1}{2n}x-1$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 서로 다른 교점의 개수를 a_n이라 하자.

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{6n+1}$의 값은? [5점]

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

56. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 곡선 $y=(x-2n)^2$이 x축,
y축과 만나는 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. 두 점 P_n, Q_n을 지나는 직선과 곡선 $y=(x-2n)^2$으로 둘러싸인 영역(경계선 포함)에 속하고 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 개수를 a_n이라 할 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n}{4n^3}$의 값은? (4.1점)

① 5 ② 4 ③ 3
④ 2 ⑤ 1

57. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x\ge 0$일 때, $f(x)=\left\|2\sin\frac{\pi}{2}x\right\|$ 이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $-f(-x)=f(x)$이다.

자연수 n에 대하여 직선 $y=\frac{1}{2n}x-1$이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 서로 다른 점의 개수를 a_n이라 하자.

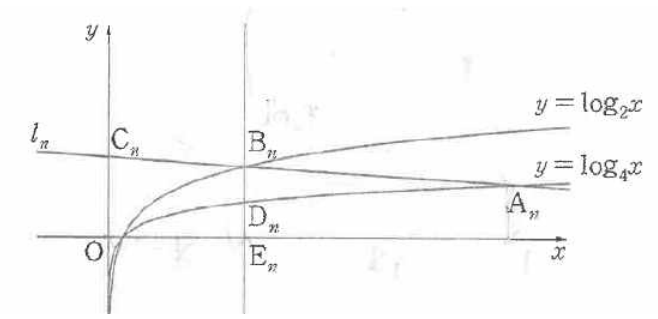
$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{pn^2+n}-a_n)=q$일 때, 두 상수 p, q에 대하여 pq의 값은? [5.2점]

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$
④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

58. 자연수 n에 대하여 두 곡선 $y=\log_4 x$, $y=\log_2 x$와 직선 l_n이 만나는 점을 각각 A_n, B_n이라 하자. l_n이 y축과 만나는 점을 C_n이라 하고, 점 B_n을 지나고 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=\log_4 x$와 만나는 점을 D_n, x축과 만나는 점을 E_n이라 할 때, 점 A_n, B_n, C_n, D_n이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=n\times\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}$
(나) $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n}$

삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n D_n$의 넓이를 a_n, 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{OE}_n$의 넓이를 b_n이라 할 때, $a_3+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6a_n}{nb_n}$의 값은? (단, 점 A_n의 x좌표는 1보다 크고, O는 원점이다.) [5.7점]



① 48 ② 49 ③ 50
④ 51 ⑤ 52

59. 2 이상의 자연수 n과 두 정수 a, b에 대하여 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{B}(0,\ 3)$, $\mathrm{C}(0,\ 3^n)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. $\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{2}$, $|ab|\le 3^{n+1}$을 만족시키는 모든 삼각형 ABC의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2S_n}{27^{n-1}}$의 값은? [5.3점]

① 9 ② $\dfrac{27}{2}$ ③ 27
④ 54 ⑤ 81

60. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 일반항이

$a_n=(-1)^{n+1}$, $b_n=p\times(-1)^{3n+1}+q\times(-1)^n+r$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, p, q는 실수이다.) [4.5점]

[보 기]
ㄱ. 수열 $\{a_n\}$은 발산한다.
ㄴ. 수열 $\{b_n\}$이 수렴하도록 하는 실수 p가 존재한다.
ㄷ. 두 수열 $\{a_n+b_n\}$, $\{a_nb_n\}$이 모두 수렴하면 $\lim\limits_{n\to\infty}\{(a_n)^2+(b_n)^2\}=2$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

61. 함수 $f(x)$를 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{px^{2n}+qx^{2n-1}+2x}{x^{2n}+4}$ 라 하자. 자연수 m에 대하여 방정식 $f(x)=2(x-1)+m$의 실근의 개수가 5개일 때, $m+p-q$의 값은? (단, p, q는 양의 실수이다.) [5.4점]

① 0 ② $\dfrac{3}{2}$ ③ 2
④ $\dfrac{9}{4}$ ⑤ 5

2. 급수(step1)

급수의 합

62. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)=7$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2b_n)=-4$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$의 값은? [4.8점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

급수와 수열의 극한값 사이의 관계

63. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-4n-1}{2n+1}=4$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{2na_n}{5n^2+3}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값은? (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3.5점]

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

64. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2)=3$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n-2}{6a_n-3}$의 값은? [3.7점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

65. 수열 $\{a_n\}$에 대형 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+1)=2$일 때, $\lim_{n\to\infty}(3a_n+2)$의 값은? [3.9점]

① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

등비급수의 합

66. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+6^{n-1}}{12^n}$의 값은? [3점]

① $\frac{6}{7}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{4}{5}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

67. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}-1}{4^n}$의 값은? [3.4점]

① $\frac{26}{3}$ ② 9 ③ $\frac{29}{3}$
④ $\frac{29}{3}$ ⑤ 10

68. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-3)^n}{4^n}$ 의 값은?

① $-\frac{2}{7}$ ② $-\frac{5}{21}$ ③ $-\frac{4}{21}$
④ $-\frac{1}{7}$ ⑤ $-\frac{2}{21}$

등비급수의 수렴조건

69. 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2x-3}{9}\right)^n$ 이 수렴하도록 하는 정수 x 의 개수는? [4.3점]

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

70. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(x+4)\left(\frac{2x-1}{5}\right)^n$ 이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 값의 합은? [4.0점]

① -6 ② -4 ③ -2
④ 0 ⑤ 2

71. 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ 이 수렴할 때, 항상 수렴하는 급수인 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, r은 실수이다.) [4.6점]

[보 기]

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}$

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r-1}{2}\right)^n$

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\log_2|r-2|}{2}\right)^n$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2. 급수(step2)

급수의 합

72. 모든 항이 양수인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$3a_1 = a_5 - a_2$ 이고 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 일 때, 다음 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3.7점]

[보 기]

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} \frac{1+a_1 n}{a_n} = 1$

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{S_n} = 2$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

73. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - b_n + 3) = 6,$$

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 2b_n - 1) = 3$

일 때, $\lim_{n\to\infty} \left\{ a_n - 3b_n + \sum_{k=1}^{n} (a_k + 1) \right\}$ 의 값은? [4.8점]

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

급수의 합(부분분수, 로그)

74. 직선 $x - 5y + 10 = 0$ 위의 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 좌표를 각각 $(a_1,\ b_1)$, $(a_2,\ b_2)$, $(a_3,\ b_3)$, $\cdots$, $(a_n,\ b_n)$, $\cdots$ 이라 할 때,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n b_n} = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$의 값은?

(단, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < \cdots$ 이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4.6점]

① 21 ② 22 ③ 23
④ 24 ⑤ 25

75. 자연수 n에 대하여 곡선 $y = x^2 - 3nx - 9$가 직선 $y = nx - 4n^2$과 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표를 각각 α_n, β_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n \beta_n}$ 의 값은? [5.0점]

① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{15}$ ③ $\frac{1}{12}$
④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

76. 첫째항이 2이고, 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{S_n} + \frac{1}{S_{n+1}} \right)$의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

위례고/20023년/P2/C

77. 자연수 n에 대하여 $2^n \times 3^{n+2}$의 모든 양의 약수의 개수를 a_n라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{a_n}$의 값은? [4.5점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

78. 자연수 n에 대하여 두 함수 $y=\frac{|x|}{n}$ 와 $y=|\sin \pi x|$ 의 그래프의 교점의 개수를 a_n 이라고 하자. 물음에 답하시오. [총 7.0점]

(1) $-3 \le x \le 3$ 범위에서 $y=|x|$, $y=\frac{|x|}{2}$, $y=\frac{|x|}{3}$, $y=|\sin \pi x|$ 의 그래프를 하나의 좌표평면에 그리시오. [2.5점]

(2) a_1, a_2, a_3 의 값을 구하고 추론하여 a_n 의 값을 구하시오. [2.5점]

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ 의 값을 구하고, 그 과정을 논술하시오. [2.0점]

급수와 수열의 극한값 사이의 관계

79. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{2n+3}{n+1}\right)=1$ 일 때, $\sum_{n=1}^{15} a_n$ 의 값은? [4.9점]

① 240 ② 245 ③ 250
④ 255 ⑤ 260

급수의 수렴과 발산

80. 발산하는 급수만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4.5점]

[보 기]

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{3n+1}$

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-3}}{3^n}$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

81. 수렴하는 급수만 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [5.1점]

[보 기]

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ㄴ. $-1+1-1+1-1+\cdots$

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{3^n}$ ㄹ. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄷ, ㄹ

급수의 성질

82. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4.9점]

[보 기]

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 발산하면 $\lim_{n\to\infty}a_n \neq 0$이다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}a_nb_n \neq 0$이면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 모두 발산한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}b_n = l$ (단, $l \neq 0$)이면 $\lim_{n\to\infty}a_n = 0$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

83. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4.7점]

[보 기]

ㄱ. 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 수렴할 때 $a_n < b_n$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n < \lim_{n\to\infty}b_n$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=1$이고 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=1$이면 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이다.

ㄷ. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$와 수열 $\lim_{n\to\infty}a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

84. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. 두 수열 $\{|a_n+b_n|\}$, $\{|a_n-b_n|\}$이 모두 수렴하면 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$도 모두 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)$과 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2b_n)$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴한다.

ㄷ. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{1}{2}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

85. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[보기]

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\lim_{n\to\infty} b_n$이 모두 수렴하면, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$이다.

ㄴ. 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$과 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$이 모두 수렴하면, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$도 모두 수렴한다.

ㄷ. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n > b_n$이고, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$이면, $\alpha > \beta$이다.(단, α, β는 상수)

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ,ㄴ
④ ㄱ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

86. 다음은 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대한 명제이다. 옳은 명제의 개수는? (단, $a_n b_n \neq 0$이고, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$이다.) [4.5점]

(가) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$도 수렴한다.

(나) 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$이 수렴한다.

(다) 수열 $\{a_n\}$이 양의 무한대로 발산하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$은 수렴한다.

(라) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 각각 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \times \sum_{n=1}^{\infty} b_n$이다.

(마) 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$이 수렴하면 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 중에서 적어도 하나는 수렴한다.

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

87. 급수의 수렴과 발산에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4.2점]

[보 기]

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 이 수렴하면, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 또는 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$이 수렴하면, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하고 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 발산하면, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$은 발산한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

88. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4.9점]

[보 기]

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$이고, $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 3$이면,

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$이다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 1$이고 수열 $\{a_n\}$이 수렴하면, 수열 $\{b_n\}$은 수렴한다.

ㄷ. 수열 $\{a_n\}$이 수렴하고, 수열 $\{a_n - b_n\}$이 수렴하면,
수열 $\{b_n\}$은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

등비급수의 합

89. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\frac{n}{2}\pi$ 의 값은? [4.3점]

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{5}$ ③ 0
④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

90. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 6$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = 4$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$의 값은? [4.4점]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

91. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2 + p$이고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = q$이다. pq의 값은? (단, p와 q는 상수이다.) (2.9점)

① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

92. 등비수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\frac{2^{n+2}-1}{2^n+1}<\sum_{k=1}^{n}a_k<\frac{2^{n+2}+1}{2^n-1}$$

을 만족시키고 $2a_1=3a_2$이다. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2$의 값은? [4.9점]

① $\frac{16}{5}$ ② $\frac{17}{5}$ ③ $\frac{18}{5}$
④ $\frac{19}{5}$ ⑤ 4

등비급수의 수렴조건

93. 첫째항이 1인 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 모두 수렴하고 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\frac{10}{3}$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\frac{8}{7}$일 때, $a_2^2+{b_2}^2$의 값은? (3.1점)

① $\frac{5}{16}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{16}$
④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{16}$

S_n과 a_n의 관계를 이용한 급수

94. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때,

$$S_n=\frac{kn}{3n+2},\ \lim_{n\to\infty}n^2a_n=2$$

이다. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은? (단, k는 상수이다.) [4.9점]

① $\frac{8}{3}$ ② 3 ③ $\frac{10}{3}$
④ $\frac{11}{3}$ ⑤ 4

95. $a_5=\frac{1}{99}$인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이라 할 때, $S_n=\frac{kn+3}{2n+1}$이다. $\lim_{n\to\infty}n^2a_n+\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은? (단, k는 상수이다.) [4점]

① $\frac{13}{4}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ $\frac{17}{4}$
④ $\frac{19}{4}$ ⑤ $\frac{21}{4}$

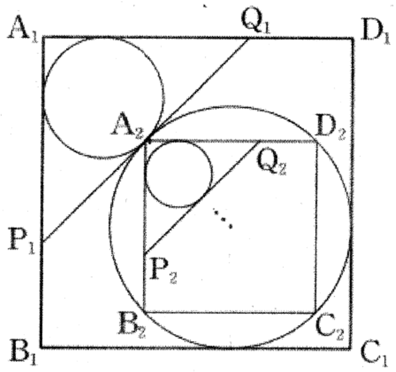
96. $a_4=\frac{3}{10}$인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_n=\frac{kn+1}{n+2}$이다. $\lim_{n\to\infty}n^2a_n+\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은? (단, k는 상수이다.) [4.7점]

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

등비급수의 활용

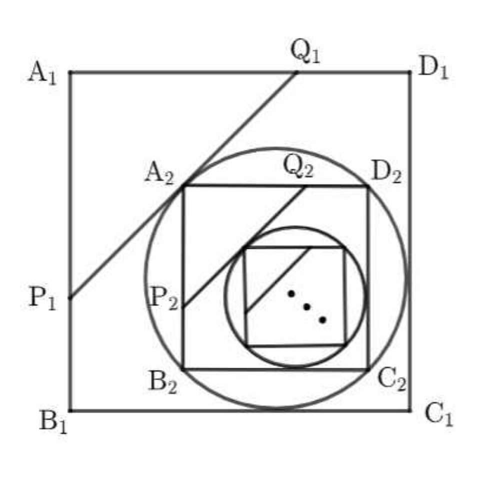
97. 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$에 대하여 선분 A_1B_1을 $2:1$로 내분하는 점을 P_1, 선분 A_1D_1을 $2:1$로 내분하는 점을 Q_1이라 하고, 삼각형 $A_1P_1Q_1$의 내접원의 둘레의 길이를 l_1이라 하자. 세 선분 P_1Q_1, B_1C_1, C_1D_1에 모두 접하는 원에 내접하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 대하여 선분 A_2B_2를 $2:1$로 내분하는 점을 P_2, 선분 A_2D_2를 $2:1$로 내분하는 점을 Q_2라 하고, 삼각형 $A_2P_2Q_2$의 내접원의 둘레의 길이를 l_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 삼각형 $A_nP_nQ_n$의 내접원의 둘레의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{(a+b\sqrt{2})\pi}{17}$ 이다. $a+b$의 값은?

(단, 자연수 n에 대하여 점 A_{n+1}은 선분 P_nQ_n 위에 있고, a, b는 상수이다.) (3.8점)



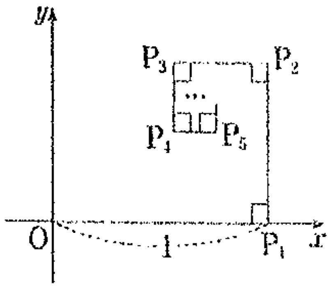
① 40　② 41　③ 42　④ 43　⑤ 44

98. 그림과 같이 한 변의 길이가 $3\sqrt{2}$ 인 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$에 대하여 선분 $\mathrm{A_1B_1}$을 $2:1$로 내분하는 점을 $\mathrm{P_1}$, 선분 $\mathrm{A_1D_1}$을 $2:1$로 내분하는 점을 $\mathrm{Q_1}$이라 하고, 직각삼각형 $\mathrm{A_1P_1Q_1}$의 빗변인 선분 $\mathrm{P_1Q_1}$의 길이를 l_1이라 하자. 세 선분 $\mathrm{P_1Q_1}$, $\mathrm{B_1C_1}$, $\mathrm{C_1D_1}$에 모두 접하는 원에 내접하는 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$에 대하여 선분 $\mathrm{A_2B_2}$를 $2:1$로 내분하는 점을 $\mathrm{P_2}$, 선분 $\mathrm{A_2D_2}$를 $2:1$로 내분하는 점을 $\mathrm{Q_2}$라 하고, 직각삼각형 $\mathrm{A_2P_2Q_2}$의 빗변인 선분 $\mathrm{P_2Q_2}$의 길이를 l_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 직각삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 빗변인 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은? (단, 자연수 n에 대하여 점 A_{n+1}은 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ 위에 있다.) [5.0점]



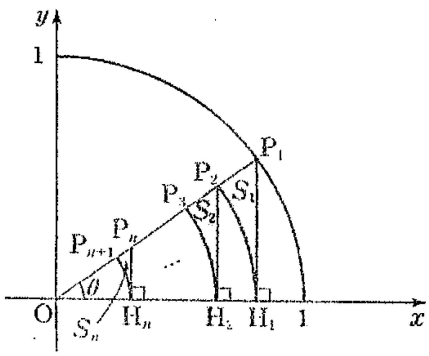
① $\frac{12(7-4\sqrt{2})}{17}$　② $\frac{12(7+4\sqrt{2})}{17}$　③ $\frac{14(7-4\sqrt{2})}{17}$　④ $\frac{14(7+4\sqrt{2})}{17}$　⑤ $\frac{14(9-4\sqrt{2})}{17}$

99. 그림과 같이 좌표평면 위에 점 P가 원점 O를 출발하여 $P_1, P_2, P_3 \cdots$ 으로 움직인다. $\overline{OP_1}=1$, $\overline{P_1P_2}=\frac{3}{4}\overline{OP_1}$, $\overline{P_2P_3}=\frac{3}{4}\overline{P_1P_2}$ $\cdots$ 일 때, 점 P_n이 한없이 가까워지는 점의 좌표는 $(a,\ b)$이다. 상수 $a,\ b$에 대하여 $a-b$의 값은? [4.6점]



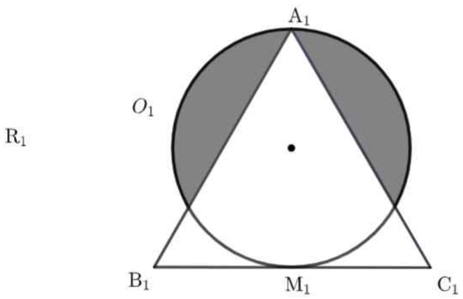
① $\frac{3}{25}$ ② $\frac{4}{25}$ ③ $\frac{1}{5}$
④ $\frac{6}{25}$ ⑤ $\frac{7}{25}$

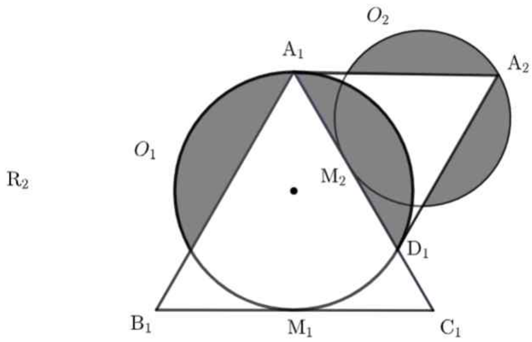
100. 그림과 같이 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 사분원 위의 점 P_1이 있다. 선분 OP_1이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하자. 점 P_1에서 x축에 내린 수선의 발을 H_1라 하고, 원점 O를 중심으로 하고 점 H_1을 지나는 원이 선분 OP_1과 만나는 점을 P_2, 점 P_2에서 x축에 내린 수선의 발을 H_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 점 P_n에서 x축에 내린 수선의 발을 H_n이라 하고, 원점 O를 중심으로 하고 점 H_n을 지나는 원이 선분 OP_1과 만나는 점을 P_{n+1}라 하자. 삼각형 OH_nP_n의 넓이와 부채꼴 OH_nP_{n+1}의 넓이의 차를 S_n이라고 할 때, $f(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}S_n$라 하자. 이때, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값은? [5.2점]



① $\frac{\pi-1}{2}$ ② $\frac{\pi+1}{2}$ ③ $\frac{\pi-2}{2}$
④ $\frac{\pi-3}{2}$ ⑤ $\frac{\pi+3}{2}$

101. 그림과 같이 한 변의 길이가 20인 정삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$에 대하여 선분 $\mathrm{B_1C_1}$의 중점을 $\mathrm{M_1}$이라 하자. 선분 $\mathrm{A_1M_1}$을 지름으로 하는 원 O_1을 그리고 원 O_1의 내부와 삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 $\mathrm{R_1}$이라 하자. 그림 $\mathrm{R_1}$에 원 O_1과 선분 $\mathrm{A_1C_1}$의 교점 중에서 점 $\mathrm{A_1}$이 아닌 점을 $\mathrm{D_1}$이라 할 때, 선분 $\mathrm{A_1D_1}$을 한 변으로 하는 정삼각형 $\mathrm{A_2A_1D_1}$을 삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$의 내부와 겹치지 않게 그리고, 선분 $\mathrm{A_1D_1}$의 중점을 $\mathrm{M_2}$라 하자. 선분 $\mathrm{A_2M_2}$를 지름으로 하는 원 O_2를 그리고 원 O_2의 내부와 삼각형 $\mathrm{A_2A_1D_1}$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 $\mathrm{R_2}$라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 T_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} T_n$의 값은? [5.3점]



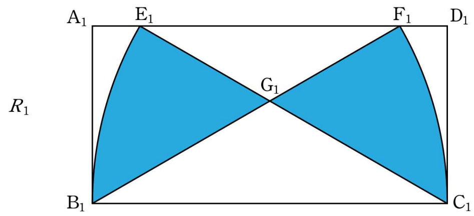


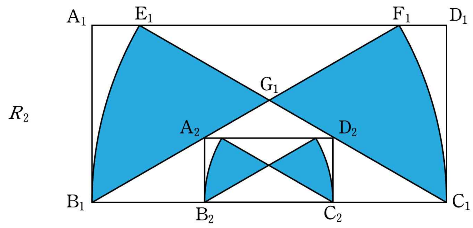
① $\frac{75}{8}(4\pi-3\sqrt{3})$ ② $\frac{25}{2}(4\pi-3\sqrt{3})$

③ $\frac{200}{7}(4\pi-3\sqrt{3})$ ④ $\frac{625}{18}(4\pi-3\sqrt{3})$

⑤ $\frac{140}{3}(4\pi-3\sqrt{3})$

102. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{A_1B_1}}=2$, $\overline{\mathrm{A_1D_1}}=4$인 직사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$이 있다. 선분 $\mathrm{A_1D_1}$ 위의 $\overline{\mathrm{B_1C_1}}=\overline{\mathrm{B_1E_1}}$, $\overline{\mathrm{C_1B_1}}=\overline{\mathrm{C_1F_1}}$인 두 점 $\mathrm{E_1, F_1}$에 대하여 중심이 $\mathrm{B_1}$인 부채꼴 $\mathrm{B_1E_1C_1}$과 중심이 $\mathrm{C_1}$인 부채꼴 $\mathrm{C_1F_1B_1}$을 각각 직사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$ 내부에 그리고, 선분 $\mathrm{B_1E_1}$과 $\mathrm{C_1F_1}$의 교점을 $\mathrm{G_1}$이라 하자. 두 선분 $\mathrm{G_1F_1}$, $\mathrm{G_1B_1}$과 호 $\mathrm{F_1B_1}$로 둘러싸인 부분과 두 선분 $\mathrm{G_1E_1}$, $\mathrm{G_1C_1}$과 호 $\mathrm{E_1C_1}$로 둘러싸인 부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 선분 $\mathrm{B_1G_1}$ 위의 점 $\mathrm{A_2}$, 선분 $\mathrm{C_1G_1}$ 위의 점 $\mathrm{D_2}$, 선분 $\mathrm{B_1C_1}$ 위의 두 점 $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{C_2}$를 꼭짓점으로 하고 $\overline{\mathrm{A_2B_2}}:\overline{\mathrm{A_2D_2}}=1:2$인 직사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$를 그리고, 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$ 내부에 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값은? [5점]

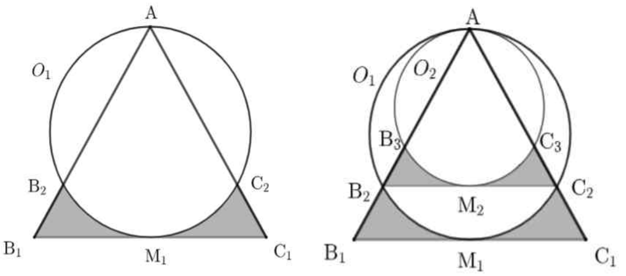




① $\frac{8\sqrt{3}\pi-40}{9}$ ② $\frac{10\sqrt{3}\pi-42}{9}$ ③ $\frac{12\sqrt{3}\pi-44}{9}$

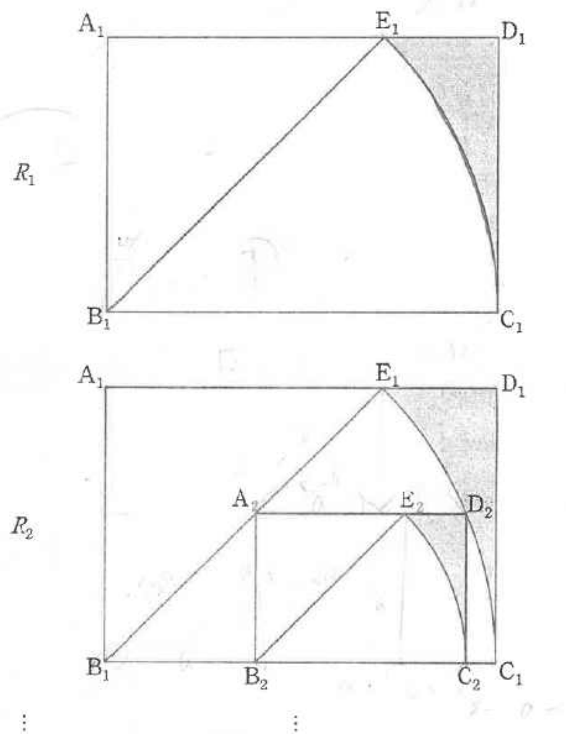
④ $\frac{14\sqrt{3}\pi-46}{9}$ ⑤ $\frac{16\sqrt{3}\pi-48}{9}$

103. 그림과 같이 한 변의 길이가 20인 정삼각형 $\mathrm{AB_1C_1}$에 대하여 선분 $\mathrm{B_1C_1}$의 중점을 $\mathrm{M_1}$이라 하자. 선분 $\overline{\mathrm{AM_1}}$을 지름으로 하고 $\overline{\mathrm{B_1C_1}}$과 점 $\mathrm{M_1}$에서 접하는 원 O_1을 그리고 원 O_1이 삼각형의 두 변 $\overline{\mathrm{AB_1}}$, $\overline{\mathrm{AC_1}}$과 만나는 점을 각각 $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{C_2}$라 할 때, 원 O_1의 외부와 삼각형 $\mathrm{AB_1C_1}$ 내부의 공통부분  모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 $\overline{\mathrm{B_2C_2}}$의 중점을 $\mathrm{M_2}$라 하자. $\overline{\mathrm{AM_2}}$를 지름으로 하고 $\overline{\mathrm{B_2C_2}}$와 점 $\mathrm{M_2}$에서 접하는 원 O_2와 정삼각형 $\mathrm{AB_2C_2}$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 원 O_2의 외부와 삼각형 $\mathrm{AB_2C_2}$ 내부의 공통부분  모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = p\sqrt{3}+q\pi$이다. $p+q$의 값을 구하고 그 과정을 논술하시오. (단, p, q는 유리수이다.) [5.0점]



104. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{A_1B_1}}=\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{B_1C_1}}=2$인 직사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$의 내부에 점 $\mathrm{B_1}$을 중심으로 하고 선분 $\mathrm{B_1C_1}$을 반지름으로 하는 원과 선분 $\mathrm{A_1D_1}$의 교점을 $\mathrm{E_1}$이라 하자. 두 선분 $\mathrm{E_1D_1}$, $\mathrm{D_1C_1}$과 호 $\mathrm{C_1E_1}$로 둘러싸인 도형의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

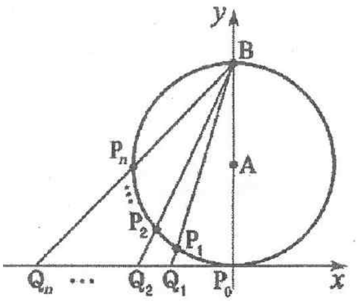
그림 R_1에서 사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$가 $\overline{\mathrm{A_2B_2}}:\overline{\mathrm{A_2D_2}}=1:\sqrt{2}$인 직사각형이 되도록 선분 $\mathrm{B_1E_1}$위의 점 $\mathrm{A_2}$, 호 $\mathrm{C_1E_1}$위의 점 $\mathrm{D_2}$, 선분 $\mathrm{B_1C_1}$ 위의 두 점 $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{C_2}$를 잡는다. 점 $\mathrm{B_2}$를 중심으로 하고 선분 $\overline{\mathrm{B_2C_2}}$를 반지름으로 하는 원과 선분 $\mathrm{A_2D_2}$의 교점을 $\mathrm{E_2}$이라 하자. 두 선분 $\mathrm{B_2D_2}$, $\mathrm{D_2C_2}$와 호 $\mathrm{C_2E_2}$로 둘러싸인 도형의 내부에 색칠하여 얻은 그림 R_2이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값은? [5.7점]



① $2-\sqrt{2}-\dfrac{\pi}{8}$ ② $4-\sqrt{2}-\dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$ ③ $4-2\sqrt{2}-\dfrac{\pi}{4}$

④ $4-\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{16}$ ⑤ $4-2\sqrt{2}-\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$

105. 그림과 같이 중심이 $A(0,\ 1)$이고 반지름의 길이가 1인 원에 대하여 원 위의 점 $B(0,\ 2)$와 점 P_n을 이은 직선이 x축과 만나는 점을 Q_n이라 하자, 이때 점 P_n은 다음 규칙을 만족한다,

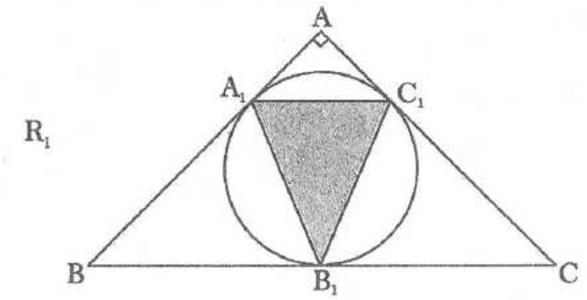


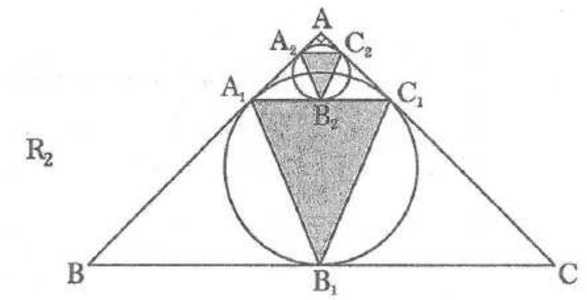
> (가) 점 P_0는 원점이고, 점 P_n은 제 2사분면의 점이다.
> (나) 호 $P_{n-1}P_n$의 길이를 l_n이라 할 때, $l_{n+1}=rl_n$이다. (단, r은 상수)

$\angle P_0Q_2B=\dfrac{3\pi}{8}$이고, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\dfrac{9\pi}{32}$일 때, $24l_5$의 값은?

① $\dfrac{\pi}{36}$ ② $\dfrac{\pi}{18}$ ③ $\dfrac{\pi}{12}$
④ $\dfrac{\pi}{9}$ ⑤ $\dfrac{5\pi}{36}$

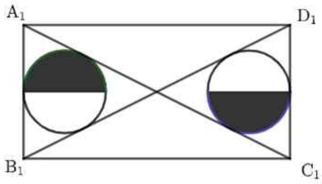
106. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}=4$이고 $\angle BAC=90^\circ$인 삼각형 ABC가 있다. 세 변 AB, BC, CA와 삼각형 ABC의 내접원의 접점을 각각 A_1, B_1, C_1이라 하고, 삼각형$A_1B_1C_1$의 내분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
또 세 변 AA_1, A_1C_1, C_1A와 삼각형 AA_1C_1의 의 내접원의 접점을 각각 A_2, B_2, C_2이라 하고, 삼각형 $A_2B_2C_2$의 내분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n=p+q\sqrt{2}$를 만족하는 두 유리수 p, q에 대하여 $7(p-q)$의 값은?



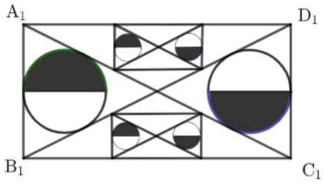


① 16 ② 20 ③ 24
④ 28 ⑤ 32

107. 그림과 같이 $\overline{A_1D_1}=4$, $\overline{A_1B1}=2$ 인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 두 대각선 A_1C_1, B_1D_1의 교점을 E_1이라 할 때, 두 삼각형 $A_1B_1E_1$, $C_1D_1E_1$에 내접하는 원을 그리고 이 두 원의 내부 중 반원 부분만 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 두 삼각형 $E_1B_1C_1$, $E_1D_1A_1$의 변 위에 네 꼭짓점이 있고 가로 세로의 길이의 비가 $2:1$인 직사각형을 각각 그린다. 두 직사각형에 각각 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 두 원을 그리고 각각의 두 원의 내부 중 반원 부분만 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 그림 R_n에 색칠되어 있는 모든 색칠된 반원의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4.7점]



R_1

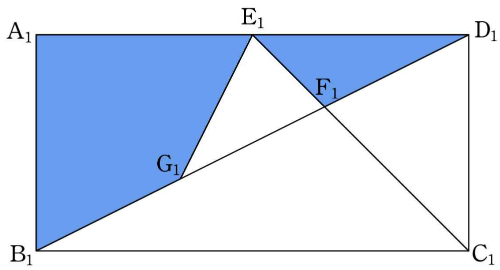


R_2

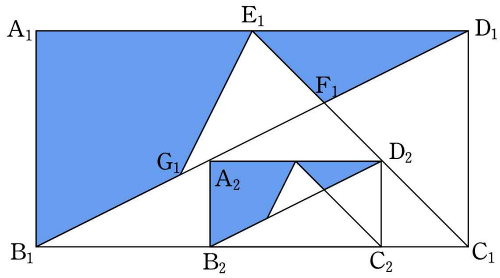
① $\dfrac{3(3-\sqrt{5})}{7}\pi$ ② $\dfrac{(3-\sqrt{5})}{2}\pi$
③ $\dfrac{4(3-\sqrt{5})}{7}\pi$ ④ $\dfrac{9(3-\sqrt{5})}{14}\pi$
⑤ $\dfrac{5(3-\sqrt{5})}{7}\pi$

108. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=2$ 인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 이 있다. 선분 A_1D_1 의 중점 E_1 에 대하여 두 선분 B_1D_1, C_1E_1 이 만나는 점을 F_1 이라 하자. $\overline{G_1E_1}=\overline{G_1F_1}$ 이 되도록 B_1D_1 위에 점 G_1 을 잡아 사각형 $A_1B_1G_1E_1$ 을 그린다. 사각형 $A_1B_1G_1E_1$ 과 삼각형 $E_1F_1D_1$ 으로 만들어진  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 그림 R_1 에서 선분 B_1F_1 위의 점 A_2, 선분 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2, 선분 C_1F_1 위의 점 D_2 를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}:\overline{B_2C_2}=1:2$ 인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 를 그린다.
직사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 에 그림 R_1 을 얻은 것과 같은 방법으로  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값은? (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [5.0점]

R_1

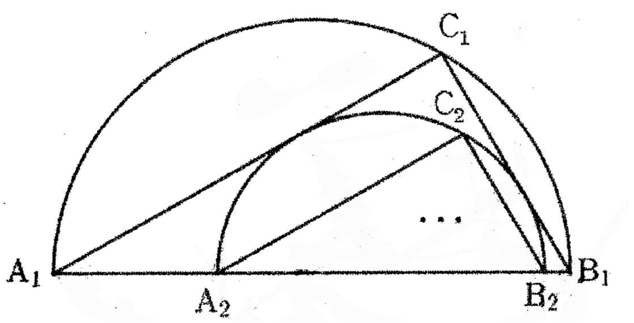


R_2



① 197 ② 215 ③ 233
④ 251 ⑤ 269

109. 그림과 같이 선분 $\mathrm{A_1B_1}$을 지름으로 하는 반원 $\mathrm{O_1}$에 대해 $\overline{\mathrm{A_1B_1}}=2$이고 $\overline{\mathrm{A_1C_1}}:\overline{\mathrm{B_1C_1}}=\sqrt{3}:1$을 만족하는 호 $\mathrm{A_1B_1}$ 위의 점을 $\mathrm{C_1}$이라 하자. 선분 $\mathrm{A_1B_1}$위의 두 점 $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{B_2}$를 양 끝점으로 하는 선분 $\mathrm{A_2B_2}$를 지름으로 하고 삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$에 내접하는 반원을 $\mathrm{O_2}$라 하자. $\overline{\mathrm{A_2C_2}}:\overline{\mathrm{B_2C_2}}=\sqrt{3}:1$을 만족하는 호 $\mathrm{A_2B_2}$ 위의 점을 $\mathrm{C_2}$이라 하자. 이와 같은 과정을 한없이 반복한다고 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{B_nC_n}}$의 값은? [5.3점]



① $5-2\sqrt{3}$ ② $3-\sqrt{3}$ ③ $1+\sqrt{3}$
④ $1+2\sqrt{3}$ ⑤ $2+\sqrt{3}$

2. 급수(step3)

110. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 집합

$$A=\{x\,|\,x^2-1<a<x^2+2x,\ x\text{는 자연수}\}$$

가 공집합이 되도록 하는 자연수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $a=3$은 $x^2-1<a<x^2+2x$를 만족시키는 자연수 x가 존재하지 않는 첫 번째 수이므로 $a_1=3$이다. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{a_n}$의 값은? [5.5점]

① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{9}{2}$ ③ $\frac{7}{2}$
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

111. 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-3}{2}\right)^n$에 대하여 물음에 답하시오. [9.0점]

(2-1) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-3}{2}\right)^n$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 값을 구하고 과정을 서술하시오. [4.0점]

(2-2) (2-1)에서 구한 x의 값에 따른 등비급수의 합을 각각 구하고, 과정을 서술하시오. [5.0점]

112. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

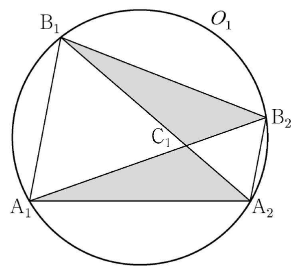
(가) $0 \le x < 1$일 때, $f(x) = -2x+2$이다. (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x-1) = -f(x)$이다.

자연수 n에 대하여 직선 $y = -\dfrac{1}{2n}x+1$이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 서로 다른 점의 개수는 a_n이라 하자. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}a_{n+3}} = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값은? (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4.7점]

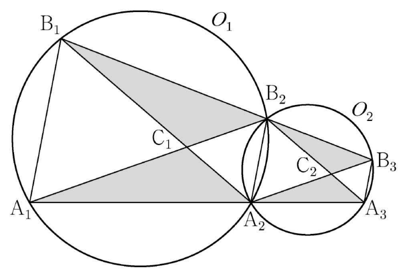
① 29 ② 53 ③ 101
④ 197 ⑤ 389

113. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=2$, $\overline{B_1A_2}=3$이고 $\angle A_1B_1A_2 = \dfrac{\pi}{3}$인 삼각형 $A_1A_2B_1$과 이 삼각형의 외접원 O_1이 있다. 점 A_2를 지나고 직선 A_1B_1에 평행한 직선이 원 O_1과 만나는 점 중 A_2가 아닌 점을 B_2라 하자. 두 선분 A_1B_2, B_1A_2가 만나는 점을 C_1이라 할 때, 두 삼각형 $A_1A_2C_1$, $B_1C_1B_2$로 만들어진  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 점 B_2를 지나고 직선 B_1A_2에 평행한 직선이 직선 A_1A_2와 만나는 점을 A_3이라 할 때, 삼각형 $A_2A_3B_2$의 외접원을 O_2라 하자. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 두 점 B_3, C_2를 잡아 원 O_2에  모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻을 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 하자. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n = \frac{p}{q}\sqrt{3}$일 때, $p+q$의 값은? (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4.4점]

R_1



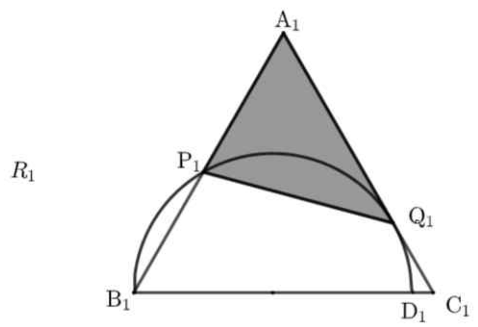
R_2

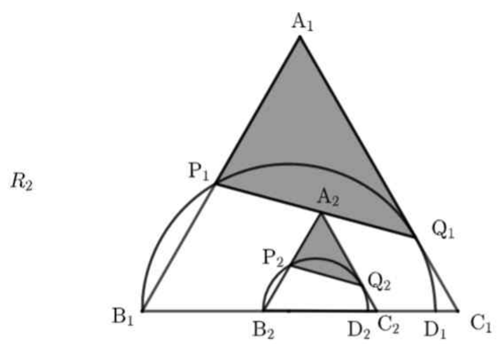


⋮ ⋮

① 7 ② 11 ③ 15
④ 19 ⑤ 23

114. 그림과 같이 한 변의 길이가 $2+\sqrt{3}$ 인 정삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$이 있다. 선분 $\mathrm{B_1D_1}$을 지름으로 하는 반원이 선분 $\mathrm{C_1A_1}$과 접하도록 선분 $\mathrm{B_1C_1}$ 위의 점 $\mathrm{D_1}$을 잡고, 반원 $\mathrm{B_1D_1}$이 선분 $\mathrm{A_1B_1}$과 만나는 두 점 중 $\mathrm{B_1}$이 아닌 점을 $\mathrm{P_1}$, 반원 $\mathrm{B_1D_1}$이 선분 $\mathrm{C_1A_1}$과 만나는 점을 $\mathrm{Q_1}$이라 할 때, 삼각형 $\mathrm{A_1P_1Q_1}$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 선분 $\mathrm{P_1Q_1}$의 중점 $\mathrm{A_2}$와 선분 $\mathrm{B_1C_1}$ 위의 두 점 $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{C_2}$를 꼭짓점으로 하는 정삼각형 $\mathrm{A_2B_2C_2}$를 그린다. 정삼각형 $\mathrm{A_2B_2C_2}$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 삼각형 $\mathrm{A_2P_2Q_2}$를 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [5.3점]





① $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　② $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$　③ $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$
④ $\dfrac{1+2\sqrt{3}}{2}$　⑤ $1+\sqrt{3}$

2. 여러가지 미분법

1. 지수로그함수의 미분(step1)

$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

115. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$ 의 값은? [4.4점]

① $\frac{1}{e^8}$ ② $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ③ $\sqrt{e}$
④ e^2 ⑤ e^8

116. $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{2}{x}}$ 의 값은? [3.9점]

① $\frac{1}{e^2}$ ② $\frac{1}{e}$ ③ 1
④ e ⑤ e^2

117. 교실 안의 n명의 학생이 각자 자신의 자리에 앉아 있다. 모두 밖으로 나간 뒤 다시 교실에 들어와 무작위로 자리에 앉는다고 하자. 이때, 한 학생이 자신의 자리에 앉지 못할 확률은 $\frac{n-1}{n}$ 이므로 모든 학생이 자신의 자리에 앉지 못할 확률을 $\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$ 이다. 학생의 수가 무한히 많을 때, 모든 학생이 자신의 자리에 앉지 못할 확률은? [4.4점]

① $\frac{1}{e^2}$ ② $\frac{1}{e}$ ③ 1
④ e ⑤ e^2

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}$

118. $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{x^2+4x}$ 의 값은? [4.4점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

119. $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+7x)}{x^2+x}$ 의 값은? [4.2점]

① 5 ② $\frac{11}{2}$ ③ 6
④ $\frac{13}{2}$ ⑤ 7

$\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$

120. $\lim_{x\to0}\frac{2^{ax+b}-4}{\log_2(2x+1)}=4$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $\frac{a}{b}$의 값은?
(단, $b\neq0$) (3.2점)

① $\frac{1}{(\ln2)^2}$ ② $\frac{2}{(\ln2)^2}$ ③ $\frac{3}{(\ln2)^2}$
④ $\frac{4}{(\ln2)^2}$ ⑤ $\frac{5}{(\ln2)^2}$

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

121. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x-1}}{\ln(1+x)}$ 의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$
④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

122. $\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(1+3x^2)}{x(e^{2x}-1)}$ 의 값은? [3.7점]

① $\frac{2}{3\ln 2}$　② $\frac{3}{2\ln 2}$　③ $\frac{3}{\ln 2}$
④ $\frac{3\ln 2}{2}$　⑤ $3\ln 2$

지수로그함수의 미분가능성

123. 두 상수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases}3x+b & (x\le 1)\\ a\ln x+4 & (x>1)\end{cases}$$

가 $x=1$에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은? [4.0점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

1. 지수로그함수의 미분(step2)

$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

124. $x>0$에서 정의된 함수 $f(x)=(1+x)^{\frac{3}{x}}$에 대하여 $<$보기$>$에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4.3점]

[보 기]

ㄱ. $f(2)>f(3)$

ㄴ. $\lim_{x\to0+}f(x)=e^3$

ㄷ. $f'(3)=1-\frac{4}{3}\ln4$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}$

125. $\lim_{x\to\infty}ax\ln\left(1+\frac{4}{x}\right)=8$일 때, 상수 a의 값은? [5.0점]

① 1　② 2　③ 3 .
④ 4　⑤ 5

$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}$

126. $\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-1}{x+a}=b$를 만족시키는 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은? [4.4점]

① -4　② -2　③ 0
④ 2　⑤ 4

$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}$

127. $\lim_{x\to0}\ln\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$의 값은? [5.3점]

① $\ln\sqrt{6}$　② $\ln2\sqrt{2}$　③ $\ln\sqrt{10}$
④ $\ln2\sqrt{3}$　⑤ $\ln\sqrt{14}$

128. $\lim_{x\to 0}\frac{4^x-3^x}{e^x-1}$ 의 값은? [4.3점]

① $\ln 2-\ln 3$ ② $2\ln 2-\ln 3$ ③ $2\ln 2$
④ $\ln 2+\ln 3$ ⑤ $2\ln 2+\ln 3$

129. 두 상수 a, b에 대하여 $\lim_{x\to 0}\frac{2^{ax+b}-8}{\log_2(4x+1)}=6$ 일 때, $a\times b$의 값은? [4.9점]

① $\frac{5}{(\ln 2)^2}$ ② $\frac{6}{(\ln 2)^2}$ ③ $\frac{7}{(\ln 2)^2}$
④ $\frac{8}{(\ln 2)^2}$ ⑤ $\frac{9}{(\ln 2)^2}$

130. $\lim_{x\to 0}\frac{16^x-2^x}{\ln(x+1)}$ 의 값은? [4.3점]

① $\ln 2$ ② 1 ③ $2\ln 2$
④ 2 ⑤ $3\ln 2$

지수로그함수의 극한응용(미정계수)

131. 두 상수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x(e^x-1)+a}{1-\cos x} & (x\neq 0)\\ b & (x=0)\end{cases}$$

가 $x=0$에서 연속일 때, $a+b$의 값은? [4.9점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

132. 함수 $f(x)=e^x[2x]+(ax+b)[e^{x-1}]$가 $x=1$에서 미분가능할 때, $f(2)$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 가장 큰 정수이다.) [4점]

① $e(e-1)$ ② $2e(e-1)$ ③ $3e(e-1)$
④ $4e(e-1)$ ⑤ $5e(e-1)$

지수로그함수의 극한응용(도형)

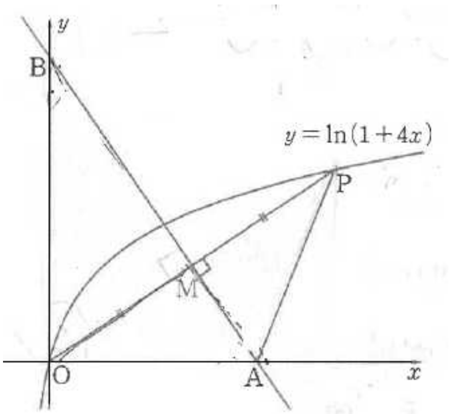
133. 함수 $f(x)=|\ln x|$와 양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P, Q라 할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기를 m_{P}, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 Q에서의 접선의 기울기를 m_{Q}라 하자. $m_{\mathrm{Q}}-m_{\mathrm{P}}=\frac{5}{2}$일 때, t의 값은? (단, 점 P의 x의 좌표는 점 Q의 x의 좌표보다 작다.) [4점]

① ln2 ② ln3 ③ ln4
④ ln5 ⑤ ln6

134. $t \neq 1$ 인 양수 t에 대하여 직선 $y=t$와 두 곡선 $y=e^x$, $y=\ln x$가 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 C, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 D라 하자. 두 점 C, D 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, $f'(2)=p+qe^2$ 이다. $p+q$의 값은? (단, p, q는 유리수이다.) [5.1점]

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{5}$　③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{1}{2}$

135. 그림과 같이 곡선 $y=\ln(1+4x)$의 제 1사분면 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ \ln(1+4a))$에 대하여 선분 OP의 중점 M을 지나고 선분 OP와 수직인 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 PMA, BOM의 넓이를 각각 $S(a)$, $T(a)$라 할 때, $\lim\limits_{a \to 0+} \frac{S(a)}{T(a)}$ 의 값을 구하고, 그 풀이 과정을 서술하시오. (단, O는 원점이다.) [9.0점]



136. 양수 t에 대하여 직선 $y=t$와 곡선 $y=e^x$가 만나는 점을 A, 직선 $y=t$와 곡선 $y=\ln(x-1)$가 만나는 점을 B라 하자. 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 C, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 D라 할 때, 직사각형 ABCD의 넓이를 $S(t)$라 하자. 이때, $S'(1)$의 값은? [4.5점]

① $2(e-1)$　② $2e-1$　③ $2e$
④ $2e+1$　⑤ $2(e+1)$

지수함수의 도함수

137. 함수 $f(x)=2^{x+2}+8^x$ 에 대하여 $\frac{f'(0)}{\ln 2}$ 의 값은? [4.6점]

① 5　② 6　③ 7
④ 8　⑤ 9

138. $f(x)=\frac{e^{2x}}{e^x+1}$ 일 때, $f'(1)$는? [5.1점]

① $\frac{e^3+2e^2}{(e+1)^2}$　② $\frac{e^3+2e}{(e+1)^2}$　③ $\frac{5e^2}{(e+1)^2}$
④ $\frac{e^3+2e}{(e+1)}$　⑤ $\frac{e^3+2e^2}{(e+1)}$

139. 함수 $f(x)=(x^2+ax+b)(e^{x-c}-1)$에 대하여 $f'(c)=b$이고 3 이하의 모든 자연수 n에 대하여 $\lim_{x\to n}\frac{f(x)}{x-n}$의 값이 존재할 때, $a^2+b^2+c^2$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.) [5.2점]

① 20 ② 21 ③ 22
④ 23 ⑤ 24

로그함수의 도함수

140. $\lim_{h\to 0}\frac{e}{h}\left\{\frac{1}{\ln(e+h)}-1\right\}$의 값은? [3점]

① -1 ② $-\frac{1}{e}$ ③ $\frac{1}{e}$
④ 1 ⑤ e

141. 함수 $f(x)=\ln|x-1|+|\ln(-x+1)|$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-h)}{h}$의 값을 구하시오. [8점]

142. 함수 $f(x)=\ln(x^2+1)-|\ln x|$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$의 값은? [4.2점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

1. 지수로그함수의 미분(step3)

143. 두 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\ln x+x+b$라 하자. $\lim_{x\to1}f(x^3)f'(x-1)=-\frac{3}{4}$일 때, $f(e^2)$의 값은? (단, $a\neq0$ 이다.) [4.7점]

① e^2-2 ② e^2-1 ③ e^2
④ e^2+1 ⑤ e^2+2

144. 곡선 $y=\ln(x+1)$ 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(a,b)$가 있다. 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=e^x-1$과 만나는 점을 Q라 하고, 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 직선 $y=x$와 만나는 점을 R이라고 할 때, $\lim_{a\to0+}\frac{\overline{\mathrm{OR}}^2-\overline{\mathrm{QR}}^2}{a^2}$의 값은? (단, O는 원점이고, $a>0$이다.) [4.8점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

145. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^3\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}=-1$
>
> (나) $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{e^{-x+1}-1}=3$

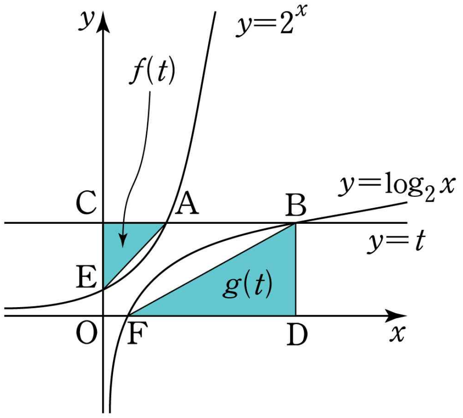
함수 $g(x)$는 $0\le x<3$일 때, $g(x)=f(x)$이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x+3)=g(x)$이다. 자연수 n에 대하여 직선 $y=\frac{1}{3n-2}x$가 함수 $g(x)$의 그래프와 $x\ge0$에서 만나는 서로 다른 점의 개수를 a_n이라 할 때, $f(2)$와 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}$의 값을 구하고, 그 풀이 과정을 서술하시오. [9.0점]

146. 두 함수 $f(x)$, $g_n(x)$와 수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음이 성립할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_{n+1}}$의 값은? (단, n은 자연수이다.) [4.6점]

> (가) $f(x)=\ln x$
>
> (나) $g_n(x)=\frac{f(1+x)f(1+2x)\cdots f(1+nx)}{x^n}$
>
> (다) $a_n=\lim_{x\to0}g_n(x)$

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

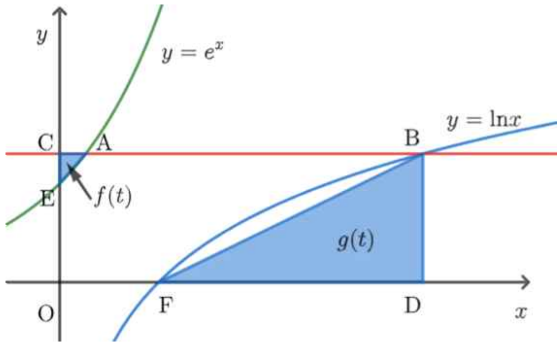
147. $t \neq 1$인 양수 t에 대하여 직선 $y=t$와 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$가 만나는 점을 각각 A, B라 하고 점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 C, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 D라 하자. 두 점 E$(0,\ 1)$, F$(1,\ 0)$에 대하여 삼각형 ACE의 넓이와 삼각형 BFD의 넓이를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 하자. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $h(t)$에 대하여 $\lim_{t\to 1+}\frac{f(t)}{h(t)}=a$, $\lim_{t\to 0+}\frac{g(t)}{h(t)}=b$일 때, $2^8\times h(ab)$의 값은? (단, $ab\neq 0$) [4.5점]



① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

148. $t\neq 1$인 양수 t에 대하여 직선 $y=t$와 두 곡선 $y=e^x$, $y=\ln x$가 만나는 점을 각각 A, B라 하고 점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 C, 점 B에서 x축에 내린 수선을 발을 D라 하자. 두 점 E$(0,\ 1)$, F$(1,\ 0)$에 대하여 삼각형 ACE의 넓이와 삼각형 BFD의 넓이를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 하자. 최고차항의 계수가 2인 사차함수 $h(t)$에 대하여

$\lim_{t\to 1+}\frac{f(t)}{h(t)}=a$, $\lim_{t\to 0+}\frac{g(t)}{h(t)}=b$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 상수이고, $ab\neq 0$) [4.9점]



[보 기]

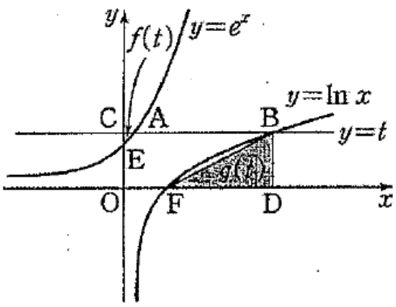
ㄱ. $a=\frac{1}{4}$이다.

ㄴ. $g(t)=\frac{t(e^t-1)}{2}$이다.

ㄷ. $h\left(\frac{1}{4ab}\right)=144$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

149. $t \neq 1$인 양수 t에 대하여 직선 $y=t$와 두 곡선 $y=e^x$, $y=\ln x$가 만나는 점을 각각 A, B라 하고 점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 C, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 D라 하자. 두 점 E$(0,\ 1)$, F$(1,\ 0)$에 대하여 삼각형 ACE의 넓이와 삼각형 BFD의 넓이를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 하자. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $h(t)$에 대하여 $\lim\limits_{t\to 1+}\dfrac{f(t)}{h(t)}=a$, $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{g(t)}{h(t)}=b$일 때, $h\left(\dfrac{3b}{a}\right)$의 값을 구하고 풀이 과정을 서술하시오 (단, a, b는 상수이고, $ab \neq 0$)



2. 삼각함수의 미분(step1)

삼각함수의 덧셈정리

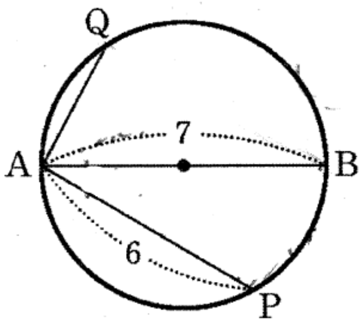
150. $\sin\frac{\pi}{12}$의 값은? [4.1점]

① $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
④ $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{4}$

151. $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$인 α, β에 대하여 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=-\frac{3}{5}$일 때, $\sin(\alpha-\beta)$의 값은? [4.8점]

① 1 ② $\frac{9}{25}$ ③ 0
④ -1 ⑤ $-\frac{28}{25}$

152. 그림과 같이 지름 AB의 길이가 7인 원이 있다. 원 위의 두 점 P와 Q에 대하여 $\overline{AP}=6$, $\angle QAB=2\angle PAB$일 때, $\overline{AQ}=a$이다.
$7a$의 값은? (단, a는 상수이다.) (2.8점)



① 21 ② 22 ③ 23
④ 24 ⑤ 25

$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$

153. $\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x^3+2x^2+4x)}{2x^3+4x^2+2x}$의 값은? [3.7점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

154. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin(2\cos x)}{x - \frac{\pi}{2}}$ 의 값은? [4.2점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

삼각함수의 도함수

155. $f(x) = 2 + 2\sin x$일 때, $f'(x)$는? [4.7점]

① $-2\cos x$ ② $-2\sin x$ ③ $2\sin x$
④ $2\cos x$ ⑤ $2 + 2\cos x$

2. 삼각함수의 미분(step2)

덧셈정리

156. $\sin\dfrac{\pi}{12} + \tan\dfrac{5}{12}\pi = \dfrac{a + b\sqrt{6} + c\sqrt{3} + d\sqrt{2}}{4}$ 라 할 때, 정수 a, b, c, d의 합 $a+b+c+d$의 값은? [4.6점]

① 10 ② 12 ③ 15
④ 16 ⑤ 19

157. 함수 $f(x) = \sin x \cos 3x - \cos x \sin 3x$ 에 대하여 $f(a) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $f(b) = \dfrac{3}{5}$ 일 때, $\sin(a + 2b)$의 값은? (단, $\dfrac{3}{4}\pi < a < \pi$, $\dfrac{3}{4}\pi < b < \pi$) [5.1점]

① $-\dfrac{3}{5} - \dfrac{2}{5}\sqrt{3}$ ② $\dfrac{2}{5} - \dfrac{3}{10}\sqrt{3}$ ③ $-\dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{5}\sqrt{3}$
④ $\dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{10}\sqrt{3}$ ⑤ $\dfrac{4}{5} + \dfrac{2}{5}\sqrt{3}$

158. 함수 $f(x) = \cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x$에 대하여 $f(a) = \dfrac{1}{2}$, $f(b) = \dfrac{4}{5}$이다. $f(b-a)$의 값은(단, $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < b < \dfrac{\pi}{2}$)

① $\dfrac{1}{5} + \dfrac{3\sqrt{3}}{10}$ ② $\dfrac{2}{5} + \dfrac{3\sqrt{3}}{10}$ ③ $\dfrac{4}{5} + \dfrac{3\sqrt{3}}{10}$
④ $1 + \dfrac{3\sqrt{3}}{10}$ ⑤ $\dfrac{6}{5} + \dfrac{3\sqrt{3}}{10}$

159. 함수 $f(x)=\cos x\cos 2x+\sin x\sin 2x$에 대하여 $f(a)=\frac{3}{5}$, $f(b)=-\frac{4}{5}$이다. $\tan(a+b)$의 값은? [3.9점]

$\left(단,\ 0<a<\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}<b<\pi\right)$

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{5}{24}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{7}{24}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

160. $0\le\theta\le 2\pi$일 때, 방정식 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$의 해를 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하자, 이때, $\beta-\alpha$의 값은?

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{3}$ ③ $\frac{\pi}{2}$
④ $\frac{2\pi}{3}$ ⑤ $\frac{5\pi}{6}$

161. 이차방정식 $25x^2-5x-12=0$의 서로 다른 두 실근을 $\cos\alpha$와 $\cos\beta$라고 할 때, $\tan(\alpha+\beta)$의 값은?
(단, $0\le\alpha\le\pi$, $0\le\beta\le\pi$) [4.3점]

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{7}{24}$ ③ $-\frac{1}{4}$
④ $-\frac{5}{24}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

162. $0\le x\le\pi$일 때, 방정식 $25\sin^2x-5\cos x-13=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 하자. $\cot(\alpha+\beta)$의 값은? (3.3점)

① $\frac{18}{7}$ ② $\frac{20}{7}$ ③ $\frac{22}{7}$
④ $\frac{24}{7}$ ⑤ $\frac{26}{7}$

덧셈정리의 응용(기울기)

163. 좌표평면에서 두 직선 $x+2y+2=0$, $3x+y=0$이 이루는 예각의 크기는?

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{5}$ ③ $\frac{\pi}{4}$
④ $\frac{\pi}{3}$ ⑤ $\frac{2\pi}{5}$

164. 함수 $y=\sin x\ (0<x<\pi)$ 위의 두 점 $\left(a,\ \frac{4}{5}\right)$, $(b,\ \sin b)$에서의 접선을 각각 l, m이라 하자. 두 직선 l, m이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$일 때, $32\sin^2 b$의 값은? (단, $0<a<\frac{\pi}{2}$) [4점]

① 24 ② 26 ③ 28
④ 30 ⑤ 32

165. 곡선 $y=\cos x\ \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$ 위의 두 점 $\left(a,\ \frac{4}{5}\right)$, $(b,\ \cos b)$에서의 접선을 각각 $l,\ m$이라 하자. 두 직선 $l,\ m$이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$일 때, $4\sin b$의 값은? (단, $0<a<\frac{\pi}{2}$) [4.7점]

① -2　② -1　③ 1　④ 2　⑤ 3

166. 곡선 $y=\ln x+2x^2$위의 점 $(1,2)$에서의 접선의 기울기는? [4.8점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

167. 좌표평면에서 두 직선 $l: y=\frac{1}{4}x$, $l': y=3x$가 있다. 직선 l 위의 점 P에서 직선 l'에 내리 수선의 발을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=11$일 때, $\overline{\mathrm{OQ}}$의 길이의 값은? (단, 점 P는 제 1사분면 위에 있고, 점 O는 원점이다.) [4.9점]

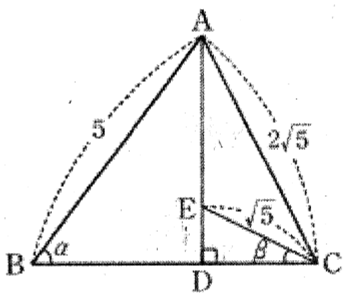
① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

168. 곡선 $y=\sin x\ (0<x<\pi)$위의 두 점 $\left(a,\ \frac{3}{5}\right)$, $(b,\ \sin b)$에서의 접선을 각각 $l,\ m$이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$라 하자. $\sin^2 b=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값은? (단, $0<a<\frac{\pi}{2}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4.9점]

① 153　② 156　③ 159　④ 161　⑤ 163

덧셈정리의 응용(도형)

169. 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=2\sqrt{5}$인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 D라 하자. 선분 AD를 $3:1$로 내분하는 점 E에 대하여 $\overline{EC}=\sqrt{5}$이다. $\angle ABD=\alpha$, $\angle DCE=\beta$라 할 때, $\cos(\alpha+\beta)$의 값은? (3.6점)



① $\frac{\sqrt{5}}{25}$　② $\frac{2\sqrt{5}}{25}$　③ $\frac{3\sqrt{5}}{25}$　④ $\frac{4\sqrt{5}}{25}$　⑤ $\frac{\sqrt{5}}{5}$

170. 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $\mathrm{A}(3,\ 4)$에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 B, C라 하고, 선분 BC를 $3:2$로 내분하는 점을 P, 선분 CP를 $3:1$로 외분하는 점을 Q라 하자. $\angle\mathrm{POQ}=\theta$라 할 때, $\tan\theta$의 값은? (단, O는 원점이다.) [5.0점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$
④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

덧셈정리의 응용(배각)

171. $0\le x\le\frac{\pi}{2}$일 때, 방정식

$$12\cos^3 x+\sin 2x-8\cos x=0$$

의 서로 다른 두 실근을 α, β라 하자. $\cos(\alpha+\beta)$의 값은? [5.1점]

① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

172. 삼각함수의 덧셈정리와 삼각함수의 극한을 이용하여 삼각함수 $f(x)=\sin 2x$의 도함수를 구하려고 할 때, 다음 물음에 답하시오. [총 10점]

(1) 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 $\sin(45^\circ+60^\circ)$의 값을 구하시오. [2.0점]

(2) $\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{h}$ 의 값을 구하시오. [1.0점]

(3) $\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos 2h}{h}$ 의 값을 구하시오. [1.0점]

(4) 삼각함수의 덧셈정리와 삼각함수의 극한을 이용하여 도함수의 정의로부터 $f(x)=\sin 2x$의 도함수를 구하고, 그 구하는 과정을 서술하시오. [6.0점]

> (도함수의 정의)
> 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수는
> $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ 이다.

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

173. $\lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{\cos x - 1}$ 의 값은? [4.5점]

① -6 ② -3 ③ 0
④ 3 ⑤ 6

174. 자연수 n에 대하여

$f(n) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin nx}{x}$ 라 하자.

$\lim_{x \to 1} \frac{x^k - e^{x-1}}{x^3 - 1} = 3$을 만족시키는 자연수 k에 대하여, $\sum_{n=1}^{k} f(n)$의 값은? [4.6점]

① 160 ② 180 ③ 200
④ 220 ⑤ 240

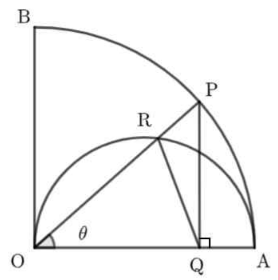
$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$

175. 자연수 n에 대하여 $\lim_{x \to 0} \frac{\tan^n x - \sin^n x}{x^6} = \alpha$가 성립할 때, $n + \alpha$의 값은? (단, $\alpha \neq 0$인 실수) [4.1점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

삼각함수의 극한 응용(도형)

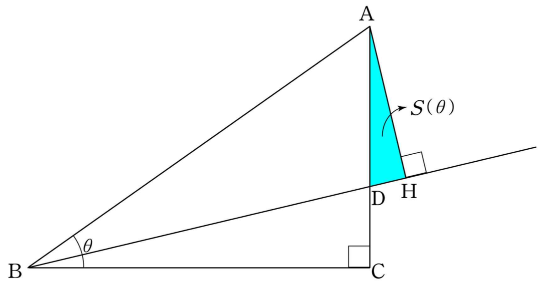
176. 그림과 같이 반지름의 길이가 2이고, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB와 선분 OA를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 Q, 선분 OP와 반원의 교점 중 O가 아닌 점을 R이라 하고 $\angle POA = \theta$라 하자. 삼각형 PRQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$ 의 값은? [5.0점]



① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $2\sqrt{3}$ ⑤ 4

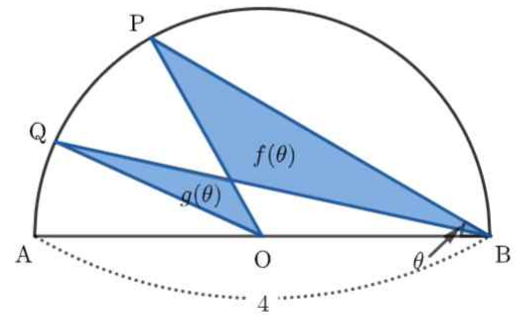
177. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\angle \mathrm{C}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC가 있다. 선분 AC를 $2:1$로 내분하는 점 D라 하고 점 A에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\angle \mathrm{ABC}=\theta$라 할 때, 삼각형 ADH의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값은?

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4.5점]



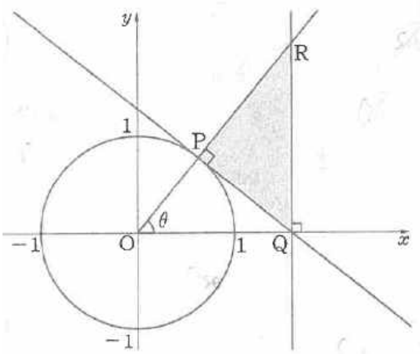
① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

178. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 위에 두 점 A, B가 아닌 점 P가 있다. 호 AP 위에 점 Q를 호 AQ의 길이와 호 QP의 길이의 비가 $2:3$이 되도록 잡는다. 선분 AB의 중점을 O라 하고 두 선분 PO, QB가 만나는 점을 C라 하자. $\angle \mathrm{ABP}=\theta$라 할 때, 삼각형 PCB의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 QOC의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [5.0점]



① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{9}{5}$ ④ $\frac{12}{5}$ ⑤ $\frac{18}{5}$

179. 그림과 같이 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 P가 제 1사분면에 있을 때, 선분 OP가 x축과 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하자, 점 P를 지나고 직선 OP에 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 Q, 점 Q를 지나고 x축에 수직인 직선이 직선 OP와 만나는 점을 R이라 하자. 삼각형 PQR의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값은? [4.7점]

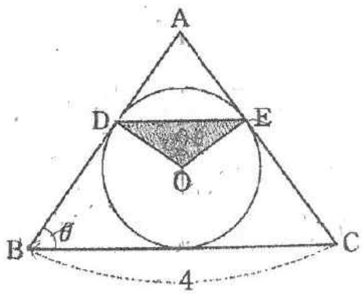


① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{5}{6}$

180. 삼각형 ABC에 대하여 $\angle BAC=\theta$, $\overline{AB}=\overline{AC}=\frac{1}{\theta}$이다. 변 AB를 $(1-\theta):\theta$로 내분하는 점을 D라 하고, $\overline{CD}=x(\theta)$라 하자. 이때, $\lim_{\theta\to 0+}x(\theta)$의 값은? (단, $0<\theta<1$이다.) [5.3점]

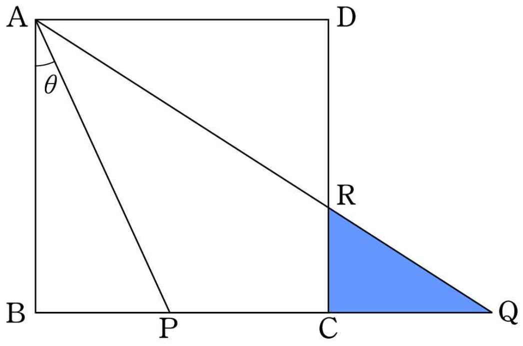
① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$
④ 2　⑤ $\sqrt{5}$

181. 그림과 같이 $\angle ABC=\angle ACB=\theta$이고 $\overline{BC}=4$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 내접원의 중심을 O, 선분 AB와 내접원이 만나는 점을 D, 선분 AC와 내접원이 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 OED의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\theta^3}{S(\theta)}$의 값은?



① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1
④ 2　⑤ 4

182. 한 변의 길이가 2 인 정사각형 ABCD 의 변 BC 위의 점 P 에 대하여 $\angle\mathrm{DAP}$ 를 이등분하는 직선이 두 직선 BC, CD 와 만나는 점을 각각 Q, R 라 하자. $\angle\mathrm{PAB}=\theta$ 일 때 삼각형 CQR 의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta\to0+}\dfrac{S(\theta)}{\theta^2}$ 의 값은? (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ 이다.) [5.3점]



① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

삼각함수의 연속

183. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\ln(1+2x^2)f(x)=8-a\cos x$$

를 만족시킬 때, $a+f(0)$의 값을 구하고 그 과정을 논술하시오. (단, a는 상수이다.) [5.0점]

184. 두 상수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos 2x+a}{(2x-\pi)^2} & \left(x\neq\dfrac{\pi}{2}\right)\\ b & \left(x=\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

가 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 에서 연속일 때, a와 b의 값을 구하는 과정을 논술하시오. [10.0점]

삼각함수의 도함수

185. 함수 $f(x)=\begin{cases}3\sin 4x+x^2\cos\dfrac{1}{x}+e^{2x} & (x\neq0)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$ 에 대하여 $f'(0)$의 값은? [4.8점]

① 14 ② 15 ③ 16
④ 17 ⑤ 18

186. 실수 a에 대하여 함수 $f(x)=\sin x-\cos x$가

$\lim_{x\to a}\dfrac{\{f(x)\}^2-\{f(a)\}^2}{x-a}=-1$을 만족시킬 때, $\sin^2 a$의 값은? [4.5점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

187. 함수 $f(x)=\begin{cases}3\sin 4x+x^2\cos\dfrac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$에 대하여

미분계수의 정의와 극한의 대소관계를 사용하여 $f'(0)$의 값을 구하는 풀이과정과 답을 자세히 논술하시오. (10.0점)

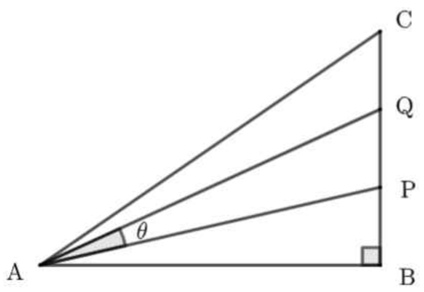
2. 삼각함수의 미분(step3)

188. 곡선 $y=\cos x$ $(0\le x\le 2\pi)$ 위의 점 $\left(k,\ \dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)$에서의 접선을 l이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 실수 t의 값이 a, b $(a<b)$일 때, $\cos(a-b)$의 값은? (단, $0<k<\dfrac{\pi}{2}$) [5.3점]

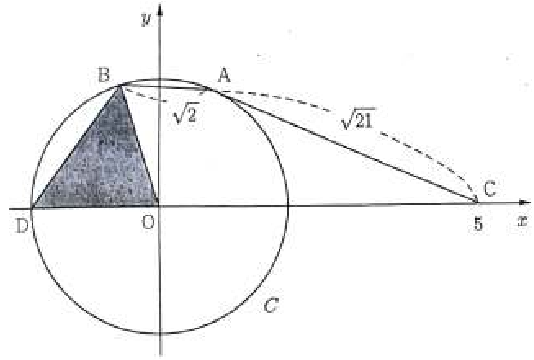
> 곡선 $y=\cos x$ $(0\le x\le 2\pi)$ 위의 점 $(t,\ \cos t)$에서의 접선이 직선 l과 이루는 예각의 크기는 $\dfrac{\pi}{4}$이다.

① $-\frac{24}{25}$ ② $-\frac{23}{25}$ ③ $-\frac{22}{25}$
④ $-\frac{21}{25}$ ⑤ $-\frac{4}{5}$

189. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=k$, $\overline{\mathrm{BC}}=3$ $(k>3)$이고 $\angle \mathrm{CBA}=\frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형 ABC가 있다. 선분 BC를 삼등분하는 두 점을 점 B에 가까운 순서대로 각각 P, Q라 하고, $\angle \mathrm{PAQ}=\theta$ 라 하자. $\tan(\angle \mathrm{QAC})=\frac{\sqrt{2}}{8}$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값을 구하고 그 과정을 논술하시오. [7.0점]



190. 그림과 같이 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 2인 원 C 위의 두 점 A, B가 각각 제 1사분면과 제 2사분면에 있다. 점 C(5, 0)에 대하여 $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{21}$ 이고 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}$ 이다. 점 D(−2, 0)에 대하여 삼각형 BDO의 넓이는? [5.1점]



① $\frac{\sqrt{7}}{10}+\frac{3\sqrt{21}}{20}$　② $\frac{\sqrt{7}}{5}+\frac{3\sqrt{21}}{20}$

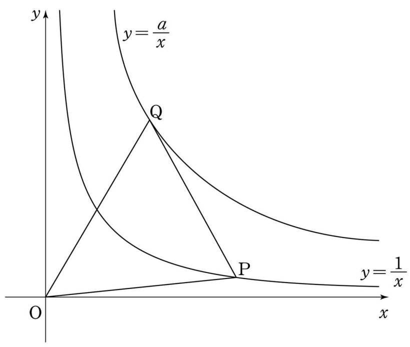
③ $\frac{\sqrt{7}}{5}+\frac{3\sqrt{21}}{10}$　④ $\frac{2\sqrt{7}}{5}+\frac{3\sqrt{21}}{10}$

⑤ $\frac{4\sqrt{7}}{5}+\frac{3\sqrt{21}}{5}$

191. 그림과 같이 제 1사분면에서 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$ 위의 점 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$과 곡선 $y=\dfrac{a}{x}\ (a>1)$ 위의 점 $\mathrm{Q}\left(q,\ \dfrac{a}{q}\right)$가 다음 조건을 만족시키면서 움직인다.

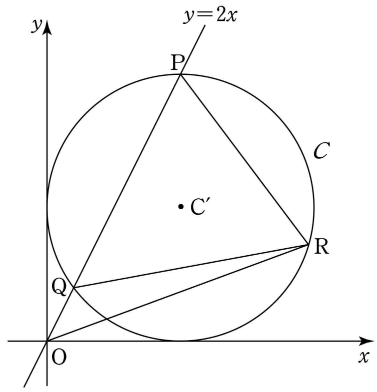
> (가) $p>q$
> (나) 삼각형 OPQ의 넓이는 2이다.

$\tan(\angle \mathrm{POQ})$의 최댓값이 $\dfrac{1}{5}$일 때, 상수 $\sqrt{a}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [5.5점]



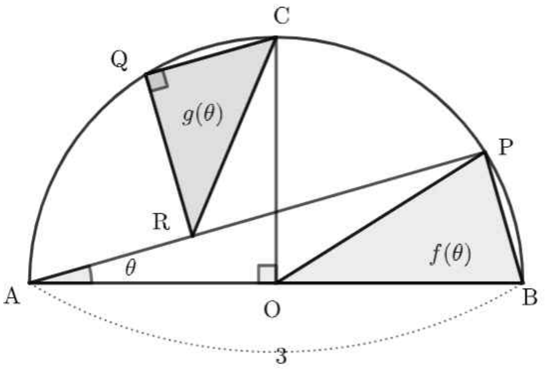
① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

192. 그림과 같이 양수 a에 대하여 점 $\mathrm{C}'(a,\ a)$을 중심으로 하고 점 B에서 x축, x축에 동시에 접하는 원 C와 직선 $y=2x$가 만나는 서로 다른 두 점 중 원점에서 먼 점을 P, 원점에서 가까운 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{QR}}$이 되도록 하는 원 C위의 점 R에 대하여 $\overline{\mathrm{PR}}=8$이고 $\angle \mathrm{PQC}'=\theta$일 때, $25\times\sin 3\theta+\overline{\mathrm{OR}}^2=p\sqrt{5}+q$이다. $p+q$의 값은? (단, O는 원점이고 p, q는 유리수) [6점]



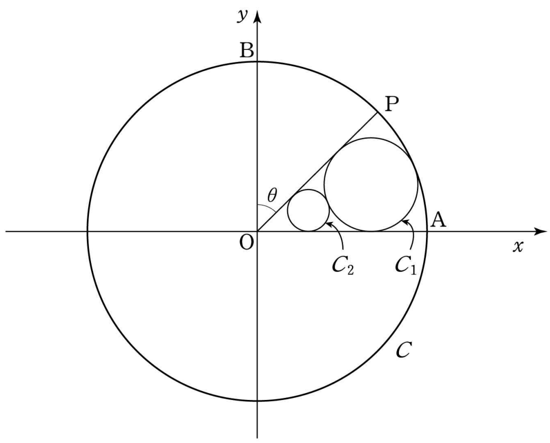
① 118 ② 120 ③ 122
④ 124 ⑤ 126

193. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 3인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 $\angle\mathrm{AOC}=\frac{\pi}{2}$인 점 C가 있다. 호 BC 위에 점 P와 호 CA 위에 점 Q를 $\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{QC}}$가 되도록 잡고, 선분 AP 위에 점 R를 $\angle\mathrm{CQR}=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡는다. $\angle\mathrm{PAB}=\theta$일 때, 삼각형 POB의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 CQR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^2}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [5.2점]



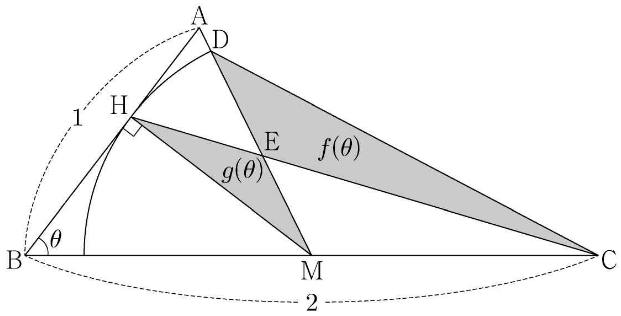
① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{4}$
④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

194. 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 원 C가 x축, y축의 양의 부분과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 B를 출발하여 점 A까지 시계 방향으로 원 C 위를 움직이는 점을 P라 하고 선분 OP와 y축의 양의 방향이 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. 선분 OA와 선분 OP에 동시에 접하고 원 C에 내접하는 원을 C_1, 선분 OA와 선분 OP에 동시에 접하고 원 C_1에 외접하는 원을 C_2라 하자. 원 C_2의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{4r(\theta)}{\frac{\pi}{2}-\theta}$의 값은? [5.4점]



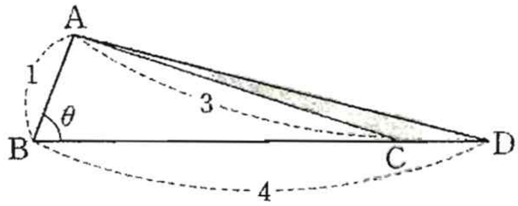
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

195. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$인 두 선분 AB, BC에 대하여 선분 BC의 중점을 M, 점 M에서 선분 AB에 내린 수선의 발을
H라 하자. 중심이 M이고 반지름의 길이가 $\overline{MH}$인 원이 선분 AM과
만나는 점을 D, 선분 HC가 선분 DM과 만나는 점을 E라 하자.
$\angle ABC=\theta$라 할 때, 삼각형 CDE의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 MEH의
넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{3\theta^3}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) (4.2점)

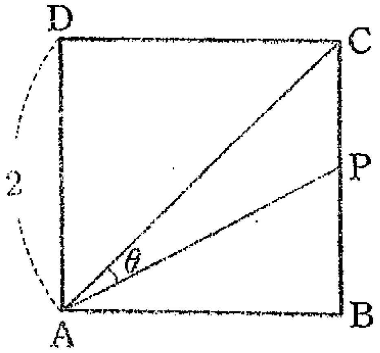


① $\frac{1}{14}$ ② $\frac{1}{15}$ ③ $\frac{1}{16}$
④ $\frac{1}{17}$ ⑤ $\frac{1}{18}$

196. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{AC}=3$, $\overline{BD}=4$이고, $\angle ABC$의 크기 θ가 변함에 따라 점 C는 선분 BD 위를 움직인다. 삼각형 ACD의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\frac{p}{q}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [12점]

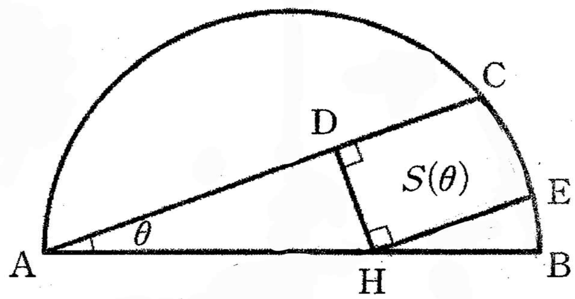


197. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD가 있다. 변 BC 위의 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{CAP} = \theta$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0-} \frac{\overline{\mathrm{AC}} - \overline{\mathrm{AP}}}{4\theta}$은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4.7점]



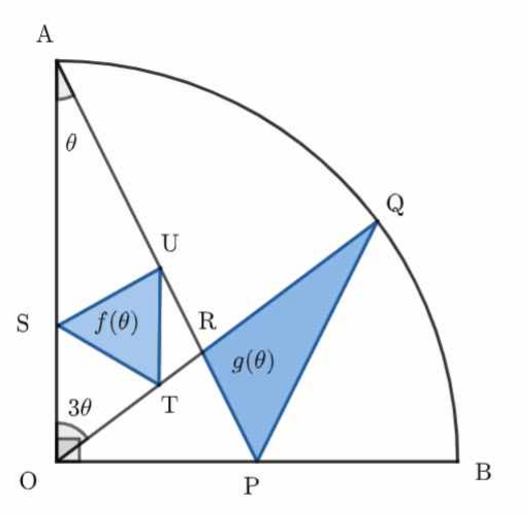
① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ 1

198. 그림과 같이 길이가 6인 선분 AB를 지름으로 하는 반원에 대하여 호 AB 위의 점 C가 있따. 선분 AC를 $2:1$로 내분하는 점을 D, 점 D에서 $\overline{\mathrm{AC}} \perp \overline{\mathrm{DH}}$가 되도록 직선을 그려 반원과 만나는 점을 E라 하자. $\angle \mathrm{CAB} = \theta$일 때, 사각형 CDHE의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$이다.) [5.3점]



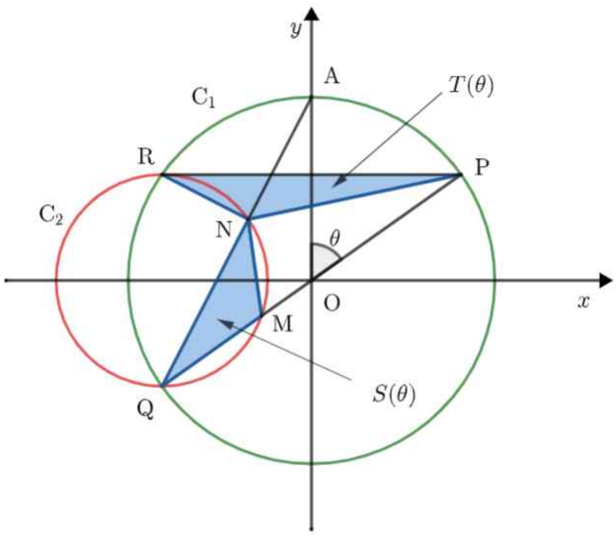
① $\frac{15}{2}$ ② 8 ③ $\frac{17}{2}$
④ 9 ⑤ $\frac{19}{2}$

199. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 선분 OB 위에 점 P를 $\angle PAO = \theta$, 호 AB 위에 점 Q를 $\angle AOQ = 3\theta$가 되도록 잡고 두 선분 AP, OQ의 교점을 R라 하자. 선분 AO 위의 점 S, 선분 OR 위의 점 T, 선분 AR 위의 점 U를 선분 UT가 선분 AO에 평행하고 삼각형 STU가 정삼각형이 되도록 잡는다. 삼각형 STU의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PQR의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)}{\theta \times g(\theta)}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$이다.) [5.4점]



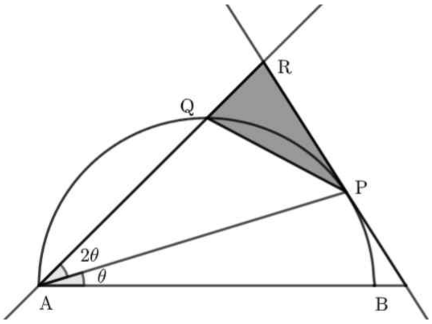
① $\frac{\sqrt{3}}{8}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
④ $\sqrt{3}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

200. 그림과 같이 좌표평면 위에 중심이 $O(0,\ 0)$이고 점 $A(0,\ 1)$을 지나는 원 C_1 위의 제 1사분면 위의 점을 P라 하자. 점 P를 원점에 대하여 대칭이동시킨 점과 y축에 대하여 대칭이동시킨 점을 각각 Q, R라 하자. 선분 QR를 지름으로 하는 원 C_2와 두 선분 PQ, AQ와의 교점을 각각 M, N이라 하자. $\angle POA = \theta$라 할 때, 두 삼각형 MQN, PNR의 넓이를 각각 $S(\theta)$, $T(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\theta \times \overline{MN} \times S(\theta)}{T(\theta)}$의 값은? [5.7점]



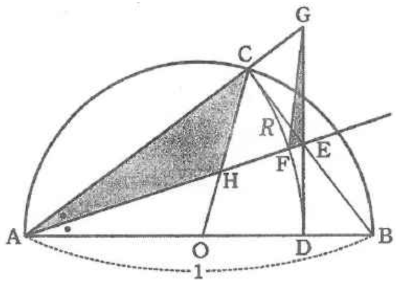
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

201. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 위에 두 점 A, B가 아닌 점 P가 있다. $\angle \mathrm{BAP} = \theta$라 할 때, 호 AP 위의 점 Q를 $\angle \mathrm{PAQ} = 2\theta$가 되도록 잡는다. 호 AB 위의 점 P에서의 접선이 직선 AQ와 만나는 점을 R라 하자. 삼각형 PQR의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$) [5.2점]



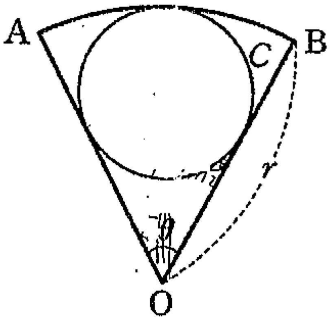
① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

202. 그림과 같이 길이가 1인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB위의 점 C에 대하여 점 A를 중심으로 하고 점 C를 지나는 원 R이 선분 AB와 만나는 점을 D라 하자. $\angle \mathrm{CAB}$를 이등분하는 직선이 선분 BC와 만나는 점을 E, 원 R과 만나는 점을 F, 두 직선 AC, DE가 만나는 점을 G, 선분 AB의 중점을 O라 하고, 두 직선 OC, AF가 만나는 점을 H라 하자. $\angle \mathrm{CAB} = \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$일 때, 삼각형 ACH의 넓이를 $S(\theta)$, 삼각형 EGF의 넓이를 $T(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{T(\theta)}{\theta^2 \times S(\theta)} = \alpha$일 때, 64α의 값을 구하고 풀이 과정을 서술하시오.



203. 다음 도형에 대하여, 물음에 답하시오. [각 3.0점, 총 6.0점, 부분점수 있음]

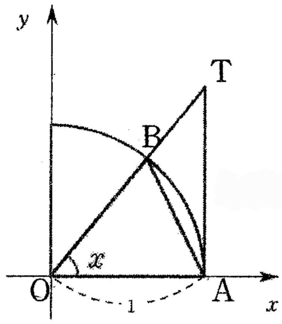
(1) 그림과 같이 반지름의 길이가 r이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OAB에 내접하는 원을 C라 하자. 호 AB의 길이를 l, 원 C의 둘레의 길이를 m이라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{m}{l}$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.



(2) 반지름의 길이가 3인 원에 내접하는 정 n각형의 넓이를 $f(n)$, 반지름의 길이가 3인 원에 외접하는 정 n각형의 넓이를 $g(n)$이라고 하자. 이를 이용하여 반지름의 길이가 3인 원의 넓이를 구하고, 그 과정을 서술하시오.

204. 다음은 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$의 값을 구하는 과정의 일부이다.

(ⅰ) $0 < x < \frac{\pi}{2}$일 때,
그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원에서 $\angle$AOB의 크기를 x라디안이라고 하고 점 A에서의 접선과 선분 OB의 연장선의 교점을 T라 하자.
이때 삼각형 OAB, 부채꼴 OAB, 삼각형 OAT의 넓이 사이에는 $\triangle$OAB<(부채꼴 OAB의 넓이) $< \triangle$OAT인 관계가 성립하고,



$\overline{\mathrm{AT}} = \boxed{f(x)}$이므로

$\boxed{g(x)} < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$

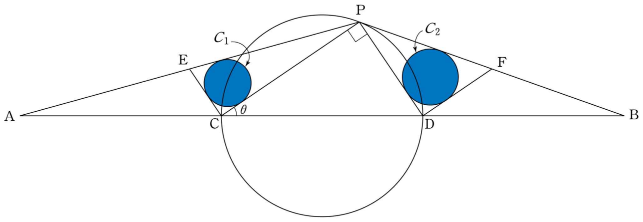
$0 < x < \frac{\pi}{2}$일 때, $\sin x > 0$이므로

$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$이다.

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{3x} = p$일 때, $f(p\pi) \times g(p\pi)$의 값은? [5.2점]

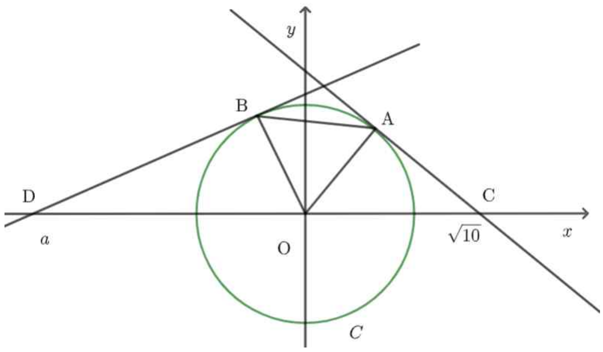
① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{8}$ ③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

205. 그림과 같이 길이가 6인 선분 AB를 삼등분하는 점을 A에 가까운 점부터 차례로 C, D라 하고 선분 CD를 지름으로 하는 원 위를 움직이고 C, D가 아닌 점을 P라 하자. 점 C를 지나고 직선 PD에 평행한 직선이 선분 AP와 만나는 점을 E라 하고 점 D를 지나고 직선 PC에 평행한 직선이 선분 BP와 만나는 점을 F라 할 때, 두 삼각형 PEC, PDF에 내접하는 원을 각각 C_1, C_2라 하자. $\angle \mathrm{PCD}=\theta$일 때, 두 원 C_1, C_2의 넓이를 각각 $S_1(\theta)$, $S_2(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{S_1(\theta) \times S_2(\theta)}{\theta^4}$의 값은? [5점]



① π^2 ② $\dfrac{\pi^2}{2}$ ③ $\dfrac{\pi^2}{3}$ ④ $\dfrac{\pi^2}{4}$ ⑤ $\dfrac{\pi^2}{5}$

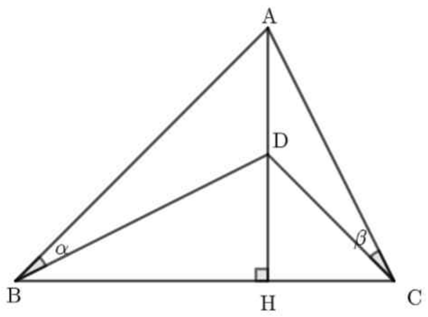
206. 그림과 같이 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다. x축 위의 두 점 $\mathrm{C}(\sqrt{10},\ 0)$, $\mathrm{D}(a,\ 0)$에서 원 C에 접선을 그었을 때, 제 1사분면과 제 2사분면에서 만나는 점을 각각 A, B라고 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{1}{2}$일 때, $\dfrac{1}{a}$의 값은? [4.9점]



① $\dfrac{7\sqrt{10}}{80}-\dfrac{19\sqrt{6}}{80}$ ② $\dfrac{7\sqrt{10}}{80}-\dfrac{9\sqrt{6}}{40}$ ③ $\dfrac{7\sqrt{10}}{80}-\dfrac{17\sqrt{6}}{80}$ ④ $\dfrac{7\sqrt{10}}{80}-\dfrac{\sqrt{6}}{5}$ ⑤ $\dfrac{7\sqrt{10}}{80}-\dfrac{3\sqrt{6}}{16}$

207. 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=6$, $\overline{CA}=\sqrt{13}$ 인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\angle ABC$의 이등분선이 선분 AH와 만나는 점을 D라 하자.

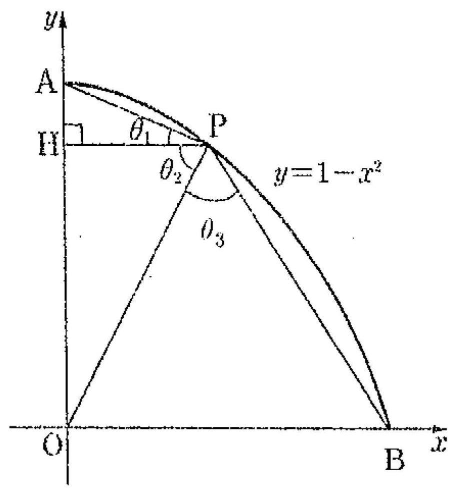
$\angle DBH=\alpha$, $\angle ACD=\beta$라 할 때, $\tan(\beta-\alpha)=\dfrac{q}{p}$ 이다. $p+q$의 값은? (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [5.2점]



① 43 ② 44 ③ 45
④ 46 ⑤ 47

208. 곡선 $y=1-x^2\,(0<x<1)$ 위의 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하고, 곡선 $y=1-x^2$이 y축과 만나는 점을 A, 곡선 $y=1-x^2$이 x축과 만나는 점을 B라 하자. 원점 O에 대하여 $\angle APH=\theta_1$, $\angle HPO=\theta_2$, $\angle OPB=\theta_3$라 두자.

$\tan\theta_1=\dfrac{1}{3}$일 때, $\tan(\theta_1+\theta_2)=a$, $\tan(\theta_2+\theta_3)=b$이다. 실수 a, b에 대하여 ab의 값은? [5.1점]



① $-\dfrac{81}{2}$ ② -36 ③ $-\dfrac{63}{2}$
④ -27 ⑤ $-\dfrac{45}{2}$

209. $\angle C=\frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=6$, $\sec(\angle ABC)=2$이다. 선분 CA를 $1:2$로 내분하는 점을 D, 선분 CA를 $2:1$로 내분하는 점을 E라 할 때, $\cos(\angle ABC-\angle EBD)$의 값은? [4.7점]

① $\frac{2\sqrt{6}}{7}$ ② $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ ③ $\frac{4\sqrt{2}}{7}$
④ $\frac{6}{7}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{10}}{7}$

3. 미분법

1. 미분법(step1)

몫의 미분법

210. 함수 $f(x)=\dfrac{(x+2)(x-1)}{x}$ 에 대하여 방정식 $f'(x)=3$ 을 만족시키는 모든 실수 x 의 값의 합은? [3.6점]

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

지수로그함수의 미분법

211. 함수 $f(x)=(x^2-6x+10)e^x$에 대하여 방정식 $f'(x)=0$의 해는? [3.4점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

212. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x\ln x-x$위의 점 $(e^n,\ (n-1)e^n)$에서의 접선의 기울기를 $f(n)$이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}f(n)$의 값은?

① 55 ② 60 ③ 65
④ 70 ⑤ 75

213. 함수 $f(x)=(\ln x)^3$에 대하여 $f''(e)$의 값은? [4.4점]

① $\dfrac{1}{e^2}$ ② $\dfrac{2}{e^2}$ ③ $\dfrac{3}{e^2}$
④ $\dfrac{4}{e^2}$ ⑤ $\dfrac{5}{e^2}$

삼각함수의 미분법

214. 함수 $f(x)=\cot x$의 도함수를 $f'(x)$라고 할 때, $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$의 값은? [3.7점]

① $-\dfrac{9}{2}$ ② -4 ③ $-\dfrac{4}{3}$
④ $\dfrac{4}{3}$ ⑤ 4

215. 함수 $f(x)=\sin x-\cos x$에 대하여 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$의 값은? [3.9점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

216. 함수 $f(x)=x\tan x$에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값은? [3.7점]

① $1+\frac{\pi}{4}$ ② $1+\frac{\pi}{2}$ ③ $2+\frac{\pi}{4}$
④ $2+\frac{\pi}{2}$ ⑤ $3+\frac{\pi}{4}$

217. 함수 $f(x)=e^{\sin x}$에 대하여 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f'(x)}{x-\frac{\pi}{2}}$의 값은? [4.5점]

① $-2e$ ② $-e$ ③ 1
④ e ⑤ $2e$

매개변수로 나타낸 함수의 미분법

218. 매개변수 t로 나타낸 함수 $x=1-t^2$, $y=4t$ 에 대하여 $t=-1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3.6점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

219. 매개변수 $t\ (t>0)$으로 나타낸 곡선 $x=(t-1)^2$, $y=t+\frac{a}{t}$ 위의 점 $(4,\ 2)$에서의 접선의 기울기는? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

220. 매개변수 t로 나타낸 곡선 $\begin{cases} x=t^3+t-1 \\ y=t^2+at+1 \end{cases}$ 에 대하여, $t=1$에 대응하는 곡선 위의 점에서의 접선의 기울기가 1일 때, 상수 a의 값은? [3.8점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

합성함수의 미분법

221. $f(x)=(x^2+2x)^5$ 일 때, $f'(1)$의 값은? [4.1점]

① 324 ② 405 ③ 810
④ 1620 ⑤ 2025

222. 함수 $f(x)=(-2x+1)^4$에 대하여 $f''(0)$의 값은?

① 46 ② 48 ③ 50
④ 52 ⑤ 54

223. 함수 $f(x)=(a-3x)^3$의 $x=0$에서의 미분계수가 -1일 때, 양수 a의 값은? [4.0점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

224. 함수 $f(x)=(a-x)^3$의 $x=1$에서의 미분계수가 -12일 때, 모든 a의 값의 합은? (단, a는 상수이다.) (2.6점)

① 5 ② 4 ③ 3
④ 2 ⑤ 1

225. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(2x+3)=(x^3+2x-2)^2$을 만족시킬 때, $f'(7)$의 값은? [3.9점]

① 110 ② 120 ③ 130
④ 140 ⑤ 150

음함수의 미분법

226. 곡선 $x^2-axy+y^2=b$ 위의 점 $(1,\ 0)$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값이 2일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이고, $x \neq 2y$이다.) [4.5점]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

역함수의 미분법

227. 함수 $f(x)=x^3+1$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(9)$의 값은? [3.9점]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

이계도함수

228. $f(x)=x\cos 3x$ 일 때, $f''\left(\frac{\pi}{6}\right)$의 값은? [4.2점]

① -8 ② -6 ③ $-\frac{4}{3}\pi$
④ $\frac{3}{2}\pi$ ⑤ $\frac{3\pi+1}{2}$

1. 미분법(step2)

몫의 미분법

229. 함수 $f(x)=\frac{3x}{2-x^2}$ 에 대하여 $\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1-x)}{x}$ 의 값은? [4.1점]

① -18 ② -9 ③ 0
④ 9 ⑤ 18

230. 함수 $f(x)=\frac{(x+2)^2}{x^3(x+1)^4}$ 에 대하여 $g(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$ 라 하자. $g'(1)$ 의 값을 $\frac{q}{p}$ 라 할 때, $p+q$ 의 값은? (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [4.0점]

① 35 ② 39 ③ 43
④ 47 ⑤ 51

231. 곡선 $y=\frac{x+2}{e^x}$ 위의 점 $\left(t, \frac{t+2}{e^t}\right)$를 중심으로 하고 x축에 접하는 원의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $S'(0)$의 값은? (단, $t>-2$) [4.8점]

① -5π ② -4π ③ -3π
④ -2π ⑤ $-\pi$

지수로그함수의 미분법

232. 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(e^{2x+1})-f(e^{x+1})=3x$를 만족시킬 때, $\lim_{h\to0}\frac{e\{f(e+h)-f(e-2h)\}}{h}$ 의 값은? [5.0점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

233. 함수 $f(x)=\log_a x$에 대하여 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}=\frac{2}{\ln2}$일 때, a의 값은? [5.0점]

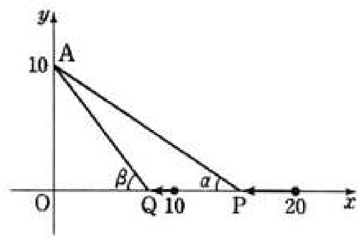
① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

234. 최고차항의 계수가 1 인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를 $g(x)=f(x)e^{2x}$ 이라 하자. $\lim_{x\to2}\frac{g(x)}{x-2}=5e^4$ 일 때, $f(3)$ 의 값은? [4.6점]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

삼각함수의 미분법

235. 그림과 같이 좌표평면 위에 점 $\mathrm{A}(0,\ 10)$과 x축 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 두 점 P, Q가 각각 점 $(20,\ 0)$과 점 $(10,\ 0)$에서 동시에 출발하여 원점 O까지 $\overline{\mathrm{OP}}=3\overline{\mathrm{OQ}}$를 유지하며 움직일 때, $\angle\mathrm{OPA}=\alpha$, $\angle\mathrm{OQA}=\beta$라 하자. $\overline{\mathrm{OQ}}=5$인 순간의 $\frac{d\beta}{d\alpha}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값은? (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



① 27 ② 28 ③ 29
④ 30 ⑤ 31

236. 함수 $f(x)=e^x\cos x$에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\times f'\left(-\frac{\pi}{6}\right)$의 값은? [4.8점]

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

237. 함수 $f(x)=e^x\cos x$에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\times f'\left(-\frac{\pi}{3}\right)$의 값은?

① $-\frac{1}{2}$　② $-\frac{1}{4}$　③ 0
④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{2}$

238. 함수 $f(x)=\begin{cases} 5\sin x+x^2\cos\frac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$에 대하여 $f'(0)$의 값을 구하고 풀이 과정을 서술하시오.

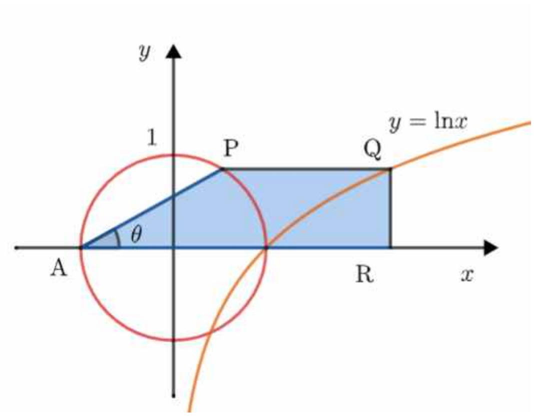
239. 곡선 $y=\sin x(0<x<\pi)$ 위의 두 점 $\left(a,\ \frac{4}{5}\right)$, $(b,\ \sin b)$에서의 접선을 각각 l, m이라 하자. 두 직선 l, m이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$일 때, $\sec b$의 값은?
(단, a, b는 상수이고 $0<a<\frac{\pi}{2}$이다.) (3.4점)

① 5　② 4　③ 3
④ -4　⑤ -5

240. $y=\tan x$의 그래프 위의 점 $A(\alpha,\ \tan\alpha)$에서 접하는 접선과 $y=\cos x$의 그래프 위의 점 $B(\beta,\ \cos\beta)$에서 접하는 접선이 서로 만나지 않을 때, 가능한 $\alpha,\ \beta$값에 대하여 $2\beta-\alpha$의 값은? (단, $0<\alpha<2\pi,\ 0<\beta<2\pi$) [4.3점]

① $\frac{5}{2}\pi$　② 2π　③ $\frac{3}{2}\pi$
④ π　⑤ $\frac{1}{2}\pi$

241. 그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$을 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$인 직선이 원과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 P라 하자. 점 P를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\ln x$와 만나는 점을 Q라 하고, 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 R라 하자. 사각형 APQR의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\frac{\sqrt{3}}{3}\left\{S'\left(\frac{\pi}{12}\right)+\frac{1}{2}\right\}=p\sqrt{e}+q$이다. $p+q$의 값은?
(단, $p,\ q$는 유리수이다.) [5.6점]

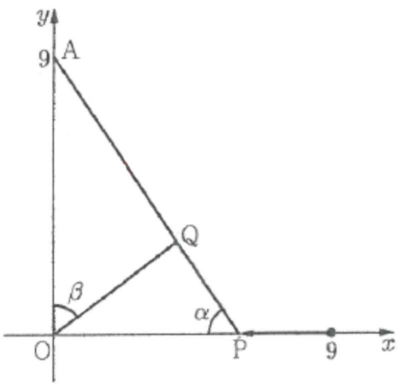


① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

242. 함수 $f(x)=\begin{cases}\cos x+a(x-3) & (x<0)\\ be^x\sin x+2 & (x\geq 0)\end{cases}$ 이 모든 실수 x 에 대하여 미분가능할 때, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 의 값은? [4.4점]

① $1-\frac{1}{3}e^{\frac{\pi}{2}}$　② $2-\frac{1}{3}e^{\frac{\pi}{2}}$　③ $\frac{1}{3}e^{\frac{\pi}{2}}$
④ $1+\frac{1}{3}e^{\frac{\pi}{2}}$　⑤ $2+\frac{1}{3}e^{\frac{\pi}{2}}$

243. 그림과 같이 좌표평면 위에 점 $\mathrm{A}(0,\ 9)$와 x축 위를 움직이는 점 P가 있다. 선분 AP를 $2:1$로 내분하는 점을 Q라 하자. 점 P가 점 $(9,\ 0)$에서 출발하여 원점 O까지 움직일 때, $\angle\mathrm{APO}=\alpha$, $\angle\mathrm{QOA}=\beta$라 하자. $\overline{\mathrm{OQ}}=5$인 순간의 $\frac{d\beta}{d\alpha}$의 값은? [5.0점]



① $-\frac{26}{25}$　② $-\frac{24}{25}$　③ $-\frac{22}{25}$
④ $-\frac{4}{5}$　⑤ $-\frac{18}{25}$

합성함수의 미분법

244. 다항함수 $g(x)$가 $\lim_{x\to 0}\frac{x}{g(x)}=1$, $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{g(x)}=2$를 만족시킬 때, $\lim_{x\to 2}\frac{g(g(x))}{2x^2-3x-2}$ 의 값은? [5.2점]

① $\frac{1}{10}$　② $\frac{1}{5}$　③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{3}{5}$　⑤ $\frac{7}{10}$

245. 이차 이상의 다항함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=\ln(x^2+x+e)$가 $(f\circ g)(0)=e$, $(f\circ g)'(0)=2$를 만족시킨다. 다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(3)$의 값은? [4.9점]

① e　② $3e$　③ $5e$
④ $7e$　⑤ $9e$

246. 이차 이상의 다항함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=e^{x^3+x+1}$이 $(f\circ g)(0)=3$, $(f\circ g)'(0)=e$ 를 만족시킨다. 다항식 $f(x)$를 $(x-e)^2$으로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(e-3)$의 값은? (3.0점)

① $-e$　② $1-e$　③ 0
④ e　⑤ $1+e$

247. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=3$, $\lim_{x\to2}\frac{g(x)-1}{x-2}=2$

를 만족시킨다. 함수 $f(x)$가 일대일대응일 때,

$\lim_{x\to2}\frac{f(g(x))-a}{x-2}=b$이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4.7점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

248. 함수 $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & (x<0) \\ -2x^2+1 & (x\geq 0)\end{cases}$에 대하여 함수 $g(x)=(f\circ f)(x)$라 할 때, $g'(1)$의 값은? [3.8점]

① $-4e$ ② $-2e$ ③ e
④ $2e$ ⑤ $4e$

249. 미분가능한 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$에 대하여 $h(x)=(g\circ f)(x)$이다. 다음 두 조건을 만족시킬 때, $h'(2)$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. [4점, 부분점수 있음]

(가) $g(x)=\frac{1}{x}$
(나) $\lim_{x\to2}\frac{f(x)+3}{x^2+x-6}=1$

매개변수로 나타낸 함수의 미분법

250. 매개변수 $t\ (t>0)$로 나타낸 곡선 $x=t^3\ln t+2t$, $y=6t^2e^{t-1}$에서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [4.7점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

251. 구간 $(0,\ \infty)$에서 정의된 함수 $f(x)=\ln(x^2+2x+1)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 매개변수 t로 나타낸 곡선 $x=e^t$, $y=g(t)$에서 $t=2\ln2$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [4.7점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

252. 구간 $(0,\ \infty)$에서 정의된 함수 $f(x)=\ln(x^2+2x+2)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 매개변수 t로 나타낸 곡선

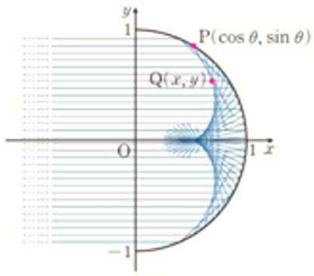
$$x=2e^t,\ y=g(t)$$

에서 $t=\ln5$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [4.3점]

① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{8}$
④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{5}{24}$

253. [그림1]과 같이 커피가 담겨 있는 원형 커피 잔의 벽에 반사된 빛이 모여 커피의 표면에 곡선을 그리는데 이것을 '포락선(包絡線)'이라고 한다. 즉, 포락선이란 컵에 반사된 빛을 나타내는 모든 직선에 접하는 곡선을 뜻한다.

[그림 1]



[그림 2]

[그림2]의 좌표평면에서 반원을 단위원 $x^2+y^2=1$의 일부로 생각하고, 원점 O와 빛이 커피잔의 벽에 부딪치는 점 P에 대한 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 하자. 그러면 점 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$를 지나는 빛이 포락선에 접하는 점 $\mathrm{Q}(x,\ y)$의 좌표는 매개변수 θ에 대한 함수로

$$x=\frac{3}{4}\cos\theta-\frac{1}{4}\cos3\theta,\ \ y=\frac{3}{4}\sin\theta-\frac{1}{4}\sin3\theta$$

와 같이 나타낼 수 있다고 한다. $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때, 점 Q에서의 접선의 기울기를 구하고 그 과정을 논술하시오. [3.0점]

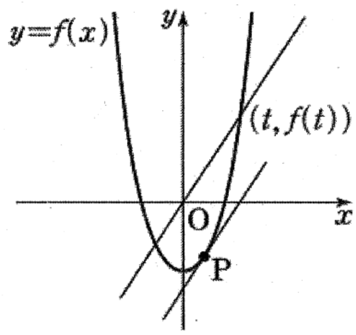
음함수의 미분법

254. 곡선 $x^2-xy+2y^2=14$ 위의 두 점 $(\alpha,\ k)$, $(\beta,\ k)$에서의 접선이 서로 수직일 때, $\alpha\beta$의 값은? (단, k는 $0\le k<2$인 상수이고, $\alpha-4k\ne0$, $\beta-4k\ne0$이다.) [4.8점]

① $-\frac{32}{3}$ ② -9 ③ $-\frac{22}{3}$
④ $-\frac{17}{3}$ ⑤ -4

역함수의 미분법

255. 함수 $f(x)=\frac{1}{4}x^4+x^2-2$가 있다. 양의 실수 t에 대하여 두 점 $(0,\ 0)$, $(t,\ f(t))$를 지나는 직선이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선과 평행할 때, 점 P의 x좌표를 $g(t)$라 하자. 미분가능한 함수 $g(t)$의 역함수를 $h(t)$라 할 때, $h(1)+9h'(1)$의 값은? (3.9점)



① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

256. 함수 $f(x)=x^3+2x-2$에 대하여 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)-1}{x-1}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값은? (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4.8점]

① 25 ② 28 ③ 31
④ 34 ⑤ 37

257. 함수 $f(x)=(x^2+ax+b)e^x$과 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=e$, $f'(1)=e$ (나) 모든 실수 x에 대하여 $g(f(x))=f'(x)$이다.

$h(x)=f^{-1}(x)g(x)$에 대하여 $g'(e)+h'(e)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) (4.0점)

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

258. $0<x<2$인 실수 x에 대하여 넓이가 6이고 가로의 길이가 x인 직사각형의 둘레의 길이를 $f(x)$라 하자. 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(11)$의 값은? [3.9점]

① $-\frac{10}{3}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{3}{10}$
④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

259. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 역함수가 존재하는 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를
$g(x)=\begin{cases} ax^2\ln x & (0<x<e) \\ f^{-1}(x) & (x\ge e) \end{cases}$ 로 정의하자. 함수 $g(x)$가 $x=e$에서 미분가능하고 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-e}{h}=\frac{b}{2}$일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [5.1점]

① $\frac{1}{3e}$ ② $\frac{2}{3e}$ ③ $\frac{e}{3}$
④ $\frac{3}{2e}$ ⑤ $3e$

260. 미분가능한 함수 $f(x)$와 그 역함수 $g(x)$에 대하여 -1이 아닌 모든 실수 x에서 $f\left(xg(x)-\frac{x^2-x}{x+1}\right)=x$가 성립할 때, $f'\left(\frac{3}{4}\right)$의 값은? [4.2점]

① 16 ② 4 ③ 1
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{16}$

이계도함수

261. 함수 $f(x)=(\ln x)^2$에 대하여
극한값 $\lim_{h\to 0}\frac{f'(\sqrt{e}+2h)-f'(\sqrt{e})}{h}$의 값은? [4.3점]

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{2}{e}$ ③ $\frac{1}{\sqrt{e}}$
④ $\frac{2}{\sqrt{e}}$ ⑤ $\frac{\sqrt{e}}{2}$

262. 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여
$$f(x)=\ln(x^2+x)-f'(1)\sqrt{x}$$
를 만족시킬 때, $f''(1)$의 값은? [4.8점]

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

263. 매개변수 t에 대하여 함수 $x=2t-\sin 2t$, $y=\sin^3 2t$에 대하여 물음에 답하시오. [총 7점]

(1) $\dfrac{dy}{dx}$를 구하고 그 과정을 논술하시오. (단, $1-\cos 2t \neq 0$)
[2.0점]

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$를 구하고 그 과정을 논술하시오. (단, $1-\cos 2t \neq 0$)
[4.0점]

(3) $t=\dfrac{\pi}{6}$일 때의 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$의 값을 구하고 그 과정을 논술하시오.
[1.0점]

1. 미분법(step3)

264. 곡 $f(x)=\dfrac{2x+3}{2x+1}$, $g(x)=\tan x$에 대하여 함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$라 할 때, $h'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$의 값을 구하고 과정을 서술하시오. [8.0점]

265. 함수 $f(x)=|x|(e^{2x}+a)$가 있다. $x=0$에서 $f(x)$는 미분가능하다고 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, a는 실수이다.)
[총 10.0점]

(1) a의 값을 구하고, 그 과정을 서술하시오. [3.0점]

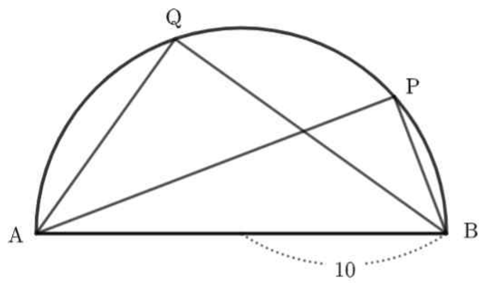
(2) $f'(x)$는 $x=0$에서 연속임을 보이시오. [3.0점]

(3) $f'(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않음을 보이시오. [4.0점]

266. 곡선 $y=e^x-e^{-x}$와 직선 $y=t$가 만나는 점의 좌표를 $(f(t),\ t)$라 하자. 함수 $g(t)=f(t)\times\{e^{2f(t)}+e^{-2f(t)}\}$일 때, $g'\left(\frac{3}{2}\right)=p+q\ln 2$이다. $p+q$의 값은? (단, t는 실수이고 p, q는 유리수이다.) [5.3점]

① $\frac{47}{10}$ ② $\frac{49}{10}$ ③ $\frac{51}{10}$
④ $\frac{53}{10}$ ⑤ $\frac{11}{2}$

267. 그림과 같이 반지름의 길이가 10인 반원 위의 두 점 P, Q가 점 B에서 동시에 출발하여 선분 $\overline{\mathrm{BP}}$의 길이의 시간(초)에 대한 변화율 $\frac{1}{2}$과 $\angle\mathrm{QAB}=2\angle\mathrm{PAB}$를 만족시키면서 반원 위를 움직인다. 점 P가 점 B에서 출발하여 5초가 되는 순간 선분 AQ의 길이의 시간(초)에 대한 변화율을 구하고 그 과정을 논술하시오. (단, $0\le\angle\mathrm{PAB}<\frac{\pi}{4}$이다.) [6.0점]



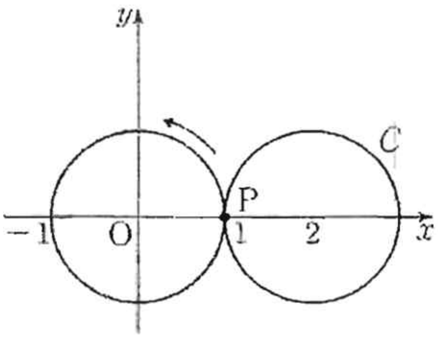
268. 1보다 큰 실수 a에 대하여 곡선 $y=a^x$과 곡선 $y=a^{-x}-\frac{8}{3}$이 만나는 점의 x좌표를 $f(a)$라 하자. 미분가능한 함수 $f(a)$에 대하여 $f(k)=-\frac{1}{2}$일 때, $f'(k)=\frac{q}{p}\times\frac{1}{\ln 3}$이다. $p+q$의 값은? (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4.8점]

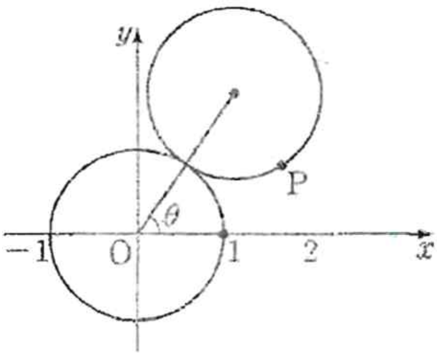
① 5 ② 10 ③ 17
④ 26 ⑤ 37

269. 곡선 $x^2+xy+2y^2=7$위의 두 점 $(\alpha,\ k)$, $(\beta,\ k)$에서의 접선이 서로 수직일 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은? (단, k는 $0\le k<2$인 상수이고, $\alpha+4k\neq0$, $\beta+4k\neq0$이다.) [4.5점]

① 9 ② $\frac{25}{3}$ ③ $\frac{23}{3}$
④ 7 ⑤ $\frac{19}{3}$

270. 좌표평면에서 중심이 $(2,\ 0)$이고, 반지름 길이가 1인 원 C가 원 $x^2+y^2=1$과 접하고 있다. 그림처럼 원 C가 원 $x^2+y^2=1$에 접하면서 시계 반대 방향으로 미끄럼 없이 회전한다. 원점과 두 원의 접점이 이루는 각 θ가 $\frac{5\pi}{6}$일 때, 원 C위의 점 $P(x,\ y)$에 대하여 $\frac{dy}{dx}$의 값은? (단, $\theta=0$일 때, 점 P의 위치는 $(1,\ 0)$이다.) [4.6점]





① $2\sqrt{3}$ ② 1 ③ 0
④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{6}$

271. 곡선 $x^2+2xy+3y^2=9$ 위의 두 점 $(\alpha,\ k)$, $(\beta,\ k)$ 에서의 접선이 서로 수직일 때, $4\alpha\beta$ 의 값은? (단, k 는 $0 \le k < 2$ 인 상수이고, $\alpha+3k \ne 0$, $\beta+3k \ne 0$ 이다.) [5.1점]

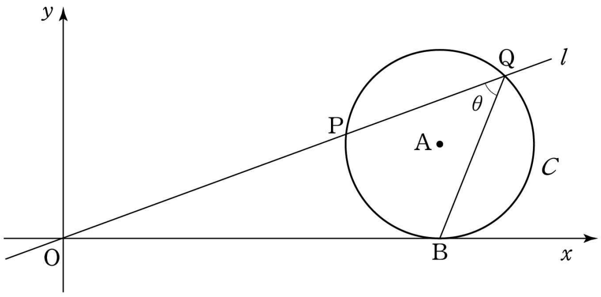
① -5 ② -7 ③ -9
④ -11 ⑤ -13

272. 실수 t 에 대하여 증가하는 함수 $f(x)=ax+b+3\sin x$ 와 $y=t$ 의 교점의 x 좌표를 $g(t)$ 라 정의하자. 함수 $g(t)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, ab 의 값은? (단, $a>0,\ b<0$ 이다.) [5.2점]

(가) $g(0)=\pi$
(나) $\lim_{t\to 0}\frac{g(t)-\pi}{t}$ 의 값이 존재하지 않는다.

① -5π ② -6π ③ -7π
④ -8π ⑤ -9π

273. 그림과 같이 점 $\mathrm{A}(4,\ 1)$ 을 중심으로 하고 점 B 에서 x 축과 접하는 원 C가 있다. 원점 O 를 지나고 기울기가 양수인 직선 l 이 원 C와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 원점에서 가까운 점을 P , 원점에서 먼 점을 Q 라 하고 $\angle \mathrm{BQO}=\theta$ 라 하자. 선분 OP 의 길이를 $f(\theta)$ 라 할 때, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 의 값은? (단, 직선 l 의 기울기는 $\frac{8}{15}$ 보다 작다.) [5.5점]



① $\frac{\sqrt{10}}{10}$　② $\frac{\sqrt{10}}{5}$　③ $\frac{2\sqrt{10}}{5}$　④ $\frac{3\sqrt{10}}{5}$　⑤ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$

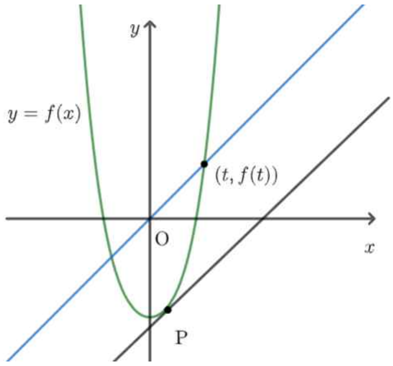
274. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 역함수가 존재하는 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} ax^2\ln x & (0<x<e) \\ f^{-1}(x) & (x\geq e) \end{cases}$$

로 정의하자. 함수 $g(x)$가 $x=e$에서 미분가능하고 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-e}{h}=b$일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

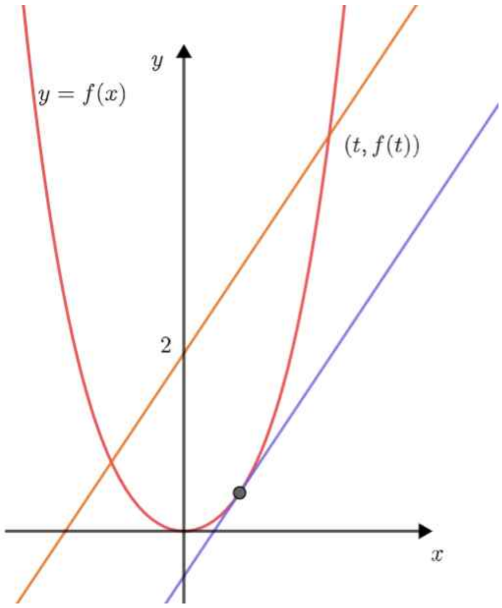
① $3e$　② $\frac{2}{3e}$　③ 1　④ $\frac{3e}{2}$　⑤ $\frac{1}{3e}$

275. 함수 $f(x)=x^4+8x^2-128$이 있다. 양의 실수 t에 대하여 두 점 $(0,\ 0)$, $(t,\ f(t))$를 지나는 직선이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선과 평행할 때, 점 P의 x좌표를 $g(t)$라 하자. 미분가능한 함수 $g(t)$의 역함수를 $h(t)$라 할 때, $h'(2)$의 값은? [5.1점]



① $\frac{1}{2}$　② $\frac{10}{19}$　③ 1　④ $\frac{19}{16}$　⑤ 2

276. 함수 $f(x)=\frac{1}{4}x^4+x^2$ 가 있다. 양의 실수 t에 대하여 두 점 $(0,\ 2)$, $(t,\ f(t))$를 지나는 기울기가 양수인 직선이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선과 평행할 때, 점 P의 y좌표를 $g(t)$라 하자. 미분가능한 함수 $g(t)$의 역함수를 $h(t)$라 할 때, $h'\left(\frac{5}{4}\right)$의 값은? [5.5점]



① $\frac{1}{27}$　② $\frac{4}{27}$　③ $\frac{7}{27}$
④ $\frac{10}{27}$　⑤ $\frac{13}{27}$

277. 서로 다른 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$를
$f(x)=-\frac{ax^3+bx}{x^2+1}$라 하자. 모든 실수 x에 대하여
$f'(x)\neq 0$이고,
두 함수 $g(x)=f(x)-f^{-1}(x)$, $h(x)=(g\circ f)(x)$가
$g(2)=h(0)$, $g'(2)=-5h'(2)$를 만족할 때, $5f'(2)+2(a+b)$의 값은?
(5.4점)

① 4　② 6　③ 8
④ 10　⑤ 12

278. 함수 $f(x)=\ln\left|\frac{x}{3}\right|+\left|\ln\left(\frac{-x}{3}\right)\right|$에 대하여
$\lim_{h\to 0}\frac{f(-3+h)-f(-3-h)}{h}$ 의 값을 구하고 그 과정을 논술하시오. [8.0점]

279. $t \geq 6-3\sqrt{2}$ 인 실수 t에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2+tx & (x<0) \\ -3x^2+tx & (x \geq 0) \end{cases}$$

일 때, 다음 조건을 만족시키는 실수 k의 최솟값을 $g(t)$라 하자.

(가) 닫힌구간 $[k-1,\ k]$에서 함수 $f(x)$는 $x=k$에서 최댓값을 갖는다.
(나) 닫힌구간 $[k,\ k+1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=k+1$에서 최솟값을 갖는다.

$6\times\{g'(4)-g'(2)\}$의 값은? [6점]

① $3+2\sqrt{3}$ ② $2+3\sqrt{3}$ ③ $2+\sqrt{3}$
④ $1+\sqrt{3}$ ⑤ $1+2\sqrt{3}$

280. 곡선 $x^2+2xy-5y^2=7$ 위의 서로 다른 두 점 $(r,\ k)$, $(s,\ k)$에서의 $\dfrac{dy}{dx}$를 각각 $a,\ b$라 하자. $ab=-1$일 때, rs의 값은? (단, $r,\ s,\ k,\ a,\ b$는 실수이고, $r-5k \neq 0,\ s-5k \neq 0$) [5.2점]

① $-\dfrac{207}{6}$ ② $-\dfrac{119}{12}$ ③ $-\dfrac{85}{12}$
④ $-\dfrac{35}{6}$ ⑤ $-\dfrac{14}{3}$

281. 두 상수 $p,\ q\ (p<q)$에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x)=(x-p)(x-q)^2$이라 하고 함수 $g(x)=x^3+x+1$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f\circ g^{-1})(x)$라 하자.
함수 $(x-1)|h(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $h'(3)=2$
일 때, $f'(8)$의 값은? (4.3점)

① 72 ② 67 ③ 64
④ 60 ⑤ 57

2. 도함수의 활용(step1)

접선의 방정식

282. 곡선 $y=\frac{\ln x}{x}$ 위의 점 $(a,\ 0)$에서의 접선의 y절편은 b이다. $a\times b$의 값은? [4.4점]

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

283. 곡선 $x^3-y^3+7=0$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는? [4.0점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

284. 곡선 $y=x\cot x$ 위의 점 $\left(\frac{\pi}{4},\ a\right)$에서의 접선의 기울기를 b라 할 때, $a+b$의 값은?[4.6점]

① $1-\frac{\pi}{6}$ ② $1-\frac{\pi}{5}$ ③ $1-\frac{\pi}{4}$
④ $1-\frac{\pi}{3}$ ⑤ $1-\frac{\pi}{2}$

변곡점

285. 곡선 $y=\frac{\ln x}{x}$의 변곡점의 x좌표는? [3.9점]

① $e^{\frac{3}{2}}$ ② e^2 ③ $e^{\frac{5}{2}}$
④ e^3 ⑤ $e^{\frac{7}{2}}$

286. 곡선 $y=\frac{\ln x}{x}$ 의 변곡점의 x좌표는?

① $e^{\frac{1}{2}}$ ② e ③ $e^{\frac{3}{2}}$
④ e^2 ⑤ $e^{\frac{5}{2}}$

함수그래프의 성질

287. 함수 $f(x)=\frac{\ln x}{x}\ (x>0)$에 대한 설명으로 옳은 것은? [4.6점]

① 열린구간 $(0,\ e)$에서 함수 $f(x)$는 감소한다.
② 열린구간 $(e,\ e\sqrt{e})$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.
③ 함수 $f(x)$는 $x=e$에서 극솟값 $\frac{1}{e}$을 갖는다.
④ 함수 $f(x)$의 변곡점의 y좌표는 $\frac{3}{2e\sqrt{e}}$이다.
⑤ 열린구간 $(e,\ e\sqrt{e})$에서 $y=f(x)$는 아래로 볼록하다.

함수 그래프의 최대 최소

288. 닫힌구간 $[0,\ \pi]$ 에서 정의된 함수 $f(x)=\sin x+\cos x$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 $s,\ t$ 라 할 때, $s-t$ 의 값은?

① $\sqrt{3}$ ② $\sqrt{3}-1$ ③ $\sqrt{3}+1$
④ $\sqrt{2}-1$ ⑤ $\sqrt{2}+1$

함수의 극대극소

289. 함수 $f(x)=x\ln x$ 의 극솟값은?

① $-\frac{1}{e}$ ② $-\frac{2}{e}$ ③ $-\frac{3}{e}$
④ $-\frac{4}{e}$ ⑤ $-\frac{5}{e}$

평면운동에서의 속도와 가속도

290. 좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$ 의 시각 t 에서의 위치가 $x=2e^t,\ y=3e^t\sin t$ 일 때, $t=\frac{\pi}{2}$ 에서의 점 P 의 속력은? [4.0점]

① $e^{\frac{\pi}{4}}$ ② $\sqrt{5}\,e^{\frac{\pi}{2}}$ ③ $\sqrt{13}\,e^{\frac{\pi}{2}}$
④ $\sqrt{5}\,e^{\pi}$ ⑤ $\sqrt{13}\,e^{\pi}$

291. 좌표평면 위를 움직이는 점 P 의 시각 t $(t>0)$ 에서의 위치 $(x,\ y)$ 가

$$x=t+\ln t^2,\ \ y=t^2+\ln t$$

이다. 점 P 의 시각 $t=1$ 에서의 속력을 v 라 할 때, v^2 의 값은?

① 18 ② 19 ③ 20
④ 21 ⑤ 22

2. 도함수의 활용(step2)

접선의 방정식

292. 매개변수 $t\,(t>0)$으로 나타낸 곡선

$$x=t^2-2t,\ y=\frac{t}{2}+\frac{a}{t}$$

위의 점 $(8,\ 3)$에서의 접선의 기울기는? (단, a는 상수이다.) [4.7점]

① $\frac{1}{36}$ ② $\frac{1}{32}$ ③ $\frac{1}{28}$
④ $\frac{1}{24}$ ⑤ $\frac{1}{20}$

293. 곡선 $\ln y^2+\frac{x}{y}=1$위의 점 $(-e,\ e)$ 위에서의 접선의 방정식을 구하고 그 과정을 논술하시오. [5점]

294. 점 $(n,\ 0)$을 지나고 곡선 $y=(2x-1)e^x$에 접하는 직선이 존재하도록 하는 음의 정수 n의 최댓값은? [5.0점]

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

295. 함수 $f(x)=\sin 2x$의 그래프 위의 점 $\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은? [4.2점]

① $y=\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}$
② $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{\pi\sqrt{3}}{18}+\frac{\sqrt{3}}{2}$
③ $y=x-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$
④ $y=\frac{2\sqrt{3}}{3}x-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}+\frac{\sqrt{3}}{2}$
⑤ $y=\sqrt{3}x-\frac{\pi\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

296. 함수 $f(x)=|\ln x|$와 양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 $y=t$가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P, Q라 할 때, $y=f(x)$위의 점 P에서의 접선의 기울기를 m_{P}, $y=f(x)$위의 점 Q에서의 접선의 기울기를 m_{Q}라 하자, $m_{\mathrm{Q}}-m_{\mathrm{P}}=\frac{5}{2}$일 때, t의 값은?(단, 점 P의 x좌표는 점 Q의 x좌표보다 작다.)

① $\frac{1}{2}\ln 2$ ② $\ln 2$ ③ $\frac{3}{2}\ln 2$
④ $2\ln 2$ ⑤ $\frac{5}{2}\ln 2$

297. 함수 $f(x)=\ln x$와 양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-t$와 $y=t$가 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기를 m_P, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 Q에서의 접선의 기울기를 m_Q라 하자.
$m_P+m_Q=\frac{17}{4}$일 때, t의 값은? [4.6점]

① $\frac{1}{2}\ln 2$ ② $\ln 2$ ③ $\frac{3}{2}\ln 2$
④ $2\ln 2$ ⑤ $\frac{5}{2}\ln 2$

298. 자연수 n에 대하여 원 $(x-2n)^2+y^2=1$과 원점을 지나는 직선이 제 1사분면에서 접할 때, 이 직선의 기울기 를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$의 값을 구하고 풀이 과정을 서술하시오.

299. 점 $(k,\ 0)$에서 곡선 $y=e^{-x^2}$에 오직 하나의 접선을 그을 수 있을 때, 상수 k의 값을 모두 곱한 값은? [4.5점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

300. 곡선 $y=e^x$의 제2사분면 위의 점 $(t,\ e^t)$에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 삼각형 OPQ의 넓이의 최댓값은? (단, O는 원점이다.) [4.6점]

① $\frac{2}{e}$ ② $\frac{5}{2e}$ ③ $\frac{3}{e}$
④ $\frac{7}{2e}$ ⑤ $\frac{4}{e}$

변곡점

301. 곡선 $y=xe^{-x}$의 변곡점의 좌표는? [4.1점]

① $(0,\ 0)$ ② $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2\sqrt{e}}\right)$ ③ $\left(1,\ \frac{1}{e}\right)$
④ $\left(2,\ \frac{2}{e^2}\right)$ ⑤ $\left(4,\ \frac{4}{e^4}\right)$

302. 함수 $f(x)=xe^{ax}$에 대하여 곡선 $f(-x-2)$의 변곡점의 x좌표가 -3일 때, 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 x좌표는 b이다. 이때, ab의 값은? (단, a는 0이 아닌 상수) [4.1점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

함수그래프의 성질

303. 함수 $f(x)=(x^3-2x^2-x+8)e^{-x}$이 있다. 자연수 k에 대하여 함수 $|f(x)-f(k)|$가 $x=\alpha$에서 미분가능하지 않은 실수 α의 개수를 a_k라 할 때, $\sum_{k=1}^{10} ka_k$의 값은?

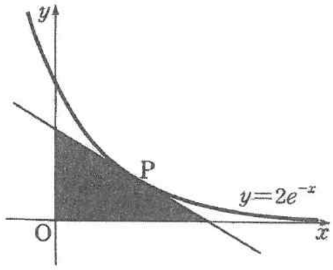
① 107　② 108　③ 109
④ 110　⑤ 111

함수의 최대최소

304. $x>0$일 때, 부등식 $2x-x\ln x \le k$가 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값은? [3.8점]

① $\sqrt{e}$　② $\sqrt{2e}$　③ e
④ $2e$　⑤ e^2

305. 곡선 $y=2e^{-x}$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ 2e^{-t})$에서의 접선과 x축 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이의 최댓값을 구하고 그 과정을 논술하시오. (단, $t>0$) [5점]



306. 점 $\mathrm{A}(6,\ 6)$와 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$ 위의 점 P에 대하여, 선분 AP의 길이의 최솟값은 α이고 이때 P의 좌표는 $(a,\ b)$이다. α^2+a+b의 값은? (단, $a>b$) [5.1점]

① 24　② 28　③ 32
④ 36　⑤ 40

함수의 극대극소

307. 함수 $f(x)=e^{-x}(\ln x-3)$가 $x=a$에서 극값을 가질 때, a가 속하는 구간은? [4.8점]

① $(1,\ e)$　② $(e,\ e^2)$　③ $(e^2,\ e^3)$
④ $(e^3,\ e^4)$　⑤ $(e^4,\ e^5)$

308. 열린구간 $(0,\ 2\pi)$에서 정의된 함수 $f(x)=\ln(1+2|\cos x|)$가 $x=a$에서 극값을 갖도록 하는 모든 서로 다른 실수 a의 값의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

309. 함수 $f(x)=x^2+a\ln(x+1)$의 극값의 개수가 2가 되도록 하는 실수 a의 값의 범위는? [4.7점]

① $a>0$ ② $a=\frac{1}{2}$ ③ $0<a<\frac{1}{2}$
④ $a<\frac{1}{2}$ ⑤ $a\le\frac{1}{2}$

310. 함수 $f(x)=(x^2+2ax-3a-1)e^{-x}$의 역함수가 존재하도록 하는 모든 정수 a의 합은? [4점]

① -3 ② -2 ③ -1
④ 0 ⑤ 1

311. 함수 $f(x)=x^2+2x\ln x$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4.6점]

[보 기]

ㄱ. $f'(e)=2e+4$
ㄴ. 두 양수 $a,\ b$에 대하여 $a<b$이면 $f'(a)<f'(b)$이다.
ㄷ. 함수 $f(x)$가 $x=c$에서 극댓값을 갖는 c가 열린구간 $(e^{-2},\ e)$에 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

방정식의 실근의 개수

312. 닫힌구간 $\left[\frac{1}{e},\ e\right]$에서 정의된 함수 $f(x)=x^2\ln\frac{1}{x}$에 대하여 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 k값의 범위는 $p\le k<q$이다. 이때, $\frac{q}{p}$의 값은?

① e ② $\frac{e}{2}$ ③ $\frac{e}{3}$
④ $\frac{e}{4}$ ⑤ $\frac{e}{5}$

313. 두 함수 $f(x)=e^x$, $g(x)=k\cos x$에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3일 때, 음수 k의 값은? [5.1점]

① $-\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi}$ ② $-\frac{2\sqrt{3}}{3}e^{\frac{5}{6}\pi}$ ③ $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{5}{3}\pi}$
④ $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{7}{4}\pi}$ ⑤ $-\sqrt{2}e^{\frac{11}{4}\pi}$

314. 실수 t에 대하여 직선 $y=x+t$와 함수 $y=|\ln 4x|$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $f(t)$라 하자.
$\lim_{t\to a+}f(t)\neq\lim_{t\to a-}f(t)$를 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은 $\ln\alpha-\frac{q}{p}$라고 할 때, $\alpha+p+q$의 값은? (단, α는 자연수이고, p와 q는 서로소인 자연수) [5.2점]

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

315. 닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x)=x+2\sin x$에 대하여, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 상수 k의 범위는 $\alpha<k<\beta$이다. 이때 $\alpha+\beta$의 값은? (단, α와 β는 상수) [4점]

① $\frac{2}{3}\pi$ ② π ③ $\frac{4}{3}\pi$
④ $\frac{5}{3}\pi$ ⑤ 2π

부등식

316. $x\leq 0$에서 부등식 $x^2-3+ke^{-x}\leq 0$이 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값이 ae^b일 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은? [4.6점]

① -6 ② -3 ③ 0
④ 3 ⑤ 6

317. $-1\leq x\leq 2$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ae^x\leq x^2+e^x\leq be^x$이 성립한다. 두 실수 a, b에 대하여 $b-a$의 최솟값은? [4.5점]

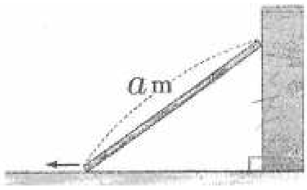
① $\frac{1}{e^2}$ ② $\frac{4}{e^2}$ ③ $\frac{1}{e}$
④ $\frac{2}{e}$ ⑤ e

직선 운동에서의 속도와 가속도

318. 곡선 $y=\sin x+2$를 움직이는 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 하자. x축 위를 움직이는 점 Q의 시각 t에서의 속도가 2일 때, 점 P의 속도의 크기의 최댓값은 a, 최솟값은 b이다. 실수 a, b에 대하여, ab의 값은? [4.7점]

① $2\sqrt{2}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{2}$
④ $5\sqrt{2}$ ⑤ $6\sqrt{2}$

319. 아래 그림과 같이 지면과 수직인 벽에 길이가 $a\,\mathrm{m}$인 사다리를 기대어 놓고, 지면과 닿은 사다리의 끝이 매초 $2\,\mathrm{m}$의 속력으로 벽으로부터 멀어지도록 끌고 있다고 한다. 지면과 닿은 사다리의 끝이 벽으로부터 $5\,\mathrm{m}$만큼 떨어져 있을 때, 벽에 닿은 사다리의 끝이 아래로 내려오는 속력은 $\frac{5}{6}\,\mathrm{m/s}$이다. 사다리의 길이 $a\,\mathrm{m}$는? (단, a는 상수이며 사다리의 두께는 무시한다.) [4.1점]



① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

평면운동에서의 속도와 가속도

320. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t>0)$에서의 위치 $(x,\ y)$가

$$x=\sqrt{t},\ y=t-\ln t^2$$

이다. 점 P의 시각 $t=4$에서의 속력은? [4.6점]

① $\frac{\sqrt{5}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ③ $\sqrt{5}$
④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $4\sqrt{5}$

321. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 위치 $(x,\ y)$가 $x=t+\ln t^2,\ y=t^2+\ln t$이다. 시각 $t=1$에서의 점 P의 속도의 크기와 가속도의 크기를 구하고 그 과정을 서술하시오.

[4.0점, 부분점수 있음.]

322. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 위치 $(x,\ y)$가

$$x=k-\cos t,\ y=2\sin t\ (k\text{는 상수})$$

이다. 점 P가 시각 $t=0$일 때 원점을 출발한 다음, 다시 원점을 지나는 모든 시각을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을

$$t_1,\ t_2,\ t_3,\ \cdots$$

이라 하자. $t_1<t<t_2$에서 점 P의 속력과 가속도의 크기가 서로 같은 시각 t의 합은 m이다. $k\times m$의 값은?

① 11π ② 12π ③ 13π
④ 14π ⑤ 15π

323. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 위치 $(x,\ y)$가 $x=k+\cos t,\ y=2\sin t$ (k는 상수)이다. 점 P가 시각 $t=0$일 때 원점을 출발한 다음, 다시 원점을 지나는 모든 시각을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $t_1,\ t_2,\ t_3,\ \cdots$이라 하자. $t_1<t<t_3$에서 점 P의 속력과 가속도의 크기가 서로 같은 시각 t의 개수는 m이다. $k+m$의 값은? [4.8점]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

324. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (0<t<2\pi)$에서의 위치 $(x,\ y)$가 $x=t-\cos t,\ y=-\sin t$이다. 점 P의 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4.2점]

[보 기]

ㄱ. 점 P의 속력이 최대일 때 가속도의 크기는 0이다.
ㄴ. 점 P가 출발한 후 속력이 처음으로 0이 되는 시각에서의 점 R의 좌표는 $(0,\ 1)$이다.
ㄷ. 두 점 Q, R의 시각 t에서의 속력을 각각 $f(t),\ g(t)$라고 하면, $0<t<2\pi$에서 $f(t)>g(t)$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2. 도함수의 활용(step3)

325. 함수 $f(x)=\ln|x|+|\ln(-x)|$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) $f(x)$의 정의역을 구하고 $f(x)$의 그래프 개형을 그리시오. (x축, y축, 원점을 표시하고 점의 포함 여부를 정확히 표현할 것).
(2.0점)

(2) $x=-1$에서 함수 $f(x)$의 미분가능성을 미분계수의 정의를 사용하여 자세히 논술하시오. (3.0점)

(3) 위의 $3-2$. 결과를 이용하여 $\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1-h)}{h}$ 값을 구하는 풀이과정과 답을 자세히 논술하시오. (5.0점)

326. 양의 실수 t에 대하여 원점을 지나고 곡선 $y=\frac{1}{e^x}+t$에 접하는 직선의 기울기를 $f(t)$라 하자. $f(t_1)=-\sqrt{e}$ 를 만족시키는 상수 t_1에 대하여 $6\times|f'(t_1)|$의 값은? [5.0점]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

327. 함수 $f(x) = -\sin 2x + k\cos x$ (단, $0 < x < 2\pi$)에 대하여 다음 조건을 만족시키는 정수 k의 개수는? [5.2점]

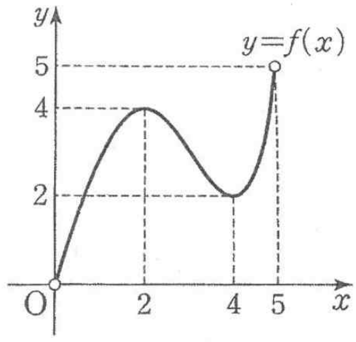
(가) $-10 \le k \le 10$
(나) 함수 $f(x)$의 변곡점의 개수가 짝수이다.

① 1 ② 6 ③ 15
④ 20 ⑤ 21

328. 곡선 $2x^2 - xy + y^2 = 9$ 위의 두 점 $(\alpha,\ k)$, $(\beta,\ k)$에서의 접선이 서로 수직일 때 $\alpha\beta$의 값은? (단, k는 $0 \le k < \frac{6\sqrt{14}}{7}$ 인 상수이고, $\alpha - 2k \ne 0$, $\beta - 2k \ne 0$이다.) [4.3점]

① -1 ② $-\frac{6}{7}$ ③ $-\frac{5}{7}$
④ $-\frac{4}{7}$ ⑤ $-\frac{3}{7}$

329. 열린구간 $(0,\ 5)$에서 미분가능한 함수 $y = f(x)$의 그래프가 아래와 같다. 함수 $g(x) = (f \circ f)(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 열린구간 $(0,\ 2)$에서 $f''(x) < 0$이다.) [4.3점]



[보 기]

ㄱ. $g(a) = a$를 만족시키는 상수 a의 값이 존재한다.
ㄴ. $g'(1) > 0$
ㄷ. 함수 $g(x)$는 열린구간 $(4,\ 5)$에서 극값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

330. 함수 $f(x) = 6\pi(x-1)^2$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x) = 3f(x) + 4\sin f(x)$라 하자. $0 < x < 2$에서 함수 $g(x)$가 극대가 되는 x의 개수는? [4.4점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

331. 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{8},\ \frac{3}{8}\pi\right)$에서 정의된 함수 $f(x)=\frac{e^{\sin x}}{e^{\cos x}}$에 대하여 $f(2x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 이때 $g'(1)$의 값을 구하고 그 과정을 논술하시오. [6점]

332. 양의 실수 t에 대하여 점 $(0,\ -1)$을 지나고 곡선 $y=xe^{x}+t$에 접하는 직선의 x절편을 $f(t)$라 하자. 미분가능한 함수 $f(t)$에 대하여 $f(a)=\frac{1}{2e}$일 때, $f'(a)$의 값은? (단, a는 상수이다.)[5.1점]

① $-\frac{5}{4e^2}$ ② $-\frac{1}{e^2}$ ③ $-\frac{3}{4e^2}$
④ $-\frac{1}{2e^2}$ ⑤ $-\frac{1}{4e^2}$

333. 1보다 큰 실수 t에 대하여 $y=t^{x}$과 곡선 $y=t^{-x}-\frac{8}{3}$이 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$라 하자. 미분가능한 함수 $f(t)$에 대하여 $f(k)=\frac{1}{2}$일 때, $f'(k)=\frac{q}{p}\times\frac{1}{\ln 3}$이다. $p+q$의 값은? (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [5.1점]

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

334. 닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x)=2\sin x\times e^{\cos^2 x}$이 있다. 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$에 대하여 집합 A를

$A=\{a\,|$ 함수 $g(t)$는 $t=a(a\neq 0)$에서 불연속이다.$\}$
라 할 때, 집합 A의 모든 원소의 곱은?[5.2점]

① $6e$ ② $7e$ ③ $8e$
④ $9e$ ⑤ $10e$

335. 함수 $f(x)=x^3-3x^2+ax+4$의 역함수 $g(x)$가 존재하고, $\lim_{h\to 0}\frac{g(b+h)-g(b)}{h}$의 값이 존재하지 않는다. $g'(b-8)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [5.2점]

① $\frac{1}{36}$ ② $\frac{1}{24}$ ③ $\frac{1}{12}$
④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{5}{36}$

336. 양의 실수 a와 함수

$$f(x)=\begin{cases} -a\{\log_{16}(x+1)\}^2+a & (-1<x<15) \\ 12e^{15-x}+3 & (x\geq 15) \end{cases}$$

에 대하여 x에 대한 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(a)$라 하자. 함수 $g(a)$가 $a=k$에서 불연속인 모든 양수 k의 값의 합은?

① 15 ② 16 ③ 17
④ 18 ⑤ 19

337. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)e^{-x}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 $(1,\ g(1))$과 점 $(4,\ g(4))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.
(나) 점 $(0,\ k)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 접선의 개수가 3인 k의 값의 범위는 $-1<k<0$이다.

$\dfrac{g(-2)}{e^3}+e^3\times g(4)$의 값은?

① 15 ② 16 ③ 17
④ 18 ⑤ 19

338. 함수 $f(x)=\ln(e^x+1)+2e^x$에 대하여 이차함수 $g(x)$와 실수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $h(x)=|g(x)-f(x-k)|$는 $x=k$에서 최솟값 $g(k)$를 갖고, 닫힌구간 $[k,\ k+1]$에서 최댓값 $2e+\ln\left(\dfrac{1+e}{\sqrt{2}}\right)$를 갖는다.

$g'\left(k-\dfrac{3}{2}\right)$의 값은? $\left(\text{단, } \dfrac{5}{2}<e<3\text{이다.}\right)$

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

339. 곡선 $x^2+2xy+4y^2=5$ 위의 두 점 $(\alpha,\ k)$, $(\beta,\ k)$에서의 접선이 서로 수직일 때, $\alpha\beta$의 값은? (단, k는 $0\le k<\dfrac{\sqrt{15}}{3}$인 상수이고, $\alpha+4k\ne0$, $\beta+4k\ne0$이다.) [5.3점]

① $-\dfrac{7}{3}$ ② -2 ③ $-\dfrac{5}{3}$
④ $-\dfrac{4}{3}$ ⑤ -1

340. 함수 $f(x)=2\sin^2 x+k\cos x$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 정수 k의 개수는?

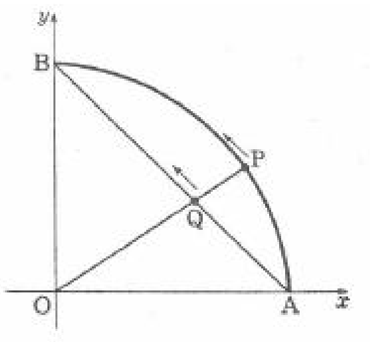
(가) $-10\le k\le 10$
(나) 함수 $f(x)$의 극댓값은 정수이다.

① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

341. 양의 실수 t에 대하여 원점을 지나고 곡선 $y=\dfrac{1}{e^x}+t$에 접하는 직선의 기울기를 $f(t)$라 하자. $f(t_1)=-e^2\sqrt{e}$를 만족시키는 상수 t_1에 대하여 $60\times|f'(t_1)|$의 값은?

① 18 ② 20 ③ 22
④ 24 ⑤ 26

342. 원점 O를 중심으로 하고 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 1)$을 지나는 사분원이 있다. 그림과 같이 점 P는 점 A에서 출발하여 호 AB를 따라 점 B를 향하여 매초 1의 일정한 속력으로 움직인다. 선분 OP와 선분 AB가 만나는 점을 Q라 하자. 점 P의 x좌표가 $\frac{1}{3}$인 순간 점 Q의 속도가 $(a,\ b)$일 때, $b-a=r+s\sqrt{2}$이다. 이때 $\frac{r}{s}$의 값은? (단, r, s는 유리수이다.) [4.4점]



① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{9}{4}$ ③ -2
④ $-\frac{7}{4}$ ⑤ $-\frac{3}{2}$

343. 함수 $f(x)=3\sin^2 x+k\cos x$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 정수 k의 개수는? [4.9점]

> (가) $-10 \le k \le 10$
> (나) 함수 $f(x)$의 극댓값은 정수이다.

① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

344. 양의 실수 a와 함수

$$f(x)=\begin{cases} -a\{\log_4(x+1)\}^2+a & (-1<x<3) \\ 2e^{3-x}+1 & (x \ge 3) \end{cases}$$

에 대하여 x에 대한 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(a)$라 하자. 함수 $g(a)$의 치역의 모든 원소의 합은? [5.1점]

① 18 ② 19 ③ 20
④ 21 ⑤ 22

345. 두 실수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=(x^2+ax+b)e^x$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=f'(1)$
> (나) $\alpha<x_1<c<x_2<\beta$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f''(x_1)\times f''(x_2)<0$을 만족시키는 두 실수 α, β가 존재하도록 하는 모든 실수 c의 값의 곱은 -1이다.

1보다 작은 실수 k에 대하여, 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le k) \\ m(x-1) & (x>k) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때,

$$g'\left(\frac{2}{m}\right)\times g'(1+k)=p\times e^q$$

이다. pq의 값을 구하고 그 과정을 논술하시오. (단, m은 0이 아닌 상수이고, p와 q는 정수이다.) [7점]

346. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} \ln|f(x)|-x & (f(x)\neq 0) \\ -x & (f(x)=0) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(0)=f'(0)$
> (나) 함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.
> (다) 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 극댓값을 갖는다.
> (라) 방정식 $g(x)=1$의 서로 다른 실근이 3개 존재한다.

$g(2)$의 값을 구하고 풀이 과정을 논술하시오. (단, $5\ln 2>3$) [7점]

347. 양의 실수 a와 함수

$$f(x)=\begin{cases} -a\{\log_8(x+1)\}^2+a & (-1<x<7) \\ -4(x-7)e^{-x+8}+7 & (x\geq 7) \end{cases}$$

에 대하여 x에 대한 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(a)$라 하자. 함수 $g(a)$에 대하여 두 집합 A, B를

$A=\{k\,|\,$함수 $g(a)$는 $a=k(k>0)$에서 불연속이다.$\}$

$B=\{g(a)\,|\,a>0\}$

라 할 때, 집합 A의 모든 원소의 합은 p, 집합 B의 모든 원소의 합은 q이다. $5p+q$의 값을 구하고 그 과정을 논술하시오.

(단, $\lim_{x\to\infty}(x-7)e^{-x+8}=0$이다.) [7.0점]

348. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다.
> (나) 모든 실수 a, b에 대하여 $f(a+b)\{1+f(a)f(b)\}=f(a)+f(b)$이다.
> (다) $f(\ln 2)=\frac{3}{5}$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $16\times g'\left(-\frac{3}{5}\right)$의 값은? [4.6점]

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

349. 좌표평면에서 곡선 $y=\sin^n x$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2},\ n=2,3,4,\cdots\right)$의 변곡점의 y좌표를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은? [4.5점]

① $\frac{1}{e^2}$ ② $\frac{1}{2e}$ ③ $\frac{1}{e}$ ④ $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ⑤ $\frac{2}{e}$

3. 적분

1. 여러가지 적분법(step1)

지수함수의 적분

350. $\int_{1}^{2}\frac{4^{x}-1}{2^{x}+1}dx$ 의 값은? [4.0점]

① $\frac{2}{\ln 2}-1$ ② $\frac{2}{\ln 2}+1$ ③ $\frac{4}{\ln 2}-1$
④ $\frac{4}{\ln 2}+1$ ⑤ $\frac{6}{\ln 2}+3$

삼각함수의 적분

351. 함수 $f(x)=\int(\cos x-\sin x)dx$에 대하여 $f(0)=1$일 때, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값은? [3.9점]

① $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{4}$
④ 1 ⑤ $\sqrt{2}$

352. 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=\frac{1-\cos 2x}{\cos^{2}x}$ 이고 $f(0)=-2$일 때, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값은? [4.7점]

① $-\frac{\pi}{2}$ ② $-\frac{\pi}{3}$ ③ $-\frac{\pi}{4}$
④ $-\frac{\pi}{5}$ ⑤ $-\frac{\pi}{6}$

치환적분

353. $\int_{e}^{e^{3}}\frac{\ln x}{x}dx$의 값은? [4.1점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

1. 여러가지 적분법(step2)

지수함수의 적분

354. 모든 실수 x에서 연속인 함수 $f(x)$의 그래프가 원점을 지나고 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=\begin{cases} 2^x \ln 2 & (x<1) \\ \frac{3}{x^3} & (x>1) \end{cases}$ 일 때, $f(2)$의 값은?
[4.4점]

① $\frac{9}{8}$ ② $\frac{11}{8}$ ③ $\frac{13}{8}$
④ $\frac{15}{8}$ ⑤ $\frac{17}{8}$

삼각함수의 적분

355. $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 인 모든 실수 x에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x-h)}{h}=3\tan^2 x+6$$

이다. $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{2}$ 일 때, $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$의 값은?

① $2-\pi$ ② $1-\pi$ ③ $-\pi$
④ $-1-\pi$ ⑤ $-2-\pi$

356. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$를 만족시킨다. $f(0)=0,\ f(1)=1$이고,
$\int_0^1 f(2f(x))f'(x)dx=\frac{1}{2}$일 때,
$\int_2^4 f(3x-2)dx$ 의 값은? [4.8점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

치환적분

357. $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}dx$ 의 값은? [4.3점]

① $\frac{1}{81}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{3}$
④ $\frac{4}{9}$ ⑤ 1

삼각치환

358. 정적분 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ 의 값을 치환적분을 이용하여 구하고 그 과정을 논술하시오. (단, $a>0$) [8.0점]

부분적분법

359. $x \geq 0$ 인 모든 실수에서 정의된 함수 $f(x)=(3x^2+2)e^x$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때,

$$\int_2^{14e^2} \frac{x}{f'(g(x))}dx$$

의 값은?

① $6e^2-6$ ② $7e^2-7$ ③ $8e^2-8$
④ $9e^2-9$ ⑤ $10e^2-10$

360. 함수 $f(x)=(5x^2+2)e^x$ 의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\int_2^{7e} \frac{x}{f'(g(x))}dx$ 의 값은? [4.9점]

① $7e-8$ ② $7e-10$ ③ $7e-12$
④ $7e-14$ ⑤ $7e-16$

361. $\int_1^e (\ln x)^2 dx = a$, $\int_0^{\pi} e^x \cos x dx = b$ 일 때, $a-b$ 의 값은? [4.4점]

① $-e-\frac{1}{2}e^{\pi}+\frac{3}{2}$ ② $-e+\frac{1}{2}e^{\pi}-\frac{5}{2}$ ③ $e+\frac{1}{2}e^{\pi}-\frac{3}{2}$
④ $e+\frac{1}{2}e^{\pi}+\frac{5}{2}$ ⑤ $e+e^{\pi}+\frac{1}{2}$

362. 일차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x)\sin x - f'(x)\cos x\}dx = 2$

(나) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x)\cos x + f'(x)\sin x\}dx = \frac{5\pi}{2}+2$

$12+\int_0^1 e^x f(x^2)dx$ 의 값은?

① $4e$ ② $5e$ ③ $6e$
④ $7e$ ⑤ $8e$

363. 일차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_0^1 \{f(x)+f'(x)\}e^x dx = 4e-1$

(나) $f(x)$의 각 항의 계수는 유리수이다.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx$ 의 값은? [5.0점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

364. 실수 전체 집합에서 연속이고 y축 대칭인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_{0}^{1} f(x)dx=7$
(나) $\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx=26-\int_{0}^{2} x^2 f(1-x)dx$

함수 $g(x)$가 $g(x)=\int_{-1}^{x} f(t)dt$일 때, $\int_{-1}^{1} xg(x)dx$의 값은? [5.3점]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

365. $\int_{0}^{2} 4e^{2x}(x^2-2x)dx=pe^4+q$를 만족시키는 두 정수 p, q에 대하여 $p+q$의 값은? (단, e^4은 무리수이다.) [4.9점]

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

366. 함수 $f(x)=e^{x^2-1}$이 있다. 양의 실수 t에 대하여 점 $(t,\ f(t))$를 지나고 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선에 수직인 직선의 x절편을 $g(t)$라 하자. $\int_{1}^{2} g(t)dt$의 값을 구하고 그 과정을 논술하시오. [5.0점]

적분을 포함한 등식

367. 함수 $f(x)$가 다음 등식을 만족시킬 때, $2f\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값은? [4.7점]

$$f(x)=\cos x+4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\,dt$$

① $-\frac{5}{6}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$
④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

368. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_{0}^{x} (x-t)f(t)dt=e^{2x^2+1}-e$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [4.9점]

① $17e^3$ ② $18e^3$ ③ $19e^3$
④ $20e^3$ ⑤ $21e^3$

1. 여러가지 적분법(step3)

369. 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여

$$xf'(x)-f(x)=\frac{6x^3}{\sqrt{4x^2+1}}$$

을 만족시킨다. $f(\sqrt{2})=\sqrt{2}$일 때, $4\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} f(x)\,dx$의 값은?

① 21 ② 22 ③ 23
④ 24 ⑤ 25

370. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x (x^3+x)f(xt)\,dt = a\sin x + b\cos 2x + c$$

를 만족시킨다. $f(0)=2$일 때, $a^2+b^2+c^2$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 8
④ 16 ⑤ 32

371. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_0^x f'(t)\,dt = \sin^2 x$
(나) $\{f'(x)\}^2 - f(2x) - 1 = 0$

모든 자연수 n에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)+n$$

이라 하고

$$a_n = \int_{\frac{n\pi}{2}}^{\frac{(n+1)\pi}{2}} \{g(x)-(-1)^n f(x)\}\,dx$$

라 하자. $\sum_{k=1}^{22} a_k = p\pi$일 때, p의 값은?

① 49 ② 81 ③ 100
④ 121 ⑤ 144

372. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $\int_0^x (x^2+x)f(xt)dt = a\sin x + b\cos x + c$를 만족시킨다. $f(0)=2$일 때, $a^2+b^2+c^2$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.) [5.2점]

① 2 ② 4 ③ 8
④ 32 ⑤ 128

373. 실수 전체의 집합에서 이계도함수와 역함수가 존재하는 함수 $f(x)$와 그 도함수 $f'(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)>1$
(나) 방정식 $f(x)=x$의 실근의 집합은 $\{0,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 10\}$이다.
(다) 방정식 $f'(x)=1$은 서로 다른 6개의 실근을 갖는다.

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 닫힌구간 $[0,\ 10]$에서 x에 대한 부등식

$$\int_{5}^{x} \frac{1}{g'(t)}dt > \int_{5}^{x} \{f'(t)\}^2 dt$$

를 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합은?

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

374. 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$와 이계도함수 $f''(x)$가 각각 실수 전체의 집합에서 연속이고, 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)>0$을 만족시킨다. $f'(0)=e,\ f'(4)=e^5$일 때, 정적분 $\int_{4}^{0}\left\{\frac{f''(x)}{f'(x)}\ln g'(f(x))\right\}dx$의 값은? (단, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다.) [5.3점]

① 8 ② 12 ③ 16 ④ 20 ⑤ 24

375. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$의 값은? [5.5점]

① $\frac{\pi}{4}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ $\pi+1$

376. 정적분 $\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(\cos x)^n} dx$ (단, n은 정수이다.)에 대하여 다음 물음에 답하시오. [총 10.0점]

(1) I_1, I_0, I_2를 각각 구하고 그 과정을 서술하시오. [1.5점]

(2) I_1을 구하고 그 과정을 서술하시오. [2.0점]

(3) 모든 정수 n에 대하여 $n\mathrm{I}_n - (n+1)\mathrm{I}_{n+2} + (\sqrt{2})^n = 0$이 성립함을 증명하시오. [2.5점]

(4) $\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx$와 $\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^3} dx$를 구하고 그 과정을 서술하시오. [4.0점]

377. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x) = \ln\{f(x) + f'(x) + f''(x) - 1\}$이 있다. 상수 a와 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $g(x) > 0$이고
$$\int_a^{2a+x} g(t)\,dt = \int_{2a-x}^{a+2} g(t)\,dt$$
(나) $g(1) = \ln 3$

$\int_3^7 \{f'(x) + 2a\} g(x)\,dx$의 값은? [5.2점]

① $78\ln 3 - 24$ ② $79\ln 3 - 24$ ③ $80\ln 3 - 24$
④ $81\ln 3 - 24$ ⑤ $82\ln 3 - 24$

2. 적분의 활용(step1)

적분과 극한

378. $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_2^x (2^t-\cos\pi t)dt$의 값은? [4.4점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

정적분과 넓이의 활용

379. 곡선 $y=\ln(x+1)$과 y축 및 직선 $y=2$로 둘러싸인 도형의 넓이는? [4.0점]

① e^2-1　② e^2-2　③ e^2-3
④ e^2-4　⑤ e^2-5

2. 적분의 활용(step2)

적분과 극한

380. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 도함수가 연속인 함수 $f(x)$는 $f(x)>0$이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}\int_3^x \frac{f'(t)}{f(t)}dt=9$
(나) $f(3)=3$

$\lim_{x\to 3}\frac{1}{x^2-9}\int_9^{3x} f'\left(\frac{1}{3}t\right)dt$의 값은? [4.8점]

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{9}{2}$
④ $\frac{25}{3}$　⑤ $\frac{27}{2}$

적분과 급수

381. 극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin^3\frac{\pi}{n}+\sin^3\frac{2\pi}{n}+\sin^3\frac{3\pi}{n}+\cdots+\sin^3\frac{n\pi}{n}\right)$의 값은? [4.5점]

① $\frac{4}{3\pi}$　② $\frac{5}{3\pi}$　③ $\frac{2}{\pi}$
④ $\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{5}{3}$

382. 함수 $f(x)=2x^3+3x^2$에 대하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(-1+\frac{2k}{n}\right)$의 값은? [4.3점]

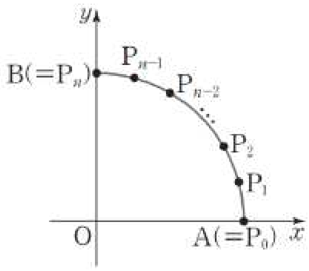
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 6

383. 자연수 n에 대하여 사분원

$x^2+y^2=4\,(x\ge 0,\ y\ge 0)$의 호 AB를 n등분하여 양 끝점과 각 분점을 차례로 $\mathrm{A}(=\mathrm{P}_0)$, P_1, P_2, $\cdots$, P_{n-1}, $B(=P_n)$라 하자. 원 위의 점 $\mathrm{P}_k\,(1\le k\le n-1)$에 대하여, 부채꼴 OAP_k의 넓이를 S_k, 삼각형 OBP_k의 넓이를 T_k라 할 때, 극한값

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_kT_k$의 값을 구하고, 그 과정을 서술하시오. (단, O는 원점이다.)

[6.0점, 부분점수 있음.]



정적분과 넓이의 활용

384. 실수 t에 대하여 곡선 $y=\cos^2x+2$와 x축 및 두 직선 $x=t$, $x=t+\frac{\pi}{4}$로 둘러싸인 부분의 넓이의 최댓값은? [4.9점]

① $\frac{5}{8}\pi$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{5}{8}\pi$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{5}{4}\pi$
④ $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{5}{4}\pi$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}\pi$

385. 곡선 $y=e^{\frac{1}{2}x}$위의 두 점 $(0,\ 1)$, $(2,\ e)$를 지나는 직선 $y=f(x)$에 대하여 곡선 $y=e^{\frac{1}{2}x}$과 직선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이가 $pe+q$이다. $p+q$의 값은? (단, p, q는 상수이다.) [4.6점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

386. 다음 두 곡선과 두 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는? [4.5점]

$$y=e^{x},\ y=e^{-x},\ x=-2,\ x=1$$

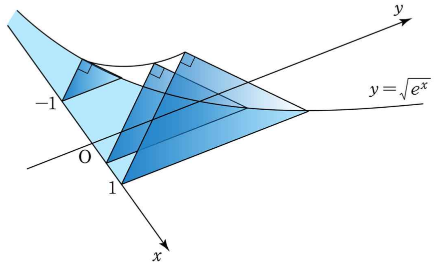
① $-e^{2}-e+\frac{1}{e^{2}}+\frac{1}{e}+10$
② $-e^{2}+e-\frac{1}{e^{2}}+\frac{1}{e}+5$
③ $e^{2}-e+\frac{1}{e^{2}}-\frac{1}{e}-2$
④ $e^{2}+e-\frac{1}{e^{2}}-\frac{1}{e}-6$
⑤ $e^{2}+e+\frac{1}{e^{2}}+\frac{1}{e}-4$

입체도형의 부피

387. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=\sqrt{x}$와 두 직선 $x=n,\ x=n+1$ 및 x축으로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형이고 이 입체도형의 부피를 V_n이라고 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{V_n V_{n+1}}=\frac{q}{p}$이다. 이 때, $q-p$의 값은? (단, p와 q는 서로소인 자연수) [4.8점]

① 19 ② 23 ③ 27
④ 31 ⑤ 35

388. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{e^{x}}$과 x축 및 두 직선 $x=-1,\ x=1$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 빗변이 입체도형의 밑면 위에 놓이는 직각삼각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [4.5점]



① $\frac{e}{4}-\frac{1}{e}$ ② $\frac{e}{4}-\frac{1}{2e}$ ③ $\frac{e}{4}-\frac{1}{3e}$
④ $\frac{e}{4}-\frac{1}{4e}$ ⑤ $\frac{e}{4}-\frac{1}{5e}$

389. 곡선 $y=-x^{2}+2x$와 x축으로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 그 부피는? [4.6점]

① $\frac{11}{15}$ ② $\frac{16}{15}$ ③ $\frac{19}{15}$
④ $\frac{23}{15}$ ⑤ $\frac{28}{15}$

곡선 $x = f(t), y = g(t)$의 길이

390. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $(x,\ y)$가 $x=2\ln t,\ y=t+\dfrac{1}{t}$ 일 때, $t=1$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는? [4.4점]

① $\dfrac{5}{3}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{7}{3}$
④ $\dfrac{8}{3}$ ⑤ 2

391. 좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$의 시각 t에서의 위치가

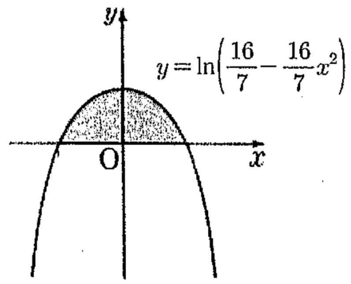
$$x=e^{-t}\cos 2t,\ y=e^{-t}\sin 2t$$

일 때, 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=a\ (a>0)$까지 움직인 거리를 $s(a)$라 하자. $\lim_{a\to\infty}s(a)$의 값은? [4.7점]

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$
④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

곡선 $y = f(x)$의 길이

392. 그림은 곡선 $y=\ln\left(\dfrac{16}{7}-\dfrac{16}{7}x^2\right)$을 나타낸 것이다. 이 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 둘레의 길이는? [4.8점]



① $2\ln 5$ ② $5\ln 2$ ③ $2\ln 7$
④ $6\ln 2$ ⑤ $4\ln 3$

2. 적분의 활용(step3)

393. 두 함수

$f(x)=\ln(4+x)+\ln(2-x)-1,\ g(x)=|x+1|\ln\sqrt{5}-1$

에 대하여 두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$가 만나는 두 점의 x좌표는 모두 정수이다. 두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [5.3점]

① $4\ln5-8$ ② $6\ln5-8$ ③ $8\ln5-8$
④ $10\ln5-8$ ⑤ $12\ln5-8$

394. n 이하의 자연수 k에 대하여 $x_k=-1+\dfrac{k}{n}$라 하자. 함수 $f(x)=e^{2x}+e^{x}+\dfrac{x}{e}$의 그래프 위의 점 $\mathrm{A}_k(x_k,\ f(x_k))$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B_k라 하고, 점 A_k에서 x축에 내린 수선의 발을 C_k라 하자. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\{f(x_k)\}^4}{\overline{\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k}}$의 값은?

(단, n은 자연수이다.) [5.4점]

① $2-\dfrac{1}{2e^4}$ ② $2+\dfrac{2}{e^4}$ ③ $4-\dfrac{1}{4e^8}$
④ 14 ⑤ $4e^8+\dfrac{1}{4}$

395. 상수 k에 대하여 함수 $f(x)=\sin^3x-k\sin x$가 있다. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$에 대하여 두 함수 $f(x),\ g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

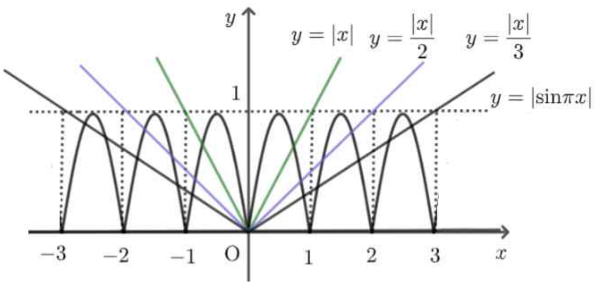
> (가) $0\le x\le 2\pi$일 때, 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 5이다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $|f(x)|=|g(x)|$이다.

$\displaystyle\int_0^{2\pi}g(x)dx>0$일 때, $\displaystyle\int_0^{2\pi}g(x)dx$의 값으로 가능한 모든 값의 합은?[5.3점]

① $\dfrac{2}{3}$ ② 1 ③ $\dfrac{4}{3}$
④ $\dfrac{5}{3}$ ⑤ 2

한눈에 보는 정답

1. ②
2. ②
3. ①
4. ⑤
5. ③
6. ②
7. ③
8. ①
9. ②
10. ⑤
11. ①
12. ②
13. ④
14. ①
15. ④
16. ④
17. ③
18. ①
19. ④
20. ⑤
21. ②
22. ①
23. ②
24. ⑤
25. 18
26. ③
27. ①
28. ③
29. ④
30. ④
31. ⑤
32. ③
33. ③
34. ④
35. ③
36. ①
37. ③
38. $0,\ 1,\ 3,\ 4$
39. ②
40. ③
41. (1) $\frac{a}{2}$ (2) $-\frac{a}{2}$ (3) $3x$ (4) $(a-3)x$ (5) $a=\frac{4}{3}$ 또는 $a=4$
42. ⑤
43. ⑤
44. ①
45. ①
46. ①
47. ⑤
48. ②
49. ③
50. ③
51. $t=\frac{5}{2}$ 또는 $t=\frac{4}{9}$ 또는 $t=\frac{2}{3}$
52. ③
53. ⑤
54. ③
55. ③
56. ⑤
57. ②
58. ⑤
59. ③
60. ⑤
61. ①
62. ③
63. ③
64. ④
65. ②
66. ⑤
67. ①
68. ⑤
69. ②
70. ③
71. ⑤
72. ③
73. ⑤
74. ③
75. ①
76. ②
77. ⑤
78. (1) $y=|\sin \pi x|$의 주기는 1, 최댓값 1, 최솟값 0이므로



(2) $a_1=3,\ a_2=7,\ a_3=11,\ a_n=4n-1$

(3) $\frac{1}{12}$

79. ④
80. ⑤
81. ③
82. ②

83. ①
84. ④
85. ⑤
86. ③
87. ②
88. ③
89. ②
90. ⑤
91. ②
92. ①
93. ①
94. ②
95. ②
96. ⑤
97. ③
98. ②
99. ②
100. ④
101. ③
102. ⑤
103. $\frac{600}{7}$
104. ②
105. ②
106. ⑤
107. ④
108. ④
109. ④
110. ⑤
111. (1) $x=2, 3, 4$ (2) $-\frac{1}{3}, \ 0, \ 1$
112. ④
113. ①
114. ⑤
115. ④
116. ⑤
117. ②
118. ④
119. ⑤
120. ①
121. ④
122. ②
123. ④
124. ⑤
125. ②
126. ①
127. ①
128. ②
129. ⑤
130. ⑤
131. ②
132. ④
133. ①
134. ⑤
135. 16
136. ③
137. ③
138. ①
139. ③
140. ①
141. -2
142. ⑤
143. ①
144. ②
145. $f(2)=-2, \ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\frac{1}{4}$
146. ③
147. ②
148. ③
149. 36
150. ③
151. ④
152. ③
153. ④
154. ①
155. ④
156. ②
157. ④
158. ②
159. ④
160. ②
161. ②
162. ④
163. ③
164. ④
165. ②
166. ⑤
167. ④
168. ④
169. ②
170. ④
171. ①
172. (1) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ (2) 2 (3) 0
(4) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\sin(2x+h)-\sin2x}{h}$

$=\frac{\sin2x\cos2h+\cos2x\sin2h-\sin2x}{h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{-\sin2x(1-\cos2h)}{h}+\frac{\cos2x\sin2h}{h}\right\}$

$=\lim_{h\to0}\left\{-\sin2x\times\frac{(1-\cos2h)}{h}+2\cos2x\times\frac{\sin2h}{2h}\right\}$

$=(-\sin2x)\times0+2\cos2x\times1$

$=2\cos2x$

173. ①
174. ④
175. ③
176. ①
177. ④
178. ④
179. ③
180. ②
181. ③
182. ④
183. 10
184. $a=1,\ b=\frac{1}{2}$
185. ①
186. ①
187. 12
188. ②
189. $\frac{3\sqrt{2}}{20}$
190. ③
191. ①
192. ②
193. ⑤
194. ②
195. ③
196. 4
197. ④
198. ②
199. ③
200. ②
201. ①
202. $\frac{1}{6}$
203. (1) π (2) 9π
204. ⑤
205. ④
206. ⑤
207. ②
208. ②
209. ②
210. ①
211. ⑤
212. ①
213. ③
214. ②
215. ④
216. ②
217. ②
218. ⑤
219. ③
220. ②
221. ④
222. ②
223. ①
224. ④
225. ④
226. ①
227. ①
228. ②
229. ⑤
230. ③
231. ②
232. ④
233. ①
234. ⑤
235. ②
236. ④
237. ①
238. 5
239. ④
240. ②
241. ②
242. ②
243. ①
244. ①
245. ③
246. ③
247. ③
248. ⑤
249. $-\frac{5}{9}$
250. ③
251. ①
252. ③
253. $-\sqrt{3}$
254. ③
255. ③

256. ③
257. ⑤
258. ③
259. ②
260. ①
261. ②
262. ⑤
263. (1) $\frac{dy}{dx}=3\cos 2t(1+\cos 2t)$

(2) $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-3\sin 2t(1+2\cos 2t)}{1-\cos 2t}$

(3) $\frac{d^2y}{dx^2}\left(t=\frac{\pi}{6}\right)=-6\sqrt{3}$

264. $-\frac{4}{9}$
265. (1) $a=-1$
(2) (1)에서 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$f'(x)=\begin{cases}-(2x+1)e^{2x}+1 & (x<0)\\ (2x+1)e^{2x}-1 & (x\geq 0)\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0-}f'(x)=\lim_{x\to 0-}\{-(2x+1)e^{2x}+1\}=-1+1=0$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0+}f'(x)=\lim_{x\to 0-}\{(2x+1)e^{2x}-1\}=1-1=0$$

따라서 $f'(x)$는 $x=0$에서 연속
(3) $f'(0)=0$이므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{-(2x+1)e^{2x}+1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0-}\left\{-2e^{2x}-\frac{e^{2x}-1}{x}\right\}$$

$$=-2-2$$

$$=-4$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{(2x+1)e^{2x}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\left\{2e^{2x}+\frac{e^{2x}-1}{x}\right\}$$

$$=2+2$$

$$=4$$

따라서 $f'(x)$는 $x=0$에서 미분불가능
266. ①
267. $-\frac{1}{4}$
268. ⑤
269. ①
270. (문제오류) → 보기를 정정한 후 정답은 ②
271. ③
272. ⑤
273. ②
274. ⑤
275. ③
276. ④
277. ②
278. $-\frac{2}{3}$
279. ④
280. ②
281. ⑤
282. ⑤
283. ①
284. ③
285. ①
286. ③
287. ④
288. ⑤
289. ①
290. ③
291. ①
292. ①
293. $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2e}{3}$
294. ②
295. ③
296. ②
297. ④
298. $\frac{1}{2}$
299. ①
300. ①
301. ④
302. ①
303. ①
304. ③
305. $\frac{4}{e}$
306. ⑤
307. ④
308. ③
309. ③
310. ①
311. ③
312. ②
313. ⑤
314. ②
315. ⑤
316. ②
317. ⑤
318. ③
319. ④
320. ①

321. 속도의 크기$=3\sqrt{2}$, 가속도의 크기$=\sqrt{5}$
322. ②
323. ③
324. ①
325. (1) $\{x \mid x<0\}$ (2) 미분불가능 (3) -2
326. ⑤
327. ④
328. ②
329. ③
330. ④
331. $\frac{\sqrt{2}}{4}$
332. ⑤
333. ④
334. ③
335. ③
336. ⑤
337. ④
338. ③
339. ①
340. ④
341. ④
342. ②
343. ④
344. ⑤
345. 6
346. $2\ln3-5\ln2+2$
347. 92
348. ⑤
349. ④
350. ①
351. ⑤
352. ①
353. ④
354. ⑤
355. ⑤
356. ⑤
357. ⑤
358. $\frac{a^2}{4}\pi$
359. ③
360. ③
361. ③
362. ④
363. ①
364. ①
365. ②
366. $\frac{e^6+2}{2}$
367. ④
368. ④
369. ①
370. ②
371. ④
372. ④
373. ①
374. ②
375. ①
376. (1) $\mathrm{I}_{-1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\mathrm{I}_0=\frac{\pi}{4}$, $\mathrm{I}_2=1$

(2) $\mathrm{I}_1=\ln(\sqrt{2}+1)$

(3) $\mathrm{I}_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(\cos x)^n}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{(\cos x)^{n+1}}dx$

$u=(\cos x)^{-n-1}$, $v'=\cos x$라 하면

$u'=(-n-1)(\cos x)^{-n-2}\cdot(-\sin x)$이고 $v=\sin x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{(\cos x)^{n+1}}dx$$

$$=\left[\frac{\sin x}{(\cos x)^{n+1}}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{(-n-1)\times\frac{\sin x}{(\cos x)^{n+2}}\times(-\sin x)\right\}dx$$

$$=(\sqrt{2})^n-(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{(\cos x)^{n+2}}\times\sin^2 x\right)dx$$

$$=(\sqrt{2})^n-(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{\frac{1}{(\cos x)^{n+2}}\times(1-\cos^2 x)\right\}dx$$

$$=(\sqrt{2})^n-(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(\cos x)^{n+2}}dx+(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(\cos x)^n}dx$$

$$=(\sqrt{2})^n-(n+1)\mathrm{I}_{n+2}+(n+1)\mathrm{I}_n$$

따라서 $\mathrm{I}_n=(\sqrt{2})^n-(n+1)\mathrm{I}_{n+2}+(n+1)\mathrm{I}_n$ 이므로

$\therefore\ n\mathrm{I}_n-(n+1)\mathrm{I}_{n+2}+(\sqrt{2})^n=0$

(4) $\int_0^1\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1)+\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\int_0^1\frac{1}{(x^2+1)^3}dx=\frac{3}{32}\pi+\frac{1}{4}$

377. ①
378. ③
379. ③
380. ⑤
381. ①
382. ④
383. $4-\frac{8}{\pi}$
384. ②
385. ②

386. ⑤
387. ②
388. ④
389. ②
390. ④
391. ①
392. ③
393. ③
394. ③
395. ⑤

정답과 풀이

1. ②

$\lim_{n\to\infty}(3a_n-1)=5$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ 에 수렴한다고 하면

$3\alpha-1=5$ 에서 $\alpha=2$

$\lim_{n\to\infty}(2a_n+3b_n)=7$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ 에 수렴한다고 하면

$2\alpha+3\beta=4+3\beta=7$ 에서 $\beta=1$

따라서

$\lim_{n\to\infty}(b_n+5)=\beta+5=1+5=6$

2. ②

$\lim_{n\to\infty}(2a_n+3)=9$ 에서 $\lim_{n\to\infty}a_n=3$ 이므로,

$\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\{3a_n-(3a_n-2b_n)\}$

$=\frac{9-5}{2}$

$=2$

3. ①

$\lim_{n\to\infty}a_n=p$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}a_{2n}=p$

$(-1)^n(2a_n+3)=b_n$ 이라 하면 $\lim_{n\to\infty}b_n=q$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}b_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}b_{2n}=q$ …… ㉠

이때

$\lim_{n\to\infty}b_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\{(-1)^{2n-1}(2a_{2n-1}+3)\}=-(2p+3)$,

$\lim_{n\to\infty}b_{2n}=\lim_{n\to\infty}\{(-1)^{2n}(2a_{2n}+3)\}=2p+3$

이고 ㉠에서 $-(2p+3)=2p+3=q$ 이므로

$p=-\frac{3}{2}$, $q=0$

따라서

$\lim_{n\to\infty}(8pa_n+q)=8p^2+q=8\times\frac{9}{4}+0=18$

4. ⑤

$a_n=\frac{n}{n+3}$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+3}=1$

5. ③

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{n^2+2n-4}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}-\frac{4}{n^2}}=3$$

6. ②

풀이) $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-2n+1}{2n^2+3n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n^2}-\frac{2}{n^2}}=\frac{4}{2}=2$

7. ③

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n}{n^2-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{1-\frac{3}{n^2}}=3\ \ (\because\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0)$$

8. ①

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{(2n+1)(3n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{(2n+1)(3n+2)}$$

$=\frac{\frac{1}{2}}{6}=\frac{1}{12}$ 이다.

9. ②

풀이)

$\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}}<a_n<\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$ 식을 유리화하면

$\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}<a_n<\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$

$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}<\sum_{k=1}^{n}a_k<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$

$\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})$

$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})\cdots(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})$

$=(\sqrt{n+2}-\sqrt{2})$ 이고,

$\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2})$

$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{4})\cdots(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2})$

$=(\sqrt{n+3}-\sqrt{3})$ 이므로

$(\sqrt{n+3}-\sqrt{3})<\sum_{k=1}^{n}a_k<(\sqrt{n+2}-\sqrt{2})$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{2})}{\sqrt{4n+1}}\le\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{\sqrt{4n+1}}\le\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{2})}{\sqrt{4n+1}}$$

$\frac{1}{2}\le\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{\sqrt{4n+1}}\le\frac{1}{2}$ 이므로 $\frac{1}{2}$ 이다.

10. ⑤

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a+1)n^2+bn-1}{3n+1}=2$$

$a\neq-1$ 이면 발산하므로 $a=-1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{bn-1}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{b-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}}=\frac{b}{3}=2$$

$\therefore\ b=6$

$\therefore\ a+b=5$

11. ①

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n}=2$$

12. ②

$\lim_{n\to\infty}na_n=2$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

$\lim_{n\to\infty}2na_n-\lim_{n\to0}2a_n=4$

13. ④

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}+4^{n+2}}{5^n+3^{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+16\times\left(\frac{4}{5}\right)^n}{1+9\times\left(\frac{3}{5}\right)^n}=5$$

14. ①

$-1<\frac{x+5}{3}\leq1$이므로

$-8<x\leq-2$

만족하는 정수 x의 개수는 6개

15. ④

$x-2=0$ 또는 $-1<x+4\leq1$ 이므로

정수 $x=2,-3,-4$ 이다.

따라서 수열이 수렴하기 위한 모든 정수 x 의 합은 -5 이다.

16. ④

등비수열 $\{r^n\}$ 이 수렴하므로 $-1<r\leq1$ 이다.

ㄱ. $\frac{1}{r}\geq1$ 또는 $\frac{1}{r}<-1$ 이므로 발산한다.

ㄴ. $-1<\frac{r-1}{2}\leq0$ 이므로 수렴한다.

ㄷ. $-\frac{1}{2}\leq r^2-\frac{1}{2}\leq\frac{1}{2}$ 이므로 수렴한다.

따라서 수렴하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

17. ③

① $\{\sin n\pi\}$: $0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots$ 이므로 0에 수렴 (거짓)

② $\{\cos n\pi\}$: $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$ 로 진동하므로 발산 (거짓)

④ 반례) $\frac{(-1)^n}{n}$ 은 0으로 수렴 (거짓)

⑤ 반례) $\{n\cos n\pi\}$: $-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ \cdots$ 로 일정하지 않다. (거짓)

18. ①

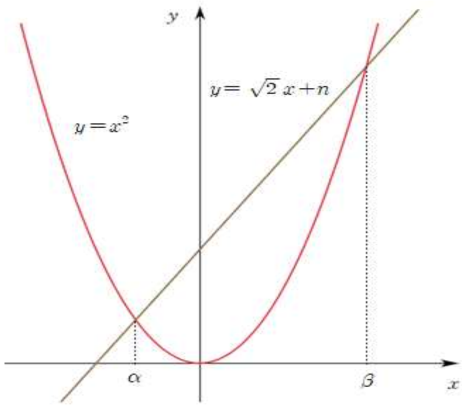
ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}=0$

ㄴ. 진동

ㄷ. 발산

ㄹ. 진동

19. ④



곡선 $y=x^2$과 직선 $y=\sqrt{2}x+n$이 만나는 두 점의 x좌표를 각각 $\alpha,\ \beta$라 하면, $x^2-\sqrt{2}x-n=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이다.

따라서 $|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{2+4n}}{2}$ 이므로

$a_n=\frac{\sqrt{3}\sqrt{2+4n}}{2}=\frac{\sqrt{12n+6}}{2}$ 이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{6n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{6n+1}}{\sqrt{12n+6}}=\sqrt{2}$$

20. ⑤

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{9n^2+4n}-an)=b$ 이므로 $a>0$

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{9n^2+4n}-an)=\lim_{n\to\infty}\frac{(9-a^2)n^2+4n}{\sqrt{9n^2+4n}+an}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(9-a^2)n+4}{\sqrt{9+\frac{4}{n}}+a}$$

$9-a^2=0$이고 $a>0$ 이므로 $a=3$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(9-a^2)n+4}{\sqrt{9+\frac{4}{n}}+a}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{9+\frac{4}{n}}+3}=\frac{2}{3}$$

$b=\frac{2}{3}$

$\therefore\ a+b=\frac{11}{3}$

21. ②

$b \le 0$ 이면 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{an^2+n}-bn)=\infty$ 이므로 $b>0$

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{an^2+n}-bn)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-b^2)n^2+n}{\sqrt{an^2+n}+bn}=\frac{1}{4}$

$a-b^2=0 \quad \cdots ①$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{b^2n^2+n}+bn}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{b^2+\frac{1}{n}}+b}=\frac{1}{2b}=\frac{1}{4}$

$b=2,\ a=4$

$\therefore\ a+b=6$

22. ①

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ 라 하면 $\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\alpha,\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{2}+1\right)=\frac{\alpha}{2}+1$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_{2n}+3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{2}+1\right)=\alpha+\frac{3}{2}\alpha+3=\frac{5}{2}\alpha+3=8$

$\therefore\ \alpha=2$

23. ②

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ 라 하면 $\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}=\alpha$

$\lim_{n\to\infty}\{(-1)^n(2a_n-k)\}$ 가 수렴하려면

$\lim_{n\to\infty}(2a_n-k)=2\alpha-k=0 \qquad \therefore\ k=2\alpha$

$\lim_{n\to\infty}\{(-1)^n(2a_n-k)\}+\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}=0+\alpha=3$

$\therefore\ k=6$

24. ⑤

풀이)

수열 $\{a_n\}$ 은 n이 홀수일 때, 1 이고, 짝수일 때 2 이다.

수열 $\{b_n\}$ 은 n이 홀수일 때, $p+q$ 이고, 짝수일 때 $-p+q$ 이다.

$\{a_n+b_n\}$은 n이 홀수일 때, $p+q+1$ 이고, 짝수일 때 $-p+q+2$ 이다.

$\{a_nb_n\}$은 n이 홀수일 때, $p+q$ 이고, 짝수일 때 $-2p+2q$ 이다.

모두 수렴하므로 $p+q+1=-p+q+2,\ \therefore\ p=\frac{1}{2}$

$p+q=-2p+2q$ 에서 $3p=q$이므로 $\therefore\ q=\frac{3}{2}$ 이다.

수열 $\{a_n\}$ 은 n이 홀수일 때, 1 이고, 짝수일 때 2 이고,

수열 $\{b_n\}$ 은 n이 홀수일 때, 2 이고, 짝수일 때 1 이므로

수열 $\{a_n\}^2$ 은 n이 홀수일 때, 1 이고, 짝수일 때 4 이고,

수열 $\{b_n\}^2$ 은 n이 홀수일 때, 4이고, 짝수일 때 1 이므로

$\lim_{n\to\infty}\{(a_n)^2+(b_n)^2\}=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)^2-2a_nb_n\}=5$이다.

25. 18

풀이)

$\lim_{n\to\infty}a_n=p$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}a_{2n}=p$

$(-1)^n(2a_n+3)=b_n$이라 하면

$\lim_{n\to\infty}b_n=q$이므로

$\lim_{n\to\infty}b_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}b_{2n}=q \quad \cdots\cdots$ ㉠

이때

$\lim_{n\to\infty}b_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\{(-1)^{2n-1}(2a_{2n-1}+3)\}$

$=\lim_{n\to\infty}(-2a_{2n-1}-3)$

$=-2p-3$,

$\lim_{n\to\infty}b_{2n}=\lim_{n\to\infty}\{(-1)^{2n}(2a_{2n}+3)\}$

$=\lim_{n\to\infty}(2a_{2n}+3)$

$=2p+3$

이고, ㉠에서 $-2p-3=2p+3=q$이므로

$p=-\frac{3}{2},\ q=0$

따라서

$\lim_{n\to\infty}(8pa_n+q)=\lim_{n\to\infty}(-12a_n)$

$=-12\lim_{n\to\infty}a_n$

$=-12\times\left(-\frac{3}{2}\right)=18$

26. ③

$x^2-2(5n+1)x+a_n=0$ 이 실근을 가지므로

$D/4=(5n+1)^2-a_n\ge 0$

$a_n\le 25n^2+10n+1 \qquad \cdots ①$

$x^2-10nx+a_n=0$ 이 허근을 가지므로

$D/4=25n^2-a_n<0$

$25n^2<a_n \qquad \cdots ②$

①, ②에 의해

$25n^2<a_n\le 25n^2+10n+1$

$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty,\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=3$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n+5b_n}{a_n+b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times\frac{a_n}{b_n}+5}{\frac{a_n}{b_n}+1}=\frac{17}{4}$

27. ①

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 이면 $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \alpha$

$x^2 - a_n x - 1 - a_{2n-1} = 0$ 이 중근을 가지므로

$D = a_n^2 + 4 + 4a_{2n-1} = 0$

$\lim_{n-\infty}(a_n^2 + 4 + 4a_{2n-1}) = \alpha^2 + 4 + 4\alpha = 0$

$\therefore\ \alpha = -2$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{2n}} = \frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{2}$

28. ③

(가)에서 모든 자연수 n에 대하여

$3n^3 + 4n^2 + 2n + 3 \le f(n) \le 3n^3 + 4n^2 + 2n + 5$

$f(x) = 3x^3 + 4x^2 + 2x + a$라 하면

$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^3} + \frac{4}{n^2} + \frac{2}{n} + a\right) = a = \frac{9}{2}$

$f(x) = 3x^3 + 4x^2 + 2x + \frac{9}{2}$

$\therefore\ f(1) = 3 + 4 + 2 + \frac{9}{2} = \frac{27}{2}$

29. ④

$2n^2 + 1 < na_n < 2n^2 + 3$ 이므로

$2\times(2n)^2 + 1 < 2n \times a_{2n} < 2\times(2n)^2 + 3$

$\frac{8n^2+1}{2n} < a_{2n} < \frac{8n^2+3}{2n}$

$\frac{8n^2+1}{2n^2} < \frac{a_{2n}}{n} < \frac{8n^2+3}{2n^2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+1}{2n^2} = 4,\ \lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+3}{2n^2} = 4$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{n} = 4$

30. ④

곡선 $y = 2x^2 - (n+1)x + a_n$ 은 x축과 만나므로

$D = (n+1)^2 - 8a_n \ge 0$

$a_n \le \frac{n^2+2n+1}{8}$ $\cdots$ ①

곡선 $y = 2x^2 - nx + a_n$ 은 x축과 만나지 않으므로

$D = n^2 - 8a_n < 0$

$a_n > \frac{n^2}{8}$ $\cdots$ ②

①, ②에 의해

$\frac{n^2}{8} < a_n < \frac{n^2+2n+1}{8}$

$\frac{n^2}{8(n^2+n-1)} < \frac{a_n}{(n^2+n-1)} < \frac{n^2+2n+1}{8(n^2+n-1)}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{8(n^2+n-1)} \le \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{(n^2+n-1)} \le \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{8(n^2+n-1)}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{8(n^2+n-1)} = \frac{1}{8},$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{8(n^2+n-1)} = \frac{1}{8},$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2+n-1} = \frac{1}{8}$

31. ⑤

$1 \le k \le n$에서 $\frac{k}{n^2+n} \le \frac{k}{n^2+k} \le \frac{k}{n^2}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n} \le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k} \le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$$

이 성립한다.

(i)

$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n} = \frac{1}{n^2+n}\times\sum_{k=1}^{n}k = \frac{1}{n(n+1)}\times\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n} = \frac{1}{2}$

(ii) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2}\times\sum_{k=1}^{n}k = \frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} = \frac{1}{2}$

따라서 극한의 대소관계에 의해 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k} = \frac{1}{2}$

32. ③

[풀이1]

$|(4n+2)a_n - 12n| < a_n + n - 1$을 정리하면,

$-a_n - n + 1 < (4n+2)a_n - 12n < a_n + n - 1$

$11n + 1 < (4n+3)a_n,\ (4n+1)a_n < 13n - 1$

따라서 $\frac{11n+1}{4n+3} < a_n < \frac{13n-1}{4n+1}$ 이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{11n+1}{4n+3} = \frac{11}{4},\ \lim_{n\to\infty}\frac{13n-1}{4n+1} = \frac{13}{4}$ 이므로

$\frac{11}{4} \le \lim_{n\to\infty} a_n \le \frac{13}{4},\ \frac{11}{4} \le k \le \frac{13}{4}$

$\therefore\ k = 3$

[풀이2]

$|(4n+2)a_n - 12n| < a_n + n - 1$에서

$\frac{|(4n+2)a_n - 12n|}{n} < \frac{a_n + n - 1}{n}$

$\left|\frac{(4n+2)a_n - 12n}{n}\right| < \frac{a_n + n - 1}{n}$

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(4n+2)a_n - 12n}{n}\right| \le \lim_{n\to\infty}\frac{a_n + n - 1}{n}$

$|4k-12| \le 1$, k가 자연수이므로 $k=3$이다.

33. ③

두 점 A, B의 좌표는 각각 $\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$, $\left(\frac{2n-2}{3}, \frac{n+2}{3}\right)$

이므로 $l_n = 2\times\left(\frac{n-1}{6}\right)^2 = \frac{1}{18}(n-1)^2$이다,

$\frac{1}{18}(2n-1)^2 \le n^2 a_n \le \frac{1}{18}(2n)^2$이므로

$\frac{(2n-1)^2}{18n^2} \le a_n \le \frac{4n^2}{18n^2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{9}$

34. ④

$\lim_{n\to\infty}(2+2^n+2^{-n})^{\frac{1}{n}}$

$= \lim_{n\to\infty}\left[2^n\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}\right]^n$

$= \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}$

$= 2\times(0+1+0) = 2$

35. ③

$24^n = 2^{3n}\times 3^n$이므로 양의 약수 중 짝수인 것은 2를 적어도 하나 포함하고 있어야 한다. 따라서 양의 약수 중에서 짝수들의 총합 a_n은

$a_n = (2+2^2+2^3+\cdots+2^{3n})(1+3+3^2+\cdots+3^n)$

$= \frac{2(2^{3n}-1)}{2-1}\times\frac{1(3^{n+1}-1)}{3-1}$ ($\because$등비수열의 합)

$= (2^{3n}-1)(3^{n+1}-1) = 3\times 24^n - 3^{n+1} - 8^n + 1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{24^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3\times 24^n - 3^{n+1} - 8^n + 1}{24^n} = 3$

36. ①

$k=1, 2, 3, \cdots, 7$일 때 $a_k = \frac{k}{8}$

$k=8$일 때 $a_8 = \frac{1}{16}$

$k \ge 9$일 때 $a_k = 0$

$\sum_{k=1}^{16} ka_k = \sum_{k=1}^{7} ka_k + 8a_8 = \sum_{k=1}^{7}\frac{k^2}{8} + \frac{1}{2} = 18$

37. ③

수열 $\left\{\left(\frac{x^2-4x-1}{4}\right)^n\right\}$이 수렴하므로 $-1 < \frac{x^2-4x-1}{4} \le 1$

i) $-1 < \frac{x^2-4x-1}{4}$

$x^2-4x+3 > 0$

$(x-1)(x-3) > 0$

$x < 1$ 또는 $x > 3$

ii) $\frac{x^2-4x-1}{4} \le 1$

$x^2-4x-5 \le 0$

$(x+1)(x-5) \le 0$

$-1 \le x \le 5$

i), ii)에서 $-1 \le x < 1$ 또는 $3 < x \le 5$

따라서 만족하는 정수 x의 값의 합은 $-1+0+4+5=8$

38. 0, 1, 3, 4

$2^{2n}a_n = (-x^2+4x+1)^n$에서 $a_n = \left(\frac{-x^2+4x+1}{4}\right)^n$

이므로 수렴하기 위해서는 $-1 < \frac{-x^2+4x+1}{4} \le 1$이다.

$-4 < -x^2+4x+1 \le 4$

즉 $x^2-4x-5 < 0$, $-1 < x < 5$

이고

$0 \le x^2-4x+3$, $x \le 1$또는 $x \ge 3$이다.

만족하는 정수 x는 0, 1, 3, 4이다.

39. ②

i) $|x| > 1$일 때

$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+2}-5x^{2n+1}-1}{x^{2n}+1}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{2x^2-5x-\frac{1}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}} = 2x^2-5x$

$f(k) = 2k^2-5k = 3$

$2k^2-5k-3=0$

$(2k+1)(k-3)=0$

$k=-\frac{1}{2}$ 또는 $k=3$

$|k|>1$이므로 $k=3$

ii) $|x|<1$일 때

$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+2}-5x^{2n+1}-1}{x^{2n}+1} = -1$

성립하지 않음

iii) $x=1$일 때

$f(1) = \lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+2}-5x^{2n+1}-1}{x^{2n}+1} = \frac{2-5-1}{1+1} = -2$

성립하지 않음

iv) $x=-1$일 때

$f(-1) = \lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+2}-5x^{2n+1}-1}{x^{2n}+1} = \frac{2+5-1}{1+1} = 3$

성립
i), ii), iii), iv)에 의해 $f(k)=3$을 만족하는 k의 값은 $3,\ -1$
따라서 만족하는 k의 값의 합은 2

40. ③
$|x|<1$일 때 $f(x)=3$
$|x|>1$일 때 $f(x)=x$
$f(-1)=1,\ f(1)=2$이므로
$f(-1)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)=6$

41. (1) $\frac{a}{2}$ (2) $-\frac{a}{2}$ (3) $3x$ (4) $(a-3)x$ (5) $a=\frac{4}{3}$ 또는 $a=4$

(1) $f(1)=\frac{a-3+3}{1+1}=\frac{a}{2}$

(2) $f(-1)=\frac{-a+3-3}{1+1}=-\frac{a}{2}$

(3) $|x|<1$일 때 $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0,\ \lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=0$이므로

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-3)x^{2n+1}+3x}{x^{2n}+1}=3x$

(4) $|x|>1$일 때 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{3}{x^{2n-1}}=0$ 이므로

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-3)x^{2n+1}+3x}{x^{2n}+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-3)x+\frac{3}{x^{2n-1}}}{1+\frac{1}{x_{2n}}}=(a-3)x$

(5) $f(1)=\frac{a}{2}$이므로

i) $\frac{a}{2}=1$일 때, 즉 $a=2$일 때

$f(f(1))=f(1)=\frac{a}{2}=1$이므로 성립하지 않음

ii) $\frac{a}{2}=-1$일 때, 즉 $a=-2$일 때

$f(f(1))=f(-1)=-\frac{a}{2}=1$이므로 성립하지 않음

iii) $\left|\frac{a}{2}\right|<1$일 때, 즉 $2<a<2$일 때

$f(f(1))=f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{3a}{2}=2$

$a=\frac{4}{3}$이므로 $2<a<2$라는 조건에 만족함

iv) $\left|\frac{a}{2}\right|>1$일 때, 즉 $a<-2$ 또는 $a>2$일 때

$f(f(1))=f\left(\frac{a}{2}\right)=(a-3)\times\frac{a}{2}=2$

$a^2-3a-4=0$
$(a-4)(a+1)=0$
$a<-2$ 또는 $a>2$이므로 $a=4$
i), ii), iii), iv)에 의해

$a=\frac{4}{3}$ 또는 $a=4$

42. ⑤
(i) $|x|<1$일 때
$\lim_{n\to\infty}x^{2n-1}=\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{4x^{2n}-x^{2n-1}}{x^{2n}+2x^{2n-1}+3}$

$=\frac{0-0}{0+0+3}=0$

(ii) $-2<x<-1$ 또는 $x>1$일 때

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n-1}}=0$이므로

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{4x^{2n}-x^{2n-1}}{x^{2n}+2x^{2n-1}+3}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4x-1}{x+2+\frac{3}{x^{2n-1}}}=\frac{4x-1}{x+2}$

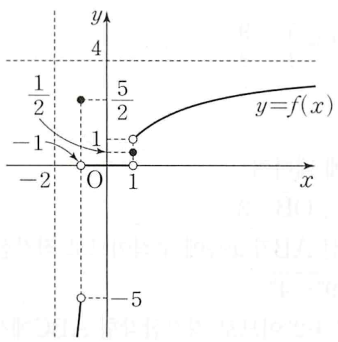
(iii) $x=1$일 때

$f(1)=\frac{4-1}{1+2+3}=\frac{1}{2}$

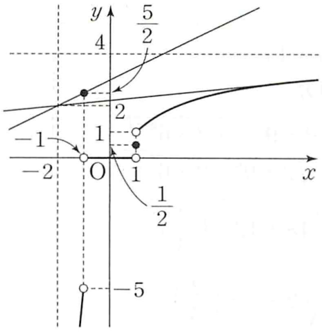
(iv) $x=-1$일 때

$f(-1)=\frac{4-(-1)}{1+2\times(-1)+3}=\frac{5}{2}$

(i)~(iv)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 직선 $y=tx+2t+2$, 즉 $y-2=t(x+2)$는 양의 실수 t의 값에 관계없이 점 $(-2,\ 2)$를 지난다. 그러므로 다음 그림과 같이 직선 $y=tx+2t+2$가 점 $\left(-1,\ \frac{5}{2}\right)$를 지날 때와 곡선 $y=\frac{4x-1}{x+2}$과 접할 때만 조건을 만족시킨다.



(a) 직선 $y=tx+2t+2$가 점 $\left(-1,\ \frac{5}{2}\right)$를 지나는 경우

$\frac{5}{2}=-t+2t+2$

에서 $t=\frac{1}{2}$

(b) 직선 $y=tx+2t+2$가 곡선 $y=\frac{4x-1}{x+2}$과 접하는 경우

$tx+2t+2=\frac{4x-1}{x+2}$ 에서

$tx^2+2(2t-1)x+4t+5=0$ 이 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(2t-1)^2-t(4t+5)=-9t+1=0$

에서 $t=\frac{1}{9}$

(a), (b)에서 조건을 만족시키는 양의 실수 t의 값은 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{9}$이고,

그 곱은 $\frac{1}{18}$ 이다. $f(-1)=\frac{4-(-1)}{1+2\times(-1)+3}=\frac{5}{2}$이므로

따라서 $2f(-1)+18a=5+1=6$

43. ⑤

(1) $nf(a)\geq 2$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\frac{|nf(a)-2|-nf(a)}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2}{n+1}=0$

이므로 모순

(2) $nf(a)<2$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\frac{|nf(a)-2|-nf(a)}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-2nf(a)}{n+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}-2f(a)}{1+\frac{1}{n}}$

$=-2f(a)$

$=1$

$\therefore\ f(a)=-\frac{1}{2}$

$\sin\pi a=-\frac{1}{2}$에서 $a=\frac{7}{6},\ \frac{11}{6},\ \frac{19}{6}$ 또는 $\frac{23}{6}$이다.

a의 합은 10이다.

【다른풀이추가】

★ $f(x)=\sin\pi x$ 주기:2

$\frac{19}{6}=\frac{7}{6}+2$, $\frac{11}{6}=\frac{7}{6}+2$

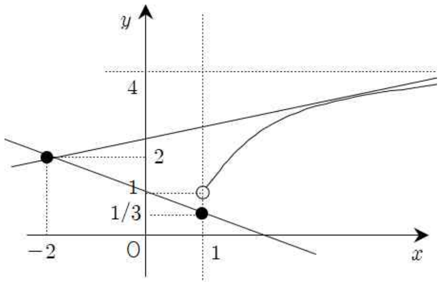
44. ①

(1) $x=1$일 때, $f(x)=\frac{1}{3}$

(2) $x>1$일 때, $f(x)=\frac{4x-1}{x+2}=-\frac{9}{x+2}+4$이므로

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & (x=1)\\ -\frac{9}{x+2}+4 & (x>1)\end{cases}$ 이다.

또한 직선 $y=tx+2t+2=t(x+2)+2$이므로 $(-2,\ 2)$를 지나는 직선이다. 이제 각각의 그래프를 그려보자.



따라서

(1) 최솟값은 직선 $y=t(x+2)+2$이 점 $\left(1,\ \frac{1}{3}\right)$을 지날 때이다. 따라서 $m=-\frac{5}{9}$이다.

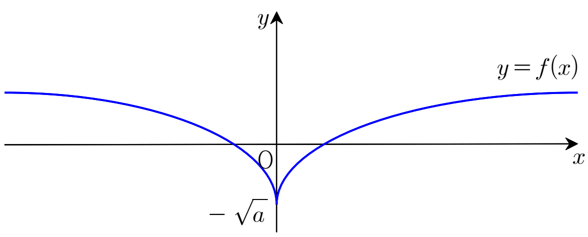
(2) 최댓값은 직선 $y=t(x+2)+2$과 곡선 $y=\frac{4x-1}{x+2}$이 접할 때이다. 즉 $t(x+2)+2=\frac{4x-1}{x+2}$이 중근을 가질 때이다.

$M=\frac{1}{9}$이다.

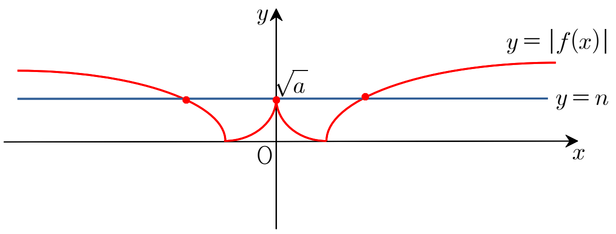
$\therefore M+m=-\frac{4}{9}$

45. ①

함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고,



곡선 $y=|f(x)|$는 $|f(0)|=|-\sqrt{a}|=\sqrt{a}$ 이므로



직선 $y=n$과 곡선 $y=|f(x)|$가 적어도 3개의 점에서 만나려면 $n \le \sqrt{a}$ 일 때, 즉 $n^2 \le a$이므로 양의 실수 a의 최솟값 a_n은

$$a_n = n^2$$

따라서 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{3n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{18n^3} = \frac{1}{9}$$

46. ①

$\overline{BC} = \sqrt{4n+6}$ ($\because$ 피타고라스 정리)이고

$\overline{AB}\times\overline{AC} = \overline{BC}\times\overline{AH}$ ($\because \triangle ABC$의 넓이)이므로

$$a_n = \overline{AH} = \frac{\overline{AB}\times\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\sqrt{n+2}\sqrt{3n+4}}{\sqrt{4n+6}}\text{ 이다.}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n^2+10n+8}}{\sqrt{4n^2+6n}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore p = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로 $p^2 = \frac{3}{4}$ 이다.

47. ⑤

$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k+1)!} = \frac{3}{(n+3)!}$ 이므로 $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{(k+1)!} = \frac{3}{(n+2)!}$ 이다.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k+1)!} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{(k+1)!}$$

$$= \frac{a_n}{(n+1)!} = \frac{3}{(n+3)!} - \frac{3}{(n+2)!} = \frac{-3n-6}{(n+3)!} = \frac{-3(n+2)}{(n+3)!}\text{ 이므로}$$

$$\therefore a_n = \frac{-3}{n+3}\quad (n \ge 2)$$

a_1은 준식에 $n=1$을 대입하면 $\frac{a_1}{2!} = \frac{3}{4!}$에서 $a_1 = \frac{1}{4}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_1 - na_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4} + \frac{3n}{n+3}\right) = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4}$$

48. ②

원점에서 직선 $y=x+1$ 까지의 거리가 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로

$$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} = 2\sqrt{(2n)^2 - \frac{1}{2}}$$

$$S_n = \frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}\times\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2n^2 - \frac{1}{4}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2-\frac{1}{4}}}{n}$$

$= \sqrt{2}$ 이다.

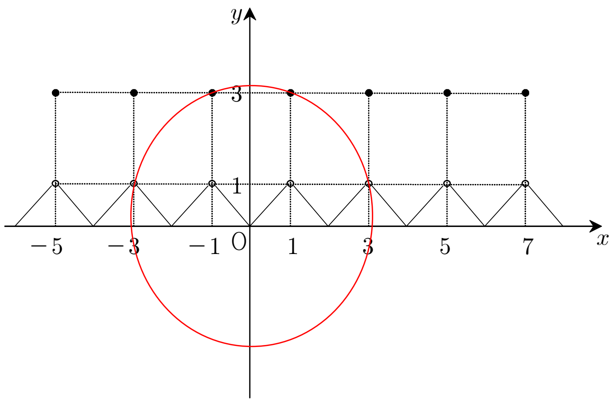
49. ③

$f(x) = \begin{cases} |x| & (-1<x<1) \\ 3 & (x=1) \end{cases}$ 이므로

원과 교점이 4개이려면 $(3,3)$, $(5,3)\cdots,(2n-1,3)$의 점을 지나야한다. (이때, $(1,3)$인 점을 지날 때는 교점이 2개이므로 해당되지 않음!)

$a=(2n+1)^2+9$이므로 500이하인 $n=10$이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{10} a = \sum_{n=1}^{10}(4n^2+4n+10) = 1540+220+100 = 1860$



50. ③

(ⅰ) $|x|<1$ 일 때

$\lim_{n\to\infty}x^{2n-1} = \lim_{n\to\infty}x^{2n} = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{4x^{2n}-x^{2n-1}}{x^{2n}+2x^{2n-1}+3} = \frac{0-0}{0+0+3} = 0$$

(ⅱ) $-2<x<-1$ 또는 $x>1$ 일 때

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n-1}} = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{4x^{2n}-x^{2n-1}}{x^{2n}+2x^{2n-1}+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{4x-1}{x+2+\frac{3}{x^{2n-1}}} = \frac{4x-1}{x+2}$$

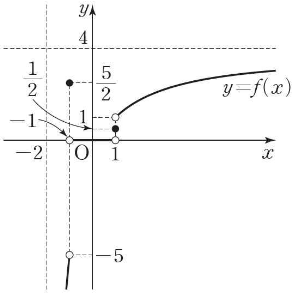
(ⅲ) $x=1$ 일 때

$$f(1) = \frac{4-1}{1+2+3} = \frac{1}{2}$$

(ⅳ) $x=-1$ 일 때

$$f(-1) = \frac{4-(-1)}{1+2\times(-1)+3} = \frac{5}{2}$$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 함수 $y=f(x)$이 그래프는 다음 그림과 같다.



한편 직선 $y=tx+2t+2$, 즉 $y-2=t(x+2)$는 실수 t의 값에 관계없이 점 $(-2,\ 2)$를 지난다. 이때 다음의 8가지 경우에서 직선이 함수 $y=f(x)$와 만나는 교점의 개수 $g(t)$가 달라진다.

① 직선이 점 $\left(-1,\ \frac{5}{2}\right)$를 지날 때 $t=\frac{1}{2}$

② 직선이 곡선 $y=\frac{4x-1}{x+2}$과 접할 때 $t=\frac{1}{9}$

$$tx+2t+2=\frac{4x-1}{x+2}$$

$$tx^2+2(2t-1)x+4t+5=0$$

이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(2t-1)^2-t(4t+5)=-9t+1=0$에서 $t=\frac{1}{9}$

③ 직선이 x축과 평행할 때 $t=0$

④ 직선이 점 $(1,\ 1)$을 지날 때 $t=-\frac{1}{3}$

⑤ 직선이 점 $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$를 지날 때 $t=-\frac{1}{2}$

⑥ 직선이 점 $(1,\ 0)$을 지날 때 $t=-\frac{2}{3}$

⑦ 직선이 점 $(-1,\ 0)$를 지날 때 $t=-2$

⑧ 직선이 점 $(-1,\ -5)$를 지날 때 $t=-7$

따라서 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속이 되는 서로 다른 a의 개수는 8

51. $t=\frac{5}{2}$ 또는 $t=\frac{4}{9}$ 또는 $t=\frac{2}{3}$

ⅰ) $-2<x<-1$ 또는 $x>1$일 때

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{4x^{2n}-x^{2n-1}}{x^{2n}+2x^{2n-1}+3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4x-1}{x+2+\frac{3}{x^{2n-1}}}$$

$$=\frac{4x-1}{x+2}=\frac{-9}{x+2}+4$$

ⅱ) $-1<x<1$일 때

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{4x^{2n}-x^{2n-1}}{x^{2n}+2x^{2n-1}+3}=0$$

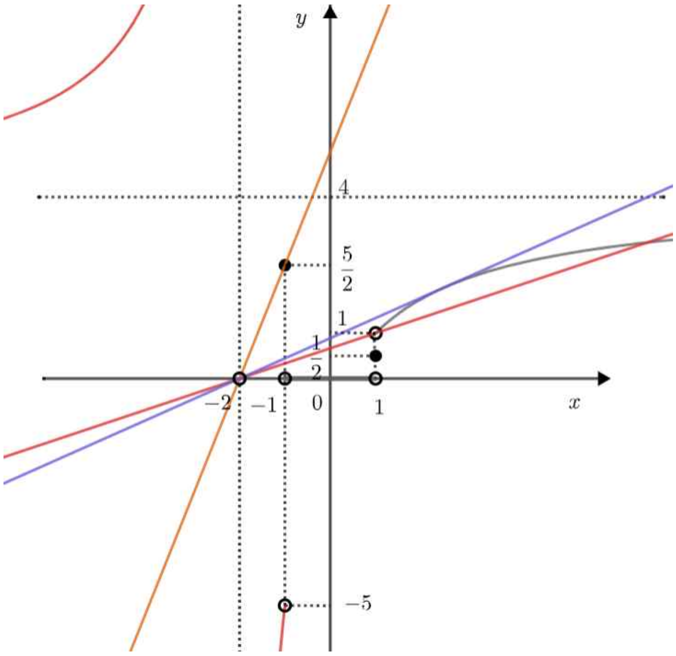
ⅲ) $x=1$일 때

$$f(1)=\frac{4-1}{1+2+3}=\frac{1}{2}$$

ⅳ) $x=-1$일 때

$$f(-1)=\frac{4-(-1)}{1-2+3}=\frac{5}{2}$$

$x>-2$에서 $y=t(x+2)$ $(t>0)$가 한 점에서만 만나므로 그래프로 나타내면 아래와 같다.



ⅰ) $y=t(x+2)$가 $\left(-1,\ \frac{5}{2}\right)$를 지날 때

$$\frac{5}{2}=t\times(-1+2)$$

$$\therefore\ t=\frac{5}{2}$$

ⅱ) $y=t(x+2)$가 $y=\frac{-9}{x+2}+4$와 접할 때

$$tx+2t=-\frac{9}{x+2}+4$$

$$tx(x+2)+2t(x+2)+9-4(x+2)=0$$

$$tx^2+2(2t-2)x+4t+1=0$$

$$D/4=4t^2-8t+4-4t^2-t=0$$

$$\therefore\ t=\frac{4}{9}$$

ⅲ) $y=t(x+2)$가 $(1,\ 1)$을 지날 때

$$t=\frac{1}{3}$$

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서 $t=\frac{5}{2}$ 또는 $t=\frac{4}{9}$ 또는 $t=\frac{1}{3}$

52. ③

(ⅰ) $-1<bx<1$일 때, $f(x)=a$이므로 $g(x)$의 그래프와 교점의 개수가 홀수이려면 한 점 $(0,\ 6)$에서 만나야 한다.

$\therefore\ a=6$

(ⅱ) $bx=\pm1$일 때, $f(x)=\frac{a+\frac{1}{b}}{2}=\frac{6+\frac{1}{b}}{2}$이므로 $g(x)$의 그래프와 교점의 개수가 최대이려면 이 두 점에서도 만나야

한다. 이때 $g(x)=6-\frac{1}{b^2}$이므로 $6+\frac{1}{b}=12-\frac{2}{b^2}$,

$6b^2+b-2=0$ $(2b+1)(3b-2)=0$에서 b는 양수이므로

$b=\frac{2}{3}$

(iii) $bx<-1$, $bx>1$일 때, $f(x)=bx^2$이므로 아래로 볼록하므로 위로 볼록한 $g(x)$의 그래프와 항상 두 점에서 만난다.

(i), (ii), (iii)에서 $a=6$, $b=\frac{2}{3}$ $\therefore$ $12(a+b)=72+8=80$

53. ⑤

i) $|x|<1$일 때: $f(x)=4x$

ii) $|x|>1$일 때: $f(x)=\frac{(a-3)}{4}x$

iii) $x=1$ 일 때: $f(1)=\frac{a+1}{5}$

iv) $x=-1$일 때: $f(-1)=\frac{-a-1}{5}$

이때 $(f\circ f)(-1)=-\frac{3}{5}$이려면 $f(-1)=-\frac{a+1}{5}$의 값이 위의 네 가지 경우에서 $-\frac{3}{20}$, $\frac{-12}{5(a-3)}$, -4, 2일 때이다. 이 중에서 가능한 경우는 다음의 두 가지 경우이므로

$-\frac{a+1}{5}=-\frac{3}{20}$일 때 $a=-\frac{1}{4}$이고,

$-\frac{a+1}{5}=-\frac{12}{5(a-3)}$일 때 $a=5$이다.

$\therefore -\frac{1}{4}+5=\frac{19}{4}$

54. ③

$f(x)$는 밑 x의 크기에 따라 극한의 결과가 달라지므로

1) $|x|<1$일 때, $f(x)=x$ $(\because \lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=0)$

2) $|x|>1$일 때,

$$f(x)=\frac{a-1}{15}x\left(\because \lim_{n\to\infty}\frac{(a-1)x^{2n+1}+x}{15x^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-1)x+\frac{1}{x^{2n-1}}}{15+\frac{1}{x^{2n}}}\right)$$

3) $x=1$일 때, $f(1)=\frac{a}{16}$

4) $x=-1$일 때, $f(-1)=-\frac{a}{16}$이다.

이제, $\frac{a}{4}$의 범위에 따라 $f\left(\frac{a}{4}\right)$의 값을 구해보면

1) $\left|\frac{a}{4}\right|<1$일 때, $f\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{a}{4}=\frac{1}{2}$에서 $a=2$

2) $\left|\frac{a}{4}\right|>1$일 때, $f\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{a-1}{15}\times\frac{a}{4}=\frac{1}{2}$에서 $a=6$ or -5

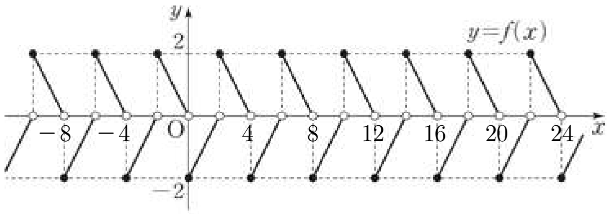
3) $a=4$일 때, $f\left(\frac{a}{4}\right)=f(1)=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{2}$이므로 불가

4) $a=-4$일 때, $f\left(\frac{a}{4}\right)=f(-1)=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{2}$이므로 불가

따라서 가능한 a값의 합은 $2+6+(-5)=3$이다.

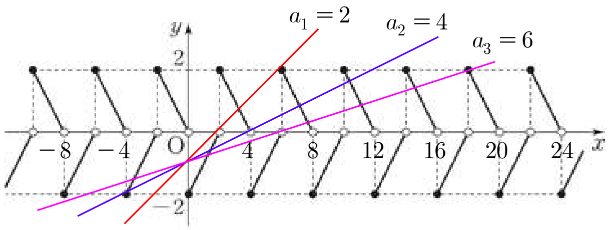
55. ③

조건 (가), (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때, 직선 $y=\frac{1}{2n}x-1$은 기울기가 $\frac{1}{2n}$이고 y절편이 -1인 직선이고 세 점 $(-2n,\ -2)$, $(2n,\ 0)$, $(6n,\ 2)$를 지난다.

$n=1,\ 2,\ 3$일 때, 각각의 직선 $y=\frac{1}{2n}x-1$은 다음 그림과 같다.



직선이 함수 $y=f(x)$와 만나는 서로 다른 교점의 개수를 a_n이라 하므로 각각 구해보면 $a_1=2$, $a_2=4$, $a_3=6$, $\cdots$ 이다. 이것으로 부터 교점의 개수를 추론하면 $a_n=2n$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{6n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{6n+1}=\frac{1}{3}$

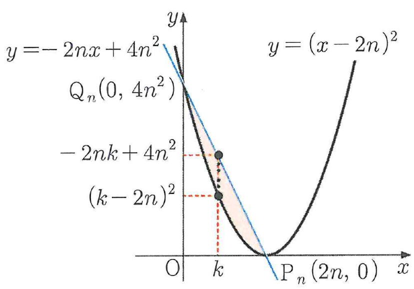
56. ⑤

풀이) $\mathrm{P_n}(2n,\ 0)$, $\mathrm{Q_n}(0,\ 4n^2)$이므로

직선 $\mathrm{P_nQ_n}$의 기울기는 $\frac{0-4n^2}{2n-0}=\frac{-4n^2}{2n}=-2n$이고

y절편은 $4n^2$이므로

직선 $\mathrm{P_nQ_n}$의 방정식은 $y=-2n\times x+4n^2$



x좌표가 k(k는 0 또는 $2n$ 이하의 자연수)일 때, 영역에 속하는 점의 y좌표는 $(k-2n)^2$부터 $-2nk+4n^2$까지이므로

그 개수는

$-2nk-4n^2-(k-2n)^2+1=k^2+1+2nk$

$a_n=\sum_{k=0}^{2n}(-k^2+1+2nk)=1+\sum_{k=1}^{2n}(-k^2+1+2nk)$

$=-\frac{2n\times(2n+1)\times(4n+1)}{6}+(2n)\ +2n\times\frac{2n\times(2n+1)}{2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n}{4n^3}$

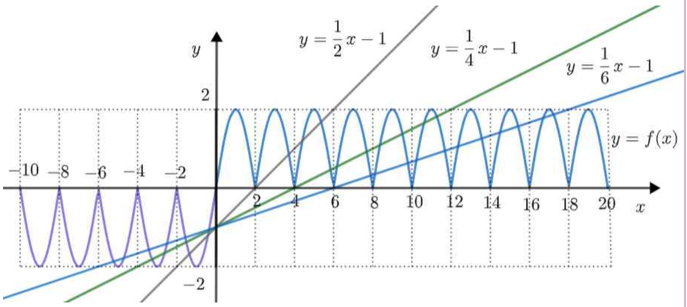
$=\frac{3}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{2n\times(2n+1)\times(4n+1)}{6}+(2n)+2n\times\frac{2n\times(2n+1)}{2}}{n^3}$

$=\frac{3}{4}\left(-\frac{16}{6}+4\right)=-2+3=1$

57. ②

$f(x)=\left|2\sin\frac{\pi}{2}x\right|$ 의 주기는 2, 최댓값은 2, 최솟값은 0

(나)에서 $f(x)$는 원점대칭이므로 그래프는 아래와 같다.



i) $n=1$일 때

$y=\frac{1}{2}x-1$가 $(2,\ 0)$을 지나고

$x=6$일 때 $y=2$, $x=-2$일 때 $y=-2$이므로 $a_1=6$

ii) $n=2$일 때

$y=\frac{1}{4}x-1$가 $(4,\ 0)$을 지나고

$x=12$일 때 $y=2$, $x=-4$일 때 $y=-2$이므로 $a_2=12$

iii) $n=3$일 때

$y=\frac{1}{6}x-1$가 $(6,\ 0)$을 지나고

$x=18$일 때 $y=2$, $x=-6$일 때 $y=-2$이므로 $a_1=18$

따라서 $a_n=6n$으로 추정할 수 있다.

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}(\sqrt{pn^2+n}-6n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(p-36)n^2+n}{\sqrt{pn^2+n}+6n}=q$

수렴하므로 $p=36$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{36n^2+n}+6n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{36+\frac{1}{n}}+6}=\frac{1}{12}$

$q=\frac{1}{12}$

$\therefore\ pq=3$

58. ⑤

점 B_n의 x좌표를 t라 하자.

조건 (가)로부터 점 A_n의 x좌표는 $(1+n)t$이므로 y좌표는 $\log_4(1+n)t$이다. 점 B_n와 D_n의 y좌표는 각각 $\log_2 t$, $\log_4 t$이다. 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_nD_n$은 이등변삼각형이므로

$\log_4(1+n)t=\frac{\log_2 t+\log_4 t}{2}$, $(1+n)^2t^2=t^3$

$\therefore t=(1+n)^2$

이다. 세 점 A_n, B_n, D_n의 좌표는 각각 $\left((n+1)^3,\ \log_4(n+1)^3\right)$, $\left((n+1)^2,\ \log_2(n+1)^2\right)$, $\left((n+1)^2,\ \log_4(n+1)^2\right)$

이다.

$a_n=\frac{1}{2}\times\left\{\log_2(n+1)^2-\log_4(n+1)^2\right\}\left\{(n+1)^3-(n+1)^2\right\}$

$=\frac{1}{2}\times\log_2(n+1)\times n(n+1)^2$이고

$b_n=\frac{1}{2}\times(n+1)^2\times\log_4(n+1)^3$이다.

$a_3=\frac{1}{2}\log_2 4\times48=48$이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{6a_n}{nb_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n(n+1)^2\log_2(n+1)}{3n(n+1)^2\log_4(n+1)}=4$

따라서

$a_3+\lim_{n\to\infty}\frac{6a_n}{nb_n}=48+4=52$

59. ③

$\angle\mathrm{B}=\frac{\pi}{2}$ 이므로 $b=3$

$|ab|\le3^{n+1}$ 에서 $|a|\le3^n$

($\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이)$=\frac{1}{2}\times(3^n-3)\times|a|$

$\therefore\ S_n=\frac{1}{2}(3^n-3)(1+2+3+\cdots+3^n)\times2$

$=(3^n-3)\times\frac{\{(3^n+1)\times3^n\}}{2}=\frac{27^n-2\times9^n-3\times3^n}{2}$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{2S_n}{27^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{27^n-2\times9^n-3\times3^n}{27^{n-1}}=27$

60. ⑤

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$이므로

n이 짝수일 때, -1, n이 홀수일 때, 1이 된다.

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\{p\times(-1)^{3n+1}+q\times(-1)^n+r\}$이므로

n이 짝수일 때, $-p+q+r$, n이 홀수일 때, $p-q+r$이 된다.

따라서 a_n은 1과 -1을 진동하며 발산한다.

$\therefore$ ㄱ은 참

b_n이 수렴하려면 n이 짝수일 때와 홀수일 때, 극한값이 동일해야 하므로 $-p+q+r=p-q+r$에서 $p=q$여야 하고

이때, r에 수렴한다.

∴ ㄴ은 참

$\lim_{n\to\infty}\{a_n+b_n\}$은 n이 짝수일 때, $-p+q+r-1$

n이 홀수일 때, $p-q+r+1$이므로 수렴하기 위해서는

$p-q=-1$이어야 한다.

$\lim_{n\to\infty}\{a_nb_n\}$은 n이 짝수일 때, $-1\times(-p+q+r)=p-q-r$

n이 홀수일 때, $1\times(p-q+r)=p-q+r$이므로 수렴하기 위해서는

$r=0$이어야 한다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\{a_n+b_n\}$과 $\lim_{n\to\infty}\{a_nb_n\}$이 모두 수렴할 때,

$\lim_{n\to\infty} b_n$은 n이 짝수일 때, $-p+q+r=1$, n이 홀수일 때,

$p-q+r=-1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\{(a_n)^2+(b_n)^2\}=2 \left(\because \lim_{n\to\infty}(a_n)^2=\lim_{n\to\infty}(b_n)^2=1\right)$

∴ ㄷ은 참

61. ①

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{px^{2n}+qx^{2n-1}+2x}{x^{2n}+4}$$

i) $|x|>1$ 일 때

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{p+\frac{q}{x}+2\left(\frac{1}{x}\right)^{2n-1}}{1+4\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}}=\frac{q}{x}+p$$

ii) $|x|<1$ 일 때

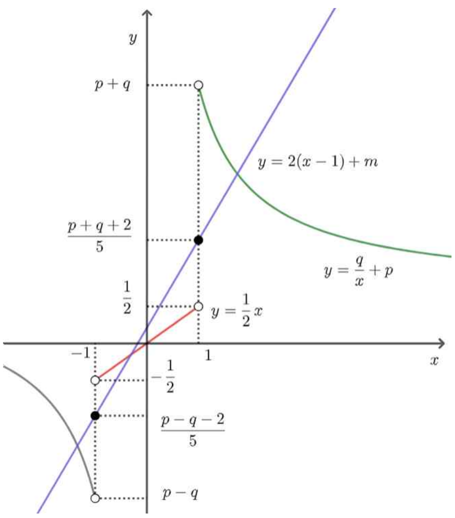
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{px^{2n}+qx^{2n-1}+2x}{x^{2n}+4}=\frac{2x}{4}=\frac{1}{2}x$$

iii) $x=1$일 때

$$f(1)=\frac{p+q+2}{1+4}=\frac{p+q+2}{5}$$

iv) $x=-1$ 일 때

$$f(-1)=\frac{p-q-2}{1+4}=\frac{p-q-2}{5}$$



$f(x)=2(x-1)+m$의 실근의 개수가 5개이므로

$y=f(x)$와 $y=2(x-1)+m$을 그려보면 위와 같다.

$\frac{p+q+2}{5}=m$이므로

$p+q=5m-2$ ⋯①

$\frac{p-q-2}{5}=m-4$이므로

$p-q=5m-18$ ⋯②

①, ②를 연립하여 풀면

$p=5m-10,\ q=8$

$p,\ q$가 양의 실수이므로 $m>2$ ⋯③

i) $p+q>m$ 이므로

$5m-2>m$

$m>\frac{1}{2}$ ⋯④

ii) $p-q<m-4$ 이므로

$5m-18<m-4$

$m<\frac{7}{2}$ ⋯⑤

③, ④, ⑤에 의해 $2<m<\frac{7}{2}$

m은 자연수이므로 $m=3,\ p=5$

∴ $m+p-q=3+5-8=0$

62. ③

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha,\ \sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)=2\alpha+\beta=7$ ⋯①

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2b_n)=\alpha-2\beta=-4$ ⋯②

①, ②를 연립하여 풀면

$\alpha=2,\ \beta=3$

∴ $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta=5$

63. ③

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-4n-1}{2n+1}=4$가 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-4n-1}{2n+1}=0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-4n-1}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{n}-4-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}-4-0}{2+0}=0$$

에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=4$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2na_n}{5n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2a_n}{n}}{5+\frac{3}{n^2}}=\frac{2\times4}{5+0}=\frac{8}{5}$$

$p=5,\ q=8$이므로 $p+q=13$

64. ④

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2)=3$이므로 급수의 성질에 의해

$\lim_{n\to\infty}(a_n-2)=0$이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n=2$이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n-2}{6a_n-3}=\frac{4\times2-2}{6\times2-3}=\frac{2}{3}$ 이다.

65. ②

$\lim_{n\to\infty}(a_n+1)=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=-1$

따라서 $\lim_{n\to\infty}(3a_n+2)=-1$

66. ⑤

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+6^{n-1}}{12^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{1}{6}\times\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

67. ①

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}-1}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{3\times\left(\frac{3}{4}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$

$=3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

$=3\times\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}-\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=9-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}$

68. ⑤

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-3)^n}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{4^n}+\frac{(-3)^n}{4^n}\right\}$

$=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}+\frac{-\frac{3}{4}}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)}$

$=\frac{1}{3}-\frac{3}{7}$

$=-\frac{2}{21}$

69. ②

$-1<\frac{2x-3}{9}<1$

$-9<2x-3<9$

$-6<2x<12$

$\therefore\ -3<x<6$

만족하는 정수 x의 개수는 8개

70. ③

$x=-4$ 또는 $-1<\frac{2x-1}{5}<1$

$x=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ -4$이므로 합은 -2

71. ⑤

$\sum_{n=1}^{\infty}r^n$이 수렴하므로 $-1<r<1$

ㄱ $0\le r^2<1$이므로 수렴

ㄴ. $-2<r-1<0$

$-1<\frac{r-1}{2}<0$이므로 수렴

ㄷ. $-3<r-2<-1$

$1<|r-2|<3$

$0<\log_2|r-2|<\log_2 3$

$0<\frac{\log_2|r-2|}{2}<\log_2\sqrt{3}<1$이므로 수렴

72. ③

$3a_1=a_5-a_2\Rightarrow a_1=d,\ a_n=nd$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{2}n(n+1)d$

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\frac{1+a_1n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+dn}{dn}=1$ (참)

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}=\infty$ (거짓)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1}{S_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{\frac{1}{2}n(n+1)d}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}$

$=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

73. ⑤

$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-b_n+3)=6\ \cdots$ ①

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+2b_n-1)=3\ \cdots$ ②

$2\times$①$+$②하면 $\sum_{n=1}^{\infty}(5a_n+5)=15$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+1)=3\ \cdots$ ③

①, ②에서 두 급수가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(2a_n - b_n + 3) = 0$, $\lim_{n\to\infty}(a_n + 2b_n - 1) = 0$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$라 하면

$2\alpha - \beta = -3$ $\cdots$ ④

$\alpha + 2\beta = 1$ $\cdots$ ⑤

④, ⑤를 연립하여 풀면 $\alpha = -1$, $\beta = 1$ $\cdots$ ⑥

③, ⑥에 의해

$$\lim_{n\to\infty}\left\{a_n - 3b_n + \sum_{k=1}^{n}(a_k + 1)\right\} = \alpha - 3\beta + 3 = -1 - 3 + 3 = -1$$

74. ③

$x = 5y - 10$에서 x, y가 자연수이므로

$y = 3$일 때 $x = 5$ $a_1 = 5$, $b_1 = 3$

$y = 4$ 일 때 $x = 10$ $a_2 = 10$, $b_2 = 4$

$y = 5$ 일 때 $x = 15$ $a_3 = 15$, $b_3 = 5$

$\vdots$

$a_n = 5n$, $b_n = n + 2$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n b_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n(n+2)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{10}\left\{\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{10}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{10} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{20}$$

$p = 20$, $q = 3$

$\therefore$ $p + q = 23$

75. ①

$x^2 - 3nx - 9 = nx - 4n^2$

$x^2 - 4nx + 4n^2 - 9 = 0$

두 근을 α_n, β_n이라 하면 $\alpha_n\beta_n = 4n^2 - 9$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n\beta_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-3)(2n+3)}$$

$$= \sum_{n=1}^{6}\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n+3}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left\{\left(-1 - \frac{1}{5}\right) + \left(1 - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{11}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n+3}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(-1 + 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right)$$

$$= \frac{1}{18}$$

76. ②

$a_n = 2n$이므로 $S_n = n(n+1)$이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{S_n} + \frac{1}{S_{n+1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

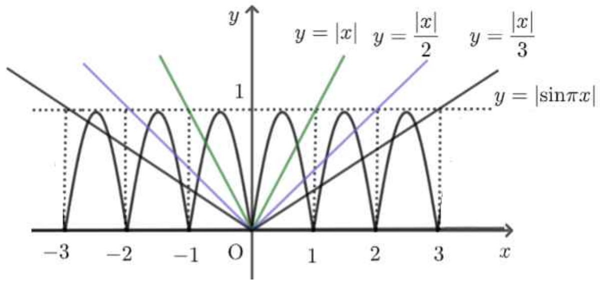
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = 1 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{2}$$

77. ⑤

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{(n+1)(n+3)} = 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right\} = 6\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 5$$

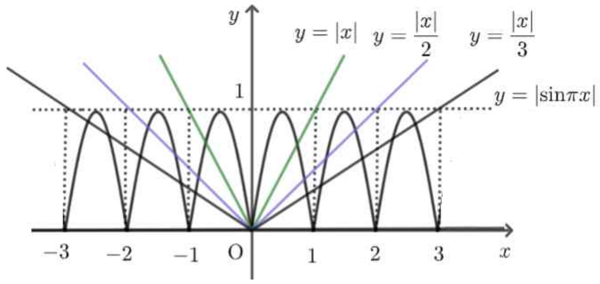
78. (1) $y = |\sin \pi x|$의 주기는 1, 최댓값 1, 최솟값 0이므로



(2) $a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $a_3 = 11$, $a_n = 4n - 1$

(3) $\frac{1}{12}$

(1) $y = |\sin \pi x|$의 주기는 1, 최댓값 1, 최솟값 0이므로



(2) $a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $a_3 = 11$

$\therefore$ $a_n = 3 + (n-1) \times 4 = 4n - 1$

(3) $a_n = 4n - 1$, $a_{n+1} = 4n + 4$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+1}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4n+3}\right) = \frac{1}{12}$$

79. ④

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{2n+3}{n+1}\right)=1$ 에서

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{2n+3}{n+1}\right)=0$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=2$ 즉, 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차는 2 이다.

$a_n=a_1+2(n-1)$ 라 하자.

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{2n+3}{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_1-2}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1$

이므로 $a_1=3$ 이다.

따라서 $a_n=2n+1$ 이다.

$\therefore \sum_{n=1}^{15}a_n=\sum_{n=1}^{15}(2n+1)$

$=2\times\frac{15\times16}{2}+15=255$ 이다.

80. ⑤

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{3n+1}=\frac{1}{3}\neq0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{3n+1}$은 발산

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{(\sqrt{3}-\sqrt{1})+(\sqrt{4}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(-1-\sqrt{2}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n}+2)=\infty$

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-3}}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8}\left(\frac{4}{3}\right)^n=\infty$

81. ③

ㄱ. 공비 $\frac{3}{4}$인 등비수열 수렴

ㄴ. 진동

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$에서 공비 $\frac{2}{3}$과 $\frac{1}{3}$인 등비수열의 합이므로 수렴

ㄹ. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{1}{2}\neq0$이므로 발산

ㄱ, ㄷ만 수렴한다.

82. ②

ㄱ. (반례) $a_n=\frac{1}{n}$일 때

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots$

$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$

$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots=\infty$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산, $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ (거짓)

ㄴ. (반례) $a_n=4^n$, $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$이라 하면 $a_nb_n=2^n$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim 2^n=\infty$이지만 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$ (거짓)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=0$

따라서 $\lim_{n\to\infty}b_n=l$ (단, $l\neq0$)이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ (참)

83. ①

ㄱ. (반례) $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{2}{n}$ 일 때 $a_n<b_n$이지만

$\lim_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim_{n\to\infty}b_n=0$ (거짓)

ㄴ. $a_n-b_n=c_n$, $a_n+b_n=d_n$이라 하면 $b_n=\frac{d_n-c_n}{2}$

$\lim_{n\to\infty}c_n=1$, $\lim_{n\to\infty}d_n=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{d_n-c_n}{2}=0$ (참)

ㄷ. (반례) $a_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$, $b_n=2^n$이라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$, $\lim_{n\to\infty}a_n$은 수렴하지만 $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$ (거짓)

84. ④

ㄱ. 반례) $\{a_n\}: 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots$

$\{b_n\}: 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \cdots$

$\{|a_n+b_n|\}: 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \cdots$

$\{|a_n-b_n|\}: 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \cdots$ 두 수열

$\{|a_n+b_n|\}$, $\{|a_n-b_n|\}$이 모두 수렴하지만 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 모두 발산한다. (거짓)

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2b_n)=\beta$에 수렴하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5}\{2(2a_n+b_n)+(a_n-2b_n)\}=\frac{1}{5}(2\alpha+\beta)$,

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5}\{(2a_n+b_n)-2(a_n-2b_n)\}=\frac{1}{5}(\alpha-2\beta)$에 수렴한다. (참)

ㄷ. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_{n+2}=\frac{1}{n+2}a_{n+1}=\frac{1}{n+2}\times\frac{1}{n+1}a_n$이 성립하므로

$\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$이다.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+2}}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

85. ⑤

ㄱ. 참

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이고, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=0$이다.

ㄴ. 참

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=A$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=B$라 하면,

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{A+B}{2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{A-B}{2}$

이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$이다.

ㄷ. 참

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)>0$이다.

따라서 $\alpha>\beta$이다.

모두 참이다.

86. ③

(가) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$도 수렴한다.

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $a_n=ar^{n-1}$이라 하면

$a\neq0$이므로 $-1<r<1$

$a_{2n}=ar^{2n-1}$이므로 공비가 $r^2\ (0\le r^2<1)$인 등비급수이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$도 수렴한다. (참)

(나) 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$이 수렴한다.

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\alpha$라 하면 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}}=\alpha$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=\frac{1}{a_1}-\alpha$ (참)

(다) 수열 $\{a_n\}$이 양의 무한대로 발산하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$은 수렴한다.

(반례) $a_n=n$일 때 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots$

$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$

$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots=\infty$ (거짓)

(라) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 각각 수렴하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\times\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이다. (거짓)

(마) 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$이 수렴하면

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 중에서 적어도 하나는 수렴한다.

위 명제의 대우가 '두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$가 모두 발산하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$이 발산한다.'이므로

$a_n=ar_1^{n-1}$, $b_n=br_2^{n-1}$이라 하면 $a_nb_n=ab(r_1r_2)^{n-1}$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 모두 발산하므로

$a\neq0$, $b\neq0$이므로 $|r_1|>1$, $|r_2|>1$

따라서 $ab\neq0$이고 $|r_1r_2|>1$

그러므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$이 발산한다. (참)

이상에서 옳은 명제는 (가), (나), (마)의 3개다.

87. ②

ㄱ. 거짓

[반례]

$\{a_n\}$: $1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots$

$\{b_n\}$: $0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \cdots$

$\{a_nb_n\}$: $0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots$

ㄴ. 참

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=A$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=B$라 하자.

$b_n=a_n-(a_n-b_n)$이므로,

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n-(a_n-b_n)\}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=A-B$

ㄷ. 거짓

[반례] $a_n=\frac{1}{n^3}$, $b_n=n$

따라서 옳은 것은 ㄴ 뿐이다.

[다른 풀이]

ㄷ. [반례] $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $b_n=(-1)^n$, $a_nb_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ 이면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$(수렴), $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=(-1\ 또는\ 0)$(발산)하지만

$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\frac{-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=-\frac{1}{3}$(수렴)하는 경우도 있다.

88. ③

ㄱ. 참

$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\times(a_n-b_n)=0$이다. 정리하면 $\lim_{n\to\infty}\left\{1-\frac{b_n}{a_n}\right\}=0$이므로,

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$이다.

ㄴ. 거짓

[반례] $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=n$

ㄷ. 참

$b_n=a_n-(a_n-b_n)$이고 극한의 성질에 의해 수열 $\{b_n\}$은 수렴한다.

89. ②

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\frac{n}{2}\pi$

$=\left(\frac{1}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cos\pi+\left(\frac{1}{2}\right)^3\cos\frac{3\pi}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^4\cos2\pi+\cdots$

$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64}+\cdots$

$=\frac{-\frac{1}{4}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=-\frac{1}{5}$

90. ⑤

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a}{1-r}=6\ \cdots①$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=\frac{a}{1-r^2}=\frac{a}{1-r}\times\frac{1}{1+r}=4\ \cdots②$

②÷①하면 $\frac{1}{1+r}=\frac{2}{3}$

$2+2r=3$

$r=\frac{1}{2}$, $a=3$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2=\frac{a^2}{1-r^2}=\frac{9}{1-\frac{1}{4}}=12$

91. ②

풀이)

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ 이므로 $p=2$ 이다.

$\therefore\ a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$=\frac{-\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{3}$

92. ①

등비수열 $\{a_n\}$이 $2a_1=3a_2$을 만족하므로 $2a=3ar$

$r=\frac{2}{3}\ \cdots①$

$\frac{2^{n+2}-1}{2^n+1}<\sum_{k=1}^{n}a_k<\frac{2^{n+2}+1}{2^n-1}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+2}-1}{2^n+1}\le\sum_{n=1}^{\infty}a_n\le\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+2}+1}{2^n-1}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+2}-1}{2^n+1}=4$, $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+2}+1}{2^n-1}=4$이므로

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a}{1-r}=4$

①을 대입하면 $a=\frac{4}{3}$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2=\frac{a^2}{1-r^2}=\frac{16}{5}$

93. ①

풀이)

a_n 의 공비를 R, b_n의 공비를 r이라고 하면 첫째항은 모두 1이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{1-R}$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{1}{1-r}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\frac{10}{3}$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\frac{8}{7}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\frac{1}{1-R}+\frac{1}{1-r}=\frac{10}{3}$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\frac{1}{1-Rr}=\frac{8}{7}$

$\therefore\ Rr=\frac{1}{8}$이고,

연립해서 풀면 $R+r=\frac{3}{4}$ 이다.

$a_2^2+b_2^{\,2}=R^2+r^2=(R+r)^2-2Rr=\left(\frac{3}{4}\right)^2-2\times\frac{1}{8}$

$=\dfrac{5}{16}$ 이다.

94. ②

$S_n=\dfrac{kn}{3n+2}$ $\cdots$①

$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{kn}{3n+2}-\dfrac{k(n-1)}{3n-1}$

$=\dfrac{kn(3n-1)-k(n-1)(3n+2)}{(3n+2)(3n-1)}$

$=\dfrac{2k}{(3n+2)(3n-1)}$ $(n\ge 2)$ $\cdots$②

①에서 $S_1=\dfrac{k}{5}$, ②에서 $a_1=\dfrac{2k}{5\times 2}=\dfrac{k}{5}$

$\therefore$ $a_n=\dfrac{2k}{(3n+2)(3n-1)}$ $(n\ge 1)$

$\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2kn^2}{(3n+2)(3n-1)}=\dfrac{2k}{9}=2$

$\therefore$ $k=9$

$S_n=\dfrac{9n}{3n+2}$

$\therefore$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9n}{3n+2}=3$

95. ②

$a_5=S_5-S_4=\dfrac{5k+3}{11}-\dfrac{4k+3}{9}=\dfrac{k-6}{99}=\dfrac{1}{99}$

이므로 $k-6=1$에서 $k=7$

$n\ge 2$일 때 $a_n=S_n-S_{n-1}$

$=\dfrac{7n+3}{2n+1}-\dfrac{7n-4}{2n-1}$

$=\dfrac{1}{(2n+1)(2n-1)}$

이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{(2n+1)(2n-1)}=\dfrac{1}{4}$

따라서

$\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\dfrac{1}{4}+\lim\limits_{n\to\infty}S_n$

$=\dfrac{1}{4}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n+3}{2n+1}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{7}{2}=\dfrac{15}{4}$

96. ⑤

우선 k부터 구하자.

$\dfrac{3}{10}=a_4=S_4-S_3$

$=\dfrac{4k+1}{6}-\dfrac{3k+1}{5}$

$=\dfrac{2k-1}{30}$

따라서 $k=5$이다.

$S_n=\dfrac{5n+1}{n+2}=5-\dfrac{9}{n+2}$ 이므로 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=5$이다.

또한 $n\ge 2$에서

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=-\dfrac{9}{n+2}+\dfrac{9}{n+1}$

이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left\{\dfrac{9}{n+1}-\dfrac{9}{n+2}\right\}$

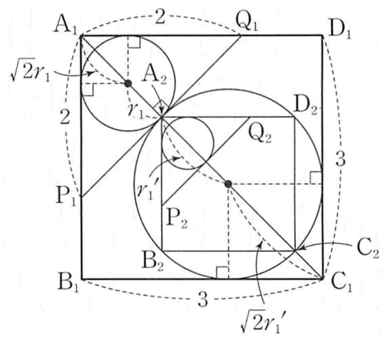
$=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\times\dfrac{9}{(n+1)(n+2)}$

$=9$

$\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=9+5=14$

97. ③

풀이)



삼각형 $A_1P_1Q_1$의 내접원의 반지름의 길이를 r_1이라 하면

$\overline{A_1A_2}=\sqrt{2}r_1+r_1$

$=(\sqrt{2}+1)r_1=\sqrt{2}$

에서

$r_1=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=2-\sqrt{2}$

이므로

$l_1=2(2-\sqrt{2})\pi$

세 선분 P_1Q_1, B_1C_1, C_1D_1에 모두 접하는 원의 반지름의 길이를 r_1'이라 하면

$\overline{A_2C_1}=r_1'+\sqrt{2}r_1'$

$=(1+\sqrt{2})r_1'=2\sqrt{2}$

에서

$r_1'=\dfrac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=4-2\sqrt{2}$

이므로 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 한 변의 길이는

$\sqrt{2}r_1'=4\sqrt{2}-4$

이다.

즉, 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$과 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 닮음비가 $3:(4\sqrt{2}-4)$이다.

같은 방법으로 하면 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$과 정사각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 닮음비가

$3:(4\sqrt{2}-4)=1:\dfrac{4\sqrt{2}-4}{3}$

이므로 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 $2(2-\sqrt{2})\pi$이고 공비가 $\dfrac{4\sqrt{2}-4}{3}$ 인 등비수열이다.

따라서

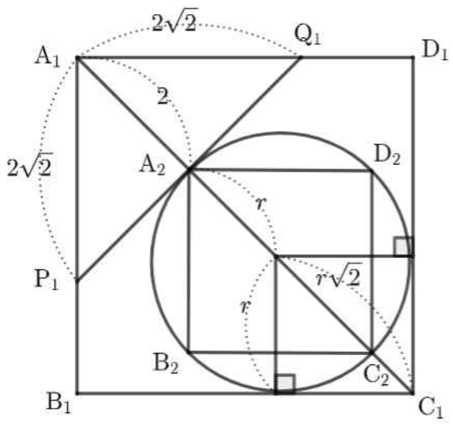
$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n=\frac{2(2-\sqrt{2})\pi}{1-\frac{4\sqrt{2}-4}{3}}$$

$$=\frac{6(2-\sqrt{2})\pi}{7-4\sqrt{2}}$$

$$=\frac{6(6+\sqrt{2})\pi}{17}$$

98. ②

$\overline{A_1P_1}=\overline{A_1Q_1}=2\sqrt{2}$ 이므로 $l_1=4$



세 선분 P_1Q_1, B_1C_1, C_1D_1 에 모두 접하는 원의 중심을 O, 반지름을 r 이라 하면

$\overline{A_1A_2}=2$, $\overline{OA_2}=r$, $\overline{OC_1}=\sqrt{2}r$, $\overline{A_1C_1}=6$

$2+(\sqrt{2}+1)r=6$

$r=\dfrac{4}{\sqrt{2}+1}=4(\sqrt{2}-1)$

$\overline{A_2C_2}=2r=8(\sqrt{2}-1)$

$\overline{A_1C_1}:\overline{A_2C_2}=6:8(\sqrt{2}-1)=1:\dfrac{4(\sqrt{2}-1)}{3}$ 이므로

l_n은 공비가 $\dfrac{4(\sqrt{2}-1)}{3}$ 인 등비수열이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} l_n=\frac{4}{1-\frac{4(\sqrt{2}-1)}{3}}=\frac{12}{7-4\sqrt{2}}=\frac{12(7+4\sqrt{2})}{17}$$

99. ②

$P_1(1,0)$, $P_2\left(1,\dfrac{3}{4}\right)$, $P_3\left(1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2,\dfrac{3}{4}\right)$, $P_4\left(1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2,\dfrac{3}{4}-\left(\dfrac{3}{4}\right)^3\right)$, …

$$\lim_{n\to\infty}P_n=\left(\frac{1}{1+\frac{9}{16}},\ \frac{\frac{3}{4}}{1+\frac{9}{16}}\right)=\left(\frac{16}{25},\ \frac{12}{25}\right)=(a,\ b)$$

따라서 $a-b=\dfrac{4}{25}$

100. ④

$S_1=\dfrac{\cos\theta sin\theta}{2}-\dfrac{1}{2}\cos^2\theta\times\theta$, 공비는 $\cos^2\theta$

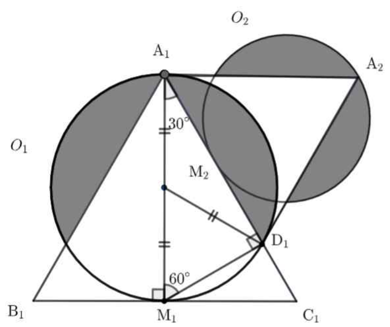
$$f(\theta)=\frac{\frac{1}{2}\cos\theta sin\theta-\frac{1}{2}\theta\cos^2\theta}{1-\cos^2\theta}=\frac{\cot\theta}{2}(1-\theta cot\theta)$$

$$f'(\theta)=-\frac{1}{2}\csc^2\theta(1-\theta cot\theta)+\frac{\cot\theta}{2}(-\cot\theta+\theta csc^2\theta)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}\cdot 2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\times\left(-1+\frac{\pi}{4}\cdot 2\right)$$

$$=-1+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}=-\frac{3}{2}+\frac{\pi}{2}$$

101. ③



원 O_1 의 중심을 O라 하면 $\overline{A_1C_1}=20$ 이므로

$\overline{A_1M_1}=20\cos30^\circ=10\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{OA_1}=\overline{OD_1}=5\sqrt{3}$

$$T_1=2\times\left\{(5\sqrt{3})^2\pi\times\frac{120^\circ}{360^\circ}-\frac{1}{2}\times(5\sqrt{3})^2\sin120^\circ\right\}$$

$$=2\times\left(25\pi-\frac{75\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{25}{2}(4\pi-3\sqrt{3})$$

$\overline{A_1D_1}=\overline{A_1M_1}\cos30^\circ=10\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=15$

$\triangle A_1B_1C_1$과 $\triangle A_2A_1D_1$의 한 변의 길이의 비가

$20:15=1:\dfrac{3}{4}$

따라서 넓이비는 $1:\dfrac{9}{16}$ 이므로 공비가 $\dfrac{9}{16}$

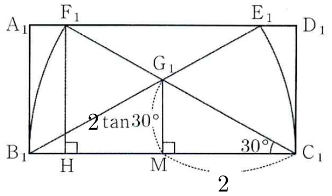
$$\therefore \lim_{n\to\infty}T_n=\frac{\frac{25}{2}(4\pi-3\sqrt{3})}{1-\frac{9}{16}}=\frac{200}{7}(4\pi-3\sqrt{3})$$

102. ⑤

도형 R_1 의 색칠된 부분의 넓이 S_1 은

$S_1=2\times\{$ (부채꼴 $F_1C_1B_1$ 의 넓이)$-$($\triangle G_1B_1C_1$ 의 넓이) $\}$

점 F_1 과 G_1 에서 $\overline{B_1C_1}$ 에 내린 수선의 발을 각각 H, M 라고 하면



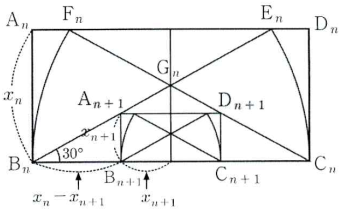
$\overline{F_1C_1}=4,\ \overline{F_1H}=2$ 에서 $\angle C_1F_1H=60^\circ$ 이므로 $\angle F_1C_1H=30^\circ$

$\therefore$ (부채꼴 $F_1C_1B_1$ 의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times4^2\times\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{4\pi}{3}$

$\overline{C_1M}=2$ 이고 $\angle G_1C_1M=30^\circ$ 이므로 $\overline{G_1M}=2\tan30^\circ=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\therefore$ ($\triangle G_1B_1C_1$ 의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times4\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

따라서 $S_1=2\times\left\{\dfrac{4\pi}{3}-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right\}=\dfrac{8(\pi-\sqrt{3})}{3}$



직사각형 $A_nB_nC_nD_n$ 에서 $\overline{A_nB_n}=x_n$ 이라 하면

직사각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ 에서 $\overline{A_{n+1}B_{n+1}}=x_{n+1}$

$\overline{B_nB_{n+1}}:\overline{B_{n+1}A_{n+1}}=\sqrt{3}:1$ 이므로

$(x_n-x_{n+1}):x_{n+1}=\sqrt{3}:1$

즉 $x_n-x_{n+1}=\sqrt{3}x_{n+1}$ 에서 $x_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}x_n$

$\therefore\ x_{n+1}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}x_n$

직사각형 $A_nB_nC_nD_n$ 내부에 그려진 도형의 넓이와

직사각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ 의 내부에 새로 그려진 도형의

넓이의 비는 $1:\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$ 이므로

공비가 $\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 은 첫째항은 $\dfrac{8(\pi-\sqrt{3})}{3}$ 이고 공비가

$\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$ 인 등비급수이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\dfrac{8(\pi-\sqrt{3})}{3}}{1-\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{16\sqrt{3}\pi-48}{9}$$

103. $\dfrac{600}{7}$

원 O_1 의 중심을 O라 하면

$\overline{AM_1}=10\sqrt{3}$ 이므로 원의 반지름은 $5\sqrt{3}$

$\triangle OAB_2=\triangle OAC_2=\dfrac{1}{2}\times(5\sqrt{3})^2\times\sin120^\circ=\dfrac{75\sqrt{3}}{4}$

(부채꼴 OB_2C_2의 넓이)$=75\pi\times\dfrac{120^\circ}{360^\circ}=25\pi$

$\therefore\ S_1=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(20)^2-25\pi-2\times\dfrac{75\sqrt{3}}{4}$

$=100\sqrt{3}-25\pi-\dfrac{75\sqrt{3}}{2}=\dfrac{25(5\sqrt{3}-2\pi)}{2}$

$\overline{AB_2}=2\times5\sqrt{3}\times\cos30^\circ=10\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=15$

$\overline{AB_1}:\overline{AB_2}=20:15=1:\dfrac{3}{4}$

길이의 비가 $1:\dfrac{3}{4}$ 이므로 넓이비는 $1:\dfrac{9}{16}$

따라서 공비가 $\dfrac{9}{16}$ 이므로

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\dfrac{25}{2}(5\sqrt{3}-2\pi)}{1-\dfrac{9}{16}}=\frac{200}{7}(5\sqrt{3}-2\pi)$$

$p=\dfrac{1000}{7},\ q=-\dfrac{400}{7}$

$\therefore\ p+q=\dfrac{600}{7}$

104. ②

그림 R_2에서 직각삼각형 $A_1B_1E_1$은

$\overline{A_1B_1}:\overline{B_1E_1}=1:\sqrt{2}$ 이므로, 직각이등변삼각형이다. 따라서

$\angle B_1B_2A_2=\dfrac{\pi}{4}$ 이다.

$\overline{B_1B_2}=\overline{B_2A_2}=a$라 하면 조건으로부터 $\overline{B_2C_2}=\sqrt{2}a$이다,

$\overline{B_1D_2}=2$이므로 직각삼각형 $B_1C_2D_2$에 피타고라스의 정리를

적용하면, $2^2=\{(1+\sqrt{2})a\}^2+a^2=(4+2\sqrt{2})a^2$이다.

따라서 $a^2=\dfrac{4}{4+2\sqrt{2}}=2-\sqrt{2}$ 이다.

따라서 길이비는 $\sqrt{2}:a$이므로 넓이의 비는

$2:a^2=2:(2-\sqrt{2})=1:\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ 이다.

이제 S_1을 구하자.

$S_1=\square B_1C_1D_1E_1-\triangledown B_1C_1E_1$ 이고,

$\square \mathrm{B_1C_1D_1E_1} = \frac{1}{2}\{2+(2-\sqrt{2})\}\times\sqrt{2} = 2\sqrt{2}-1$

$\triangledown \mathrm{B_1C_1E_1} = \frac{1}{2}\times 2^2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 이다.

따라서 $S_1 = 2\sqrt{2}-1-\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{2\sqrt{2}-1-\frac{\pi}{2}}{1-\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = 4-\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$$

105. ②

$\angle \mathrm{P_0Q_2B} = \frac{3\pi}{8}$ 이므로 $\angle \mathrm{P_0BQ_2} = \frac{\pi}{8}$ 이고

$\angle \mathrm{P_0AP_2} = \frac{\pi}{4}$(호$P_0P_2$ 원주각)이다.

따라서 $l_1 + l_2 = \frac{\pi}{4} = (r+1)l_1$ ⋯㉠이다.

$\frac{9\pi}{32} = \sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{l_1}{1-r}$ ⋯㉡

㉠, ㉡을 연립하면, $r = \frac{1}{3}$, $l_1 = \frac{3\pi}{16}$ 이다.

$l_n = \frac{3\pi}{16}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$24l_5 = 24\times\frac{3\pi}{16}\times\frac{1}{81} = \frac{\pi}{18}$

106. ⑤

문제로부터 $\overline{\mathrm{BC}} = 4\sqrt{2}$ 이고 선분 $\overline{\mathrm{BB_1}} = 2\sqrt{2}$ 이다,

또한 $\overline{\mathrm{BA_1}} = 2\sqrt{2}$ 이다.

두 삼각형 ABC와 $\mathrm{AA_1C_1}$의 닮음비는

$4:(4-2\sqrt{2}) = 1:\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

이므로 두 삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$과 $\mathrm{A_2B_2C_2}$의 넓이의 비는

$1:\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)$

이다. 여기서 삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{A_1C_1}}\times\overline{\mathrm{A_1B}}\sin\frac{\pi}{4}$

$= \frac{1}{2}\times\sqrt{2}(4-2\sqrt{2})\times 2\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$

$= 4\sqrt{2}-4$

따라서

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{4\sqrt{2}-4}{1-\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)} = \frac{24-8\sqrt{2}}{7}$$

$\therefore 7(p-q) = 32$

【다른풀이추가】

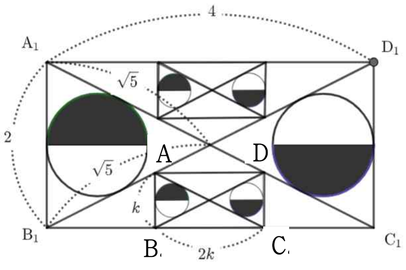
$\triangle \mathrm{A_1B_1C_1} = \mathrm{a}$하자.

$\triangle ABC = \triangle A_1BB_1 + \triangle C_1CB_1 + \triangle AA_1C_1 + \triangle A_1B_1C_1$

$8 = \frac{1}{2}(2\sqrt{2})^2\sin\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(2\sqrt{2})^2\sin\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(4-2\sqrt{2})^2 + a$

$\therefore a = 4\sqrt{2}-4$

107. ④



R_2

$\overline{\mathrm{B_1D_1}} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$ 이므로

$\overline{\mathrm{A_1E_1}} = \overline{\mathrm{B_1E_1}} = \overline{\mathrm{C_1E_1}} = \overline{\mathrm{D_1E_1}} = \sqrt{5}$

$\overline{\mathrm{A_1B_1}}$ 의 중점을 $\mathrm{M_1}$이라 하면 $\overline{\mathrm{M_1E_1}} = 2$

$\triangle \mathrm{A_1B_1E_1}$의 내접원의 반지름의 길이를 r_1이라 하면

($\triangle \mathrm{A_1B_1E_1}$의 넓이)$= \frac{1}{2}\times r_1\times(2\sqrt{5}+2) = \frac{1}{2}\times 2\times 2$

$r_1 = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(R_1에 색칠된 반원의 넓이)는 반지름이 r_1인 원의 넓이와 같으므로

$S_1 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2\pi == \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)\pi = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\pi$

$\triangle \mathrm{E_1B_1C_1}$에 가로가 $2k$, 세로가 k인 직사각형을 그리고 네 꼭짓점을 $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{C_2}$, $\mathrm{D_2}$라 하면

$\triangle \mathrm{B_1B_2A_2} \backsim \triangle \mathrm{B_1C_1D_1}$ 이므로 $\overline{\mathrm{B_1B_2}} = 2k$

같은 방법으로 $\overline{\mathrm{C_1C_2}} = 2k$

$6k = 4$

$\therefore\ k = \frac{2}{3}$

$\square \mathrm{A_1B_1C_1D_1}$과 $\square \mathrm{A_2B_2C_2D_2}$의 닮음비는 $1 : \frac{1}{3}$ 이므로

넓이비는 $1 : \frac{1}{9}$

R_2에서 새로 색칠된 도형의 개수는 2배 증가하였으므로

공비는 $\frac{2}{9}$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\pi}{1-\frac{2}{9}} = \frac{9(3-\sqrt{5})}{14}\pi$$

108. ④

$\angle B_1E_1F_1 = \frac{\pi}{2}$ 이고, $\overline{G_1E_1} = \overline{G_1F_1}$ 이므로

점 G_1 은 삼각형 $B_1F_1E_1$ 의 외접원의 중심이다.

$\overline{B_1G_1} = \overline{G_1F_1}$ 이므로

삼각형 $G_1F_1E_1$ 의 넓이는 삼각형 $B_1F_1E_1$ 의 넓이의 $\frac{1}{2}$ 이다.

$\overline{B_1E_1} = \sqrt{2}$, $\overline{E_1F_1} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ 이므로

삼각형 $G_1F_1E_1$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{B_1E_1}\times\overline{E_1F_1}\right) = \frac{1}{4}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore\ S_1 = 1-\frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

사각형 $A_1B_1G_1E_1$ 과 삼각형 $E_1F_1D_1$ 으로 만들어진  모양의 도형의 넓이를 T_n 이라 하자.

$\overline{A_{n+1}B_{n+1}} = a\ (a>0)$ 이라 하면

$\overline{B_nB_{n+1}} = 2a$, $\overline{B_{n+1}C_{n+1}} = 2a$, $\overline{C_{n+1}C_n} = a$

$\overline{B_nC_n} = 5a$

$\overline{B_{n+1}C_{n+1}} = \frac{2}{5}\overline{B_nC_n}$

두 직사각형 $A_nB_nC_nD_n$, $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ 의

닮음비는 $1:\frac{2}{5}$ 이므로 넓이의 비는 $1^2:\left(\frac{2}{5}\right)^2$ 이다.

$$T_{n+1} = \frac{4}{25}T_n$$

수열 $\{T_n\}$ 은 첫째항이 $T_1 = S_1 = \frac{5}{6}$ 이고 공비가 $\frac{4}{25}$ 인 등비수열이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n = \sum_{n=1}^{\infty}T_n$

$$= \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{4}{25}} = \frac{125}{126}$$ 이다.

$\therefore\ p+q = 251$ 이다.

109. ④

두 번째 원의 반지름을 r이라 하면 $2 = 2r+\frac{r}{\sqrt{3}}$

$$\therefore\ r = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+1}$$

따라서 $\overline{A_1B_1} = 2$, $\overline{A_1B_2} = \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+1}$ 이므로

공비 $\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+1}$ 이고 첫항 1인 등비무한급수이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{B_nC_n} = \frac{1}{1-\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+1}} = 2\sqrt{3}+1$$

110. ⑤

$x^2-1 < a < x^2+2x$ 이므로

$x=1$ 일 때 $0<a<3$: $a=1, 2$

$x=2$ 일 때 $3<a<8$: $a=4, 5, 6, 7$

$x=3$ 일 때 $8<a<15$: $a=9, 10, 11, 12, 13, 14$

⋮

따라서 $a=3, 8, 15, \cdots$ 일 때 만족시키는 자연수 x가 존재하지 않으므로 $a_1=3,\ a_2=8,\ a_3=15,\ \cdots$

그러므로 $a_n = n^2+2n = n(n+2)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots +\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{2}$$

111. (1) $x=2, 3, 4$ (2) $-\frac{1}{3},\ 0,\ 1$

(1) 등비급수가 수렴해야 하므로 $|r|<1$이어야 하므로

$-1 < \frac{x-3}{2} < 1$, $1<x<5$이므로 $x=2, 3, 4$

(2) 공비가 $\frac{x-3}{2}$이고 첫항이 $\frac{x-3}{2}$ 인 등비무한급수이므로

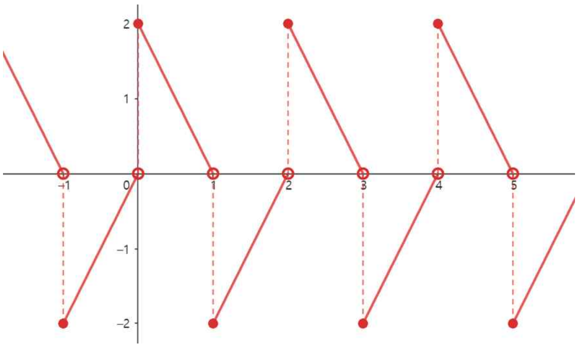
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-3}{2}\right)^n = \frac{\frac{x-3}{2}}{1-\frac{x-3}{2}} = \frac{x-3}{5-x}$$ 이다.

따라서 $x=2$일 때, $-\frac{1}{3}$, $x=3$일 때 0, $x=4$일 때 1이다.

112. ④

(나)에서 $f(x-1) = -f(x)$에서 $f(x) = -f(x+1)$이고,

$f(x-1) = f(x+1)$이므로 주기가 2인 주기함수이며, (가)의 조건으로 그린 그래프를 x축으로 1만큼 평행이동 후 x축 대칭이동하여 그래프를 그려서 $1\le x<2$까지의 그래프를 그린 후 주기를 이용하여 남은 그래프를 완성하면 아래 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$의 치역은 $-2 \le f(x) \le 2$이고,

$y=-\dfrac{1}{2n}x+1$의 그래프에 이 치역의 범위를 적용하면

$(-2n,\ 2)$, $(6n,\ -2)$를 지나는 직선이고, 각 주기 당 하나의 교점을 만들게 되므로 $-2n \le x \le 6n$까지는 주기가 $4n$개를 지나므로 $a_n=4n$이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}a_{n+3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+4)(4n+12)}=\frac{1}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}$$

$$=\frac{1}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)\ (\because\ \text{부분분수})$$

$$=\frac{1}{32}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{5}{192}$$

$\therefore\ p+q=192+5=197$

113. ①

$\overline{A_1A_2}^2=2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cdot\cos\frac{\pi}{3}=7$ (∵ 코사인법칙)

$\dfrac{\overline{A_1A_2}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R$ (∵ 사인법칙)

$\therefore\ R=\sqrt{\dfrac{7}{3}}$

사각형 $A_1B_1B_2A_2$와 사각형 $A_2B_2B_3A_3$는 닮은 도형이고

닮음비는 $\overline{A_1B_1}:\overline{A_2B_2}=2:1$이므로 넓이비는 $4:1=1:\frac{1}{4}$이다.

따라서 등비급수의 공비는 $\frac{1}{4}$이고, 첫번째 ⧖ 부분의 넓이는

사다리꼴 $A_1B_1B_2A_2$에서 정삼각형 $A_1B_1C_1$과 정삼각형 $A_2B_2C_1$을 제외하면 된다.

$\left(\because\ \angle A_1B_1A_2=\angle B_1A_2B_2(\text{엇각})=\angle A_1B_2A_2(\overset{\frown}{A_1A_2}\text{의 원주각})=\frac{\pi}{3}\right)$

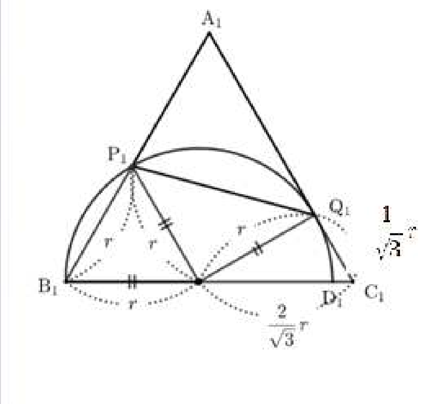
그러므로 첫째항은

$\dfrac{(2+1)}{2}\times\dfrac{3}{2}\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times2^2-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times1^2=\sqrt{3}$이다.

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\sqrt{3}}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$이므로 $p=4,\ q=3$

따라서 $p+q=7$

114. ⑤



원의 중심을 O라 하고 반지름의 길이를 r이라 하면

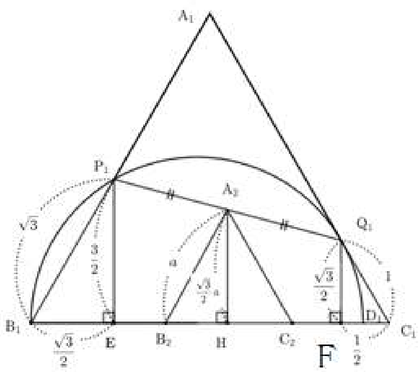
$\overline{OB_1}=r,\ \overline{OC_1}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}r$

$\overline{OB_1}+\overline{OC_1}=r\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)=2+\sqrt{3}$ 이므로 $r=\sqrt{3}$

$\overline{B_1P_1}=r=\sqrt{3},\ \overline{C_1Q_1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}r=1$

$\therefore\ \overline{A_1P_1}=2+\sqrt{3}-\sqrt{3}=2,\ \overline{A_1Q_1}=2+\sqrt{3}-1=\sqrt{3}+1$

$S_1=\dfrac{1}{2}\times2\times(\sqrt{3}+1)\times\sin60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}+1)$



점 $P_1,\ A_2,\ Q_1$에서 선분 B_1C_1에 내린 수선의 발을 각각 E, H, F라 하면

$\overline{P_1E}=\sqrt{3}\sin60^\circ=\dfrac{3}{2},\ \overline{Q_1F}=1\times\sin60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

점 A_2가 선분 P_1Q_1의 중점이므로

$\overline{A_2H}=\dfrac{\overline{P_1E}+\overline{Q_1F}}{2}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$

삼각형 $A_2B_2C_2$의 한 변의 길이를 a라 하면

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$ 이므로 $a=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

삼각형 $A_1B_1C_1$과 삼각형 $A_2B_2C_2$의 길이의 비가

$2+\sqrt{3}\ :\ \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\ =1\ :\ \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

넓이비는 $1:\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ 이므로 공비가 $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ 인 등비수열이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}+1)}{1-\frac{2-\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}+1$$

115. ④

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}\times 2} = e^2$$

116. ⑤

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x\to 0}\left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^2 = e^2$$

117. ②

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n\times(-1)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

118. ④

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x(x+4)}\times\frac{2}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

119. ⑤

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+7x)}{x^2+x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+7x)}{7x}\times\frac{7}{x+1} = 7$$

120. ①

풀이)

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^{ax+b}-4}{\log_2(2x+1)} = \frac{\frac{2^{ax+b}-4}{x}}{\frac{\log_2(2x+1)}{x}} = 4$$ 이므로 $b=2$ 이다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^{ax+2}-4}{x} = \lim_{x\to 0}4\times\frac{2^{ax}-1}{x} = a\ln 2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(2x+1)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\log_2(1+2x)}{x} = \frac{2}{\ln 2}$$ 가 된다.

$$\frac{a\ln 2}{\frac{2}{\ln 2}} = \frac{a}{2}(\ln 2)^2 = 4$$

$a=\frac{2}{(\ln 2)^2}$ 이다. $\therefore\ \frac{a}{b} = \frac{1}{(\ln 2)^2}$ 이다.

121. ④

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0}\left\{\frac{e^{2x}-1}{2x}\times\frac{x}{\ln(1+x)}\times\frac{2x}{x}\right\}$$

$=1\times1\times2$

$=2$

122. ②

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x^2)}{\ln 2}\times\frac{2x}{e^{2x}-1}\times\frac{1}{2x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x^2)}{3x^2}\times\frac{2x}{e^{2x}-1}\times\frac{3}{2\ln 2} = \frac{3}{2\ln 2}$$

$$\left(\because\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1\right)$$

123. ④

$3+b=4,\quad 3=a$

따라서 $a+b=4$

124. ⑤

$f(2)=3^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3}=\sqrt{27}$

$f(3)=4=\sqrt{16}$ 이므로 $f(2)>f(3)$ $\therefore$ ㄱ은 참

$\lim_{x\to 0+}f(x) = \lim_{x\to 0+}\left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^3 = e^3$ $\therefore$ ㄴ은 참

$f(x)=(1+x)^{\frac{3}{x}}$ 의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x) = \ln(1+x)^{\frac{3}{x}} = \frac{3}{x}\ln(1+x)$

양변을 x에 관하여 미분하면

$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{3}{x^2}\ln(1+x)+\frac{3}{x}\times\frac{1}{1+x}$ 이므로

$x=3$을 대입하면

$\frac{f'(3)}{f(3)} = -\frac{1}{3}\ln 4+\frac{1}{4}$ 이고, $f(3)=4$이므로

$f'(3)=1-\frac{4}{3}\ln 4$ $\therefore$ ㄷ은 참

125. ②

$$\lim_{x\to\infty}ax\ln\left(1+\frac{4}{x}\right) = 4a\lim_{x\to\infty}\frac{x}{4}\ln\left(1+\frac{4}{x}\right) = 4a$$

$a=2$

126. ①

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{x+a}=b$ 일 때

(분자)$\to 0$이므로 (분모)$\to 0$

$\lim_{x\to 0}(x+a)=a=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{x+a} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{x}\times\frac{4}{4} = 4$$

$b=4$

$\therefore\ a-b=-4$

127. ①

$$\lim_{x\to0}\ln\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(2^x+3^x)-\ln2}{x}$$

이다. 여기서 $f(x)=\ln(2^x+3^x)$이라 하면 $f(0)=\ln2$이다.
따라서

$$\lim_{x\to0}\ln\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$$이다.

$f(x)=\ln(2^x+3^x)$에서 $f'(x)=\dfrac{2^x\ln2+3^x\ln3}{2^x+3^x}$이므로

$f'(0)=\dfrac{\ln6}{2}=\ln\sqrt{6}$

128. ②

$$\lim_{x\to0}\frac{4^x-3^x}{e^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{4^x-1-3^x+1}{e^x-1}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{4^x-1}{x}-\frac{3^x-1}{x}\right\}\times\frac{x}{e^x-1}$$
$$=2\ln2-\ln3$$

129. ⑤

$$\lim_{x\to0}\frac{2^{ax+b}-8}{\log_2(4x+1)}=6$$

$\lim\limits_{x\to0}\log_2(4x+1)=0$ 이므로 $\lim\limits_{x\to0}(2^{ax+b}-8)=2^b-8=0$

$\therefore\ b=3$

$$\lim_{x\to0}\frac{2^{ax+3}-8}{\log_2(4x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{8(2^{ax}-1)}{\log_2(1+4x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{8(2^{ax}-1)}{ax}\times\frac{4x}{\log_2(1+4x)}\times\frac{a}{4}$$
$$=8\times ln2\times ln2\times\frac{a}{4}$$
$$=2a(\ln2)^2=6$$

$\therefore\ a=\dfrac{3}{(\ln2)^2}$

$\therefore\ ab=\dfrac{9}{(\ln2)^2}$

130. ⑤

$$\lim_{x\to0}\frac{16^x-2^x}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\ln(1+x)}\times\left\{\frac{16^x-1}{x}-\frac{2^x-1}{x}\right\}$$
$$=1\times(\ln16-\ln2)=3\ln2$$

131. ②

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(e^x-1)+a}{1-\cos x}=b$이고 $a=0$

$$\lim_{x\to0}\frac{x(e^x-1)}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\left(\frac{e^x-1}{x}\right)(1+\cos x)}{1-\cos^2x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\frac{e^x-1}{x}\cdot(1+\cos x)=2=b$$

132. ④

$x=1$에서 미분가능하려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}\{e^x[2x]+(ax+b)[e^{x-1}]\}=2e+a+b$

($\because$ $x\to1+$이면 $2x\to2+$, $e^{x-1}\to1+$이므로

$\lim\limits_{x\to1+}[2x]=2$, $\lim\limits_{x\to1+}[e^{x-1}]=1$)

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}\{e^x[2x]+(ax+b)[e^{x-1}]\}=e$

($\because$ $x\to1-$이면 $2x\to2-$, $e^{x-1}\to1-$이므로

$\lim\limits_{x\to1-}[2x]=1$, $\lim\limits_{x\to1-}[e^{x-1}]=0$)

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}f(x)=f(1)$에서 $a+b=-e$이다.....................㉮

$x=1$에서 미분가능하려면 좌미분계수와 우미분계수가 같아야 하므로

먼저 $x=1$근처에서의 $f(x)$를 구하면

$f(x)=\begin{cases}e^x\times1+(ax+b)\times0=e^x & (0.5<x<1)\\ e^x\times2+(ax+b)\times1=2e^x+ax+b & (1<x<1.5)\end{cases}$이고

이를 이용하여 $x=1$근처에서의 도함수 $f'(x)$를 구하면

$f'(x)=\begin{cases}e^x & (0.5<x<1)\\ 2e^x+a & (1<x<1.5)\end{cases}$이다.

$\lim\limits_{x\to1-}f'(x)=e$이고, $\lim\limits_{x\to1+}f'(x)=2e+a$에서

$a=-e$이다. 이를 ㉮에 대입하면 $b=0$이다.

$\therefore\ f(2)=4e^2-4e=4e(e-1)$

133. ①

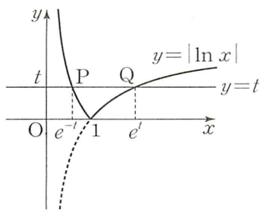
$x\ \geq\ 1$일 때 $\ln x\ \geq\ 0$, $0<x<1$일 때 $\ln x<0$

$$f(x)=\begin{cases}-\ln x & (0<x<1)\\ \ln x & (x\ \geq\ 1)\end{cases}$$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$가 만나는 서로 다른 두 점 P, Q의 x좌표는 각각 두 방정식 $-\ln x=t$, $\ln x=t$의 해와 같다.

즉, $-\ln x=t$에서 $x=e^{-t}$이므로 점 P의 x좌표는 e^{-t}이고

$\ln x=t$에서 $x=e^t$이므로 점 Q의 x좌표는 e^t이다.



$0<x<1$일 때, $f'(x)=(-\ln x)'=-\dfrac{1}{x}$이므로

점 P에서의 접선의 기울기는 $m_{\mathrm{P}}=-\dfrac{1}{e^{-t}}=-e^t$

$x\ \geq\ 1$일 때, $f'(x)=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$이므로

점 Q에서의 접선의 기울기는 $m_{\mathrm{Q}}=\dfrac{1}{e^t}$

$m_Q - m_P = \frac{1}{e^t} - (-e^t) = \frac{1}{e^t} + e^t$이므로

$\frac{1}{e^t} + e^t = \frac{5}{2}$

양변에 $2e^t$을 곱하고 식을 정리하면

$2e^{2t} - 5e^t + 2 = 0$

$(2e^t - 1)(e^t - 2) = 0$에서 $e^t = 2^{-1}$ 또는 $e^t = 2$

즉, $t = -\ln 2$ 또는 $t = \ln 2$

$t > 0$이므로 따라서 $t = \ln 2$

134. ⑤

$e^x = t$에서 $x = \ln t$ $\quad$ $A(\ln t,\ t)$

$\ln x = t$에서 $x = e^t$ $\quad$ $B(e^t,\ t)$

$C(\ln t,\ 0)$, $D(e^t,\ 0)$

$f(t) = e^t - \ln t$

$f'(t) = e^t - \frac{1}{t}$

$f'(2) = e^2 - \frac{1}{2}$이므로 $p = -\frac{1}{2},\ q = 1$

$\therefore\ p + q = \frac{1}{2}$

135. 16

선분 AB는 선분 OP의 수직이등분선이므로 삼각형 PMA의 넓이와 삼각형 AOM의 넓이는 같다.

따라서 $\frac{S(a)}{T(a)} = \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \frac{(\text{M의 } y\text{좌표})}{(\text{B의 } y\text{좌표}) - (\text{M의 } y\text{좌표})}$ 이다.

이제 세 점 M, A, B의 좌표를 구하자.

직선 OP의 기울기는 $\frac{\ln(1+4a)}{a}$이고 점 M의 좌표는

$\left(\frac{a}{2},\ \frac{\ln(1+4a)}{2}\right)$이므로 직선 AB의 방정식을 구하면

$y = -\frac{a}{\ln(1+4a)}\left(x - \frac{a}{2}\right) + \frac{\ln(1+4a)}{2}$ 이다.

따라서 두 점 A, B의 좌표는 각각

$A\left(\frac{(\ln(1+4a))^2 + a^2}{2a},\ 0\right)$, $B\left(0,\ \frac{a^2 + (\ln(1+4a))^2}{2\ln(1+4a)}\right)$이다.

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \frac{\frac{\ln(1+4a)}{2}}{\frac{a^2 + (\ln(1+4a))^2}{2\ln(1+4a)} - \frac{\ln(1+4a)}{2}}$$

$$= \frac{(\ln(1+4a))^2}{a^2}$$

$$= \left(\frac{\ln(1+4a)}{a}\right)^2$$

$$\lim_{a\to 0+}\frac{S(a)}{T(a)} = \lim_{a\to 0+}\left(\frac{\ln(1+4a)}{a}\right)^2 = 4^2$$

136. ③

$A(\ln t,\ t)$, $C(\ln t,\ 0)$, $B(e^t + 1,\ t)$, $D(e^t + 1,\ 0)$에서

$S(t) = (e^t + 1 - \ln t) \times t$이므로

$S'(t) = \left(e^t - \frac{1}{t}\right) \times t + (e^t + 1 - \ln t)$

$S'(1) = e - 1 + e + 1 = 2e$

137. ③

$f(x) = 2^{x+2} + 8^x$

$f'(x) = 2^{x+2}\ln 2 + 8^x \ln 8$

$f'(0) = 4\ln 2 + \ln 8 = 7\ln 2$

$\therefore\ \frac{f'(0)}{\ln 2} = 7$

138. ①

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^x + 1) - e^{2x} \cdot e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(1) = \frac{2e^2(e+1) - e^3}{(e+1)^2} = \frac{e^2(e+2)}{(e+1)^2}$$

139. ③

$f(x) = (x^2 + ax + b)(e^{x-c} - 1)$

$f'(x) = (2x + a)(e^{x-c} - 1) + (x^2 + ax + b)e^{x-c}$

$f'(c) = c^2 + ac + b = b$

$c(a + c) = 0$

$\therefore\ c = 0$ 또는 $a = -c$ $\quad\cdots$ ①

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}$, $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}$, $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}$의 값이 존재하므로

$f(1) = f(2) = f(3) = 0$

ⅰ) $f(x) = (x-1)(x-2)(e^{x-3} - 1) = (x^2 - 3x + 2)(e^{x-3} - 1)$일 때

$a = -3,\ b = 2,\ c = 3$이므로 ①의 조건을 만족함

ⅱ) $f(x) = (x-1)(x-3)(e^{x-2} - 1) = (x^2 - 4x + 3)(e^{x-2} - 1)$일 때

$a = -4,\ b = 3,\ c = 2$이므로 ①의 조건을 만족하지 않음

ⅲ) $f(x) = (x-2)(x-3)(e^{x-1} - 1) = (x^2 - 5x + 6)(e^{x-1} - 1)$일 때

$a = -5,\ b = 6,\ c = 1$이므로 ①의 조건을 만족하지 않음

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의해 $a = -3,\ b = 2,\ c = 3$

$\therefore\ a^2 + b^2 + c^2 = 9 + 4 + 9 = 22$

140. ①

$f(h) = \frac{1}{\ln(e+h)}$ 로 놓으면 $f(0) = 1$이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{e}{h}\left\{\frac{1}{\ln(e+h)} - 1\right\} = e \times \lim_{h\to 0}\frac{f(h) - f(0)}{h} = e \times f'(0)$

이때 $f'(h) = -\frac{1}{(e+h)\{\ln(e+h)\}^2}$ 이므로 $f'(0) = -\frac{1}{e}$

따라서 $e \times f'(0) = -1$

141. -2

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(h)-f(-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{\{\ln(1-h)-\ln(1-h)\}-\{\ln(1+h)+\ln(1+h)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\left\{-2\cdot\frac{\ln(1+h)}{h}\right\}=-2$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(h)-f(-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0-}\frac{\{\ln(1-h)+\ln(1-h)\}-\{\ln(1+h)-\ln(1+h)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0-}\left\{-2\cdot\frac{\ln(1-h)}{-h}\right\}=-2$$

$\therefore\ \lim_{h\to0+}\frac{f(h)-f(-h)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{f(h)-f(-h)}{h}=-2$이므로

$\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(-h)}{h}=-2$이다.

142. ⑤

$\ln(x^2+1)=g(x)$, $|\ln x|=h(x)$라 하면

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1-h)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{h(1+h)-h(1-h)}{h}$$

$$=2g'(1)+\lim_{h\to0}\frac{|\ln(1+h)|-|\ln(1-h)|}{h}$$

$$=2+\lim_{h\to0+}\frac{\ln(1+h)+\ln(1-h)}{h}$$

$$=2+0=2$$

143. ①

$f(x)=a\ln x+x+b$, $f'(x)=\frac{a}{x}+1$

$$\lim_{x\to1}f(x^3)f'(x-1)$$

$$=\lim_{x\to1}(3a\ln x+x^3+b)\left(\frac{a}{x-1}+1\right)$$

(수렴하므로 $b=-1$ 이다.)

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{3a^2\ln x}{x-1}+3a\ln x+a(x^2+x+1)+x^3-1\right)$$

$$=3a^2+3a=-\frac{3}{4}$$

에서 $a=-\frac{1}{2}$

따라서 $f(e^2)=2a+e^2+b=e^2-2$ 이다.

144. ②

두 함수가 역함수이므로 $\mathrm{P}(a,b)$, $\mathrm{Q}(b,a)$, $\mathrm{R}\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2}\right)$이다.

$\overline{\mathrm{OR}}=\left(\frac{a+b}{2}\right)\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{QR}}=\left(\frac{b-a}{2}\right)\sqrt{2}$

$$\lim_{a\to0+}\frac{\overline{\mathrm{OR}}^2-\overline{\mathrm{QR}}^2}{a^2}$$

$$=\lim_{a\to0+}\frac{\frac{(a+b)^2}{2}-\frac{(b-a)^2}{2}}{a^2}=\lim_{a\to0+}\frac{2\ln(a+1)}{a}=2$$

145. $f(2)=-2$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{4}$

조건 (가)의 $-1=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^3\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}$에서

$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{3}{x}}=1$이므로

$$-1=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^3\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^3\times\frac{3}{x}\times\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{3}{x}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^3\times\frac{3}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{3x^2}$$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+ax+b\cdots$ ㉠라 할 수 있다

조건 (나)에서

$$3=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{e^{-x+1}-1}$$

분모$\to0$이므로, 분자$\to0$인데 연속함수이므로 $f(1)=0$이다.

식 ㉠을 적용하면 $f(x)=(x-1)(x^2-2x+c)$이다.

$$3=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2-2x+c)}{e^{-x+1}-1}$$

$$3=\lim_{u\to0}\frac{u\{(u+1)^2-2(u+1)+c\}}{e^{-u}-1}\quad(\because x-1=u)$$

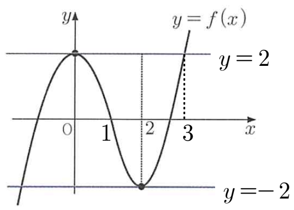
$$=\lim_{u\to0}\frac{u\{(u+1)^2-2(u+1)+c\}e^u}{-(e^u-1)}$$

$$=-\lim_{u\to0}\{(u+1)^2-2(u+1)+c\}\times\lim_{u\to0}\frac{u}{e^u-1}\times\lim_{u\to0}e^u$$

$$=1-c$$

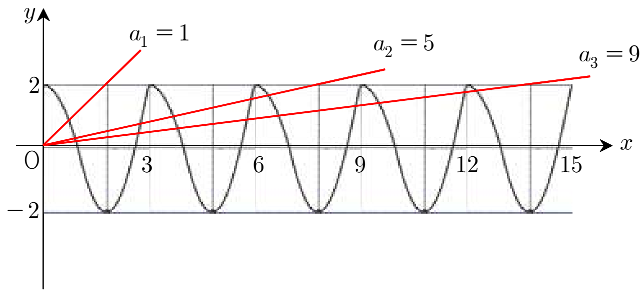
$\therefore\ f(x)=(x-1)(x^2-2x-2)=x^3-3x^2+2$

$f'(x)=3x^2-6x$이고 $f(0)=2$, $f(2)=-2$, $f(3)=2$이다.



$-2\le f(x)\le2$이므로 직선 $y=\frac{1}{3n-2}x$에서

$y=2$일 때, $x=2(3n-2)=6n-4$이고 원점을 지난다.



따라서 $y=\dfrac{1}{3n-2}x$가 $y=g(x)$와 $x\geq 0$에서 만나는 서로 다른 점의 개수 a_n을 구하면 $a_n=1+4(n-1)=4n-3$이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left\{1-\frac{1}{4n+1}\right\}=\frac{1}{4}$$

따라서 $f(2)=-2$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\frac{1}{4}$

146. ③

$$a_n=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)\ln(1+2x)\cdots\ln(1+nx)}{x^n}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\times\frac{\ln(1+2x)}{2x}\times\cdots\times\frac{\ln(1+nx)}{nx}\times n!$$
$$=n!$$
$$\therefore\ a_n=n!$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)-1}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)=1$$

147. ②

직선 $y=t$와 곡선 $y=2^x$이 만나는 점 A의 x좌표는 $2^x=t$에서 $x=\log_2 t$이므로 점 A의 좌표는 $(\log_2 t,\ t)$

$\overline{AC}=\log_2 t$, $\overline{CE}=t-1$이므로 삼각형 ACE의 넓이는

$$f(t)=\frac{1}{2}\times(t-1)\times\log_2 t=\frac{1}{2}(t-1)\log_2 t$$

직선 $y=t$와 곡선 $y=\log_2 x$가 만나는 점 B의 x좌표는 $\log_2 x=t$에서 $x=2^t$이므로 점 B의 좌표는 $(2^t,\ t)$이다.

$\overline{BD}=t$, $\overline{DF}=2^t-1$이므로 삼각형 BFD의 넓이는

$$g(t)=\frac{1}{2}\times t\times(2^t-1)=\frac{1}{2}t(2^t-1)$$

$$\lim_{t\to 1+}\frac{f(t)}{h(t)}=\lim_{t\to 1+}\frac{(t-1)\log_2 t}{2h(t)}=a$$

이때 $a\neq 0$이고 $t\to 1+$일 때 (분자)$\to 0$이므로 (분모)$\to 0$이어야 한다. 함수 $h(t)$가 연속함수이므로 $h(1)=0$

즉, $h(t)=(t-1)h_1(t)$ (단, $h_1(t)$는 삼차항 계수가 1인 삼차식)

$$\lim_{t\to 1+}\frac{(t-1)\log_2 t}{2h(t)}=\lim_{t\to 1+}\frac{(t-1)\log_2 t}{2(t-1)h_1(t)}=\lim_{t\to 1+}\frac{\log_2 t}{2h_1(t)}=a$$

이때 $a\neq 0$이고 $t\to 1+$일 때 (분자)$\to 0$이므로 (분모)$\to 0$이어야 한다. 함수 $h_1(t)$가 연속함수이므로 $h_1(1)=0$

즉, $h(t)=(t-1)^2h_2(t)$ (단, $h_2(t)$는 이차항 계수가 1인 이차식)

마찬가지로

$$\lim_{t\to 0+}\frac{g(t)}{h(t)}=\lim_{t\to 0+}\frac{t(2^t-1)}{2h(t)}=b$$

이때 $b\neq 0$이고 $t\to 0+$일 때 (분자)$\to 0$이므로 (분모)$\to 0$이어야 한다. 함수 $h(t)$가 연속함수이므로 $h(0)=0$

즉, $h(t)=t(t-1)^2h_3(t)$ (단, $h_3(t)$는 일차항 계수가 1인 일차식)

$$\lim_{t\to 0+}\frac{t(2^t-1)}{2h(t)}=\lim_{t\to 0+}\frac{t(2^t-1)}{2t(t-1)^2h_3(t)}=\lim_{t\to 0+}\frac{(2^t-1)}{2(t-1)^2h_3(t)}=b$$

이때 $b\neq 0$이고 $t\to 0+$일 때 (분자)$\to 0$이므로 (분모)$\to 0$이어야 한다. 함수 $h_3(t)$가 연속함수이므로 $h_3(0)=0$

$$\therefore\ h(t)=t^2(t-1)^2$$

$$a=\lim_{t\to 1+}\frac{(t-1)\log_2 t}{2t^2(t-1)^2}=\lim_{t\to 1+}\frac{\log_2 t}{2t^2(t-1)}=\lim_{t\to 1+}\left(\frac{\log_2 t}{t-1}\times\frac{1}{2t^2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to 1+}\frac{\log_2 t}{t-1}$$

$\displaystyle\lim_{t\to 1+}\frac{\log_2 t}{t-1}$에서 $t-1=z$로 놓으면 $t\to 1+$일 때 $z\to 0+$이므로

$$\lim_{t\to 1+}\frac{\log_2 t}{t-1}=\lim_{z\to 0+}\frac{\log_2(1+z)}{z}=\frac{1}{\ln 2}$$

그러므로 $a=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{\ln 2}=\dfrac{1}{2\ln 2}$

$$b=\lim_{t\to 0+}\frac{t(2^t-1)}{2t^2(t-1)^2}=\lim_{t\to 0+}\frac{2^t-1}{2t(t-1)^2}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\left\{\frac{2^t-1}{t}\times\frac{1}{2(t-1)^2}\right\}$$
$$=\ln 2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ln 2$$

따라서 $ab=\dfrac{1}{2\ln 2}\times\dfrac{1}{2}\ln 2=\dfrac{1}{4}$이고

$$h(ab)=h\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{4^4}$$
$$=\frac{9}{2^8}$$

이므로 $2^8\times h(ab)=9$

148. ③

$e^x = t$ 에서 $x = \ln t$ $\quad$ $\mathrm{A}(\ln t,\ t)$

$\ln x = t$ 에서 $x = e^t$ $\quad$ $\mathrm{B}(e^t,\ t)$

$\mathrm{C}(0,\ t),\ \mathrm{D}(e^t,\ 0)$

$\overline{\mathrm{CE}} = t-1,\ \overline{\mathrm{AC}} = \ln t$ 이므로 $f(t) = \frac{1}{2}(t-1)\ln t$

$\overline{\mathrm{BD}} = t,\ \overline{\mathrm{DF}} = e^t - 1$ 이므로 $g(t) = \frac{1}{2}t(e^t-1)$

$\lim_{t\to0+}\frac{g(t)}{h(t)} = b\ (b\neq0)$이므로 $h(t)$는 t^2을 인수로 갖는다.

$\lim_{t\to1+}\frac{f(t)}{h(t)} = a\ (a\neq0)$이므로 $h(t)$는 $(t-1)^2$을 인수로 갖는다.

$h(t)$는 최고차항의 계수가 2인 사차함수이므로

$h(t) = 2t^2(t-1)^2$

ㄱ. $a = \lim_{t\to1+}\frac{f(t)}{h(t)} = \lim_{t\to1+}\frac{(t-1)\ln t}{4t^2(t-1)^2} = \lim_{t\to1+}\frac{\ln t}{4t^2(t-1)}$

$= \lim_{x\to0+}\frac{\ln(1+x)}{4x(1+x)^2} = \frac{1}{4}$ (참)

ㄴ. $g(t) = \frac{1}{2}t(e^t-1)$ (참)

ㄷ. $b = \lim_{t\to0+}\frac{g(t)}{h(t)} = \lim_{t\to0+}\frac{t(e^t-1)}{4t^2(t-1)^2} = \frac{1}{4}$

ㄱ에서 $a = \frac{1}{4}$ 이므로 $\frac{1}{4ab} = 4$

$\therefore\ h\left(\frac{1}{4ab}\right) = h(4) = 2\times4^2\times3^2 = 288$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

149. 36

두 점 A ,B의 좌표는 각각 $(\ln t,\ t)$, $(e^t,\ t)$이다.

따라서 $f(t) = \frac{1}{2}(t-1)\ln t,\ g(t) = \frac{1}{2}(e^t-1)t$이다.

$\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t} = 1$이므로

$b = \lim_{t\to0+}\frac{g(t)}{h(t)} = \frac{1}{2}\lim_{t\to0+}\frac{(e^t-1)t}{h(t)} = \frac{1}{2}\lim_{t\to0+}\frac{t^2}{h(t)}$ $\cdots$ ㉠

$\lim_{t\to1+}\frac{\ln t}{t-1} = \lim_{u\to0+}\frac{\ln(1+u)}{u} = 1$이므로

$a = \lim_{t\to1+}\frac{f(t)}{h(t)} = \frac{1}{2}\lim_{t\to1+}\frac{(t-1)\ln t}{h(t)} = \frac{1}{2}\lim_{t\to1+}\frac{(t-1)^2}{h(t)}$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 (분자$\to0$)이고 (극한값)$\neq0$이므로

(분자$\to0$)이다. 따라서 $h(t) = t^2(t-1)^2$이다.

이를 ㉠, ㉡에 대입하면, $a = b = \frac{1}{2}$이다.

$\therefore h\left(\frac{3b}{a}\right) = h(3) = 36$

150. ③

$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

151. ④

$\cos\alpha = \frac{4}{5},\ \sin\beta = \frac{4}{5}$ 이므로

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \frac{3}{5}\times\left(-\frac{3}{5}\right) - \frac{4}{5}\times\frac{4}{5} = -1$

152. ③

풀이)

$\angle PAB = \theta$라 하면 $\angle QAB = 2\theta$ 이고,

$\cos\theta = \frac{6}{7}$

$\cos2\theta = \frac{a}{7}$ 이므로

$\cos2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$\frac{a}{7} = 2\times\frac{36}{49} - 1$

$7a = 23$ 이다.

153. ④

$\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x^3+2x^2+4x)}{3x^3+2x^2+4x}\times\frac{x(3x^2+2x+4)}{x(2x^2+4x+2)} = \frac{4}{2} = 2$

$\left(\because\ \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1\right)$

154. ①

$x = u + \frac{\pi}{2}$라 하면,

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2\cos x)}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{u\to0}\frac{\sin\left(2\cos\left(u+\frac{\pi}{2}\right)\right)}{u}$

$= \lim_{u\to0}\frac{\sin(-2\sin u)}{u}$

$= \lim_{u\to0}\frac{-\sin(2\sin u)}{u}$

$= -\lim_{u\to0}\frac{\sin(2\sin u)}{u}$

$= -\lim_{u\to0}\left\{\frac{\sin(2\sin u)}{2\sin u}\times\frac{2\sin u}{u}\right\}$

$= -2$

$(\because \lim_{u\to0}\frac{\sin u}{u} = 1,\ 2\sin u = t$이면 $\lim_{u\to0}\frac{\sin(2\sin u)}{2\sin u} = \lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t} = 1)$

155. ④

$f'(x) = 2\cos x$

156. ②

$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$$\tan\frac{5}{12}\pi=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=\frac{8+4\sqrt{3}}{4}$$

$\therefore\ \sin\frac{\pi}{12}+\tan\frac{5}{12}\pi=\frac{8+\sqrt{6}+4\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$

$a=8,\ b=1,\ c=4,\ d=-1$이므로

$\therefore\ a+b+c+d=12$

157. ④

$f(x)=\sin x\cos 3x-\cos x\sin 3x=\sin(x-3x)=-\sin 2x$

$f(a)=-\sin 2a=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{3}{2}\pi<2a<2\pi$ 이므로 $\sin 2a=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 2a=\frac{1}{2}$

$\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}=\frac{1}{4}$

$\therefore\ \sin a=\frac{1}{2},\ \cos a=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ \left(\frac{3}{4}\pi<a<\pi\right)$

$f(b)=-\sin 2b=\frac{3}{5}$

$\frac{3}{2}\pi<2b<2\pi$ 이므로 $\sin 2b=-\frac{3}{5},\ \cos 2b=\frac{4}{5}$

$\therefore\ \sin(a+2b)=\sin a\cos 2b+\cos a\sin 2b$

$=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{5}\right)$

$=\frac{2}{5}+\frac{3}{10}\sqrt{3}$

158. ②

$f(x)=\cos x\cos 2x+\sin x\sin 2x=\cos x$이다.

따라서

$f(a)=\cos a=\frac{1}{2},\ \sin a=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$f(b)=\cos b=\frac{4}{5},\ \sin b=\frac{3}{5}$이다.

$f(b-a)=\cos(b-a)$

$=\cos b\cos a+\sin b\sin a$

$=\frac{2}{5}+\frac{3\sqrt{3}}{10}$

159. ④

$f(x)=\cos x\cos 2x+\sin x\sin 2x=\cos(x-2x)=\cos(-x)=\cos x$

$f(a)=\frac{3}{5}$에서 $\cos a=\frac{3}{5}$이고,

$\tan a=\frac{4}{3}\ \left(\because\ 0<a<\frac{\pi}{2}\text{이므로 }\tan a>0\right)$이다.

$f(b)=-\frac{4}{5}$에서 $\cos b=-\frac{4}{5}$이고,

$\tan b=-\frac{3}{4}\ \left(\because\ \frac{\pi}{2}<b<\pi\text{이므로 }\tan b<0\right)$이다.

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}=\frac{\frac{4}{3}+\left(-\frac{3}{4}\right)}{1-\frac{4}{3}\times\left(-\frac{3}{4}\right)}=\frac{\frac{7}{12}}{2}=\frac{7}{24}$$

160. ②

삼각함수의 합차공식에 의해

$2\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\ \sin\theta=\frac{1}{2}$

이므로 $\beta=\frac{2\pi}{3},\ \alpha=\frac{\pi}{3}$이므로 $\beta-\alpha=\frac{\pi}{3}$이다.

【다른풀이추가】

$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$

$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}-\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$

$\therefore\ \sin\theta=\frac{1}{2}$

161. ②

$25x^2-5x-12=0$

$(5x+3)(5x-4)=0$

$\cos\alpha=\frac{4}{5},\ \cos\beta=-\frac{3}{5}$ 라 하면 $0\le\alpha\le\pi,\ 0\le\beta\le\pi$이므로

$\tan\alpha=\frac{3}{4},\ \tan\beta=-\frac{4}{3}$

$$\therefore\ \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{3}{4}+\left(-\frac{4}{3}\right)}{1-\left(\frac{3}{4}\right)\times\left(-\frac{4}{3}\right)}=-\frac{7}{24}$$

162. ④

풀이)

$25\sin^2 x-5\cos x-13=0$에서

$25(1-\cos^2 x)-5\cos x-13=0$

$25\cos^2 x+5\cos x-12=0$

$(5\cos x-3)(5\cos x+4)=0$

$\cos x=\frac{3}{5}$ 또는 $-\frac{4}{5}$ 이다,

서로 다른 두 실근을 α,β라 하면.

$\cos\alpha=\frac{3}{5}\ \ \sin\alpha=\frac{4}{5}$ 이고, $\cos\beta=-\frac{4}{5}\ \ \sin\beta=\frac{3}{5}$이다.

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$에서

$=\left(\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\right)-\left(\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{24}{25}$ 이다.

$\sin(\alpha+\beta)=\frac{7}{25}$ 이므로

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{7}{24}$ 이므로 $\cot(\alpha+\beta)=\frac{24}{7}$

163. ③

평행이동시켜도 두 직선이 이루는 각은 변하지않으므로

$x+2y=0,\ 3x+y=0$이 이루는 각과 같다.

따라서 예각을 θ라 하고, $\tan\alpha=-3,\ \tan\beta=-\frac{1}{2}$이라 하면,

$$\tan\theta=\left|\frac{-3+\frac{1}{2}}{1+(-3)\left(-\frac{1}{2}\right)}\right|$$

$=1$

$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{4}$

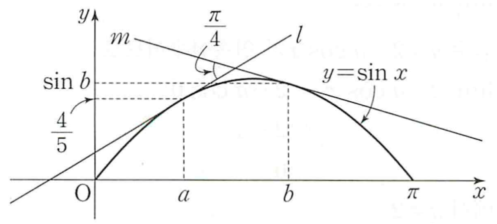
164. ④

점 $\left(a,\ \frac{4}{5}\right)$는 곡선 $y=\sin x\ (0<x<\pi)$ 위의 점이므로

$\sin a=\frac{4}{5}$

$y'=(\sin x)'=\cos x$ 이고 $0<a<\frac{\pi}{2}$ 이므로 접선 l의 기울기는

$\cos a=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$



두 직선 $l,\ m$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 $\alpha,\ \beta$라 하면 두 직선 $l,\ m$이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$|\tan(\alpha-\beta)|=\tan\frac{\pi}{4}=1$

이때 $\tan\alpha=\cos a=\frac{3}{5},\ \tan\beta=\cos b$ 이므로

$$|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$$

$$=\left|\frac{\frac{3}{5}-\cos b}{1+\frac{3}{5}\times\cos b}\right|=1$$

(i) $\frac{\frac{3}{5}-\cos b}{1+\frac{3}{5}\times\cos b}=-1$일 때

$\frac{3}{5}-\cos b=-1-\frac{3}{5}\cos b$에서 $\cos b=4$ (×)

(ii) $\frac{\frac{3}{5}-\cos b}{1+\frac{3}{5}\times\cos b}=1$일 때

$\frac{3}{5}-\cos b=1+\frac{3}{5}\cos b$에서 $\cos b=-\frac{1}{4}$

(i), (ii)에 의해 $\cos b=-\frac{1}{4}$

따라서 $32\sin^2 b=32(1-\cos^2 b)=32\left(1-\frac{1}{16}\right)=30$

165. ②

$\cos a=\frac{4}{5}$ 일 때 $0<a<\frac{\pi}{2}$ 이므로

$\sin a=\sqrt{1-\cos^2 a}=\frac{3}{5}$

$y'=-\sin x$

두 점 $\left(a,\ \frac{4}{5}\right),\ (b,\ \sin b)$에서의 접선의 기울기는 각각

$-\sin a,\ -\sin b$이고, 두 직선이 이루는 예각의 크기가

$\frac{\pi}{4}$이므로

$$\tan\frac{\pi}{4}=\left|\frac{-\sin a+\sin b}{1+(-\sin a)(-\sin b)}\right|=\left|\frac{\sin b-\frac{3}{5}}{1+\frac{3}{5}\sin b}\right|=1$$

i) $\frac{\sin b-\frac{3}{5}}{1+\frac{3}{5}\sin b}=1$ 일 때

$\sin b-\frac{3}{5}=1+\frac{3}{5}\sin b$

$\frac{2}{5}\sin b=\frac{8}{5}$

$\sin b=4$ 이므로 성립하지 않음

ii) $\frac{\sin b-\frac{3}{5}}{1+\frac{3}{5}\sin b}=-1$

$\sin b-\frac{3}{5}=-1-\frac{3}{5}\sin b$

$\frac{8}{5}\sin b=-\frac{2}{5}$

$\sin b=-\frac{1}{4}$

i), ii)에 의해 $\sin b=-\frac{1}{4}$

$\therefore\ 4\sin b=-1$

166. ⑤

$y'=\frac{1}{x}+4x$이므로 $x=1$에서 기울기는 5

167. ④

두 직선 l. l'의 x축과 이루는 각을 각각 β, α라 하자.

$\tan\alpha=3,\ \tan\beta=\frac{1}{4}$

이고 두 직선 사이의 예각을 θ라 하면 $\theta=\alpha-\beta$이다.

$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$

$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha tan\beta}$

$=\frac{3-\frac{1}{4}}{1+3\times\frac{1}{4}}=\frac{11}{7}$

따라서 $\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{PQ}}\cot\theta=11\times\frac{7}{11}=7$

168. ④

$y'=\cos x$이므로 $x=a$에서의 접선의 기울기는 $\cos a=\frac{4}{5}$이고,

$x=b$에서의 접선의 기울기는 $\cos b$ (단, $\frac{\pi}{2}<b<\pi$)이다.

두 직선 l. m이 x축과 이루는 각을 각각 α, β라 하면,

$\tan\alpha=\frac{4}{5}$이고, $\tan\beta=\cos b$이다.

$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|$

$=\left|\frac{\frac{4}{5}-\cos b}{1+\frac{4}{5}\times\cos b}\right|$

$\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$1=\left|\frac{\frac{4}{5}-\cos b}{1+\frac{4}{5}\times\cos b}\right|=\left|\frac{4-5\cos b}{5+4\times\cos b}\right|,$

$|5+4\cos b|=|4-5\cos b|$

$9\cos b=-1$ 또는 $\cos b=9$ (모순)

따라서 $\cos b=-\frac{1}{9}$이다.

따라서 $\sin^2 b=1-\cos^2 b=\frac{80}{81}$이다.

$p+q=161$

169. ②

풀이)

$\overline{ED}=a$라고 하면 $\overline{AE}=3a$

피타고라스에 의하여 $5-a^2=20-16a^2$ 이므로

$15a^2=15,\ \therefore\ a=1$ 이다.

$\overline{ED}=1,\ \overline{AE}=3,$

피타고라스에 의하여 $\overline{BD}=3,\ \overline{CD}=2$ 이므로

$\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$,

$\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{2}{5\sqrt{5}}$

$\therefore\ \cos(\alpha+\beta)=\frac{2\sqrt{5}}{25}$

170. ④

원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $\mathrm{A}(3,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$3x+4y=25$

$\mathrm{B}\left(\frac{25}{3},\ 0\right),\ \mathrm{C}\left(0,\ \frac{25}{4}\right)$

선분 BC를 $3:2$로 내분하는 점을 P라 하면 $\mathrm{P}\left(\frac{10}{3},\ \frac{15}{4}\right)$

선분 CP를 $3:1$로 외분하는 점을 Q라 하면 $\mathrm{Q}\left(5,\ \frac{5}{2}\right)$

선분 OP가 x축과 이루는 각의 크기를 α라 하면 $\tan\alpha=\frac{9}{8}$

선분 OQ가 x축과 이루는 각의 크기를 β라 하면 $\tan\beta=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\frac{9}{8}-\frac{1}{2}}{1+\frac{9}{8}\times\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}$

171. ①

$12\cos^3 x+\sin 2x-8\cos x=0$

$12\cos^3 x+2\sin x\cos x-8\cos x=0$

$2\cos x\{6(1-\sin^2 x)+\sin x-4\}=0$

$-2\cos x(6\sin^2 x-\sin x-2)=0$

$-2\cos x(2\sin x+1)(3\sin x-2)=0$

$\cos x=0$ 또는 $\sin x=-\frac{1}{2},\ \sin x=\frac{2}{3}$

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin x\ne-\frac{1}{2}$

$\cos x=0$일 때 $\sin x=1$

$\sin x=\frac{2}{3}$일 때 $\cos x=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\therefore\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=0-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}$

172. (1) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ (2) 2 (3) 0

(4) $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\sin(2x+h)-\sin 2x}{h}$

$=\frac{\sin 2x\cos 2h+\cos 2x\sin 2h-\sin 2x}{h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{-\sin 2x(1-\cos 2h)}{h}+\frac{\cos 2x\sin 2h}{h}\right\}$

$=\lim_{h\to0}\left\{-\sin 2x\times\frac{(1-\cos 2h)}{h}+2\cos 2x\times\frac{\sin 2h}{2h}\right\}$

$=(-\sin 2x)\times0+2\cos 2x\times1$

$=2\cos 2x$

(1) $\sin(45^\circ+60^\circ)=\sin45^\circ cos60^\circ+\cos45^\circ sin60^\circ$

$=\frac{\sqrt2}{2}\times\frac12+\frac{\sqrt2}{2}\times\frac{\sqrt3}{2}$

$=\frac{\sqrt2+\sqrt6}{4}$

(2) $\lim_{h\to0}\frac{\sin 2h}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sin 2h}{2h}\times2=1\times2=2$

(3) $\lim_{h\to0}\frac{1-\cos 2h}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1-\cos 2h}{h}\times\frac{1+\cos 2h}{1+\cos 2h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\sin 2h}{2h}\times\frac{\sin 2h}{1+\cos 2h}\times2$

$=1\times\frac{0}{2}\times2=0$

(4) $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\sin(2x+h)-\sin 2x}{h}$

$=\frac{\sin 2x\cos 2h+\cos 2x\sin 2h-\sin 2x}{h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{-\sin 2x(1-\cos 2h)}{h}+\frac{\cos 2x\sin 2h}{h}\right\}$

$=\lim_{h\to0}\left\{-\sin 2x\times\frac{(1-\cos 2h)}{h}+2\cos 2x\times\frac{\sin 2h}{2h}\right\}$

$=(-\sin 2x)\times0+2\cos 2x\times1$

$=2\cos 2x$

173. ①

$\lim_{x\to0}\frac{3x^2}{\cos x-1}=\lim_{x\to0}\frac{3x^2}{\cos x-1}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{3x^2(1+\cos x)}{-\sin^2 x}$

$=-6$

174. ④

$f(n)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots+\sin nx}{x}$

$=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

$\lim_{x\to1}\frac{x^k-e^{x-1}}{x^3-1}=3$에서 $x^k-e^{x-1}=g(x)$라 하면

$\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x^3-1}=\frac{g'(1)}{3}=3,\ g(1)=0$이다.

$g'(x)=kx^{k-1}-e^{x-1},\ g'(1)=k-1=9$

따라서 $k=10$이므로

$\sum_{n=1}^{10}f(n)=\frac{10\times11\times12}{6}=220$

175. ③

$\lim_{x\to0}\frac{\tan^n x-\sin^n x}{x^6}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^n x}{x^6}\left(\frac{1}{\cos^n x}-1\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin^n x}{x^6}\times\frac{1-\cos^n x}{\cos^n x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^n x}{x^6}\times\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\times\frac{1+\cos x+\cos^2 x+\cdots+\cos^{n-1}x}{\cos^n x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^{n+2}x}{x^6}\times\frac{1+\cos x+\cos^2 x+\cdots+\cos^{n-1}x}{(1+\cos x)\cos^n x}$

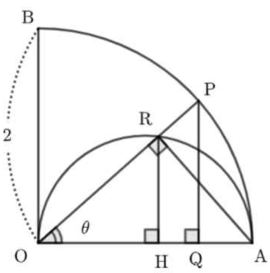
$=\lim_{x\to0}\frac{n}{2}\times\frac{\sin^{n+2}x}{x^6}$ 이고

0이 아닌 α에 수렴하기 위해서는 $n=4$여야 한다.

이때, 극한값은 $\frac{n}{2}=2$이므로 $\alpha=2$이다.

$\therefore\ n+\alpha=4+2=6$

176. ①



$\overline{OP}=2$ 이므로 $\overline{PQ}=2\sin\theta,\ \overline{OQ}=2\cos\theta$

$\overline{OA}=2$ 이므로 $\overline{OR}=2\cos\theta$

점 R에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OH}=\overline{OR}\cos\theta=2\cos^2\theta$

$\therefore\ \overline{QH}=\overline{OQ}-\overline{OH}=2\cos\theta(1-\cos\theta)$

$S(\theta)=\frac12\times\overline{PQ}\times\overline{OH}$

$=\frac12\times2\sin\theta\times2\cos\theta(1-\cos\theta)$

$=2\sin\theta cos\theta(1-\cos\theta)$

$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin\theta cos\theta(1-\cos\theta)}{\theta^3}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin^3\theta\cos\theta}{\theta^3(1+\cos\theta)}=\frac22=1$

177. ④

직각삼각형 ABC에서

$\cos\theta=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{BC}}{6}$ 이므로 $\overline{BC}=6\cos\theta$

$\sin\theta = \dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{6}$ 이므로 $\overline{\mathrm{AC}} = 6\sin\theta$

점 D가 선분 AC를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$\overline{\mathrm{AD}} = \dfrac{2}{3}\overline{\mathrm{AC}} = \dfrac{2}{3}\times 6\sin\theta = 4\sin\theta$

$\overline{\mathrm{DC}} = \dfrac{1}{3}\overline{\mathrm{AC}} = \dfrac{1}{3}\times 6\sin\theta = 2\sin\theta$

$\angle\mathrm{DAH} = \alpha$라 하면 $\angle\mathrm{ADH} = \angle\mathrm{BDC}$이므로

$\angle\mathrm{DBC} = \alpha$

직각삼각형 BCD에서

$\overline{\mathrm{BD}} = \sqrt{(6\cos\theta)^2 + (2\sin\theta)^2} = \sqrt{36\cos^2\theta + 4\sin^2\theta}$

$= \sqrt{4 + 32\cos^2\theta}$

이므로

$\cos\alpha = \dfrac{6\cos\theta}{\sqrt{4+32\cos^2\theta}}$

$\sin\alpha = \dfrac{2\sin\theta}{\sqrt{4+32\cos^2\theta}}$

삼각형 ADH에서

$\overline{\mathrm{AH}} = \overline{\mathrm{AD}}\cos\alpha = 4\sin\theta\cos\alpha = 4\sin\theta \times \dfrac{6\cos\theta}{\sqrt{4+32\cos^2\theta}}$

$= \dfrac{24\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{4+32\cos^2\theta}}$

삼각형 ADH의 넓이는

$S(\theta) = \dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{AH}}\times\sin\alpha$

$= \dfrac{1}{2}\times 4\sin\theta \times \dfrac{24\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{4+32\cos^2\theta}} \times \dfrac{2\sin\theta}{\sqrt{4+32\cos^2\theta}}$

$= \dfrac{96\sin^3\theta\cos\theta}{4+32\cos^2\theta}$

이므로

$\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3} = \lim_{\theta\to0+}\frac{96\sin^3\theta\cos\theta}{\theta^3(4+32\cos^2\theta)}$

$= 96\times1^3\times\dfrac{1}{36} = \dfrac{8}{3}$

따라서 $p+q = 3+8 = 11$

178. ④

$\overset{\frown}{\mathrm{AQ}}$: $\overset{\frown}{\mathrm{QP}}$ $= 2$: 3 이므로 $\angle\mathrm{OBQ} = \dfrac{2}{5}\theta$

$\triangle\mathrm{OBC}$의 넓이를 $h(\theta)$라 하면

$\angle\mathrm{BOP} = \pi - 2\theta$ 이므로

$\triangle\mathrm{OBP} = f(\theta) + h(\theta) = \dfrac{1}{2}\times 2^2\times\sin(\pi-2\theta) = 2\sin2\theta$ ⋯ ①

$\angle\mathrm{BOQ} = \pi - \dfrac{4}{5}\theta$ 이므로

$\triangle\mathrm{OBQ} = g(\theta) + h(\theta) = \dfrac{1}{2}\times2^2\times\sin\left(\pi - \dfrac{4}{5}\theta\right) = 2\sin\dfrac{4}{5}\theta$ ⋯ ②

①−②하면

$f(\theta) - g(\theta) = 2\sin2\theta - 2\sin\dfrac{4}{5}\theta$

$\therefore \displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin2\theta - 2\sin\frac{4}{5}\theta}{\theta} = 4 - \frac{8}{5} = \frac{12}{5}$

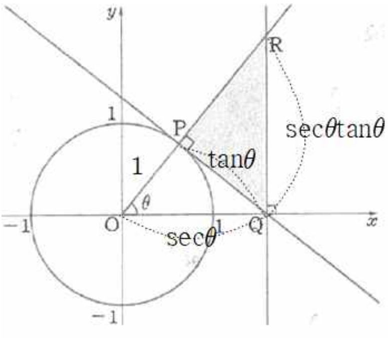
179. ③

[풀이1]

$\overline{\mathrm{PQ}} = \tan\theta$, $\overline{\mathrm{OQ}} = \sec\theta$, $\overline{\mathrm{QR}} = \sec\theta\tan\theta$이고

$\triangle\mathrm{OPQ}$와 $\triangle\mathrm{QPR}$은 닮음이므로

$\triangle\mathrm{QPR}$의 넓이는 $\triangle\mathrm{OPQ}$의 넓이의 $\tan^2\theta$이다.



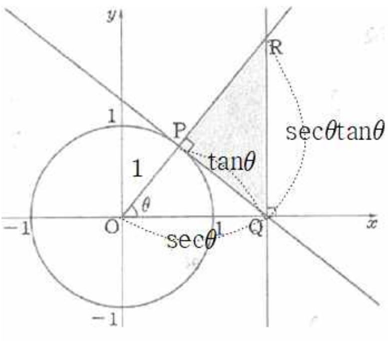
$S(\theta) = \dfrac{1}{2}\tan\theta\times\tan^2\theta = \dfrac{1}{2}\tan^3\theta$

$\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3} = \lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2}\times\frac{\tan^3\theta}{\theta^3}$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\tan\theta}{\theta}\right)^3 = \frac{1}{2}$

[풀이2]

$\overline{\mathrm{PQ}} = \tan\theta$, $\overline{\mathrm{OQ}} = \sec\theta$, $\overline{\mathrm{QR}} = \sec\theta\tan\theta$이다.



$S(\theta) = \triangle\mathrm{OQR} - \triangle\mathrm{OPQ}$

$= \dfrac{1}{2}\sec^2\theta\tan\theta - \dfrac{1}{2}\tan\theta$

$= \dfrac{1}{2}\tan\theta(\sec^2\theta - 1)$

$= \dfrac{1}{2}\tan\theta(\sec\theta-1)(\sec\theta+1)$

$\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3} = \frac{1}{2}\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\theta(\sec\theta-1)(\sec\theta+1)}{\theta^3}$ 이고,

$\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\theta}{\theta} = 1,$

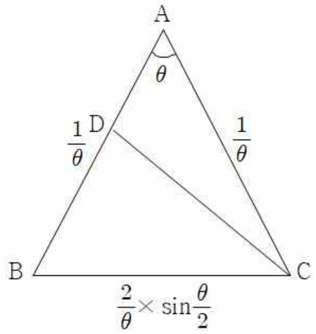
$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\sec\theta-1}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\sec\theta\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\sec\theta\times\lim_{\theta\to0+}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\frac{1}{2}$$

$\lim\limits_{\theta\to0+}(\sec\theta+1)=2$이다.

따라서 $\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{S(\theta)}{\theta^3}=\dfrac{1}{2}$이다.

180. ②



$\overline{\mathrm{AD}}=\dfrac{1}{\theta}\times(1-\theta)=\dfrac{1}{\theta}-1$, $\overline{\mathrm{BD}}=\dfrac{1}{\theta}\times\theta=1$이다. 따라서

$$\left(\frac{1}{\theta}-1\right)\left(\frac{2}{\theta}\sin\frac{\theta}{2}\right)^2+1\times\left(\frac{1}{\theta}\right)^2=\frac{1}{\theta}\left\{x^2+\frac{1}{\theta}-1\right\}$$

정리하면

$$(1-\theta)\left(\frac{2}{\theta}\sin\frac{\theta}{2}\right)^2+1=x^2$$

$$x(\theta)=\sqrt{(1-\theta)\left(\frac{2}{\theta}\sin\frac{\theta}{2}\right)^2+1}$$

$$\lim_{\theta\to0+}x(\theta)=\lim_{\theta\to0+}\sqrt{(1-\theta)\left(\frac{2}{\theta}\sin\frac{\theta}{2}\right)^2+1}=\sqrt{2}$$

[참고] 스튜어트정리

$\overline{\mathrm{AD}}\times(\overline{\mathrm{BC}})^2+\overline{\mathrm{BD}}\times(\overline{\mathrm{AC}})^2=\overline{\mathrm{AB}}\times\left\{(\overline{\mathrm{CD}})^2+\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{BD}}\right\}$

☞ $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BD}}$일 때, $\overline{\mathrm{CD}}$는 중선이고 '중선정리'(파푸스정리) 성립!

[다른 풀이]

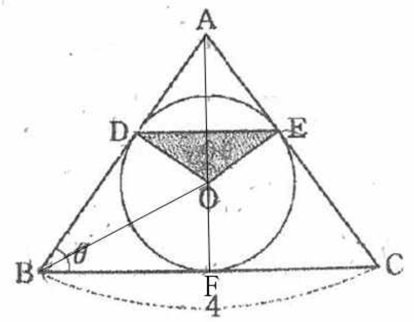
삼각형 DBC에서 $\angle\mathrm{DBC}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}$이므로 코사인법칙을 적용하면

$$\{x(\theta)\}^2=1+\left(\frac{2}{\theta}\sin\frac{\theta}{2}\right)^2-2\times1\times\frac{2}{\theta}\sin\frac{\theta}{2}\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)$$

이때, $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2}{\theta}\sin\dfrac{\theta}{2}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}=1$이므로

$\lim\limits_{\theta\to0+}\{x(\theta)\}^2=1+1^2-2\times1\times1\times0=2$에서 $\lim\limits_{\theta\to0+}x(\theta)=\sqrt{2}$

181. ③



점 A에서 변 BA에 내린 수선의 발을 F라 하고, 선분 OB는 $\angle\mathrm{DBF}$의 이등분선이다. 내접원의 반지름은 $2\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$이고,

사각형 ADOE는 $\angle\mathrm{D}=\angle\mathrm{E}=90^\circ$ 안 사각형이므로 $\angle\mathrm{DOE}=2\theta$이다.

따라서 $S(\theta)=\dfrac{1}{2}\left\{2\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right\}^2\sin2\theta$이다.

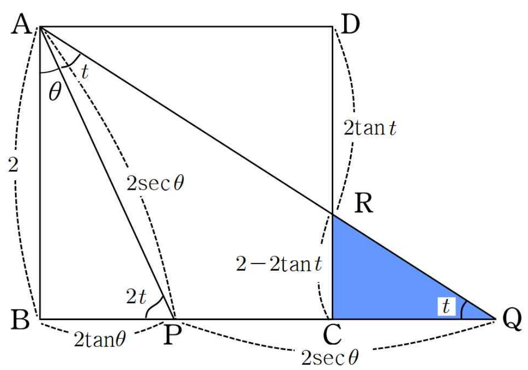
$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^3}{S(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^3}{\frac{1}{2}\left\{2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right\}^2\sin2\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^3}{2\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin2\theta}$$

$$=\frac{1}{2\times\frac{1}{4}\times2}$$

$$=1$$

182. ④



삼각형 CQR 는 직각삼각형이고,

$\angle\mathrm{CQR}=t$ 라 하면 $2t=\dfrac{\pi}{2}-\theta$

$\overline{\mathrm{BP}}=2\tan\theta$, $\overline{\mathrm{AP}}=2\sec\theta$, $\overline{\mathrm{DR}}=2\tan t$, $\overline{\mathrm{CR}}=2-2\tan t$

따라서 삼각형 CQR 의 넓이는

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times2\times(2\tan\theta+2\sec\theta)\times\frac{4(1-\tan t)^2}{4}$$

$$=2(\tan\theta+\sec\theta)\times(1-\tan t)^2$$

$$1-\tan t=1-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=1-\frac{1-\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\theta}{2}}$$ 이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}2(\tan\theta+\sec\theta)(1-\tan t)^2\times\frac{1}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}2(\tan\theta+\sec\theta)\left(\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\theta}{2}}\right)^2\times\frac{1}{\theta^2}$$

$$=2\times1\times1=2$$

183. 10

$x\neq0$ 일 때 $f(x)=\dfrac{8-a\cos x}{\ln(1+2x^2)}$

$f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$f(0)=\lim_{x\to0}\frac{8-a\cos x}{\ln(1+2x^2)}$$

$\lim\limits_{x\to0}\ln(1+2x^2)=0$이므로 $\lim\limits_{x\to0}(8-a\cos x)=8-a=0$

$\therefore\ a=8$

$$f(0)=\lim_{x\to0}\frac{8(1-\cos x)}{\ln(1+2x^2)}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{8\sin^2 x}{\ln(1+2x^2)(1+\cos x)}\times\frac{2x^2}{2x^2}$$

$$=\frac{8}{2\times2}=2$$

$\therefore\ a+f(0)=10$

184. $a=1,\ b=\dfrac{1}{2}$

함수 $f(x)$ 가 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 에서 연속이면

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos2x+a}{(2x-\pi)^2}=b$$

$x\to\dfrac{\pi}{2}$ 일 때 (분모) $\to0$ 이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to0$ 이다.

$-1+a=0$

$\therefore\ a=1$

이때 $x-\dfrac{\pi}{2}=t$ 로 놓으면 $x\to\dfrac{\pi}{2}$ 일 때 $t\to0$ 이므로

$$b=\lim_{t\to0}\frac{\cos(2t+\pi)+1}{4t^2}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{-\cos2t+1}{4t^2}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{2\sin^2 t}{4t^2}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ b=\frac{1}{2}$$

185. ①

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3\sin4x+x^2\cos\frac{1}{x}+e^{2x}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{3\sin4x}{x}+x\cos\frac{1}{x}+\frac{e^{2x}-1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{3\sin4x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{12\sin4x}{4x}=12\quad\cdots①$$

$\left|\cos\dfrac{1}{x}\right|\le1$ 이므로 $\left|x\cos\dfrac{1}{x}\right|\le|x|$

$$\lim_{x\to0}\left|x\cos\frac{1}{x}\right|\le\lim_{x\to0}|x|=0$$

$$\therefore\ \lim_{x\to0}x\cos\frac{1}{x}=0\qquad\cdots②$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\times2=1\times2=2\quad\cdots③$$

①, ②, ③에 의해

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{3\sin4x}{x}+x\cos\frac{1}{x}+\frac{e^{2x}-1}{x}\right)=12+0+2=14$$

186. ①

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\{f(x)+f(a)\}=-1$$

$f'(a)\times2f(a)=-1$

$(\cos a+\sin a)\times2(\sin a-\cos a)=2(\sin^2 a-\cos^2 a)=-1$

$2(2\sin^2 a-1)=-1$이므로

$\therefore \sin^2 a=\dfrac{1}{4}$

187. 12

풀이)

$\lim\limits_{x\to0}x^2\cos\dfrac{1}{x}$ 에서

$x\neq0$일 때, $x^2>0$이고 $-1\le\cos\dfrac{1}{x}\le1$이므로

$$-x^2\le x^2\cos\frac{1}{x}\le x^2$$

이때 $\lim\limits_{x\to0}(-x^2)=\lim\limits_{x\to0}x^2=0$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{x\to0}x^2\cos\dfrac{1}{x}=0$ 이다.

같은 방법으로 $\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}=0$ 이다.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\left(3\sin 4h+h^2\cos\frac{1}{h}\right)-\left(3\sin 0+0\times cos\frac{1}{0}\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(3\sin 4h+h^2\cos\frac{1}{h}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3\sin 4}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{h^2\cos\frac{1}{h}}{h}$$

$=12$ 이다.

188. ②

점 $\left(k,\ \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$가 $y=\cos x$ 위의 점이므로 $\cos k=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$0<k<\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin k=\frac{2}{3}$

$y'=-\sin x$이므로 직선 l의 접선의 기울기는 $-\frac{2}{3}$

조건에서 $y=\cos x\ \ (0\le x\le 2\pi)$ 위의 점 t에서의 접선이 직선 l과 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$$\tan\frac{\pi}{4}=\left|\frac{-\sin t+\frac{2}{3}}{1+(-\sin t)\left(-\frac{2}{3}\right)}\right|=1$$

ⅰ) $\dfrac{\frac{2}{3}-\sin t}{1+\frac{2}{3}\sin t}=-1$일 때

$\frac{2}{3}-\sin t=-1-\frac{2}{3}\sin t$

$\frac{1}{3}\sin t=\frac{5}{3}$

$\sin t=5$이므로 만족하지 않음

ⅱ) $\dfrac{\frac{2}{3}-\sin t}{1+\frac{2}{3}\sin t}=1$일 때

$\frac{2}{3}-\sin t=1+\frac{2}{3}\sin t$

$\sin t=-\frac{1}{5}$

ⅰ), ⅱ)에 의해 $\sin t=-\frac{1}{5}$

$0\le t\le 2\pi,\ a<b$이므로 $\cos a<0,\ \cos b>0$

$\therefore\ \sin a=-\frac{1}{5},\ \cos a=-\frac{2\sqrt{6}}{5},\ \sin b=-\frac{1}{5},\ \cos b=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

$\therefore\ \cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b=-\frac{24}{25}+\frac{1}{25}=-\frac{23}{25}$

189. $\frac{3\sqrt{2}}{20}$

$\angle\mathrm{CAQ}=\alpha,\ \angle\mathrm{PAB}=\beta$라 하자

$\tan(\alpha+\theta+\beta)=\frac{3}{k},\ \tan(\theta+\beta)=\frac{2}{k}$이므로

$$\tan\alpha=\frac{\frac{3}{k}-\frac{2}{k}}{1+\frac{3}{k}\times\frac{2}{k}}=\frac{k}{k^2+6}=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

$\sqrt{2}k^2-8k+6\sqrt{2}=0$

$k^2-4\sqrt{2}k+6=0$

$(k-3\sqrt{2})(k-\sqrt{2})=0$

$k>3$이므로 $k=3\sqrt{2}$

$\tan(\theta+\beta)=\frac{2}{k},\ \tan\beta=\frac{1}{k}$

$$\therefore\ \tan\theta=\frac{\frac{2}{k}-\frac{1}{k}}{1+\frac{2}{k}\times\frac{1}{k}}=\frac{k}{k^2+2}=\frac{3\sqrt{2}}{20}$$

190. ③

$\overline{\mathrm{OA}}=2,\ \overline{\mathrm{OC}}=5,\ \overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{21},\ \overline{\mathrm{OC}}^2=\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2$이므로

$\angle\mathrm{OAC}=90^\circ$

$\angle\mathrm{AOC}=\alpha$라 하면 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{21}}{5},\ \cos\alpha=\frac{2}{5}$

$\angle\mathrm{AOB}=\beta$라 하면 $\triangle\mathrm{OAB}$에서 코사인법칙에 의해

$2=4+4-8\cos\beta$

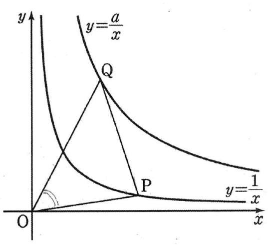
$\cos\beta=\frac{3}{4},\ \sin\beta=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\angle\mathrm{BOD}=\pi-(\alpha+\beta)$

$$\sin(\pi-(\alpha+\beta))=\sin(\alpha+\beta)$$
$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$=\frac{\sqrt{21}}{5}\times\frac{3}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{2\sqrt{7}+3\sqrt{21}}{20}$$

$$\therefore\ \triangle\mathrm{BOD}=\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\frac{2\sqrt{7}+3\sqrt{21}}{20}=\frac{\sqrt{7}}{5}+\frac{3\sqrt{21}}{10}$$

191. ①



세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0),\ \mathrm{P}\left(p,\ \frac{1}{p}\right),\ \mathrm{Q}\left(q,\ \frac{a}{q}\right)$로 이루어진 삼각형의 넓이는

$$\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}\left|p\times\frac{a}{q}-\frac{1}{p}\times q\right|=\frac{1}{2}\left(\frac{p}{q}\times a-\frac{q}{p}\right)=2$$

$$\left(\because\ \ a>1,\ \frac{p}{q}>1,\ 0<\frac{q}{p}<1\right)$$

위의 식을 정리하면 $\frac{p}{q}a-\frac{q}{p}=4$에서

$ap^2-q^2=4pq$

한편 x축 위의 한 점을 R이라 하면

$\tan(\angle \mathrm{POQ})=\tan(\angle \mathrm{QOR}-\angle \mathrm{POR})$

$$=\frac{\frac{a}{q^2}-\frac{1}{p^2}}{1+\frac{a}{p^2q^2}}=\frac{ap^2-q^2}{a+p^2q^2}=\frac{4pq}{a+p^2q^2}$$

$pq=t$ $(t>0)$라 하면

$\frac{4t}{a+t^2}=\frac{4}{\frac{a}{t}+t}$에서 분모가 최소일 때 이 값이 최대가 된다.

산술기하평균 관계에 의해 $\frac{a}{t}+t\geq 2\sqrt{a}$ 이므로

(단, $t=\sqrt{a}$일 때 등호 성립)

$\frac{4pq}{a+p^2q^2}\leq\frac{4}{2\sqrt{a}}=\frac{2}{\sqrt{a}}=\frac{1}{5}$에서 $\therefore$ $\sqrt{a}=10$

192. ②

$\begin{cases}(x-a)^2+(y-a)^2=a^2\\ y=2x\end{cases}$에서 $(x-a)^2+(2x-a)^2=a^2$

$5x^2-6ax+a^2=0$, $(5x-a)(x-a)=0$ $\therefore$ $x=a$, $\frac{a}{5}$

직선 QC'의 식은 기울기$=\dfrac{a-\frac{2a}{5}}{a-\frac{a}{5}}=\dfrac{3}{4}$

직선 QC'의 식은 $y=\frac{3}{4}(x-a)+a$, $3x-4y+a=0$

이때 점 $\mathrm{P}(a,\ 2a)$에서 직선 QC'까지의 거리가 4이므로

$\frac{|3a-8a+a|}{5}=4$ $\qquad\therefore$ $a=5$

$\mathrm{P}(5,\ 10)$, $\mathrm{Q}(1,\ 2)$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=4\sqrt{5}$, $\mathrm{OQ}=\sqrt{5}$이고

$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin2\theta=\frac{4}{5}$, $\cos2\theta=\frac{3}{5}$에서

$\sin3\theta=\frac{11}{5\sqrt{5}}=\frac{11\sqrt{5}}{25}$

$\overline{\mathrm{OR}}^2=(\sqrt{5})^2+(4\sqrt{5})^2-2\times\sqrt{5}\times4\sqrt{5}\times\cos(\pi-2\theta)$

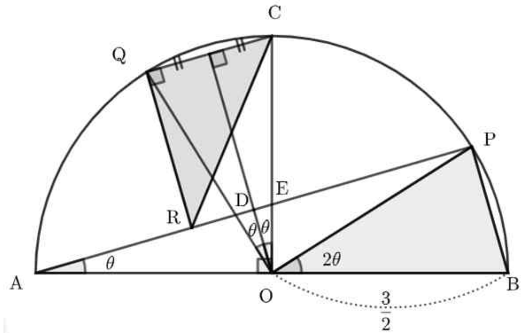
$=5+80+24=109$

따라서

$25\times\sin3\theta+\overline{\mathrm{OR}}^2=25\times\frac{11\sqrt{5}}{25}+109=11\sqrt{5}+109$

$p=11$, $q=109$에서 $p+q=120$

193. ⑤



$\angle\mathrm{POB}=2\theta$ 이므로

$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times3\times2\sin2\theta=\frac{9}{8}\sin2\theta$ $\qquad\cdots$ ①

$\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{QC}}$ 이므로 $\overset{\frown}{\mathrm{PB}}=\overset{\frown}{\mathrm{QC}}$, $\angle\mathrm{QOC}=2\theta$

O에서 $\overline{\mathrm{QC}}$에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{\mathrm{AP}}$와 만나는 점을 D라 하면

$\angle\mathrm{IOD}=\theta$ 이므로 $\angle\mathrm{AOD}=\frac{\pi}{2}-\theta$, $\angle\mathrm{ADO}=\frac{\pi}{2}$

$\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{OC}}\cos\theta=\frac{3}{2}\cos\theta$

$\overline{\mathrm{QC}}=2\overline{\mathrm{CH}}=2\times\frac{3}{2}\sin\theta=3\sin\theta$

$\overline{\mathrm{OI}}=\overline{\mathrm{AO}}\tan\theta=\frac{3}{2}\tan\theta$이므로

$\overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{OI}}\cos\theta=\frac{3}{2}\tan\theta\cos\theta$

$\therefore$ $\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{DH}}=\overline{\mathrm{OH}}-\overline{\mathrm{OD}}=\frac{3}{2}\cos\theta(1-\tan\theta)$

$\therefore$ $g(\theta)=\frac{1}{2}\times3\sin\theta\times\frac{3}{2}\cos\theta(1-\tan\theta)$

$=\frac{9}{4}\sin\theta\cos\theta(1-\tan\theta)$

$=\frac{9}{8}\sin2\theta(1-\tan\theta)$ $\qquad\cdots$ ②

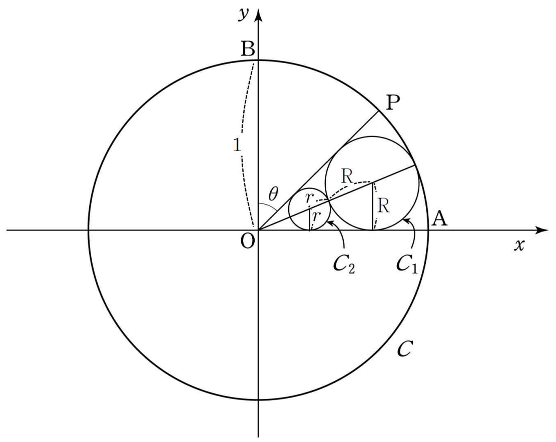
①, ②에 의해

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{9}{8}\sin2\theta\tan\theta}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{9}{4}\times\frac{\sin2\theta}{2\theta}\times\frac{\tan\theta}{\theta}$$

$$=\frac{9}{4}$$

194. ②



원 C_1, 원 C_2 의 반지름의 길이를 각각 R, r 라 하고 $\angle \mathrm{POA} = 2t$ 라 하면

$2t = \dfrac{\pi}{2} - \theta$

$\dfrac{\mathrm{R}}{\sin t} + \mathrm{R} = 1$

$\mathrm{R}\left(\dfrac{1}{\sin t} + 1\right) = 1$

$\therefore \ \mathrm{R} = \dfrac{\sin t}{1+\sin t} \ \cdots\cdots$ ㉠

또 $r + \dfrac{r}{\sin t} + 2\mathrm{R} = 1$

$r + \dfrac{r}{\sin t} + \dfrac{2\sin t}{1+\sin t} = 1$

$r \cdot \dfrac{1+\sin t}{\sin t} = 1 - \dfrac{2\sin t}{1+\sin t}$

$r \cdot \dfrac{1+\sin t}{\sin t} = \dfrac{1-\sin t}{1+\sin t}$

$r(\theta) = \dfrac{(1-\sin t)\sin t}{(1+\sin t)^2} = \dfrac{(\sin t - \sin^2 t)}{(1+\sin t)^2} \quad \left(\text{단, } t = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\theta}{2}\right)$

$r'(\theta)$

$= \dfrac{(\cos t - 2\sin t\cos t)(1+\sin t)^2 - (\sin t - \sin^2 t)2(1+\sin t)\cos t}{(1+\sin t)^4} \cdot \dfrac{dt}{d\theta}$

$r'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1-0}{1} \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$

따라서 $\displaystyle\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{4r(\theta)}{\frac{\pi}{2} - \theta} = -4r'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -4 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = 2$ 이다.

[다른 풀이]

$2t = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ 에서 $\theta \to \dfrac{\pi}{2}$ 일 때 $t \to 0$ 이므로

$\displaystyle\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{4r(\theta)}{\frac{\pi}{2} - \theta} = \lim_{t \to 0} \dfrac{4r(\theta)}{2t} = \lim_{t \to 0} \dfrac{4}{2t} \times \dfrac{(1-\sin t)\sin t}{(1+\sin t)^2}$

$\displaystyle= \lim_{t \to 0} \dfrac{2\sin t}{t} \times \dfrac{(1-\sin t)}{(1+\sin t)^2} = 2 \times 1 = 2$

195. ③

풀이)

직각삼각형 BMH에서 $\overline{\mathrm{MB}} = 1$

$\sin\theta = \dfrac{\overline{\mathrm{MH}}}{\overline{\mathrm{MB}}}$ 에서 $\overline{\mathrm{MH}} = \overline{\mathrm{MB}} \times \sin\theta = \sin\theta$

삼각형 DMC에서 $\overline{\mathrm{MD}} = \overline{\mathrm{MH}} = \sin\theta$, $\overline{\mathrm{MC}} = 1$,

$\angle \mathrm{DMC} = \pi - \angle \mathrm{DMB} = \pi - \angle \mathrm{AMB} = \pi - \dfrac{\pi - \theta}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\theta}{2}$

이므로

$\triangle \mathrm{DMC} = \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{MD}} \times \overline{\mathrm{MC}} \times \sin(\angle \mathrm{DMC})$

$= \dfrac{1}{2} \times \sin\theta \times 1 \times sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\sin\theta cos\dfrac{\theta}{2}$

삼각형 HMC에서

$\overline{\mathrm{MH}} = \sin\theta$, $\overline{\mathrm{MC}} = 1$,

$\angle \mathrm{HMC} = \pi - \angle \mathrm{HMB} = \pi - \left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \dfrac{\pi}{2} + \theta$

이므로

$\triangle \mathrm{HMC} = \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{MH}} \times \overline{\mathrm{MC}} \times \sin(\angle \mathrm{HMC})$

$= \dfrac{1}{2} \times \sin\theta \times 1 \times sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right)$

$= \dfrac{1}{2}\sin\theta cos\theta$

이때

$f(\theta) - g(\theta) = \triangle \mathrm{DMC} - \triangle \mathrm{HMC}$

$= \dfrac{1}{2}\sin\theta cos\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{1}{2}\sin\theta cos\theta = \dfrac{\sin\theta\left(\cos\frac{\theta}{2} - \cos\theta\right)}{2}$

이므로

$\displaystyle\lim_{\theta \to 0+} \dfrac{f(\theta) - g(\theta)}{\theta^3}$

$\displaystyle= \lim_{\theta \to 0+} \dfrac{\sin\theta\left(\cos\frac{\theta}{2} - \cos\theta\right)}{2\theta^3}$

$\displaystyle= \lim_{\theta \to 0+} \dfrac{\sin\theta\left(\cos\frac{\theta}{2} - \cos\theta\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} + \cos\theta\right)}{2\theta^3\left(\cos\frac{\theta}{2} + \cos\theta\right)}$

$\displaystyle= \lim_{\theta \to 0+} \dfrac{\sin\theta\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \cos^2\theta\right)}{2\theta^3\left(\cos\frac{\theta}{2} + \cos\theta\right)}$

$\displaystyle= \lim_{\theta \to 0+} \dfrac{\sin\theta\left(\sin^2\theta - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{2\theta^3\left(\cos\frac{\theta}{2} + \cos\theta\right)}$

$\displaystyle= \dfrac{1}{2}\lim_{\theta \to 0+} \dfrac{\sin\theta}{\theta} \times \left\{\lim_{\theta \to 0+}\left(\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right)^2 - \dfrac{1}{4}\lim_{\theta \to 0+}\left(\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\right\}$

$$\times \lim_{\theta\to0+}\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times\left(1^2-\frac{1}{4}\times1^2\right)\times\frac{1}{1+1}=\frac{3}{16}$$ 이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^3}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{16}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{16}$$

196. 4

$\overline{BC}$를 구하기 위해 $\overline{BC}=x$라 두면

$\triangle ABC$에서

$3^2=1^2+x^2-2\times1\times x\times\cos\theta$ ($\because$ 코사인법칙)이므로

$x^2-(2\cos\theta)x-8=0$ 근의 공식을 이용하여 x의 값을 구하면

$x=\cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta+8}$

$x=\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+8}$ ($\because$ $0<x<4$)

$S(\theta)=\triangle ABD-\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\sin\theta-\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\sin\theta$

$=\frac{1}{2}(4-x)\sin\theta=\frac{1}{2}(4-\cos\theta-\sqrt{\cos^2\theta+8})\sin\theta$이므로

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}(4-\cos\theta-\sqrt{\cos^2\theta+8})\sin\theta}{\theta^3}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta+3-\sqrt{\cos^2\theta+8})\sin\theta}{2\theta^3}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(\frac{\sin^2\theta}{1+\cos\theta}+\frac{\sin^2\theta}{3+\sqrt{\cos^2\theta+8}}\right)\sin\theta}{2\theta^3}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(\frac{1}{1+\cos\theta}+\frac{1}{3+\sqrt{\cos^2\theta+8}}\right)\sin^3\theta}{2\theta^3}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{1}{1+\cos\theta}+\frac{1}{3+\sqrt{\cos^2\theta+8}}\right)\times\frac{\sin^3\theta}{\theta^3}\times\frac{1}{2}$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\times1^3\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

따라서 $p=1,\ q=3$이므로 $p+q=4$이다.

197. ④

$\overline{AC}=2\sqrt{2}$, $\overline{PB}=2\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$, $\overline{AP}=\sqrt{4+4\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$

($\angle PAB=\frac{\pi}{4}-\theta$라 하면)

$$\lim_{\theta\to0-}\frac{\overline{AC}-\overline{AP}}{4\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{4+4\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}}{4\theta}=\lim_{\theta\to0}\frac{2\sqrt{2}-2\sec\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{4\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)-1}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\times\theta}=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\times\theta}$$

$$=\frac{1}{2\cos\frac{\pi}{4}}\times\lim_{\theta\to0}\left\{\frac{\sin\theta}{\theta}+\frac{\cos\theta-1}{\theta}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\{1+0\}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

198. ②

원의 중심을 O라 하면 $\angle EHB=\theta$이고,

$\triangle OEH$에서 $\overline{OH}=1,\ \overline{OE}=3,\ \overline{HE}=x$라 하면

$x^2+1-2x\cos(\pi-\theta)=9$

$x^2+2x\cos\theta-8=0$

$\theta\to0$ $x^2+2x-8=0$에서 $x=2$

$S(\theta)=\frac{1}{2}4\sin\theta(2\cos\theta+x)$

$$\lim_{\theta\to0}\frac{2\sin\theta(2\cos\theta+x)}{\theta}=2\times(2+2)=8$$

199. ③

$\angle OAR=\theta,\ \angle AOR=3\theta$ 이므로 $\angle ORA=\pi-4\theta$

$\triangle OAR$에서 사인법칙에 의해 $\frac{\overline{OR}}{\sin\theta}=\frac{\overline{OA}}{\sin(\pi-4\theta)}$

$\overline{OR}=\frac{\sin\theta}{\sin4\theta}$

$\overline{UT}$가 $\overline{AO}$에 평행하므로 $\angle TSO=\frac{\pi}{3}$

이때 $\overline{ST}=a$라 하면

$\triangle OST$에서 사인법칙에 의해 $\frac{\overline{OT}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{a}{\sin3\theta}$

$\overline{OT}=\frac{\sqrt{3}a}{2\sin3\theta}$, $\overline{RT}=\frac{\sin\theta}{\sin4\theta}-\frac{\sqrt{3}a}{2\sin3\theta}$

$\triangle RUT\backsim\triangle RAO$

$\overline{RT}:\overline{RO}=\overline{UT}:\overline{AO}$

$\left(\frac{\sin\theta}{\sin4\theta}-\frac{\sqrt{3}a}{2\sin3\theta}\right):\frac{\sin\theta}{\sin4\theta}=a:1$

$\frac{\sin\theta}{\sin4\theta}a=\frac{\sin\theta}{\sin4\theta}-\frac{\sqrt{3}a}{2\sin3\theta}$

$\left(\frac{\sin\theta}{\sin4\theta}+\frac{\sqrt{3}}{2\sin3\theta}\right)a=\frac{\sin\theta}{\sin4\theta}$

$\left(\frac{2\sin\theta\sin3\theta+\sqrt{3}\sin4\theta}{2\sin4\theta\sin3\theta}\right)a=\frac{\sin\theta}{\sin4\theta}$

$$a=\frac{2\sin\theta\sin3\theta}{2\sin\theta\sin3\theta+\sqrt{3}\sin4\theta}$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{a}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{2\sin\theta\sin3\theta}{\theta^2}}{\frac{2\sin\theta\sin3\theta+\sqrt{3}\sin4\theta}{\theta}}=\frac{2\times1\times3}{0+4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\cdots$ ①

$f(\theta)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 이므로 ①을 이용하면

$\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{f(\theta)}{\theta^2}=\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{a}{\theta}\right)^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$

$\cdots$ ②

$\overline{\mathrm{OP}}=\tan\theta$, $\overline{\mathrm{OQ}}=1$, $\overline{\mathrm{OR}}=\dfrac{\sin\theta}{\sin4\theta}$, $\angle\mathrm{POQ}=\dfrac{\pi}{2}-3\theta$이므로

$\triangle\mathrm{OPQ}=\dfrac{1}{2}\times1\times\tan\theta\times\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-3\theta\right)=\dfrac{1}{2}\tan\theta\cos3\theta$

$\triangle\mathrm{OPR}=\dfrac{1}{2}\times\tan\theta\times\dfrac{\sin\theta}{\sin4\theta}\times\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-3\theta\right)=\dfrac{\tan\theta\cos3\theta\sin\theta}{2\sin4\theta}$

$g(\theta)=\triangle\mathrm{OPQ}-\triangle\mathrm{OPR}$

$=\dfrac{1}{2}\tan\theta\cos3\theta\left(1-\dfrac{\sin\theta}{\sin4\theta}\right)$

$=\dfrac{\tan\theta\cos3\theta(\sin4\theta-\sin\theta)}{2\sin4\theta}$

$\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{g(\theta)}{\theta}=\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{\tan\theta\cos3\theta(\sin4\theta-\sin\theta)}{2\theta\sin4\theta}$

$=\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{\dfrac{\tan\theta\cos3\theta(\sin4\theta-\sin\theta)}{\theta^2}}{\dfrac{2\sin4\theta}{\theta}}$

$=\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{1\times1\times(4-1)}{2\times4}=\dfrac{3}{8}$ $\cdots$ ③

②, ③에 의해

$\therefore\ \lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{f(\theta)}{\theta\times g(\theta)}=\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{\dfrac{f(\theta)}{\theta^2}}{\dfrac{g(\theta)}{\theta}}=\dfrac{\dfrac{3\sqrt{3}}{16}}{\dfrac{3}{8}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

[다른 풀이]

$\angle\mathrm{OAR}=\theta$, $\angle\mathrm{AOR}=3\theta$ 이므로 $\angle\mathrm{ORA}=\pi-4\theta$

$\triangle\mathrm{OAR}$에서 사인법칙에 의해 $\dfrac{\overline{\mathrm{OR}}}{\sin\theta}=\dfrac{\overline{\mathrm{OA}}}{\sin(\pi-4\theta)}$

$\overline{\mathrm{OR}}=\dfrac{\sin\theta}{\sin4\theta}$

$\overline{\mathrm{UT}}$가 $\overline{\mathrm{AO}}$에 평행하므로 $\angle\mathrm{TSO}=\angle\mathrm{USA}=\dfrac{\pi}{3}$

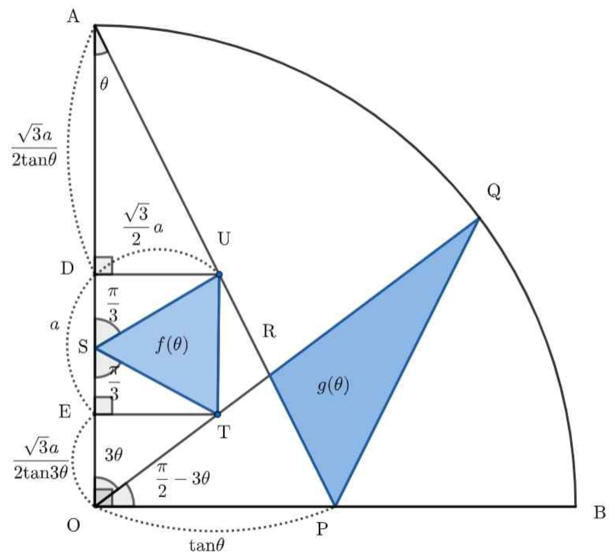
$\overline{\mathrm{ST}}=\overline{\mathrm{SU}}=\overline{\mathrm{UT}}=a$라 하면

U, T에서 선분 AO에 내린 수선의 발은 각각 D, E라 하면

$\overline{\mathrm{AD}}=\dfrac{\sqrt{3}a}{2\tan\theta}$, $\overline{\mathrm{OE}}=\dfrac{\sqrt{3}a}{2\tan3\theta}$

$a\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2\tan\theta}+\dfrac{\sqrt{3}}{2\tan3\theta}\right)=1$

$a=\dfrac{2\tan\theta\tan3\theta}{2\tan\theta\tan3\theta+\sqrt{3}\tan3\theta+\sqrt{3}\tan\theta}$

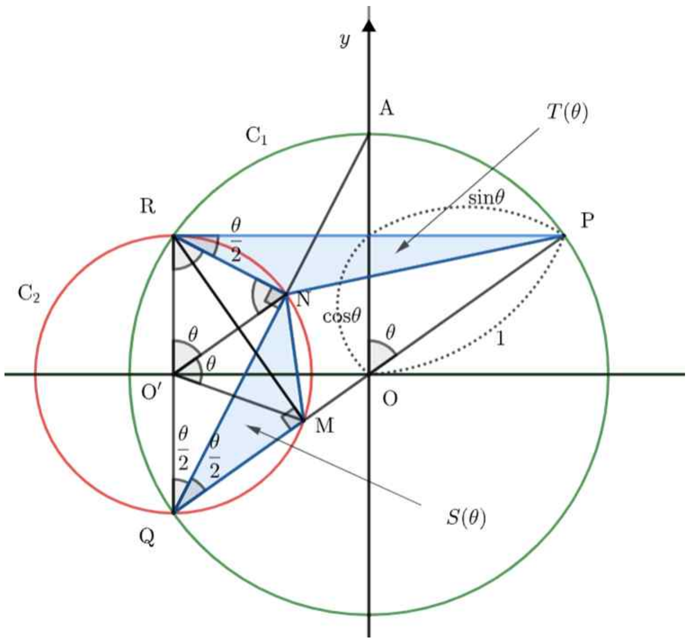


$\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{a}{\theta}=\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{\dfrac{2\tan\theta\tan3\theta}{\theta^2}}{\dfrac{2\tan\theta\tan3\theta+\sqrt{3}\tan3\theta+\sqrt{3}\tan\theta}{\theta}}$

$=\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{2\times1\times3}{0+3\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\dfrac{6}{4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\cdots$ ①

①이후 풀이 위와 동일

200. ②



$\angle\mathrm{AOP}=\theta$ 이므로

$\mathrm{P}(\sin\theta,\ \cos\theta)$, $\mathrm{Q}(-\sin\theta,\ -\cos\theta)$, $\mathrm{R}(-\sin\theta,\ \cos\theta)$

$\overline{\mathrm{QR}}$을 지름으로 하는 원 C_2의 중심을 O'이라 하면

원 C_2는 중심이 $\mathrm{O}'(-\sin\theta,\ 0)$, 반지름이 $\cos\theta$인 원이다.

원 C_1에서 $\overset{\frown}{\mathrm{AP}}$에 대한 중심각이 θ이므로

원주각인 $\angle\mathrm{AQP}=\dfrac{\theta}{2}$

$\widehat{AP}=\widehat{AR}$ 이므로 $\angle AQR=\frac{\theta}{2}$

$\overline{QR}=2\cos\theta$이고, $\overline{QR}$ 이 지름이므로

$\overline{QN}=2\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}$ … ①

$\overline{QM}=2\cos\theta\cos\theta=2\cos^2\theta$ … ②

$\overline{RN}=2\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}$ … ③

①, ②를 이용하면

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times2\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}\times2\cos^2\theta\times sin\frac{\theta}{2}$

$=2\cos^3\theta\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$

$=\cos^3\theta\sin\theta$ … ④

$\angle O'RN=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$, $\angle O'RP=\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\angle NRP=\frac{\theta}{2}$

$\overline{PR}=2\sin\theta$과 ③을 이용하면

$T(\theta)=\frac{1}{2}\times2\sin\theta\times2\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}\times\sin\frac{\theta}{2}$

$=2\sin\theta\cos\theta\sin^2\frac{\theta}{2}$ … ⑤

$\angle RO'N=\theta$, $\angle QO'M=\pi-2\theta$ 이므로 $\angle NO'M=\theta$

$\triangle O'MN$에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{MN}^2=\cos^2\theta+\cos^2\theta-2\cos^3\theta$

$=2\cos^2\theta(1-\cos\theta)$

$=4\cos^2\theta\sin^2\frac{\theta}{2}$

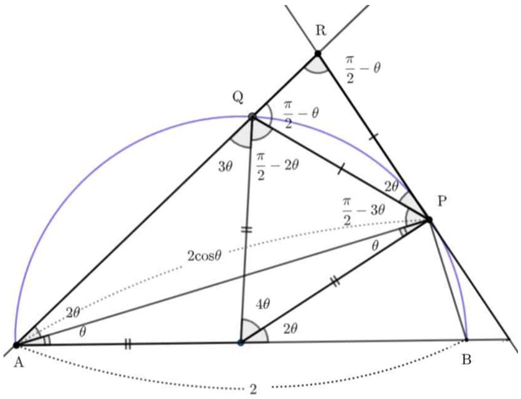
$\overline{MN}=2\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}$ … ⑥

④, ⑤, ⑥에 의해

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta\times\overline{MN}\times S(\theta)}{T(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta\times2\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}\times\cos^3\theta\sin\theta}{2\sin\theta\cos\theta\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta\times cos^3\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}=2$$

201. ①



$\overline{AB}=2$ 이므로 $\overline{AP}=2\cos\theta$

원의 중심을 O라 하면

$\angle OAQ=\angle OQA=3\theta$, $\angle OAP=\angle OPA=\theta$이므로

$\angle QOP=4\theta$, $\angle POB=2\theta$

$\triangle OPQ$에서 $\angle OQP=\angle OPQ=\frac{\pi}{2}-2\theta$

$\therefore\ \angle PQA=3\theta+\frac{\pi}{2}-2\theta=\frac{\pi}{2}+\theta$

$\triangle APQ$에서 사인법칙에 의해

$\frac{\overline{PQ}}{\sin2\theta}=\frac{2\cos\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}=\frac{2\cos\theta}{\cos\theta}=2$

$\therefore\ \overline{PQ}=2\sin2\theta$

직선 PR이 원의 접선이므로 $\angle OPR=\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ \angle QPR=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)=2\theta$

외각의 성질에 의해 $\angle PQR=\pi-3\theta-\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)=\frac{\pi}{2}-\theta$

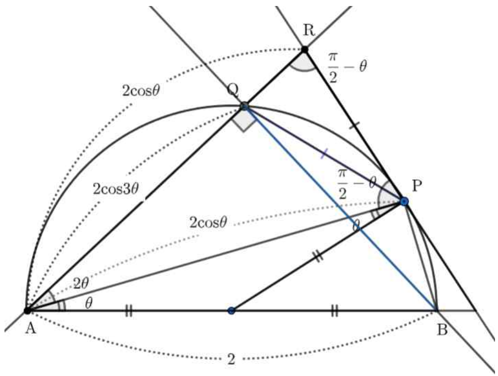
$\therefore\ \angle PRQ=\frac{\pi}{2}-\theta$

$\angle PQR=\angle PRQ$이므로 $\overline{PQ}=\overline{PR}=2\sin2\theta$

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times(2\sin2\theta)^2\times\sin2\theta=2\sin^3 2\theta$

$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin^3 2\theta}{\theta^3}=2\times8=16$

[다른 풀이]



$\overline{AB}=2$ 이므로 $\overline{AP}=2\cos\theta$, $\overline{AQ}=\cos3\theta$

원의 중심을 O라 하면 $\angle OAP=\angle OPA=\theta$

직선 PR이 원의 접선이므로 $\angle OPR=\frac{\pi}{2}$

$\angle APR=\frac{\pi}{2}-\theta$

$\therefore\ \angle ARP=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로 $\overline{AP}=\overline{AR}=2\cos\theta$

$\cos3\theta=\cos(2\theta+\theta)=\cos2\theta\cos\theta-\sin2\theta\sin\theta$

$=\cos2\theta cos\theta-2\sin^2\theta\cos\theta$

$=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2\cos\theta(1-\cos^2\theta)$

$=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

$\overline{QR}=2\cos\theta-2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)$

$=8\cos\theta-8\cos^3\theta=8\cos\theta\sin^2\theta$

$\triangle APR$에서 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{PR}}{\sin2\theta}=\frac{2\cos\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{2\cos\theta}{\cos\theta}=2$$

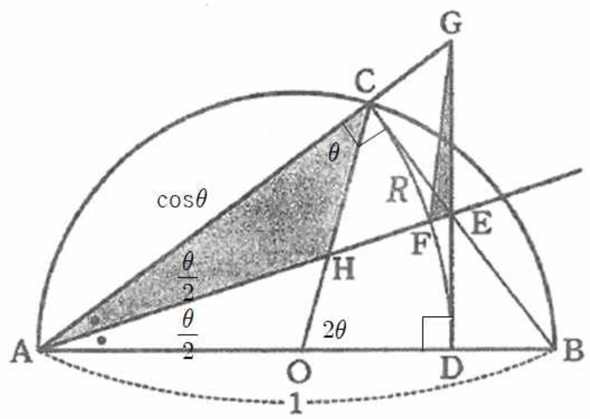
$\overline{PR}=2\sin2\theta$

$$\therefore\ S(\theta)=\frac{1}{2}\times8\cos\theta\sin^2\theta\times2\sin2\theta\times sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$=8\cos^2\theta\sin^2\theta\sin2\theta$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{8\cos^2\theta\sin^2\theta\sin2\theta}{\theta^3}=8\times2=16$$

202. $\frac{1}{6}$



삼각형 AOC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)\sin2\theta=\frac{1}{8}\sin2\theta$이고.

$\overline{AC}=\cos\theta$이므로 각의 이등분선의 정리에 의해

$\overline{OB}:\overline{CH}=\frac{1}{2}:\cos\theta$이다. 따라서

삼각형 ACH의 넓이 $S(\theta)$는

$$S(\theta)=\frac{\sin2\theta}{8}\times\frac{\cos\theta}{\frac{1}{2}+\cos\theta}$$

또한 $\angle ACB=\angle ADG=90^\circ$ ($\because$지름의 원주각은 90°)이고.

$\overline{DG}=\overline{AD}\tan\theta=\cos\theta\tan\theta$,

$\overline{DE}=\overline{AD}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)=\cos\theta tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$이므로

$\overline{GE}=\cos\theta\left(\tan\theta-\tan\frac{\theta}{2}\right)$

이다.

$\overline{AE}=\overline{AD}\sec\left(\frac{\theta}{2}\right)=\cos\theta\sec\left(\frac{\theta}{2}\right)$이므로

$\overline{FE}=\overline{AE}-\overline{AF}=\cos\theta\left(\sec\frac{\theta}{2}-1\right)$

이다. 또한 $\angle GEF=\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}$이다.

$$T(\theta)=\frac{1}{2}\times\left\{\cos\theta\left(\sec\frac{\theta}{2}-1\right)\right\}\times\left\{\cos\theta\left(\tan\theta-\tan\frac{\theta}{2}\right)\right\}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\cos^2\theta\left(\sec\frac{\theta}{2}-1\right)\times\left(\tan\theta-\tan\frac{\theta}{2}\right)\times\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{T(\theta)}{\theta^2\times S(\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\times\cos^2\theta\left(\sec\frac{\theta}{2}-1\right)\times\left(\tan\theta-\tan\frac{\theta}{2}\right)\times\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\theta^2\times\frac{\sin2\theta}{8}\times\frac{\cos\theta}{\frac{1}{2}+\cos\theta}}$$

$$=\frac{16}{3}\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\left(\sec\frac{\theta}{2}-1\right)\times\left(\tan\theta-\tan\frac{\theta}{2}\right)}{\theta^3\times\frac{\sin2\theta}{\theta}}$$

$$=\frac{8}{3}\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(\frac{\theta}{8}\right)\times\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\theta^3}$$

$$=\frac{1}{6}$$

여기서

$$\lim_{\theta\to0}\frac{\tan\theta-\tan\frac{\theta}{2}}{\theta}=\lim_{\theta\to0}\frac{\tan\theta}{\theta}-\lim_{\theta\to0}\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\theta}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{\theta\to0}\frac{\sec\frac{\theta}{2}-1}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0}\frac{\sec\frac{\theta}{2}\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos\frac{\theta}{2}}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{2\sin^2\frac{\theta}{4}}{\theta^2}$$

$$=2\lim_{\theta\to0}\left(\frac{\sin\frac{\theta}{4}}{\theta}\right)^2$$

$$=2\lim_{\theta\to0}\left(\frac{\sin\frac{\theta}{4}}{4\times\frac{\theta}{4}}\right)^2$$

$$=\frac{1}{8}$$

203. (1) π (2) 9π

(1) 원 C의 중심을 D라 두고, 점 D에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 H라 하자. 이때 내접하는 원의 반지름의 길이를 a라 하면

$\overline{DH}=a$이고 $\angle DOH=\frac{\theta}{2}$이므로 $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{a}{r-a}$이다.

$a=(r-a)\sin\frac{\theta}{2}$이므로 $a=\dfrac{r\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{m}{l}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\pi a}{r\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\pi\times r\sin\frac{\theta}{2}}{r\theta\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\theta}\times\frac{2\pi}{\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{1}=\pi$$

(2) 내접하는 정 n각형의 넓이를 $f(n)$이라 하면

$f(n)=n\times\frac{9}{2}\sin\frac{2\pi}{n}=9n\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$

외접하는 정 n각형의 넓이를 $g(n)$이라 하면

$g(n)=n\times\frac{1}{2}\times6\tan\frac{\pi}{n}\times3=9n\tan\frac{\pi}{n}$

반지름의 길이가 3인 원의 넓이를 S라 하면

$9n\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}<S<9n\tan\frac{\pi}{n}$

이때 $\frac{\pi}{n}=t$로 놓으면 $n\to\infty$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{n\to\infty}9n\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}=9\pi\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\times\cos t\right)=9\pi\times1\times1=9\pi$

$\lim_{n\to\infty}9n\tan\frac{\pi}{n}=9\pi\lim_{n\to\infty}\frac{\tan t}{t}=9\pi\times1=9\pi$

따라서 수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $S=9\pi$이므로 구하는 원의 넓이는 9π이다.

204. ⑤

$f(x)=\tan x,\ g(x)=\frac{2}{2}\sin x$이고, $p=\frac{1}{2}$이므로

$f(p\pi)\times g(p\pi)=\tan\frac{\pi}{3}\times\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3}{4}$

205. ④

$\overline{PC}=2\cos\theta,\ \overline{PD}=2\sin\theta$이고 $\overline{DF}=\cos\theta,\ \overline{EC}=\sin\theta$

($\because$ $\triangle PCB\backsim\triangle DFB$이고 $\triangle PAD\backsim\triangle EAC$)

$\overline{PE}=\sqrt{4\cos^2\theta+\sin^2\theta},\ \overline{PF}=\sqrt{\cos^2\theta+4\sin^2\theta}$

두 원 $C_1,\ C_2$의 반지름을 각각 $r_1,\ r_2$라 하면

$\frac{1}{2}r_1(2\cos\theta+\sin\theta+\sqrt{4\cos^2\theta+\sin^2\theta})=\frac{1}{2}\times2\cos\theta\sin\theta$

$\frac{1}{2}r_2(\cos\theta+2\sin\theta+\sqrt{\cos^2\theta+4\sin^2\theta})=\frac{1}{2}\times2\cos\theta\sin\theta$

$r_1=\frac{2\cos\theta\sin\theta}{2\cos\theta+\sin\theta+\sqrt{4\cos^2\theta+\sin^2\theta}}$ 에서 $\lim_{\theta\to0+}\frac{r_1}{\theta}=\frac{1}{2}$

$r_2=\frac{2\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta+2\sin\theta+\sqrt{\cos^2\theta+4\sin^2\theta}}$ 에서 $\lim_{\theta\to0+}\frac{r_2}{\theta}=1$

$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{S_1(\theta)\times S_2(\theta)}{\theta^4}=\lim_{\theta\to0+}\pi\left(\frac{r_1}{\theta}\right)^2\times\pi\left(\frac{r_2}{\theta}\right)^2=\frac{1}{4}\pi\times\pi=\frac{\pi^2}{4}$

206. ⑤

$\overline{OC}=\sqrt{10},\ \overline{OA}=1$ 이므로 $\overline{AC}=3$

$\angle AOC=\alpha$라 하면 $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}},\ \sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$

$\overline{AB}=\frac{1}{2},\ \overline{OA}=1,\ \overline{OB}=1$

$\angle AOB=\beta$라 하면 $\triangle OAB$에서 코사인 법칙을 사용하면

$\frac{1}{4}=1+1-2\cos\beta$

$\cos\beta=\frac{7}{8}$ 이므로 $\sin\beta=\frac{\sqrt{15}}{8}$

$\angle BOD=\pi-(\alpha+\beta)$이므로

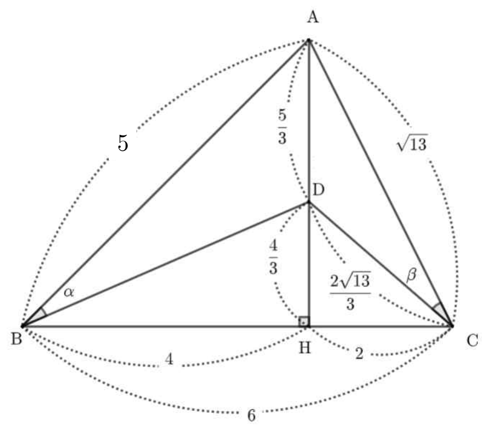
$\cos(\pi-(\alpha+\beta))=-\cos(\alpha+\beta)$

$=-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$=-\frac{7}{8\sqrt{10}}+\frac{3\sqrt{15}}{8\sqrt{10}}=-\frac{1}{a}$

$\therefore\ \frac{1}{a}=\frac{7-3\sqrt{15}}{8\sqrt{10}}=\frac{7\sqrt{10}-15\sqrt{6}}{80}=\frac{7\sqrt{10}}{80}-\frac{3\sqrt{6}}{16}$

207. ②



$\triangle ABC$에서 코사인법칙을 사용하면

$13=25+36-2\times5\times6\times\cos2\alpha$

$\cos2\alpha=\frac{48}{60}=\frac{4}{5}$

$\therefore\ \overline{AH}=3,\ \overline{BH}=4$

$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\frac{4}{5}$이므로

$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}},\ \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}},\ \tan\alpha=\frac{1}{3}$

$\overline{DH}=\overline{BH}\tan\alpha=\frac{4}{3}$

$\overline{AD}=3-\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$

$\overline{CH}=2$ 이므로 $\overline{CD}=\sqrt{\frac{16}{9}+4}=\frac{2\sqrt{13}}{3}$

$\triangle ACD$에서 코사인법칙을 사용하면

$\frac{25}{9}=\frac{52}{9}+13-2\times\frac{2\sqrt{13}}{3}\times\sqrt{13}\times\cos\beta$

$\frac{52}{3}\cos\beta=16$

$\cos\beta = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$ 이므로 $\sin\beta = \frac{5}{13}$, $\tan\beta = \frac{5}{12}$

$$\therefore\ \tan(\beta-\alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha} = \frac{\frac{5}{12}-\frac{1}{3}}{1+\frac{5}{12}\times\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{41}{36}} = \frac{3}{41}$$

$p=41$, $q=3$ 이므로

$\therefore\ p+q=44$

208. ②

$\mathrm{P}(t,\ 1-t^2)$이라 하면 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{H}(0,\ 1-t^2) = \left(0,\ 1-\frac{t}{3}\right)$

따라서 $t=\frac{1}{3}$

$\mathrm{B}(1,\ 0)$, P의 x축에 수선의 발을 K라 하면 $\mathrm{K}(t,\ 0)$

$\tan\theta_2 = \frac{8}{3}$, $\tan(\theta_2+\theta_3) = -\frac{\overline{\mathrm{PK}}}{\overline{\mathrm{KB}}} = -\frac{4}{3} = b$

$$\tan(\theta_1+\theta_2) = \frac{\frac{1}{3}+\frac{8}{3}}{1-\frac{8}{9}} = 27 = a$$

$\therefore\ ab = -36$

[다른 풀이]

직선 PB의 기울기$=\tan(\theta_2+\theta_3)$이므로 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{3},\ \frac{8}{9}\right)$,

$\mathrm{B}(1,\ 0)$에서

$$\tan(\theta_2+\theta_3) = \frac{\frac{8}{9}}{1-\frac{1}{3}} = -\frac{4}{3} = b$$

209. ②

$\sec(\angle\mathrm{ABC}) = 2$에서 $\angle\mathrm{ABC} = \frac{\pi}{3}$ 이므로 $\overline{\mathrm{AC}} = 6\sqrt{3}$

$\angle\mathrm{DBC} = \alpha$, $\angle\mathrm{EBD} = \beta$라 하면 $\angle\mathrm{EBC} = \alpha+\beta$이고

$\tan(\alpha+\beta) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3},\ \tan\beta = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

$\cos(\angle\mathrm{ABC} - \angle\mathrm{EBD})$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{3}-\beta\right) = \frac{1}{2}\times\frac{5}{2\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \frac{8}{4\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

210. ①

$$f(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{x} = \frac{x^2+x-2}{x}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+1)x-(x^2+x-2)}{x^2} = \frac{x^2+2}{x^2} = 3$$

에서 $x^2=1$, $x=\pm 1$이므로

모든 실수 x 의 값의 합은 0 이다.

211. ⑤

$f(x) = (x^2-6x+10)e^x$에서

$f'(x) = (x^2-6x+10)'e^x + (x^2-6x+10)(e^x)'$

$= (2x-6)e^x + (x^2-6x+10)e^x$

$= (x^2-4x+4)e^x$

이므로 $f'(x)=0$은 $x^2-4x+4=0$이므로 $x=2$이다.

212. ①

$g(x) = x\ln x - x$라 하면, $g'(x) = \ln x$이다.

따라서 $f(n) = g'(e^n) = n$이다.

$$\sum_{n=1}^{10} f(n) = \sum_{n=1}^{10} n = 55$$

213. ③

$$f'(x) = 3(\ln x)^2 \times \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = \frac{6(\ln x)\times\frac{1}{x}\times x - 3(\ln x)^2}{x^2}$$

$$f''(e) = \frac{3}{e^2}$$

214. ②

$f'(x) = -\csc^2 x$

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -4$

215. ④

$f'(x) = \cos x + \sin x$

$\therefore\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

216. ②

$f(x) = x\tan x$에서 $f'(x) = \tan x + x\sec^2 x$이다.

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\sec^2\frac{\pi}{4} = 1+\frac{\pi}{2}$$

217. ②

$f'(x) = \cos x\, e^{\sin x}$

$f''(x) = -\sin x\, e^{\sin x} + \cos^2 x \cdot e^{\sin x} = (\cos^2 x - \sin x)e^{\sin x}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{x-\frac{\pi}{2}} = f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e$$

218. ⑤

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4}{-2t} = -\frac{2}{t} = 2$$

219. ③

$x=(t-1)^2$에 $x=4$를 대입하면 $4=(t-1)^2$에서 $t=3$

$(\because\ t>0)$

$y=t+\dfrac{a}{t}$ 에 $t=3,\ y=2$를 대입하면 $2=3+\dfrac{a}{3}$ 에서 $a=-3$

이때, $\dfrac{dx}{dt}=2(t-1)$이고 $t=3$을 대입하면 $\dfrac{dx}{dt}=4$

$\dfrac{dy}{dt}=1+\dfrac{3}{t^2}$ 이고 $t=3$을 대입하면 $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{4}{3}$

따라서

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{3}$$

220. ②

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t+a}{3t^2+1}$$

$t=1$을 대입하면 $\dfrac{2+a}{4}=1,\ a=2$

221. ④

$f'(x)=5(x^2+2x)^4\cdot(2x+2)$

$\therefore\ f'(1)=5\times3^4\times4=1620$

222. ②

$f(x)=(-2x+1)^4$ 에서

$$f'(x)=4(-2x+1)^3\times(-2)=-8(-2x+1)^3$$

이므로

$$f''(x)=-24(-2x+1)^2\times(-2)=48(-2x+1)^2$$

따라서

$$f''(0)=48$$

223. ①

$f'(x)=3(a-3x)^2\times(-3)=-9(a-3x)^2$

$f'(0)=-9a^2=-1$

$a>0$ 이므로 $a=\dfrac{1}{3}$

224. ④

풀이) $f(x)=(a-x)^3$에서

$f'(x)=3(a-x)^2\times(-1)$

$f'(1)=3(a-1)^2\times(-1)=-12$

$(a-1)^2=4$

$(a-1)=\pm2$

$\therefore\ a=3$ 또는 -1 실근의 합은 2

225. ④

$f(2x+3)=(x^3+2x-2)^2$ 에서 양변을 미분하면

$2f'(2x+3)=2(x^3+2x-2)(3x^2+2)$

$x=2$ 를 대입하면 $f'(7)=140$ 이다.

226. ①

$x^2-axy+y^2=b$

$x=1,\ y=0$을 대입하면 $b=1$

$2x-ay-ax\dfrac{dy}{dx}+2y\dfrac{dy}{dx}=0$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-ay}{ax-2y}$ (단, $ax-2y\neq0$)

$x=1,\ y=0,\ \dfrac{dy}{dx}=2$를 대입하면 $a=1$

$\therefore\ a+b=2$

227. ①

$f(a)=a^3+1=9,\ a=2$

$f'(x)=3x^2$

$g'(9)=\dfrac{1}{f'(2)}=\dfrac{1}{12}$

228. ②

$f'(x)=\cos3x-3x\sin3x$

$f''(x)=-3\sin3x-3\sin3x-9x\cos3x=-6\sin3x-9x\cos3x$

$\therefore\ f''\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-6\sin\dfrac{\pi}{2}-9\times\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\times\cos\dfrac{\pi}{2}=-6$

229. ⑤

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-f(1-x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-f(1-x)-f(x)+f(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(1+x)-f(x)}{x}+\frac{f(1-x)-f(x)}{-x}\right\}$$

$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$

$f'(x)=\dfrac{3(2-x^2)-3x\times(-2x)}{(2-x^2)^2}=\dfrac{3x^2+6}{(2-x^2)^2}$

$f'(1)=9$

$\therefore\ 2f'(1)=18$

230. ③

$f(x)=\dfrac{(x+2)^2}{x^3(x+1)^4}$

양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$\ln|f(x)|=2\ln|x+2|-3\ln|x|-4\ln|x+1|$

양변을 미분하면

$g(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{x+1}$

$g'(x)=-\dfrac{2}{(x+2)^2}+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{4}{(x+1)^2}$

따라서 $g'(1) = -\frac{2}{9}+3+1 = \frac{34}{9}$ 이고, $p+q=43$ 이다.

231. ②

$S(t)=\left(\frac{t+2}{e^t}\right)^2\pi$

$S'(t)=\frac{(2t+4)e^{2t}-2(t+2)^2e^{2t}}{e^{4t}}\pi=\frac{-2t^2-6t-4}{e^{2t}}\pi$

$S'(0)=-4\pi$

232. ④

$f(e^{2x+1})-f(e^{x+1})=3x$

양변을 x에 대해 미분하면

$f'(e^{2x+1})\cdot 2e^{2x+1}-f'(e^{x+1})\cdot e^{x+1}=3$

$x=0$을 대입하면

$2ef'(e)-ef'(e)=3$

$f'(e)=\frac{3}{e}$

$\therefore \lim_{h\to0}\frac{e\{f(e+h)-f(e-2h)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}e\times\left\{\left(\frac{f(e+h)-f(e)}{h}\right)+\left(\frac{f(e-2h)-f(e)}{-h}\right)\right\}$

$=e(f'(e)+2f'(e))=3ef'(e)=9$

233. ①

$2f'(1)=\frac{2}{\ln a}=\frac{2}{\ln 2}$ 이므로 $a=2$

234. ⑤

$g(2)=f(2)e^4=0$ 이므로 $f(2)=0$

$g'(x)=f'(x)e^{2x}+2f(x)e^{2x}$ 에서

$g'(2)=f'(2)e^4+2f(2)e^4=f'(2)e^4=5e^4$ 이므로

$f'(2)=5$

따라서 최고차항의 계수가 1 인 이차함수

$f(x)=(x-2)(x+3)$

이므로 $f(3)=6$ 이다.

235. ②

$\tan\alpha=\frac{10}{\overline{OP}}$, $\tan\beta=\frac{10}{\overline{OQ}}$ 이고 $\overline{OP}=3\overline{OQ}$ 이므로

$\tan\beta=3\tan\alpha$

위 등식에서 β를 α의 함수로 보고 양변을 α에 대하여 미분하면]

$\sec^2\beta\times\frac{d\beta}{d\alpha}=3\sec^2\alpha$ (단, $\cos\alpha\neq0$, $\cos\beta\neq0$)

$\frac{d\beta}{d\alpha}=\frac{3\sec^2\alpha}{\sec^2\beta}=\frac{3\cos^2\beta}{\cos^2\alpha}$ …… ㉠

이때 $\overline{OQ}=5$ 인 순간에 $\overline{OP}=15$ 이므로

$\tan\alpha=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$ 이므로 $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}}$

$\tan\beta=\frac{10}{5}=2$ 이므로 $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt5}$

따라서 ㉠에 대입하면 $\frac{d\beta}{d\alpha}=\frac{3\times\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)^2}{\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2}=\frac{13}{15}$

$p+q=15+13=28$

236. ④

$f(x)=e^x\cos x$

$f'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x=e^x(\cos x-\sin x)$

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=e^{\frac{\pi}{6}}\left(\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\right)=e^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\sqrt3}{2}-\frac12\right)$

$f'\left(-\frac{\pi}{6}\right)=e^{-\frac{\pi}{6}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=e^{-\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\sqrt3}{2}+\frac12\right)$

$\therefore\ f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\times f'\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac34-\frac14=\frac12$

237. ①

$f'(x)=e^x\cos x+e^x(-\sin x)=e^x(-\sin x+\cos x)$이므로

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\times f'\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$=e^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\right)\times e^{-\frac{\pi}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=\frac14-\frac34=-\frac12$

238. 5

(1) $x=0$에서 연속

$\lim_{x\to0}5\sin x=0$이고, $\left|\cos\frac1x\right|\le1$이므로

$\left|x^2\cos\frac1x\right|\le x^2$에서 $\lim_{x\to0}x^2=0$이므로 샌드위티 정리에 의해

$\lim_{x\to0}x^2\cos\frac1x=0$이다.

$\therefore\lim_{x\to0}\left\{5\sin x+x^2\cos\frac1x\right\}=0$

$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{5\sin x+x^2\cos\frac1x}{x}$

여기서 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$이고, $\left|\cos\frac1x\right|\le1$에서

$\left|x\cos\frac1x\right|\le|x|$이므로 $\lim_{x\to0}x\cos\frac1x=0$이다.

$\lim_{x\to0}\frac{x^2\cos\frac1x}{x}=\lim_{x\to0}x\cos\frac1x=0$

이므로 $f'(0)=5$이다.

239. ④
풀이)
$y=\sin x$에서
$y'=\cos x$이고, $\sin a=\frac{4}{5}$,
$\left(a,\ \frac{4}{5}\right)$에서 접선의 방정식은 $y=\cos a(x-a)+\frac{4}{5}$
$(b,\ \sin b)$ 에서 접선의 방정식은 $y=\cos b(x-b)+\sin b$ 이다.

예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이면

$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left|\frac{\cos a-\cos b}{1+\cos a\cos b}\right|=\left|\frac{\frac{3}{5}-\cos b}{1+\frac{3}{5}\cos b}\right|=1$이므로

$1+\frac{3}{5}\cos b=\frac{3}{5}-\cos b$

$\cos b=-\frac{1}{4}$

$\sec b=-4$

240. ②
접선이 서로 만나지 않으므로 두 접선은 평행관계여야 한다.
따라서 $\sec^2\alpha=-\sin\beta$이고
$\sin\beta\cos^2\alpha=-1$이다. 그런데,
$-1\le\sin\beta\le1,\ 0\le\cos^2\alpha\le1$이므로 위 관계식을
만족하려면 $\sin\beta=-1,\ \cos^2\alpha=1$일 수 밖에 없다.
$\cos^2\alpha=1$에서 $\cos\alpha=-1(\because 0<\alpha<2\pi)$이므로 $\alpha=\pi$이고,
$\sin\beta=-1$에서 $\beta=\frac{3}{2}\pi(\because 0<\beta<2\pi)$이다.
$\therefore\ 2\beta-\alpha=3\pi-\pi=2\pi$

241. ②
$P(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$
점 P를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\ln x$와 만나는 점을 Q
$Q(e^{\sin 2\theta},\ \sin 2\theta)$
점 Q에서 x축에 내린 수선의 발이 R
$R(e^{\sin 2\theta},\ 0)$
$\overline{PQ}=e^{\sin 2\theta}-\cos 2\theta,\ \overline{AR}=e^{\sin 2\theta}+1$

$\therefore\ S(\theta)=\frac{1}{2}\sin 2\theta(2e^{\sin 2\theta}-\cos 2\theta+1)$

$S'(\theta)=\cos 2\theta(2e^{\sin 2\theta}-\cos 2\theta+1)+\sin 2\theta(2\cos 2\theta e^{\sin 2\theta}+\sin 2\theta)$

$S'\left(\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{6}(2e^{\sin\frac{\pi}{6}}-\cos\frac{\pi}{6}+1)+\sin\frac{\pi}{6}(2e^{\sin\frac{\pi}{6}}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6})$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(2\sqrt{e}-\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)+\frac{1}{2}\left(2\sqrt{e}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)$

$=\sqrt{3}\sqrt{e}-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{e}+\frac{1}{4}$

$=\frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{e}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$S'\left(\frac{\pi}{12}\right)+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}(3\sqrt{e}+1)$

$\therefore\ \frac{\sqrt{3}}{3}\left\{S'\left(\frac{\pi}{12}\right)+\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}(3\sqrt{e}+1)$

$p=\frac{3}{2},\ q=\frac{1}{2}$

$\therefore\ p+q=2$

242. ②
함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 미분가능하므로
$1-3a=2,\ a=b$에서
$a=b=-\frac{1}{3}$ 이다.

따라서 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=be^{\frac{\pi}{2}}+2=2-\frac{1}{3}e^{\frac{\pi}{2}}$ 이다.

243. ①
$\overline{OP}=\frac{9}{\tan\alpha}$이므로 $P\left(\frac{9}{\tan\alpha},\ 0\right)$, $Q\left(\frac{6}{\tan\alpha},\ 3\right)$

$\tan\beta=\frac{2}{\tan\alpha}$ 양변을 α 로 미분하면

$\sec^2\beta\times\frac{d\beta}{d\alpha}=\frac{-2\sec^2\alpha}{\tan^2\alpha}$

$\overline{OQ}=\sqrt{\frac{36}{\tan^2\alpha}+9}=5$ 에서

$\tan\alpha=\frac{3}{2},\ \tan\beta=\frac{4}{3}$ 이고 $\sec^2\alpha=\frac{13}{4},\ \sec^2\beta=\frac{25}{9}$

$\frac{d\beta}{d\alpha}=-\frac{26}{25}$

244. ①
$\lim_{x\to0}\frac{x}{g(x)}=1,\ \lim_{x\to2}\frac{x-2}{g(x)}=2$에서 $g(0)=0,\ g(2)=0$

$\lim_{x\to0}\frac{x}{g(x)-g(0)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{g(x)-g(0)}{x}}=\frac{1}{g'(0)}=1$

$\therefore\ g'(0)=1$

$\lim_{x\to0}\frac{x-2}{g(x)-g(2)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{g(x)-g(0)}{x-2}}=\frac{1}{g'(2)}=2$

$\therefore\ g'(2)=\frac{1}{2}$

$f(x)=g(g(x))$라 하면 $f(2)=g(g(2))=g(0)=0$이므로

$\lim_{x\to2}\frac{g(g(x))}{2x^2-3x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{(x-2)(2x+1)}=\frac{1}{5}f'(2)$

$f'(x)=g'(g(x))g'(x)$

$f'(2)=g'(g(2))g'(2)=g'(0)g'(2)=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \frac{1}{5}f'(2)=\frac{1}{10}$

245. ③

$g(x)=\ln(x^2+x+e)$ 이므로 $g(0)=1$

$g'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+e}$

$g'(0)=\frac{1}{e}$

$h(x)=f(g(x))$ 라 하면

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$

$h(0)=f(g(0))=f(1)=e\cdots$ ①

$h'(0)=f'(g(0))g'(0)=f'(1)\times\frac{1}{e}=2$

$f'(1)=2e\qquad\cdots$ ②

①, ②에 의해

$f(x)=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ 라 하면

$x=1$을 대입

$f(1)=a+b=e\ \ \cdots$ ③

$f'(x)=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$

$x=1$을 대입

$f'(1)=a=2e\quad\cdots$ ④

③, ④를 연립하면 $a=2e,\ b=-e$

$R(x)=2ex-e$

$\therefore\ R(3)=6e-e=5e$

246. ③

풀이)

$g'(x)=e^{x^3+x+1}\times(3x^2+1)$ 이므로 $g'(0)=e$

$g(0)=e$ 이다.

$f(x)=(x-e)^2Q(x)+ax+b$라 하면

$f(e)=ae+b$

$f'(x)=2(x-e)Q(x)+(x-e)^2Q(x)+a$

$f'(e)=a$

$(f\circ g)(0)=3$에서 $f(e)=ae+b=3$

$(f\circ g)'(x)=f(g(x))g'(x)$

$(f\circ g)'(0)=f(g(0))'g'(0)=f'(e)g'(0)=a\times e=e$

이므로 $a=1$ 이고

$e+b=3$에서 $b=3-e$ 이다.

$R(x)=x+3-e$ 이고, $R(e-3)=0$이다.

<다른 풀이>

$f(e)=3,\ f'(e)=1$이므로 $f(x)=a(x-e)^2+(x-e)+3$

$R(x)=x-e+3$ 이고, $R(e-3)=0$이다.

247. ③

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=3,\ \lim_{x\to2}\frac{g(x)-1}{x-2}=2$ 이므로

$f(1)=2,\ g(2)=1,\ f'(1)=3,\ g'(2)=2$

$h(x)=f(g(x))$ 라 하면

$h(2)=f(g(2))=f(1)=2$

$\lim_{x\to2}\frac{f(g(x))-a}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{h(x)-a}{x-2}=b$ 에서

$\lim_{x\to2}(x-2)=0$ 이므로

$\lim_{x\to2}(h(x)-a)=h(2)-a=2-a=0$

$\therefore\ a=2$

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$

$h'(2)=f'(g(2))g'(2)=f'(1)g'(2)=3\times2=6$

$\lim_{x\to2}\frac{h(x)-2}{x-2}=h'(2)=b$

$\therefore\ b=6$

$\therefore\ a+b=8$

248. ⑤

$f(x)=\begin{cases}e^{-x} & (x<0)\\ -2x^2+1 & (x\ge0)\end{cases}$에서 $f(1)=-1$이고,

$f'(x)=\begin{cases}-e^{-x} & (x<0)\\ -4x & (x>0)\end{cases}$이므로

$f'(1)=-4,\ f'(-1)=-e$이다.

$g'(x)=f'(f(x))\times f'(x)$에서

$g'(1)=f'(f(1))\times f'(1)=f'(-1)\times f'(1)=4e$

249. $-\frac{5}{9}$

$g'(x)=-\frac{1}{x^2}$

$\lim_{x\to2}(x^2+x-6)=0$이고 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)+3}{x^2+x-6}=1$이므로

$f(2)=-3$이다. 또,

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)+3}{x^2+x-6}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{(x-2)}\times\frac{1}{(x+3)}=f'(2)\times\frac{1}{5}=1$이므로

$f'(2)=5$이다.

$h'(x)=\{(g\circ f)(x)\}'=g'(f(x))f'(x)$이므로

$h'(2)=g'(f(2))f'(2)=g'(-3)f'(2)=-\frac{5}{9}$

250. ③

$x=t^3\ln t+2t,\ y=6t^2e^{t-1}$

$\frac{dx}{dt}=3t^2\ln t+t^3\cdot\frac{1}{t}+2=3t^2\ln t+t^2+2$

$\frac{dy}{dt}=12te^{t-1}+6t^2e^{t-1}=(6t^2+12t)e^{t-1}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{(6t^2+12t)e^{t-1}}{3t^2\ln t+t^2+2}$

$t=1$을 대입하면 $\frac{dy}{dx}=6$

251. ①

구간 $(0,\ \infty)$에서 정의된 함수 $f(x)=\ln(x^2+2x+1)$의 역함수가 $g(x)$일 때 매개변수 t에 대하여 $x=e^t,\ y=g(t)$

$t=2\ln 2$일 때 $x=e^{2\ln 2}=e^{\ln 4}=4$

$f'(x)=\frac{2x+2}{x^2+2x+1}$

$f(1)=\ln 4=2\ln 2,\ f'(1)=\frac{4}{4}=1$이므로

$g'(2\ln 2)=\frac{1}{f'(1)}=1$

$\frac{dx}{dt}=e^t,\ \frac{dy}{dt}=g'(t)$이므로

$t=2\ln 2$ 일 때 $\frac{dx}{dt}=e^{2\ln 2}=4,\ \frac{dy}{dt}=g'(2\ln 2)=1$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{4}$

252. ③

$f(x)=\ln(x^2+2x+2)$ 에서

$f(1)=\ln 5,\ \ g(\ln 5)=1$

$f'(x)=\frac{2x+2}{x^2+2x+2}$ 에서

$f'(1)=\frac{4}{5},\ \ g'(\ln 5)=\frac{5}{4}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{g'(t)}{2e^t}$

$t=\ln 5$ 일 때,

$\frac{dy}{dx}=\frac{g'(\ln 5)}{2e^{\ln 5}}$

$=\frac{\frac{5}{4}}{10}=\frac{1}{8}$ 이다.

253. $-\sqrt{3}$

$x=\frac{3}{4}\cos\theta-\frac{1}{4}\cos 3\theta,\ y=\frac{3}{4}\sin\theta-\frac{1}{4}\sin 3\theta$이므로

$\frac{dx}{d\theta}=-\frac{3}{4}\sin\theta+\frac{3}{4}\sin 3\theta$

$\frac{dy}{d\theta}=\frac{3}{4}\cos\theta-\frac{3}{4}\cos 3\theta$

따라서 $\frac{dy}{dx}=\frac{\cos\theta-\cos 3\theta}{-\sin\theta+\sin 3\theta}$

$\theta=\frac{\pi}{3}$ 를 대입하면 $\frac{dy}{dx}=\frac{\cos\frac{\pi}{3}-\cos\pi}{-\sin\frac{\pi}{3}+\sin\pi}=\frac{\frac{1}{2}-(-1)}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\sqrt{3}$

254. ③

$x^2-xy+2y^2=14$에 $y=k$를 대입하면

$x^2-kx+2k^2-14=0$

두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

$\alpha+\beta=k,\ \ \alpha\beta=2k^2-14$

$x^2-xy+2y^2=14$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x-y-x\frac{dy}{dx}+4y\frac{dy}{dx}=0$

$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y}{x-4y}$ (단, $x-4y\neq 0$)

$(\alpha,\ k),\ (\beta,\ k)$에서의 접선이 서로 수직이므로

$\frac{2\alpha-k}{\alpha-4k}\times\frac{2\beta-k}{\beta-4k}=\frac{4\alpha\beta-2k(\alpha+\beta)+k^2}{\alpha\beta-4k(\alpha+\beta)+16k^2}$

$=\frac{8k^2-56-2k^2+k^2}{2k^2-14-4k^2+16k^2}$

$=\frac{7k^2-56}{14k^2-14}=-1$

$7k^2-56=-14k^2+14$

$k^2=\frac{10}{3}$

$\therefore\ \alpha\beta=2k^2-14=\frac{20}{3}-14=-\frac{22}{3}$

255. ③

풀이)

두 점 $(0,\ 0),\ (t,\ f(t))\ (t>0)$을 지나는 직선을 l이라 하면

직선 l의 기울기는 $\frac{f(t)-0}{t-0}=\frac{f(t)}{t}$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 직선 l의 기울기와 같고, 점 P의 x좌표가 $g(t)$이므로

$f'(g(t))=\frac{f(t)}{t}$ …… ㉠

한편, $h(1)=a$라 하면 $a>0$이고

$g(a)=1$

㉠에서 $f'(g(a))=\frac{f(a)}{a}$,

즉 $f'(1)=\frac{f(a)}{a}$ …… ㉡

이때 $f'(x)=x^3+2x$이므로 ㉡에서

$3=\frac{f(a)}{a},\ f(a)=3a$

그러므로 $f(a)=\frac{1}{4}a^4+a^2-2$

$=3a$

이므로

$a^4+4a^2-12a-8=0$

$(a-2)(a^3+2a^2+8a+4)=0$

$a>0$일 때 $a^3+2a^2+8a+4>0$이므로

$a=2$

그러므로 $h(1)=2$이고 역함수의 미분법에 의하여

$h'(1)=\dfrac{1}{g'(h(1))}$

$=\dfrac{1}{g'(2)}$

이다.

한편, $f'(g(t))=\dfrac{f(t)}{t}$의 양변을 t에 대하여 미분하면

$f''(g(t))g'(t)=\dfrac{f'(t)\times t-f(t)}{t^2}$

이므로

$f''(g(2))g'(2)=\dfrac{f'(2)\times 2-f(2)}{4}$

$g(2)=1$이므로

$f''(1)g'(2)=\dfrac{f'(2)\times 2-f(2)}{4}$ …… ㉢

이때 $f''(x)=3x^2+2$이므로 $f''(1)=5$

$f'(2)=12,\ f(2)=6$이므로 ㉢에서

$5g'(2)=\dfrac{12\times 2-6}{4}$

$=\dfrac{9}{2}$

따라서 $g'(2)=\dfrac{9}{10}$이므로 $h'(1)=\dfrac{1}{g'(2)}=\dfrac{10}{9}$

$h(1)=2$이므로

$h(1)+9h'(1)=2+10=12$

256. ③

$f(x)=x^3+2x-2$ 에서

$f(1)=1,\ g(1)=1$

$f'(x)=3x^2+2$ 에서

$f'(1)=5,\ g'(1)=\dfrac{1}{5}$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)g(x)-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1}$

$=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$

$=5+\dfrac{1}{5}=\dfrac{26}{5}$

따라서 $p+q=31$ 이다.

257. ⑤

풀이)

$f(1)=(1+a+b)e=e$에서

$a+b=0$ …… ㉠

$f'(x)=\{x^2+(a+2)x+a+b\}e^x$ 이므로

$f'(1)=\{1+(a+2)+a+b\}e=e$에서

$2a+b=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a=-2,\ b=2$

$f(x)=(x^2-2x+2)e^x$에서

$f'(x)=x^2e^x$

$f''(x)=x(x+2)e^x$이므로

$f''(1)=3e$

이때 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이므로

함수 $f(x)$는 역함수가 존재한다.

$f(1)=e$에서 $f^{-1}(e)=1$이므로

역함수의 미분법에 의하여

$(f^{-1})'(e)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{e}$

한편 $g(f(1))=f'(1)$, 즉 $g(e)=e$이고

$g(f(x))=f'(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(f(x))f'(x)=f''(x)$ …… ㉢

㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면

$g'(f(1))f'(1)=f''(1)$

$g'(e)\times e=3e$

$g'(e)=3$

$h'(e)=(f^{-1})'(e)g(e)+f^{-1}(e)g'(e)\ =\dfrac{1}{e}\times e+1\times 3=4$

따라서 $g'(e)+h'(e)=3+4=7$

258. ③

$f(x)=2x+\dfrac{12}{x},\ f'(x)=2-\dfrac{12}{x^2}$

$g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$ 이므로

$2x+\dfrac{12}{x}=11$, $2x^2-11x+12=0$

$(2x-3)(x-4)=0,\ x=\dfrac{3}{2}\ (0<x<2)$

$g(11)=\dfrac{3}{2}$

$g'(11)=\dfrac{1}{f'\left(\dfrac{3}{2}\right)}=-\dfrac{3}{10}$

259. ②

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-e}{h}=\dfrac{b}{2}$ 이므로 $f(2)=e,\ f'(2)=\dfrac{b}{2}$

$f^{-1}(e)=2$ 이므로 $(f^{-1})'(e)=\dfrac{2}{b}$

$g(x)=\begin{cases} ax^2\ln x & (0<x<e) \\ f^{-1}(x) & (x\ge e)\end{cases}$

$x=e$ 에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to e-}g(x)=\lim\limits_{x\to e-}(ax^2\ln x)=ae^2$

$g(e)=\lim\limits_{x\to e+}g(x)=f^{-1}(e)=2$

$ae^2=2$

$\therefore\ a=\frac{2}{e^2}\ \cdots$ ①

$$g'(x)=\begin{cases}2ax\ln x+ax & (0<x<e)\\ (f^{-1})'(x) & (x>e)\end{cases}$$

$x=e$ 에서 미분가능하므로

$2ae\ln e+ae=(f^{-1})'(e)$

$3ae=\frac{2}{b}$

$b=\frac{2}{3ae}=\frac{e}{3}\ \cdots$ ②

①, ②에 의해 $ab=\frac{2}{3e}$

260. ①

f와 g는 역함수관계이고, $f\left(xg(x)-\frac{x^2-x}{x+1}\right)=x$ 이므로

$g(x)=xg(x)-\frac{x^2-x}{x+1}$ 이다.

$\therefore\ g(x)=\frac{x}{x+1}$

$f'(x)=\frac{1}{g'(f(x))}$ 에서 $f'\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{g'\left(f\left(\frac{3}{4}\right)\right)}$ 이고

$f\left(\frac{3}{4}\right)=\alpha$ 이면 $g(\alpha)=\frac{3}{4}$ 에서 $\frac{\alpha}{\alpha+1}=\frac{3}{4}$ 이므로 $\alpha=3$

$\therefore\ f'\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{g'(3)}=16$

$\left(\because\ g'(x)=\frac{1\times(x+1)-x\times1}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}\right)$

261. ②

$f(x)=(\ln x)^2$

$f'(x)=2\ln x\cdot\frac{1}{x}=\frac{2\ln x}{x}$

$f''(x)=\frac{2\cdot\frac{1}{x}\cdot x-2\ln x}{x^2}=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$

$f''(\sqrt{e})=\frac{2\left(1-\frac{1}{2}\right)}{e}=\frac{1}{e}$

$\therefore\ \lim_{h\to0}\frac{f'(\sqrt{e}+2h)-f'(\sqrt{e})}{h}=2f''(\sqrt{e})=\frac{2}{e}$

262. ⑤

$f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x}-\frac{f'(1)}{2\sqrt{x}}$

$x=1$을 대입하면 $f'(1)=\frac{3}{2}-\frac{f'(1)}{2}$

$f'(1)=1$

$f''(x)=\frac{2(x^2+x)-(2x+1)^2}{(x^2+x)^2}+\frac{1}{4x\sqrt{x}}$

$f''(1)=-1$

263. (1) $\frac{dy}{dx}=3\cos2t(1+\cos2t)$

(2) $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-3\sin2t(1+2\cos2t)}{1-\cos2t}$

(3) $\frac{d^2y}{dx^2}\left(t=\frac{\pi}{6}\right)=-6\sqrt{3}$

(1) $\frac{dx}{dt}=2-2\cos2t$

$\frac{dy}{dt}=3\sin^2 2t\cdot\cos2t\cdot2=6\sin^2 2t\cos2t$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{6\sin^2 2t\cos2t}{2(1-\cos2t)}\times\frac{1+\cos2t}{1+\cos2t}=3\cos2t(1+\cos2t)$

(2) $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$

$=\{-6\sin2t(1+\cos2t)+3\cos2t\cdot(-2\sin2t)\}\times\frac{1}{2-2\cos2t}$

$=\frac{-6\sin2t-6\sin2t\cos2t-6\sin2t\cos2t}{2(1-\cos2t)}$

$=\frac{-6\sin2t(1+2\cos2t)}{2(1-\cos2t)}$

$=\frac{-3\sin2t(1+2\cos2t)}{1-\cos2t}$

(3) (2)에 $t=\frac{\pi}{6}$ 을 대입하면

$$\frac{d^2y}{dx^2}\left(t=\frac{\pi}{6}\right)=\frac{-3\sin\frac{\pi}{3}\left(1+2\cos\frac{\pi}{3}\right)}{1-\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{-3\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times(1+1)}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=-6\sqrt{3}$$

264. $-\frac{4}{9}$

$h(x)=\frac{2\tan x+3}{2\tan x+1}=1+\frac{1}{2\tan x+1}$

$h'(x)=-\frac{2\sec^2x}{(2\tan x+1)^2}$

$h'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{4}{9}$

265. (1) $a=-1$

(2) (1)에서 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$f'(x)=\begin{cases}-(2x+1)e^{2x}+1 & (x<0)\\ (2x+1)e^{2x}-1 & (x\geq0)\end{cases}$$

$\lim_{x\to0-}f'(x)=\lim_{x\to0-}\{-(2x+1)e^{2x}+1\}=-1+1=0$

$f'(0)=\lim_{x\to0+}f'(x)=\lim_{x\to0-}\{(2x+1)e^{2x}-1\}=1-1=0$

따라서 $f'(x)$는 $x=0$에서 연속

(3) $f'(0)=0$이므로

$\lim_{x\to0-}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\dfrac{-(2x+1)e^{2x}+1}{x}$

$=\lim_{x\to0-}\left\{-2e^{2x}-\dfrac{e^{2x}-1}{x}\right\}$

$=-2-2$

$=-4$

$\lim_{x\to0+}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\dfrac{(2x+1)e^{2x}-1}{x}$

$=\lim_{x\to0+}\left\{2e^{2x}+\dfrac{e^{2x}-1}{x}\right\}$

$=2+2$

$=4$

따라서 $f'(x)$는 $x=0$에서 미분불가능

(1) $f(x)=\begin{cases}-x(e^{2x}+a) & (x<0)\\ x(e^{2x}+a) & (x\ge0)\end{cases}$

$x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0-}f(x)=0,\ f(0)=\lim_{x\to0+}f(x)=0$

$\{-x(e^{2x}+a)\}'=-(e^{2x}+a)-2xe^{2x}=-(2x+1)e^{2x}-a$

$\{x(e^{2x}+a)\}'=e^{2x}+a+2xe^{2x}=(2x+1)e^{2x}+a$

$f'(x)=\begin{cases}-(2x+1)e^{2x}-a & (x<0)\\ (2x+1)e^{2x}+a & (x>0)\end{cases}$

$x=0$에서 미분가능하므로

$-1-a=1+a$

$\therefore\ a=-1$

(2) (1)에서 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$f'(x)=\begin{cases}-(2x+1)e^{2x}+1 & (x<0)\\ (2x+1)e^{2x}-1 & (x\ge0)\end{cases}$

$\lim_{x\to0-}f'(x)=\lim_{x\to0-}\{-(2x+1)e^{2x}+1\}=-1+1=0$

$f'(0)=\lim_{x\to0+}f'(x)=\lim_{x\to0-}\{(2x+1)e^{2x}-1\}=1-1=0$

따라서 $f'(x)$는 $x=0$에서 연속

(3) $f'(0)=0$이므로

$\lim_{x\to0-}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\dfrac{-(2x+1)e^{2x}+1}{x}$

$=\lim_{x\to0-}\left\{-2e^{2x}-\dfrac{e^{2x}-1}{x}\right\}$

$=-2-2$

$=-4$

$\lim_{x\to0+}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\dfrac{(2x+1)e^{2x}-1}{x}$

$=\lim_{x\to0+}\left\{2e^{2x}+\dfrac{e^{2x}-1}{x}\right\}$

$=2+2$

$=4$

따라서 $f'(x)$는 $x=0$에서 미분불가능

266. ①

$y=e^{x}-e^{-x}$와 직선 $y=t$가 만나는 점의 좌표를 $(f(t),\ t)$라 하므로

$e^{f(t)}-e^{-f(t)}=t$ ⋯ ①

양변을 t에 대하여 미분하면

$e^{f(t)}f'(t)+e^{-f(t)}f'(t)=1$

$f'(t)=\dfrac{1}{e^{f(t)}+e^{-f(t)}}$ ⋯ ②

①에 $t=\dfrac{3}{2}$를 대입하면

$e^{f\left(\frac{3}{2}\right)}-e^{-f\left(\frac{3}{2}\right)}=\dfrac{3}{2}$

$e^{f\left(\frac{3}{2}\right)}=X$라 하면 $X>0$

$2X^2-3X-2=0$

$(2X+1)(X-2)=0$

$\therefore\ X=e^{f\left(\frac{3}{2}\right)}=2$ ⋯ ③

$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\ln2$ ⋯ ④

②에 $t=\dfrac{3}{2}$를 대입하면

$f'\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{e^{f\left(\frac{3}{2}\right)}+e^{-f\left(\frac{3}{2}\right)}}=\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{5}$ ⋯ ⑤

$g(t)=f(t)\times\left(e^{2f(t)}+e^{-2f(t)}\right)$

$g'(t)=f'(t)\left(e^{2f(t)}+e^{-2f(t)}\right)+f(t)\left(e^{2f(t)}\cdot2f'(t)-e^{-2f(t)}\cdot2f'(t)\right)$

$=f'(t)\left\{\left(e^{2f(t)}+e^{-2f(t)}\right)+2f(t)\left(e^{2f(t)}-e^{-2f(t)}\right)\right\}$

$t=\dfrac{3}{2}$를 대입하면 ③, ④, ⑤에 의해

$g'\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{2}{5}\left\{4+\dfrac{1}{4}+2\ln2\times\left(4-\dfrac{1}{4}\right)\right\}$

$=\dfrac{2}{5}\times\left(\dfrac{17}{4}+\dfrac{15}{2}\ln2\right)=\dfrac{17}{10}+3\ln2$

$p=\dfrac{17}{10},\ q=3$

$\therefore\ p+q=\dfrac{47}{10}$

267. $-\dfrac{1}{4}$

$\angle\mathrm{PAB}=\theta,\ \angle\mathrm{QAB}=2\theta$라 하면

선분 $\overline{\mathrm{BP}}$의 길이의 시간(초)에 대한 변화율이 $\dfrac{1}{2}$이므로 t초후

$\overline{\mathrm{BP}}=\dfrac{1}{2}t=20\sin\theta$ ⋯ ①

$\overline{\mathrm{AQ}}=20\cos2\theta$ ⋯ ②

①에서 $\frac{d}{dt}\overline{\mathrm{BP}}=\frac{1}{2}=20\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$

$\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{40\cos\theta}$

$t=5$를 ①에 대입하면 $20\sin\theta=\frac{5}{2}$

$\sin\theta=\frac{1}{8}$

$0<\theta<\frac{\pi}{4}$이므로 $\cos\theta=\frac{\sqrt{63}}{8}$

$\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{40\cos\theta}=\frac{1}{5\sqrt{63}}$

②를 t에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dt}\overline{\mathrm{AQ}}=-40\sin2\theta\frac{d\theta}{dt}==-80\sin\theta\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$

$t=5$일 때 $\sin\theta=\frac{1}{8}$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{63}}{8}$, $\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{5\sqrt{63}}$을

대입하면

$\therefore\ \frac{d}{dt}\overline{\mathrm{AQ}}=-80\times\frac{1}{8}\times\frac{\sqrt{63}}{8}\times\frac{1}{5\sqrt{63}}=-\frac{1}{4}$

268. ⑤

$a^x=a^{-x}-\frac{8}{3}$

$3(a^x)^2+8a^x-3=0$

$(3a^x-1)(a^x+3)=0$

$a^x>0$이므로 $a^x=\frac{1}{3}$

$\therefore\ f(a)=\log_a\frac{1}{3}=-\log_a3=-\frac{1}{\log_3a}$

$f'(a)=\frac{\frac{1}{a\ln3}}{(\log_3a)^2}=\frac{1}{a(\log_3a)^2\ln3}$

$f(k)=-\log_k3=-\frac{1}{2}$이므로 $k^{\frac{1}{2}}=3$

$\therefore\ k=9$

$\therefore\ f'(k)=\frac{1}{9\times(\log_39)^2\ln3}=\frac{1}{36}\times\frac{1}{\ln3}$

$p=36,\ q=1$이므로 $p+q=37$

269. ①

$x^2+xy+2y^2=7$이 $(\alpha,\ k)$, $(\beta,\ k)$를 지나므로

$x^2+kx+2k^2-7=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 놓을 수 있다.

따라서

$\alpha+\beta=-k,\ \alpha\beta=2k^2-7$($\because$ 근과 계수와의 관계).....(가)

준식을 음함수의 미분법을 이용하여 미분하면

$2x+y+x\times\frac{dy}{dx}+4y\times\frac{dy}{dx}=0$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{-(2x+y)}{x+4y}$이다.

$(\alpha,\ k)$와 $(\beta,\ k)$에서 두 접선이 서로 수직이므로

$\frac{-(2\alpha+k)}{\alpha+4k}\times\frac{-(2\beta+k)}{\beta+4k}=-1$이고

$\frac{(2\alpha+k)(2\beta+k)}{(\alpha+4k)(\beta+4k)}=\frac{4\alpha\beta+2k(\alpha+\beta)+k^2}{\alpha\beta+4k(\alpha+\beta)+16k^2}=\frac{k^2-4}{2k^2-1}=-1$

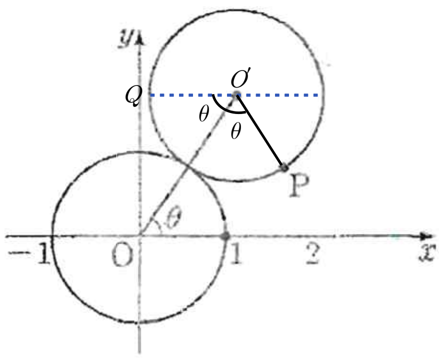
($\because$ (가))

따라서 $k^2=\frac{5}{3}$이고,

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=-3k^2+14$이므로

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=9$

270. (문제오류) → 보기를 정정한 후 정답은 ②



두 원의 중심을 연결한 선분 $\overline{OO'}$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ일 때, P가 존재하는 원의 중심 O'을 지나면서 x축과 평행한 보조선이 원과 만나는 두 개의 교점 중에서 왼쪽 교점을 Q라 두자. 이때,

$\angle QO'O=\theta$ ($\because$엇각)이고, $\angle OO'P=\theta$이다.

($\because$미끄럼 없이 회전하므로 두 호의 길이가 동일하며 반지름이 1로 동일하므로 움직인 중심각의 크기도 동일하다.)

따라서 O'을 원점으로 생각할 때, P의 동경은 $\pi+2\theta$이고 O'이 원점일 때, P의 좌표는 $(\cos(\pi+2\theta),\ \sin(\pi+2\theta))$가 된다.

그런데 $\overline{OO'}=2$이고 $\overline{OO'}$의 동경이 θ이므로

O'의 좌표는 $(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$이므로 실제 P의 좌표는

$P(2\cos\theta+\cos(\pi+2\theta),\ 2\sin\theta+\sin(\pi+2\theta))$이다.

$P(x,\ y)$에서 $x=2\cos\theta-\cos2\theta,\ y=2\sin\theta-\sin2\theta$

($\because\ \cos(\pi+2\theta)=-\cos2\theta,\ \sin(\pi+2\theta)=-\sin2\theta$)

따라서 $\frac{dx}{d\theta}=-2\sin\theta+2\sin2\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=2\cos\theta-2\cos2\theta$이며

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{2\cos\theta-2\cos2\theta}{-2\sin\theta+2\sin2\theta}=\frac{\cos\theta-\cos2\theta}{\sin2\theta-\sin\theta}$

$\theta=\frac{5\pi}{6}$일 때, $\frac{dy}{dx}=\frac{\cos\frac{5}{6}\pi-\cos\frac{5}{3}\pi}{\sin\frac{5}{3}\pi-\sin\frac{5}{6}\pi}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}=1$

※ 보기에 답이 없고 학교정답지에는 ②번으로 표기되어 있습니다.

문제오류이므로 보기를 정정했습니다. ②번 $\sqrt{3}$ → 1

271. ③

곡선 $x^2+2xy+3y^2=9$ 에 두 점 (α, k), $(\beta,\ k)$ 을 대입하면

$\alpha^2+2\alpha k+3k^2=9$, $\beta^2+2\beta k+3k^2=9$

즉, α, β 는 방정식 $x^2+2kx+3k^2-9=0$ 의 두 근이다.

따라서 $\alpha+\beta=-2k$, $\alpha\beta=3k^2-9$

한편, $x^2+2xy+3y^2=9$ 의 양변을 x 에 대해 미분하면

$$2x+2y+2x\frac{dy}{dx}+6y\frac{dy}{dx}=0$$

즉, $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x+y}{x+3y}$

두 점 (α, k), $(\beta,\ k)$ 에서의 접선이 서로 수직이므로

$$\left(-\frac{\alpha+k}{\alpha+3k}\right)\left(-\frac{\beta+k}{\beta+3k}\right)=-1$$

$(\alpha+k)(\beta+k)=-(\alpha+3k)(\beta+3k)$

$\alpha+\beta=-2k$, $\alpha\beta=3k^2-9$ 를 이용하면

$6k^2-18-8k^2+10k^2=8k^2-18=0$ 에서

$k^2=\dfrac{9}{4}$

따라서 $4\alpha\beta=12k^2-36=-9$ 이다.

272. ⑤

$f(g(t))=t$ 이므로 $g=f^{-1}$

$g(0)=\pi$ 에서 $f(\pi)=a\pi+b=0$

즉, $b=-a\pi$

$\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{g(t)-\pi}{t}=\lim_{t\to0}\frac{g(t)-g(0)}{t}$ 의 값이 존재하지 않으므로

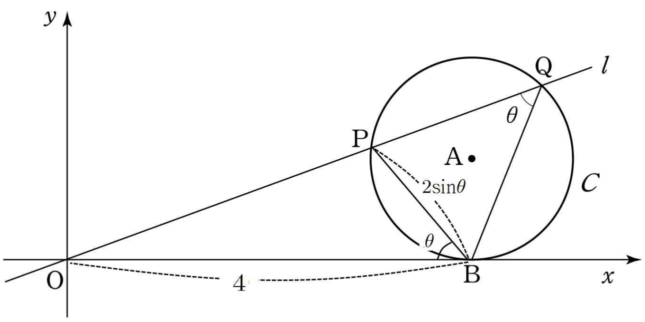
$g'(0)=\dfrac{1}{f'(\pi)}$ 의 값이 존재하지 않는다.

즉, $f'(\pi)=a-3=0$ 이다.

따라서 $a=3$, $b=-3\pi$ 이므로

$ab=-9\pi$ 이다.

273. ②



사인법칙에서 $\dfrac{\overline{PB}}{\sin\theta}=2$

$\therefore\ \overline{PB}=2\sin\theta$, $\overline{OB}=4$ 이므로

코사인법칙에 의하여

$\overline{OP}^{\,2}=4^2+4\sin^2\theta-2\cdot4\cdot2\sin\theta\cdot\cos\theta$

$\{f(\theta)\}^2=16+4\sin^2\theta-16\sin\theta\cos\theta$ …… ㉠

$$\left\{f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\}^2=16+2-16\times\frac{1}{\sqrt2}\times\frac{1}{\sqrt2}=18-8=10$$

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{10}$

㉠을 미분하면

$2f(\theta)f'(\theta)=8\sin\theta\cos\theta-16(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 를 대입하면

$2\times\sqrt{10}\times f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=8\times\dfrac{1}{2}=4$

$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{4}{2\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

274. ⑤

$h(x)=ax^2\ln x$ 라 하자.

함수 $g(x)$ 가 $x=e$ 에서 미분가능하려면 $x=e$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to e-}g(x)=\lim_{x\to e+}g(x)=g(e) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이어야 한다. 이때

$\displaystyle\lim_{x\to e-}g(x)=\lim_{x\to e-}h(x)=ae^2$,

$\displaystyle\lim_{x\to e+}g(x)=\lim_{x\to e+}f^{-1}(x)=f^{-1}(e)$,

$g(e)=f^{-1}(e)$

이므로 ㉠에서

$ae^2=f^{-1}(e)$

즉, $f(ae^2)=e$ …… ㉡

한편, $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-e}{h}=b$ 에서 $h\to0$ 일 때, (분모) $\to0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$ 이어야 한다. 이때 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{h\to0}\{f(2+h)-e\}=f(2)-e=0$$

에서 $f(2)=e$

함수 $f(x)$ 는 일대일대응이므로 ㉡에서 $ae^2=2$

$a=\dfrac{2}{e^2}$

즉, $h(x)=\dfrac{2}{e^2}x^2\ln x$

이때 함수 $g(x)=\begin{cases} h(x) & (0<x<e) \\ f^{-1}(x) & (x\ge e)\end{cases}$ 에서

$$h'(x)=\frac{2}{e^2}\left(2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}\right)=\frac{2x}{e^2}(2\ln x+1)$$

함수 $g(x)$ 는 $x=e$ 에서 미분가능하므로

$$h'(e)=(f^{-1})'(e)$$

에서

$$\frac{6}{e}=\frac{1}{f'(2)}\text{ 이므로 } f'(2)=\frac{e}{6}$$

따라서

$$b=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-e}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=f'(2)=\frac{e}{6}$$

이므로

$$\therefore\ ab=\frac{2}{e^2}\times\frac{e}{6}=\frac{1}{3e}$$

275. ③

두 점 $(0,\ 0)$, $(t,\ f(t))$를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{f(t)}{t}=t^3+8t-\frac{128}{t}$$

$f(x)=x^4+8x^2-128$

$f'(x)=4x^3+16x$

$$\therefore\ 4\{g(t)\}^3+16g(t)=t^3+8t-\frac{128}{t}\quad\cdots ①$$

$g(t)$의 역함수가 $h(t)$이므로 $h'(2)=\dfrac{1}{g'(h(2))}$

$h(2)=k$라 하면 $g(k)=2\ \cdots ②$

①에 $t=k$를 대입하면

$$4\times2^3+16\times2=k^3+8k-\frac{128}{k}$$

$k^4+8k^2-64k-128=0$

$k=4$를 대입하면 $256+128-128-256=0$

$\therefore\ k=4,\ h(2)=4,\ g(4)=2$

①의 양변을 미분하면

$$12\{g(t)\}^2g'(t)+16g'(t)=3t^2+8+\frac{128}{t^2}$$

$t=4$를 대입하면

$$12\{g(4)\}^2g'(4)+16g'(4)=3\times4^2+8+\frac{128}{4^2}$$

$48g'(4)+16g'(4)=48+8+8$

$\therefore\ g'(4)=1$

$$\therefore\ h'(2)=\frac{1}{g'(h(2))}=\frac{1}{g'(4)}=1$$

276. ④

$f(t)=\dfrac{1}{4}t^4+t^2$ 이므로

두 점 $(0,\ 2)$, $(t,\ f(t))$를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{f(t)-2}{t}=\frac{1}{4}t^3+t-\frac{2}{t}$$

$f(x)=\dfrac{1}{4}x^4+x^2$를 미분하면

$f'(x)=x^3+2x$

점 $\mathrm{P}(s,\ f(s))$라 하면 점 P의 y좌표가 $g(t)$이므로 $g(t)=f(s)$

$$g(t)=\frac{1}{4}s^4+s^2\quad\cdots ①$$

$$g'(t)=(s^3+2s)\frac{ds}{dt}\quad\cdots ②$$

점 P에서의 접선의 기울기가 두 점 $(0,\ 2)$, $(t,\ f(t))$를 지나는 직선의 기울기와 평행하므로

$$s^3+2s=\frac{1}{4}t^3+t-\frac{2}{t}\quad\cdots ③$$

$g(t)$의 역함수가 $h(t)$이므로

①에서 $t=h\left(\dfrac{1}{4}s^4+s^2\right)$

$s=1$을 대입하면 $t=h\left(\dfrac{5}{4}\right)$

③에 $s=1$을 대입하면

$$3=\frac{1}{4}t^3+t-\frac{2}{t}$$

$t^4+4t^2-12t-8=0$

$t=2$를 대입하면 $16+16-24-8=0$이므로 성립

$(t-2)(t^3+2t^2+8t+2)=0$

$t>0$ 이므로 $t=2$ 따라서 $h\left(\dfrac{5}{4}\right)=2$

③을 t에 대하여 미분하면

$$(3s^2+2)\frac{ds}{dt}=\frac{3}{4}t^2+1+\frac{2}{t^2}$$

$s=1,\ t=2$를 대입하면 $\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{9}{10}$

②에 $s=1,\ t=2,\ \dfrac{ds}{dt}=\dfrac{9}{10}$를 대입하면 $g'(2)=\dfrac{27}{10}$

$g(h(t))=t$에서 양변을 t에 대하여 미분하면

$g'(h(t))h'(t)=1$

$$h'(t)=\frac{1}{g'(h(t))}$$

$$\therefore\ h'\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{g'\left(h\left(\frac{5}{4}\right)\right)}=\frac{1}{g'(2)}=\frac{10}{27}$$

277. ②

풀이)

$f(x)=-\dfrac{ax^3+bx}{x^2+1}$ 에서

$$f'(x)=-\frac{(3ax^2+b)(x^2+1)-(ax^3+bx)(2x)}{(x^2+1)^2}\text{ 이므로}$$

$$f'(x)=-\frac{ax^4+(3a-b)x^2+b}{(x^2+1)^2}\quad\cdots\cdots\ ㉠$$

모든 실수 x에 대하여 $x^2+1\neq0$이므로 함수 $f'(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\neq0$이고 $f'(0)=-b<0$이므로

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)<0$이다.

$h(x)=g(f(x))=f(f(x))-x$이므로

$h(0)=f(f(0))-0=f(0)=0$이다.
조건 (가)에서 $g(2)=f(2)-f^{-1}(2)=h(0)=0$이므로
$f(2)=f^{-1}(2)=t$ (t는 상수)라 하면 $f(t)=2$이다.
모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로
$f(-2)=-f(2)=-t$
이다.
즉 두 점 $(t,\ 2)$, $(-2,\ -t)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프 위에 있다.
$t\neq-2$일 때, 두 점 $(t,\ 2)$, $(-2,\ -t)$를 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{2-(-t)}{t-(-2)}=1$이므로 평균값 정리에 의하여
$f'(c)=1$인 상수 c가
존재한다.
그러나 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)<0$이므로 모순이다.
즉 $t=-2$
$f(2)=-2$에서 $-\dfrac{8a+2b}{5}=-2$
그러므로 $4a+b=5$ …… ㉡
$f^{-1}(2)=-2$이므로 역함수의 미분법에 의하여
$g'(2)=f'(2)-(f^{-1})'(2)=f'(2)-\dfrac{1}{f'(-2)}$
㉠에서 모든 실수 x에 대하여 $f'(-x)=f'(x)$이므로
$f'(-2)=f'(2)$이다.
즉 $g'(2)=f'(2)-\dfrac{1}{f'(2)}$
$h(x)=f(f(x))-x$에서 $h'(x)=f'(f(x))f'(x)-1$이므로
$h'(2)=f'(f(2))f'(2)-1=f'(-2)f'(2)-1=\{f'(2)\}^2-1$
조건 (나)에서 $g'(2)=-5h'(2)$이므로
$f'(2)-\dfrac{1}{f'(2)}=-5\{f'(2)\}^2+5$
$5\{f'(2)\}^3+\{f'(2)\}^2-5f'(2)-1=0$
$\{5f'(2)+1\}\{f'(2)+1\}\{f'(2)-1\}=0$
$f'(x)<0$이므로 $f'(2)=-\dfrac{1}{5}$ 또는 $f'(2)=-1$이다.
㉠에서 $f'(2)=-\dfrac{16a+4(3a-b)+b}{(4+1)^2}=-\dfrac{28a-3b}{25}$
(ⅰ) $f'(2)=-\dfrac{1}{5}$일 때, $-\dfrac{28a-3b}{25}=-\dfrac{1}{5}$이므로
$28a-3b=5$ …… ㉢
㉡, ㉢을 연립하면 $a=\dfrac{1}{2}$, $b=3$이다.
(ⅱ) $f'(2)=-1$일 때, $-\dfrac{28a-3b}{25}=-1$이므로
$28a-3b=25$ …… ㉣
㉡, ㉣을 연립하면 $a=1$, $b=1$이므로 모순이다.

따라서 $f'(2)=-\dfrac{1}{5}$, $a=\dfrac{1}{2}$, $b=3$이므로
$5f'(2)+2(a+b)=-1+1+6=6$이다.

278. $-\dfrac{2}{3}$

$\left|\dfrac{x}{3}\right|>0$이고 $-\dfrac{x}{3}>0$이므로 $x\neq0$이고 $x<0$
진수 조건에 의해 $x<0$
ⅰ) $x<-3$일 때
$\dfrac{x}{3}<0$이므로 $\ln\left|\dfrac{x}{3}\right|=\ln\left(-\dfrac{x}{3}\right)$
$\ln\left(-\dfrac{x}{3}\right)>0$이므로 $\left|\ln\left(-\dfrac{x}{3}\right)\right|=\ln\left(-\dfrac{x}{3}\right)$
$\therefore\ f(x)=2\ln\left(-\dfrac{x}{3}\right)$
ⅱ) $-3\leq x<0$일 때
$\dfrac{x}{3}<0$이므로 $\ln\left|\dfrac{x}{3}\right|=\ln\left(-\dfrac{x}{3}\right)$
$\ln\left(-\dfrac{x}{3}\right)\leq0$이므로 $\left|\ln\left(-\dfrac{x}{3}\right)\right|=-\ln\left(-\dfrac{x}{3}\right)$
$\therefore\ f(x)=0$

$$f(x)=\begin{cases}2\ln\left(-\dfrac{x}{3}\right) & (x<-3)\\ 0 & (-3\leq x<0)\end{cases}$$

ⅰ) $\displaystyle\lim_{h\to0+}\frac{f(-3+h)-f(-3-h)}{h}$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{-2\ln\left(\dfrac{3+h}{3}\right)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{-2\ln\left(1+\dfrac{h}{3}\right)}{h}=(-2)\times\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}$$

($h\to0+$ 일 때 $-3+h>-3$, $-3-h<-3$)

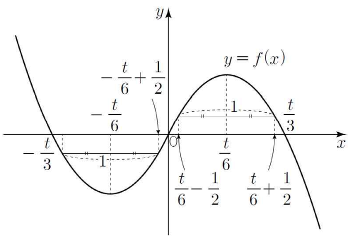
ⅱ) $\displaystyle\lim_{h\to0-}\frac{f(-3+h)-f(-3-h)}{h}$

$$=\lim_{h\to0-}\frac{2\ln\left(\dfrac{3-h}{3}\right)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{2\ln\left(1-\dfrac{h}{3}\right)}{h}=2\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{3}$$

($h\to0-$ 일 때 $-3+h<-3$, $-3-h>-3$)

$\therefore\ \displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(-3+h)-f(-3-h)}{h}=-\frac{2}{3}$

279. ④
함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고
$x<0$일 때, $f'(x)=6x+t$
$x>0$일 때, $f'(x)=-6x+t$이므로
함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{t}{6}$에서 극소이고 $x=\dfrac{t}{6}$에서 극대이다.
$f(x)=0$일 때 $x=-\dfrac{t}{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\dfrac{t}{3}$
한편, $x<0$일 때의 함수 $f(x)$를 $f_1(x)=3x^2+tx$,
$x>0$일 때의 함수 $f(x)$를 $f_2(x)=-3x^2+tx$라 하면
(ⅰ) $\dfrac{t}{3}\geq1$인 경우 (즉, $t\geq3$)



조건 (가)에서 닫힌구간 $[k-1,\ k]$ 의 길이는 k의 값에 관계없이 항상 1로 일정하다.

함수 $f_1(x)$의 그래프는 직선 $x=-\dfrac{t}{6}$에 대하여 대칭이므로 방정식 $f_1(k-1)=f_1(k)$를 만족시키는 k의 값은

$$k=-\frac{t}{6}+\frac{1}{2}$$

함수 $f_2(x)$의 그래프는 직선 $x=\dfrac{t}{6}$에 대하여 대칭이므로 방정식 $f_2(k-1)=f_2(k)$를 만족시키는 k의 값은

$$k=\frac{t}{6}+\frac{1}{2}$$

함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{t}{6}$에서 극대이므로 조건 (가)를 만족시키는 k의 값의 범위는

$$-\frac{t}{6}+\frac{1}{2}\le k\le\frac{t}{6} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (나)에서 닫힌구간 $[k,\ k+1]$ 의 길이는 k의 값에 관계없이 항상 1로 일정하고 함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{t}{6}$에서 극소이므로 조건 (나)를 만족시키는 $k+1$의 값의 범위는

$$k+1\le-\frac{t}{6}\ \text{ 또는 }\ k+1\ge\frac{t}{6}+\frac{1}{2}$$

즉, $k\le-\dfrac{t}{6}-1$ 또는 $k\ge\dfrac{t}{6}-\dfrac{1}{2}$ …… ㉡

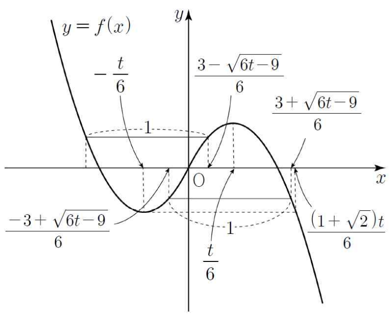
㉠, ㉡에 의하여 $t\ge3$에서 조건 (가), (나)를 만족시키는 k의 값의 범위는

$$\frac{t}{6}-\frac{1}{2}\le k\le\frac{t}{6}$$

이므로 실수 k의 최솟값 $g(t)$는 다음과 같다.

$$\therefore\ g(t)=\frac{t}{6}-\frac{1}{2}\quad(t\ge3)$$

(ii) $\dfrac{t}{3}<1$인 경우 (즉, $6-3\sqrt{2}\le t<3$)



조건 (가)에서 닫힌구간 $[k-1,\ k]$ 의 길이는 k의 값에 관계없이 항상 1로 일정하다.

$6-3\sqrt{2}\le t<3$에서 방정식 $f_1(k-1)=f_2(k)$를 만족시키는 k의 값은 k에 대한 방정식

$$3(k-1)^2+t(k-1)=-3k^2+tk$$

의 실근인

$$k=\frac{3-\sqrt{6t-9}}{6}\ \text{ 또는 }\ k=\frac{3+\sqrt{6t-9}}{6}$$

함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{t}{6}$에서 극대이므로 조건 (가)를 만족시키는 k의 값의 범위는

$$\frac{3-\sqrt{6t-9}}{6}\le k\le\frac{t}{6}\qquad\cdots\cdots ㉢$$

조건 (나)에서 닫힌구간 $[k,\ k+1]$ 의 길이는 k의 값에 관계없이 항상 1로 일정하고 함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{t}{6}$에서 극소이므로 조건 (나)를 만족시키는 $k+1$의 값의 범위는

$$k+1\le-\frac{t}{6}\ \text{ 또는 }\ k+1\ge\frac{3+\sqrt{6t-9}}{6}$$

즉, $k\le-\dfrac{t}{6}-1$ 또는 $k\ge\dfrac{-3+\sqrt{6t-9}}{6}$ …… ㉣

㉢, ㉣에 의하여 $6-3\sqrt{2}\le t<3$에서 조건 (가), (나)를 만족시키는 k의 값의 범위는

$$\frac{3-\sqrt{6t-9}}{6}\le k\le\frac{t}{6}$$

이므로 실수 k의 최솟값 $g(t)$는 다음과 같다.

$$\therefore\ g(t)=\frac{3-\sqrt{6t-9}}{6}\quad(6-3\sqrt{2}\le t<3)$$

(i), (ii)에 의하여

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt{6t-9}}{6} & (6-3\sqrt{2}\le t<3)\\[2mm] \dfrac{t}{6}-\dfrac{1}{2} & (t\ge3)\end{cases}$$

따라서

$$g'(t)=\begin{cases}\dfrac{-1}{2\sqrt{6t-9}} & (6-3\sqrt{2}\le t<3)\\[2mm] \dfrac{1}{6} & (t>3)\end{cases}$$

이므로

$$6\times\{g'(4)-g'(2)\}=6\times\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)=1+\sqrt{3}$$

280. ②

$x^2+2xy-5y^2=7$

$2x+2y+2x\dfrac{dy}{dx}-10y\dfrac{dy}{dx}=0$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{5y-x}$ (단, $5y-x\ne0$)

$x^2+2xy-5y^2=7$가 $(r,\ k)$를 지나므로

$r^2+2rk-5k^2=7$ $\cdots$ ①

$x^2+2xy-5y^2=7$가 $(s,\ k)$를 지나므로

$s^2+2sk-5k^2=7 \qquad \cdots ②$

①$-$②하면 $r^2-s^2+2k(r-s)=0$

$r\neq s$ 이므로 $r+s=-2k$ $\cdots ③$

①$+$②하면 $(r+s)^2-2rs+2k(r+s)-10k^2=14$

③을 대입하면 $4k^2-2rs-4k^2-10k^2=14$

$\therefore\ rs=-5k^2-7\cdots ④$

$ab=-1$이므로

$$ab=\frac{k+r}{5k-r}\times\frac{k+s}{5k-s}=\frac{k^2+(r+s)k+rs}{25k^2-5k(r+s)+rs}$$

$$=\frac{k^2-2k^2-5k^2-7}{25k^2+10k^2-5k^2-7}=\frac{-6k^2-7}{30k^2-7}=-1$$

$-6k^2-7=-30k^2+7$

$k^2=\dfrac{7}{12}$

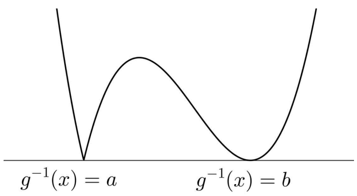
④에 대입하면

$\therefore\ rs=-\dfrac{35}{12}-7=-\dfrac{119}{12}$

281. ⑤

풀이)

$g^{-1}(x)$의 치역이 모든 실수의 집합이므로 $|h(x)|$의 그래프는 다음과 같은 모양이다.



$(x-1)|h(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$h(1)=0$

이어야 한다.

$f(g^{-1}(1))=0$에서 $g^{-1}(1)=a$, $g(a)=1$이므로 $a=0$

따라서 $f(x)=x(x-b)^2$

$h'(x)=f'(g^{-1}(x))(g^{-1})'(x)$에서 $h'(3)=f'(1)\times\dfrac{1}{g'(1)}=2$

$\therefore f'(1)=8$

$f'(x)=(x-b)^2+2x(x-b)$이므로

$(1-b)^2+2(1-b)-8=b^2-4b-5=0$에서

$a<b$이므로 $b=5$

$f(x)=x(x-5)^2$

$f'(x)=(x-5)(3x-5)$

$f'(8)=3\times 19=57$

282. ⑤

$a=1,\ y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=1$

접선의 방정식은 $y=x-1$, 곧, $b=-1$

$ab=-1$

283. ①

$3x^2-3y^2\cdot y'=0$, 점 $(1,\ 2)$를 대입하면 $3-12y'=0$, $y'=\dfrac{1}{4}$

284. ③

$a=\dfrac{\pi}{4}$

$y'=\cot x-x\csc^2 x=1-\dfrac{\pi}{2}=b$

$a+b=1-\dfrac{\pi}{4}$

285. ①

$y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$y''=\dfrac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4}=\dfrac{-3+2\ln x}{x^3}=0$

$x=e^{\frac{3}{2}}$

286. ③

함수 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 의 정의역은 $\{x|x>0\}$ 이다.

$y=\dfrac{\ln x}{x}$ 에서

$$y'=\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x\times 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

이므로

$$y''=\frac{-\frac{1}{x}\times x^2-(1-\ln x)\times 2x}{(x^2)^2}=\frac{-3+2\ln x}{x^3}$$

$y''=0$ 에서 $-3+2\ln x=0$

$\ln x=\dfrac{3}{2}$ 이므로 $x=e^{\frac{3}{2}}$

$x=e^{\frac{3}{2}}$ 의 좌우에서 y''의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 의 변곡점의 x좌표는 $e^{\frac{3}{2}}$ 이다.

287. ④

$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $f''(x)=\dfrac{x(2\ln x-3)}{x^4}$

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$	$e\sqrt{e}$	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''		$-$	$-$	$-$	0	$+$
y		↗	$\dfrac{1}{e}$	↘	$\dfrac{3}{2e\sqrt{e}}$	↘

① 열린구간 $(0,\ e)$에서 함수 $f(x)$는 증가하므로 거짓.

② 열린구간 $(e,\ e\sqrt{e})$에서 함수 $f(x)$는 감소하므로 거짓.

③ 함수 $f(x)$는 $x=e$에서 극댓값 $\dfrac{1}{e}$을 가지므로 거짓.

④ 함수 $f(x)$의 변곡점의 y좌표는 $\frac{3}{2e\sqrt{e}}$이므로 참.

⑤ 열린구간 $(e,\ e\sqrt{e})$에서 $y=f''(x)<0$이므로 $y=f(x)$는 위로 볼록하므로 거짓.

288. ⑤
$f(x)=\sin x+\cos x$ 에서
$f'(x)=\cos x-\sin x$
$f'(x)=0$ 에서 $\cos x=\sin x$, 즉 $\tan x=1$

$0\le x\le\pi$ 이므로 $\therefore\ x=\frac{\pi}{4}$

닫힌구간 $[0,\ \pi]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	-1

함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$에서 극대이므로 최댓값 s는 $\sqrt{2}$ 이고,

최솟값 t는 -1 이다.
따라서 $s-t=\sqrt{2}+1$

289. ①
함수 $f(x)=x\ln x$ 의 정의역은 $\{x|x>0\}$ 이다.
$f(x)=x\ln x$ 에서

$$f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}=1+\ln x$$

이므로 $f'(x)=0$ 에서

$\ln x=-1 \qquad \therefore\ x=e^{-1}=\frac{1}{e}$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 극솟값은 $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$

290. ③
$x=2e^t,\ y=3e^t\sin t$

$\frac{dx}{dt}=2e^t$

$\frac{dy}{dt}=3e^t\sin t+3e^t\cos t=3e^t(\sin t+\cos t)$

$t=\frac{\pi}{2}$ 를 대입하면

$\frac{dx}{dt}=2e^{\frac{\pi}{2}},\ \frac{dy}{dt}=3e^{\frac{\pi}{2}}$
따라서 점 P의 속력은

$\sqrt{4e^\pi+9e^\pi}=\sqrt{13}e^{\frac{\pi}{2}}$

291. ①
시각 $t\ (t>0)$ 에서의 점 P 의 위치 $(x,\ y)$ 가
$x=t+\ln t^2=t+2\ln t,\ y=t^2+\ln t$
이므로 미분하면
$\frac{dx}{dt}=1+\frac{2}{t},\ \frac{dy}{dt}=2t+\frac{1}{t}$
따라서 점 P 의 시각 $t=1$ 에서의 속도는
$\left(1+\frac{2}{1},\ 2\times1+\frac{1}{1}\right)$, 즉 $(3,\ 3)$
이므로 점 P 의 시각 $t=1$ 에서의 속력 v 는
$v=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$
$\therefore\ v^2=18$

292. ①
$t^2-2t=8,\ t=4\ (t>0)$
$\frac{4}{2}+\frac{a}{4}=3,\quad a=4$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{4}{t^2}}{2t-2}=\frac{\frac{1}{4}}{6}=\frac{1}{24}$$

293. $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2e}{3}$
양변을 미분하면
$\frac{2y'}{y}+\frac{y-xy'}{y^2}=0$ 곧, $y'=\frac{y}{x-2y}=\frac{e}{-3e}=-\frac{1}{3}$

접선의 방정식은 $y=-\frac{1}{3}(x+e)+e$

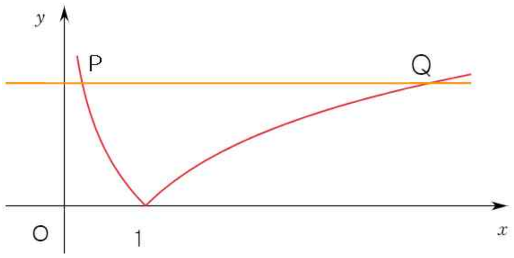
$y=-\frac{1}{3}x+\frac{2e}{3}$

294. ②
$y=m(x-n),\ y=(2x-1)e^x$ 가 접하므로
$y=y \quad : \ m(x-n)=(2x-1)e^x$
$y'=y' \quad : \quad m=(2x+1)e^x$
두 식을 연립하면
$(2x^2-(2n+1)x-n+1)e^x=0$
$2x^2-(2n+1)x-n+1=0$이 실근을 가져야 하므로
$D=(2n+1)^2+8(n-1)\ge 0$
$4n^2+12n-7\ge 0,\ (2n+7)(2n-1)\ge 0$
$n\le-\frac{7}{2}$, 음의 정수 n의 최댓값은 -4

295. ③
$f(x)=\sin 2x$
$f'(x)=2\cos 2x$
$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\frac{\pi}{3}=1$ 이므로 $\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y = x - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

296. ②



$f(x) = \begin{cases} -\ln x & (0 < x < 1) \\ \ln x & (1 < x) \end{cases}$

이므로 두 점 P, Q의 x좌표는 각각 e^{-t}와 $e^{t}(t > 0)$이다.

$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & (0 < x < 1) \\ \frac{1}{x} & (x \geq 1) \end{cases}$

이므로 $m_Q = e^{-t}$, $m_P = e^{t}$이다.

$m_Q - m_P = e^{-t} + e^{t} = \frac{5}{2}$, $e^{t} = 2$ 또는 $e^{t} = \frac{1}{2}$이다,

따라서 $t = \ln 2 (> 0)$

297. ④

$\ln x = -t$에서 $x = e^{-t}$

$P(e^{-t}, -t)$

$\ln x = t$에서 $x = e^{t}$

$Q(e^{t}, t)$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ 이므로 $m_P = \frac{1}{e^{-t}} = e^{t}$, $m_Q = \frac{1}{e^{t}}$

$e^{t} + \frac{1}{e^{t}} = \frac{17}{4}$

$4(e^{t})^2 - 17e^{t} + 4 = 0$

$(4e^{t} - 1)(e^{t} - 4) = 0$

$t > 0$ 이므로 $e^{t} = 4$

$\therefore \ t = \ln 4 = 2\ln 2$

298. $\frac{1}{2}$

직선 $y = a_n x$와 점 $(2n, 0)$사이의 거리가 1이므로

$1 = \frac{2na_n}{\sqrt{a_n^2 + 1}}$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1}} (> 0)$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$

$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$

$= \frac{1}{2}$

299. ①

$y' = -2xe^{-x^2}$이므로

$y = e^{-x^2}$ 위의 점 (t, e^{-t^2})에서의 접선의 방정식은

$y = -2te^{-t^2}(x - t) + e^{-t^2}$

$y = -2te^{-t^2}x + (2t^2 + 1)e^{-t^2}$

$(k, 0)$을 지나므로 $(2t^2 - 2kt + 1)e^{-t^2} = 0$

$2t^2 - 2kt + 1 = 0$

오직 하나의 접선을 그을 수 있으므로

$D/4 = k^2 - 2 = 0$

$k = \sqrt{2}$ 또는 $k = -\sqrt{2}$

따라서 만족하는 k의 값의 곱은 -2

300. ①

점 (t, e^{t})에서의 접선은

$y = e^{t}(x - t) + e^{t}$이므로 $P(t-1, 0)$, $Q(0, e^{t}(1-t))$

삼각형 OPQ의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t) = \frac{1}{2}e^{t}(1-t)^2 (t < 0)$

$S'(t) = \frac{1}{2}e^{t}(t^2 - 1)$이므로 $t = -1$일 때 극대이면서 최대

따라서 넓이의 최댓값은 $S(-1) = \frac{1}{2}e^{-1} \times 4 = \frac{2}{e}$

301. ④

$f(x) = xe^{-x}$라 하면

$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$

$f''(x) = -e^{-x} + (x-1)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$

$f''(2) = 0$, $f(2) = 2e^{-2}$이므로

변곡점의 좌표는 $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$

302. ①

$g(x) = f(-x-2) = (-x-2)e^{-ax-2a}$

$g'(x) = (ax + 2a - 1)e^{-ax-2a}$

$g''(x) = (-a^2x - 2a^2 + 2a)e^{-ax-2a} = 0$

$x = 2 - \frac{2}{a} = -3$, 곧 $a = \frac{2}{5}$

$f'(x) = (ax+1)e^{ax}$

$f''(x) = (a^2x + 2a)e^{ax} = 0$

$x = -\frac{2}{a} = -5 = b$

$ab = -2$

303. ①

$f(x) = (x^3 - 2x^2 - x + 8)e^{-x}$ 에서

$f'(x) = (3x^2 - 4x - 1)e^{-x} - (x^3 - 2x^2 - x + 8)e^{-x}$

$=-(x^3-5x^2+3x+9)e^{-x}$

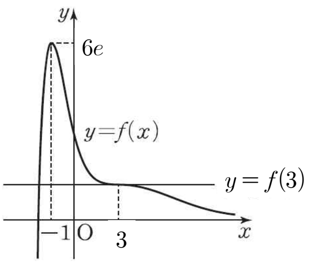
$=-(x+1)(x-3)^2e^{-x}$

이므로 $f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

그러므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘		↘

이때 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



이때 함수 $y=|f(x)-f(k)|$ 의 그래프는 $y=f(x)$ 를 y축 방향으로 $-f(k)$ 만큼 평행이동 후, x축 아랫부분을 접어올린 것이다.

그러므로 곡선 $y=f(x)-f(k)$ 가 x축과 $x=\alpha$ 에서 만날 때 $f'(\alpha)=0$ 이면 함수 $|f(x)-f(k)|$ 는 $x=\alpha$ 에서 미분가능하고, $f'(\alpha)\neq0$ 이면 함수 $|f(x)-f(k)|$ 는 $x=\alpha$ 에서 미분가능하지 않다.

따라서 함수 $|f(x)-f(k)|$ 가 $x=\alpha$ 에서 미분가능하지 않은 실수 α 의 개수 a_k 는

$$a_k=\begin{cases}1 & (k=3)\\ 2 & (k\neq3)\end{cases}\ (\text{단, } k=1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{10}ka_k=\sum_{k=1}^{10}2k-3=107$$

[보충 풀이]

$$\sum_{k=1}^{10}ka_k=1a_1+2a_2+3a_3+\sum_{k=4}^{10}ka_k$$

$$=1\times2+2\times2+3\times1+\sum_{k=4}^{10}2k$$

$$=9+2(4+5+\cdots+10)$$

$$=9+2\times\frac{7(4+10)}{2}$$

$$=107$$

304. ③

$f(x)=2x-x\ln x$라 하면

$f'(x)=2-\ln x-1=0$

$f(x)$는 $x=e$에서 최댓값 e를 가지므로 k의 최솟값은 e

305. $\frac{4}{e}$

$y'=-2e^{-x}=-2e^{-t}$

접선의 방정식은 $y=-2e^{-t}(x-t)+2e^{-t}$

x절편은 $(t+1,\ 0)$ y절편은 $\left(0,\ (2t+2)e^{-t}\right)$

넓이 $S(t)=\frac{1}{2}(t+1)(2t+2)e^{-t}=(t+1)^2e^{-t}$

$S'(t)=(-t^2+1)e^{-t}=0$에서 $t=1$일 때 넓이가 최대이다.

최댓값은 $\frac{4}{e}$

306. ⑤

점 P의 좌표를 $\left(t,\ \frac{1}{t}\right)$이라 하면

선분 AP의 길이가 최소가 되는 점 P는 제 1사분면에 있으므로 $t>0$

$f(t)=\overline{\mathrm{AP}}^2$이라 하면

$$f(t)=(t-6)^2+\left(\frac{1}{t}-6\right)^2=t^2-12t+\frac{1}{t^2}-\frac{12}{t}+72$$

$$f'(t)=2t-12-\frac{2}{t^3}+\frac{12}{t^2}=\frac{2(t-1)(t+1)(t^2-6t+1)}{t^3}$$

$t>0$일 때, $f'(t)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=3\pm2\sqrt{2}$

x	(0)	$\cdots$	$3-2\sqrt{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$3+2\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	34	↗	50	↘	34	

따라서 함수 $f(t)$의 최솟값은 34이므로 $\alpha^2=34$

$a>b$이므로 이때 P의 좌표는 $(3-2\sqrt{2},\ 3+2\sqrt{2})$이므로

$a+b=6$

그러므로 $\alpha^2+a+b=40$

307. ④

$f(x)=e^{-x}(\ln x-3)\ (x>1)$

$$f'(x)=-e^{-x}(\ln x-3)+e^{-x}\cdot\frac{1}{x}=e^{-x}\left(-\ln x+3+\frac{1}{x}\right)$$

$x>1$일 때 $e^{-x}>0$이므로

$g(x)=-\ln x+3+\frac{1}{x}$라 하면

$g(x)=0$ 이고 부호가 바뀔 때 극값을 갖는다.

$g(1)=3+1=4>0$

$g(e)=2+\frac{1}{e}>0$

$g(e^2)=1+\frac{1}{e^2}>0$

$g(3)=\frac{1}{e^3}>0$

$g(4)=-1+\frac{1}{e^4}<0$

$g(5)=-2+\frac{1}{e^5}<0$

따라서 열린구간 $(e^3,\ e^4)$에서 극값을 갖는다.

308. ③

$$f(x)=\begin{cases}\ln(1+2\cos x) & \left(0<x<\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi<x<2\pi\right)\\ \ln(1-2\cos x) & \left(\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3}{2}\pi\right)\end{cases}$$

이므로

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{-2\sin x}{1+2\cos x} & \left(0<x<\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi<x<2\pi\right)\\ \frac{2\sin x}{1-2\cos x} & \left(\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi\right)\end{cases}$$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=0$이므로 $x=\pi$

$0<x<2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	(2π)
$f'(x)$		$-$	×	$+$	0	$-$	×	$+$	
$f(x)$		↘	0	↗	$\ln 3$	↘	0	↗	

함수 $f(x)$는 $x=\pi$에서 연속이고 미분가능하며 극대이다.

또, $x=\frac{\pi}{2}$와 $x=\frac{3}{2}\pi$에서는 연속이고 미분가능하지 않다.

이때

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}f'(x)=-2<0,\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}f'(x)=2>0$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 극소이다. 마찬가지로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{3}{2}\pi$에서도 극소이다.

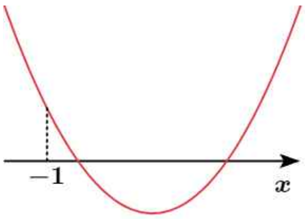
따라서 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 갖도록 하는 모든 서로 다른 실수 a의 값의 개수는 3이다.

309. ③

$f(x)=x^2+a\ln(x+1)\quad(x>-1)$

$f'(x)=2x+\frac{a}{x+1}=\frac{2x^2+2x+a}{x+1}$

$g(x)=2x^2+2x+a$라 하면 $f(x)$ 극값의 개수가 2개 존재하는 조건은 $x>-1$에서 $g(x)=0$의 근의 개수가 2개일 때이다.



i) $D/4=1-2a>0$

$a<\frac{1}{2}\ \cdots①$

ii) $g(x)=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+a-\frac{1}{2}$

축의 방정식 $x=-\frac{1}{2}>-1$이므로 성립

iii) $g(-1)=2-2+a>0$

$a>0\ \cdots②$

i), ii), iii)에 의해 $0<a<\frac{1}{2}$

310. ①

$f'(x)=(-x^2+(-2a+2)x+5a+1)e^{-x}\le 0$ 이어야 하므로

모든 실수 x에 대하여 $x^2+(2a-2)x-5a-1\ge 0$

$D/4=(a-1)^2+5a+1=a^2+3a+2\le 0$

$(a+2)(a+1)\le 0$

$-2\le a\le -1$

정수 a값의 합은 -3

311. ③

$f'(x)=2x+2\ln x+2,\ f''(x)=2+\frac{2}{x}$

ㄱ. $f'(e)=2e+2+2=2e+4$이므로 참.

ㄴ. $x>0$일 때 $f''(x)>0$이므로 $f'(x)$는 증가함수이므로 참.

ㄷ. $f'(e^{-2})=2e^{-2}-2=2\left(\frac{1}{e^2}-1\right)<0,\ f'(e)=2e+4>0$

이므로 극솟값을 갖는 c가 열린구간 $(e^{-2},\ e)$에 존재하므로 거짓.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

312. ②

함수 $f(x)=x^2\ln\frac{1}{x}=-x^2\ln x$는 닫힌구간 $\left[\frac{1}{e},\ e\right]$에서 연속이고 미분가능하다.

$f'(x)=-2x\ln x-x^2\times\frac{1}{x}$

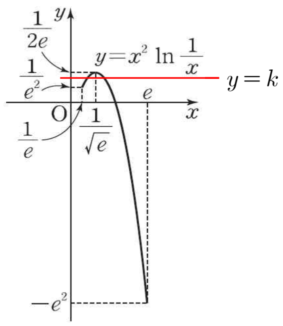
$=-x(2\ln x+1)\ \left(\frac{1}{e}<x<e\right)$

이므로 $f'(x)=0$에서

$\ln x=-\frac{1}{2}\qquad\therefore\ x=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$

닫힌구간 $\left[\frac{1}{e},\ e\right]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\cdots$	e
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{e^2}$	↗	$\frac{1}{2e}$	↘	$-e^2$



따라서 닫힌구간 $\left[\frac{1}{e},\ e\right]$에서 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 k값의 범위는

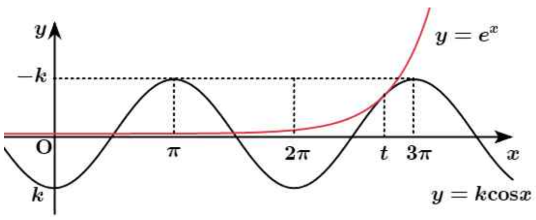
$\frac{1}{e^2}\le k<\frac{1}{2e}$ 이다.

그러므로 구하는 값은 $\frac{q}{p}=\frac{\frac{1}{2e}}{\frac{1}{e^2}}=\frac{e}{2}$

313. ⑤

$k<0$이고 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3이므로

$y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



$x=t$에서 두 그래프가 접한다고 하면

$k\cos t=e^t$ $\cdots$①

$-k\sin t=e^t$ $\cdots$②

②÷①하면 $\tan t=-1$

위 그래프에서 $2\pi<t<3\pi$ 이므로 $t=2\pi+\frac{3}{4}\pi=\frac{11}{4}\pi$

$\cos\frac{11}{4}\pi=\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

①에 대입하면

$k=-\sqrt{2}\,e^{\frac{11}{4}\pi}$

314. ②

$$|\ln 4x|=\begin{cases}-\ln 4x & \left(0<x<\frac{1}{4}\right)\\ \ln 4x & \left(x\ge\frac{1}{4}\right)\end{cases}$$

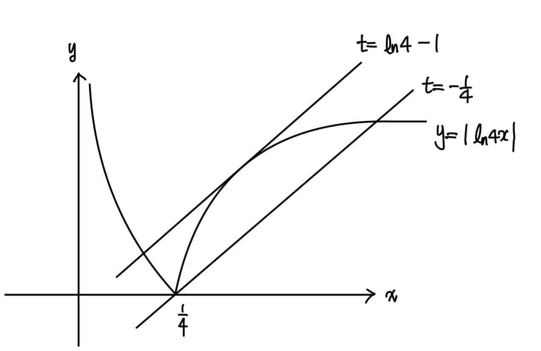
직선 $y=x+t$가 함수 $y=|\ln 4x|$의 그래프와 접할 때, 접점의 x좌표를 구해보자.

$x\ge\frac{1}{4}$일 때, $y=\ln 4x$에서 $y'=\frac{1}{x}$이므로 곡선 $y=\ln 4x$ 위의 점 $(a,\ \ln 4a)$에서의 접선의 기울기가 1이 되도록 하는 a의 값은 $\frac{1}{a}=1$이므로 $a=1$

즉 직선 $y=x+t$가 곡선 $y=\ln 4x\left(x\ge\frac{1}{4}\right)$ 위의 점 $(1,\ \ln 4)$에서 접하므로 $\ln 4=1+t,\ t=\ln 4-1$

한편, $0<x<\frac{1}{4}$일 때, $y=-\ln 4x$에서 $y'=-\frac{1}{x}$이므로 접선의 기울기가 1이 되도록 하는 곡선 $y=-\ln 4x\left(0<x<\frac{1}{4}\right)$ 위의 점은 존재하지 않는다.

그러므로 실수 t의 값의 범위에 따른 함수 $f(t)$는 다음과 같다.



$$f(t)=\begin{cases}1 & \left(t<-\frac{1}{4}\ \text{또는}\ t>\ln 4-1\right)\\ 2 & \left(t=-\frac{1}{4}\ \text{또는}\ t=\ln 4-1\right)\\ 3 & \left(-\frac{1}{4}<t<\ln 4-1\right)\end{cases}$$

따라서 $\lim_{t\to a+}f(t)\ne\lim_{t\to a-}f(t)$를 만족시키는 a의 값은 $t=-\frac{1}{4}$ 또는 $t=\ln 4-1$이므로 그 합은 $\ln 4-\frac{5}{4}$

그러므로 $\alpha+p+q$의 값은 $4+4+5=13$

315. ⑤

$f'(x)=1+2\cos x=0$

$x=\frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3}$

$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3},\ f\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$

$\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}<k<\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}$

$\alpha+\beta=2\pi$

316. ②

$x^2-3+ke^{-x}\le 0$에서 $k\le(-x^2+3)e^x$

$x\le 0$일 때 항상 성립하므로

$f(x)=(-x^2+3)e^x$라 하면

$x\le 0$에서 $k\le(f(x)$의 최솟값)을 만족하면 된다.

$f'(x)=(-2x)e^x+(-x^2+3)e^x$

$=-(x^2+2x-3)e^x$

$=-(x+3)(x-1)e^x$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

$x\le 0$일 때 $y=f(x)$는 $x=-3$에서 최솟값을 갖는다.

$f(-3)=-6e^{-3}$이므로 k의 최댓값은 $-6e^{-3}$

$a=-6,\ b=-3$

$\therefore\ a-b=-3$

317. ⑤

$ae^x\le x^2+e^x\le be^x,\ a\le x^2e^{-x}+1\le b$

$f(x)=x^2e^{-x}+1$라고 하자.

$f'(x)=xe^{-x}(2-x)$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0
$f(x)$	$e+1$	↘	1	↗	$4e^{-2}+1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 $e+1$,

$x=0$일 때 최솟값 1을 가지므로

$-1\le x\le 2$인 모든 실수 x에 대하여 $1\le x^2e^{-x}+1\le e+1$

즉, $a\le 1,\ b\ge e+1$이므로

$b-a$의 최솟값은 $e+1-1=e$

318. ③

점 Q의 시각 $t=0$에서의 위치를 c라 하면 점 Q의 시각

t에서의 위치 x는 $x=c+\int_0^t 2dt=c+[2t]_0^t=2t+c$

점 P의 시각 t에서의 위치를 $(x,\ y)$라 하면

$x=2t+c,\ y=\sin(2t+c)+2$

이때, $\frac{dx}{dt}=2,\ \frac{dy}{dt}=2\cos(2t+c)$이므로 시각 t에서 점 P의

속도의 크기는 $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=2\sqrt{1+\cos^2(2t+c)}$

따라서 $0\le cos^2(2t+c)\le 1$이므로 점 P의 속도의 크기의

최댓값은 $2\sqrt{2}$, 최솟값은 2이다.

$ab=2\sqrt{2}\times 2=4\sqrt{2}$

319. ④

사다리의 아래 끝의 좌표를 $(x,\ 0)$, 사다리의 위쪽 끝의

좌표를 $(0,\ y)$라 하면 $x^2+y^2=a^2$이고 양변을 시간 t로

미분하면

$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0$에서 $x=-5,\ \frac{dx}{dt}=-2,\ \frac{dy}{dt}=-\frac{5}{6}$이므로

$y=12$이다.

따라서 $a^2=5^2+12^2=13^2$, 곧 $a=13$

320. ①

$|v|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)^2+\left(1-\frac{2}{t}\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{4}$

321. 속도의 크기$=3\sqrt{2}$, 가속도의 크기$=\sqrt{5}$

속도는 $\left(1+\frac{2}{t},\ 2t+\frac{1}{t}\right)$이므로 $t=1$을 대입하면 $(3,\ 3)$이다.

그러므로 속도의 크기는 $\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$

가속도는 $\left(-\frac{2}{t^2},\ 2-\frac{1}{t^2}\right)$이므로 $t=1$을 대입하면 $(-2,\ 1)$이다.

그러므로 가속도의 크기는 $\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$

322. ②

시각 $t=0$일 때의 점 P의 위치가 $(0,\ 0)$이므로

$0=k-\cos 0=k-1$에서 $\therefore\ k=1$

점 P가 다시 원점을 지날 때는

$1-\cos t=0$이고 $2\sin t=0$

즉, $\cos t=1$이고 $\sin t=0$이므로 $t=2n\pi$ (n은 자연수)

그러므로 $t_1=2\pi,\ t_2=4\pi$ …… ㉠

$x=1-\cos t,\ y=2\sin t$에서

$$\frac{dx}{dt}=\sin t,\ \frac{dy}{dt}=2\cos t$$

이므로 시각 t $(t>0)$에서의 점 P의 속도는 $(\sin t,\ 2\cos t)$

속력$=\sqrt{\sin^2 t+4\cos^2 t}=\sqrt{1+3\cos^2 t}$

한편,

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\cos t,\ \frac{d^2y}{dt^2}=-2\sin t$$

이므로 시각 t $(t>0)$에서의 점 P의 가속도는

$(\cos t,\ -2\sin t)$

가속도의 크기$=\sqrt{\cos^2 t+4\sin^2 t}=\sqrt{1+3\sin^2 t}$

$t_1<t<t_2$에서 점 P의 속력과 가속도의 크기가 서로 같은

시각은

$$\sqrt{1+3\cos^2 t}=\sqrt{1+3\sin^2 t}$$

에서 $\cos^2 t=\sin^2 t$이므로 $\cos t\ne 0$이고

$$\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}=\tan^2 t=1$$

그러므로 $\tan t=-1$ 또는 $\tan t=1$

㉠에 의해 $t_1<t<t_2$, 즉 $2\pi<t<4\pi$에서 점 P의 속력과

가속도의 크기가 서로 같은 시각 t는

$$2\pi+\frac{\pi}{4},\quad 2\pi+\frac{3}{4}\pi,\quad 3\pi+\frac{\pi}{4},\quad 3\pi+\frac{3}{4}\pi$$

의 4개이므로 t값의 합은 $m=12\pi$

따라서 $k\times m=1\times 12\pi=12\pi$

323. ③

$x=k+\cos t,\ y=2\sin t$

점 P가 $t=0$일 때 원점을 지나므로

$k+\cos 0=k+1=0$

$\therefore\ k=-1$

$x=-1+\cos t,\ y=2\sin t$

다시 원점을 지날 때

$-1+\cos t=0,\ \sin t=0$을 만족하므로

$t=2n\pi$ (n은 자연수)

$t_1=2\pi,\ t_3=6\pi$

$\frac{dx}{dt}=-\sin t,\ \frac{dy}{dt}=2\cos t$

(속력)$=\sqrt{\sin^2 t+4\cos^2 t}=\sqrt{1+3\cos^2 t}$

$\frac{d^2x}{dt^2}=-\cos t,\ \frac{d^2y}{dt^2}=-2\sin t$

(가속도의 크기)$=\sqrt{\cos^2 t+4\sin^2 t}=\sqrt{1+3\sin^2 t}$

속력과 가속도의 크기가 서로 같은 시각 t를 구하면

$\sqrt{1+3\cos^2 t}=\sqrt{1+3\sin^2 t}$

$\sin^2 t=\cos^2 t$

$\tan^2 t=1$

$2\pi<t<6\pi$일 때 $\tan^2 t=1$를 만족하는 t의 값은

$t=\frac{9\pi}{4},\ \frac{11\pi}{4},\ \frac{13\pi}{4},\ \frac{15\pi}{4},\ \frac{17\pi}{4},\ \frac{19\pi}{4},\ \frac{21\pi}{4},\ \frac{23\pi}{4}$

$m=8$

$\therefore\ k+m=-1+8=7$

324. ①

ㄱ. 점 P의 속력은

$|v|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(1+\sin t)^2+(-\cos t)^2}=\sqrt{2+2\sin t}$

$t=\frac{\pi}{2}$일 때 최대이고,

$|a|=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=\sqrt{(\cos t)^2+(\sin t)^2}=1$이다. (거짓)

ㄴ. $t=\frac{3\pi}{2}$에서 점 P의 속력이 처음으로 0이 되고, 이때 R의 좌표는 $(0,\ 1)$이다. (참)

ㄷ. 점 Q는 x축 위에서 움직이며 좌표는 $x=t-\cos t$이므로 속도는 $v_x=1+\sin t$이고 속력은

$f(t)=|1+\sin t|=1+\sin t$이다. 또, 점 R은 y축 위에서 움직이며 좌표는 $y=-\sin t$이므로 속도는 $v_y=-\cos t$이고

속력은 $g(t)=|-\cos t|=|\cos t|$이다. 따라서 $0<x<\pi$에서 $f(t)>g(t)$이고 $\pi\le x<2\pi$에서 $f(t)\le g(t)$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ 뿐이다.

325. (1) $\{x\,|\,x<0\}$ (2) 미분불가능 (3) -2

풀이)

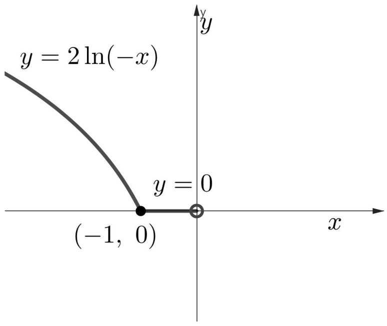
(1) 함수 $f(x)=\ln|x|\,|\ln(-x)|$의 정의역은 $\{x\,|\,x<0\}$

$-1<x<0$이면 $\ln|x|=\ln(-x),\ \ln(-x)<0$이므로

$f(x)=\ln(-x)-\ln(-x)=0$

$x\le-1$이면 $\ln|x|=\ln(-x),\ \ln(-x)\ge 0$이므로

$f(x)=\ln(-x)+\ln(-x)=2\ln(-x)$



(2) $p(x)=\ln|x|,\ q(x)=|\ln(-x)|$라 하자.

$h\to0+$일 때

$\ln(1-h)<0<\ln(1+h)$ 이므로

$q(-1+h)=|\ln(1-h)|$

$=-\ln(1-h)$

$q(-1-h)=|\ln(1+h)|$

$=\ln(1+h)$

그러므로

$\lim_{h\to0+}\frac{q(-1+h)-q(-1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0+}\frac{-\ln(1-h)-\ln(1+h)}{h}$

$=\lim_{h\to0+}\frac{\ln(1-h)(1+h)}{-h}$

$=\lim_{h\to0+}\left\{\frac{\ln(1-h^2)}{-h^2}\times h\right\}$

$=\lim_{h\to0+}\frac{\ln(1-h^2)}{-h^2}\times\lim_{h\to0+}h$

$=1\times0$

$=0$

$\lim_{h\to0-}\frac{f(-1+h)-f(-1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0-}\frac{2\ln(1-h)-0}{h}$

$=-2\lim_{h\to0-}\frac{\ln(1-h)}{-h}$

$=-2\times1$

$=-2$

미분 불가능 하다.

(3) $h\to0+$일 때

$\lim_{h\to0+}\frac{f(-1+h)-f(-1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0+}\frac{0-2\ln(1+h)}{h}$

$=-2\lim_{h\to0+}\frac{\ln(1+h)}{h}$

$=-2\times1$

$=-2,$

또한 $h\to0-$일 때

$\ln(1+h)<0<\ln(1-h)$

이므로

$q(-1+h)=|\ln(1-h)|$

$=\ln(1-h)$

$q(-1-h)=|\ln(1+h)|$

$=-\ln(1+h)$

그러므로

$\lim_{h\to0-}\frac{q(-1+h)-q(-1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0-}\frac{\ln(1-h)+\ln(1+h)}{h}$

$=\lim_{h\to0-}\frac{\ln(1-h)(1+h)}{h}$

$=\lim_{h\to0-}\left\{\frac{\ln(1-h^2)}{-h^2}\times(-h)\right\}$

$=\lim_{h\to0-}\frac{\ln(1-h^2)}{-h^2}\times\lim_{h\to0-}(-h)$

$=1\times0$

$=0$

다음에서

$\lim_{h\to0+}\frac{q(-1+h)-q(-1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0-}\frac{q(-1+h)-q(-1-h)}{h}=0$

이므로

$\lim_{h\to0}\frac{q(-1+h)-q(-1-h)}{h}=0$

$f(x)=p(x)+q(x)$이므로

$\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{p(-1+h)+q(-1+h)-\{p(-1-h)+q(-1-h)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{p(-1+h)-p(-1-h)+\{q(-1+h)-q(-1-h)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{p(-1+h)-p(-1-h)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{q(-1+h)-q(-1-h)}{h}$

$=-2+0$

$=-2$

326. ⑤

$y'=-\frac{1}{e^x}$이므로

$y=\frac{1}{e^x}+t$ 위의 점 $\left(s,\ \frac{1}{e^s}+t\right)$에서의 접선의 방정식은

$y=-\frac{1}{e^s}(x-s)+\frac{1}{e^s}+t$

$y=-\frac{1}{e^s}x+(s+1)\frac{1}{e^s}+t$

$(0,\ 0)$을 대입하면

$t=-(s+1)\frac{1}{e^s}$ ⋯①

직선의 기울기를 $f(t)$라 하면

$f(t)=-\frac{1}{e^s}$ ⋯②

$t=t_1$일 때 $f(t_1)=-\frac{1}{e^s}=-\sqrt{e}$이므로 $s=-\frac{1}{2}$ ⋯③

①에 의해

$t_1=-\left(-\frac{1}{2}+1\right)\sqrt{e}=-\frac{1}{2}\sqrt{e}$

①에서 $\frac{dt}{ds}=-\frac{1}{e^s}+(s+1)\frac{1}{e^s}=\frac{s}{e^s}$ ⋯④

②에서 $f'(t)\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{1}{e^s}$

④를 대입하면 $f'(t)\cdot\frac{s}{e^s}=\frac{1}{e^s}$

$\therefore\ f'(t)=\frac{1}{s}$

③에 의해 $f'(t_1)=-2$이므로

$\therefore\ 6\times|f'(t_1)|=6\times2=12$

[다른 풀이]

$f(t)=-e^{-s}$이므로 $e^{-s}=-f(t)$이고 $s=-\ln\{-f(t)\}$

이것을 $t=-(s+1)e^{-s}$에 대입하면

$t=[-\ln\{-f(t)\}+1]\times f(t)$

양변을 미분하면

$1=-\frac{f'(t)}{f(t)}\times f(t)+[-\ln\{-f(t)\}+1]\times f'(t)$

$1=-f'(t)+[-\ln\{-f(t)\}+1]\times f'(t)$

$1=-\ln\{-f(t)\}\times f'(t)$

$t=t_1$일 때 $f(t_1)=-\sqrt{e}$이므로

$1=-\ln\sqrt{e}\times f'(t_1)=-\frac{1}{2}\times f'(t_1)$

$\therefore\ f'(t_1)=-2$

327. ④

$f(x)=-\sin 2x+k\cos x$ (단, $0<x<2\pi$)
$f'(x)=-2\cos 2x-k\sin x$
$f''(x)=4\sin 2x-k\cos x=\cos x(8\sin x-k)$
$=8\cos x\left(\sin x-\frac{k}{8}\right)$
$-10\le k\le 10$이므로 k의 범위에 따라 나누어 구하면
i) $-10\le k\le -8$일 때
항상 $8\sin x-k\ge 0$이므로 $\cos x=0$일 때
즉, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3\pi}{2}$일 때 변곡점이다.
따라서 변곡점의 개수가 2개(짝수)이므로 성립한다.
ii) $-8<k<0$일 때
$\cos x=0$일 때 즉, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3\pi}{2}$일 때 변곡점이고,
$\sin x=\frac{k}{8}$일 때 변곡점이다.
$0<x<2\pi$이므로 $\sin x=\frac{k}{8}$을 만족하는 x의 값은 2개
따라서 변곡점의 개수가 4개(짝수)이므로 성립한다.
iii) $k=0$일 때
$f(x)=-\sin 2x$
$f'(x)=-2\cos 2x$
$f''(x)=4\sin 2x$
$4\sin 2x=0$
$0<x<2\pi$이므로 $x=\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}\pi$일 때 변곡점이다.
변곡점의 개수가 홀수이므로 성립하지 않는다.
iv) $0<k<8$일 때
$\cos x=0$일 때 즉, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3\pi}{2}$일 때 변곡점이고,
$\sin x=\frac{k}{8}$일 때 변곡점이다.
$0<x<2\pi$이므로 $\sin x=\frac{k}{8}$을 만족하는 x의 값은 2개
따라서 변곡점의 개수가 4개(짝수)이므로 성립한다.
v) $8\le k\le 10$일 때
항상 $8\sin x-k\le 0$이므로 $\cos x=0$일 때
즉, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3\pi}{2}$일 때 변곡점이다.
따라서 변곡점의 개수가 2개(짝수)이므로 성립한다.
i), ii), iii), iv), v)에 의해 만족하는 정수 k의 개수는 20개

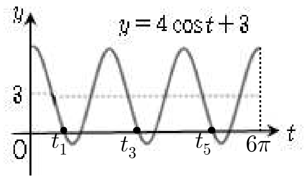
328. ②
양변을 미분하면
$4x-y-xy'+2yy'=0$에서 $y'=\frac{4x-y}{x-2y}$ $(x-2y\ne 0)$이므로
$y_1{}'=\frac{4\alpha-k}{\alpha-2k}$, $y_2{}'=\frac{4\beta-k}{\beta-2k}$, $y_1{}'\times y_2{}'=-1$
$2x^2-kx+k^2-9=0$의 두 근이 α, β이다.
$\alpha+\beta=\frac{k}{2}$, $\alpha\beta=\frac{k^2-9}{2}$
$\frac{4\alpha-k}{\alpha-2k}\times\frac{4\beta-k}{\beta-2k}=-1$을 정리하면
$17\alpha\beta-6k(\alpha+\beta)+5k^2=0$
$\frac{17}{2}(k^2-9)-3k^2+5k^2=0$, $k^2=\frac{51}{7}$
$\alpha\beta=\frac{k^2-9}{2}=-\frac{6}{7}$

329. ③
ㄱ. $g(2)=f(f(2))=f(4)=2$이므로 존재한다. (참)
ㄴ. $g'(x)=f'(f(x))f'(x)$
$2<f(1)<4$에서 $f'(f(1))<0$ 이고 $f'(1)>0$이므로
$g'(1)=f'(f(1))f'(1)<0$ (거짓)
ㄷ. $g'(4^+)=f'(f(4^+))f'(4^+)=f'(2^+)f'(4^+)<0$
$g'(5^-)=f'(f(5^-))f'(5^-)=f'(5^-)f'(5^-)>0$
이므로 $g(x)$는 열린구간 $(4,\ 5)$에서 극값을 갖는다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

330. ④
$g'(x)=f'(x)\{3+4\cos f(x)\}=0$이 되는 x는 13개다.
$0<x<1$에서 $0<f(x)<6\pi$이고 $3+4\cos f(x)=0$의 해는 6개다.
이 중 3개는 극대이고 3개는 극소이다.
$x=1$에서 $f'(x)=0$이고 극소가 된다.
$1<x<2$에서 $0<f(x)<6\pi$이고 $3+4\cos f(x)=0$의 해는 6개다.
이 중 3개는 극대이고 3개는 극소이다.
따라서 총 6개다.

[보충 풀이]
$f(x)=6\pi(x-1)^2$에 대하여 $f'(x)=12\pi(x-1)$,
$g(x)=3f(x)+4\sin f(x)$에 대하여
$g'(x)=3f'(x)+4f'(x)\cos f(x)$
$=f'(x)\{4\cos f(x)+3\}$
이므로 $g'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $\cos f(x)=-\frac{3}{4}$
(i) $x=1$일 때
$4\cos f(1)+3=4\cos 0+3=7$이므로 $x=1$ 근방에서 $\{4\cos f(x)+3\}$의 값이 양수이다. 이때 $x=1$의 좌우에서 $f'(x)=12\pi(x-1)$의 값은 음에서 양으로 바뀌므로 $g'(x)=f'(x)\{4\cos f(x)+3\}$의 값도 음에서 양으로 바뀐다.
따라서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극소이다.
(ii) $1<x<2$일 때
$f'(x)=12\pi(x-1)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(1,\ 2)$에서 0에서 6π까지 증가한다. 즉, $f(x)=t$라 하면 x값이 1에서 2까지 변화할 때 t값은 0에서 6π까지 증가한다.

이때 $y=4\cos t+3$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 $t=t_1$, t_3, t_5의 좌우에서 $\{4\cos t+3\}$의 값은 양에서 음으로 바뀐다.



함수 $f(x)$는 열린구간 $(1,\ 2)$에서 증가하는 함수이므로 $f(x)=t_1,\ t_3,\ t_5$ 인 x값은 각각 1개씩 있고 그 값을 α, β, γ라 하면 $x=\alpha, \beta, \gamma$의 좌우에서 $\{4\cos f(x)+3\}$의 값은 양에서 음으로 바뀐다. 그러므로 $g'(x)=f'(x)\{4\cos f(x)+3\}$의 값도 양에서 음으로 바뀐다. 따라서 $1<x<2$에서 함수 $g(x)$는 $x=\alpha, \beta, \gamma$에서 극대이므로 극대가 되는 x의 개수는 3이다.

(iii) $0<x<1$일 때

함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(1-x)=f(1+x)$가 성립한다.

이때

$$g(1-x)=3f(1-x)+4\sin f(1-x)$$
$$=3f(1+x)+4\sin f(1+x)$$
$$=g(1+x)$$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프도 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

따라서 $0<x<1$에서 함수 $g(x)$는 (ii)와 대칭인 x값에서 극대이므로 극대가 되는 x의 개수는 3이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 x의 개수는 $3+3=6$이다.

331. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$f(x)=e^{\sin x-\cos x}$

$f(2x)=e^{\sin 2x-\cos 2x}=h(x)$라 하면

$h'(x)=(2\cos 2x+2\sin 2x)e^{\sin 2x-\cos 2x}$이고

$h(x)=e^{\sin 2x-\cos 2x}=1$에서 $\sin 2x-\cos 2x=0$

$\tan 2x=1$ 즉, $x=\dfrac{\pi}{8}\ \left(-\dfrac{\pi}{8}<x<\dfrac{3\pi}{8}\right)$

$$g'(1)=\frac{1}{h'(g(1))}=\frac{1}{h'\left(\frac{\pi}{8}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

332. ⑤

$y=mx-1,\ y=xe^x+t$ 가 접하므로

$y=y \quad : \quad mx-1=xe^x+t$

$y'=y' \quad : \quad m=(x+1)e^x$

두 식을 연립하면

$x(x+1)e^x-1=xe^x+t$

$t=x^2e^x-1,\ \dfrac{dt}{dx}=(x^2+2x)e^x$

한편 $f(t)=\dfrac{1}{m}=\dfrac{1}{(x+1)e^x}=\dfrac{1}{2e}$에서 $x=1$

$$f'(t)=\frac{(-x-2)e^{-x}}{(x+1)^2}\times\frac{dx}{dt}=\frac{(-x-2)}{(x+1)^2e^x}\times\frac{1}{x(x+2)e^x}=-\frac{1}{x(x+1)^2e^{2x}}$$

$=-\dfrac{1}{4e^2}$

333. ④

$t^x=t^{-x}-\dfrac{8}{3}$

$3(t^x)^2+8(t^x)-3=0$

$t^x=\dfrac{1}{3}>0$

$x=\log_t\dfrac{1}{3}=-\dfrac{\ln 3}{\ln t}=f(t)$

$f(k)=-\dfrac{\ln 3}{\ln k}=\dfrac{1}{2}$에서 $k=\dfrac{1}{9}$

$f'(t)=\dfrac{\ln 3\times\frac{1}{t}}{(\ln t)^2}$, $f'(k)=\dfrac{9}{4\ln 3}$

$p+q=13$

334. ③

$f'(x)=2\cos x(1-2\sin^2 x)e^{\cos^2 x}=0$에서

$2\cos x(\cos 2x)e^{\cos^2 x}=0$

$\cos x=0$의 해는 $x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2}$

$\cos 2x=0$의 해는 $x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{4},\ \dfrac{5\pi}{4},\ \dfrac{7\pi}{4}$

이므로 집합 A의 원소 t는 다음과 같다.

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$
t	$\sqrt{2e}$	2	$\sqrt{2e}$	$-\sqrt{2e}$	-2	$-\sqrt{2e}$

$A=\{-\sqrt{2e},\ -2,\ 2,\ \sqrt{2e}\}$

집합 A의 모든 원소의 곱은 $8e$

335. ③

문제의 조건을 만족하려면

$f'(x)=3x^2-6x+a=0$이 중근을 가져야 하므로

$D/4=9-3a=0$ 곧, $a=3$

$f'(x)=3(x-1)^2=0$의 근 $x=1$이므로

$f(1)=b=5$

$$g'(-3)=\frac{1}{f'(f^{-1}(-3))}=\frac{1}{f'(-1)}=\frac{1}{12}$$

336. ⑤

$h(x)=-a\{\log_{16}(x+1)\}^2+a$라 하면

$h'(x)=-a\times 2\log_{16}(x+1)\times\{\log_{16}(x+1)\}'$

$=\dfrac{-2a\log_{16}(x+1)}{(x+1)\ln 16}$

이므로 $h'(x)=0$에서 $\log_{16}(x+1)=0$ 즉, $x=0$

$a>0$ 이므로 $h'(x)$의 부호는 $x=0$의 좌우에서 양에서 음으로 바뀐다.
그러므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 $f(0)=h(0)=a$를 갖고,

$$\lim_{x\to 15-} f(x)=\lim_{x\to 15-}\left[-a\{\log_{16}(x+1)\}^2+a\right]=0$$

$$\lim_{x\to 15+} f(x)=f(15)=12e^0+3=15$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(12e^{15-x}+3)=3$$

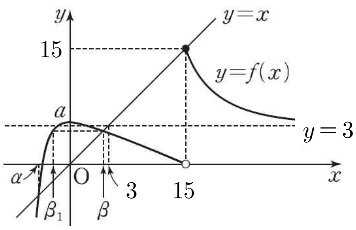
$$\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to -1+}\left[-a\{\log_{16}(x+1)\}^2+a\right]=-\infty$$

한편, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(3,\ 3)$을 지날 조건은

$$f(3)=-a(\log_{16}4)^2+a=-a\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+a=\frac{3}{4}a=3$$

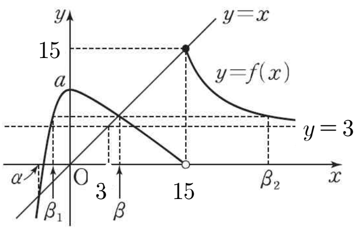
에서 $a=4$일 때이다.
방정식 $f(f(x))=f(x)$에서 $f(x)=t$로 놓으면 $f(t)=t$를 만족시키는 각각의 실수 t에 대하여 $f(x)=t$를 만족시키는 모든 실수 x가 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 모든 실근이다.
따라서 양수 a의 값의 범위에 따라 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 다음과 같다.

(i) $0<a\le 4$일 때



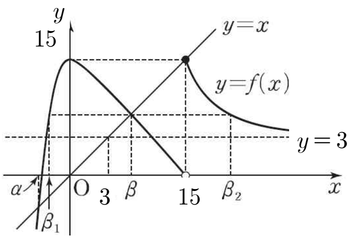
위 그래프에서 $f(t)=t$를 만족시키는 실수 t는
$\alpha,\ \beta,\ 15\ (\alpha<0<\beta\le 3)$
$f(x)=\alpha$를 만족시키는 실수 x의 값은 α뿐이다.
$f(x)=\beta$를 만족시키는 실수 x의 값은 $\beta_1,\ \beta\ (\alpha<\beta_1<0)$
$f(x)=15$를 만족시키는 실수 x의 값은 15뿐이다.
따라서 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 모든 실근은 $\alpha,\ \beta_1,\ \beta,$ 15의 4개이므로
$g(a)=4$

(ii) $4<a<15$일 때



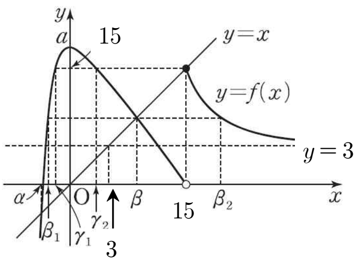
위 그래프에서 $f(t)=t$를 만족시키는 실수 t는
$\alpha,\ \beta,\ 15\ (\alpha<0,\ 3<\beta<15)$
$f(x)=\alpha$를 만족시키는 실수 x의 값은 α뿐이다.
$f(x)=\beta$를 만족시키는 실수 x의 값은 $\beta_1,\ \beta,\ \beta_2$
$(\alpha<\beta_1<0,\ \beta_2>15)$이다.
$f(x)=15$를 만족시키는 실수 x의 값은 15뿐이다.
따라서 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 모든 실근은
$\alpha,\ \beta_1,\ \beta,\ 15,\ \beta_2$의 5개이므로
$g(a)=5$

(iii) $a=15$일 때



위 그래프에서 $f(t)=t$를 만족시키는 실수 t는
$\alpha,\ \beta,\ 15\ (\alpha<0,\ 3<\beta<15)$
$f(x)=\alpha$를 만족시키는 실수 x의 값은 α뿐이다.
$f(x)=\beta$를 만족시키는 실수 x의 값은 $\beta_1,\ \beta,\ \beta_2$
$(\alpha<\beta_1<0,\ \beta_2>15)$이다.
$f(x)=15$를 만족시키는 실수 x의 값은 $0,\ 15$이다.
따라서 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 모든 실근은
$\alpha,\ \beta_1,\ 0,\ \beta,\ 15,\ \beta_2$의 6개이므로
$g(a)=6$

(iv) $a>15$일 때



위 그래프에서 $f(t)=t$를 만족시키는 실수 t는
$\alpha,\ \beta,\ 15\ (\alpha<0,\ 3<\beta<15)$
$f(x)=\alpha$를 만족시키는 실수 x의 값은 α뿐이다.
$f(x)=\beta$를 만족시키는 실수 x의 값은 $\beta_1,\ \beta,\ \beta_2$
$(\alpha<\beta_1<0,\ \beta_2>15)$이다.
$f(x)=15$를 만족시키는 실수 x의 값은 $\gamma_1,\ \gamma_2,\ 15$
$(\beta_1<\gamma_1<0<\gamma_2<\beta)$이다.
따라서 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 모든 실근은
$\alpha,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \beta,\ 15,\ \beta_2$의 7개이므로
$g(a)=7$

(i)~(iv)에서

$$g(a)=\begin{cases}4 & (0<a\le 4)\\ 5 & (4<a<15)\\ 6 & (a=15)\\ 7 & (a>15)\end{cases}$$

이므로 함수 $g(a)$는 $a=4$와 $a=15$에서만 불연속이다.
따라서 함수 $g(a)$가 $a=k$에서 불연속인 모든 양수 k의 값의 합은 $4+15=19$

337. ④

$g(x)=f(x)e^{-x}$에서

$g'(x)=\{f'(x)-f(x)\}e^{-x}$

$g''(x)=\{f''(x)-2f'(x)+f(x)\}e^{-x}$

한편, 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$로 놓으면

$g''(x)=\{ax^2+(b-4a)x+2a-2b+c\}e^{-x}$

조건 (가)에서 $g''(x)=0$의 두 근이 $x=1,\ 4$이므로 이차방정식

$ax^2+(b-4a)x+2a-2b+c=0$

은 $x=1,\ x=4$를 두 근으로 갖는다.

근과 계수의 관계에서

$\dfrac{4a-b}{a}=5,\ \dfrac{2a-2b+c}{a}=4$이므로

$b=-a,\ c=0$

즉, $f(x)=ax^2-ax$이고

$\therefore\ g(x)=a(x^2-x)e^{-x}$

$g'(x)=-a(x^2-3x+1)e^{-x}$

한편, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ g(t))$에서의 접선의 방정식은

$y-g(t)=g'(t)(x-t)$

이 접선이 점 $(0,\ k)$를 지나므로 대입하면

$k-g(t)=g'(t)(0-t)$에서

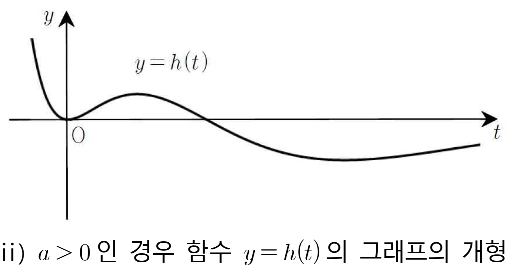
$k=g(t)-tg'(t)$

$\quad=a(t^3-2t^2)e^{-t}$

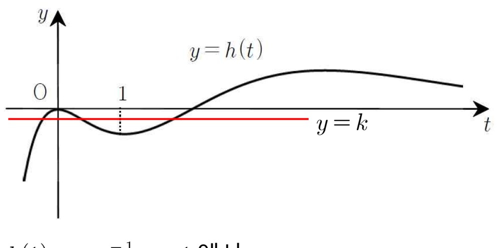
이때 $h(t)=a(t^3-2t^2)e^{-t}$로 놓으면 조건 (나)에 의하여 함수 $y=h(t)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위가 $-1<k<0$이어야 한다.

$h'(t)=-at(t-1)(t-4)e^{-t}=0$이므로 $t=0,\ 1,\ 4$에서 극값을 갖고, $\lim\limits_{t\to\infty}h(t)=0$이므로 점근선은 $y=0$이다.

(i) $a<0$인 경우 함수 $y=h(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같고, 문제의 조건을 만족시키지 않는다.



(ii) $a>0$인 경우 함수 $y=h(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같고, $h(1)=-1$이어야 한다.



$h(1)=-ae^{-1}=-1$에서 $a=e$

$\therefore\ \dfrac{g(-2)}{e^3}+e^3\times g(4)=\dfrac{6ae^2}{e^3}+e^3\times 12ae^{-4}$

$\quad=6+12=18$

338. ③

$f'(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}+2e^x>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가함수이다.

조건에서 함수 $h(x)$의 최솟값이 $g(k)$이므로

$|g(k)-f(0)|=g(k)$에서

$g(k)-f(0)=g(k)$ 또는 $-g(k)+f(0)=g(k)$

그런데 $f(0)=\ln 2+2\neq 0$이므로

$\quad -g(k)+f(0)=g(k)$

즉 $g(k)=\dfrac{1}{2}f(0)=\ln\sqrt{2}+1$

한편, 함수 $y=g(x)-f(x-k)$의 그래프가 x축과 만나면 함수 $h(x)=|g(x)-f(x-k)|$의 최솟값은 0이 되므로 성립하지 않는다.

따라서 $h(x)=-g(x)+f(x-k)$

함수 $h(x)$는 $x=k$에서 최솟값을 가지므로 $h'(k)=0$이다.

$h'(x)=-g'(x)+f'(x-k)$이므로

$h'(k)=-g'(k)+f'(0)=0$에서

$\quad g'(k)=f'(0)=\dfrac{1}{2}+2=\dfrac{5}{2}$

닫힌구간 $[k,\ k+1]$에서 함수 $h(x)$의 최댓값은 $h(k+1)$이므로

$h(k+1)=-g(k+1)+f(1)=-g(k+1)+\ln(e+1)+2e$

$-g(k+1)+\ln(e+1)+2e=2e+\ln\left(\dfrac{1+e}{\sqrt{2}}\right)$에서

$\quad g(k+1)=\ln\sqrt{2}$

이차함수 $g(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$으로 놓으면

$\quad g(k+1)=a(k+1)^2+b(k+1)+c=\ln\sqrt{2}$

$\quad g(k)=ak^2+bk+c=\ln\sqrt{2}+1$

위의 두 식을 빼면

$\quad 2ak+a+b=-1$ …… ㉠

또 $g'(x)=2x+b$에서

$\quad g'(k)=2ak+b=\dfrac{5}{2}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\quad \dfrac{5}{2}+a=-1$에서 $a=-\dfrac{7}{2}$

따라서 $g'\left(k-\dfrac{3}{2}\right)=2a\left(k-\dfrac{3}{2}\right)+b$

$\quad=(2ak+b)-3a$

$\quad=\dfrac{5}{2}-3\times\left(-\dfrac{7}{2}\right)=13$

339. ①

양변을 미분하면

$2x+2y+2xy'+8yy'=0$에서 $y'=-\dfrac{x+y}{x+4y}$이므로

$y_1{}' = -\dfrac{\alpha+k}{\alpha+4k},\ y_2{}' = -\dfrac{\beta+k}{\beta+4k},\ y_1{}' \times y_2{}' = -1$

$x^2+2kx+4k^2-5=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이다.

$\alpha+\beta=-2k,\quad \alpha\beta=4k^2-5$

$\dfrac{\alpha+k}{\alpha+4k}\times\dfrac{\beta+k}{\beta+4k}=-1$을 정리하면

$2\alpha\beta+5k(\alpha+\beta)+17k^2=0$

$2(4k^2-5)-10k^2+17k^2=0,\ k^2=\dfrac{2}{3}$

$\alpha\beta=4k^2-5=-\dfrac{7}{3}$

340. ④

두 함수 $y=\sin x,\ y=\cos x$의 주기가 2π이므로 모든 실수 x에 대하여

$f(x+2\pi)=f(x)$ ⋯⋯ ㉠

$f(x)=2\sin^2 x+k\cos x$에서

$f'(x)=4\sin x\cos x-k\sin x$

$=\sin x(4\cos x-k)$

이므로 $f'(x)=0$에서

$\sin x=0$ 또는 $\cos x=\dfrac{k}{4}$

(i) $k\ge 4$일 때

모든 실수 x에 대하여 $4\cos x-k\le 0$이므로 함수 $f(x)$는 $\sin x=0$을 만족시키는 x의 값에서만 극값을 갖는다.

그러므로 ㉠을 고려하여 닫힌구간 $[-\pi,\ \pi]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\pi$	$\cdots$	0	$\cdots$	π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	극소	↗	극대	↘	극소

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이므로 ㉠에 의하여 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(0)=k$ 뿐이다.

그러므로 만족하는 정수 k의 값은 $4,\ 5,\ \cdots,\ 10$이다.

(ii) $k\le -4$일 때

모든 실수 x에 대하여 $4\cos x-k\ge 0$이므로 함수 $f(x)$는 $\sin x=0$을 만족시키는 x의 값에서만 극값을 갖는다.

그러므로 ㉠을 고려하여 닫힌구간 $[-\pi,\ \pi]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

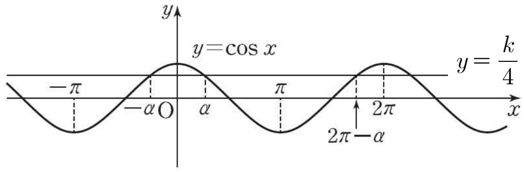
x	$-\pi$	$\cdots$	0	$\cdots$	π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	극대	↘	극소	↗	극대

함수 $f(x)$는 $x=\pm\pi$에서 극대이므로 ㉠에 의하여 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(\pm\pi)=-k$ 뿐이다.

그러므로 만족하는 정수 k의 값은 $-4,\ -5,\ \cdots,\ -10$이다.

(iii) $-4<k<4$일 때

함수 $y=\cos x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.



그러므로 방정식 $\cos x=\dfrac{k}{4}$의 실근 중 가장 작은 양수를 α라 하고, ㉠을 고려하여 닫힌구간 $[-\pi,\ \pi]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\pi$	$\cdots$	$-\alpha$	$\cdots$	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	극소	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	극소

이때 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$와 $x=-\alpha$에서 극대이고,

$\cos\alpha=\cos(-\alpha)=\dfrac{k}{4}$일 때

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\dfrac{k^2}{16},\ \sin^2(-\alpha)=(-\sin\alpha)^2=1-\dfrac{k^2}{16}$

이므로

$f(-\alpha)=f(\alpha)$

$=2\left(1-\dfrac{k^2}{16}\right)+k\times\dfrac{k}{4}$

$=2+\dfrac{k^2}{8}$

이때 ㉠에 의하여 함수 $f(x)$의 극댓값은 모두 $2+\dfrac{k^2}{8}$으로 같으므로 만족하는 정수 k의 값은 0 뿐이다.

따라서 (i)~(iii)에서 구하는 정수 k의 개수는

$7+7+1=15$

341. ④

원점을 지나고 곡선 $y=\dfrac{1}{e^x}+t$ 즉, $y=e^{-x}+t$에 접하는 직선의 접점의 좌표를 $(k,\ e^{-k}+t)$라 하자.

$y'=-e^{-x}$이므로 접선의 방정식은

$y-(e^{-k}+t)=-e^{-k}(x-k)$

이 접선이 원점을 지나므로

$0-(e^{-k}+t)=-e^{-k}(0-k)$

$t=-(k+1)e^{-k}$ ⋯⋯ ㉠

이때 접선의 기울기는 $-e^{-k}$이므로

$f(t)=-e^{-k}$ ⋯⋯ ㉡

㉠의 양변을 k에 대하여 미분하면

$\dfrac{dt}{dk}=-e^{-k}+(k+1)e^{-k}=ke^{-k}$

㉡의 양변을 k에 대하여 미분하면

$f'(t)\times\dfrac{dt}{dk}=e^{-k}$

위의 미분한 두 식을 연립하면

$f'(t)\times ke^{-k}=e^{-k}$

$k\neq 0$ 이므로 $\therefore\ f'(t)=\frac{1}{k}$ …… ㉢

한편, $t=t_1$ 일 때, $k=k_1$ 이라 하면

㉡에서 $f(t_1)=-e^{-k_1}=-e^2\sqrt{e}=-e^{\frac{5}{2}}$ 이므로

$k_1=-\frac{5}{2}$ 이다. 이것을 ㉢에 대입하면

$f'(t_1)=\frac{1}{k_1}=\frac{1}{-\frac{5}{2}}=-\frac{2}{5}$

따라서 $60\times|f'(t_1)|=60\times\frac{2}{5}=24$

342. ②

$x^2+y^2=1$에서 $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$라 하면 호 $\overset{\frown}{\mathrm{AP}}=\theta=t$에서

직선 OP의 방정식은 $y=(\tan t)x$

$y=-x+1$과 연립하면 점 Q의 좌표는 $\left(\frac{1}{1+\tan t},\ \frac{\tan t}{1+\tan t}\right)$

점 Q의 속도는 $\left(\frac{-\sec^2 t}{(1+\tan t)^2},\frac{\sec^2 t}{(1+\tan t)^2}\right)$

점 P의 x좌표가 $\frac{1}{3}$일 때 $\cos t=\frac{1}{3}$이므로 $\tan t=2\sqrt{2}$

$b-a=\frac{2\sec^2 t}{(1+\tan t)^2}=\frac{18}{(1+2\sqrt{2})^2}=\frac{18}{49}(9-4\sqrt{2})$

$\frac{r}{s}=-\frac{9}{4}$

343. ④

$f(x)=3\sin^2 x+k\cos x$

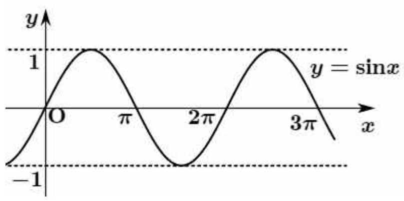
$f'(x)=6\sin x\cos x-k\sin x=6\sin x\left(\cos x-\frac{k}{6}\right)$

$-10\le k\le 10$이므로 k의 범위에 따라 나누어 구하면

i) $-10\le k\le -6$일 때

항상 $6\cos x-k\ge 0$ 이므로 $\sin x=0$일 때

즉, $x=2n\pi$, $x=2n\pi+\pi$ (n은 정수)일 때 극값을 갖는다.



x	$\cdots$	$2n\pi$	$\cdots$	$2n\pi+\pi$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

$x=2n\pi+\pi$ 일 때 극댓값을 갖는다.

$f(2n\pi+\pi)=k\cos(2n+1)\pi=-k$

극댓값이 정수이므로 만족하는 k의 값은

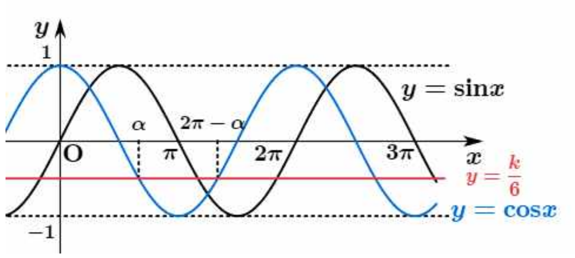
-10, -9, -8, -7, -6이므로 5개

ii) $-6<k<0$일 때

$\sin x=0$일 때 즉, $x=n\pi$일 때 극값을 갖고,

$\cos x=\frac{k}{6}$ 일 때 극값을 갖는다.

$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$에서 $\cos\alpha=\frac{k}{6}$이라 하면 $\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{k^2}{36}}$



x	$\cdots$	$2n\pi$	$\cdots$	$2n\pi+\alpha$	$\cdots$	$2n\pi+\pi$	$\cdots$	$2n\pi+2\pi-\alpha$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

$x=2n\pi+\alpha$일 때 $\cos(2n\pi+\alpha)=\cos\alpha=\frac{k}{6}$,

$\sin(2n\pi+\alpha)=\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{k^2}{36}}$

$f(2n\pi+\alpha)=3-\frac{k^2}{12}+\frac{k^2}{6}=3+\frac{k^2}{12}$

$-6<k<0$에서 $3+\frac{k^2}{12}$가 정수가 되는 값은 존재하지 않는다.

$x=2n\pi+2\pi-\alpha$일 때 $\cos(2n\pi+2\pi-\alpha)=\cos\alpha=\frac{k}{6}$

$\sin(2n\pi+2\pi-\alpha)=-\sin\alpha=-\sqrt{1-\frac{k^2}{36}}$

$f(2n\pi+2\pi-\alpha)=3-\frac{k^2}{12}+\frac{k^2}{6}=3+\frac{k^2}{12}$

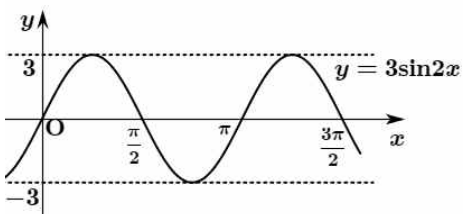
$-6<k<0$에서 $3+\frac{k^2}{12}$가 정수가 되는 값은 존재하지 않는다.

iii) $k=0$일 때

$f(x)=3\sin^2 x$

$f'(x)=6\sin x\cos x=3\sin 2x$이므로 $3\sin 2x=0$일 때

즉, $x=n\pi$, $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)일 때 극값을 갖는다.



x	$\cdots$	$n\pi$	$\cdots$	$n\pi+\frac{\pi}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

$x=n\pi+\frac{\pi}{2}$일 때 극댓값을 갖는다.

$f\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=3$

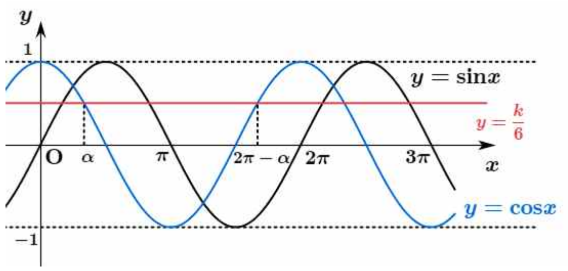
극댓값이 정수이므로 성립

iv) $0<k<6$일 때

$\sin x=0$일 때 즉, $x=n\pi$일 때 극값을 갖고,

$\cos x=\frac{k}{6}$일 때 극값을 갖는다.

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\alpha=\frac{k}{6}$이라 하면 $\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{k^2}{36}}$



x	$\cdots$	$2n\pi$	$\cdots$	$2n\pi+\alpha$	$\cdots$	$2n\pi+\pi$	$\cdots$	$2n\pi+2\pi-\alpha$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

$x=2n\pi+\alpha$일 때 $\cos(2n\pi+\alpha)=\cos\alpha=\frac{k}{6}$,

$\sin(2n\pi+\alpha)=\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{k^2}{36}}$

$f(2n\pi+\alpha)=3-\frac{k^2}{12}+\frac{k^2}{6}=3+\frac{k^2}{12}$

$0<k<6$에서 $3+\frac{k^2}{12}$가 정수가 되는 값은 존재하지 않는다.

$x=2n\pi+2\pi-\alpha$일 때 $\cos(2n\pi+2\pi-\alpha)=\cos\alpha=\frac{k}{6}$

$\sin(2n\pi+2\pi-\alpha)=-\sin\alpha=-\sqrt{1-\frac{k^2}{36}}$

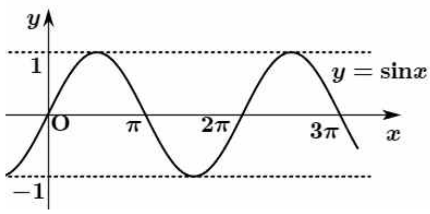
$f(2n\pi+2\pi-\alpha)=3-\frac{k^2}{12}+\frac{k^2}{6}=3+\frac{k^2}{12}$

$0<k<6$에서 $3+\frac{k^2}{12}$가 정수가 되는 값은 존재하지 않는다.

v) $6\le k\le 10$일 때

항상 $6\cos x-k\le 0$이므로 $\sin x=0$일 때

즉, $x=2n\pi$, $x=2n\pi+\pi$ (n은 정수)일 때 극값을 갖는다.



x	$\cdots$	$2n\pi$	$\cdots$	$2n\pi+\pi$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$x=2n\pi$일 때 극댓값을 갖는다.

$f(2n\pi)=k\cos 2n\pi=k$

극댓값이 정수이므로 만족하는 k의 값은

$6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$이므로 5개

i), ii), iii), iv), v)에 의해 정수 k의 개수는 11개

344. ⑤

$$f(x)=\begin{cases}-a\{\log_4(x+1)\}^2+a & (-1<x<3)\\ 2e^{3-x}+1 & (x\ge 3)\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-2a\{\log_4(x+1)\}\cdot\frac{1}{(x+1)\ln 4} & (-1<x<3)\\ -2e^{3-x} & (x\ge 3)\end{cases}$$

$a>0$이므로

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$
$f(x)$		↗	극대	↘		↘

$\lim_{x\to-1+}f(x)=-\infty$, $f(0)=a$, $\lim_{x\to 3-}f(x)=0$, $f(3)=3$,

$\lim_{x\to\infty}f(x)=1$

방정식 $f(f(x))=f(x)$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(a)$일 때

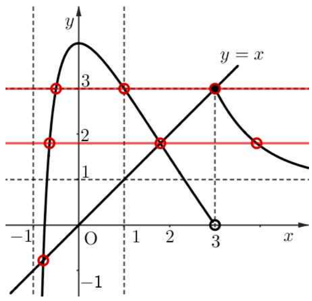
$f(x)=t$라 하면 $f(t)=t$

$f(t)=t$는 $-1<t<0$, $0<t<3$, $t=3$에서 3개의 실근을 갖는다.

따라서 $f(x)=t$를 만족하는 서로 다른 실근의 개수는 a의 값에 범위에 의해 다음과 같다.

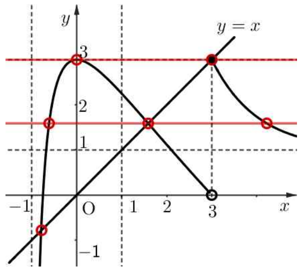
그래프를 그려서 실근의 개수를 구하면

i) $a>3$일 때



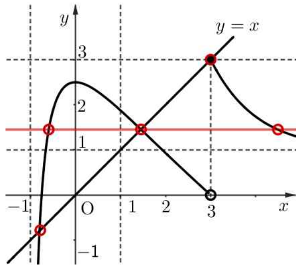
만족하는 실근의 개수는 7개

ii) $a=3$일 때



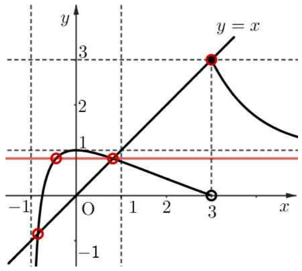
만족하는 실근의 개수는 6개

iii) $1<a<3$ 일 때



만족하는 실근의 개수는 5개

iv) $0<a\le 1$일 때



만족하는 실근의 개수는 4개

i), ii), iii), iv)에 의해 $g(a)$의 치역은 $\{4,\ 5,\ 6,\ 7\}$

따라서 $g(a)$의 치역의 원소의 합은 22

345. 6

$f(1)=f'(1)$에서 $(1+a+b)e=(2a+b+3)e$

$a=-2$

$f'(x)=\left(x^2+(a+2)x+a+b\right)e^x$

$f''(x)=\left(x^2+(a+4)x+2a+b+2\right)e^x=0$

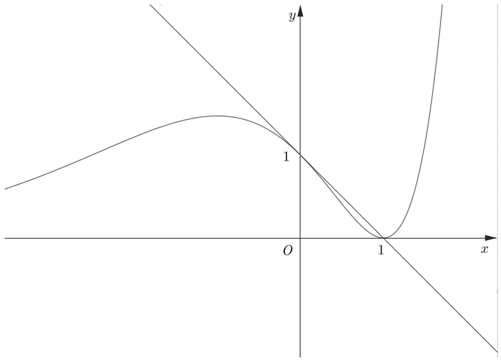
따라서 $x^2+(a+4)x+2a+b+2=0$을 만족하는 c의 값은 2개이고

$c_1\times c_2=2a+b+2=-1$

$b=1$

$f(x)=\left(x^2-2x+1\right)e^x=(x-1)^2e^x$

$f'(x)=\left(x^2-1\right)e^x$



조건을 만족하려면 위와 같은 그림이어야 한다.

$y=f(x)$와 $y=m(x-1)$이 접하는 점을 구하면

접점은 $(0,\ 1)$이고 $k=0,\ m=-1$이다.

$g'(-2)\times g'(1)=3e^{-2}\times(-1)=-3e^{-2}$

따라서 $pq=6$이다.

346. $2\ln3-5\ln2+2$

$\ln|f(x)|$는 $f(x)=0$일 때 불연속이고 $g(x)$는 $x=-1$에서 불연속이므로 $f(-1)=0$이다.

$h(x)=\begin{cases}\ln|f(x)| & (f(x)\neq 0)\\ 0 & (f(x)=0)\end{cases}$, $l(x)=x+1$로 두고

$g(x)=1$을 $h(x)=l(x)$로 바꾸어 그래프를 생각하면

$x<-1$에서 실근이 1개,

$x=-1$에서 실근이 1개이므로

$x>-1$에서 $h(x)$와 $l(x)$는 한 점에서만 접해야 함을 알 수 있다.

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=1,\ \ln|f(x)|=x+1$이고

$g(x)=h(x)-x$는 $x=3$에서 극댓값을 가지므로 $h'(3)=1$이다.

따라서 $x=0$ 또는 $x=3$ 중 한 점에서만 $h(x)$와 $l(x)$는 접한다.

$x=0$에서 접점을 가진다고 하면 조건을 만족하지 않으므로 $x=3$에서 접점을 가진다.

$f(0)=f'(0)$이므로 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+c\ (a\neq 0)$로 두면

$f(-1)=-a+b-c+c=0$에서 $b=a$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f(3)=f'(3)$이므로 $27a+9b+3c+c=27a+6b+c$에서 $c=-a$

따라서 $f(x)=a\left(x^3+x^2-x-1\right)=a(x+1)^2(x-1)$

이때 $\ln|f(3)|=4$에서

$\ln|32a|=5\ln2+\ln|a|=4$이므로 $\ln|a|=4-5\ln2$

$g(2)=\ln|f(2)|-2$

$=\ln|9a|-2=2\ln3+\ln|a|-2$

$=2\ln3-5\ln2+2$

[다른 풀이]

$f(x)=a\left(x^3+x^2-x-1\right)=a(x+1)^2(x-1)$

$f'(x)=a(x+1)(3x-1)$이므로

따라서 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases}\ln|f(x)|-x & (x\neq\pm1)\\ -1 & (x=1)\\ 1 & (x=-1)\end{cases}$$

$x\neq\pm1$일 때 $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}-1$

$= \dfrac{3x-1}{(x+1)(x-1)} - 1 = \dfrac{-x(x-3)}{(x+1)(x-1)}$

$g'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=3$

증감표를 조사하면

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	×	$+$	0	$-$	×	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	1	↗	극대	↘	-1	↗	극대	↘

$\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\{\ln|f(x)|-x\} = \lim\limits_{x\to\infty}\ln|f(x)e^{-x}| = -\infty$ 이고

$g(x)$의 점근선은 직선 $x=-1$, $x=1$ 이다.

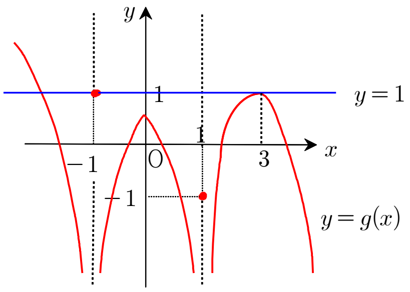
이때 두 극댓값을 구하면

$g(0)=\ln|f(0)|=\ln|-a|=\ln|a|$

$g(3)=\ln|f(3)|-3=\ln|32a|-3=\ln|a|+5\ln2-3$

조건에서 $5\ln2-3>0$이므로 $g(0)<g(3)$

그러므로 함수 $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$g(3)=1$ 에서 $\ln|f(3)|-3=1$ 즉, $\ln|f(3)|=4$ 이므로

$\ln|32a|=5\ln2+\ln|a|=4$ 를 정리하면 $\ln|a|=4-5\ln2$

$g(2)=\ln|f(2)|-2=2\ln3-5\ln2+2$

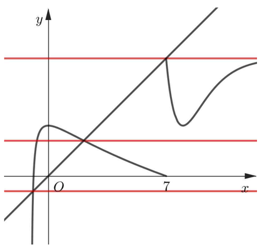
347. 92

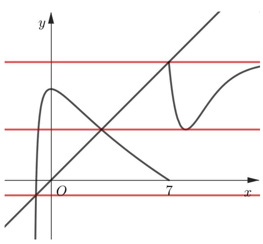
$f(x)=t$라 하면 $f(t)=t$

따라서 t를 변수로 보고 $y=f(t)$와 $y=t$의 교점을 구한 다음 다시 t를 상수로 보고 $y=f(x)$와 $y=t$의 교점의 개수를 구하면 된다.

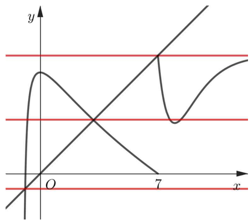
이때 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 a를 가지고

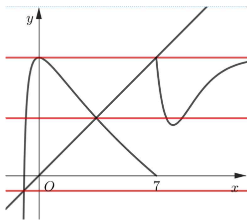
$(3,\ 3)$을 대입하면 $a=\dfrac{27}{5}$ 이므로 그래프는 다음과 같다.



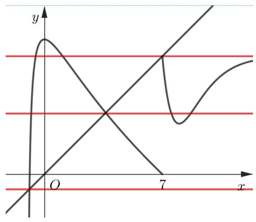


$[0<a<\dfrac{27}{5}$ 일 때$]$ $g(a)=4$ $[a=\dfrac{27}{5}$ 일 때$]$ $g(a)=5$





$[\dfrac{27}{5}<a<7$일 때$]$ $g(a)=6$ $[a=7$일 때$]$ $g(a)=7$



$[a>7$일 때$]$ $g(a)=8$

그러므로 $A=\left\{\dfrac{27}{5},\ 7\right\}$, $B=\{4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$

$5p+q=5\times\dfrac{62}{5}+30=92$

348. ⑤

$f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\dfrac{f(x)+f(h)}{1+f(x)f(h)}-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)\{1-(f(x))^2\}}{h(1+f(x)f(h))}$

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)}{h}=f'(0)=1$이므로

$f'(x)=1-\{f(x)\}^2$

$f'(\ln2)=1-\{f(\ln2)\}^2=1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{16}{25}$

한편 $a=x$, $b=-x$라 하면

$f(x)+f(-x)=f(x-x)\{1+f(x)f(-x)\}=f(0)\{1+f(x)f(-x)\}=0$

이므로 $f(x)$는 기함수이다.

따라서 역함수인 $g(x)$도 기함수이므로

$g'(-x)=g'(x)$

$16\times g'\left(-\dfrac{3}{5}\right)=16\times g'\left(\dfrac{3}{5}\right)$

$=16\times\dfrac{1}{f'\left(g\left(\dfrac{3}{5}\right)\right)}=16\times\dfrac{1}{f'(\ln2)}=16\times\dfrac{25}{16}=25$

349. ④

$y'=n\sin^{n-1}x(\cos x)$

$y''=n(n-1)\sin^{n-2}x(\cos x)^2+n\sin^{n-1}x(-\sin x)$

$=(n(n-1)\cos^2x-n\sin^2x)\sin^{n-2}x=0$

$(n-1)\cos^2x=\sin^2x$

$\tan^2x=n-1$ 곧, $\tan x=\sqrt{n-1}$

$\sin x=\dfrac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}$ 따라서 $a_n=\left(\dfrac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}\right)^n=\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\left(-\dfrac{1}{n}\right)\right)^{(-n)\left(-\frac{1}{2}\right)}=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

350. ①

$$\int_1^2\frac{4^x-1}{2^x+1}dx=\int_1^2(2^x-1)dx=\left[\frac{2^x}{\ln 2}-x\right]_1^2$$
$$=\left(\frac{4}{\ln 2}-2\right)-\left(\frac{2}{\ln 2}-1\right)=\frac{2}{\ln 2}-1$$

351. ⑤

$f(x)=\sin x+\cos x+C$

$f(0)=0+1+C=1,\ C=0$

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$

352. ①

$f'(x)=\dfrac{1-(2\cos^2x-1)}{\cos^2x}=2\sec^2x-2$

$f(x)=2\tan x-2x+C$, $f(0)=-2$이므로

$f(x)=2\tan x-2x-2$

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$

353. ④

$\ln x=t,\ \dfrac{1}{x}dx=dt$

$$\int_e^{e^3}\frac{\ln x}{x}dx=\int_1^3 t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^3=4$$

354. ⑤

$f'(x)=\begin{cases}2^x\ln 2 & (x<1)\\ \dfrac{3}{x^3} & (x>1)\end{cases}$ 이므로

$f(x)=\begin{cases}2^x+C_1 & (x<1)\\ -\dfrac{3}{2x^2}+C_2 & (x>1)\end{cases}$

$f(0)=0$이므로 $f(0)=1+C_1=0$

$C_1=-1$

$x=1$에서 연속이므로

$f(1)=2+C_1=-\dfrac{3}{2}+C_2$

$C_2=\dfrac{5}{2}$

$\therefore\ f(2)=-\dfrac{3}{8}+C_2=\dfrac{17}{8}$

355. ⑤

$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ 인 모든 실수 x에서 함수 $f(x)$는

미분가능하므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(x+2h)-f(x)}{h}-\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\right\}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{2\times\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}+\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\right\}$$
$$=2f'(x)+f'(x)$$
$$=3f'(x)=3\tan^2x+6$$

따라서 $f'(x)=\tan^2x+2$이므로

$f(x)=\int(\tan^2x+2)dx=\int(\sec^2x+1)dx$

$=\tan x+x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1+\dfrac{\pi}{4}+C=-\dfrac{\pi}{2}$ 이므로

$C=-\dfrac{3\pi}{4}-1$

$\therefore\ f(x)=\tan x+x-\dfrac{3\pi}{4}-1\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

그러므로 구하는 값은

$f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{3\pi}{4}-1=-2-\pi$

356. ⑤

$\int_0^1 f(2f(x))f'(x)dx=\dfrac{1}{2}$

$2f(x)=t$라 하면

$f(0)=0,\ f(1)=1,\ \dfrac{dt}{dx}=2f'(x)$이므로

$\int_0^1 f(2f(x))f'(x)dx=\int_0^2\dfrac{1}{2}f(t)dt=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \int_0^2 f(t)dt=1$

$\int_2^4 f(3x-2)dx$에서 $3x-2=t$라 하면 $\dfrac{dt}{dx}=3$,

$x=2$일 때 $t=4$, $x=4$일 때 $t=10$이므로

$\int_2^4 f(3x-2)dx=\int_4^{10}\dfrac{1}{3}f(t)dt=\dfrac{1}{3}\int_4^{10}f(t)dt$ $\cdots$①

$f(x+2)=f(x)$이고 $\int_0^2 f(t)dt=1$이므로

$\int_4^6 f(t)dt=\int_6^8 f(t)dt=\int_8^{10}f(t)dt=1$

①에 대입하면

$\therefore\ \dfrac{1}{3}\int_4^{10}f(t)dt=\dfrac{1}{3}\times3=1$

357. ⑤

$$\int_0^2\frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}dx$$

$t=2x^2+1$이라 하면 $\dfrac{dt}{dx}=4x$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=2$일 때 $t=9$이므로

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}dx=\int_1^9 \frac{1}{4\sqrt{t}}dt=\left[\frac{1}{2}\times t^{\frac{1}{2}}\right]_1^9=1$$

358. $\dfrac{a^2}{4}\pi$

$x=a\sin\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면 $\dfrac{dx}{d\theta}=a\cos\theta$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=a$일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}\cdot a\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}a^2(1+\cos2\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}a^2\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}a^2\times\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{a^2}{4}\pi$$

359. ③

$x\ge0$인 모든 실수에서 정의된 함수 $f(x)=(3x^2+2)e^x$에서

$f'(x)=6xe^x+(3x^2+2)e^x=(3x^2+6x+2)e^x>0$

$f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하므로 $f(g(x))=x$이고 이것을 미분하면 $f'(g(x))g'(x)=1$에서

$g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$ 이므로

$$\int_2^{14e^2}\frac{x}{f'(g(x))}dx=\int_2^{14e^2}xg'(x)\,dx$$

$$=\Big[xg(x)\Big]_2^{14e^2}-\int_2^{14e^2}g(x)\,dx$$

$$=14e^2\times g(14e^2)-2g(2)-\int_2^{14e^2}g(x)\,dx$$

$$=28e^2-\int_2^{14e^2}g(x)\,dx$$

[$\because$ $f(2)=14e^2$에서 $g(14e^2)=2$,
$f(0)=2$에서 $g(2)=0$]

이때 $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx+\int_2^{14e^2}g(x)\,dx=28e^2$임을 이용하면

$$\int_2^{14e^2}\frac{x}{f'(g(x))}dx=\int_0^2 f(x)\,dx$$

$$=\int_0^2(3x^2+2)e^x\,dx$$

$$=\left[(3x^2+2)e^x\right]_0^2-\int_0^2 6xe^x\,dx$$

$$=14e^2-2-6\Big[(x-1)e^x\Big]_0^2$$

$$=14e^2-2-6(e^2+1)$$

$$=8e^2-8$$

360. ③

$f(x)=(5x^2+2)e^x$의 역함수가 $g(x)$일 때

$f(g(x))=x$ 이므로

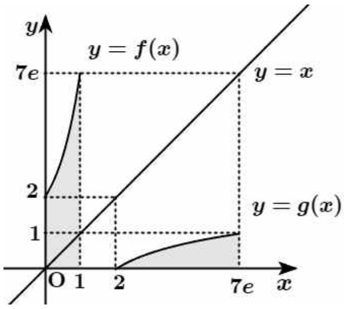
$f'(g(x))g'(x)=1$

$\dfrac{1}{f'(g(x))}=g'(x)$

$$\int_2^{7e}\frac{x}{f'(g(x))}dx=\int_2^{7e}xg'(x)dx$$

$$=[xg(x)]_2^{7e}-\int_2^{7e}g(x)dx \qquad \cdots①$$

$f(0)=2$, $f(1)=7e$ 이므로 $g(2)=0$, $g(7e)=1$



$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(5x^2+2)e^x dx$$

$$=[(5x^2+2)e^x]_0^1-\int_0^1 10xe^x dx$$

$$=[(5x^2+2)e^x]_0^1-[10xe^x]_0^1+\int_0^1 10e^x dx$$

$$=[(5x^2-10x+2)e^x]_0^1+[10e^x]_0^1$$

$$=[(5x^2-10x+12)e^x]_0^1$$

$$=7e-12$$

$$\therefore\ \int_2^{7e}g(x)dx=7e-\int_0^1 f(x)dx=7e-(7e-12)=12$$

①에 대입하면

$$\therefore\ [xg(x)]_2^{7e}-\int_2^{7e}g(x)dx$$

$=7e\times g(7e)-2g(2)-12$

$=7e-12$ ($\because$ $g(7e)=1$, $g(2)=0$)

[다른 풀이]

$\displaystyle\int_2^{7e}\frac{x}{f'(g(x))}dx=\int_2^{7e}xg'(x)dx$ 에서

$g(x)=y$라 하면 $\dfrac{dy}{dx}=g'(x)$이고

$f(y)=x$ 이므로 $f(0)=2,\ f(1)=7e$ 에서
$x=2$일 때 $y=0,\ x=7e$일 때 $y=1$

$$\int_2^{7e} x g'(x)dx = \int_0^1 f(y)\,dy$$
$$= \int_0^1 (5y^2+2)e^y dy$$
$$= \left[(5y^2-10y+12)e^y\right]_0^1$$
$$= 7e-12$$

361. ③

$$\int_1^e (\ln x)^2 dx = \left[x(\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e 2\ln x\,dx$$
$$= \left[x(\ln x)^2 - 2x(\ln x)\right]_1^e + \int_1^e 2dx$$
$$= \left[x(\ln x)^2 - 2x(\ln x) + 2x\right]_1^e$$
$$= (e-2e+2e)-(0-0+2)$$
$$= e-2$$

$\therefore\ a = e-2$

$$\int_0^\pi e^x \cos x dx = \left[e^x \cos x\right]_0^\pi + \int_0^\pi e^x \sin x\,dx$$
$$= \left[e^x\cos x + e^x \sin x\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos x\,dx$$

$$\therefore\ b = \int_0^\pi e^x\cos x dx = \frac{1}{2}\left[e^x(\cos x+\sin x)\right]_0^\pi$$
$$= \frac{1}{2}(-e^\pi) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}e^\pi - \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ a-b = e + \frac{1}{2}e^\pi - \frac{3}{2}$$

362. ④

$\{f(x)\cos x\}' = f'(x)\cos x - f(x)\sin x$
이므로 조건 (가)에서

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x)\sin x - f'(x)\cos x\}\,dx$$
$$= \left[-f(x)\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= f(0) = 2 \qquad \cdots\cdots \ ㉠$$

$\{f(x)\sin x\}' = f'(x)\sin x + f(x)\cos x$
이므로 조건 (나)에서

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x)\cos x + f'(x)\sin x\}\,dx$$
$$= \left[f(x)\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5}{2}\pi + 2 \qquad \cdots\cdots \ ㉡$$

$f(x)$는 일차함수이므로
$f(x) = ax+b\ \ (a\neq 0,\ a,\ b$는 상수)
으로 놓으면 ㉠, ㉡에 의하여 $f(0)=b=2$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}a+2 = \frac{5}{2}\pi+2$ 에서 $a=5$

$\therefore\ f(x) = 5x+2$

따라서 $\int_0^1 e^x(5x^2+2)\,dx$ 에서 $u(x)=5x^2+2,\ v'(x)=e^x$ 으로
놓으면 $u'(x)=10x,\ v(x)=e^x$ 이므로

$$\int_0^1 e^x f(x^2)dx = \int_0^1 e^x(5x^2+2)\,dx$$
$$= \left[e^x(5x^2+2)\right]_0^1 - \int_0^1 10xe^x\,dx$$
$$= 7e-2-10\left[(x-1)e^x\right]_0^1$$
$$= 7e-2-10(0+1)$$
$$= 7e-12$$
$$\therefore\ 12 + \int_0^1 e^x f(x^2)dx = 7e$$

363. ①

$f(x) = ax+b$라 하면 $f'(x)=a$이므로

$$\int_0^1 \{f(x)+f'(x)\}e^x dx = \int_0^1 \{ax+(a+b)\}e^x dx$$
$$= \left[\{ax+(a+b)\}e^x\right]_0^1 - \int_0^1 ae^x dx$$
$$= \left[(ax+b)e^x\right]_0^1$$
$$= (a+b)e - b = 4e-1$$

$\therefore\ a=3,\ b=1$

$$\therefore\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3x+1)\sin x\,dx$$
$$= \left[-(3x+1)\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos x\,dx$$
$$= \left[-(3x+1)\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[3\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= 4$$

364. ①

함수 $f(x)$는 y축 대칭이므로
$f(1-x) = f(-(x-1)) = f(x-1)$이고 또, x축으로 -1만큼
평행이동하면

$$\int_0^2 x^2 f(1-x)dx = \int_0^2 x^2 f(x-1)dx = \int_{-1}^1 (x+1)^2 f(x)dx$$

따라서 조건 (나)는

$$\int_{-1}^1 x^2 f(x)dx = 26 - \int_0^2 x^2 f(1-x)dx = 26 - \int_{-1}^1 (x+1)^2 f(x)dx$$

이므로 정리하면

$$\int_{-1}^1 (2x^2+2x+1)f(x)dx = 4\int_0^1 x^2 f(x)dx + 2\int_0^1 f(x)dx = 26$$

$$\therefore \int_0^1 x^2 f(x)dx = 3$$

한편, $g(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt$이므로

$g(-1)=0,\ g(1)=\int_{-1}^{1}f(t)dt=14,\ g'(x)=f(x)$

$\int_{-1}^{1}xg(x)dx=\left[\frac{1}{2}x^2g(x)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^2g'(x)dx$

$=\frac{1}{2}g(1)-\frac{1}{2}g(-1)-\int_{0}^{1}x^2f(x)dx=4$

365. ②

$\int_{0}^{2}4e^{2x}(x^2-2x)dx=\left[(2x^2-6x+3)e^{2x}\right]_0^2=-e^4-3$

$p+q=-4$

366. $\frac{e^6+2}{2}$

$f'(t)=2te^{t^2-1}$이므로 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2te^{t^2-1}}$

$y=-\frac{1}{2te^{t^2-1}}(x-t)+e^{t^2-1}$

$g(t)=2te^{2t^2-2}+t$

$\int_{1}^{2}(2te^{2t^2-2}+t)dt=\left[\frac{1}{2}e^{2t^2-2}+\frac{t^2}{2}\right]_1^2=\frac{e^6+2}{2}$

367. ④

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(t)\sin t\,dt=c$ 라고 하면, $f(x)=\cos x+4c$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos t+4c)\sin t dt$

$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos t\sin t+4c\sin t)dt$

$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin 2t+4c\sin t\right)dt$

$=\left[-\frac{1}{4}\cos 2t-4c\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}+4c=c$

$c=-\frac{1}{6}$

$f(x)=\cos x-\frac{2}{3}$

그러므로 $2f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{3}$

368. ④

$x\int_{0}^{x}f(t)dt-\int_{0}^{x}tf(t)dt=e^{2x^2+1}-e$ 양변을 미분하면

$\int_{0}^{x}f(t)dt+xf(x)-xf(x)=(4x)e^{2x^2+1}$ 다시 양변을 미분하면

$f(x)=(16x^2+4)e^{2x^2+1}$

$f(1)=20e^3$

369. ①

$xf'(x)-f(x)=\frac{6x^3}{\sqrt{4x^2+1}}$ 에서

$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{6x}{\sqrt{4x^2+1}}$ 이고

$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}'$ 이므로

$\frac{f(x)}{x}=\int\frac{6x}{\sqrt{4x^2+1}}dx$ …… ㉠

㉠에서 $\sqrt{4x^2+1}=t$로 놓으면

$4x^2+1=t^2$ 에서 $8x=2t\times\frac{dt}{dx},\ x=\frac{t}{4}\times\frac{dt}{dx}$ 이므로

$\frac{f(x)}{x}=\int\frac{6x}{\sqrt{4x^2+1}}dx=\int\left(\frac{1}{t}\times\frac{3t}{2}\right)dt$

$=\int\frac{3}{2}dt=\frac{3}{2}t+C$

$=\frac{3}{2}\sqrt{4x^2+1}+C$ (단, C는 적분상수)

그러므로 $f(x)=\frac{3}{2}x\sqrt{4x^2+1}+Cx$

이때

$f(\sqrt{2})=\frac{3}{2}\times\sqrt{2}\times3+C\times\sqrt{2}=\left(\frac{9}{2}+C\right)\sqrt{2}=\sqrt{2}$

이므로 $C=-\frac{7}{2}$

즉, $f(x)=\frac{x(3\sqrt{4x^2+1}-7)}{2}$ 이므로

$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}f(x)dx=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}\frac{x(3\sqrt{4x^2+1}-7)}{2}dx$ …… ㉡

㉡에서 앞에서와 같이 $\sqrt{4x^2+1}=t$로 놓으면

$x=\sqrt{2}$ 일 때 $t=3,\ x=\sqrt{6}$ 일 때 $t=5$이고

$x=\frac{t}{4}\times\frac{dt}{dx}$ 이므로

$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}f(x)dx=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}\frac{x(3\sqrt{4x^2+1}-7)}{2}dx$

$=\int_{3}^{5}\left(\frac{3t-7}{2}\times\frac{t}{4}\right)dt$

$=\frac{1}{8}\int_{3}^{5}(3t^2-7t)dt$

$=\frac{1}{8}\left[t^3-\frac{7}{2}t^2\right]_3^5$

$=\frac{1}{8}\left\{(125-27)-\frac{7}{2}(25-9)\right\}$

$=\frac{21}{4}$

$\therefore\ 4\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} f(x)\,dx = 21$

370. ②

$$\int_0^x (x^3+x)f(xt)\,dt = a\sin x + b\cos 2x + c \quad \cdots\cdots\ ㉠$$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=b+c \cdots\cdots$ ㉡

$\int_0^x (x^3+x)f(xt)\,dt$에서 $xt=z$로 놓으면

$t=0$일 때 $z=0$, $t=x$일 때 $z=x^2$이고, $x=\dfrac{dz}{dt}$이므로

$$\int_0^x (x^3+x)f(xt)\,dt = \int_0^{x^2} (x^2+1)f(z)\,dz$$

$=(x^2+1)\int_0^{x^2} f(z)\,dz$

위의 식을 ㉠에 대입하면

$$(x^2+1)\int_0^{x^2} f(z)\,dz = a\sin x + b\cos 2x + c \quad \cdots\cdots\ ㉢$$

㉢의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x\int_0^{x^2} f(z)\,dz + (x^2+1)f(x^2)\times 2x = a\cos x - 2b\sin 2x$$

$$2x\int_0^{x^2} f(z)\,dz + (2x^3+2x)f(x^2) = a\cos x - 2b\sin 2x \quad \cdots$$

㉣

㉣의 양변에 $x=0$을 대입하면 $0=a$

㉣에 $a=0$을 대입한 후 양변을 x에 대하여 미분하면

$2\int_0^{x^2} f(z)\,dz + 2xf(x^2)\times 2x + (6x^2+2)f(x^2)$

$+(2x^3+2x)f'(x^2)\times 2x$

$=-4b\cos 2x \quad \cdots\cdots$ ㉤

㉤의 양변에 $x=0$을 대입하면

$2f(0)=-4b$

$f(0)=2$이므로 $b=-1$

㉡에서 $c=-b=1$

따라서 $a^2+b^2+c^2=0^2+(-1)^2+1^2=2$

371. ④

조건 (가)에서 $\int_0^x f'(t)\,dt = \sin^2 x$를 미분하면

$f'(x)=2\sin x\cos x = \sin 2x$

$f(x)=-\dfrac{1}{2}\cos 2x + C$ (단, C는 적분상수)

조건 (나)에서 $x=0$을 대입하면

$\{f'(0)\}^2 - f(0) - 1 = 0$이고 $f'(0)=0$이므로 $f(0)=-1$

따라서 $C=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ f(x)=-\dfrac{1}{2}\cos 2x - \dfrac{1}{2}$

모든 자연수 n에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)+n$$

라 하므로

$g(x)=-\dfrac{1}{2}\cos 2\left(x-\dfrac{n\pi}{2}\right)-\dfrac{1}{2}+n$

$=-\dfrac{1}{2}\cos(2x-n\pi)-\dfrac{1}{2}+n$

$=-\dfrac{1}{2}\cos(n\pi-2x)-\dfrac{1}{2}+n$

$=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}\cos 2x - \dfrac{1}{2} + 2m & (n=2m) \\ \dfrac{1}{2}\cos 2x - \dfrac{1}{2} + 2m - 1 & (n=2m-1) \end{cases}$

$=\begin{cases} f(x)+2m & (n=2m) \\ -f(x)-1+2m-1 & (n=2m-1) \end{cases}$

$\therefore\ g(x)-(-1)^n f(x) = \begin{cases} 2m & (n=2m) \\ 2m-2 & (n=2m-1) \end{cases}$

이때 $a_n = \int_{\frac{n\pi}{2}}^{\frac{(n+1)\pi}{2}} \{g(x)-(-1)^n f(x)\}\,dx$이므로

$\therefore\ a_n = \begin{cases} m\pi & (n=2m) \\ (m-1)\pi & (n=2m-1) \end{cases}$

따라서

$\sum_{k=1}^{22} a_k = \sum_{m=1}^{11} (a_{2m-1}+a_{2m})$

$=\sum_{m=1}^{11} \{(m-1)\pi + m\pi\}$

$=\sum_{m=1}^{11} (2m-1)\pi$

$=121\pi$

이므로 $p=121$

372. ④

$\int_0^x (x^2+x)f(xt)dt = a\sin x + b\cos x + c \quad \cdots ①$

①에 $x=0$을 대입하면 $0=b+c \ \cdots ②$

①에서 $s=xt$라 하면 $\dfrac{ds}{dt}=x$

$t=0$일 때 $s=0$, $t=x$일 때 $s=x^2$이므로

$\int_0^x (x^2+x)f(xt)dt = \int_0^{x^2} (x+1)f(s)ds = (x+1)\int_0^{x^2} f(s)ds$

$(x+1)\int_0^{x^2} f(s)ds = a\sin x + b\cos x + c$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^{x^2} f(s)ds + (x+1)f(x^2)\times 2x = a\cos x - b\sin x \ \cdots ③$

③에 $x=0$을 대입하면 $0=a$

이것을 ③에 대입하면

$\int_0^{x^2} f(s)ds + (2x^2+2x)f(x^2) = -b\sin x$

양변을 x에 대하여 미분하면

$2xf(x^2)+(4x+2)f(x^2)+(2x^2+2x)f'(x^2)\times 2x=-b\cos x$

$x=0$을 대입하면

$2f(0)=-b$

$f(0)=2$ 이므로 $b=-4$

이것을 ②에 대입하면 $c=4$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=0+16+16=32$

373. ①

$h(x)=f(x)-x$로 놓으면

$h'(x)=f'(x)-1$

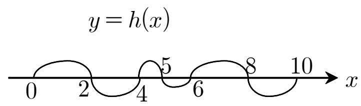
조건(가)에 의해 $h(1)>0$

조건(나)에 의해 $h(x)=0$의 실근의 집합은

$\{0,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 10\}$

조건(다)에 의해 $h'(x)=0$은 서로 다른 6개의 실근을 갖는다.

따라서 닫힌구간 $[0,\ 10]$에서 조건을 만족하는 함수 $h(x)=f(x)-x$를 그래프로 나타내면 다음 그림과 같다.



한편, 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하므로 $f(g(x))=x$이고 이것을 미분하면 $f'(g(x))\times g'(x)=1$이므로

$$f'(g(x))=\frac{1}{g'(x)}$$

따라서 주어진 부등식의 좌변에 대입하면

$$\int_5^x \frac{1}{g'(t)}\,dt=\int_5^x f'(g(t))\,dt$$

이고 $g(t)=z$로 놓으면 $g'(t)=\dfrac{dz}{dt}$에서 $dt=\dfrac{1}{g'(t)}dz=f'(z)\,dz$

이때 $f(5)=5$이므로 $g(5)=5$이고 또 $f(k)=x$로 놓으면 $g(x)=k$

즉 $t=5$일 때 $z=5,\ t=x$일 때 $z=k$이므로

$$\int_5^x f'(g(t))\,dt=\int_5^k f'(z)\times f'(z)\,dt=\int_5^k \{f'(z)\}^2\,dz$$

이므로 주어진 부등식을 정리하면

$$\int_5^k \{f'(z)\}^2\,dz>\int_5^x \{f'(t)\}^2\,dt$$

여기에서 $\{f'(t)\}^2\geq 0$이므로 부등식이 성립하려면 $k>x$이다.

즉, $f(k)=x$이면서 $k>x$을 만족해야 한다.

이때 $h(k)=f(k)-k=x-k<0$이므로

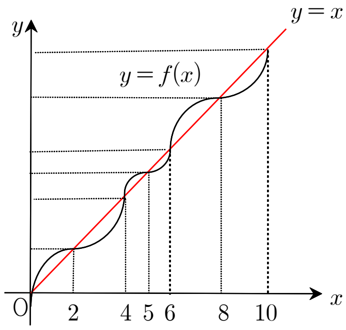
$2<k<4$ 또는 $5<k<6$ 또는 $8<k<10$

이다. 따라서 만족하는 모든 정수 x의 값의 합은

$3+9=12$

[보충 풀이]

닫힌구간 $[0,\ 10]$에서 조건을 만족하는 함수 $y=f(x)$를 그래프로 나타내면 다음 그림과 같다.

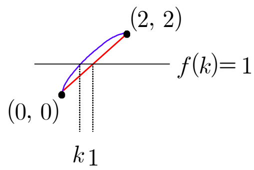


주어진 부등식을 만족하려면 $f(k)=x$이고 $k>x$을 만족해야 한다.

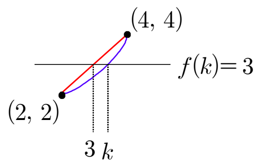
이때 $f(x)=x$를 만족하는 $\{0,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 10\}$는 주어진 부등식을 만족하지 않는다.

그러므로 닫힌구간 $[0,\ 10]$에서 주어진 부등식을 만족하는 정수 x의 값은 $1,\ 3,\ 7,\ 9$ 중에 존재한다.

$x=1$일 때 : $f(k)=1$이면서 $k<1$이므로 성립하지 않는다.



$x=3$일 때 : $f(k)=3$이면서 $k>3$이므로 성립한다.



$x=7$일 때 : $f(k)=7$이면서 $k<7$이므로 성립하지 않는다.

$x=9$일 때 : $f(k)=9$이면서 $k>9$이므로 성립한다.

따라서 만족하는 모든 정수 x의 값의 합은

$3+9=12$

374. ②

$g(f(x))=x$를 미분하면 $g'(f(x))f'(x)=1$이므로

$$f'(x)=\frac{1}{g'(f(x))}$$

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이고 $g'(x)>0$이므로

$\ln f'(x)=-\ln g'(f(x))$

$$\int_4^0\left\{\frac{f''(x)}{f'(x)}\ln g'(f(x))\right\}dx=\int_0^4\left\{-\frac{f''(x)}{f'(x)}\ln g'(f(x))\right\}dx$$

$t=\ln f'(x)=-\ln g'(f(x))$라 하면 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{f''(x)}{f'(x)}$

$f'(0)=e,\ f'(4)=e^5$ 이므로

$x=0$일 때 $t=\ln|f'(0)|=\ln e=1$

$x=4$일 때 $t=\ln|f'(4)|=\ln e^5=5$

$$\int_0^4\left\{-\frac{f''(x)}{f'(x)}\ln g'(f(x))\right\}dx=\int_1^5 t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^5=\frac{25}{2}-\frac{1}{2}=12$$

375. ①

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x(\cos x-\sin x)}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1-\cos 2x}{2}}{\cos 2x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin 2x}{\cos 2x}-\frac{1}{\cos 2x}+1\right)dx \cdots ①$$

이때 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos 2x}dx$ 에서

$t=\cos 2x$ 라 하면 $\frac{dt}{dx}=-2\sin 2x$

$x=0$ 일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t=-1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos 2x}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{t}dt=\frac{1}{2}[\ln|t|]_{-1}^{1}=0 \quad \cdots ②$$

또 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos 2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{\cos^2 2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{1-\sin^2 2x}dx$ 에서

$t=\sin 2x$ 라 하면 $\frac{dt}{dx}=2\cos 2x$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{1-\sin^2 2x}dx=\frac{1}{2}\int_0^0 \frac{1}{1-t^2}dt=0 \quad \cdots ③$$

②, ③을 ①에 대입하면

$$\therefore\ \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin 2x}{\cos 2x}-\frac{1}{\cos 2x}+1\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}dx=\left[\frac{1}{2}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

[다른 풀이]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2}(\sin x+\cos x+\sin x-\cos x)}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}dx-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx \quad \cdots ①$$

이때 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ 에서

$t=\sin x+\cos x$ 라 하면 $\frac{dt}{dx}=\cos x-\sin x$

$x=0$ 일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int_1^1 \frac{1}{t}dt=0$$

이것을 ①에 대입하면 따라서

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}dx-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}dx=\left[\frac{1}{2}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

376. (1) $\mathrm{I}_{-1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\mathrm{I}_0=\frac{\pi}{4}$, $\mathrm{I}_2=1$

(2) $\mathrm{I}_1=\ln(\sqrt{2}+1)$

(3) $\mathrm{I}_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(\cos x)^n}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{(\cos x)^{n+1}}dx$

$u=(\cos x)^{-n-1}$, $v'=\cos x$라 하면

$u'=(-n-1)(\cos x)^{-n-2}\cdot(-\sin x)$이고 $v=\sin x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{(\cos x)^{n+1}}dx$$

$$=\left[\frac{\sin x}{(\cos x)^{n+1}}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{(-n-1)\times\frac{\sin x}{(\cos x)^{n+2}}\times(-\sin x)\right\}dx$$

$$=(\sqrt{2})^n-(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{(\cos x)^{n+2}}\times\sin^2 x\right)dx$$

$$=(\sqrt{2})^n-(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{\frac{1}{(\cos x)^{n+2}}\times(1-\cos^2 x)\right\}dx$$

$$=(\sqrt{2})^n-(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(\cos x)^{n+2}}dx+(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(\cos x)^n}dx$$

$$=(\sqrt{2})^n-(n+1)\mathrm{I}_{n+2}+(n+1)\mathrm{I}_n$$

따라서 $\mathrm{I}_n=(\sqrt{2})^n-(n+1)\mathrm{I}_{n+2}+(n+1)\mathrm{I}_n$ 이므로

$\therefore\ n\mathrm{I}_n-(n+1)\mathrm{I}_{n+2}+(\sqrt{2})^n=0$

(4) $\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1)+\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^3}dx=\frac{3}{32}\pi+\frac{1}{4}$

(1) $\mathrm{I}_{-1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x\,dx=[\sin x]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\mathrm{I}_0=\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1dx=[x]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$

$\mathrm{I}_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 x\,dx=[\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}}=1$

(2) $\mathrm{I}_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx$

$t=\sin x$ 라 하면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$

$x=0$ 일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{4}$ 일 때 $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{1-t^2}dt$$

$$=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}(\ln|1+t|-\ln|1-t|)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1)^2$$

$$=\ln(\sqrt{2}+1)$$

(3) $\mathrm{I}_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(\cos x)^n}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{(\cos x)^{n+1}}dx$

$u=(\cos x)^{-n-1}$, $v'=\cos x$라 하면

$u'=(-n-1)(\cos x)^{-n-2}\cdot(-\sin x)$이고 $v=\sin x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{(\cos x)^{n+1}}dx$$

$$=\left[\frac{\sin x}{(\cos x)^{n+1}}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{(-n-1)\times\frac{\sin x}{(\cos x)^{n+2}}\times(-\sin x)\right\}dx$$

$$=(\sqrt{2})^n-(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{(\cos x)^{n+2}}\times\sin^2 x\right)dx$$

$$=(\sqrt{2})^n-(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{\frac{1}{(\cos x)^{n+2}}\times(1-\cos^2 x)\right\}dx$$

$$=(\sqrt{2})^n-(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(\cos x)^{n+2}}dx+(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(\cos x)^n}dx$$

$$=(\sqrt{2})^n-(n+1)\mathrm{I}_{n+2}+(n+1)\mathrm{I}_n$$

따라서 $\mathrm{I}_n=(\sqrt{2})^n-(n+1)\mathrm{I}_{n+2}+(n+1)\mathrm{I}_n$ 이므로

$\therefore\ n\mathrm{I}_n-(n+1)\mathrm{I}_{n+2}+(\sqrt{2})^n=0$

[다른 풀이]

$$\mathrm{I}_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(\cos x)^{n+2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec x)^n\cdot\sec^2 x\,dx$$

$u=(\sec x)^n$, $v'=\sec^2 x$라 하면

$u'=n(\sec x)^n\tan x$, $v=\tan x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec x)^n\cdot\sec^2 x\,dx$$

$$=\left[(\sec x)^n\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}n(\sec x)^n\tan^2 x\,dx$$

$$=(\sqrt{2})^n-\int_0^{\frac{\pi}{4}}n(\sec x)^n(\sec^2 x-1)dx$$

$$=(\sqrt{2})^n-\int_0^{\frac{\pi}{4}}n(\sec x)^{n+2}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}n(\sec x)^n dx$$

$$=(\sqrt{2})^n-n\mathrm{I}_{n+2}+n\mathrm{I}_n$$

따라서 $\mathrm{I}_{n+2}=(\sqrt{2})^n-n\mathrm{I}_{n+2}+n\mathrm{I}_n$ 이므로

$\therefore\ n\mathrm{I}_n-(n+1)\mathrm{I}_{n+2}+(\sqrt{2})^n=0$ $\cdots$①

(4) $\int_0^1\sqrt{x^2+1}\,dx$ 에서

$x=\tan\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면 $\frac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\int_0^1\sqrt{x^2+1}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2\theta}\cdot\sec^2\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\,d\theta=\mathrm{I}_3$$

(3)의 ①의 식에 $n=1$을 대입하면

$\mathrm{I}_1-2\mathrm{I}_3+\sqrt{2}=0$

(2)에서 $\mathrm{I}_1=\ln(\sqrt{2}+1)$이므로

$\therefore\ \mathrm{I}_3=\frac{1}{2}(\mathrm{I}_1+\sqrt{2})=\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1)+\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\int_0^1\frac{1}{(x^2+1)^3}dx$ 에서

$x=\tan\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면 $\frac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\int_0^1\frac{1}{(x^2+1)^3}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(1+\tan^2\theta)^3}\cdot\sec^2\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sec^4\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^4\theta\,d\theta=\mathrm{I}_{-4}$$

(3)의 ①의 식에 $n=-2$를 대입하면

$-2\mathrm{I}_{-2}+\mathrm{I}_0+(\sqrt{2})^{-2}=0$

(1)에서 $\mathrm{I}_0=\frac{\pi}{4}$이므로

$\mathrm{I}_{-2}=\frac{1}{2}\left(\mathrm{I}_0+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$

(3)의 ①의 식에 $n=-4$를 대입하면

$-4\mathrm{I}_{-4}+3\mathrm{I}_{-2}+(\sqrt{2})^{-4}=0$

$\therefore\ \mathrm{I}_{-4}=\frac{1}{4}\left(3\mathrm{I}_{-2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{8}\pi+1\right)=\frac{3}{32}\pi+\frac{1}{4}$

377. ①

$f(x)=x^2+bx+c$라 하면

$f'(x)=2x+b$

$f''(x)=2$

$g(x)=\ln\{f(x)+f'(x)+f''(x)-1\}$

$=\ln\{x^2+(b+2)x+b+c+1\}$

(나)에서

$g(1)=\ln(1+b+2+b+c+1)=\ln(2b+c+4)=\ln 3$

$\therefore\ c=-2b-1$

$g(x)=\ln\{x^2+(b+2)x-b\}$ $\cdots$①

(가)에서

$\int_a^{2a+x} g(t)\,dt=\int_{2a-x}^{a+2} g(t)\,dt$ $\cdots$②

$g(t)$의 한 부정적분을 $G(t)$라 하면

$G(2a+x)-G(a)=G(a+2)-G(2a-x)$

양변을 x에 대하여 미분하면

$g(2a+x)=g(2a-x)$

따라서 $y=g(x)$는 $x=2a$에 대하여 대칭이다.

①에서 $g(x)$는 $x=-\frac{b+2}{2}$에 대하여 대칭이므로

$2a=-\frac{b+2}{2}$ $\cdots$③

②에 $x=0$을 대입하면

$\int_a^{2a} g(t)\,dt=\int_{2a}^{a+2} g(t)\,dt$

$g(x)>0$을 만족하므로 $\frac{a+(a+2)}{2}=2a$

$\therefore\ a=1$

③에 대입하면 $b=-6$

$f'(x)=2x-6$

$g(x)=\ln(x^2-4x+6)$

$\therefore\ \int_3^7\{f'(x)+2a\}g(x)\,dx=\int_3^7(2x-4)\ln(x^2-4x+6)dx$

$t=x^2-4x+6$이라 하면

$\frac{dt}{dx}=2x-4,\ x=3$일 때 $t=3,\ x=7$일 때 $t=27$이므로

$\therefore\ \int_3^7(2x-4)\ln(x^2-4x+6)dx$

$=\int_3^{27}\ln t\,dt$

$=[t\ln t-t]_3^{27}$

$=(27\ln 27-27)-(3\ln 3-3)$

$=78\ln 3-24$

378. ③

$2^x-\cos\pi x=f(x)$라고 하고, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면,

$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_2^x(2^t-\cos\pi t)dt$

$=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}$

$=F'(2)=f(2)=3$

379. ③

$e^y=x+1,\ x=e^y-1$

$\int_0^2(e^y-1)dy=\left[e^y-y\right]_0^2=e^2-3$

380. ⑤

$\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}\int_3^x\frac{f'(t)}{f(t)}dt=9$

$g(t)=\ln|f(t)|$라 하면 $g'(t)=\frac{f'(t)}{f(t)}$이므로

$\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}\int_3^x\frac{f'(t)}{f(t)}dt=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}\int_3^x g'(t)dt$

$=\lim_{x\to 3}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}$

$=g'(3)$

$=\frac{f'(3)}{f(3)}=9$

$f(3)=3$이므로 $f'(3)=27$

$\lim_{x\to 3}\frac{1}{x^2-9}\int_9^{3x}f'\left(\frac{1}{3}t\right)dt$

$s=\frac{1}{3}t$라 하면 $\frac{ds}{dt}=\frac{1}{3}$

$t=9$일 때 $s=3,\ t=3x$일 때 $s=x$

$\lim_{x\to 3}\frac{1}{x^2-9}\int_9^{3x}f'\left(\frac{1}{3}t\right)dt=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x^2-9}\int_3^x 3f'(s)ds$

$=\lim_{x\to 3}\frac{3\{f(x)-f(3)\}}{(x-3)(x+3)}$

$=\frac{1}{2}f'(3)$

$=\frac{27}{2}$

381. ①

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(\sin^3\frac{k\pi}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(\sin^3\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n}\right)\cdot\frac{1}{\pi}$

$=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\sin^3\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n}$

$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sin^3x\,dx$

$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(1-\cos^2x)\sin x\,dx$

$=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^\pi\sin x\,dx-\int_0^\pi\cos^2x\cdot sinx\,dx\right)$

$=-\frac{1}{\pi}\left\{\left[\cos x\right]_0^\pi-\frac{1}{3}\left[\cos^3x\right]_0^\pi\right\}$

$=-\frac{1}{\pi}(-1-1)+\frac{1}{3\pi}(-1-1)$

$=\frac{4}{3\pi}$

382. ④

$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\sum_{k=1}^n f\left(-1+\frac{2k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f\left(-1+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}\cdot 2$

$=2\int_{-1}^{1}f(x)dx$

$=2\int_{-1}^{1}(2x^3+3x^2)dx$

$=4\int_{0}^{1}3x^2dx$

$=4\left[x^3\right]_0^1=4$

383. $4-\dfrac{8}{\pi}$

$\angle \mathrm{AOP}_k=\dfrac{\pi}{2}\times\dfrac{1}{n}\times k=\dfrac{k\pi}{2n}$ 이므로

부채꼴 OAP_k의 넓이는 $S_k=\dfrac{1}{2}\times4\times\dfrac{k\pi}{2n}=2\times\dfrac{k\pi}{2n}$

삼각형 OBP_k의 넓이는 $T_k=\dfrac{1}{2}\times4\times sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{k\pi}{2n}\right)=2\cos\dfrac{k\pi}{2n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}S_kT_k=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}2\times\dfrac{k\pi}{2n}\times2\cos\dfrac{k\pi}{2n}$

$=\dfrac{2}{\pi}\times4\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{\pi}{2n}\times\dfrac{k\pi}{2n}\times\cos\dfrac{k\pi}{2n}$

이때 $f(x)=x\cos x$, $\Delta x=\dfrac{\pi}{2n}$, $x_k=\dfrac{k\pi}{2n}$ 라 하면

$\dfrac{8}{\pi}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{\pi}{2n}\times\dfrac{k\pi}{2n}\times\cos\dfrac{k\pi}{2n}=\dfrac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx$

$=\dfrac{8}{\pi}\left\{\left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx\right\}=\dfrac{8}{\pi}\left\{\dfrac{\pi}{2}+\left[\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right\}$

$=\dfrac{8}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)=4-\dfrac{8}{\pi}$

384. ②

모든 실수 x에 대하여 $y=\cos^2x+2>0$이므로

곡선 $y=\cos^2x+2$와 x축 및 두 직선 $x=t$, $x=t+\dfrac{\pi}{4}$로

둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_t^{t+\frac{\pi}{2}}(\cos^2x+2)dx$

$=\int_t^{t+\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{1+\cos2x}{2}+2\right)dx$

$=\int_t^{t+\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{1}{2}\cos2x+\dfrac{5}{2}\right)dx$

$=\left[\dfrac{1}{4}\sin2x+\dfrac{5}{2}x\right]_t^{t+\frac{\pi}{4}}$

$=\dfrac{1}{4}\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{2}\right)+\dfrac{5}{2}\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{1}{4}\sin2t-\dfrac{5}{2}t$

$=\dfrac{1}{4}\cos2t-\dfrac{1}{4}\sin2t+\dfrac{5}{8}\pi$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos2t\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\sin2t\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+\dfrac{5}{8}\pi$

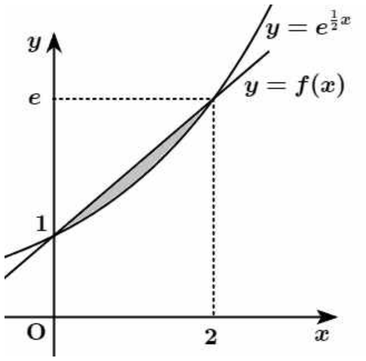
$=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\cos\left(2t+\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{5}{8}\pi$

따라서 최댓값은 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}+\dfrac{5}{8}\pi$

385. ②

두 점 $(0,\ 1)$, $(2,\ e)$를 지나는 직선의 방정식을 $y=f(x)$라 하면

$f(x)=\dfrac{e-1}{2}x+1$



따라서 $y=e^{\frac{1}{2}x}$와 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_0^2\left(\dfrac{e-1}{2}x+1-e^{\frac{1}{2}x}\right)dx$

$=\left[\dfrac{e-1}{4}x^2+x-2e^{\frac{1}{2}x}\right]_0^2$

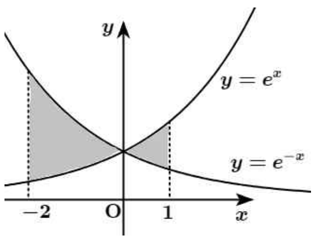
$=(e-1+2-2e)-(0+0-2)$

$=-e+3$

$p=-1$, $q=3$

$\therefore\ p+q=2$

386. ⑤



$\int_{-2}^{1}|e^x-e^{-x}|dx=\int_{-2}^{0}(e^{-x}-e^x)dx+\int_0^1(e^x-e^{-x})dx$

$=\left[-e^{-x}-e^x\right]_{-2}^0+\left[e^x+e^{-x}\right]_0^1$

$=(-1-1)-(-e^2-e^{-2})+(e+e^{-1})-(1+1)$

$=e^2+e+\dfrac{1}{e^2}+\dfrac{1}{e}-4$

387. ②

x좌표가 x인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 정삼각형이므로 그 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}x$

따라서 구하는 부피는

$$V_n=\int_n^{n+1}\frac{\sqrt{3}}{4}x\,dx=\left[\frac{\sqrt{3}}{8}x^2\right]_n^{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{8}(2n+1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{V_n V_{n+1}}=\frac{64}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{32}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right\}$$

$=\frac{32}{9}$ 이므로 $q-p=23$

388. ④

$y=\sqrt{e^x}$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(x,\ \sqrt{e^x})$에서

x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{e^x}$

빗변의 길이가 $\sqrt{e^x}$ 인 직각이등변삼각형의 한 변의 길이는

$\frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{2}}$ 이므로 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{e^x}{2}=\frac{1}{4}e^x$

따라서 구하는 부피는

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}e^x dx=\left[\frac{1}{4}e^x\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{4}\left(e-\frac{1}{e}\right)=\frac{e}{4}-\frac{1}{4e}$$

389. ②

점 $(x,\ 0)$ $(0\le x\le 2)$를 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

단면은 한 변의 길이가 $-x^2+2x$인 정사각형이므로

$S(x)=(-x^2+2x)^2=x^4-4x^3+4x^2$

따라서 구하는 부피는

$$\int_0^2(x^4-4x^3+4x^2)dx=\left[\frac{1}{5}x^5-x^4+\frac{4}{3}x^3\right]_0^2$$

$$=\frac{32}{5}-16+\frac{32}{3}$$

$$=\frac{16}{15}$$

390. ④

$x=2\ln t,\ y=t+\frac{1}{t}$ 일 때 $\frac{dx}{dt}=\frac{2}{t},\ \frac{dy}{dt}=1-\frac{1}{t^2}$

$t=1$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^3\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_1^3\sqrt{\frac{4}{t^2}+1+\frac{1}{t^4}-\frac{2}{t^2}}\,dt$$

$$=\int_1^3\sqrt{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_1^3\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=\left[t-\frac{1}{t}\right]_1^3$$

$$=\frac{8}{3}$$

391. ①

$x=e^{-t}\cos 2t,\ y=e^{-t}\sin 2t$

$$\frac{dx}{dt}=-e^{-t}\cos 2t-2e^{-t}\sin 2t=-e^{-t}(\cos 2t+2\sin 2t)$$

$$\frac{dy}{dt}=-e^{-t}\sin 2t+2e^{-t}\cos 2t=-e^{-t}(\sin 2t-2\cos 2t)$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{5e^{-2t}}$$

$$s(a)=\int_0^a\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_0^a\sqrt{5e^{-2t}}\,dt$$

$$=\int_0^a\sqrt{5}\,e^{-t}dt=\left[-\sqrt{5}\,e^{-t}\right]_0^a=-\sqrt{5}\left(\frac{1}{e^a}-1\right)$$

$$\therefore\ \lim_{a\to\infty}s(a)=-\sqrt{5}\lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{e^a}-1\right)=\sqrt{5}$$

392. ③

곡선 $y=\ln\left(\frac{16}{7}-\frac{16}{7}x^2\right)$이 x축과 만나는 점의 x 좌표는

$x=\pm\frac{3}{4}x$

$$y'=\frac{-\frac{32}{7}x}{\frac{16}{7}(1-x^2)}=\frac{-2x}{1-x^2}$$

$0\le x\le\frac{3}{4}$에서 구하는 곡선의 길이를 l이라 하면

$$l=\int_0^{\frac{3}{4}}\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{3}{4}}\frac{1+x^2}{1-x^2}dx$$

$$=\int_0^{\frac{3}{4}}\left(-1+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$=\left[-x-\ln(1-x)+\ln(1+x)\right]_0^{\frac{3}{4}}$$

$$=\ln 7-\frac{3}{4}$$

따라서 둘레의 길이는 $2\left(\ln 7-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\right)=2\ln 7$

393. ③

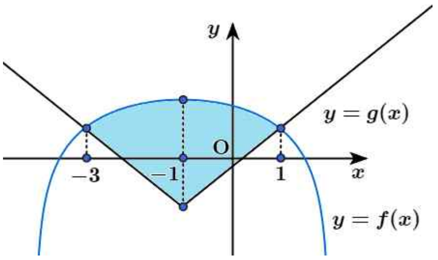
$f(x)=\ln(4+x)+\ln(2-x)-1$의 정의역은 $-4<x<2$

$f(x)=g(x)$에서

$\ln(4+x)+\ln(2-x)-1=|x+1|\ln\sqrt{5}-1$

만나는 두 점의 x좌표가 모두 정수이므로 $x=-3$ 또는 $x=1$

$y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프를 그리면 아래와 같다.



두 그래프 모두 $x=-1$에 대하여 대칭이므로 두 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는

$2\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx$

$=2\int_{-1}^{1}\{\ln(4+x)+\ln(2-x)-(x+1)\ln\sqrt{5}\}dx \quad \cdots①$

$\int_{-1}^{1}\ln(4+x)dx=[(4+x)\ln(4+x)]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}1dx$

$=[(4+x)\ln(4+x)-x]_{-1}^{1}$

$=(5\ln5-1)-(3\ln3+1)$

$=5\ln5-3\ln3-2 \quad \cdots②$

$\int_{-1}^{1}\ln(2-x)dx=[(x-2)\ln(2-x)]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}1dx$

$=[(x-2)\ln(2-x)-x]_{-1}^{1}$

$=(-\ln1-1)-(-3\ln3+1)$

$=3\ln3-2 \quad \cdots③$

$\int_{-1}^{1}(x+1)\ln\sqrt{5}\,dx=\left[\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\ln\sqrt{5}\right]_{-1}^{1}$

$=\left\{\left(\frac{1}{2}+1\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right\}\ln\sqrt{5}$

$=\ln5 \quad \cdots④$

②, ③, ④를 ①에 대입하면

$\therefore\ 2\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx$

$=2\{(5\ln5-3\ln3-2)+(3\ln3-2)-\ln5\}$

$=8\ln5-8$

394. ③

$y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}_k(x_k,\ f(x_k))$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(x_k)(x-x_k)+f(x_k)=f'(x_k)x-x_kf'(x_k)+f(x_k)$

x축과 만나는 점의 좌표가 B_k이므로

$\mathrm{B}_k\left(x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\ 0\right)$

점 A_k에서 x축에 내린 수선의 발이 C_k이므로 $\mathrm{C}_k(x_k,\ 0)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k}=\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\{f(x_k)\}^4}{\overline{\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\{f(x_k)\}^3f'(x_k)$

$x_k=-1+\frac{k}{n}$이므로 $\Delta x=\frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\{f(x_k)\}^3f'(x_k)=\int_{-1}^{0}\{f(x)\}^3f'(x)dx$

$t=f(x)$라 하면 $\frac{dt}{dx}=f'(x)$

$f(x)=e^{2x}+e^x+\frac{x}{e}$ 이므로

$x=-1$일 때 $t=f(-1)=e^{-2}+e^{-1}-\frac{1}{e}=e^{-2}$

$x=0$일 대 $t=f(0)=1+1+0=2$

$\therefore\ \int_{-1}^{0}\{f(x)\}^3f'(x)dx=\int_{e^{-2}}^{2}t^3dt=\left[\frac{1}{4}t^4\right]_{e^{-2}}^{2}=4-\frac{1}{4e^8}$

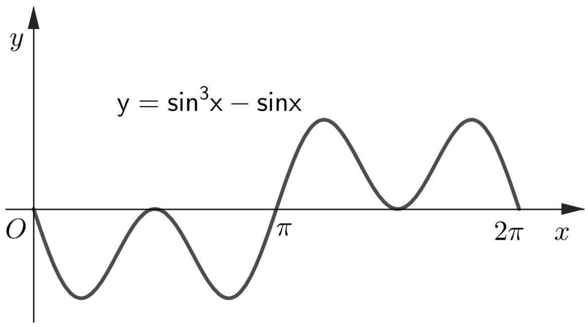
395. ⑤

$f(x)=\sin^3x-k\sin x=0$

$\sin x=0$에서 $x=0,\ \pi,\ 2\pi$

$\sin^2x=k$이 $0\le x\le 2\pi$에서 두 개의 실근을 가지려면 $k=1$이다.

그래프를 그려보면



$f(x)$가 x축으로 둘러싸인 넓이는 $\frac{\pi}{2}$간격으로 같다

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=-\frac{1}{3}$ 이므로 가능한 $\int_0^{2\pi}g(x)dx$의 값은

$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$, $-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ 의 2개다.

따라서 그 합은 2이다.