내신대비 모의고사

범위 : 미분-적분

시험시간 : 50분

이름 :

[객관식]

1. 함수 $f(x)=x^3-6x^2-15x+3$가 감소하는 구간은?

① $(\infty, -1]$ ② $[-1, 3]$ ③ $[-1, 5]$
④ $[1, 2]$ ⑤ $[1, 3]$

2. 정적분 $\int_{-1}^{1}\frac{x^3-26}{x-3}dx+\int_{1}^{-1}\frac{1}{x-3}dx$의 값은?

① $\frac{56}{3}$ ② 20 ③ $\frac{62}{3}$
④ $\frac{64}{3}$ ⑤ 22

3. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$\int_{-1}^{x}f(t)dt=3x^3+ax^2+2a$를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?

① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

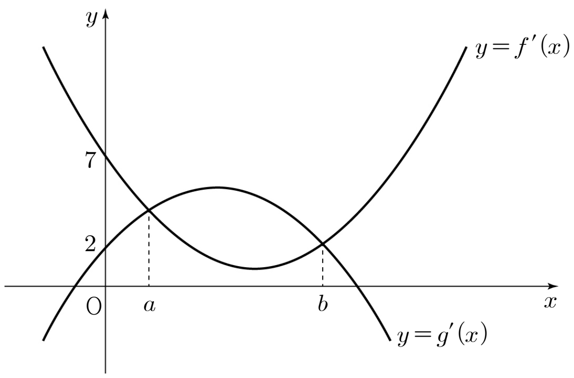
4. $\lim_{h\to 3}\left\{\frac{1}{h^3-27}\int_{3}^{h}(x^3-5x+3)dx\right\}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{9}$ ③ 9
④ 11 ⑤ $\frac{31}{3}$

5. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+3x-7$는 극값을 갖고, 함수 $g(x)=x^3+ax^2-2ax+5$은 극값을 갖지 않도록 하는 정수 a의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

6. 아래 그림과 같이 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$의 도함수 $y=f'(x)$, $y=g'(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표는 a, $b(0<a<b)$이다. 함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$라 할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $f'(0)=7$, $g'(0)=2$) [4점] [2016년 07월 교육청]



| 보기 |

ㄱ. 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다.

ㄴ. $h(b)=0$이면 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

ㄷ. $0<\alpha<\beta<b$인 두 실수 α, β에 대하여 $h(\beta)-h(\alpha)<5(\beta-\alpha)$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

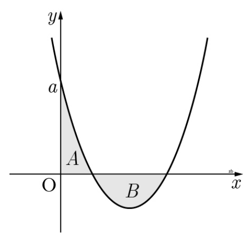
7. 방정식 $|2x^3-6x^2-18x+1|=k$가 서로 다른 네 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수는?

① 37 ② 39 ③ 41
④ 43 ⑤ 45

8. $x\geq -1$ 일 때, 부등식 $2x^3-9x^2+a\geq 0$이 성립하도록 하는 실수 a의 최솟값은?

① 19 ② 21 ③ 23
④ 25 ⑤ 27

9. 다음 그림과 같이 곡선 $y=2x^2-4x+a$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이를 각각 A, B라고 할 때, $A:B=1:2$이다. 이때 상수 a의 값은?



① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{8}{3}$
④ 3 ⑤ $\frac{10}{3}$

10. 곡선 $y=x^3-3x^2$과 직선 $y=x-3$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

11. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 그 도함수 $f'(x)$가 다음 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 극댓값을 p, 극솟값을 q라 할 때, $p-q$의 값은?

(가) 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극값을 갖는다.
(나) 모든 실수 x에서 $f'(2-x)=f'(2+x)$

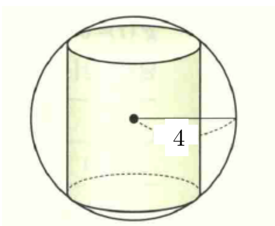
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

12. 역함수를 갖는 연속함수 $f(x)$가 다음 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시킨다. $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, $\int_2^5 g(x)dx$의 값은?

(가) $f(1)=2$, $f(3)=5$	(나) $\int_1^3 f(x)dx=5$

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

13. 반지름의 길이가 4인 구에 내접하는 원기둥이 있다. 이 원기둥의 부피가 최대일 때, 원기둥의 높이는?



① $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{10\sqrt{3}}{3}$
③ $4\sqrt{3}$ ④ $\frac{14\sqrt{3}}{3}$
⑤ $\frac{16\sqrt{3}}{3}$

14. 함수 $f(x)=\begin{cases}-1 & (x<1)\\ -x+2 & (x\geq 1)\end{cases}$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_{-1}^{x}(t-1)f(t)\,dt$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점] [2008년 9월 가10]

| 보기 |

ㄱ. $g(x)$는 열린구간 $(1,2)$에서 증가한다.

ㄴ. $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

ㄷ. 방정식 $g(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k가 존재한다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[주관식]

15. 함수 $f(x)=x^3-2x+2$에 대하여 닫힌구간 $[0,2]$에서 평균값 정리를 만족시키는 실수 c의 값을 구하시오.

16. 좌표가 2인 점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서 속도가 $v(t)=6t-6t^2$일 때, 다음을 각각 구하시오.

(1) 시각 $t=1$에서 점 P의 위치

(2) 시각 $t=\frac{1}{2}$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량

(3) 시각 $t=\frac{1}{2}$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리

17. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서 위치를 각각 $x_P=t^3-t^2$, $x_Q=t^2-2t$이다. 이때, 두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이는 t의 값의 범위를 구하시오.

18. 다항함수 $f(x)$가 $xf(x)=3x^3+2x^2\int_0^1 f'(t)dt+\int_1^x f(t)dt$를 만족시킬 때, $f(x)$를 구하시오.

19. 함수 $y=x^2+3$ 위를 움직이는 점 P와 원 $(x-5)^2+(y-2)^2=5$ 위를 움직이는 점 Q가 있다. 두 점 P, Q 사이의 거리의 최솟값을 구하시오. (단, 최솟값을 구하는 과정에서 함수의 증가와 감소를 표로 나타내시오.)

20. 삼차함수 $f(x)=x^3-3x-1$이 있다. 실수 t $(t\geq -1)$에 대하여 $-1\leq x\leq t$에서 $|f(x)|$의 최댓값을 $g(t)$라고 하자. $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점] [2010학년도 수능]

정답 및 풀이

1. 정답 ③

$f(x)=x^3-6x^2-15x+3$에서

$f'(x)=3x^2-12x-15=3(x+1)(x-5)$

이때 $f'(x)\le 0$인 구간에서 함수 $f(x)$는 감소하므로

$3(x+1)(x-5)\le 0$

$\therefore\ -1\le x\le 5$

2. 정답 ①

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^3-26}{x-3}dx+\int_{1}^{-1}\frac{1}{x-3}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{x^3-26}{x-3}dx-\int_{-1}^{1}\frac{1}{x-3}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{x^3-27}{x-3}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^2+3x+9)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+9x\right]_{-1}^{1}$$

$$=\frac{56}{3}$$

3. 정답 ④

$$\int_{-1}^{x}f(t)dt=3x^3+ax^2+2a$$

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=-3+a+2a,\quad a=1$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=9x^2+2x$

$\therefore\ f(1)=11$

4. 정답 ②

$$\lim_{h\to3}\left\{\frac{1}{h^3-27}\int_{3}^{h}(x^3-5x+3)dx\right\}$$

$$=\lim_{x\to3}\left\{\frac{1}{x^3-27}\int_{3}^{x}f(t)dt\right\}\qquad \Leftarrow\ f(t)=t^3-5t+3$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{F(x)-F(3)}{x-3}\cdot\frac{1}{x^2+3x+9}\qquad \Leftarrow\ F'(t)=f(t)$$

$$=\frac{1}{27}F'(3)=\frac{1}{27}f(3)=\frac{1}{27}\times15=\frac{5}{9}$$

5. 정답 ③

$f(x)=x^3+ax^2+3x-7$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+3$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 도함수 $f'(x)$의 부호가 바뀌는 부분이 있어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

방정식 $f'(x)=3x^2+2ax+3=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-9>0$

$(a+3)(a-3)>0$

$\therefore\ a<-3$ 또는 $a>3$ ······㉠

$g(x)=x^3+ax^2-2ax+5$에서 $g'(x)=3x^2+2ax-2a$

함수 $g(x)$가 극값을 갖지 않으려면 방정식 $g'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로

방정식 $g'(x)=3x^2+2ax-2a=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=a^2+6a\le 0$

$a(a+6)\le 0$

$\therefore\ -6\le a\le 0$ ······㉡

㉠, ㉡의 공통 범위는 $-6\le a<-3$

따라서 정수 a는 $-6,\ -5,\ -4$이므로 개수는 3개이다.

6. 정답 ⑤

$h(x)=f(x)-g(x)$에서 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$

$h'(x)=0$에서 $x=a$ 또는 $x=b$

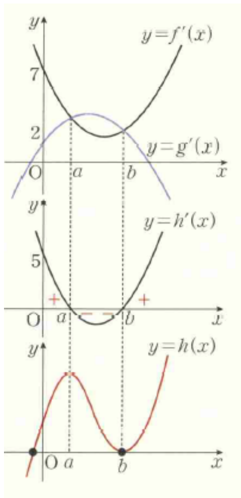
함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

ㄱ. 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다. (참)

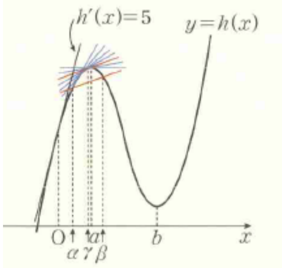
ㄴ. $h(b)=0$일 때, 함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (참)



ㄷ. 함수 $h(x)$는 닫힌구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 연속이고 열린구간 $(\alpha,\ \beta)$에서 미분 가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}=h'(\gamma)$를 만족시키는 γ가 열린구간 $(\alpha,\ \beta)$에서 존재한다.



열린구간 $(0,\ b)$에 있는 모든 실수 x에 대하여 $h'(x)<5$이므로

$\dfrac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}=h'(\gamma)<5$ ⬅ $h'(0)=f'(0)-g'(0)=7-2=5$

$\therefore\ h(\beta)-h(\alpha)<5(\beta-\alpha)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

7. 정답 ③

$f(x)=2x^3-6x^2-18x+1$라 하면

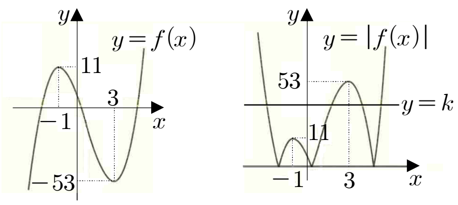
$f'(x)=6x^2-12x-18=6(x+1)(x-3)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	11	↘	-53	↗

$y=f(x)$, $y=|f(x)|$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



따라서 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로

$\therefore\ 11<k<53$

따라서 정수 k는 41개

8. 정답 ⑤

$f(x)=2x^3-9x^2+a$라 하면

$f'(x)=6x^2-18x=6x(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	$a-11$	↗	a	↘	$a-27$	↗

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $a-27$이므로 $x\geq-1$에서 $f(x)\geq0$이 항상 성립하려면

$a-27\geq0,\quad \therefore\ a\geq27$

즉 실수 a의 최솟값은 27이다.

9. 정답 ①

$y=2x^2-4x+a=2(x-1)^2+a-2$에서 주어진 그래프는 $x=1$에서 대칭이고 넓이 B는 $x=1$에 의해 이등분된다.

이때 A부분과 B부분의 넓이의 비가 $1:2$에서 $\frac{1}{2}B=A$이므로 A는 $y=2x^2-4x+a$와 x축 및 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

즉, $\int_0^1(2x^2-4x+a)dx=0$이다.

$\int_0^1(2x^2-4x+a)dx$

$=\left[\frac{2}{3}x^3-2x^2+ax\right]_0^1$

$=-\frac{4}{3}+a$

따라서 $-\frac{4}{3}+a=0$이므로 $a=\frac{4}{3}$

10. 정답 ⑤

곡선 $y=x^3-3x^2$과 직선 $y=x-3$의 교점의 x좌표는

$x^3-3x^2=x-3$에서

$x^3-3x^2-x+3=0,\ (x+1)(x-1)(x-3)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^1(x^3-3x^2-x+3)dx+\int_1^3(-x^3+3x^2+x-3)dx$

$=2\left[-x^3+3x\right]_0^1+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3+\frac{1}{2}x^2-3x\right]_1^3$

$=8$

11. 정답 ④

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

이때 조건 (가)에 의하여 $f'(1)=0$

$3+2a+b=0$

또 조건 (나)에 의하여 $f'(x)$는 $x=2$에 대칭 이므로 $x=1$에서 극값을 가지므로 $x=3$에서도 극값을 갖기 때문에 $f'(3)=0$

$27+6a+b=0$

$\therefore\ a=-6,\ b=9$

$f(x)=x^3-6x^2+9x+c$

$p=f(1)=4+c,\quad q=f(3)=c$

$\therefore\ p-q=4$

12. 정답 ④

$\int_a^b f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)}f^{-1}(x)dx=bf(b)-af(a)$을 이용하면

$\int_1^3 f(x)dx+\int_2^5 g(x)dx=3\times5-1\times2$

$\int_1^3 f(x)dx=5$이므로

$5+\int_2^5 g(x)dx=13$

$\int_2^5 g(x)dx=8$

13. 정답 ①

원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 r, 높이를 h라고 하면 $0<h<8$

$(2r)^2+h^2=8^2$

$\therefore\ r^2=\dfrac{64-h^2}{4}\cdots\cdots$ ㉠

원기둥의 부피를 $V(h)$라고 하면

$V(h)=\pi r^2h$

㉠을 대입하면

$V(h)=\pi\cdot\dfrac{64-h^2}{4}\cdot h=\dfrac{\pi}{4}(-h^3+64h)$

$V'(h)=\dfrac{\pi}{4}(-3h^2+64)$

$=-\dfrac{3}{4}\pi\left(h^2-\dfrac{64}{3}\right)$

$=-\dfrac{3}{4}\pi\left(h+\dfrac{8}{\sqrt{3}}\right)\left(h-\dfrac{8}{\sqrt{3}}\right)$

$V(h)=0$에서 $h=-\dfrac{8}{\sqrt{3}}$ 또는 $h=\dfrac{8}{\sqrt{3}}$

$0<h<16$에서 $V(h)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

h	(0)	$\cdots$	$\dfrac{8}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(8)
$V'(h)$		+	0	-	
$V(h)$		↗	극대	↘	

따라서 $V(h)$는 $h=\dfrac{8}{\sqrt{3}}$일 때, 극대이면서 최대이므로 구하는

높이는 $h=\dfrac{8}{\sqrt{3}}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

14. 정답 ③

(ⅰ) $x<1$일 때,

$g(x)=\int_{-1}^{x}(t-1)f(t)dt=\int_{-1}^{x}(t-1)(-1)dt$

$=\left[-\dfrac{t^2}{2}+t\right]_{-1}^{x}=-\dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{3}{2}$

(ⅱ) $x\ge1$일 때,

$g(x)=\int_{-1}^{x}(t-1)f(t)dt$

$=\int_{-1}^{1}(t-1)(-1)dt+\int_{1}^{x}(t-1)(-t+2)dt$

$=\left[-\dfrac{t^2}{2}+t\right]_{-1}^{1}+\left[-\dfrac{t^3}{3}+\dfrac{3}{2}t^2-2t\right]_{1}^{x}$

$=-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3}{2}x^2-2x+\dfrac{17}{6}$

ㄱ. 열린구간 $(1,\ 2)$에서

$g'(x)=-x^2+3x-2=-(x-1)(x-2)$에서

$g'(x)>0$이므로 $g(x)$는 증가한다. (참)

ㄴ. $\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=0,\ \lim\limits_{x\to1-}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=0$

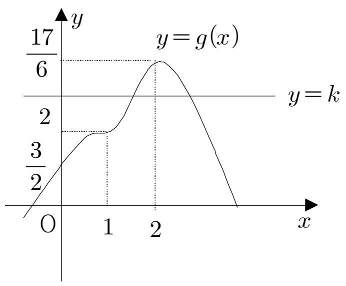
이므로 $x=1$에서 미분가능하다. (참)

ㄷ. $x<1$일 때, $g'(x)=-x+1$

$x>1$일 때, $g'(x)=-(x-1)(x-2)$

이므로 $y=g(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.

따라서 방정식 $g(x)=k$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 k가 존재하지 않는다. (거짓)



15. 정답 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

함수 $f(x)$는 다항함수이고 닫힌구간 $[0,2]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 2)$에서 미분가능하므로

평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'(c)$

인 c가 구간 $(0,\ 2)$에서 적어도 하나 존재한다.

$\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=\dfrac{4}{2}=2$이고

$f'(x)=3x^2-2$이므로

$f'(c)=3c^2-2$에서 $3c^2-2=2$

따라서 $c=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ $(\because\ 0<c<2)$

16. 정답 (1) 3 (2) $-\dfrac{9}{2}$ (3) $\dfrac{11}{2}$

(1) 시각 $t=0$에서 위치가 $x=2$이므로 구하는 위치는

$x=2+\int_0^1(6t-6t^2)dt=2+\left[3t^2-2t^3\right]_0^1=3$

(2) $\int_{\frac{1}{2}}^{2}(6t-6t^2)dt=\left[3t^2-2t^3\right]_{\frac{1}{2}}^{2}=-\frac{9}{2}$

(3) $\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left|6t-6t^2\right|dt=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(6t-6t^2)dt+\int_{1}^{2}(-6t+6t^2)dt$

$=\left[3t^2-2t^3\right]_{\frac{1}{2}}^{1}+\left[-3t^2+2t^3\right]_{1}^{2}=\frac{11}{2}$

17. 정답 $\frac{2}{3}<t<1$

두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=3t^2-2t$, $v_Q=2t-2$

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 $v_Pv_Q<0$이므로

$(3t^2-2t)(2t-2)<0$, $2t(3t-2)(t-1)<0$

$\therefore\ \frac{2}{3}<t<1$

18. 정답 $f(x)=\frac{9}{2}x^2-6x+\frac{3}{2}$

$xf(x)=3x^3+2x^2\int_0^1 f'(t)dt+\int_1^x f(t)dt$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=3+2\int_0^1 f'(t)dt+\int_1^1 f(t)dt$

$=3+2\Big[f(t)\Big]_0^1+0=3+2\{f(1)-f(0)\}$

$\therefore\ f(1)=2f(0)-3$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=9x^2+4x\int_0^1 f'(t)dt+f(x)$

$f'(x)=9x+4\int_0^1 f'(t)dt$

이때 $\int_0^1 f'(t)dt=k$ (k는 상수)라 하면

$f'(x)=9x+4k$

$\int_0^1(9t+4k)dt=\left[\frac{9}{2}t^2+4kt\right]_0^1=\frac{9}{2}+4k$

즉 $\frac{9}{2}+4k=k$이므로 $k=-\frac{3}{2}$

$\therefore\ f'(x)=9x-6$

$f(x)=\int(9x-6)dx=\frac{9}{2}x^2-6x+C$ (C는 적분상수)

㉡에서 $\frac{9}{2}-6+C=2C-3$ $\therefore\ C=\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{9}{2}x^2-6x+\frac{3}{2}$

19. 정답 $\sqrt{5}$

점 P의 x좌표를 t라고 하면 $P(t,\ t^2+3)$

원의 중심 $(5,2)$와 점 P 사이의 거리의 제곱을 $f(t)$라 하면

$f(t)=(t-5)^2+(t^2+1)^2=t^4+3t^2-10t+26$

$f'(t)=4t^3+6t-10=2(t-1)(2t^2+2t+5)$

$f'(t)=0$에서 $t=1$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	20	$\nearrow$

따라서 원의 중심과 점 P 사이의 거리의 최솟값은

$\sqrt{20}=2\sqrt{5}$이므로 두 점 P, Q사이의 거리의 최솟값은

$2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$이다.

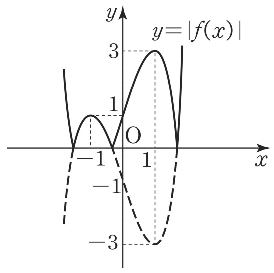
20. 정답 17

$f(x)=x^3-3x-1$에서

$f'(x)=3x^2-3$

$f'(x)=0$에서 $x=\pm1$

$f(-1)=1$, $f(1)=-3$이므로 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



$\therefore\ g(t)=\begin{cases}1 & (-1\le t\le 0)\\ -f(t) & (0\le t\le 1)\end{cases}$

$\therefore\ \int_{-1}^{1}g(t)dt=\int_{-1}^{0}1dt+\int_{0}^{1}-f(t)dt$

$=[t]_{-1}^{0}+\int_0^1(-t^3+3t+1)dt$

$=-(-1)+\left[-\frac{1}{4}t^4+\frac{3}{2}t^2+t\right]_0^1$

$=1+\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}+1\right)=\frac{13}{4}$

$\therefore\ p+q=4+13=17$