내신대비 모의고사

범위 : 미분-적분

시험시간 : 50분

이름 :

[객관식]

1. 함수 $f(x)=3x^2-2x$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여 $F(2)=-1$일 때, $F(0)$의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

2. 함수 $f(x)=8x^3-2ax$에 대하여 $\int_1^2 f(x)dx=f(1)$이 성립할 때, 상수 a의 값은?

① 24 ② 22 ③ 20
④ 18 ⑤ 16

3. 곡선 $y=-x^2+4x$와 그 위의 점 $(1,\ 3)$에서의 접선 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

4. 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $f(x)=x^3+6x^2+k$의 최댓값이 8일 때, 이 구간에서 함수 $f(x)$의 최솟값은?
(단, k는 상수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

5. 함수 $f(x)=4x^3+2x$에 대하여 $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x f(t)dt$의 값은?

① 3 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 15

6. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_{-2}^{2}\{f(x)+f(-x)\}dx=12$
(나) $\int_{-2}^{0}\{f(x)-f(-x)\}dx=-4$

$\int_0^2 f(x)dx$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

7. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=3t^3-4t^2+t$이다. $t=1$일 때의 점 P의 속도와 가속도는?

	속도	가속도		속도	가속도
①	1	8	②	1	10
③	2	8	④	2	10
⑤	3	8			

8. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$가 $x(t)=t^3-6t^2-15t$일 때, 점 P가 운동방향을 바꿀 때의 시각은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

9. 두 곡선 $y=x^2-1$, $y=-x^2+2x+3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

10. 두 함수 $f(x)=2x^4-x+k$, $g(x)=4x^2-x+3$이 있다. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)>g(x)$가 성립하도록 하는 정수 k의 최솟값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

11. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=t^2-4t+3$일 때, 출발 후 두 번째로 운동 방향이 바뀌는 순간까지 점 P가 움직인 거리는?

① $\frac{5}{3}$ ② 2 ③ $\frac{7}{3}$
④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 3

12. 모든 실수 x에서 연속인 함수 $f(x)$의 도함수가 $f'(x)=\begin{cases}2x-1 & (x<1)\\ 4x^3-3 & (x\geq 1)\end{cases}$이고 $f(-1)=0$일 때, $f(2)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

13. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $f(t)$가 음이 아닌 모든 실수 t에 대하여 미분가능하고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $t \geq 0$에 대하여 $1 \leq f'(t) \leq 2$이다.
(나) 음이 아닌 모든 정수 n에 대하여 $t=4n$, $t=4n+1$, $t=4n+2$, $t=4n+3$에서의 위치는 각각 $f(4n)=6n$, $f(4n+1)=6n+\frac{3}{2}$, $f(4n+2)=6n+\frac{7}{2}$, $f(4n+3)=6n+5$이다.
(다) 음이 아닌 모든 정수 k에 대하여 $2k \leq t \leq 2k+1$에서 위치 $f(t)$는 각각 t에 대한 이차식이다.

$t=\frac{9}{4}$에서의 점 P의 속도는?

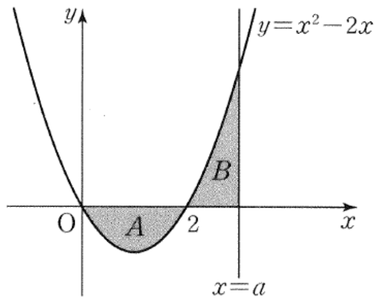
① 1 ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{7}{4}$ ⑤ 2

14. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=-2$
(나) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x+1)-4}{x(x-1)}=10$

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

15. 그림과 같이 곡선 $y=x^2-2x$와 x축 및 직선 $x=a$ $(a>2)$로 둘러싸인 두 도형 A, B의 넓이가 서로 같을 때, 상수 a의 값은?



① $\frac{8}{3}$ ② 3 ③ $\frac{10}{3}$
④ $\frac{11}{3}$ ⑤ 4

[주관식]

16. 원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도가 각각

$v_{\mathrm{P}}(t)=-2t+1,\ v_{\mathrm{Q}}(t)=4t-8$

이다. 원점을 출발한 후 두 점 P, Q가 만날 때의 시각을 t_1이라 하고, 두 점 사이의 거리가 최대일 때의 시각을 t_2라 할 때, t_1+t_2의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.
(단, $t_2<t_1$)

17. 함수 $f(x)=x^4+4x-a^2+4a+15$일 때, 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\ge 0$이 항상 성립하도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오.

18. 상수함수가 아닌 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)+2\int_1^x f(t)dt=4x^2-8x+1$

(나) $f(x)g'(x)=6x^2-16x+8$

$g(0)\neq 0$일 때, $g(4)$의 값을 구하시오.

19. 곡선 $y=x^2-2x+8$과 이 곡선 위의 점 $(2,\ 8)$에서의 접선 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

20. 삼차방정식 $2x^3-3x^2-12x+a=0$이 하나의 음의 실근과 서로 다른 두 양의 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하고 그 과정을 서술하시오.

21. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 $f(3)=0$이고,

$$\int_0^{2013} f(x)dx=\int_3^{2013} f(x)dx$$

를 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 S일 때, $30S$의 값을 구하시오.

22. 지상 $55\mathrm{m}$의 높이에서 처음 속도 $50\mathrm{m/s}$로 지면과 수직인 방향으로 물 로켓을 발사했다. 발사한 이 물 로켓의 t초 후의 속도 $v(t)$가 $v(t)=50-10t\ (\mathrm{m/s})$

일 때, 다음 물음에 답하고 그 과정을 서술하시오.

(1) 물 로켓이 최고 높이에 도달할 때, 지면으로부터의 높이를 구하시오.

(2) 물 로켓이 지면에 닿는 순간의 속도를 구하시오.

(3) 물 로켓이 지면에 닿을 때까지 움직인 거리를 구하시오.

정답 및 풀이

1. 정답 ⑤

$F(x)=\int(3x^2-2x)dx$

$=x^3-x^2+C$ (C는 적분상수)

$F(2)=-1$이므로 $4+C=-1$ $\quad\therefore\ C=-5$

따라서 $F(x)=x^3-x^2-5$이므로

$F(0)=-5$

2. 정답 ②

$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2(8x^3-2ax)dx=\Big[2x^4-ax^2\Big]_1^2$

$=(32-4a)-(2-a)=-3a+30$

$f(1)=-2a+8$이므로

$\int_1^2 f(x)dx=f(1)$에서 $-3a+30=-2a+8$

$\therefore\ a=22$

3. 정답 ②

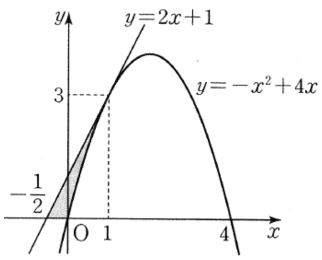
$y=-x^2+4x$에서 $y'=-2x+4$이므로

점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 기울기는 2이고

접선의 방정식은 $y-3=2(x-1)$, 즉 $y=2x+1$

직선 $y=2x+1$과 x축의 교점의 x좌표는

$2x+1=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times3-\int_0^1(-x^2+4x)dx$

$=\frac{9}{4}-\Big[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\Big]_0^1=\frac{7}{12}$

4. 정답 ④

$f'(x)=3x^2+12x=3x(x+4)$이므로

$x=0$ 또는 $x=-4$일 때 $f'(x)=0$이다.

닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$k+5$	↘	k	↗	$k+7$

따라서 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 $k+7$을 갖고, $x=0$일 때 최솟값 k를 갖는다.

$k+7=8$이므로 $k=1$

따라서 구하는 최솟값은 1이다.

5. 정답 ①

$F'(x)=f(x)$라 하면

$\int_1^x f(t)dt=F(x)-F(1)$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x f(t)dt=\lim_{x\to1}\left\{\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}$

$=F'(1)\times\frac{1}{2}=\frac{f(1)}{2}=3$

6. 정답 ⑤

조건 (가)에서 $g(x)=f(x)+f(-x)$라 하면

$g(-x)=f(-x)+f(x)=g(x)$이므로

함수 $y=f(x)+f(-x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

$\int_{-2}^2\{f(x)+f(-x)\}dx=2\int_0^2\{f(x)+f(-x)\}dx=12$

$\therefore\ \int_0^2\{f(x)+f(-x)\}dx=6$ $\quad\cdots\cdots$㉠

또한 조건 (나)에서 $h(x)=f(x)-f(-x)$라 하면

$h(-x)=f(-x)-f(x)=-h(x)$이므로

함수 $y=f(x)-f(-x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

$\therefore\ \int_0^2\{f(x)-f(-x)\}dx=-\int_{-2}^0\{f(x)-f(-x)\}dx$

$=2\int_0^2 f(x)dx=6+4=10$

$\therefore\ \int_0^2 f(x)dx=5$

다른풀이

다항함수 $f(x)$의 짝수차수의 항과 상수항의 합을 $g(x)$, 홀수차수의 항의 합을 $h(x)$라 하면 $f(x)=g(x)+h(x)$이다.

이때, $g(x)+g(-x)=2g(x)$이고,

$f(x)-f(-x)=2h(x)$이다.

조건 (가)에서

$\int_{-2}^2\{f(x)+f(-x)\}dx=\int_{-2}^2 2g(x)dx$

$=4\int_0^2 g(x)dx=12$

$\therefore \int_0^2 g(x)dx=3$

조건 (나)에서

$$\int_{-2}^{0}\{f(x)-f(-x)\}dx=\int_{-2}^{0}2h(x)dx$$
$$=-2\int_0^2 h(x)dx=-4$$

$\therefore \int_0^2 h(x)dx=2$

$$\therefore \int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\{g(x)+h(x)\}dx$$
$$=\int_0^2 g(x)dx+\int_0^2 h(x)dx=3+2=5$$

7. 정답 ④

점 P의 시각 t에서의 위치, 속도, 가속도를 각각 $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$라 하면 $x(t)=3t^3-4t^2+t$에서

$v(t)=x'(t)=9t^2-8t+1$

$a(t)=v'(t)=18t-8$

따라서 $t=1$일 때의 점 P의 속도, 가속도는 각각

$v(1)=2$, $a(1)=10$이다.

8. 정답 ⑤

점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면 점 P가 운동방향을 바꿀 때는 $v(t)$의 부호가 바뀔 때이다.

$v(t)=x'(t)=3t^2-12t-15=3(t+1)(t-5)$이므로

$v(t)=0$에서 $t=5$이다. $(\because\ t>0)$

이때, $t=5$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로

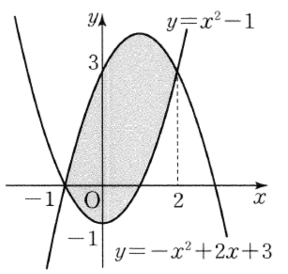
점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 시각은 $t=5$이다.

9. 정답 ⑤

두 곡선 $y=x^2-1$, $y=-x^2+2x+3$의 교점의 x좌표는

$x^2-1=-x^2+2x+3$에서 $2x^2-2x-4=0$

$2(x+1)(x-2)=0$ $\qquad\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$



닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 $x^2-1\le -x^2+2x+3$이므로

구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^{2}\{(-x^2+2x+3)-(x^2-1)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right]_{-1}^{2}=9$$

다른풀이

두 곡선 $y=x^2-1$, $y=-x^2+2x+3$의 교점의 x좌표는

$x^2-1=-x^2+2x+3$에서 $2x^2-2x-4=0$

$2(x+1)(x-2)=0$ $\qquad\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면 곡선 $y=2(x+1)(x-2)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로

$$S=\frac{|2|\{2-(-1)\}^3}{6}=9$$

10. 정답 ④

부등식 $f(x)>g(x)$에서

$2x^4-x+k>4x^2-x+3$, $2x^4-4x^2+k-3>0$

$h(x)=2x^4-4x^2+k-3$이라 하면

$h'(x)=8x^3-8x=8x(x+1)(x-1)$이므로

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$일 때 $h'(x)=0$이다.

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	$k-5$	$\nearrow$	$k-3$	$\searrow$	$k-5$	$\nearrow$

따라서 함수 $h(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=1$일 때 극소이며 최소이므로

모든 실수 x에 대하여 $h(x)>0$이 성립하려면

$h(-1)=h(1)=k-5>0$이어야 한다.

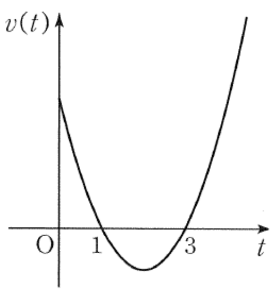
$\therefore\ k>5$

따라서 정수 k의 최솟값은 6이다.

11. 정답 ④

$v(t)=t^2-4t+3=(t-1)(t-3)=0$에서

$t=1$ 또는 $t=3$이고, 이때 점 P의 운동 방향이 바뀐다.



따라서 출발 후 두 번째로 운동 방향이 바뀌는 순간까지 점 P가

움직인 거리는

$$\int_0^3 |v(t)|dt = \int_0^1 (t^2-4t+3)dt + \int_1^3 (-t^2+4t-3)dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 - 3t\right]_1^3$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

12. 정답 ⑤

$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + C_1 & (x < 1) \\ x^4 - 3x + C_2 & (x \geq 1) \end{cases}$ 이고, $f(-1) = 0$이므로

$C_1 = -2$이다.

모든 실수 x에 대하여 연속이므로

$1^2 - 1 + (-2) = 1^4 - 3 \times 1 + C_2$이므로

$C_2 = 0$이다.

$f(2) = 2^4 - 3 \times 2 = 10$

13. 정답 ④

i) (나)에서 $n = 0$이면

$f(0) = 0,\ f(1) = \frac{3}{2},\ f(2) = \frac{7}{2},\ f(3) = 5$

음이 아닌 모든 정수 k에 대하여 $2k \leq t \leq 2k+1$이므로

$k = 0\ (0 \leq t \leq 1),\ k = 1\ (2 \leq t \leq 3)$에서 이차식이다.

ii) $t = \frac{9}{4}$가 포함된 구간에서 이차식이므로 특징을 살펴보면

$f(2) = \frac{7}{2},\ f(3) = 5$이고, 실수전체에서 미분가능하므로

$f'(2) = 2$이고, $f'(3) = 1$이다.

(구간 $1 \leq t \leq 2$사이의 평균변화율이 2)

iii) $f(x) = ax^2 + bx + c,\ f'(x) = 2ax + b$라 하면

$f'(2) = 4a + b = 2,\ f'(3) = 6a + b = 1$ 이므로

$a = -\frac{1}{2},\ b = 4$

따라서 $f'\left(\frac{9}{4}\right) = -\frac{9}{4} + 4 = \frac{7}{4}$

14. 정답 ①

조건 (가)에 의하여 $f(x) - 2x^3$은 최고차항의 계수가 -2인 이차식이므로

$f(x) - 2x^3 = -2x^2 + ax + b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x) = 2x^3 - 2x^2 + ax + b$

조건 (나)의 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x+1) - 4}{x(x-1)} = 10$에서 극한값이 존재하고,

$x \to 1$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x \to 1} \{f(x+1) - 4\} = f(2) - 4 = 0$에서

$f(2) = 4$ ⋯⋯ ㉠

즉, $16 - 8 + 2a + b = 4$에서 $2a + b = -4$ ⋯⋯ ㉡

$x + 1 = t$라 하면 $x \to 1$일 때 $t \to 2$이므로

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x+1) - 4}{x(x-1)} = \lim_{t \to 2} \frac{f(t) - f(2)}{(t-1)(t-2)} \ (\because ㉠)$$

$$= \lim_{t \to 2} \left\{\frac{f(t) - f(2)}{t-2} \times \frac{1}{t-1}\right\}$$

$$= f'(2)$$

에서 $f'(2) = 10$

$f'(x) = 6x^2 - 4x + a$이므로

$f'(2) = 24 - 8 + a = 10,\ a = -6$

㉡에 대입하면 $b = 8$

따라서 $f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 6x + 8$이므로

$f(1) = 2$

[다른 풀이]

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x+1) - 4}{x(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x+1) - f(2)}{x(x-1)} \ (\because ㉠)$$

$$= \lim_{x \to 1} \left\{\frac{1}{x} \times \frac{f(x+1) - f(2)}{(x+1) - 2}\right\}$$

$$= f'(2)$$

15. 정답 ②

두 도형 A, B의 넓이를 각각 S_A, S_B라 하면

$S_A = S_B$이므로

$\int_0^2 (-x^2 + 2x)dx = \int_2^a (x^2 - 2x)dx$에서

$$\int_2^a (x^2 - 2x)dx + \int_0^2 (x^2 - 2x)dx = 0$$

$$\int_0^a (x^2 - 2x)dx = 0$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_0^a = 0,\ \frac{a^3}{3} - a^2 = 0,\ a^2(a-3) = 0$$

$\therefore\ a = 3 (\because\ a > 2)$

16. 정답 $t_1 + t_2 = \frac{9}{2}$

출발 후 x초 후의 점 P의 위치는

$$0 + \int_0^x (-2t + 1)dt = \left[-t^2 + t\right]_0^x = -x^2 + x$$

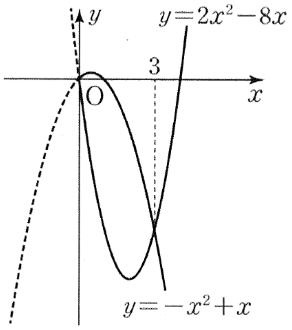
출발 후 x초 후의 점 Q의 위치는

$$0 + \int_0^x (4t - 8)dt = \left[2t^2 - 8t\right]_0^x = 2x^2 - 8x$$

두 점 P, Q가 만날 때, 위치가 서로 같으므로

$-x^2 + x = 2x^2 - 8x$에서 $3x(x-3) = 0$, $x = 0$ 또는 $x = 3$

$\therefore\ t_1 = 3$



$0<x<3$일 때, 두 점 P, Q 사이의 거리는

$(-x^2+x)-(2x^2-8x)=-3x^2+9x=-3\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{4}$

따라서 $x=\frac{3}{2}$일 때, 두 점 P, Q사이의 거리가 최대이므로

$t_2=\frac{3}{2}$

$\therefore\ t_1+t_2=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$

17. 정답 9

$f'(x)=4x^3+4=4(x+1)(x^2-x+1)$이므로

$x=-1$일 때 $f'(x)=0$이다.

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-a^2+4a+12$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 극소이며 최소이므로

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이 항상 성립하려면

$f(-1)=-a^2+4a+12\geq 0$이어야 한다.

$(a+2)(a-6)\leq 0$에서 $-2\leq a\leq 6$

따라서 구하는 정수 a는 $-2,\ -1,\ 0,\ \cdots,\ 6$으로 9개다.

18. 정답 30

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$의 차수를 각각

$m,\ n\ (m\geq 1,\ n\geq 1$인 자연수)라 하자.

조건 (가)에서

$g(x)+2\int_1^x f(t)dt=4x^2-8x+1$ ……㉠

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)+2f(x)=8x-8$ ……㉡

조건 (나)에서

$f(x)g'(x)=6x^2-16x+8$ ……㉢

위 식의 좌변의 차수는 $m+n-1$, 우변의 차수는 2이므로

$m+n-1=2,\ m+n=3$

따라서 $m=1,\ m=2$ 또는 $m=2,\ n=1$이다.

이때, ㉡을 만족시키기 위해서는 $m=1,\ n=2$이어야 한다.

$f(x)=ax+b,\ g(x)=px^2+qx+r$ ($a,\ b,\ p,\ q,\ r$는 상수, $a\neq 0,\ p\neq 0$)이라 하면

$g'(x)=2px+q$이므로 ㉡에서 $(2px+q)+2(ax+b)=8x-8$

$(2p+2a)x+(q+2b)=8x-8$

항등식의 성질에 의하여

$a+p=4,\ q+2b=-8$

㉢에서 $(ax+b)(2px+q)=6x^2-16x+8$

$2apx^2+(aq+2bp)x+bq=6x^2-16x+8$

항등식의 성질에 의하여

$ap=3,\ aq+2bp=-16,\ bp=8$

$a+p=4,\ ap=3$에서

$a(4-a)=3,\ a^2-4a+3=0,\ (a-1)(a-3)=0$

$\therefore\ a=1,\ p=3$ 또는 $a=3,\ p=1$

……㉣

$q+2b=-8,\ bq=8$에서

$b(-8-2b)=8,\ b^2+4b+4=0,\ (b+2)^2=0$

$\therefore\ b=-2,\ q=-4$ ……㉤

한편, ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $g(1)=-3$이므로

㉣, ㉤에서 $f(x)=x-2,\ g(x)=3x^2-4x-2$

또는 $f(x)=3x-2,\ g(x)=x^2-4x$이다.

그런데 $g(0)\neq 0$이어야 하므로

$f(x)=x-2,\ g(x)=3x^2-4x-2$

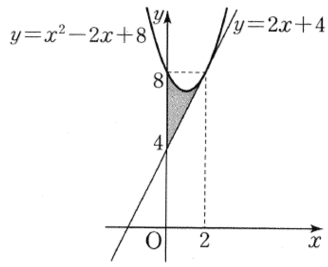
$\therefore\ g(4)=30$

19. 정답 $\frac{8}{3}$

$y=x^2-2x+8$에서 $y'=2x-2$이므로

점 (2, 8)에서의 접선의 기울기는 2이고

접선의 방정식은 $y-8=2(x-2)$, 즉 $y=2x+4$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times 4\times 2-\int_0^2\{8-(x^2-2x+8)\}dx$$

$$=4-\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

다른풀이

본풀이에서 넓이 S를 다음과 같이 계산할 수 있다.

곡선 $y=x^2-2x+8$과 직선 $y=8$의 교점의 x좌표는

$x^2-2x+8=8$에서 $x(x-2)=0$　　$\therefore\ x=0$ 또는 $x=2$

$\therefore\ S=\frac{1}{2}\times4\times2-\frac{(2-0)^3}{6}=\frac{8}{3}$

20. 정답 $0<a<20$

방정식 $2x^3-3x^2-12x+a=0$, 즉 $2x^3-3x^2-12x=-a$에서

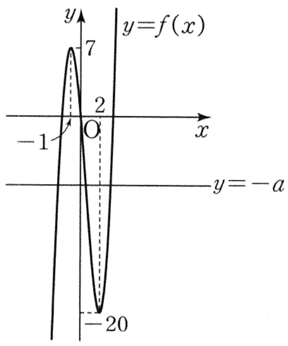
$f(x)=2x^3-3x^2-12x$라 하면

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$이므로

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $f(-1)=7$.

$x=2$에서 극솟값 $f(2)=-20$을 갖는다.

이때, $f(0)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 방정식 $f(x)=-a$가 하나의 음의 실근과 서로 다른 두 양의 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는

$-20<-a<0$이므로 $0<a<20$이다.

21. 정답 40

$\int_0^{2013}f(x)dx=\int_3^{2013}f(x)dx$에서

$\int_0^{2013}f(x)dx-\int_3^{2013}f(x)dx=\int_0^3 f(x)dx=0$이다.

이때, $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이고 $f(3)=0$이므로

$f(x)=(x-a)(x-3)=x^2-(a+3)x+3a$ (a는 상수)라 하면

$$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3\{x^2-(a+3)x+3a\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a+3}{2}x^2+3ax\right]_0^3$$
$$=\frac{9}{2}a-\frac{9}{2}=0$$

$\therefore\ a=1,\ f(x)=(x-1)(x-3)$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표가 1, 3이므로

$S=\int_1^3|f(x)|dx=\frac{(3-1)^3}{6}=\frac{4}{3}$

$\therefore\ 30S=30\times\frac{4}{3}=40$

22. 정답 (1) $180\mathrm{m}$ (2) $-60(\mathrm{m/s})$ (3) $305\mathrm{m}$

(1) 물 로켓이 최고 높이에 도달할 때, 물 로켓의 속도는 0이다.

$v(t)=50-10t=0$에서 $t=5$이므로

$t=5$일 때, 물 로켓의 높이는

$$55+\int_0^5(50-10t)dt=55+\left[50t-5t^2\right]_0^5=180(\mathrm{m})$$

(2) $t=x$일 때, 물 로켓의 높이는

$$55+\int_0^x(50-10t)dt=55+\left[50t-5t^2\right]_0^x$$
$$=-5x^2+50x+55$$

이므로 지면에 닿을 때까지 걸린 시간은

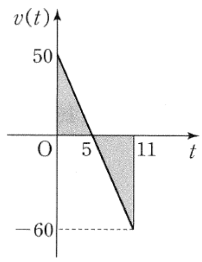
$-5x^2+50x+55=0$에서 $x^2-10x-11=0$

$(x+1)(x-11)=0$　　$\therefore\ x=11$

즉, 11초 후이므로 그때의 속도는 $v(11)=-60(\mathrm{m/s})$이다.

(3) $v(t)=50-10t=0$에서 $t=5$이고

(2)에서 물 로켓이 지면에 닿을 때까지 걸린 시간은 11초이므로 움직인 거리는



$$\int_0^{11}|50-10t|dt=\frac{1}{2}\times5\times50+\frac{1}{2}\times6\times60=305(\mathrm{m})$$