수학 Ⅱ (고2)

총 22문항 : 객관식 16, 주관식 6

내신대비 모의고사

범위 : 미분-적분
시험시간 : 50분
이름 :

[객관식]

1. 다항함수 $f(x)$의 도함수가 $f'(x)=3x^2+4x-5$이다. $f(1)=0$일 때, $f(2)$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

2. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^4-4x^2-a>0$가 항상 성립하도록 하는 정수 a의 최댓값은?

① -6 ② -5 ③ -4
④ -2 ⑤ -1

3. 함수 $f(x)=-x^3-5x^2+4$에 대하여 닫힌구간 $[-1,2]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c의 값은?

① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

4. y축 위의 한 점 $(0,a)$에서 곡선 $y=x^3+6x^2+1$에 서로 다른 세 개의 접선을 그을 수 있도록 하는 정수 a의 개수는?

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

5. $\int_0^4 (x+|x-3|)dx$의 값은?

① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

6. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다. 방정식 $|f(x)|=2$의 실근의 개수가 4일 때, $f(3)$의 값은?

① 9 ② 12 ③ 18
④ 21 ⑤ 27

7. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때 3α의 값은?

(가) $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$

(나) $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-5}{x-1}=11$

(다) $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극대이다.

① -8 ② -7 ③ -6
④ -5 ⑤ -4

8. 반지름의 길이가 R인 구에 내접하는 원뿔의 부피가 최대일 때, 원뿔의 높이를 h_1, 같은 크기의 구에 내접하는 원기둥의 부피가 최대일 때 원기둥의 높이를 h_2라 하자. $\frac{h_2}{h_1}$의 값은?

① $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{3}$

9. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 그 도함수 $f'(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 닫힌구간 $[0,4]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은?

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x-1}=f'(3)=0$

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

10. 함수 $f(x)=\frac{1}{n}x^{n+1}$에 대하여 $A_n=\int_{-1}^{1}f(x)dx$이다.

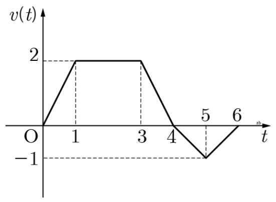
$A_1+A_2+A_3+\cdots+A_{20}$의 값은? (단, n은 자연수이다.)

① $\frac{4}{7}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{16}{21}$
④ $\frac{6}{7}$ ⑤ $\frac{20}{21}$

11. 수직선 위의 원점에서 동시에 출발하여 6초 동안 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(0 \le t \le 6)$에서의 위치가 각각 t^3-7t^2, $2t^2-15t$이다. 출발 후 두 점 P, Q 사이의 거리가 가장 멀리 떨어져 있는 순간의 점 P의 속도는?

① 5 ② 10 ③ 15
④ 20 ⑤ 25

12. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(0 \le t \le 6)$에서의 속도 $v(t)$의 그래프가 그림과 같을 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?



| 보기 |

ㄱ. 시간 $t=0$에서 $t=6$까지 점 P의 움직인 거리는 7이다.

ㄴ. 시간 $t=0$에서 $t=5$까지 점 P의 위치의 변화량은 $\frac{13}{2}$이다.

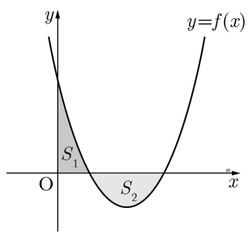
ㄷ. 점 P가 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있을 때 원점과 점 P사이의 거리는 6이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$, $g(-x)=-g(x)$를 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$, $\int_0^1 xh(x)dx=8$에 대하여 $\int_{-1}^1 (x^2+4x-3)h'(x)dx=-152$일 때, $h(1)$의 값은?

① 20 ② 30 ③ 40
④ 50 ⑤ 60

14. 그림과 같이 이차함수 $f(x)=x^2-4x+k$ $(0<k<4)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 할 때, $S_1=S_2$이다. 함수 $g(x)=\int_0^x f(t)dt$라 할 때, $g(1)$의 값은?



① $\frac{4}{3}$ ② 2 ③ $\frac{8}{3}$
④ $\frac{10}{3}$ ⑤ 4

15. 다항함수 $f(x)=-3x^4+8x^3+6x^2-24x$와 실수 t에 대하여 $x \ge t$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 미분가능하지 않을 때, $\int_a^2 g(t)dt=\frac{-b^2+b\sqrt{10}}{3}$이다. 이때, b의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

16. 다항함수 $f(x)$에 대해 $f'(x)=x^2+ax$이고 닫힌구간 $[-1,3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 차가 22일 때, $0<a<3$을 만족하는 상수 a의 값은?

① $\frac{20}{9}$ ② $\frac{22}{9}$ ③ $\frac{23}{9}$
④ $\frac{25}{9}$ ⑤ $\frac{26}{9}$

[주관식]

17. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q가 출발한지 t초 후의 속도 $v_P(t)$, $v_Q(t)$가 각각 $v_P(t)=4t+2$, $v_Q(t)=2t+4$이고, 점 P는 원점, 점 Q는 좌표가 3인 점에서 동시에 같은 방향으로 출발한다. 다음 물음에 답하여라.

(1) 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치 $x_P(t)$, $x_Q(t)$를 각각 구하여라.

(2) 출발한 지 a초 후에 두 점 P, Q가 만날 때, a의 값을 구하여라.

18. 함수 $f(x)$가 $f(x)=3x^2-2x+\int_0^k f(t)dt$이고, $f(1)=-3$을 만족시키는 모든 k의 값을 구하여라.

19. 곡선 $y=\frac{1}{4}x^4+2x+1$ 위의 한 점 P와 두 점 $O(0,0)$, $A(1,1)$에 대해 삼각형 OAP의 넓이의 최솟값을 구하여라.

20. 삼차함수 $f(x)=-2x^3+3ax^2+2a^2+a$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. $g(4)=2$가 성립하도록 하는 정수 a의 값을 구하여라. (단, $a \neq 0$)

21. 다음은 두 곡선 $y=x^3-2x$과 $y=ax^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 자연수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 a의 값을 구하고, 그 때의 넓이를 구하는 과정이다. 풀이과정 없이 (가)~(라)에 알맞은 a에 관한 식을 쓰고, (마), (바)에 알맞은 수를 쓰시오.

> 두 곡선의 교점을 구해보자.
> $x^3-2x=ax^2$, $x(x^2-ax-2)=0$.
> $x=0$을 제외한 두 곡선이 만나는 두 점의 x좌표를 α, β라 하자. 즉 $x^2-ax-2=0$의 두 근을 α, β라 하면
> $\alpha^2+\beta^2=($ (가) $)$, $\alpha^3+\beta^3=($ (나) $)$,
> $\alpha^4+\beta^4=($ (다) $)$이다.
> 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이는 ((라))이다. 이 넓이가 자연수가 되도록 하는 가장 작은 자연수
> $a=($ (마) $)$이고, 그 때의 넓이는 ((바))이다.

22. 함수 $f(x)=\begin{cases} px(x^2-3) & (x<0) \\ -x(x^2-p) & (x \geq 0) \end{cases}$는 $x=\alpha$에서 극솟값을 갖는다. $f(\alpha)=f(\beta)$이고 $|\alpha-\beta|=2$를 만족하는 실수 β가 적어도 하나 존재할 때 함수 $f(x)$의 극솟값을 구하여라. (단, $\alpha \neq 0$)

정답 및 풀이

1. 정답 ④

$f'(x)=3x^2+4x-5$이므로 $f(x)=x^3+2x^2-5x+C$이다.

$f(1)=0$에서 $C=2$이다.

$f(x)=x^3+2x^2-5x+2$이므로 $f(2)=8$이다.

2. 정답 ②

주어진 4차식의 최솟값이 양수이면 부등식이 항상 성립한다.

$f(x)=x^4-4x^2-a$라 하면

$$\begin{aligned}f'(x)&=4x^3-8x\\&=4x(x^2-2)\\&=4x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})\end{aligned}$$

$f(x)$는 $x=\pm\sqrt{2}$에서 최솟값을 갖는다.

$f(\sqrt{2})=4-8-a=-a-4$이므로

$-a-4>0$

$a<-4$

따라서 정수 a의 최댓값은 -5이다.

3. 정답 ④

평균변화율이

$\dfrac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\dfrac{-24}{3}=-8$이므로

$f'(c)=-8$이 되는 c를 구하면

$-3c^2-10c=-8$

$3c^2+10c-8=0$

$c=\dfrac{2}{3},\ -4$에서 주어진 구간에 있는 값은 $\dfrac{2}{3}$

4. 정답 ①

$f(x)=x^3+6x^2+1$, 접점을 $(t,\ f(t))$라 하면 $(0,\ a)$에서 그은 접선은

$\dfrac{f(t)-a}{t-0}=f'(t)$를 만족해야 한다.

$\dfrac{(t^3+6t^2+1)-a}{t}=3t^2+12t$

$2t^3+6t^2-1+a=0$

접선이 3개이므로 접점도 3개가 나와야 하므로

$2t^3+6t^2=1-a$의 방정식이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$g(x)=2x^3+6x^2$이라 하면 $x=-2$에서 극댓값 8, $x=0$에서 극솟값 0을 가지므로 $0<1-a<8$이어야 서로 다른 세 실근을 갖는다.

따라서 $-7<a<1$이므로 정수 a의 개수는 7개다.

5. 정답 ②

$$\begin{aligned}\int_0^4(x+|x-3|)dx&=\int_0^3\{x-(x-3)\}dx+\int_3^4\{x+(x-3)\}dx\\&=\int_0^3 3dx+\int_3^4(2x-3)dx\\&=9+\left[x^2-3x\right]_3^4\\&=13\end{aligned}$$

6. 정답 ③

주어진 함수 $f(x)$가 $f(-x)=-f(x)$를 만족시키므로 기함수이고, $f(x)=x^3+ax$ 형태이다.

$|f(x)|=2$의 실근의 개수가 4개이므로 $f(x)$의 극댓값이 2, 극솟값이 -2이어야 한다.

$f'(x)=3x^2+a=0$에서 $x=\sqrt{-\dfrac{a}{3}}$ 일 때 극솟값 -2를 갖는다.

따라서 $f\left(\sqrt{-\dfrac{a}{3}}\right)=-2$에서

$-\dfrac{a}{3}\sqrt{-\dfrac{a}{3}}+a\sqrt{-\dfrac{a}{3}}=-2$

$\dfrac{2}{3}a\sqrt{-\dfrac{a}{3}}=-2$

$\dfrac{1}{9}a^2\left(-\dfrac{a}{3}\right)=1$

$a^3=-27$

$a=-3$

그러므로 $f(x)=x^3-3x$이고 $f(3)=18$

7. 정답 ①

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라 하면

조건 (가)에 의하여 $f(0)=0,\ f'(0)=0$이므로

$c=0,\ d=0$이다.

조건 (나)에 의하여 $f(1)=5,\ f'(1)=11$이므로

$a+b=5,\ 3a+2b=11$이다.

위 두 식을 연립하면

$a=1,\ b=4$이므로 $f(x)=x^3+4x^2$이다.

$f'(x)=3x^2+8x=3x\left(x+\dfrac{8}{3}\right)$이므로 $x=-\dfrac{8}{3}$에서 극댓값을 갖는다.

따라서 $3\alpha=-8$

8. 정답 ④

원뿔의 부피가 최대가 되려면 원뿔의 높이가 구의 중심을 지나야한다.

밑면의 반지름 길이를 r, 높이를 h라 하면 부피는 $\dfrac{1}{3}\pi r^2h$이고,

닮음비에 의하여 $r^2=2Rh-h^2$이므로

$\dfrac{1}{3}\pi h(2Rh-h^2)=\dfrac{\pi}{3}(-h^3+2Rh^2)$이다.

$V(h)=\dfrac{\pi}{3}(-h^3+2Rh^2)$라 하면

$V'(h)=\dfrac{\pi}{3}(-3h^2+4Rh)=0$에서 $h=\dfrac{4}{3}R$일 때 최대이므로

$h_1=\dfrac{4}{3}R$이다.

같은 방법으로 원기둥의 반지름 길이를 r, 높이를 h라 하면 부피는 πr^2h이고 $R^2=r^2+\dfrac{h^2}{4}$에서

$V(h)=\pi\left(R^2-\dfrac{h^2}{4}\right)h=\pi\left(-\dfrac{1}{4}h^3+R^2h\right)$이다

$V'(h)=\pi\left(-\dfrac{3}{4}h^2+R^2\right)=0$에서 $h=\dfrac{2}{\sqrt{3}}R$일 때 최대이므로

$h_2=\dfrac{2}{\sqrt{3}}R$

따라서 $\dfrac{h_2}{h_1}=\dfrac{\dfrac{2}{\sqrt{3}}R}{\dfrac{4}{3}R}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

9. 정답 ③

주어진 조건에 의해서

$f(1)=3$, $f'(1)=f'(3)=0$이므로 삼차함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대, $x=3$에서 극소를 갖는다.

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, $f'(x)=3(x-1)(x-3)$에서

$a=-6$, $b=9$이므로 $f(x)=x^3-6x^2+9x+c$이다.

$f(1)=3$을 대입하면 $c=-1$이므로

$f(x)=x^3-6x^2+9x-1$이다.

따라서 주어진 구간 $[0,\ 4]$에서의 최댓값은 $f(1)=f(4)=3$이다.

10. 정답 ⑤

n이 홀수이면 $f(x)$는 우함수, n이 짝수이면 $f(x)$는 기함수이므로

$A_{2k-1}=2\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$, $A_{2k}=0$ (단, k는 자연수)

따라서

$A_1+A_2+A_3+\cdots+A_{20}=A_1+A_3+\cdots+A_{19}$이고

$A_{2k-1}=2\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2k-1}x^{2k}dx=\frac{2}{(2k+1)(2k-1)}$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{2}{(2k+1)(2k-1)}=2\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{-2}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k-1}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{21}$$
$$=\frac{20}{21}$$

11. 정답 ①

거리가 가장 멀리 떨어진 순간은 위치의 차이가 가장 클 때이므로

$f(t)=(t^3-7t^2)-(2t^2-15t)=t^3-9t^2+15t$라 하면 $0\le t\le 6$에서 $|f(t)|$의 최댓값과 같다.

$f'(t)=3t^2-18t+15=0$에서 $t=1$일 때 극댓값 7, $t=5$일 때 극솟값 -25이므로 $|f(t)|$의 최댓값은 $t=5$일 때이다.

점 P의 속도는 $3t^2-14t$이므로 $t=5$에서의 속도는 5이다.

12. 정답 ③

ㄱ. t가 0에서 4까지 움직인 거리는 사다리꼴 넓이와 같으므로 6이고 4에서 6까지 움직인 거리는 삼각형 넓이와 같으므로 1이다. 따라서 전체 움직인 거리는 7이다. (참)

ㄴ. t가 0에서 4까지는 양의 방향으로 6만큼, t가 4에서 5까지는 음의 방향으로 $\dfrac{1}{2}$만큼 움직였으므로 위치의 변화량은 $\dfrac{11}{2}$이다. (거짓)

ㄷ. 원점에서 가장 멀리 떨어져있는 경우는 $t=4$일 때 이므로 원점과의 거리는 6이다. (참)

13. 정답 ①

$f(x)$는 우함수, $g(x)$는 기함수이므로 $h(x)$는 기함수, $h'(x)$는 우함수, $xh(x)$는 우함수, $x^2h(x)$는 기함수이다.

$\{x^2h(x)\}'=2xh(x)+x^2h'(x)$이므로

$$\int_{-1}^{1}x^2h(x)dx=\int_{-1}^{1}2xh(x)dx+\int_{-1}^{1}x^2h'(x)dx$$
$$0=4\int_0^1 xh(x)dx+\int_{-1}^{1}x^2h'(x)dx$$
$$=32+\int_{-1}^{1}x^2h'(x)dx$$

에서 $\displaystyle\int_{-1}^{1}x^2h'(x)dx=-32$

$$\int_{-1}^{1}(x^2+4x-3)h'(x)dx=\int_{-1}^{1}\{x^2h'(x)+4xh'(x)-3h'(x)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{1}\{x^2h'(x)-3h'(x)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{1}x^2h'(x)dx-6\int_0^1 h'(x)dx$$
$$=-32-6h(1)=-152$$

$\therefore h(1)=20$

14. 정답 ①

$x^2-4x+k=0$의 두 실근을 $\alpha,\ \beta$ $(\alpha<\beta)$라 하면

$\beta^2-4\beta+k=0$ $\cdots$ ㉠

이고 $S_1=S_2$에 의하여 $\displaystyle\int_0^{\beta}f(x)dx=0$이다.

$\int_0^\beta (x^2-4x+k)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + kx\right]_0^\beta$

$= \frac{1}{3}\beta^3 - 2\beta^2 + k\beta = 0 \ \cdots$ ㉡

$\beta \neq 0$이므로 ㉡의 식을 정리하면

$\beta^2 - 6\beta + 3k = 0 \ \cdots$ ㉢

㉠, ㉢을 연립하면

$2\beta = 2k$

$\beta = k$

㉠에 의하여

$\beta^2 - 4\beta + \beta = 0$

$\beta^2 - 3\beta = 0$

$\beta(\beta - 3) = 0$

$\beta = 3 \ (\because \ \beta > 0)$

따라서 $f(x) = x^2 - 4x + 3$이다.

$g(1) = \int_0^1 f(t)dt = S_1 = S_2$이므로

$S_2 = \frac{1}{6}(3-1)^3 = \frac{4}{3}$

15. 정답 ⑤

$f'(x) = -12x^3 + 24x^2 + 12x - 24$

$= -12(x-1)(x-2)(x+1)$

이므로

$f(x)$는 $x=-1$에서 극대이자 최댓값인 19,

$x=1$에서 극솟값인 -13, $x=2$에서 극댓값인 -8을 갖는다.

$f(x) = -8$인 지점을 구해보면 $(x-2)^2(3x^2+4x-2) = 0$이므로

$a = \frac{-2+\sqrt{10}}{3}$이다.

따라서 $\int_a^2 g(t)dt = (2-a) \times (-8)$이므로

$\left(2 - \frac{-2+\sqrt{10}}{3}\right)(-8) = \frac{-64+8\sqrt{10}}{3}$이다.

따라서 $b=8$이다.

16. 정답 ⑤

$f'(x) = x^2 + ax = x(x+a)$에서 $x=-a$에서 극대, $x=0$에서 극소를 갖는다. 극댓값과 같은 함숫값이 나오는 지점이 $x = \frac{a}{2}$인데

$0 < a < 3$이므로 $\frac{a}{2} < 3$이다. 따라서 구간 $[-1, \ 3]$에서의 최댓값은 $f(3)$, 최솟값은 $f(0)$이다.

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 + C$, $f(3) - f(0) = 22$이므로

$\left(9 + \frac{9}{2}a + C\right) - C = 22$

$a = \frac{26}{9}$

17. 정답 (1) $x_P(t) = 2t^2 + 2t$, $x_Q(t) = t^2 + 4t + 3$

(2) $a=3$

(1) P는 원점에서 출발했으므로 $x_p(0) = 0$

Q는 3에서 출발했으므로 $x_Q(0) = 3$이므로

$x_P(t) = 2t^2 + 2t$, $x_Q(t) = t^2 + 4t + 3$

(2) 두 점이 만나면 위치가 같아야하므로

$2t^2 + 2t = t^2 + 4t + 3$

$t^2 - 2t - 3 = 0$

$t=3$이므로 $a=3$이다.

18. 정답 $-2, \ 1, \ 2$

$\int_0^k f(t)dt = m$이라 하면

$f(x) = 3x^2 - 2x + m$이고 $f(1) = -3$에서

$-3 = 3 - 2 + m$

$m = -4$이다.

$\int_0^k (3x^2 - 2x - 4)dx = -4$

$\left[x^3 - x^2 - 4x\right]_0^k = -4$

$k^3 - k^2 - 4k + 4 = 0$

$(k-1)(k-2)(k+2) = 0$

$k = 1, \ 2, \ -2$

19. 정답 $\frac{1}{8}$

삼각형 OAP의 넓이가 최소가 되려면 높이가 가장 작아야 한다.

$\overline{\mathrm{OA}} = \sqrt{2}$이고 높이가 최소가 될 때는 P에서의 접선의 기울기가 1이어야 하므로

$x^3 + 2 = 1$

$x = -1$

점 P가 $\left(-1, \ -\frac{3}{4}\right)$이므로 $y=x$까지의 거리

$\frac{\left|-1+\frac{3}{4}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$이므로

넓이는 $\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{8} \times \sqrt{2} = \frac{1}{8}$

20. 정답 $a=1$

$f'(x) = -6x^2 + 6ax = -6x(x-a)$이므로

$x=0,\ a\ (a\neq 0)$에서 극값을 갖는다.
삼차함수가 상수함수와 만나는 교점이 2개가 되려면 상수함수가 극값을 지나야하므로 극댓값 또는 극솟값이 4가 되어야 한다.
따라서 $f(0)=f(a)=4$이다.

(i) $f(0)=2a^2+a=4$

$2a^2+a-4=0$

$a=\dfrac{-1\pm\sqrt{33}}{4}$이므로 정수가 아니다.

(ii) $f(a)=a^3+2a^2+a-4=0$

$(a-1)(a^2+3a+4)=0$

정수 a의 값은 1이다.

따라서 $a=1$

21. 정답 (가) a^2+4, (나) a^3+6a, (다) a^4+8a^2+8,
(라) $\dfrac{a^4}{12}+a^2+2$, (마) 6, (바) 146

(가) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=a^2+4$

(나) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=a^3+6a$

(다) $\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2(\alpha\beta)^2=(a^2+4)^2-8=a^4+8a^2+8$

(라) $\displaystyle\int_{\alpha}^{0}(x^3-ax^2-2x)dx+\int_{0}^{\beta}(-x^3+ax^2+2x)dx$

$=\left[\dfrac{1}{4}\alpha^4-\dfrac{a}{3}\alpha^3-\alpha^2\right]_{\alpha}^{0}+\left[-\dfrac{1}{4}\beta^4+\dfrac{a}{3}\beta^3+\beta^2\right]_{0}^{\beta}$

$=-\dfrac{1}{4}(\alpha^4+\beta^4)+\dfrac{a}{3}(\alpha^3+\beta^3)+(\alpha^2+\beta^2)$

$=-\dfrac{1}{4}(a^4+8a^2+8)+\dfrac{a}{3}(a^3+6a)+(a^2+4)$

$=\dfrac{1}{12}a^4+a^2+2$

(마) $\dfrac{1}{12}a^4+a^2+2$가 자연수가 되려면 a^4이 12의 배수가 되어야 하므로 a가 $2,\ 3$의 인수를 포함하고 있어야 한다. 따라서 가장 작은 자연수 $a=6$이다.

(바) $\dfrac{1}{12}a^4+a^2+2$에 $a=6$을 대입하면 146

22. 정답 -2

$f(x)$가 $x=0$이 아닌 지점에서 극솟값을 갖기 위해서는 $p<0$이어야 한다. $f(x)=px(x^2-3)$에서 $f'(x)=3p(x-1)(x+1)$이므로 $x=-1$에서 극솟값 $2p$를 갖는다. $|\alpha-\beta|=2$를 만족하는 실수 β가 존재하므로 $\beta=1\ (\because\ \alpha=-1)$이고, $f(1)=2p$이어야 한다.

$-(1-p)=2p$

$p=-1$

따라서 극솟값은 $2p=-2$이다.