[목 차]

일차	출 처		page
01일차	27학년도 EBS 파이널 1회	···············	03
02일차	27학년도 EBS 파이널 2회	···············	05
03일차	27학년도 EBS 파이널 3회	···············	07
04일차	27학년도 EBS 파이널 4회	···············	09
05일차	27학년도 EBS 파이널 5회	···············	11
06일차	26학년도 EBS 파이널 1회	···············	13
07일차	26학년도 EBS 파이널 2회	···············	15
08일차	26학년도 EBS 파이널 3회	···············	17
09일차	26학년도 EBS 파이널 4회	···············	19
10일차	26학년도 EBS 파이널 5회	···············	21
11일차	26학년도 EBS 파이널 6회	···············	23
12일차	26학년도 EBS 파이널 7회	···············	25
13일차	26학년도 EBS 버티컬 시즌1	···············	27
14일차	26학년도 EBS 버티컬 시즌2	···············	29
15일차	26학년도 EBS 버티컬 시즌3	···············	31
16일차	26학년도 EBS 버티컬 시즌4	···············	33
17일차	26학년도 EBS 만점마무리 시즌1 1회	···············	35
18일차	26학년도 EBS 만점마무리 시즌1 2회	···············	37
19일차	26학년도 EBS 만점마무리 시즌1 3회	···············	39
20일차	26학년도 EBS 만점마무리 시즌2 1회	···············	41
21일차	26학년도 EBS 만점마무리 시즌2 2회	···············	43
22일차	26학년도 EBS 만점마무리 시즌2 3회	···············	45
23일차	26학년도 EBS 만점 고난도 1회	···············	47
24일차	26학년도 EBS 만점 고난도 2회	···············	49
25일차	26학년도 EBS 직전 클리어	···············	51
26일차	26학년도 EBS 수능완성 실전 1회	···············	53
27일차	26학년도 EBS 수능완성 실전 2회	···············	55
28일차	26학년도 EBS 수능완성 실전 3회	···············	57
29일차	26학년도 EBS 수능완성 실전 4회	···············	59
30일차	26학년도 EBS 수능완성 실전 5회	···············	61
31일차	25학년도 EBS 파이널 1회	···············	63
32일차	25학년도 EBS 파이널 2회	···············	65
33일차	25학년도 EBS 파이널 3회	···············	67
34일차	25학년도 EBS 파이널 4회	···············	69
35일차	25학년도 EBS 파이널 5회	···············	71
36일차	25학년도 EBS 파이널 6회	···············	73
37일차	25학년도 EBS 파이널 7회	···············	75
38일차	25학년도 EBS 직전 클리어	···············	77
39일차	25학년도 EBS 만점마무리 시즌1 1회	···············	79
40일차	25학년도 EBS 만점마무리 시즌1 2회	···············	81
41일차	25학년도 EBS 만점마무리 시즌1 3회	···············	83
42일차	25학년도 EBS 만점마무리 시즌2 1회	···············	85
43일차	25학년도 EBS 만점마무리 시즌2 2회	···············	87
44일차	25학년도 EBS 만점마무리 시즌2 3회	···············	89
45일차	25학년도 EBS 만점 Black 1회	···············	91
46일차	25학년도 EBS 만점 Black 2회	···············	93
47일차	25학년도 EBS 수능완성 실전 1회	···············	95
48일차	25학년도 EBS 수능완성 실전 2회	···············	97
49일차	25학년도 EBS 수능완성 실전 3회	···············	99
50일차	25학년도 EBS 수능완성 실전 4회	···············	101
51일차	25학년도 EBS 수능완성 실전 5회	···············	103
풀이		···············	105

[확 인]

일차	출 처	학습일	확인
01일차	27학년도 EBS 파이널 1회		
02일차	27학년도 EBS 파이널 2회		
03일차	27학년도 EBS 파이널 3회		
04일차	27학년도 EBS 파이널 4회		
05일차	27학년도 EBS 파이널 5회		
06일차	26학년도 EBS 파이널 1회		
07일차	26학년도 EBS 파이널 2회		
08일차	26학년도 EBS 파이널 3회		
09일차	26학년도 EBS 파이널 4회		
10일차	26학년도 EBS 파이널 5회		
11일차	26학년도 EBS 파이널 6회		
12일차	26학년도 EBS 파이널 7회		
13일차	26학년도 EBS 버티컬 시즌1		
14일차	26학년도 EBS 버티컬 시즌2		
15일차	26학년도 EBS 버티컬 시즌3		
16일차	26학년도 EBS 버티컬 시즌4		
17일차	26학년도 EBS 만점마무리 시즌1 1회		
18일차	26학년도 EBS 만점마무리 시즌1 2회		
19일차	26학년도 EBS 만점마무리 시즌1 3회		
20일차	26학년도 EBS 만점마무리 시즌2 1회		
21일차	26학년도 EBS 만점마무리 시즌2 2회		
22일차	26학년도 EBS 만점마무리 시즌2 3회		
23일차	26학년도 EBS 만점 고난도 1회		
24일차	26학년도 EBS 만점 고난도 2회		
25일차	26학년도 EBS 직전 클리어		
26일차	26학년도 EBS 수능완성 실전 1회		
27일차	26학년도 EBS 수능완성 실전 2회		
28일차	26학년도 EBS 수능완성 실전 3회		
29일차	26학년도 EBS 수능완성 실전 4회		
30일차	26학년도 EBS 수능완성 실전 5회		
31일차	25학년도 EBS 파이널 1회		
32일차	25학년도 EBS 파이널 2회		
33일차	25학년도 EBS 파이널 3회		
34일차	25학년도 EBS 파이널 4회		
35일차	25학년도 EBS 파이널 5회		
36일차	25학년도 EBS 파이널 6회		
37일차	25학년도 EBS 파이널 7회		
38일차	25학년도 EBS 직전 클리어		
39일차	25학년도 EBS 만점마무리 시즌1 1회		
40일차	25학년도 EBS 만점마무리 시즌1 2회		
41일차	25학년도 EBS 만점마무리 시즌1 3회		
42일차	25학년도 EBS 만점마무리 시즌2 1회		
43일차	25학년도 EBS 만점마무리 시즌2 2회		
44일차	25학년도 EBS 만점마무리 시즌2 3회		
45일차	25학년도 EBS 만점 Black 1회		
46일차	25학년도 EBS 만점 Black 2회		
47일차	25학년도 EBS 수능완성 실전 1회		
48일차	25학년도 EBS 수능완성 실전 2회		
49일차	25학년도 EBS 수능완성 실전 3회		
50일차	25학년도 EBS 수능완성 실전 4회		
51일차	25학년도 EBS 수능완성 실전 5회		

일일학습

27학년도 EBS 파이널 1회

01 일차 : 26년 월 일

1. 구간 $(0,\ \infty)$에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양수 x에 대하여 $xf'(x)=f(x)+x^2e^x$이다.

(나) 함수 $f\left(\frac{x}{2}\right)$의 역함수는 $g(x)$이다.

$f(\ln 2)=3\ln 2$일 때, $\displaystyle\int_1^{\ln 3} \frac{2}{g'(f(x))\times f(x)}\,dx$의 값은? [3점]

① $\ln\frac{2\ln 3}{e+1}$ ② $\ln\frac{3\ln 3}{e+1}$ ③ $\ln\frac{4\ln 3}{e+1}$

④ $\ln\frac{3\ln 3}{e-1}$ ⑤ $\ln\frac{4\ln 3}{e-1}$

2. 두 양수 $a,\ b$에 대하여 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{(\ln x)^2}{x} & (0<x<1) \\ -\sin\dfrac{\pi x}{a}+b & (x \geq 1) \end{cases}$$

이 있다. 함수 $|f(x)-f(t)|$가 오직 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 실수 $t\ (t>1)$의 최솟값이 3일 때, $\displaystyle\int_{e^{-1}}^{5} f(x)\,dx$의 값은? [4점]

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{10}{3}$ ④ $\frac{13}{3}$ ⑤ $\frac{17}{3}$

3. 모든 항이 양수인 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $3a_1 = b_1$, $a_5 b_4 = 2a_4 b_5$

(나) 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 모두 수렴하고

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n + \frac{1}{2}b_n\right) = 4a_1$이다.

$a_2 + b_2 = \frac{5}{2}$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

4. 두 상수 a, b에 대하여 함수

$$f(x) = \frac{2x^2 + ax + b}{e^x}$$

가 있다. 실수 t에 대하여 곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = f'(t)(x-t) + f(t)$의 교점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $f(x)$와 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다. [4점]

(가) $f(1) = f'(1)$

(나) $\lim_{t \to 3-} g(t) < \lim_{t \to 3+} g(t)$

실수 p에 대하여 $\lim_{t \to p} g(t)$의 값이 존재하고, $g(p) < \lim_{t \to p} g(t)$를 만족시키는 모든 p의 값의 합을 구하시오. $\left(\text{단, } \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = 0\right)$ [4점]

일일학습

27학년도 EBS 파이널 2회

02 일차 : 26년 월 일

5. 정의역이 집합 $\{x \mid x \geq 0\}$이고 $x>0$에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $x \geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이고
> $\ln f(x)+2\int_0^x \frac{f(t)}{e^t}dt=1$이다.

함수 $y=\frac{1}{f(x)}$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{3}{e}$　② $\frac{1}{e}$　③ 1　④ e　⑤ $3e$

6. 정의역이 $\{t \mid 0<t<1\}$인 함수 $f(t)=\int_0^{\pi}|t-\sin x|dx$가 $t=\alpha$에서 극값을 가질 때, $\alpha \times f(\alpha)$의 값은? (단, $0<\alpha<1$) [4점]

① $2-\sqrt{2}$　② $2-\frac{\sqrt{2}}{2}$　③ 2　④ $2+\frac{\sqrt{2}}{2}$　⑤ $2+\sqrt{2}$

7. $x>0$에서 정의된 함수 $f(x)=\ln(x^3+2x+5)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 함수 $h(x)=g(\ln x)$에 대하여 $10\times h'(8)$의 값을 구하시오. [4점]

8. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=\ln\left(e^{f(x)}+e^{-f(x)}\right)$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=-2$, $f'(0)=6$
(나) 모든 실수 k_1에 대하여 함수 $|f(x)-k_1|$이 $x=\alpha$에서 미분가능하지 않은 실수 α의 값은 한 개다.
(다) 어떤 실수 k_2에 대하여 함수 $|g(x)-k_2|$는 $x=0$과 $x=2$에서만 미분가능하지 않다.

$f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

일일학습

27학년도 EBS 파이널 3회

03 일차 : 26년 월 일

9. 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수 $f(x)=e^{x-1}+ax+b$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f\left(e^{2x}\right)$$

이라 하자. 함수 $g(x)$의 역함수를 $h(x)$라 할 때,

$g(0)=2$, $\dfrac{f'(1)}{h'(2)}=32$이다. $\dfrac{b}{h'(f(3))}$의 값은?

(단, a, b는 상수이다.) [3점]

① $-6\left(e^3+2\right)$ ② $-6\left(e^3+1\right)$ ③ $-12\left(e^2+3\right)$

④ $-12\left(e^2+2\right)$ ⑤ $-12\left(e^2+1\right)$

10. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 하자. 실수 t $(0\leq t\leq 2)$에 대하여

$$g'(l)=\frac{l}{l+1}$$

이고 $f(2)=\dfrac{3}{2}\ln 3$, $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx=3$일 때, $\displaystyle\int_0^2 \frac{g(l)}{l+1}\,dl$의 값은?

[4점]

① $1-(\ln 3)^2$ ② $1-\dfrac{1}{2}(\ln 3)^2$ ③ $2-(\ln 3)^2$

④ $2-\dfrac{1}{2}(\ln 3)^2$ ⑤ $2+\dfrac{1}{2}(\ln 3)^2$

11. 첫째항과 공비가 각각 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+|a_n|)=\frac{8}{3}\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

이 성립한다. 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n=\begin{cases}\dfrac{1}{a_n} & (n\le k)\\ a_n & (n>k)\end{cases}\quad (k\text{는 자연수})$$

라 할 때, 수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $b_1\times b_k=-1$
> (나) 집합 $\{b_n\mid b_n\text{은 정수},\ 1\le n\le k+1\}$의 모든 원소의 합은 -102이다.

$\dfrac{1}{\sum_{n=k+1}^{\infty}b_n}$의 값을 구하시오. [4점]

12. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 상수 $a\ (0<a<\pi)$에 대하여 $x\ge-\pi$에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}\ln\left(1+\sqrt{3}+2\sin(x-a)\right) & (-\pi\le x<0)\\ f(x) & (x\ge 0)\end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$는 $x>-\pi$에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $-\pi<x<0$인 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\le g'(0)$이고 $g'(0)=1$이다.
> (나) 집합 $S=\{g(k)\mid g'(k)=0,\ k>-\pi\}$라 할 때. $n(S)=3$이고 집합 S의 모든 원소의 합은 $\ln(\sqrt{3}-1)$이다.

$\dfrac{\pi}{a}\times\{g''(0)\}^2$의 값을 구하시오. [4점]

일일학습 27학년도 EBS 파이널 4회

04 일차 : 26년 월 일

13. 함수 $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{x}{2}\right)$에 대하여 $\lim_{x\to\pi}\frac{xf(\pi)-\pi f(x)}{x-\pi}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

14. 곡선 $y=e^x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ e^t)$에서의 접선과 수직이고 점 P를 지나는 직선을 l_{p}, 점 P가 아닌 곡선 $y=e^x$ 위의 점 $\mathrm{Q}(s,\ e^s)$에서의 접선과 수직이고 점 Q를 지나는 직선을 l_{Q}라 하자. 두 직선 l_{P}, l_{Q}의 교점을 $\mathrm{R}(x_{\mathrm{R}},\ y_{\mathrm{R}})$이라 할 때

$$x(t)=\lim_{s\to t}x_{\mathrm{R}},\ y(t)=\lim_{s\to t}y_{\mathrm{R}}$$

이라 하자. 점 $(x(t),\ y(t))$를 중심으로 하고 점 P를 지나는 원의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\int_0^1 S(t)dt=\pi\left(\frac{1}{4}e^4+\frac{3}{2}e^2+ae^{-2}+b\right)$이다. 두 유리수 $a,\ b$에 대하여 $a+b$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

15. $a_1 = a_2 = 1$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$
(나) $a_{n+2}a_n - {a_{n+1}}^2 = (-1)^{n+1}$

수열 $\{b_n\}$에 대하여 $\tan b_n = \dfrac{1}{a_n}$이고 모든 자연수 n에 대하여

$$0 < b_n < \frac{\pi}{2}$$

를 만족시킨다. $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_{2m}b_{2m-1}\tan\left(b_{2m+1}+b_{2m+2}\right)\right) = k$일 때, $\dfrac{100k}{\pi}$의 값을 구하시오. [4점]

16. 음이 아닌 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 구간 $(0,\ \infty)$에서 $f(x) \ge 0$이다.
(나) 구간 $(0,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$는 미분가능하고 $f'(x)$는 연속인 함수이다.

$t > 1$일 때 구간 $[1,\ t]$에서 곡선 $y = f(x)$의 길이를 $h(t)$라 하자. $h(1) = 0$이고 $t \ge 1$일 때 원점 O와 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ 사이의 거리를 $g(t)$라 할 때,

$$g(t) = h(t) + 2 \quad (t \ge 1)$$

이 성립한다. $f(3\sqrt{3})$의 값을 구하시오. [4점]

일일학습 | 27학년도 EBS 파이널 5회

05 일차 : 26년 월 일

17. $a_1=4$인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(S_n-\frac{16}{3}\right)$이 수렴할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(S_n-\frac{16}{3}\right)$의 값은? [3점]

① $-\frac{14}{9}$ ② $-\frac{16}{9}$ ③ -2 ④ $\frac{-20}{9}$ ⑤ $-\frac{22}{9}$

18. 양수 t에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(x-t)^3$$

이라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=kx$가 제1사분면에서 만나는 점 P에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 $6\times2^{\frac{t}{6}}$이 되도록 하는 양수 k의 값을 $g(t)$라 할 때, $g'(6)$의 값은? [4점]

① $\frac{7\ln2-6}{48}$ ② $\frac{4\ln2-3}{24}$ ③ $\frac{9\ln2-2}{16}$ ④ $\frac{5\ln2-3}{24}$ ⑤ $\frac{11\ln2-6}{48}$

19. 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\{x \mid f'(x)=0\}=\{0,\ 3\}$
> (나) $f(3)>f(0)=0$

함수 $g(x)$가

$$g(x)=\int_0^x e^{f(t)}dt$$

이고 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이 $(a,\ g(a))$뿐일 때, $\int_0^a f''(x)g(x)dx=p+qe^{27}$이다. $p-q$의 값을 구하시오.

(단, e^{27}은 무리수이고, p, q는 유리수이다.) [4점]

20. $f(0)=0$, $f(1)=\sqrt{3}$인 삼차함수 $f(x)$와 양의 실수 t에 대하여 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$가 있다. 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$에 대하여 $g(t)$를

$$g(t)=\frac{1+\overline{\mathrm{OP}}^2-\overline{\mathrm{AP}}^2}{\overline{\mathrm{OP}}}$$

이라 할 때, 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 구간 $(0,\ 1)$에서 함수 $g(t)$는 $t=\frac{1}{2}$에서만 극댓값을 갖고 극솟값은 갖지 않는다.
> (나) 구간 $\left(\frac{1}{2},\ a\right]$에 속하는 임의의 두 실수 t_1, t_2에 대하여 $t_1 \neq t_2$이면 $g(t_1) \neq g(t_2)$가 되도록 하는 실수 a $\left(a>\frac{1}{2}\right)$의 최댓값은 1이다.

$(f(-1))^2$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

일일학습

26학년도 EBS 파이널 1회

06 일차 : 26년 월 일

21. 수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여 $a_1=b_1=2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_n$$

이다. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}a_n}=b_2$일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$의 값은? [3점]

① $\frac{12}{7}$ ② $\frac{13}{7}$ ③ 2

④ $\frac{15}{7}$ ⑤ $\frac{16}{7}$

22. 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\int_{-1}^{3}\{f(x)\}^2 f'(x)dx=0$
(나) $f(0)=0$

상수 a에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\le 2) \\ \ln x+a & (x>2)\end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $f(e^a)$의 값은? [4점]

① $-\frac{1}{8}$ ② $-\frac{3}{16}$ ③ $-\frac{1}{4}$

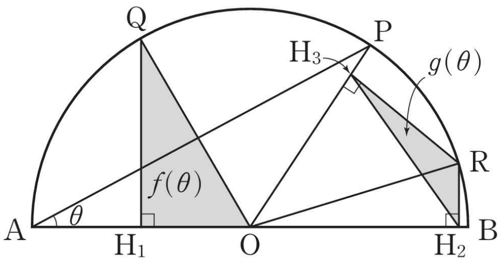
④ $-\frac{5}{16}$ ⑤ $-\frac{3}{8}$

23. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 호 AB 위에 세 점 P, Q, R을

$\angle \mathrm{POA} = 2\angle \mathrm{POQ}$, $\angle \mathrm{POB} = 3\angle \mathrm{ROB}$, $\overline{\mathrm{AQ}} < \overline{\mathrm{AP}}$, $\overline{\mathrm{BR}} < \overline{\mathrm{BP}}$

가 되도록 잡는다. 두 점 Q, R에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 하고, 점 R에서 선분 OP에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_3}$이라 하자. $\angle \mathrm{PAB} = \theta$라 할 때, 삼각형 $\mathrm{OQH_1}$의 넓이를 $f(\theta)$라 하고, 삼각형 $\mathrm{H_2RH_3}$의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{g(\theta)}{\theta^2 \times f(\theta)} = \dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

$\left(\text{단, } 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\text{이고 } p\text{와 } q\text{는 서로소인 자연수이다.}\right)$ [4점]



24. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x (x-t)f(t)dt = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x + a$$

를 만족시킨다. 구간 $[1,\ \infty)$에서 정의된 함수 $g(x)$가 구간 $[1,\ \infty)$에서 연속이고 구간 $(1,\ \infty)$에서 미분가능할 때, 함수 $g(x)$가 $x>1$인 모든 실수 x에 대하여

$$g'(x) > 0,\ g\left(\frac{f(x)+1}{ex}\right) = x$$

를 만족시킨다. $g(1)=1$, $g\left(\dfrac{e}{2}\right)=2$일 때, $\displaystyle\int_1^{\frac{e}{2}} \{g(x)\}^2 dx = b$이다. $(a-b)^2$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [4점]

일일학습

26학년도 EBS 파이널 2회

07 일차 : 26년 월 일

25. $s<-1<t$인 두 실수 s, t에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 두 점 $\mathrm{P}(s,\ s^2)$, $\mathrm{Q}(t,\ t^2)$이 다음 조건을 만족시킨다.

선분 PQ의 중점은 곡선 $y=e^{x+1}$ 위에 있다.

선분 PQ의 중점의 x좌표가 0일 때, $\dfrac{ds}{dt}$의 값은? [3점]

① $\dfrac{1-\sqrt{e}}{1+\sqrt{e}}$ ② $\dfrac{2-\sqrt{e}}{2+\sqrt{e}}$ ③ $\dfrac{3-\sqrt{e}}{3+\sqrt{e}}$

④ $\dfrac{4-\sqrt{e}}{4+\sqrt{e}}$ ⑤ $\dfrac{5-\sqrt{e}}{5+\sqrt{e}}$

26. 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$g(f(x))=(x^2+10)e^x,\ x\times\frac{g'(f(x))-e^x}{g(f(x))}\le 0$$

을 만족시킨다. $f'(1)=15$일 때, $f'(-1)$의 값은? [4점]

① 7 ② 8 ③ 9

④ 10 ⑤ 11

27. 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_1 < b_1$
>
> (나) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 6$
>
> (다) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1} \times a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1} \times b_n} = \frac{1}{15}$

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+k} b_{n+l}|$의 값이 정수가 되도록 하는 음이 아닌 두 정수 k, l의 모든 순서쌍 $(k,\ l)$의 개수를 구하시오. [4점]

28. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x) = f(\sin^2 \pi x + \sin \pi x)$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) 함수 $g(x)$가 $x=t$에서 극값을 갖도록 하는 모든 음이 아닌 실수 t의 값을 작은 수부터 크기 순으로 모두 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하면 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.
>
> (나) 0은 함수 $g(x)$의 극댓값인 동시에 극솟값이다.

일일학습 | 26학년도 EBS 파이널 3회

08 일차 : 26년 월 일

29. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.
> (나) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 방정식이 $y=3x-1$이다.

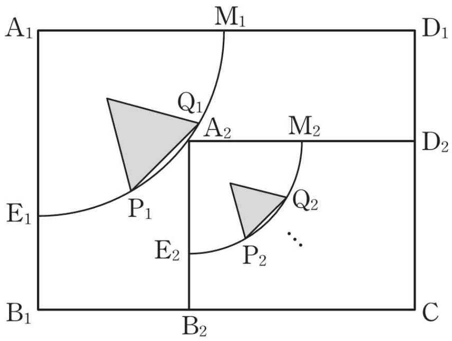
함수 $f(5x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(2)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{30}$ ② $\frac{1}{15}$ ③ $\frac{1}{10}$ ④ $\frac{2}{15}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

30. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(\frac{1}{e},\ \frac{1}{2}\right)$에서의 접선을 l이라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선이 직선 l과 서로 수직일 때, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 AH로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① $\frac{e}{2}-1$ ② $\frac{e}{2}$ ③ $e-1$ ④ $\frac{e}{2}+1$ ⑤ e

31. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=12$, $\overline{A_1D_1}=16$인 직사각형 $A_1B_1CD_1$이 있다. 선분 A_1D_1의 중점을 M_1이라 하고, 점 A_1이 중심이고 점 M_1을 지나는 원이 선분 A_1B_1과 만나는 점을 E_1이라 하자. 호 E_1M_1을 삼등분하는 점을 각각 P_1, Q_1이라 할 때, 선분 P_1Q_1을 한 변으로 하는 정삼각형의 넓이를 S_1이라 하자.
호 E_1M_1 위의 점 A_2, 선분 B_1C 위의 점 B_2, 선분 CD_1 위의 점 D_2를 사각형 $A_2B_2CD_2$가 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=3:4$인 직사각형이 되도록 잡아 선분 A_2D_2의 중점을 M_2라 하고, 점 A_2가 중심이고 점 M_2를 지나는 원이 선분 A_2B_2와 만나는 점을 E_2라 하자. 호 E_2M_2를 삼등분하는 점을 각각 P_2, Q_2라 할 때, 선분 P_2Q_2를 한변으로 하는 정삼각형의 넓이를 S_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 정삼각형의 넓이를 S_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = p\sqrt{3}+q$일 때, $p-q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 유리수이다.) [4점]



32. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=(k-x)e^{-|x|} \quad (\text{단, } k\text{는 양의 상수})$$

이다. 실수 t에 대하여 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, $\lim_{t\to a+} g(t) > \lim_{t\to a-} g(t)$를 만족시키는 실수 a가 -1, 7뿐이다. 함수 $f(x)$의 극댓값이 e^p+q일 때, $p+q$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0\text{이고, } p\text{와 } q\text{는 정수이다.}\right)$ [4점]

일일학습 26학년도 EBS 파이널 4회

09 일차 : 26년 월 일

33. 두 자연수 a, b $(1<a<b)$의 순서쌍 $(a,\ b)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 수열 $\left\{\dfrac{a^{n-1}b+ab^{n-1}}{a^{n-1}b^{-1}+a^{-1}b^{n-1}}\right\}$은 10 이하의 실수로 수렴한다.
>
> (나) 수열 $\left\{\left(\dfrac{b-3}{a^2+2}\right)^n\right\}$은 수렴한다.

모든 순서쌍 $(a,\ b)$에 대하여 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}$의 최솟값과 최댓값의 합은? [3점]

① $\dfrac{58}{11}$ ② $\dfrac{59}{11}$ ③ $\dfrac{60}{11}$ ④ $\dfrac{61}{11}$ ⑤ $\dfrac{62}{11}$

34. 함수

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x^2+ax}-1}{x} & (x\neq 0)\\ 2 & (x=0)\end{cases}$$

이 $x=0$에서 연속이고 $0<t<1$일 때, $\displaystyle\int_0^1\left|xf(t)-e^{x^2+ax}+1\right|dx$는 $t=k$에서 최솟값을 가진다. k의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ ④ $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

35. 두 실수 a, b에 대하여 정의역이 $\{x|x>0\}$인 함수

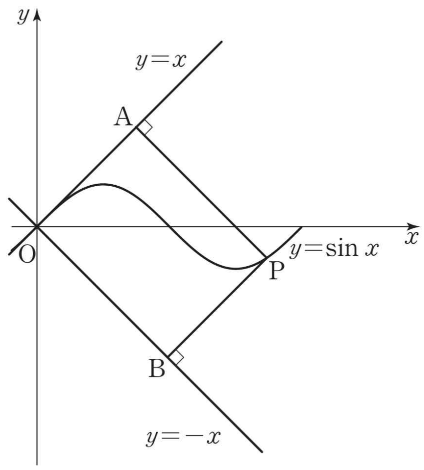
$$f(x)=\frac{3(\ln x)^2+a\ln x+b}{x}$$

가 $x=1$에서 극솟값 -4를 갖는다. 닫힌구간 $\left[k,\ e^{\frac{10}{3}}\right]$에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하도록 하는 실수 k의 최솟값을 m이라 하고, 닫힌구간 $\left[m,\ e^{\frac{10}{3}}\right]$에서 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. $\dfrac{48\times g'(m-1)}{e^4}$의 값을 구하시오. [4점]

36. $0\le x\le 2\pi$에서 정의된 함수 $f(x)=\sin x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$에서 두 직선 $y=x$, $y=-x$에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 두 선분 OA, AP로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(t)$, 곡선 $y=f(x)$와 두 선분 OB, BP로 둘러싸인 부분의 넓이를 $h(t)$라 할 때,

$$h'\left(\frac{5}{3}\pi\right)-g'\left(\frac{5}{3}\pi\right)=\frac{a\sqrt{3}+b\pi}{6}$$

이다. a^2+b^2의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이고 a와 b는 유리수이다.) [4점]



일일학습

26학년도 EBS 파이널 5회

10 일차 : 26년 월 일

37. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x}^{x+3h}f(t)\,dt$$

를 만족시킨다. 자연수 n에 대하여

$$g(n)=\int_{2n-1}^{2n+1}f(x)\,dx$$

라 하자. $f(1)=1$, $f(11)=e^{30}$일 때, $\sum_{n=1}^{5}g(n)$의 값은? [3점]

① $\frac{3^{30}-1}{6}$ ② $\frac{e^{30}-1}{5}$ ③ $\frac{3^{30}-1}{4}$

④ $\frac{e^{30}-1}{3}$ ⑤ $\frac{e^{30}-1}{2}$

38. 함수 $f(x)=x+\sin\frac{x}{2}$에 대하여 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 접선을 그어 접점의 x좌표 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. $b_n=(2n+1)\pi-a_n$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{f'(a_{2n-1})-1}{b_{2n-1}}-\frac{f'(a_{2n})-1}{b_{2n}}\right\}$의 값은? [4점]

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0

④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

39. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 $S_n > 0$이고 실수 k에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{S_n S_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{6S_n} - a_n\right) = k$$

가 성립할 때, $12(k+a_2)$의 값을 구하시오. [4점]

40. 정의역이 $\{x \mid x \neq 1$인 실수$\}$인 함수

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+7x+10}{1-x} & (x<1) \\ \ln(x-1) & (x>1) \end{cases}$$

이 있다. 음이 아닌 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 세 점 중 x좌표가 가장 작은 점을 P, x좌표가 가장 큰 점을 Q라 하자. 원점을 지나고 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 P, Q에서의 접선과 각각 평행한 두 직선이 직선 $y=t$와 만나는 점을 각각 R, S라 할 때, 선분 RS의 길이를 $l(t)$라 하자.

$\displaystyle\int_0^2 l(t)\,dt = e^2 + p + q\ln\frac{2}{3}$일 때, $6|p+q|$의 값을 구하시오.

(단, R과 S가 같은 점이면 $l(t)=0$이고, p와 q는 유리수이다.) [4점]

일일학습

26학년도 EBS 파이널 6회

11 일차 : 26년 월 일

41. $0<t<1$인 실수 t에 대하여 함수

$$f(x)=tx-\ln\left(1+e^{x}\right)$$

의 최댓값을 $g(t)$라 하자. $g(t)$가 $t=a$에서 최솟값을 가질 때, 상수 a의 값은? [3점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

42. 함수 $f(x)=\ln(x+1)+x^{2}$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선과 곡선 $y=f(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① $\ln 2-\frac{1}{3}$ ② $\ln 2-\frac{5}{12}$ ③ $\ln 2-\frac{1}{2}$

④ $2\ln 2-\frac{1}{3}$ ⑤ $2\ln 2-\frac{5}{12}$

43. 등비수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n)=\frac{9}{2},\ \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|-a_n)=\frac{3}{2}$$

을 만족시킨다. 첫째항이 0이 아닌 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5|a_n|+b_n}{a_n}$이 수렴할 때, $b_1-\sum_{n=1}^{\infty}b_n$의 값을 구하시오. [4점]

44. 세 상수 a, b, c에 대하여 함수 $f(x)=(ax^2+bx+c)e^x$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)$는 $x=-1$과 $x=1$에서 극값을 갖는다. (나) $f(2)=e$

함수 $y=f(x)$ $(x\geq 1)$를 $g(x)$라 하고 $g(x)$의 역함수를 $h(x)$라 할 때, $\int_{e}^{4e^2}h(x)dx=pe^2+qe$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 유리수이다.) [4점]

일일학습

26학년도 EBS 파이널 7회

12 일차 : 26년 월 일

45. 양의 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$\int_1^2 f\left(\frac{x+1}{x}\right)dx = 4$이고 $\int_1^2 \frac{1}{x}f'\left(\frac{x+1}{x}\right)dx = 6$이다.

$f(2)=7$일 때, $f\left(\frac{3}{2}\right)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

46. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n(a_n+3)$$

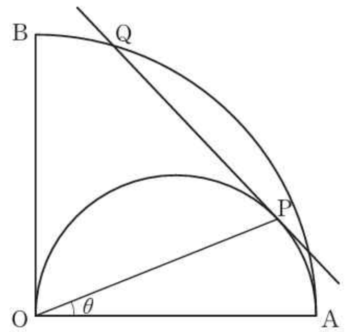
을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n+3}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

47. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 선분 OA를 지름으로 하는 반원의 호 OA 위의 점 P에서의 접선이 호 AB와 만나는 점 중 점 B에 가까운 점을 Q라 하자. $\angle\mathrm{POA}=\theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{7}\right)$일 때, 두 선분 OP, PQ의 길이의 곱을 $f(\theta)$라 하자. $f(0)=0$으로 정의할 때, $\sin a=\frac{1}{3}$인 a $\left(0<a<\frac{\pi}{7}\right)$에 대하여

$$\int_0^a f(\theta)d\theta=p+q\sqrt{2}+q\sqrt{17}$$

이다. $27(p+q+r)$의 값을 구하시오. (단, 호 OA는 부채꼴 OAB의 내부와 경계에 있고, p, q, r은 유리수이다.) [4점]



48. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{f(x)} & (x\le 1)\\ \dfrac{f(x)}{x} & (x>1)\end{cases}$$

이라 하자. 방정식 $g(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 2이고 두 실근의 곱이 음수가 되도록 하는 음수 k가 존재할 때, $f(2)=m-\sqrt{n}$이다. $m+n$의 값을 구하시오.
(단, m과 n은 정수이다.) [4점]

일일학습

26학년도 EBS 버티컬 시즌1

13 일차 : 26년 월 일

49. 열린구간 $(-2,\ 2)$에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$$g(x)=\ln\left[1+\{f(x)\}^2\right]$$

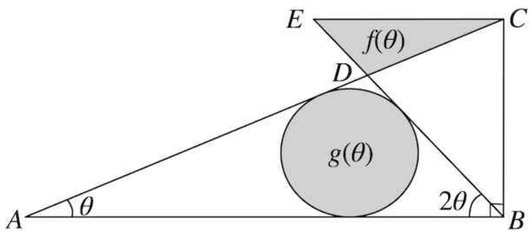
이다. $-2<x<2$인 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)=\frac{\pi}{2}f(x)$이고 $f(1)=1$일 때, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x^2-1}$의 값은? [3점]

① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{3}$ ③ $\frac{5}{12}\pi$ ④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ $\frac{7}{12}\pi$

50. 그림과 같이

$$\overline{\mathrm{AB}}=1,\ \angle\mathrm{ABC}=\frac{\pi}{2},\ \angle\mathrm{CAB}=\theta$$

인 직각삼각형 ABC가 있다. $\angle\mathrm{DBA}=2\theta$가 되도록 선분 AC위에 점 D를 잡고, 직선 BD 위에 점 E를 두 직선 AB, CE가 서로 평행하도록 잡는다. 삼각형 EDC의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 DAB에 내접하는 원의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\overline{\mathrm{BC}}\times f(\theta)}$의 값은? $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$ [4점]



① π ② $\frac{7}{6}\pi$ ③ $\frac{4}{3}\pi$ ④ $\frac{3}{2}\pi$ ⑤ $\frac{5}{3}\pi$

51. 첫째항과 공비가 각각 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴한다.

(나) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) = 0$

(다) $3 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}| = 7 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n}|$

$\dfrac{|a_1| + a_2}{a_1} = k$일 때, $16k^2$의 값을 구하시오. [4점]

52. $f(0) = 0$인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$g(x) = f'(x)e^{-f(x)}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } \lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = 0\right)$ [4점]

(가) 함수 $g(x)$는 $x = 0$에서 극값을 갖는다.

(나) 실수 t에 대하여 방정식 $|g(x)| = t$의 서로 다른 양의 실근의 개수를 $h(t)$라 할 때, $\lim_{t \to g(k)+} h(t) \neq \lim_{t \to g(k)-} h(t)$인 모든 양수 k의 값의 합은 3이다.

일일학습 | 26학년도 EBS 버티컬 시즌2

14 일차 : 26년 월 일

53. 함수 $f(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2x^2}$에 대하여 $x>0$에서 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_1^x (t-1)f(x-t+1)dt$$

라 하자. $x=2$에서 $x=4$까지의 곡선 $y=g(x)$의 길이는? [3점]

① $2+\dfrac{1}{2}\ln2$　② $2+\ln2$　③ $3+\dfrac{1}{2}\ln2$　④ $3+\ln2$　⑤ $4+\dfrac{1}{2}\ln2$

54. 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 양의 실수 x와 $-x$보다 큰 모든 실수 y에 대하여

$$f(x+y)=\frac{x+y}{x}f(x)+xf\left(\frac{x+y}{x}\right)$$

를 만족시킨다. $f'(k)=0$인 상수 $k(k>0)$에 대하여 $f\left(\dfrac{1}{k}\right)=1$일 때, 구간 $\left(\dfrac{f(k)}{3},\infty\right)$에서 $f(g(x))=3x$를 만족시키는 함수 $g(x)$에 대하여 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}}g(x)dx$의 값은? (단, $f'(1)\neq0$) [4점]

① $\dfrac{e}{4}-\dfrac{1}{12e}$　② $\dfrac{e}{3}-\dfrac{1}{12e}$　③ $\dfrac{5e}{12}-\dfrac{1}{12e}$　④ $\dfrac{e}{2}-\dfrac{1}{12e}$　⑤ $\dfrac{7e}{12}-\dfrac{1}{12e}$

55. $a_1 \neq b_1 \neq 0$인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{n+1} = ra_n$, $b_{n+1} = (r^2-1)b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(나) 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 모두 수렴하고

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n : \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 14 : 3$이다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n}$이 실수 p에 수렴할 때, $44p$의 값을 구하시오. [4점]

(단, r은 상수이다.)

56. 양의 실수 a와 함수

$$f(x) = \begin{cases} -a\{\log_4(x+1)\}^2 + a & (-1 < x < 3) \\ 2e^{3-x}+1 & (x \geq 3) \end{cases}$$

에 대하여 x에 대한 방정식 $f(f(x)) = f(x)$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(a)$라 하자. 함수 $g(a)$가 $a=k$에서 불연속인 모든 양수 k의 값의 합은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

일일학습

26학년도 EBS 버티컬 시즌3

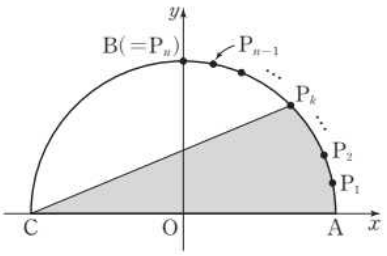
15 일차 : 26년 월 일

57. 그림과 같이 곡선 $x^2+y^2=1(y \geq 0)$위의 두 점 $\mathrm{A}\,(1,\ 0)$, $\mathrm{B}\,(0,\ 1)$과 2 이상의 자연수 n에 대하여 호 AB를 n등분하는 점을 점 A에 가까운 점부터 차례로

$$\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3,\ \cdots,\mathrm{P}_k,\ \cdots,\mathrm{P}_{n-1}\ \ (1 \leq k \leq n-1)$$

이라 하고, 점 B를 P_n이라 하자. 점 $\mathrm{C}\,(-1,\ 0)$에 대하여 선분 AC, 선분 CP_k, 호 AP_k로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(k)$라 할 때,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}S(k)$의 값은? [3점]



① $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{\pi}$ ② $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{2}{\pi}$ ③ $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{\pi}$
④ $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{\pi}$ ⑤ $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{\pi}$

58. 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖고, 음이 아닌 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)<0$인 함수 $f(x)$가 있다. 임의의 양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ \ f(t))$에서의 접선과 곡선 $y=f(x)$및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이가

$$\frac{t^3}{3}-\frac{1}{2}(t^2+1)e^{1-t^2}+\frac{e}{2}$$

이다. $f'(0)=e$일 때, $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx-f(1)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{5}{6}-\dfrac{e}{2}$ ② $\dfrac{7}{6}-\dfrac{e}{2}$ ③ $\dfrac{2}{3}-\dfrac{e}{2}$
④ $\dfrac{5}{6}-\dfrac{e}{2}$ ⑤ $\dfrac{7}{6}+\dfrac{e}{2}$

59. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x < 1$일 때, $f(x) = 2x - 2$이다. (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1) = -f(x)$이다.

자연수 n에 대하여 직선 $y = \dfrac{1}{2n}x - 1$이 함수 $y = f(x)$의 그래프와 만나는 서로 다른 점의 개수를 $\{a_n\}$이라 하자.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+2}} = \frac{q}{p}$ 일때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

60. 두 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x) = \dfrac{-x^2 + ax + b}{e^x}$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 $x = x_1$과 $x = x_2$ $(x_1 \ne x_2)$에서 극값을 갖고 $x_1 + x_2 = 2$이다. (나) 곡선 $y = f(x)$의 변곡점의 x좌표는 x_3, x_4 $(x_3 \ne x_4)$이고 $(x_3)^2 + (x_4)^2 = 14$이다.

실수 t에 대하여 함수

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t)}{t+1} & (t \ne -1) \\ f'(-1) & (t = -1) \end{cases}$$

일 때, 구간 $[-1, \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최댓값은 M이고 최솟값은 m이다. $(emM)^2$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } \displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0\right)$ [4점]

일일학습

26학년도 EBS 버티컬 시즌4

16 일차 : 26년 월 일

61. 함수 $f(x)=(2x^2+3)e^x$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,

$$\int_3^{5e} \frac{x}{f'(g(x))}dx$$

의 값은? [3점]

① $5e-1$ ② $5e-3$ ③ $5e-5$
④ $5e-7$ ⑤ $5e-9$

62. 상수 $a(0<a<4\pi)$와 자연수 b에 대하여 함수

$$f(x)=\cos\left(a+bxe^{\frac{1}{2}-x^2}\right)$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=0$
(나) $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다.

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소인 실수 α의 개수가 6이 되도록 하는 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는?
(단, $\sqrt{2}\pi=4.44$로 계산한다.) [4점]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

63. 함수 $f(x)=e^{2x}+2e^{x}-3$과 양수 t에 대하여 함수

$$g(x)=\int_{0}^{x}(t-f(s))ds$$

가 최대가 되도록 하는 x의 값을 $h(t)$라 하자. $h'(k)=\frac{1}{12}$인 실수 k에 대하여 $0<t\le k$에서 $g(h(k))$의 최댓값은 $p+q\ln 2$이다. $10(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [4점]

64. 두 양의 실수 a, b와 음의 실수 c에 대하여 $x>0$에서 정의된 함수 $f(x)=\frac{1}{2}\ln ax+bx^{2}+cx$가 다음 조건을 만족시킬때, $f(2)$의 최댓값은 $\frac{1}{2}\ln 2+p+q\sqrt{2}$이다. $8pq$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [4점]

(가) $f(1)=1$
(나) 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고,
함수 $|f(x)-g(x)|$는 $x=1$에서 미분가능하다.

일일학습
26학년도 EBS 만점마무리 시즌1 1회

17 일차 : 26년 월 일

65. 매개변수 $t(t>0)$으로 나타내어진 곡선 $x=f(t),\ y=g(t)$에 대하여 두 함수 $f(t),\ g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=0$
(나) $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 $f'(t)=e^t g(t),\ g'(t)=-e^t f(t)$

$1\le t\le 3$일 때, 곡선 $x=f(t),\ y=g(t)$의 길이는 20이다. $|g(1)|$의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{e^3+e}$ ② $\dfrac{2}{e^3+e}$ ③ $\dfrac{1}{e^3}-e$ ④ $\dfrac{2}{e^3}-e$ ⑤ $\dfrac{3}{e^3}-e$

66. $0\le x<2\pi$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=\frac{2}{k}\cos^3\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\ g(x)=\frac{1}{k}\sin x+1$$

에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수가 4일 때, 양수 k의 값은? [4점]

① $\dfrac{\sqrt{6}}{8}$ ② $\dfrac{\sqrt{6}}{9}$ ③ $\dfrac{\sqrt{6}}{10}$ ④ $\dfrac{\sqrt{6}}{11}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{6}}{12}$

67. 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n = \begin{cases} a_n & (|a_n| \geq 1) \\ 4a_n & (|a_n| < 1) \end{cases}$$

이라 할 때, 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{3n-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_{3n}$이 각각 수렴한다.

$b_4 = -1$, $b_5 = 2$일 때, $14 \times \sum_{n=1}^{\infty} |b_{3n-1}|$의 값을 구하시오. [4점]

68. 정수 a와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x) = \dfrac{a+f(x)}{e^{f(x)}}$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g(x)$는 $x=2$에서 극댓값 $\dfrac{1}{e^4}$을 갖는다.
>
> (나) $g(x)$는 $x=4$에서 극소이다.

$a \times g(4)$의 값을 구하시오. [4점]

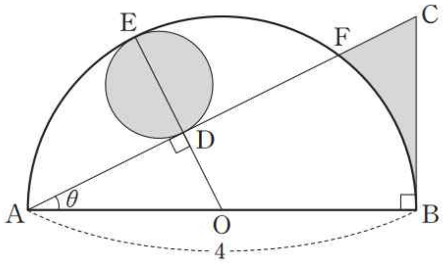
일일학습 26학년도 EBS 만점마무리 시즌1 2회

18 일차 : 26년 월 일

69. 함수 $f(x)=\dfrac{9}{x^2-1}(x>1)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(3,\ g(3))$에서의 접선의 기울기는? [3점]

① -4　② -2　③ -1　④ $-\dfrac{1}{2}$　⑤ $-\dfrac{1}{4}$

70. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 반원과 $\angle\mathrm{BAC}=\theta$, $\angle B=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC가 있다. 선분 AB의 중점 O에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 D라 하고 두 점 D, O를 지나는 직선이 호 AB와 만나는 점을 E, 선분 AC와 호 AB가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 F라 하자. 선분 DE를 지름으로 하는 원의 넓이를 $f(\theta)$라 하고, 호 BF, 선분 CF, 선분 BC로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{\pi-f(\theta)}{g(\theta)+3\theta}$의 값은? [4점]



① $\dfrac{2}{3}\pi$　② $\dfrac{5}{6}\pi$　③ π　④ $\dfrac{7}{6}\pi$　⑤ $\dfrac{4}{3}\pi$

71. $x>0$에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x>0$인 모든 실수 x에 대하여
$f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2f(x)+x^2(2-x)e^x$이다.

(나) $\displaystyle\int_1^2 f\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=3e+e^2$

$\displaystyle\int_1^{\frac{5}{2}} f(x)dx=ke$일 때, $6k$의 값을 구하시오.

(단, k는 유리수이다.) [4점]

72. 함수 $f(x)=x^3e^{-x}$과 $0<t<1$인 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} tf(x) & (x\ge 0) \\ -f(-x) & (x<0)\end{cases}$$

라 하자. 방정식 $g(x)=f(a)$의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되도록 하는 실수 a의 최댓값을 $M(t)$라 하고 최솟값을 $m(t)$라 할 때, $h(t)=M(t)-m(t)$라 하자. 미분가능한 함수 $h(t)$에 대하여

$h(k)+m(k)=4$일 때, $|h'(k)|=\dfrac{q}{p}e$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

$\left(\text{단, } \displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0\text{이고, } p\text{와 } q\text{는 서로소인 자연수이다.}\right)$ [4점]

일일학습

26학년도 EBS 만점마무리 시즌1 3회

19 일차 : 26년 월 일

73. 함수 $f(x)=(\ln x)^2+a\ln x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(\frac{1}{e},\ f\left(\frac{1}{e}\right)\right)$에서의 접선과 $(e,\ f(e))$에서의 접선이 만나는 점의 x좌표가 0이다. $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

74. 세 실수 a, b, c에 대하여 역함수가 연속인 함수 $f(x)=ae^{2x}+be^{x}+c$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to0}\frac{x^2+2x}{f(x)+3}=\frac{2}{5}$
(나) 임의의 실수 t에 대하여 부등식
$f(x)-f(t)\ge f'(t)(x-t)$
가 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

b의 값이 최소가 될 때, 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. $\int_{-3}^{17}g(x)dx$의 값은? (단, $a\ne0$) [4점]

① $\frac{43}{2}\ln3-10$ ② $22\ln3-11$ ③ $22\ln3-10$
④ $\frac{45}{2}\ln3-11$ ⑤ $\frac{45}{2}\ln3-10$

75. 공비가 0이 아닌 유리수인 등비수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(2|a_n|+a_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+2a_n)$이 모두 수렴한다.
>
> (나) $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|+\sum_{n=1}^{\infty}a_n=0$

어떤 자연수 m에 대하여 $a_m+1=0$일 때,

$$\sum_{n=1}^{2m}|a_n+1|+\frac{225}{256}\sum_{n=1}^{\infty}a_n=0$$

이 되도록 하는 모든 자연수 m의 값의 합을 구하시오. [4점]

76. 1이 아닌 두 자연수 a, b와 함수 $f(x)=a\pi x(x^2-3b^2)$에 대하여 함수 $g(x)=\sin f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

> 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소인 α의 값 중 열린구간 $(-2b,\ 2b)$에 속하는 모든 값의 집합을 A라 할 때, 집합 A의 원소의 개수가 290이다.

일일학습 26학년도 EBS 만점마무리 시즌2 1회

20 일차 : 26년 월 일

77. 정의역이 $\{x \mid x \geq 0\}$인 함수 $f(x)$가 음이 아닌 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x) > 0$
>
> (나) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t}{(t^2+1)f(t)}dt + 1$

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(\sqrt{2})$의 값은? [3점]

① $\dfrac{\sqrt{2}e}{\sqrt{e-1}}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}e}{\sqrt{e-1}}$ ③ $\dfrac{2e}{\sqrt{e-1}}$
④ $\dfrac{\sqrt{5}e}{\sqrt{e-1}}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{6}e}{\sqrt{e-1}}$

78. 함수 $f(x) = \ln\dfrac{3x+3}{x^2+3}$과 실수 t에 대하여 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> x에 대한 방정식 $f(x) = t$에 대하여 실근이 두 개 이상 존재할 때 가장 큰 실근과 가장 작은 실근의 차는 $g(t)$이고, 실근이 한 개만 존재하거나 존재하지 않을 때 $g(t) = 0$이다.

함수 $f(x)$의 최댓값을 α라 할 때, $\displaystyle\int_0^\alpha g(t)dt = \int_0^k f(x)dx$를 만족시키는 양수 k에 대하여 $\displaystyle\int_0^k xf(x)dx$의 값은? [4점]

① $-4\ln 2 + \dfrac{11}{4}$ ② $-4\ln 2 + 3$
③ $-4\ln 2 + \dfrac{13}{4}$ ④ $-4\ln 2 + \dfrac{7}{2}$
⑤ $-4\ln 2 + \dfrac{15}{4}$

79. 등차수열 $\{a_n\}$과 모든 항이 0이 아닌 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{2n+a_1}{n+1}\right)=1$

(나) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|2b_n|=\sum_{n=1}^{\infty}7b_{2n}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_{a_n}=\frac{8}{21}$일 때, $26(a_3-b_3)$의 값을 구하시오. [4점]

80. 두 상수 $a(a>0)$, b에 대하여 $-1<x\le 3$에서 정의된 함수

$$f(x)=a\sin\left\{\frac{\pi}{3}\left(x+\frac{5}{2}\right)\right\}+b$$

와 $-1<x<3$에서 정의된 두 함수

$$g(x)=-x^2+2x+2,\ h(x)=f(g(x))$$

가 있다. $-1<x<3$에서 함수 $h(x)$의 극댓값이 $\frac{1}{4}$, 극솟값이 -1일 때, $20ab$의 값을 구하시오. [4점]

일일학습

26학년도 EBS 만점마무리 시즌2 2회

21 일차 : 26년 월 일

81. 양수 a와 실수 b에 대하여 함수 $f(x)=(ax^2+b)e^x-2$가 역함수 $g(x)$를 갖는다. 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $g'(5e^3-2)$의 값은?
(단, $\lim_{x \to -\infty} f(x)=-2$이고, $g(5e^3-2)$는 유리수이다.) [3점]

① $\frac{1}{e^3}$ ② $\frac{1}{3e^3}$ ③ $\frac{1}{5e^3}$
④ $\frac{1}{7e^3}$ ⑤ $\frac{1}{9e^3}$

82. $0<t<\frac{1}{e}$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $te^x=x$의 두 실근 중 큰 값을 $M(t)$라 하자. 곡선 $y=M(x)\left(0<x<\frac{1}{3}\right)$ 위의 변곡점에서의 접선의 x절편, y절편을 각각 a, b라 할 때, ab의 값은?
[4점]

① $\frac{12}{e^2}$ ② $\frac{13}{e^2}$ ③ $\frac{14}{e^2}$
④ $\frac{15}{e^2}$ ⑤ $\frac{16}{e^2}$

83. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=|x\sin ax|-x\sin ax$$

라 하자. 양수 t에 대하여

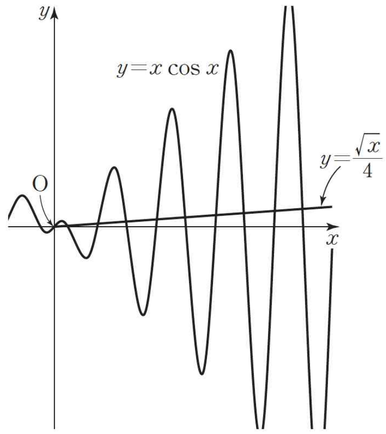
$$\lim_{x\to t-}\frac{f(x)-f(t)}{x-t}\neq\lim_{x\to t+}\frac{f(x)-f(t)}{x-t}$$

인 모든 t를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 t_n이라 하면 $\int_0^{t_6}f(x)dx=\frac{7}{24}\pi$이다. a의 값을 구하시오. [4점]

84. 함수 $y=\frac{\sqrt{x}}{4}$의 그래프와 함수 $y=x\cos x$의 그래프가 제1사분면에서 만나는 모든 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a_{2n})^{\frac{3}{2}}\sin(a_{2n+2}-a_{2n})}{a_{2n+2}-a_{2n}}=\frac{q}{p}$$

일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



일일학습 | 26학년도 EBS 만점마무리 시즌2 3회

22 일차 : 26년 월 일

85. $0<t<\frac{1}{4}$인 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\frac{tx-t+1}{e^x}$$

이라 하자. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 하면 함수 $g(t)$는 역함수 $h(t)$를 갖는다. $h'(0)$의 값은? [3점]

① $\frac{e}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4e}$ ④ $\frac{1}{5e^2}$ ⑤ $\frac{1}{6e^3}$

86. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\frac{f(x)}{x^2+4}$$

라 할 때, x에 대한 방정식 $g(x)=k$가 실근을 갖도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위는 $\frac{9}{4}\le k<3$이다. $g(1)$의 값은? [4점]

① $\frac{8}{5}$ ② $\frac{9}{5}$ ③ 2 ④ $\frac{11}{5}$ ⑤ $\frac{12}{5}$

87. 첫째항이 자연수이고 공비가 0 이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$과 수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $b_n=(a_n+a_2)^2+k$를 만족시킨다. 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴할 때,

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})\right\}\times\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right),\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n\le 8$$

을 만족시키는 모든 수열 $\{b_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$의 최댓값을 구하시오.

(단, k는 상수이다.) [4점]

88. 실수 전체의 집합에서 증가하고 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_0^2 f(x)dx=\frac{32}{15}$, $\int_0^2 x\{f(x)-f^{-1}(x)\}dx=\frac{175}{315}$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)+2$이고, $f(0)=0$이다.

$\int_0^{10} x\{f(x)-f^{-1}(x)\}dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

일일학습 26학년도 EBS 만점 고난도 1회

23 일차 : 26년 월 일

89. $0 \le x \le 1$에서 정의된 함수 $f(x)=\displaystyle\int_{x}^{x+1} |t \sin \pi t|\, dt$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=\dfrac{1}{2}$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\dfrac{1}{\pi}-\dfrac{2}{\pi^2}$ ② $\dfrac{1}{\pi}-\dfrac{1}{\pi^2}$ ③ $\dfrac{2}{\pi^2}$
④ $\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{1}{\pi^2}$ ⑤ $\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{2}{\pi^2}$

90. 열린구간 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수

$$f(x)=\tan^2 x-\tan x+x$$

와 양수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x+t$가 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하고 선분 PQ의 길이를 $g(t)$라 할 때, $g'(2)$의 값은? (단, 점 P의 x좌표는 점 Q의 x좌표보다 작다.) [4점]

① $\dfrac{2\sqrt{2}}{15}$ ② $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ ③ $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$
④ $\dfrac{7\sqrt{2}}{30}$ ⑤ $\dfrac{4\sqrt{2}}{15}$

91. 자연수 k에 대하여 실수 a_k는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $x>0$에서 두 함수
> $$y=\frac{\cos x}{x},\ y=\sin x+a_k x$$
> 의 그래프의 교점의 개수는 k이다.
>
> (나) k가 홀수일 때 $a_k<0$이고, k가 짝수일 때 $a_k>0$이다.

$$f(k)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\pi a_k)^{n+1}+4\times(\pi a_k+1)^n}{3\times(\pi a_k)^n+(\pi a_k+1)^{n+1}}$$

에 대하여 $100\times\{f(1)+f(2)+f(3)\}$의 값을 구하시오. [4점]

92. 양의 실수 전체의 집합에서 연속인 함수

$$f(x)=\begin{cases}-(\ln x-a)^2+b & (0<x\le e)\\ (x-a)^2+c & (x>e)\end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

> (가) 모든 양수 x에 대하여
> $$(x-1)\{f(x)-f'(1)(x-1)-f(1)\}\ge 0$$
> 이다.
>
> (나) 함수 $f(x)$의 모든 극값의 합은 $2e^2+4e$이다.

일일학습

26학년도 EBS 만점 고난도 2회

24 일차 : 26년 월 일

93. 열린구간 $(0,\ 2)$에서 정의된 함수 $f(x)=a\tan\dfrac{\pi}{4}x+b\ln x$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{f(\cos x)-a}{x^2}=\frac{1}{4}$
(나) $f'\left(\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$

$a\times b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① $\dfrac{1}{25\pi}$ ② $\dfrac{2}{25\pi}$ ③ $\dfrac{3}{25\pi}$

④ $\dfrac{4}{25\pi}$ ⑤ $\dfrac{1}{5\pi}$

94. 함수 $f(x)=\dfrac{ax}{\sqrt{2x^2+1}}$의 역함수를 $g(x)$라 하고, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점의 x좌표를 b라 하자. $\displaystyle\int_0^b \frac{x}{f'(g(x))}dx=3$이고 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이가 S일 때, $a+b+S$의 값은?
(단, a는 $a>1$인 상수이다.) [4점]

① 6 ② 7 ③ 8

④ 9 ⑤ 10

95. 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+1}+x+1}{x^{2n}+1}$에 대하여 수열 $\{a_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

모든 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)\{f(x+n)+a_n\}$은 $x=-1$에서 연속이다.

두 상수 p, α $(\alpha\neq 0)$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}\sum_{k=1}^{n}a_k=\alpha$일 때, $a_1-a_{10}+p+\alpha$의 값을 구하시오. [4점]

96. 두 상수 a, b $(a>2,\ b>0)$에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases}x^2+ax & (x\le 0)\\ bxe^{-x}+2x & (x>0)\end{cases}$$

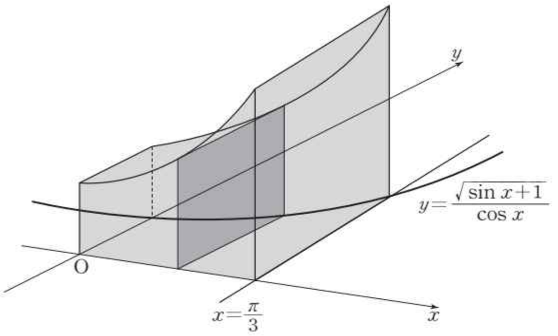
은 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 함수 $g(x)=|f(x)-2x|$가 $x=\alpha$에서 극대인 모든 실수 α에 대하여 집합 $\{x\,|\,g(x)=g(\alpha)\}$의 원소의 개수가 3일 때, $f(-2)+f(2)=p+\frac{q}{e}+\frac{8}{e^3}$이다. $10p+q$의 값을 구하시오. [4점]

$\left(\text{단, } \lim_{x\to\infty}xe^{-x}=0\text{이고, } \frac{1}{e}\text{과 } \frac{1}{e^3}\text{은 무리수, } p\text{와 } q\text{는 유리수이다.}\right)$

일일학습 | 26학년도 EBS 직전 클리어

25 일차 : 26년 월 일

97. 그림과 같이 곡선 $y=\dfrac{\sqrt{\sin x+1}}{\cos x}$ 과 x축, y축 및 직선 $x=\dfrac{\pi}{3}$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $1+\sqrt{3}$ ② $2+\sqrt{3}$ ③ $1+2\sqrt{3}$
④ $3+\sqrt{3}$ ⑤ $2+2\sqrt{3}$

98. 최고차항의 계수가 1이고, $f''(0)$의 값이 자연수인 삼차함수 $f(x)$가 있다. 곡선 $y=f(\ln x)$에 접하고 기울기가 t인 직선이 오직 하나가 되도록 하는 실수 t에 대하여 접점의 x좌표를 $g(t)$라 하자. $g(3)=1$을 만족시키는 함수 $g(t)$에 대하여 모든 $g'(3)$의 값의 합은? (단, $2.7<e<3$) [4점]

① $-\dfrac{7}{4}$ ② $-\dfrac{3}{2}$ ③ $-\dfrac{5}{4}$
④ -1 ⑤ $-\dfrac{3}{4}$

99. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-3n+c}{n}$ 가 수렴하도록 하는 상수 c가 존재하고

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}+a_{n+2}}{S_nS_{n+2}}=0$ 일 때, a_5의 값을 구하시오. [4점]

100. 최고차항의 계수가 음수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} e^x f(x) & (x\ge 1) \\ -e^{2-x}f(2-x) & (x<1)\end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하고, $g'(1)=5e$이다.
(나) 곡선 $y=g(x)$의 변곡점은 오직 하나이다.

$\displaystyle\int_0^3 g(x)dx$의 최댓값이 $e^2(p+qe)$일 때, $p-q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 정수이다.) [4점]

일일학습

26학년도 EBS 수능완성 실전 1회

26 일차 : 26년 월 일

101. 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f(x)-x=0$의 실근은 1뿐이다.
> (나) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-a}{x^3-a^3}=\frac{1}{a^2}$을 만족시키는 0이 아닌 실수 a가 존재한다.

두 함수 $f^{-1}(x)$, $g(x)$가 미분가능하고 모든 실수 x에 대하여

$$(g\circ f^{-1})(x)=x^3$$

을 만족시킬 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

102. $0<k<2$인 상수 k와 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 정의된 함수 $f(x)=1-\cos\pi x$에 대하여 함수

$$g(x)=|f(x)-k|$$

의 최댓값을 M이라 하고, 방정식 $f(x)=M$의 두 실근 중 작은 근을 α라 하자. $p\le t\le\alpha$인 모든 실수 t에 대하여

$$\int_t^{2-t}\{f(x)-g(x)\}dx=k(2-2t)$$

를 만족시키는 실수 p의 최솟값이 $\alpha-\frac{1}{3}$일 때, $g(k)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

103. 첫째항이 2이고 공비 r이 2 이상 6 이하의 자연수인 등비수열 $\{a_n\}$이 있다. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$을

$$b_n = \frac{a_n + 2^{2n+1}}{S_n + 4^n}$$

이라 하자. $\lim_{n\to\infty} b_n$의 값이 존재하고 $\lim_{n\to\infty} b_n < 1$을 만족시키는 서로 다른 모든 r의 값의 합을 구하시오. [4점]

104. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x) = xe^{ax+b} + x$라 하자. 음수 k에 대하여 함수

$$g(x) = \int_k^x f(t)f'(t)dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $y = |g(x)|$가 $x = \alpha$ $(\alpha > 0)$에서만 미분가능하지 않다.
>
> (나) $f\left(-\frac{2}{a}\right) = g\left(-\frac{2}{a}\right) - 8$

$16(a+b)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to -\infty} xe^x = 0$) [4점]

일일학습

26학년도 EBS 수능완성 실전 2회

27 일차 : 26년 월 일

105. 공비가 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$과 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하고, 그 합은 15이다.
>
> (나) 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(a_n)}{a_n}$이 수렴하고, 그 합은 0이다.

$f(1)=-2$일 때, a_3의 값은? [3점]

① $\frac{5}{3}$ ② $\frac{20}{9}$ ③ $\frac{25}{9}$ ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{35}{9}$

106. 좌표평면에 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$이 있다. $\frac{1}{2}$보다 큰 실수 t에 대하여 점 A를 지나는 원 C는 반지름의 길이가 t이고 중심이 제1사분면에 있으면서 x축에 접한다. 원 C에 접하고 기울기가 $-\frac{3}{4}$인 두 직선의 y절편을 각각 $f(t)$, $g(t)$ $(f(t)<g(t))$라 하자.
$f'(k)=0$인 상수 k에 대하여 $g'(k+8)$의 값은? [4점]

① $\frac{11}{5}$ ② $\frac{23}{10}$ ③ $\frac{12}{5}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{13}{5}$

107. 실수 t에 대하여 함수 $f(x)=\ln x+e^t$이 있다. 원점 O에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선을 l이라 할 때, 직선 l과 곡선 $y=f(x)$가 만나는 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 직선 l에 수직인 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 직선 l의 기울기를 $g(t)$, $\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AC}}}$의 값을 $h(t)$라 할 때, $h(a)=e^4$을 만족시키는 실수 a에 대하여 $\dfrac{1}{e^6}\times g'(a)\times h'(a)$의 값을 구하시오. [4점]

108. 두 실수 a, b가 $a<-\dfrac{1}{2}$, $b>1$일 때, 함수 $f(x)=(ax^3+bx^2)e^{-x}$에 대하여 두 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt,$$

$$h(x)=\int_{x+1}^{x+2}\{f'(t)e^t+2t\}dt$$

는 다음 조건을 만족시킨다.

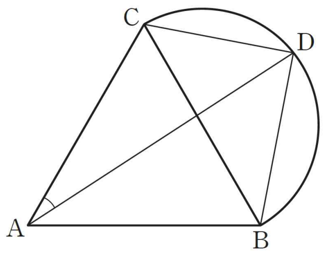
> (가) 곡선 $y=g(x)$는 서로 다른 3개의 변곡점을 갖고, 변곡점의 x좌표를 각각 α_1, α_2, α_3 $(\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3)$이라 하면 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=5$이다.
>
> (나) 방정식 $h'(x)=0$을 만족시키는 모든 x의 값의 곱은 $-\dfrac{2}{3}$이다.

열린구간 $(2\alpha_1,\ 2\alpha_3)$에서 함수 $H(x)=h\left(\sin\dfrac{\pi}{2}x\right)$가 $x=\beta$에서 극값을 갖도록 하는 모든 β의 값의 합을 구하시오. [4점]

일일학습 | 26학년도 EBS 수능완성 실전 3회

28 일차 : 26년 월 일

109. 그림과 같이 정삼각형 ABC와 선분 BC를 지름으로 하는 반원이 있다. 반원의 호 위의 점 D에 대하여 $\tan(\angle \mathrm{DBC})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$일 때, $\tan(\angle \mathrm{DAC})$의 값은?
(단, 점 D는 정삼각형 ABC의 외부에 있다.) [3점]



① $\dfrac{3\sqrt{3}}{17}$ ② $\dfrac{7\sqrt{3}}{34}$ ③ $\dfrac{4\sqrt{3}}{17}$
④ $\dfrac{9\sqrt{3}}{34}$ ⑤ $\dfrac{5\sqrt{3}}{17}$

110. 두 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\frac{x^2+ax+b}{e^x}$$

라 하고, 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(t)$가 $t=k$에서 불연속인 실수 k의 값은 2개이다.
> (나) 곡선 $y=f(x)$의 서로 다른 두 변곡점 P, Q의 중점의 x좌표가 1이다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기와 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 Q에서의 접선의 기울기의 곱은? (단, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$) [4점]

① $-\dfrac{8}{e^2}$ ② $-\dfrac{6}{e^2}$ ③ $-\dfrac{4}{e^2}$
④ $-\dfrac{6}{e^4}$ ⑤ $-\dfrac{4}{e^4}$

111. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$와 양수 k가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_0^1 \{f(x)\}^2 e^{2x}dx$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\int_0^1 \{f(x)\}^2 e^{2x}dx = -\frac{14}{23}\int_0^1 f(x)f'(x)e^{2x}dx = 7k$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f'(x)=\frac{k}{e^x}$이다.

(다) $-\frac{e}{2}f(1)=\frac{ef(1)+f(0)}{f(0)}$

112. 일차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)>0$이다.
(나) $f(-1)=0,\ g(2)=5$

함수

$$h(x)=\int_{-3}^{x} f(t)\ln\frac{g(x)}{g(t)}dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖고 $h'(3)=4$일 때, $f(5)+g(5)$의 값을 구하시오. [4점]

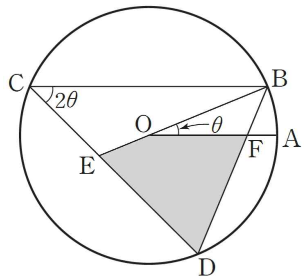
일일학습 26학년도 EBS 수능완성 실전 4회

29 일차 : 26년 월 일

113. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 두 점 A, B에 대하여 점 B를 지나고 직선 OA에 평행한 직선이 원과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 C라 하자. $\angle \mathrm{AOB}=\theta$라 할 때, $\angle \mathrm{BCD}=2\theta$가 되도록 원 위의 점 D를 잡는다. 두 직선 OB, CD의 교점을 E라 하고, 두 직선 OA, BD의 교점을 F라 하자.

사각형 OEDF의 넓이를 $f(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)}{\theta}$의 값은?

$\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{4}\text{이고, 두 선분 AD, BC는 만나지 않는다.}\right)$ [3점]



① $\frac{5}{3}$ ② $\frac{11}{6}$ ③ 2

④ $\frac{13}{6}$ ⑤ $\frac{7}{3}$

114. 양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=\ln x$ 위의 점 $(t,\ \ln t)$에서의 접선의 방정식을 $y=f(x)$라 할 때, 함수 $y=|f(x)-x^2+m|$이 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 실수 m의 최댓값을 $g(t)$라 하자. $\int_1^e g(t)\,dt$의 값은? [4점]

① $e+\frac{1}{4e}-\frac{9}{4}$ ② $e+\frac{1}{4e}-2$ ③ $e+\frac{1}{4e}-\frac{7}{4}$

④ $e+\frac{1}{4e}-\frac{3}{2}$ ⑤ $e+\frac{1}{4e}-\frac{5}{4}$

115. 실수 m에 대하여 기울기가 m인 직선이 함수

$$f(x)=(x^2+1)e^{-x}$$

의 그래프와 만나는 서로 다른 점의 개수의 최댓값과 최솟값의 차를 $g(m)$이라 하자. 집합 $A=\{g(m)\mid m\text{은 실수}\}$의 원소의 개수를 p, 모든 원소의 합을 q라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$) [4점]

116. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq g(x)$이다. (나) 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$는 두 점에서만 만난다. (다) 상수 a에 대하여 $f(a)=g(a)=g(a+2)=0$이다.

$f'(1)=f''(1)=0,\ g(1)=1$일 때, $\int_2^4 \frac{g'(x)}{f'(x)}dx=\ln p$이다.
$100\times p^6$의 값을 구하시오. [4점]

일일학습 | 26학년도 EBS 수능완성 실전 5회

30 일차 : 26년 월 일

117. 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 미분가능한 함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x tg(t)dt - \int_0^x xg(t)dt = -\sin x + x$$이다.

(나) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$인 모든 실수 x에 대하여

$$\{f'(x)\}^2 = \frac{\{g'(x)\}^2}{1-2\{g(x)\}^2+\{g(x)\}^4} - 1$$이다.

$x=0$에서 $x=\frac{\pi}{6}$까지의 곡선 $y=f(x)$의 길이는? [3점]

① $\frac{1}{2}\ln 2$ ② $\frac{1}{2}\ln 3$ ③ $\ln 2$
④ $\ln 3$ ⑤ $2\ln 2$

118. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = e^x f(x)$$

라 할 때, 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=-\sqrt{2}$와 $x=\sqrt{2}$에서 극값을 갖는다.
(나) 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 곡선 $y=g(x)$의 변곡점은 $(\alpha, g(\alpha))$, $(\beta, g(\beta))$이고, $g(\alpha)\times g(\beta) = -\frac{12}{e^2}$이다.

$t < \sqrt{2}$인 실수 t에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x) = g(|x|+t)$$

라 할 때, 함수 $h(x)$의 극댓값을 $k(t)$, 극솟값을 $l(t)$라 하자. $k(t)$의 최댓값을 M, $l(t)$의 최솟값을 m이라 할 때, $\int_{mM}^{0} f(x)dx$의 값은? (단, $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$) [4점]

① 36 ② $\frac{110}{3}$ ③ $\frac{112}{3}$
④ 38 ⑤ $\frac{116}{3}$

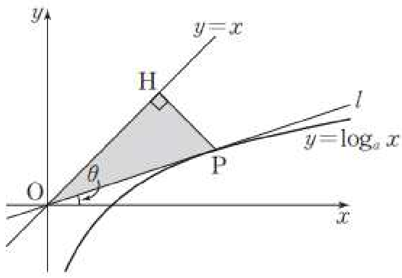
119. 실수 $a(a>1)$과 자연수 $b(b>1)$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{n\to\infty}\frac{a\times 4^{n-1}+4\times a^{n+1}}{a^n+4^n}=\frac{1}{2}$
>
> (나) 두 함수 $y=4^x$, $y=b^{x+1}$의 그래프가 제 2사분면에서만 만나도록 하는 b의 최솟값은 k이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k\times(\frac{1}{a})^{n+1}+a\times(\frac{1}{k})^{n+1}}{(\frac{1}{a})^n+(\frac{1}{k})^n}=\frac{q}{p}$$ 일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

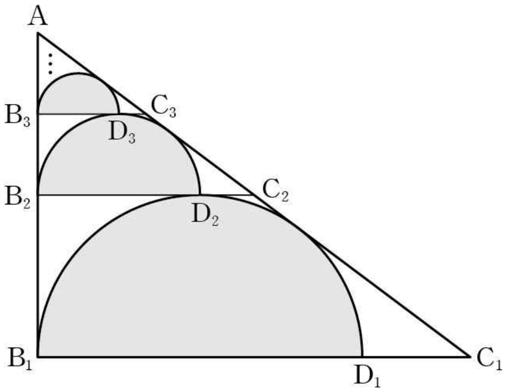
120. 그림과 같이 곡선 $y=\log_a x$ 위의 점 P에서의 접선 l이 원점 O를 지난다. 점 P에서 직선 $y=x$에 내린 수선의 발을 H라 하고, 삼각형OPH의 넓이를 $S(a)$라 할 때, $\lim_{a\to\infty}\frac{100\times S(a)}{e^2}$의 값을 구하시오. (단, a는 실수이고, $a^e>e$이다.) [4점]



일일학습 25학년도 EBS 파이널 1회

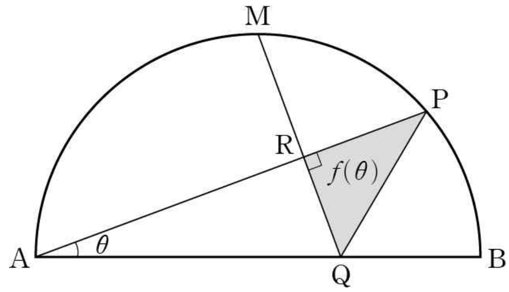
31 일차 : 26년 월 일

121. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=3$, $\overline{B_1C_1}=4$이고, $\angle AB_1C_1=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 AB_1C_1에 대하여 선분 B_1C_1 위의 점 D_1을 선분 B_1D_1을 지름으로 하는 반원의 호가 선분 AC_1에 접하도록 잡고, 선분 B_1D_1과 호 B_1D_1로 둘러싸인 반원의 내부의 넓이를 S_1이라 하자.
선분 AB_1 위의 점 B_2와 선분 AC_1 위의 점 C_2를 선분 B_2C_2가 선분 AB_1에 수직이고 호 B_1D_1에 접하도록 잡는다. 삼각형 AB_2C_2에 대하여 선분 B_2C_2 위의 점 D_2를 선분 B_2D_2를 지름으로 하는 반원의 호가 선분 AC_2에 접하도록 잡고, 선분 B_2D_2와 호 B_2D_2로 둘러싸인 반원의 내부의 넓이를 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 반원의 내부의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [3점]



① $\frac{5}{4}\pi$ ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ $\frac{7}{4}\pi$
④ 2π ⑤ $\frac{9}{4}\pi$

122. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원에 대하여 호 AB를 이등분하는 점을 M이라 하자. 호 BM 위의 점 M, 점 B가 아닌 점 P를 $\angle PAB=\theta$가 되도록 잡고, 점 M을 지나고 직선 AP에 수직인 직선이 선분 AB와 만나는 점을 Q, 선분 AP와 만나는 점을 R이라 하자. 삼각형 PRQ의 넓이를 $f(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)}{\theta}$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

123. 함수 $f(x)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}|\sin t|dt$에 대하여

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\sin x\,dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

124. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (0\le x\le 3) \\ \dfrac{f(x)}{x-2} & (x<0,\ x>3) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(나) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.
(다) 함수 $g(x)$가 $x=k$에서 극소이면 $g(x)$는 $x=k$에서 미분가능하지 않다.

$g(3)\ge -27$일 때, 조건을 만족시키는 모든 함수 $g(x)$의 극솟값의 최댓값이 $-\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

일일학습

25학년도 EBS 파이널 2회

32 일차 : 26년 월 일

125. $s<t$인 두 실수 s, t에 대하여 두 점 $\mathrm{A}(s,\ s^2)$, $\mathrm{B}(t,\ t^2)$은 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}$를 만족시키면서 곡선 $y=x^2$ 위를 움직인다. $s=0$일 때, $\dfrac{dt}{ds}$의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{6}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{1}{2}$
④ $\dfrac{2}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{6}$

126. 세 함수 $f(x)=\dfrac{4\ln x}{x}$, $g(x)$, $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 열린구간 $(-e,\ e)$에서 미분가능하고 $-e<x<e$에서 $g'(x)\leq\dfrac{4}{e^2}$이다.

(나) 함수 $h(x)$는 $h(x)=\begin{cases}-f(-x) & (x<-e)\\ g(x) & (-e\leq x\leq e)\\ f(x) & (x>e)\end{cases}$ 이고 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$\displaystyle\int_{-4}^{e}|h(x)|dx$의 값은? [4점]

① $4(\ln2)^2-2$ ② $4(\ln2)^2$ ③ $4(\ln2)^2+2$
④ $8(\ln2)^2-2$ ⑤ $8(\ln2)^2+2$

127. 첫째항이 0이 아닌 등비수열 $\{a\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right|,\ \ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = -\frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

이 성립한다. $\frac{6}{a_1}+\frac{6}{a_2}$의 값을 구하시오. [4점]

128. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $x \geq 0$에서 $g(x)=f(x)e^{-x}$이고, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
> (나) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(t,\ g(t))$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$의 교점이 점 $(t,\ g(t))$만 존재하도록 하는 서로 다른 실수 t의 개수는 5이다. 이 실수 t를 작은 수부터 크기 순서대로 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$라 하면 $a_4+a_5=f(a_4)+f(a_5)=6$일 때, $f(10)$의 값을 구하시오.
(단, $\lim_{x\to\infty} f(x)e^{-x}=0$) [4점]

일일학습 | 25학년도 EBS 파이널 3회

33 일차 : 26년 월 일

129. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{a_2}$$

이다. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n+2} + 4(a_1)^n}{x^{2n} + (a_1)^{n+1}}$$

에 대하여 $f(a_1)\times f(a_2)$의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

130. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 함수 $g(x) = \dfrac{f(x)}{e^x}$가 다음 조건을 만족시킨다.

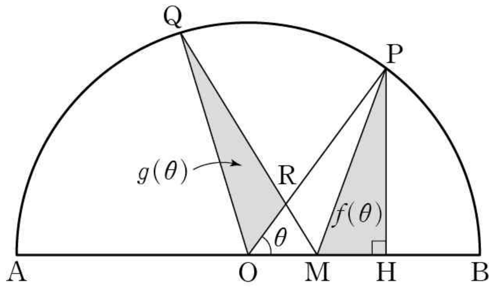
(가) $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)f'(x)dx = 0$이고 $f(2) > 0$, $f(-2) > 0$이다.

(나) 함수 $g(x)$는 $x = -1$에서 극값을 갖는다.

실수 t에 대하여 $h(x) = |g(x) - g'(t)(x-t) - g(t)|$라 하자. 함수 $h(x)$가 $x = p$에서 미분가능하지 않도록 하는 실수 p의 개수가 1이 되도록 하는 정수 t의 개수는? $\left(\text{단, } \displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0\right)$ [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

131. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 두 점 P, Q를 $\angle\text{QOB}=2\angle\text{POB}$가 되도록 잡는다. 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H, 선분 OH의 중점을 M, 선분 OP와 선분 MQ가 만나는 점을 R이라 하자. $\angle\text{POB}=\theta$일 때, 두 삼각형 PMH, QOR의 넓이를 각각 $f(\theta)$, $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0+}\dfrac{f(\theta)\times g(\theta)}{\theta^2}=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\text{이고, } p\text{와 } q\text{는 서로소인 자연수이다.}\right)$ [4점]



132. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$와 닫힌구간 $\left[0,\ \dfrac{3}{2}\right]$에서 정의된 연속함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여
> $$\int_1^x (x-t)f(t)dt=\frac{a}{2\pi}\sin\pi x+bx^2-bx$$
> 를 만족시키고, 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\dfrac{3(\pi+2)}{2}$이다.
>
> (나) 함수 $g(x)$의 역함수 $g^{-1}(x)$가 $0\le x\le\dfrac{1}{2}$인 모든 실수 x에 대하여
> $$\pi g^{-1}(x)+f(x)=3$$
> 을 만족시킨다.

$\int_0^{\frac{3}{2}}\pi g(x)dx=k$일 때, $(4k-3\pi)^2$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 양수이다.) [4점]

일일학습

25학년도 EBS 파이널 4회

34 일차 : 26년 월 일

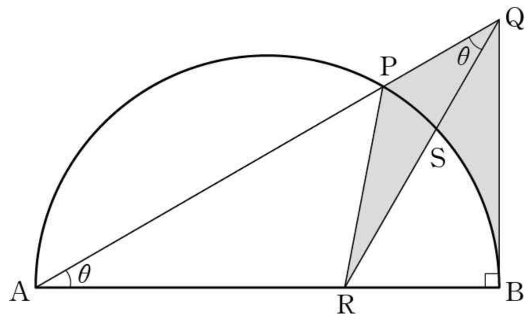
133. 실수 전체의 집합에서 정의되고 미분가능한 함수 $f(x)$와 양의 실수 전체의 집합에서 정의되고 미분가능한 함수 $g(x)$가 있다. 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이고, 함수 $g'(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다. 모든 양수 x에 대하여

$$\int_1^x \frac{1}{g'(f(t))f(t)}dt = 3x-3$$

이고 $f(1)=e^3$일 때, $f(\ln 2)$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

134. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 이 반원의 호 AB 위의 점 P에 대하여 직선 AP와 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 만나는 점을 Q라 하자. $\angle PAB=\theta$일 때, 선분 AB 위의 점 R을 $\angle AQR=\theta$가 되도록 잡고 선분 QR과 호 AB가 만나는 점을 S라 하자. 두 선분 PQ, BQ와 호 PB로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PQR의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta}$의 값은? $\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$ [4점]



① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

135. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(t)$에 대하여 점 $(0,\ 1)$에서 출발하여 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 위치 $(x,\ y)$가

$$x=f(t),\ y=2t^3+1$$

이다. 점 P가 점 $(0,\ 1)$로부터 움직인 거리가 s일 때 시각 $t=\frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{27}{2}s+1\right)^{\frac{2}{3}}-1}$ 이고, $t=1$일 때 점 P의 속도는 $(2,\ 6)$이다. 시각 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$에서 시각 $t=\frac{2\sqrt{6}}{3}$까지 점 P가 움직인 거리를 l이라 할 때, $f(3\sqrt{3})\times l$의 값을 구하시오. [4점]

136. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 그 도함수 $f'(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

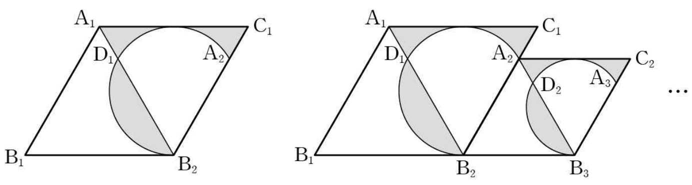
> (가) 방정식 $f'(x)=0$은 $x=\frac{4}{3}$를 근으로 갖는다.
>
> (나) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{xf(x)}{x-2}=8$

닫힌구간 $[1,\ e]$에서 정의된 함수 $g(x)=\frac{x^2\ln x}{f(x)+2x^2}$에 대하여 $g(x)$의 역함수를 $g^{-1}(x)$라 할 때, $\int_0^{\frac{1}{e}}\{g^{-1}(x)\}^2dx=pe+q$이다. $10p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) [4점]

일일학습 25학년도 EBS 파이널 5회

35 일차 : 26년 월 일

137. 그림과 같이 한 변의 길이가 4이고 $\angle \mathrm{A_1B_1B_2} = \frac{\pi}{3}$인 마름모 $\mathrm{A_1B_1B_2C_1}$이 있다. 점 $\mathrm{B_2}$를 지나고 선분 $\mathrm{A_1C_1}$의 중점에서 선분 $\mathrm{A_1C_1}$에 접하는 원이 두 선분 $\mathrm{A_1B_2}$, $\mathrm{C_1B_2}$와 만나는 점 중 $\mathrm{B_2}$가 아닌 점을 각각 $\mathrm{D_1}$, $\mathrm{A_2}$라 하자. 세 선분 $\mathrm{A_1D_1}$, $\mathrm{A_1C_1}$, $\mathrm{C_1A_2}$와 호 $\mathrm{D_1A_2}$로 둘러싸인 도형과 선분 $\mathrm{D_1B_2}$와 호 $\mathrm{D_1B_2}$로 둘러싸인 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 $\mathrm{B_1B_2}$의 연장선 위의 점 $\mathrm{B_3}$에 대하여 $\angle \mathrm{A_2B_2B_3} = \frac{\pi}{3}$인 마름모 $\mathrm{A_2B_2B_3C_2}$를 그린다. 점 $\mathrm{B_3}$을 지나고 선분 $\mathrm{A_2C_2}$의 중점에서 선분 $\mathrm{A_2C_2}$에 접하는 원이 두 선분 $\mathrm{A_2B_3}$, $\mathrm{C_2B_3}$과 만나는 점 중 $\mathrm{B_3}$이 아닌 점을 각각 $\mathrm{D_2}$, $\mathrm{A_3}$이라 하자. 세 선분 $\mathrm{A_2D_2}$, $\mathrm{A_2C_2}$, $\mathrm{C_2A_3}$과 호 $\mathrm{D_2A_3}$으로 둘러싸인 도형과 선분 $\mathrm{D_2B_3}$과 호 $\mathrm{D_2B_3}$으로 둘러싸인 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?
(단, 호 $\mathrm{D}_n\mathrm{A}_{n+1}$과 호 $\mathrm{D}_n\mathrm{B}_{n+1}$의 중심각의 크기는 π보다 작다.)
[3점]



R_1 R_2

① $2\sqrt{3}$ ② $3\sqrt{3}$ ③ $4\sqrt{3}$
④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $6\sqrt{3}$

138. 음이 아닌 실수 t에 대하여 기울기가 t인 직선이 곡선 $y=(x+a)e^{\frac{x}{2}}$에 접할 때 접점의 x좌표를 $f(t)$라 하자. 곡선 $y=(x+a)e^{\frac{x}{2}}$ 위의 x좌표가 1인 점에서의 접선이 원점을 지날 때, $\int_0^{2\sqrt{e}} f(t)dt$의 값은? (단, a는 양의 상수이다.) [4점]

① $-3e^{-\frac{3}{2}}$ ② $-2e^{-\frac{3}{2}}$ ③ $-e^{-\frac{3}{2}}$
④ $e^{-\frac{3}{2}}$ ⑤ $2e^{-\frac{3}{2}}$

139. 2 이상의 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 점 P의 y좌표의 최댓값을 a_n이라 할 때, $100 \times \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n}$의 값을 구하시오. [4점]

두 점 $\mathrm{A}\left(\frac{2}{n+1}, \frac{2}{\sqrt{n^2-1}}\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{2}{n-1}, -\frac{2}{\sqrt{n^2-1}}\right)$에 대하여 $\angle \mathrm{APB} = \frac{\pi}{2}$이다.

140. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0) < 0$인 삼차함수 $f(x)$가 있다. 함수

$$g(x) = \sin\{\pi f(x)\}$$

가 $x = a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 음이 아닌 실수 a를 작은 수부터 크기 순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.

$$a_1 = 0,\ a_7 = 2,\ g(a_7) = 0,\ \sum_{n=1}^{6} f(a_n) = 12$$

일 때, $f(4) = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

일일학습

25학년도 EBS 파이널 6회

36 일차 : 26년 월 일

141. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 역함수가 존재하는 함수 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를 $h(x)=f(g^{-1}(x))$라 하자.

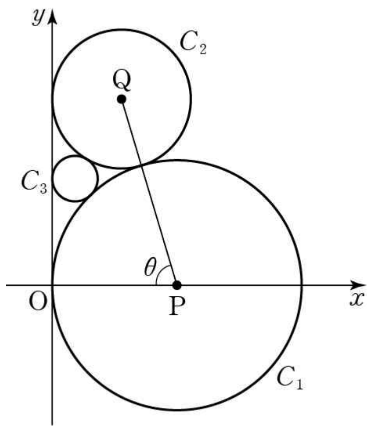
$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-5}{x-1}=7,\ \lim_{x\to 1}\frac{g(x)-1}{x-1}=2$$

일 때, $h'(1)$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

142. 그림과 같이 중심이 $\mathrm{P}(1,\ 0)$이고 반지름의 길이가 1인 원을 C_1, 제1사분면 위에 중심이 Q이고 원 C_1과 y축에 동시에 접하는 원을 C_2, 두 원 C_1, C_2 및 y축에 동시에 접하는 원을 C_3이라 하자. $\angle\mathrm{QPO}=\theta$라 할 때, 두 원 C_2, C_3의 반지름의 길이를 각각 $R(\theta)$, $r(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{R(\theta)\times r(\theta)}{\theta^4}$의 값은?

(단, O는 원점이고 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, $r(\theta)<R(\theta)$이다.) [4점]



① $\frac{1}{22}$ ② $\frac{1}{20}$ ③ $\frac{1}{18}$ ④ $\frac{1}{16}$ ⑤ $\frac{1}{14}$

143. 구간 $\left(-\frac{\pi}{2\sqrt{2}},\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)$에서 정의된 함수

$f(x)=\sqrt{2}\tan(\sqrt{2}x)$의 역함수를 $g(x)$라 하고, 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\int_0^x \frac{t}{\sqrt{g'(t)}}dt$$

라 하자. $x=-1$에서 $x=1$까지 곡선 $y=h(x)$의 길이가 k일 때, $60k$의 값을 구하시오. [4점]

144. 좌표평면에서 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 점 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$을 지나고 기울기가 1이 아닌 직선이 이 원과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B, y축과 만나는 점을 C라 하자. $\angle\mathrm{CAO}=\theta$라 할 때, 세 점 B, C, O을 지나는 원의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. 상수 a에 대하여 함수

$$f(\theta)=\begin{cases} S(\theta) & \left(0<\theta<\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}\right) \\ a & \left(\theta=\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

가 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 연속일 때,

$a+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)dtheta=(p+q\sqrt{3})\pi$이다. 두 유리수 p, q에 대하여 $60(p+q)$의 값을 구하시오. (단, 점 C의 y좌표는 양수이다.) [4점]

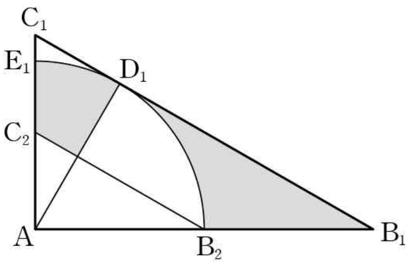
일일학습

25학년도 EBS 파이널 7회

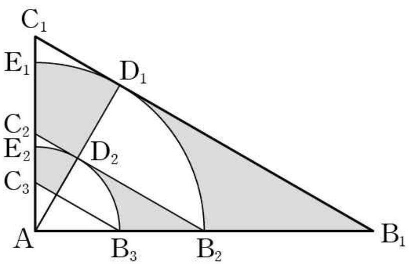
37 일차 : 26년 월 일

145. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AC_1}}=2$이고, $\angle\mathrm{A}=90^\circ$, $\angle\mathrm{B_1}=30^\circ$인 직각삼각형 $\mathrm{AB_1C_1}$이 있다. 점 A에서 선분 $\mathrm{B_1C_1}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{D_1}$이라 하고, 점 A를 중심으로 하고 선분 $\mathrm{AD_1}$을 반지름으로 하는 원이 두 선분 $\mathrm{AB_1}$, $\mathrm{AC_1}$과 만나는 점을 각각 $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{E_1}$이라 하고, 점 $\mathrm{B_2}$를 지나고 선분 $\mathrm{C_1B_1}$과 평행한 직선이 선분 $\mathrm{AC_1}$과 만나는 점을 $\mathrm{C_2}$라 하자. 부채꼴 $\mathrm{AD_1E_1}$의 내부와 삼각형 $\mathrm{AB_2C_2}$의 외부의 공통부분과 삼각형 $\mathrm{AB_1D_1}$의 내부와 부채꼴 $\mathrm{AB_2D_1}$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 $\mathrm{AD_1}$과 선분 $\mathrm{B_2C_2}$가 만나는 점을 $\mathrm{D_2}$라 하고, 점 A를 중심으로 하고 선분 $\mathrm{AD_2}$를 반지름으로 하는 원이 두 선분 $\mathrm{AB_2}$, $\mathrm{AC_2}$와 만나는 점을 각각 $\mathrm{B_3}$, $\mathrm{E_2}$라 하고, 점 $\mathrm{B_3}$을 지나고 선분 $\mathrm{C_2B_2}$와 평행한 직선이 선분 $\mathrm{AC_2}$와 만나는 점을 $\mathrm{C_3}$이라 하자. 부채꼴 $\mathrm{AD_2E_2}$의 내부와 삼각형 $\mathrm{AB_3C_3}$의 외부의 공통부분과 삼각형 $\mathrm{AB_2D_2}$의 내부와 부채꼴 $\mathrm{AB_3D_2}$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [3점]

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\dfrac{11\sqrt{3}-2\pi}{12}$ ② $\dfrac{11\sqrt{3}-2\pi}{6}$ ③ $\dfrac{11\sqrt{3}-2\pi}{4}$

④ $\dfrac{11\sqrt{3}-2\pi}{3}$ ⑤ $\dfrac{55\sqrt{3}-10\pi}{12}$

146. 함수 $f(x)=4xe^{-x^2}\sin x^2$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt$$

가 있다. 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 극대인 모든 양수 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 α_1, α_2, α_3, α_4, $\cdots$라 하고 $g(x)$가 $x=\beta$에서 극소인 모든 양수 β를 작은수부터 크기순으로 나열한 것을 β_1, β_2, β_3, β_4, $\cdots$라 하자.

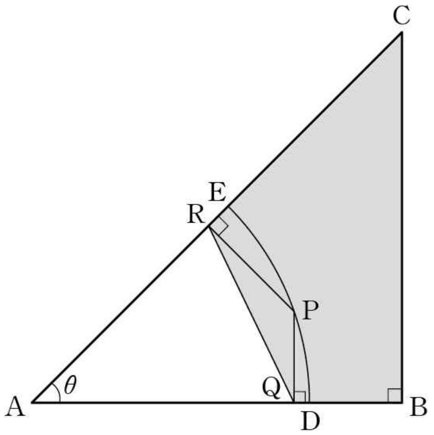
$\sum_{k=1}^{4}\{g(\alpha_k)-g(\beta_k)\}$의 값은? [4점]

① $\dfrac{1-e^{-12\pi}}{e^{2\pi}+1}$ ② $\dfrac{1-e^{-8\pi}}{e^{2\pi}-1}$

③ $\dfrac{1-e^{-8\pi}}{e^{\pi}+1}$ ④ $\dfrac{1-e^{-8\pi}}{e^{\pi}-1}$

⑤ $\dfrac{1-e^{-12\pi}}{e^{\pi}-1}$

147. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\angle\mathrm{ABC}=90^\circ$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AB 위의 점 D와 선분 AC 위의 점 E에 대하여 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AE}}=3$일 때, 중심이 A인 부채꼴 ADE의 호 DE 위를 움직이는 점 P가 있다. 점 P에서 두 선분 AB, AC에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하자. $\angle\mathrm{CAB}=\theta$일 때, 사각형 QBCR의 넓이의 최솟값을 $S(\theta)$라 하자. $10\times\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$의 값을 구하시오. [4점]



148. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이다.

(나) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{(f\circ f)(x)-f(x)}{x-1}=6$

(다) 함수 $|f(x)-2|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

일일학습 25학년도 EBS 직전 클리어

38 일차 : 26년 월 일

149. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$인 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)\sin^2\frac{x}{4}$$

라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(\pi,\ f(\pi))$에서의 접선을 l, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(\pi,\ g(\pi))$에서의 접선을 m이라 할 때, 두 직선 l, m이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 직선 l, m은 서로 평행하다.

(나) 직선 l 위의 한 점과 직선 m 사이의 거리는 $\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

$f(\pi)+g(\pi)$의 값은? [3점]

① $\sqrt{3}$ ② $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $3\sqrt{3}$

150. $t>\frac{1}{2}$인 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(1-2t\sin x)\cos x\ \left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$$

라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하고, 곡선 $y=f(x)$, y축 및 선분 OP로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S_1(t)$, 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S_2(t)$라 하자.
두 상수 a, b에 대하여 $\lim_{t\to a}\frac{S_1(t)+S_2(t)-2S_1(a)}{t-a}=b$일 때, $a+b$의 값은? (단, $a>\frac{1}{2}$이고 O는 원점이며, $\overline{\mathrm{OP}}<\overline{\mathrm{OQ}}$이다.) [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

151. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을

$$b_n = \begin{cases} a_n - 1 & (|a_n| \geq 1) \\ -a_n & (|a_n| < 1) \end{cases}$$

이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2 = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

152. 자연수 n에 대하여 함수

$$f(x) = \ln|x| + \frac{np}{x+p} \quad (p \neq 0)$$

이 있다. 함수 $f(x)$의 극값이 존재하도록 하는 n의 최솟값을 m이라 할 때, 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $n \geq m$인 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$의 서로 다른 모든 극값의 합을 a_n이라 하면 $\sum_{n=m}^{2m} a_n = 57$이다.

(나) $n = m$일 때 방정식 $f(x) = 0$의 양의 실근의 개수는 2이고, 이때 $f\left(\frac{e}{3}\right) = k - \ln 3$이다.

$4k$의 값을 구하시오. (단, p는 상수이다.) [4점]

일일학습 | 25학년도 EBS 만점마무리 시즌1 1회

39 일차 : 26년 월 일

153. $t=\frac{\pi}{2}$에서 $t=2\pi$까지 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=2\sqrt{2}(\sin 2t+\cos 2t),\ \ y=2\sqrt{2}(\sin 2t-\cos 2t)$$

의 길이는? [3점]

① 10π　② 12π　③ 13π　④ 14π　⑤ 15π

154. 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 미분가능하고, 그 도함수 $f'(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이며 다음 조건을 만족시킨다.

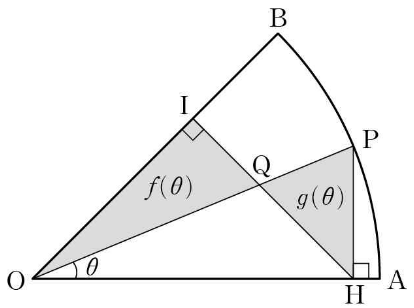
> (가) 모든 실수 x에 대하여 $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt=0$
>
> (나) $\int_{0}^{2}\{(x+1)f'(-x)-f(-x)\}\,dx=72$

$\int_{-1}^{1}\frac{e^x f'(2x)}{e^x+e^{-x}}\,dx$의 값은? [4점]

① 12　② 24　③ 36　④ 48　⑤ 60

155. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 부채꼴 OAB가 있다. $\angle \mathrm{AOP} = \angle \mathrm{BOP}$가 되도록 호 AB 위에 점 P를 잡고, 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H, 점 H에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 I, 선분 OP와 선분 HI의 교점을 Q라 하자. $\angle \mathrm{AOP} = \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right)$라 하고, 삼각형 OQI의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 HPQ의 넓이를 $g(\theta)$ 라 할 때,

$\lim\limits_{\theta \to 0+} \frac{\theta^2\{f(\theta) - g(\theta)\} + g(\theta)}{\theta^3} = k$이다. $30k$의 값을 구하시오. [4점]



156. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x) = \{f(x)+1\}^2$은 $x=2$에서 극값을 갖는다.
> (나) 함수 $h(x) = \{f(x)+2x\}^3$은 $x=3$에서 극값을 갖는다.

함수 $g(x)$의 극댓값을 M, 함수 $h(x)$의 극솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오. [4점]

일일학습 | 25학년도 EBS 만점마무리 시즌1 2회

40 일차 : 26년 월 일

157. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $(x^2+1)f'(x)=(x+1)^2 f(x)$이다.

$f(1)=2$일 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① e ② $2e$ ③ $3e$
④ $4e$ ⑤ $5e$

158. 자연수 n에 대하여 함수 $y=e^{2x}$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=n$으로 둘러싸인 영역을 경계를 모두 포함하여 D_n이라 하자. 영역 D_n의 넓이를 S_n, 영역 D_n에 속하는 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 T_n이라 할 때, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{T(n)}{S(n)}$의 값은?

$\left(\text{단, } \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{e^{2n}}=0\text{이다.}\right)$ [4점]

① $\dfrac{e^2}{e^2-1}$ ② $\dfrac{e^2+1}{e^2-1}$ ③ $\dfrac{2e^2-1}{e^2-1}$
④ $\dfrac{2e^2}{e^2-1}$ ⑤ $\dfrac{2e^2+1}{e^2-1}$

159. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=x(\ln x)^2-3x$는 $x=a$에서 극소이다. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점 P와 $\mathrm{Q}(a,\ f(a))$를 이은 선분 PQ와 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면 $e^2\times S=Ae^4+B$이다. 유리수 A, B에 대하여 $A\times B=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, e^4은 무리수이고, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

160. 함수 $f(x)=e^{2x}+ke^{x+1}+2e^2x$가 극값을 갖도록 하는 정수 k의 최댓값을 a라 할 때, 함수 $g(x)=e^{2x}+ae^{x+1}+2e^2x$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=\alpha$, $x=\beta$ $(\alpha<\beta)$에서 극값을 갖는다.
(나) $\int_{\alpha}^{\beta}\{e^{2x}-g(x)\}dx=(A+B\ln 2)e^2$이다.

유리수 A, B에 대하여 $A+B=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, e^2과 $\ln 2$는 무리수이고, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

일일학습

25학년도 EBS 만점마무리 시즌1 3회

41 일차 : 26년 월 일

161. 함수 $f(x)=(x^2+a)e^x$이 다음 조건을 만족시킬 때, $|a|\le 3$인 정수 a의 개수는? [3점]

(가) 함수 $f(x)$는 극값을 갖는다. (나) 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 각각 M, m이라 하면 $M\times m<0$이다.

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

162. 두 상수 a, $b(a>0)$과 정의역이 $x>0$인 함수 $f(x)=\dfrac{a\ln x}{x}$에 대하여 양의 실수 전체의 집합에서 연속인 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f'(x)\ge 0\text{인 경우}) \\ -f(x)+b & (f'(x)<0\text{인 경우}) \end{cases}$$

가 있다. 실수 t와 자연수 k에 대하여 점 $(0,\ k)$를 지나고 기울기가 t인 직선이 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 불연속인 양의 실수 t의 값의 개수가 1이상이 되도록 하는 k의 값의 최댓값이 6일 때, 상수 a의 최댓값은? $\left(\text{단, } \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0\right)$ [4점]

① $3e$ ② $\dfrac{7e}{2}$ ③ $4e$
④ $\dfrac{9e}{2}$ ⑤ $5e$

163. 자연수 n에 대하여 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 위의 점 $\mathrm{A}_n\left(x_n,\ \frac{1}{2}x_n\right)$을 다음 규칙에 따라 정한다.

> 점 $\mathrm{A}_n\left(x_n,\ \frac{1}{2}x_n\right)$을 지나고 직선 $y=\frac{1}{2}x$에 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 B_n이라 할 때, 삼각형 AOB_n의 외접원의 중심을 M_n이라 하자. 점 M_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 직선 $y=\frac{1}{2}x$와 만나는 점이 $\mathrm{A}_{n+1}\left(x_{n+1},\ \frac{1}{2}x_{n+1}\right)$이다.

$x_1=30$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

164. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=|\sin x|\cos 2x+|\cos x|\sin 2x$$

이다. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 양수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. $\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{30}a_n$의 값을 구하시오. [4점]

일일학습

25학년도 EBS 만점마무리 시즌2 1회

42 일차 : 26년 월 일

165. 1보다 큰 실수 t에 대하여 곡선 $y=\frac{1}{8}x^2-\ln x$ $(1 \le x \le t)$의 길이를 $l(t)$라 할 때, $\lim_{t \to 1+}\frac{l(t)}{t-1}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$

④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

166. 실수 t에 대하여 $s=\frac{1}{t^2+4t+9}$라 할 때, 함수 $f(x)$를

$$f(x)=e^{2x}+10se^{x+1}+2e^2x$$

라 하자. 함수 $f(x)$가 $x=x_1$과 $x=x_2$에서 극값을 갖도록 하는 실수 t의 값의 범위가 $\alpha<t<\beta$이다. $\alpha\beta(x_1+x_2)$의 값은? (단, $x_1 \ne x_2$) [4점]

① 12 ② 14 ③ 16

④ 18 ⑤ 20

167. a, b가 양의 상수일 때, $x>0$에서 세 곡선 $f(x)=x^a$, $g(x)=e^{bx}$, $h(x)=\sqrt{2x}$가 다음 조건을 만족시킨다.

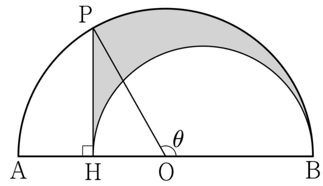
(가) $f(t)=g(t)$, $f'(t)=g'(t)$를 만족시키는 양수 t의 값은 단 하나이다.
(나) $g(s)=h(s)$, $g'(s)=h'(s)$를 만족시키는 양수 s의 값은 단 하나이다.

$x>0$에서 세 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$로 모두 둘러싸인 부분의 넓이가 $pe^2-\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}}+q$일 때, $36(p^2+q^2)$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 유리수이고, e^2은 무리수이다.) [4점]

168. 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 O인 반원의 호 위에 $\angle\mathrm{POB}=\theta\left(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$가 되도록 점 P를 잡고, 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. 선분 BH를 지름으로 하는 반원의 호 BH와 선분 PH 및 호 PB로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$라 할 때, $f'\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{m+n\sqrt{3}\pi}{16}$이다. 두 정수 m, n에 대하여 $m+n$의 값을 구하시오.

(단, 호 HB는 선분 PO와 만나고 $\sqrt{3}\pi$는 무리수이다.) [4점]



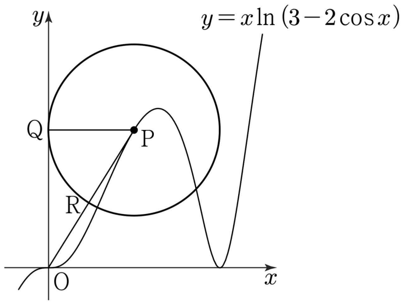
일일학습 | 25학년도 EBS 만점마무리 시즌2 2회

43 일차 : 26년 월 일

169. 그림과 같이 곡선 $y=x\ln(3-2\cos x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t\ln(3-2\cos t))$ $(0<t<\pi)$를 중심으로 하고 y축과 점 Q에서 접하는 원이 선분 OP와 만나는 점을 R이라 하자. 점 R의 y좌표를 $f(t)$라 하고, 부채꼴 PQR의 넓이를 $g(t)$라 할 때, $\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{f(t)}{t^3\times g(t)}$의 값은?

(단, O는 원점이고, 부채꼴 PQR의 중심각의 크기는 $\dfrac{\pi}{2}$보다 작다.)

[3점]

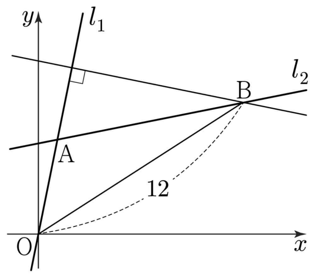


① $\dfrac{1}{2}$　② $\dfrac{3}{4}$　③ 1
④ $\dfrac{5}{4}$　⑤ $\dfrac{3}{2}$

170. 그림과 같이 원점 O를 지나고 기울기가 5인 직선을 l_1이라 하고, 직선 l_1 위의 점 A를 지나고 기울기가 m $(0<m<1)$인 직선을 l_2라 하자. 직선 l_2 위의 점 B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{OB}}=12$
(나) 점 B를 지나고 직선 l_1에 수직인 직선의 기울기와 직선 l_2의 기울기의 합은 0이다.

삼각형 OBA의 외접원의 반지름의 길이는?
(단, 두 점 A, B는 모두 제1사분면의 점이다.) [4점]



① 6　② $\dfrac{13}{2}$　③ 7
④ $\dfrac{15}{2}$　⑤ 8

171. 첫째항과 공비가 모두 0이 아닌 정수인 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a_n}$이 수렴한다.

(나) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{11^{n-1}}{a_n b_n}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{a_n}\right)\times\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}}{b_n}\right)$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1 b_1}{a_n b_n}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. [4점]

(단, $|a_2|>3|a_1|$, $|b_2|>5|b_1|$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

172. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이고, $x\le 0$일 때 $f(x)=-2x\ln(x^2+1)$이다.

(나) 모든 양의 실수 t에 대하여 직선 $y=t$는 곡선 $y=f(x)$와 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(g(t),\ t)$, $\mathrm{B}(h(t),\ t)$에서 만나고 선분 AB의 중점은 직선 $y=x$ 위의 점이다.

$g(t_1)=-2$일 때, $\displaystyle\int_0^{h(t_1)}f(x)dx=p(\ln 5)^2+q\ln 5+r$이다. $p+q+r$의 값을 구하시오. [4점]

(단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작고, p, q, r은 정수이다.)

일일학습 25학년도 EBS 만점마무리 시즌2 3회

44 일차 : 26년 월 일

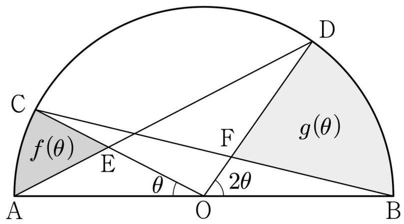
173. 함수 $f(x)=\dfrac{a}{x^2+1}\,(a\neq 0)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$의 두 변곡점에서의 접선을 l, m이라 하자. 함수 $f(x)$와 두 직선 l, m이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$는 최댓값 b를 갖는다.
> (나) 두 직선 l, m과 x축으로 둘러싸인 도형은 한 변의 길이가 c인 정삼각형이다.

$(a+b)c$의 값은?
(단, 직선 l의 기울기는 양수이고, a, b, c는 상수이다.) [3점]

① $\dfrac{31}{3}\sqrt{3}$ ② $\dfrac{32}{3}\sqrt{3}$ ③ $11\sqrt{3}$
④ $\dfrac{34}{3}\sqrt{3}$ ⑤ $\dfrac{35}{3}\sqrt{3}$

174. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다.
선분 AB의 중점 O에 대하여 호 AB 위에 점 C를 $\angle COA=\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{3}\right)$가 되도록 잡고, 호 BC 위에 점 D를 $\angle BOD=2\theta$가 되도록 잡는다. 두 선분 OC, AD가 만나는 점을 E, 두 선분 OD, BC가 만나는 점을 F라 하자. 두 선분 AE, CE와 호 AC로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 두 선분 BF, DF와 호 BD로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, 다음은 $\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)-2f(\theta)}{\theta}$의 값을 구하는 과정의 일부이다.



> ⋮
> 두 선분 AE, CE와 호 AC로 둘러싸인 부분의 넓이 $f(\theta)$는 부채꼴 OCA의 넓이에서 삼각형 EAO의 넓이를 뺀 것이므로
> $f(\theta)=2\theta-$ (가)
> ⋮
> 두 선분 BE, DF와 호 BD로 둘러싸인 부분의 넓이 $g(\theta)$는 부채꼴 OBD의 넓이에서 삼각형 OBF의 넓이를 뺀 것이므로
> $g(\theta)=4\theta-$ (나)
> 따라서
> $\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)-2f(\theta)}{\theta}=$ (다)

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $h(\theta)$, $i(\theta)$라 하고, (다)에 알맞은 수를 p라 할 때, $h\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\times i\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+p$의 값은? [4점]

① 4 ② $\dfrac{21}{5}$ ③ $\dfrac{22}{5}$
④ $\dfrac{23}{5}$ ⑤ $\dfrac{24}{5}$

175. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x f(t)dt = a(\sin x - \cos x)^2 + b(x+1)$$

을 만족시킨다. $f(0)=3$일 때, $\sum_{n=1}^{30} f\left(\frac{ab+n}{4}\pi\right)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점]

176. 1보다 큰 자연수 n에 대하여 두 곡선 $y=\ln nx$, $y=n\ln x$와 동시에 접하는 직선을 l_n이라 하고, 직선 l_n이 두 곡선 $y=\ln nx$, $y=n\ln x$와 접하는 점의 x좌표를 각각 t, s라 하자. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} \ln nx & (\ln nx \geq n\ln x) \\ n\ln x & (\ln nx < n\ln x) \end{cases}$$

에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=t$, $x=s$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 T_n이라 할 때, $\sum_{n=2}^{10}\left(\frac{T_n}{n-1}\right)^{n-1}$의 값을 구하시오. [4점]

일일학습 | 25학년도 EBS 만점마무리 Black 1회

45 일차 : 26년 월 일

177. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|f'(x)|^n=\frac{1}{2}$인 x가 존재하고, 그 값은 $-\sqrt{2},\ 0,\ \sqrt{2}$뿐이다.
>
> (나) 함수 $f(x)$의 극댓값을 M이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}M^n=\frac{5}{4}$이다.

$f(2)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $\frac{7}{9}$ ⑤ 1

178. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x}{e^2} & (x\le 0)\\ a\sin x & (x>0)\end{cases}$$

이라 할 때, 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수

$$g(x)=\left|\int_{-2}^{x}f(t)dt\right|$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> x에 대한 방정식 $g(x)=k$가 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 실수 k의 값의 범위는 $0<k<1$이다.

$g\left(\frac{8\pi}{3}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 2 ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

179. $0<t<1$인 실수 t에 대하여 함수 $f(x)=\ln(x^2+1)-tx$가 극대가 되는 x의 값을 $\alpha(t)$, 극소가 되는 x의 값을 $\beta(t)$라 하자. $\alpha(k)=2$인 실수 k에 대하여 $6\times k\times\beta'(k)$의 값을 구하시오. [4점]

180. 실수 k $(0<k<4)$와 함수 $f(x)=e^{\sin\frac{\pi x}{2}}-1$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음과 같다.

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\le k) \\ f(x+3) & (x>k) \end{cases}$$

방정식 $g(x)=g(k)$의 양의 실근을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.. $g(a_2)<0$일 때,

$$\sum_{k=1}^{6}\left\{a_k+\sqrt{2}\,e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\lim_{h\to0+}\frac{g(a_k+h)-g(a_k)}{h}\right\}=p+q\pi$$

이다. 두 유리수 $p,\ q$에 대하여 $p+q$의 값을 구하시오. [4점]

일일학습 25학년도 EBS 만점마무리 Black 2회

46 일차 : 26년 월 일

181. 실수 t $(t>\sqrt{2})$에 대하여 함수

$$f(x)=\ln(t+\sqrt{2}\sin x)\ \left(\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}\right)$$

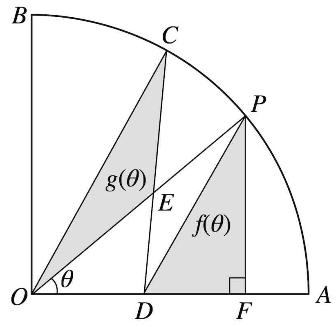
의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(s,\ f(x))$에서의 접선의 y절편이 최대일 때 s의 값을 $g(k)=\frac{5\pi}{4}$인 실수 k에 대하여 $g'(k)$의 값은? [3점]

① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$

④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

182. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 $\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB위의 점 P에 대하여 $\overset{\frown}{\mathrm{AP}}=2\overset{\frown}{\mathrm{PC}}$가 되도록 호 PB 위에 점 C를 잡고, 점 P를 지나고 선분 OC에 평행한 직선이 선분 OA와 만나는 점을 D, 두 선분 OP, CD가 만나는 점을 E, 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 F라 하자. $\angle\mathrm{POA}=\theta$일 때, 삼각형 PDF의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 OEC의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}$의 값은? $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{3}\text{이다.}\right)$ [4점]



① $\frac{20}{9}$ ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{22}{9}$

④ $\frac{23}{9}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

183. 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n = \begin{cases} {a_n}^2 & (a_n < 0) \\ a_n & (a_n > 0) \end{cases}$$

이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$이 수렴하고, 그 합은 4이다.
(나) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}$이 수렴하고, 그 합은 $\frac{9}{2}$이다.

$b_2 = 4b_3$일 때, $100 \times \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$의 값을 구하시오. [4점]

184. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x) = kx(\ln x)^2$ $(k > 0)$이 다음 조건을 만족시킨다.

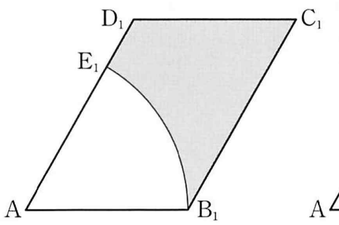
(가) 함수 $y = f(x+4)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
(나) 구간 $(0, \infty)$에서 함수 $\lvert f(g(x)) \rvert$가 $x = a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 2이다.

실수 k의 값이 최대일 때의 함수 $g(x)$를 $G(x)$라 할 때, 함수 $\lvert f(G(x)) \rvert$는 $x = a_1$, $x = a_2$ $(a_1 < a_2)$에서만 미분가능하지 않다. $f'(G(a_1)) + f'(G(a_2)) = 25$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오.
(단, $\lim_{x \to 0+} x(\ln x)^2 = 0$이고, k는 상수이다.) [4점]

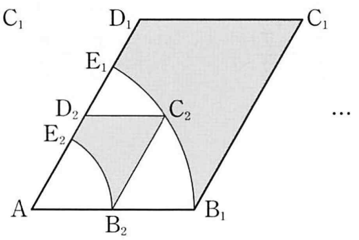
일일학습 25학년도 EBS 수능완성 실전 1회

47 일차 : 26년 월 일

185. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=3$, $\overline{AD_1}=4$, $\angle D_1AB_1=\frac{\pi}{3}$인 평행사변형 $AB_1C_1D_1$이 있다. 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{AB_1}$인 원이 선분 AD_1과 만나는 점을 E_1이라 하자. 평행사변형 $AB_1C_1D_1$의 내부와 부채꼴 AB_1E_1의 외부의 공통된 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 직선 AC_1과 부채꼴 AB_1E_1의 호 B_1E_1이 만나는 점을 C_2라 하고, 사각형 $AB_2C_2D_2$가 평행사변형이 되도록 선분 AB_1 위의 점 B_2, 선분 AD_1 위의 점 D_2를 잡는다. 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{AB_2}$인 원이 선분 AD_2와 만나는 점을 E_2라 하자. 평행사변형 $AB_2C_2D_2$의 내부와 부채꼴 AB_2E_2의 외부의 공통된 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [3점]



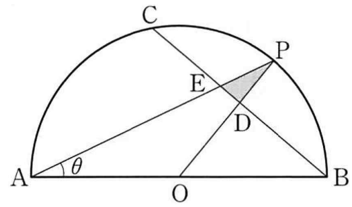
R_1



R_2 ⋯

① $\frac{55(4\sqrt{3}-\pi)}{28}$ ② $\frac{111(4\sqrt{3}-\pi)}{56}$ ③ $2(4\sqrt{3}-\pi)$
④ $\frac{113(4\sqrt{3}-\pi)}{56}$ ⑤ $\frac{57(4\sqrt{3}-\pi)}{28}$

186. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\overline{PB}=\overline{PC}$가 되도록 호 PA 위에 점 C를 잡는다. 두 선분 PO, PA가 선분 BC와 만나는 점을 각각 D, E라 하자. $\angle PAB=\theta$일 때, 삼각형 PED의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^5}$의 값은? $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$ [4점]



① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{7}{4}$
④ 2 ⑤ $\frac{9}{4}$

187. 두 양의 실수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=ax\sin bx$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(\pi)=0$
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $|f(x)|\le|x|$이다.
> (다) $0<p<\pi$인 실수 p에 대하여 함수 $f(x)$가 $x=p$에서 극대인 p의 개수는 2이다.

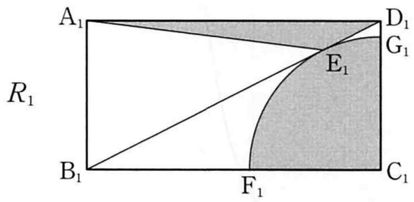
좌표평면에서 네 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(\pi,\ 0)$, $\mathrm{B}(\pi,\ \pi)$, $\mathrm{C}(0,\ \pi)$를 꼭짓점으로 하는 정사각형 OABC에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분과 정사각형 OABC의 내부의 공통부분의 넓이가 $\frac{\pi}{12}$ 이하일 때, $72a+b$의 최댓값을 구하시오. [4점]

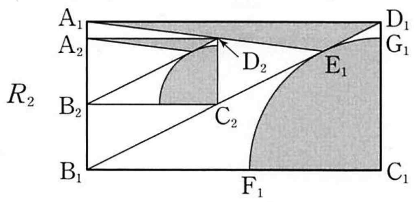
188. 함수 $f(x)=e^x+x$와 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선과 함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 점 $(k,\ g(k))$에서의 접선이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$가 되도록 하는 실수 k의 값을 $h(t)$라 하자. $16\times\{h'(\ln 8)\}^2$의 값을 구하시오. [4점]

일일학습 | 25학년도 EBS 수능완성 실전 2회

48 일차 : 26년 월 일

189. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{A_1B_1}}=5$, $\overline{\mathrm{B_1C_1}}=10$인 직사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$이 있다. 점 $\mathrm{C_1}$을 중심으로 하고 선분 $\mathrm{B_1D_1}$ 위의 점 $\mathrm{E_1}$에서 직선 B_1D_1과 접하는 원이 두 선분 $\mathrm{B_1C_1}$, $\mathrm{C_1D_1}$과 만나는 점을 각각 $\mathrm{F_1}$, $\mathrm{G_1}$이라 하고, 부채꼴 $\mathrm{C_1G_1F_1}$과 삼각형 $\mathrm{A_1E_1D_1}$을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 $\mathrm{A_1B_1}$ 위의 두 점 $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{B_2}$, 선분 $\mathrm{B_1E_1}$ 위의 점 $\mathrm{C_2}$, 선분 $\mathrm{A_1E_1}$ 위의 점 $\mathrm{D_2}$를 꼭짓점으로 하고 $\overline{\mathrm{A_2B_2}}:\overline{\mathrm{B_2C_2}}=1:2$인 직사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$를 그린다. 직사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$에 그림 $\mathrm{R_1}$을 얻은 것과 같은 방법으로 부채꼴과 삼각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

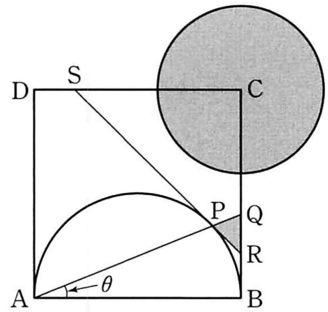




⋮ ⋮

① $\dfrac{81}{13}(\pi+1)$ ② $\dfrac{27}{5}(\pi+1)$ ③ $\dfrac{81}{17}(\pi+1)$
④ $\dfrac{81}{19}(\pi+1)$ ⑤ $\dfrac{27}{7}(\pi+1)$

190. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD와 정사각형의 내부에 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 반원의 호 AB 위의 점 P에 대하여 직선 AP가 선분 BC와 만나는 점을 Q라 하고, 점 P에서 호 AB에 접하는 직선이 두 선분 BC, CD와 만나는 점을 각각 R, S라 하자. $\angle\mathrm{BAP}=\theta$라 할 때, 삼각형 PRQ의 넓이를 $S(\theta)$, 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{CS}}$인 원의 넓이를 $T(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{\theta\times T(\theta)}{S(\theta)}$의 값은? $\left(단,\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{8}\right)$ [4점]



① 2π ② 4π ③ 6π
④ 8π ⑤ 10π

191. 최고차항의 계수가 1이고 상수항이 0인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ g(2))$에서의 접선이 원점을 지난다.
> (나) 점 $(2,\ g(2))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.

192. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

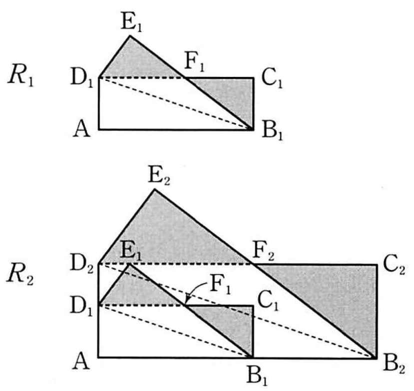
$$f(x)\cos x = x\cos^2 x - \sin x \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t)dt - \int_0^x f(t)\sin t\, dt$$

를 만족시킬 때, $(\pi+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x)\sin x + f'(x)\cos x\}\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

일일학습 | 25학년도 EBS 수능완성 실전 3회

49 일차 : 26년 월 일

193. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB_1}}=3$, $\overline{\mathrm{AD_1}}=1$인 직사각형 $\mathrm{AB_1C_1D_1}$ 모양의 종이에서 대각선 $\mathrm{B_1D_1}$을 접는 선으로 하여 두 선분 $\mathrm{AB_1}$, $\mathrm{C_1D_1}$이 만나도록 접었을 때 점 A가 위치한 점을 $\mathrm{E_1}$, 선분 $\mathrm{C_1D_1}$과 선분 $\mathrm{B_1E_1}$의 교점을 $\mathrm{F_1}$이라 하고, 삼각형 $\mathrm{B_1C_1F_1}$과 삼각형 $\mathrm{D_1F_1E_1}$을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
점 $\mathrm{E_1}$을 지나고 직선 $\mathrm{AB_1}$에 평행한 직선이 직선 $\mathrm{AD_1}$과 만나는 점을 $\mathrm{D_2}$라 하고, $\overline{\mathrm{AB_2}}=3\times\overline{\mathrm{AD_2}}$이고 사각형 $\mathrm{AB_2C_2D_2}$가 직사각형이 되도록 두 점 $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{C_2}$를 잡는다. 직사각형 $\mathrm{AB_2C_2D_2}$ 모양의 종이에서 대각선 $\mathrm{B_2D_2}$를 접는 선으로 하여 두 선분 $\mathrm{AB_2}$, $\mathrm{C_2D_2}$가 만나도록 접었을 때 점 A가 위치한 점을 $\mathrm{E_2}$, 선분 $\mathrm{C_2D_2}$와 선분 $\mathrm{B_2E_2}$의 교점을 $\mathrm{F_2}$라 하고, 삼각형 $\mathrm{B_2C_2F_2}$와 삼각형 $\mathrm{D_2F_2E_2}$를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림을 R_n이라 할 때, 삼각형 $\mathrm{B_nC_nF_n}$과 삼각형 $\mathrm{D_nF_nE_n}$의 넓이의 합을 S_n이라 하자.
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}$의 값은? [3점]



⋮ ⋮

① $\frac{81}{74}$ ② $\frac{243}{224}$ ③ $\frac{243}{226}$
④ $\frac{81}{76}$ ⑤ $\frac{243}{230}$

194. 두 함수 $f(x)=4xe^{-x}$, $g(x)=mx+n$ $(m<0)$에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\leq g(x)) \\ g(x) & (f(x)>g(x)) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, 함수 $y=h(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?
(단, m, n은 상수이고, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}xe^{-x}=0$이다.) [4점]

① $2-\frac{8}{e^2}$ ② $2-\frac{6}{e^2}$ ③ $4-\frac{8}{e^2}$
④ $4-\frac{6}{e^2}$ ⑤ $4-\frac{4}{e^2}$

195. 최고차항의 계수가 1이고 실수 전체의 집합에서 $f(x)>0$인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=(1+\ln 3)f(x)-f(x)\ln f(x)$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 갖는다.
> (나) 방정식 $g'(\alpha)=0$을 만족시키는 모든 실수 α의 값의 곱은 24이다.

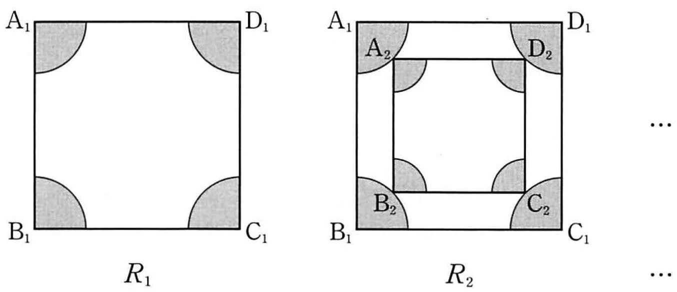
$f(10)$의 값을 구하시오. [4점]

196. 함수 $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{e^x}$이 있다. 실수 t에 대하여 함수 $f(|x|+t)$가 $x=a$에서 극값을 갖는 모든 실수 a의 개수를 $g(t)$라 하자. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$에 대하여 함수 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $h(0)+h(4)$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } \lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0\right)$ [4점]

일일학습 25학년도 EBS 수능완성 실전 4회

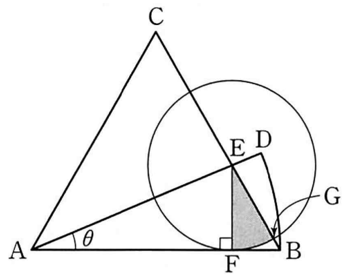
50 일차 : 26년 월 일

197. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 네 꼭짓점 A_1, B_1, C_1, D_1을 중심으로 하고 반지름의 길이가 정사각형$A_1B_1C_1D_1$의 한 변의 길이의 $\frac{1}{4}$인 네 개의 사분원을 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부에 그린 후 각 사분원의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부에 각 꼭짓점이 네 개의 사분원의 호 위에 있는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 두 직선 A_1B_1과 A_2B_2가 평행하도록 그린 후 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 네 개의 사분원을 그리고 각 사분원의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림을 R_n이라 하고 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?
[3점]



① $\frac{24\sqrt{2}+6}{31}\pi$ ② $\frac{28\sqrt{2}+7}{31}\pi$ ③ $\frac{32\sqrt{2}+8}{31}\pi$
④ $\frac{36\sqrt{2}+9}{31}\pi$ ⑤ $\frac{40\sqrt{2}+10}{31}\pi$

198. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC와 점 A를 중심으로 하고 선분 AB를 반지름으로 하는 부채꼴 ABD가 있다. 선분 BC와 선분 AD가 만나는 점을 E, 점 E에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 F라 하자. 또 점 E를 중심으로 하고 선분 EF를 반지름으로 하는 원이 선분 BC와 만나는 점 중 점 B에 가까운 점을 G라 하고 $\angle BAD=\theta$라 하자. 부채꼴 EFG의 넓이를 $S(\theta)$, 부채꼴 ABD의 넓이를 $T(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\{T(\theta)\}^2}$의 값은?
$\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{6}\right)$ [4점]



① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$
④ $\frac{5}{12}\pi$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

199. 정의역이 $\{x \mid x>0\}$인 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 연속일 때, 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\int_{f(1)}^{f(x)} g(t)\,dt = ax + \ln x - \frac{b}{3}$ (단, a, b는 상수)

(나) $f(4)-f(2)=\dfrac{1}{4}+3\ln 2$

$f(1)=2$일 때, $f(3)=\dfrac{p+q\ln 3}{3}$이다. 자연수 p, q에 대하여 $p+q$의 값을 구하시오. (단, $\ln 3$은 무리수이다.) [4점]

200. $0 \le x < 2\pi$에서 정의된 함수 $f(x)=\sqrt{2}\cos x \times e^{\sqrt{2}\sin x}$이 있다.
함수 $f(x)$와 실수 k에 대하여 방정식 $|f(x)|=k$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(k)$라 할 때, 두 집합 A, B는 다음과 같다.

$A=\{g(k) \mid k$는 실수$\}$

$B=\{a \mid$ 함수 $g(k)$는 $k=a$에서 불연속이다.$\}$

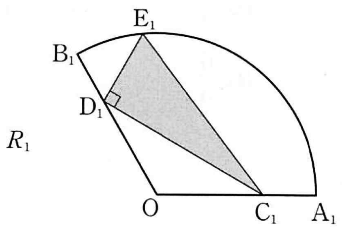
$10 \times n(A)+n(B)$의 값을 구하시오. [4점]

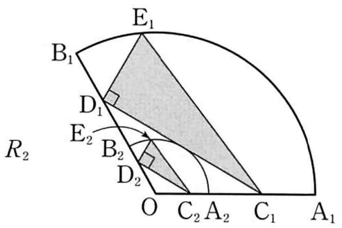
일일학습 | 25학년도 EBS 수능완성 실전 5회

51 일차 : 26년 월 일

201. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 3이고 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴 $\mathrm{OA_1B_1}$이 있다. 선분 $\mathrm{OA_1}$을 $2:1$로 내분하는 점을 $\mathrm{C_1}$, 선분 $\mathrm{OB_1}$을 $2:1$로 내분하는 점을 $\mathrm{D_1}$이라 하고, 호 $\mathrm{A_1B_1}$ 위의 점 $\mathrm{E_1}$을 $\angle \mathrm{C_1D_1E_1} = \frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고 직각삼각형 $\mathrm{C_1D_1E_1}$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 중심이 O이고 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴 $\mathrm{OA_2B_2}$의 호 $\mathrm{A_2B_2}$가 선분 $\mathrm{C_1D_1}$에 접하도록 선분 $\mathrm{OC_1}$ 위의 점 $\mathrm{A_2}$와 선분 $\mathrm{OD_1}$ 위의 점 $\mathrm{B_2}$를 잡는다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 세 점 $\mathrm{C_2}$, $\mathrm{D_2}$, $\mathrm{E_2}$를 각각 잡고 직각삼각형 $\mathrm{C_2D_2E_2}$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]





⋮ ⋮

① $3\sqrt{2}-\sqrt{3}$ ② $\frac{27\sqrt{2}-9\sqrt{3}}{8}$ ③ $\frac{15\sqrt{2}-5\sqrt{3}}{4}$
④ $\frac{33\sqrt{2}-11\sqrt{3}}{8}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{2}$

202. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $0 \le f(x) < \frac{\pi^2}{4}$이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln\{1+f(x)\}}{x-1} = 6$

(나) $\lim_{x\to 0} \frac{1 = \cos\sqrt{f(x)}}{e^x - 1} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{f(\sin x)f(\cos x)}{x^3}$의 값은? [4점]

① -16 ② -12 ③ -9
④ -6 ⑤ -3

203. 함수 $f(x)=e^{2x}+2e^{x}-3$과 양수 t에 대하여 함수

$$g(x)=\int_{0}^{x}\{t-f(s)\}\,ds$$

가 최대가 되도록 하는 x의 값을 $h(t)$라 하자. $h'(k)=\frac{1}{12}$인 실수 k에 대하여 $0<t\le k$에서 $g(h(k))$의 최댓값은 $p+q\ln 2$이다. $10(p+q)$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 유리수이고, $\ln 2$는 무리수이다.) [4점]

204. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 닫힌구간 $[-\pi,\ 5\pi]$에서 정의된 함수

$$g(x)=f(x)+\sin x$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $g'(x)=0$은 음의 실근 α와 양의 실근 β를 갖는다.
> (나) 함수 $g'(x)$가 $x=\beta$에서 극소이고 $x=\beta+k$에서 극대가 되도록 하는 양수 k의 최솟값은 $\frac{4}{3}\pi$이다.

$g(0)=-2\sqrt{3}\,\pi$일 때, $\frac{12}{\pi^2}g(4\pi)$의 값을 구하시오.

$\left(\text{단, } 3<\pi<4,\ \frac{3}{2}<\sqrt{3}<2\right)$ [4점]

[정답 및 해설]

1. 정답 ③

조건 (가)에서

$xf'(x)=f(x)+x^2e^x$

이므로

$\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=e^x$

$\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=e^x$

$\dfrac{f(x)}{x}=\int e^x\,dx=e^x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(x)=xe^x+Cx$

$f(\ln 2)=(\ln 2)\times e^{\ln 2}+C\times \ln 2=3\ln 2$

에서

$\ln 2\times 2+C\times \ln 2=3\ln 2$

$C=1$

즉, $f(x)=xe^x+x$

조건 (나)에서

$g\left(f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)=x$

이므로

$g'\left(f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)\times f'\left(\dfrac{x}{2}\right)\times\dfrac{1}{2}=1$

$g'\left(f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)\times f'\left(\dfrac{x}{2}\right)=2$

즉, $g'(f(x))=\dfrac{2}{f'(x)}$

따라서

$\displaystyle\int_1^{\ln 3}\frac{2}{g'(f(x))\times f(x)}\,dx$

$=\displaystyle\int_1^{\ln 3}\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$

$=\Big[\ln|f(x)|\Big]_1^{\ln 3}$

$=\ln|f(\ln 3)|-\ln|f(1)|$

$=\ln|\ln 3\times e^{\ln 3}+\ln 3|-\ln|e+1|$

$=\ln(4\ln 3)-\ln(e+1)$

$=\ln\dfrac{4\ln 3}{e+1}$

2. 정답 ④

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(\ln x)^2}{x} & (0<x<1)\\[2mm] -\sin\dfrac{\pi x}{a}+b & (x\ge 1)\end{cases}$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\displaystyle\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)=f(1)$

이어야 한다.

$\displaystyle\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}\frac{(\ln x)^2}{x}=0,$

$\displaystyle\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}\left(-\sin\frac{\pi x}{a}+b\right)=-\sin\frac{\pi}{a}+b,$

$f(1)=-\sin\dfrac{\pi}{a}+b$

이므로

$-\sin\dfrac{\pi}{a}+b=0$, 즉

$b=\sin\dfrac{\pi}{a}$ …… ㉠

$g(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$, $h(x)=-\sin\dfrac{\pi x}{a}+b$라 하면

$g'(x)=\dfrac{2(\ln x)\times\dfrac{1}{x}\times x-(\ln x)^2}{x^2}=\dfrac{\ln x\times(2-\ln x)}{x^2}$

$h'(x)=-\dfrac{\pi}{a}\cos\dfrac{\pi x}{a}$

$g'(1)=0$이고 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $h'(1)=0$이어야 한다.

즉, $h'(1)=-\dfrac{\pi}{a}\cos\dfrac{\pi}{a}=0$이므로

$\cos\dfrac{\pi}{a}=0$

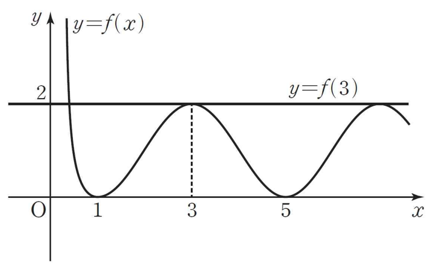
㉠에서 $\sin\dfrac{\pi}{a}>0$이므로

$\sin\dfrac{\pi}{a}=1$이고, $b=1$이다.

한편, $0<x<1$에서 $g'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 감소하고, 함수 $h(x)=-\sin\dfrac{\pi x}{a}+1$의 그래프의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{a}}=2a$이다.

함수 $|f(x)-f(t)|$가 오직 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 실수 t $(t>1)$의 최솟값이 3이므로

$\dfrac{2a}{2}=2$, 즉 $a=2$이다.



따라서

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(\ln x)^2}{x} & (0<x<1)\\[2mm] -\sin\dfrac{\pi x}{2}+1 & (x\ge 1)\end{cases}$

이므로

$\int_{e^{-1}}^{5} f(x)\,dx$

$= \int_{e^{-1}}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{5} f(x)\,dx$

$= \int_{e^{-1}}^{1} \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx + \int_{1}^{5}\left(-\sin\frac{\pi x}{2}+1\right)dx$

$= \int_{-1}^{0} u^2\,du + \int_{1}^{5}\left(-\sin\frac{\pi x}{2}+x\right)dx$

$= \left[\frac{1}{3}u^3\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}+x\right]_{1}^{5}$

$= \left\{0-\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}+\left\{\left(\frac{2}{\pi}\cos\frac{5\pi}{2}+5\right)-\left(\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}+1\right)\right\}$

$= \frac{13}{3}$

3. 정답 103

두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 각각 r_1, r_2 $(r_1>0,\ r_2>0)$이라 하면 조건 (가)에서

$a_5b_4 = 2a_4b_5$, 즉 $\frac{a_5}{a_4} = \frac{2b_5}{b_4}$이므로

$r_1 = 2r_2$ …… ㉠

조건 (나)에서

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 모두 수렴하므로

$0<r_1<1,\ 0<r_2<\frac{1}{2}$

또 조건 (나)에서

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+\frac{1}{2}b_n\right)$

$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$= \frac{a_1}{1-r_1} + \frac{1}{2}\times\frac{b_1}{1-r_2}$

이고, 조건 (가)에서 $3a_1 = b_1$이므로

$\frac{a_1}{1-r_1} + \frac{3a_1}{2(1-r_2)} = 4a_1$

$a_1>0$이므로

$\frac{1}{1-r_1} + \frac{3}{2(1-r_2)} = 4$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{1}{1-2r_2} + \frac{3}{2(1-r_2)} = 4$

$2(1-r_2)+3(1-2r_2) = 8(1-2r_2)(1-r_2)$

$16r_2^2-16r_2+3=0$

$(4r_2-1)(4r_2-3)=0$

$0<r_2<\frac{1}{2}$이므로

$r_2 = \frac{1}{4}$

$r_2 = \frac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면

$r_1 = 2r_2 = 2\times\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$a_2+b_2 = \frac{5}{2}$에서

$a_2+b_2 = \frac{a_1}{2}+\frac{b_1}{4} = \frac{a_1}{2}+\frac{3a_1}{4} = \frac{5a_1}{4}$

이므로

$\frac{5a_1}{4} = \frac{5}{2}$

$a_1 = 2$

이때 $b_1 = 3a_1 = 3\times 2 = 6$이므로

$a_n = 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$b_n = 6\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{12\times\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}\right\}$

$= \frac{12}{1-\frac{1}{8}}$

$= \frac{96}{7}$

따라서 $p=7$, $q=96$이므로

$p+q = 7+96 = 103$

4. 정답 6

$f(1) = \frac{2+a+b}{e}$

$f'(x) = \frac{(4x+a)e^x-(2x^2+ax+b)e^x}{e^{2x}}$

$= \frac{-2x^2+(4-a)x+a-b}{e^x}$

이므로

$f'(1) = \frac{-2+(4-a)+a-b}{e}$

$= \frac{2-b}{e}$

조건 (가)에서

$f(1) = f'(1)$

이므로

$\frac{2+a+b}{e} = \frac{2-b}{e}$

$a=-2b$ …… ㉠

$f'(x)=\dfrac{-2x^2+2(2+b)x-3b}{e^x}$ …… ㉡

이므로 이차방정식 $-2x^2+2(2+b)x-3b=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\dfrac{D_1}{4}=(2+b)^2-6b=b^2-2b+4$

$=(b-1)^2+3>0$

이다. 즉, 이차방정식 $-2x^2+2(2+b)x-3b=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 이 두 실근을 α_1, α_2 $(\alpha_1<\alpha_2)$라 하면

$f'(x)=\dfrac{-2(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}{e^x}$

$f'(x)=0$에서

$x=\alpha_1$ 또는 $x=\alpha_2$

또 ㉡에서

$f''(x)=\dfrac{\{-4x+2(2+b)\}e^x-\{-2x^2+2(2+b)x-3b\}e^x}{e^{2x}}$

$=\dfrac{2x^2-2(b+4)x+5b+4}{e^x}$

이차방정식 $2x^2-2(b+4)x+5b+4=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\dfrac{D_2}{4}=(b+4)^2-2(5b+4)$

$=b^2-2b+8$

$=(b-1)^2+7>0$

이다. 즉, 이차방정식 $2x^2-2(b+4)x+5b+4=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 이 두 실근을 β_1, β_2 $(\beta_1<\beta_2)$라 하면

$f''(x)=\dfrac{2(x-\beta_1)(x-\beta_2)}{e^x}$

$f''(x)=0$에서

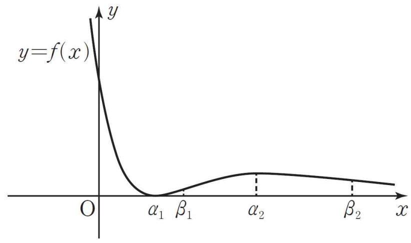
$x=\beta_1$, $x=\beta_2$

이때 $\alpha_1<\beta_1<\alpha_2<\beta_2$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

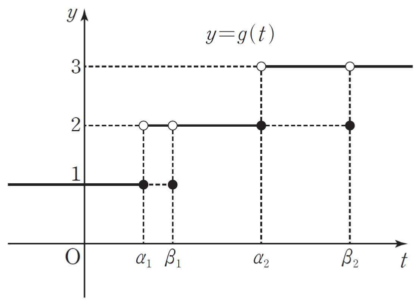
x	$\cdots$	α_1	$\cdots$	β_1	$\cdots$	α_2	$\cdots$	β_2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	변곡점	↗	극대	↘	변곡점	↘

함수 $f(x)$는 $x=\alpha_1$에서 극소이고, $x=\alpha_2$에서 극대이며, 곡선 $y=f(x)$는 두 변곡점 $(\beta_1,\ f(\beta_1))$, $(\beta_2,\ f(\beta_2))$를 갖는다.

이때 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^x}=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



한편, 직선 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$의 교점의 개수 $y=g(t)$의 그래프는 다음과 같다.



실수 k에 대하여 $\displaystyle\lim_{t\to k-}g(t)<\lim_{t\to k+}g(t)$를 만족시키는 k의 값은 α_1 또는 α_2 이고, 조건 (나)에서 $\displaystyle\lim_{t\to 3-}g(t)<\lim_{t\to 3+}g(t)$이므로 $\alpha_1=3$ 또는 $\alpha_2=3$이다.

즉, $f'(3)=0$이므로 ㉡에서

$f'(3)=\dfrac{-18+(12+6b)-3b}{e^3}=0$

$b=2$

실수 p에 대하여 $\displaystyle\lim_{t\to p}g(t)$의 값이 존재하고, $g(p)<\displaystyle\lim_{t\to p}g(t)$를 만족시키는 값은 β_1, β_2이다.

따라서 구하는 모든 실수 p의 값의 합은

$\beta_1+\beta_2=\dfrac{2(b+4)}{2}$

$=\dfrac{2(2+4)}{2}$

$=6$

5. 정답 ①

$\ln f(x)+2\displaystyle\int_0^x\frac{f(t)}{e^t}dt=1$에 $x=0$을 대입하면

$\ln f(0)+2\displaystyle\int_0^0\frac{f(t)}{e^t}dt=1$

$\ln f(0)+0=1$

$f(0)=e$

$\ln f(x)+2\displaystyle\int_0^x\frac{f(t)}{e^t}dt=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}+\dfrac{2f(x)}{e^x}=0$

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-\dfrac{2f(x)}{e^x}$

$\dfrac{f'(x)}{(f(x))^2}=-2e^{-x}$

$g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$이라 하면 $g(0)=\dfrac{1}{f(0)}=\dfrac{1}{e}$이고

$g'(x)=-\dfrac{f'(x)}{(f(x))^2}=2e^{-x}$

이므로 $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)>0$, 즉 함수 $g(x)$는 구간 $[0, \infty)$에서 증가한다.

$g(x)=\int g'(x)dx=\int 2e^{-x}dx=-2e^{-x}+C$ (단, C는 적분상수)

$g(0)=\dfrac{1}{e}$이므로

$g(0)=-2+C=\dfrac{1}{e}$

$C=2+\dfrac{1}{e}$

따라서 $g(x)=-2e^{-x}+2+\dfrac{1}{e}(x\geq 0)$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는

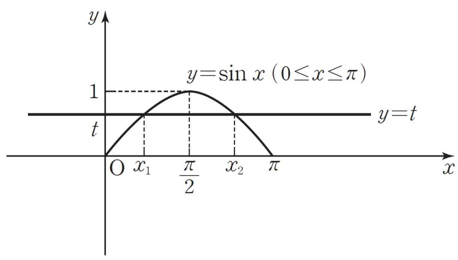
$\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1\left(-2e^{-x}+2+\dfrac{1}{e}\right)dx$

$=\left[2e^{-x}+\left(2+\dfrac{1}{e}\right)x\right]_0^1$

$=\left(2e^{-1}+2+\dfrac{1}{e}\right)-(2+0)$

$=\dfrac{3}{e}$

6. 정답 ①



함수 $y=\sin x(0\leq x\leq\pi)$의 그래프가 x축과 평행한 직선 $y=t(0<t<1)$과 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표를 x_1, $x_2\left(0<x_1<\dfrac{\pi}{2}<x_2<\pi\right)$라 하면

$\sin x_1=\sin x_2=t$

이고 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $x=\dfrac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로

$\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{\pi}{2}$

$x_1+x_2=\pi$ …… ㉠

이때

$|t-\sin x|=\begin{cases} t-\sin x & (0\leq x<x_1 \text{ 또는 } x_2<x\leq\pi) \\ \sin x-t & (x_1\leq x\leq x_2)\end{cases}$

이므로

$f(t)=\int_0^\pi|t-\sin x|dx$

$=\int_0^{x_1}(t-\sin x)dx+\int_{x_1}^{x_2}(\sin x-t)dx+\int_{x_2}^{\pi}(t-\sin x)dx$

$=\Big[tx+\cos x\Big]_0^{x_1}+\Big[-\cos x-tx\Big]_{x_1}^{x_2}+\Big[tx+\cos x\Big]_{x_2}^{\pi}$

$=\{(tx_1+\cos x_1)-1\}+\{(-\cos x_2-tx_2)-(-\cos x_1-tx_1)\}+\{(t\pi-1)-(tx_2+\cos x_2)\}$

$=t(2x_1-2x_2+\pi)+2\cos x_1-2\cos x_2-2$

이때 함수 $f(t)$가 $t=\alpha(0<\alpha<1)$에서 극값을 가지므로

$f'(\alpha)=0$

$f'(t)=(2x_1-2x_2+\pi)+t\left(2\dfrac{dx_1}{dt}-2\dfrac{dx_2}{dt}\right)-2\sin x_1\dfrac{dx_1}{dt}+2\sin x_2\dfrac{dx_2}{dt}$

$=(2x_1-2x_2+\pi)+\left(2t\dfrac{dx_1}{dt}-2t\dfrac{dx_2}{dt}\right)-2t\dfrac{dx_1}{dt}+2t\dfrac{dx_2}{dt}$

$=2x_1-2x_2+\pi$

$f'(t)=0$에서

$2x_1-2x_2+\pi=0$

$2(x_2-x_1)=\pi$

$x_2-x_1=\dfrac{\pi}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x_1=\dfrac{\pi}{4}$, $x_2=\dfrac{3}{4}\pi$

이때 $\sin\dfrac{\pi}{4}=\sin\dfrac{3}{4}\pi=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로 함수 $f(t)$는 $t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$에서 극값을 갖는다.

즉, $\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $f(t)=t(2x_1-2x_2+\pi)+2\cos x_1-2\cos x_2-2$에서

$f(\alpha)=\alpha(2x_1-2x_2+\pi)+2\cos x_1-2\cos x_2-2$

$\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x_1=\dfrac{\pi}{4}$, $x_2=\dfrac{3}{4}\pi$를 대입하면

$f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(2\times\dfrac{\pi}{4}-2\times\dfrac{3}{4}\pi+\pi\right)+2\cos\dfrac{\pi}{4}-2\cos\dfrac{3}{4}\pi-2$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times 0+2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}-2\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)-2=2(\sqrt{2}-1)$

이므로

$\alpha\times f(\alpha)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times 2(\sqrt{2}-1)$

$=2-\sqrt{2}$

7. 정답 2

$h(x)=g(\ln x)$에서

$h'(x)=g'(\ln x)\times(\ln x)'=g'(\ln x)\times\dfrac{1}{x}$

이 식에 $x=8$을 대입하면

$h'(8)=\dfrac{g'(\ln 8)}{8}$

$g(\ln 8)=t$라 하면 함수 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로

$f(t)=\ln 8$

$f(x)=\ln(x^3+2x+5)$에서

$\ln(t^3+2t+5)=\ln 8$

$t^3+2t+5=8$

$t^2+2t-3=0$

$(t-1)(t^2+t+3)=0$

$t^2+t+3=\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}>0$이므로

$t=1$

즉, $g(\ln 8)=1$

이때

$f'(x)=\dfrac{3x^2+2}{x^3+2x+5}$

에서

$f'(1)=\dfrac{3+2}{1+2+5}=\dfrac{5}{8}$

이므로 역함수의 미분법에 의하여

$g'(\ln 8)=\dfrac{1}{f'(g(\ln 8))}=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{8}{5}$

따라서

$h'(8)=\dfrac{g'(\ln 8)}{8}=\dfrac{\frac{8}{5}}{8}=\dfrac{1}{5}$

이므로

$10\times h'(8)=10\times\dfrac{1}{5}=2$

8. 정답 7

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$를

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

이때 조건 (가)의 $f(0)=-2$에서 $c=-2$

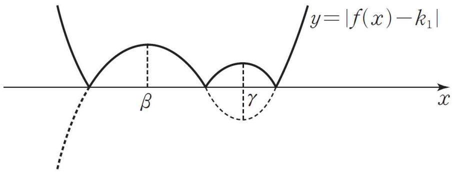
$f'(0)=6$에서 $b=6$

따라서 $f(x)=x^3+ax^2+6x-2$, $f'(x)=3x^2+2ax+6$

한편, 삼차함수 $f(x)$가 $x=\beta$에서 극대, $x=\gamma$ 에서 극소이면

$f(\gamma)<k_1<f(\beta)$인 k_1에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k_1$이 서로 다른 세 점에서 만난다.

이때 곡선 $y=|f(x)-k_1|$은 곡선 $y=f(x)$를 y축의 방향으로 $-k_1$만큼 평행이동한 후, $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그 그래프의 개형은 다음 그림과 같고, 조건 (나) 의 '함수 $|f(x)-k_1|$이 $x=\alpha$에서 미분가능하지 않은 실수 α의 개수는 한개이다'라는 조건을 만족시키지 않는다.



삼차함수 $f(x)$의 극대, 극소가 존재하지 않는 경우. 즉 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하면 곡선 $y=|f(x)-k_1|$은 x축과 한 점에서만 만난다. 이때 곡선 $y=|f(x)-k_1|$이 x축과 접하면 함수 $|f(x)-k_1|$은 실수 전체에서 미분가능하므로 조건 (나)에 의하여 곡선 $y=|f(x)-k_1|$은 x축과 한 점에서만 만나고, 이 점이 접점이 아니어야 한다.

$f'(x)=0$에서

$3x^2+2ax+6=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=a^2-3\times 6=a^2-18<0$

$(a+3\sqrt{2})(a-3\sqrt{2})<0$

$-3\sqrt{2}<a<3\sqrt{2}$

한편, $h(t)=\ln(e^t+e^{-t})$이라 하면

$h'(t)=\dfrac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$

$h'(t)=0$에서

$e^t-e^{-t}=0$

$e^{2t}=1$

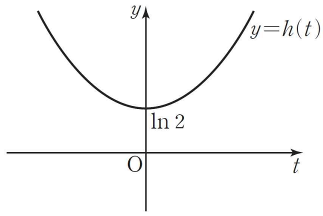
$t=0$

함수 $h(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$h'(t)$	$-$	0	$+$
$h(t)$	↘	극소	↗

$h(0)=\ln(e^0+e^0)=\ln(1+1)=\ln 2$

이므로 곡선 $y=h(t)$는 그림과 같다.



함수 $g(x)=\ln(e^{f(x)}+e^{-f(x)})$에서

$g(x)=(h\circ f)(x)=h(f(x))$

이므로 $f(x_1)=0$이라 하면

$x \to \infty$일 때 $f(x) \to \infty$이므로

$h(f(x)) \to \infty$, 즉 $g(x) \to \infty$

$x \to x_1+$일 때 $f(x) - 0+$이므로

$h(f(x)) \to \ln 2+$, 즉 $g(x) \to \ln 2+$

$x \to x_1-$일 때 $f(x) \to 0-$이므로

$h(f(x)) \to \ln 2+$, 즉 $g(x) \to \ln 2+$

$x \to -\infty$일 때 $f(x) \to -\infty$이므로

$h(f(x)) \to \infty$. 즉 $g(x) \to \infty$이다.

이때 조건 (다)에서 실수 k_2에 대하여 함수 $|g(x)-k_2|$는 $x=0$과 $x=2$에서만 미분가능하지 않으므로 $k_2 > \ln 2$이고 곡선 $y=|g(x)-k_2|$는 x축과 두 점 $(0,\ 0)$, $(2,\ 0)$에서 만난다.

즉, $g(0)=g(2)=k_2$이므로 $g(0)=g(2)$에서

$\ln(e^{f(0)}+e^{-f(0)}) = \ln(e^{f(2)}+e^{-f(2)})$

$e^{f(0)}+e^{-f(0)} = e^{f(2)}+e^{-f(2)}$

$$(e^{f(0)}-e^{f(2)}) + \left(\frac{1}{e^{f(0)}} - \frac{1}{e^{f(2)}}\right) = 0$$

$$(e^{f(0)}-e^{f(2)}) + \frac{e^{f(2)}-e^{f(0)}}{e^{f(0)+f(2)}} = 0$$

$$(e^{f(0)}-e^{f(2)})\left(1-\frac{1}{e^{f(0)+f(2)}}\right) = 0$$

이때 실수 전체의 집합에서 증가하는 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)<f(2)$에서 $e^{f(0)}<e^{f(2)}$이다.

그러므로

$$\frac{1}{e^{f(0)+f(2)}} = 1,\quad e^{f(0)+/(2)} = 1$$

$f(0)+f(2)=0$

$f(0)=-f(2)$

$f(x)=x^3+ax^2+6x-2$에서

$f(0)=-2,\ f(2)=8+4a+12-2=4a+18$

이므로

$-2=-(4a+18)$

$a=-4$

따라서 $f(x)=x^3-4x^2+6x-2$이므로

$f(3)=27-36+18-2=7$

9. 정답 ③

함수 $f(x)=e^{x-1}+ax+b$는 실수 전체의 집합에서 증가하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=e^{x-1}+a \geq 0$이어야 한다.

즉, $a \geq 0$

$g(x)=f(e^{2x})$에서 …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$g(0)=f(e^0)=f(1)=1+a+b$

$g(0)=2$이므로

$1+a+b=2$

$a+b=1$ …… ㉡

한편, ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f'(e^{2x})\times 2e^{2x}$

함수 $g(x)$의 역함수가 $h(x)$이므로 $h(2)=0$이다,

역함수의 미분법에 의하여

$$h'(x)=\frac{1}{g'(h(x))}$$에서 $g'(0)=2f'(1)$이므로

$$h'(2)=\frac{1}{g'(h(2))}=\frac{1}{g'(0)}=\frac{1}{2f'(1)}$$

$$\frac{f'(1)}{h'(2)}=\frac{f'(1)}{\frac{1}{2f'(1)}}=2(f'(1))^2=32$$에서

$(f'(1))^2=16$이고 $f'(1)=1+a \geq 1$이므로

$f'(1)=a+1=4$

$a=3$이고 ㉡에 의하여 $b=-2$

$g(a)=f(e^{2x})$이고 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하므로 일대일대응이다.

즉, $e^{2x}=3$

따라서

$$\begin{aligned}\frac{b}{h'(f(3))} &= -2\times\frac{1}{h'(g(a))}\\ &= -2\times g'(a)\\ &= -2\times(f'(e^{2x})\times 2e^{2x})\\ &= -2\times(f'(3)\times 2\times 3)\\ &= -12(e^2+3)\end{aligned}$$

10. 정답 ④

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(t)(x-t)+f(t)$

이므로 이 직선의 y절편 $g(t)$는

$g(t)=f(t)-tf'(t)$

$$\begin{aligned}\int_0^2 g(t)\,dt &= \int_0^2 \{f(t)-tf'(t)\}\,dt\\ &= \int_0^2 f(t)\,dt - \int_0^2 tf'(t)\,dt\end{aligned}$$

이때 $$\int_0^2 tf'(t)\,dt = \Big[tf(t)\Big]_0^2 - \int_0^2 f(t)\,dt$$

$$2f(2) - \int_0^2 f(t)\,dt$$

이므로

$$\begin{aligned}\int_0^2 g(t)\,dt &= \int_0^2 f(t)\,dt - \left(2f(2) - \int_0^2 f(t)\,dt\right)\\ &= 2\int_0^2 f(t)\,dt - 2f(2)\\ &= 2\times 3 - 2\times\frac{3}{2}\ln 3 = 6-3\ln 3 \quad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

실수 t $(0 \leq t \leq 2)$에 대하여

$g'(t)=\dfrac{t}{t+1}=1-\dfrac{1}{t+1}$이므로

$g(t)=\displaystyle\int g'(t)\,dt$

$=\displaystyle\int\left(1-\dfrac{1}{t+1}\right)dt$

$=t-\ln(t+1)+C$ (단, C는 적분상수)

$\displaystyle\int_0^2 g(t)\,dt=\int_0^2\{t-\ln(t+1)+C\}\,dt$

$=\left[\dfrac{t^2}{2}\right]_0^2-\Big[(t+1)\ln(t+1)-(t+1)\Big]_0^2+2C$

$=2-(3\ln 3-2)+2C$

$=4-3\ln 3+2C$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $6-3\ln 3=4-3\ln 3+2C$

$C=1$

즉, $g(t)=t-\ln(t+1)+1$이므로

$\displaystyle\int_0^2\dfrac{g(t)}{t+1}\,dt=\int_0^2\dfrac{t-\ln(t+1)+1}{t+1}\,dt$

$=\displaystyle\int_0^2 1\,dt-\int_0^2\dfrac{\ln(t+1)}{t+1}\,dt$ …… ㉢

$\ln(t+1)=s$라 하면

$t=0$일 때 $s=0$, $t=2$일 때 $s=\ln 3$이고

$\dfrac{1}{t+1}=\dfrac{ds}{dt}$이므로

㉢에서

$\displaystyle\int_0^2 1\,dt-\int_0^2\dfrac{\ln(t+1)}{t+1}\,dt=\Big[t\Big]_0^2-\int_0^{\ln 3}s\,dx$

$=2-\left[\dfrac{s^2}{2}\right]_0^{\ln 3}$

$=2-\dfrac{1}{2}(\ln 3)^2$

11. 정답 640

급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 수렴하므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+|a_n|)=\dfrac{8}{3}\sum_{n=1}^{\infty}a_n$에서

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\dfrac{5}{3}\sum_{n=1}^{\infty}a_n>0$

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$-1<r<0$ 또는 $0<r<1$이고

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\dfrac{a_1}{1-r}>0$

만약

$0<r<1$, $a_1>0$이면 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $-1<r<0$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\dfrac{a_1}{1-r}>0$이므로 $a_1>0$

이때 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\dfrac{a_1}{1-|r|}=\dfrac{a_1}{1+r}$이므로

$\dfrac{a_1}{1+r}=\dfrac{5}{3}\times\dfrac{a_1}{1-r}$에서

$3(1-r)=5(1+r)$, $r=-\dfrac{1}{4}$

$n\le k$에서 $b_n=\dfrac{1}{a_n}$이므로

$b_1=\dfrac{1}{a_1}$, $b_k=\dfrac{1}{a_k}$

조건 (가)에서 $b_1b_k=\dfrac{1}{a_1a_k}=-1$이므로

$a_1a_k=-1$

$a_1a_1\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{k-1}=-1$이므로 k는 짝수이다.

$a_1{}^2=2^{2k-2}$이므로 $a_1=2^{k-1}$

즉, $a_n=2^{k-1}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}=(-1)^{n-1}2^{k-2n+1}$이므로

$n\le k$에서

$b_n=\dfrac{1}{a_n}=(-1)^{n-1}2^{2n-k-1}$

조건 (나)에서 b_n이 정수이려면 $2n-k-1\ge 0$

$n\ge\dfrac{k+1}{2}$

k는 짝수이므로 $k=2t$ (t는 자연수)로 놓으면

$n\ge t+\dfrac{1}{2}$이므로

b_n이 정수가 되도록 하는 k 이하의 자연수 n은

$n=t+1,\ t+2,\ \cdots,\ 2t$이고 그 개수는 $t=\dfrac{k}{2}$이다.

한편, $b_{k+1}=a_{k+1}=2^{k-1}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^k=2^{-(k+1)}$이므로

b_{k+1}은 정수가 아니다.

이때 집합 $\{b_n\,|\,b_n$은 정수, $1\le n\le k+1\}$의 모든 원소의 합은

$\displaystyle\sum_{n=t+1}^{2t}(-1)^{n-1}2^{2n-2t-1}$

$S=\displaystyle\sum_{n=t+1}^{2t}(-1)^{n-1}2^{2n-2t-1}$이라 하고

$n=t+j$ $(j=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ t)$로 치환하면

$S=\displaystyle\sum_{n=t+1}^{2t}(-1)^{n-1}2^{2n-2t-1}$

$=\displaystyle(-1)^{t-1}\sum_{j=1}^{t}(-1)^j2^{2j-1}=(-1)^{t-1}\times 2\sum_{j=1}^{t}(-1)^j4^{j-1}$

여기서

$\sum_{j=1}^{t}(-1)4^{j-1}=-\sum_{j=0}^{t-1}(-4)^j=-\frac{1-(-4)^4}{1+4}=-\frac{1-(-4)^t}{5}$

이므로

$S=(-1)^{t-1}\times 2\left\{-\frac{1-(-4)^t}{5}\right\}=\frac{2}{5}(-1)^t\{1-(-4)^t\}$

$=\frac{2}{5}\{(-1)^t-4^t\}$

$S=-102$이므로

$\frac{2}{5}\{(-1)^t-4^t\}=-102$

$4^t-(-1)^t 255$

만약 t가 홀수이면 $4^t=254$를 만족시키는 자연수 t는 존재하지 않는다.

즉, t는 짝수이고 $4^t=256$이므로 $t=4$

이때 $k=2t=8$이고 $a_1=2^{k-1}=2^7$

$n>k$에서 $b_n=a_n$이므로

$\sum_{n=k+1}^{\infty}b_n=\sum_{n=9}^{\infty}a_n=\frac{a_9}{1-r}$

$=\frac{2^7\left(-\frac{1}{4}\right)^n}{1+\frac{1}{4}}=\frac{4}{5}\times\frac{1}{512}=\frac{1}{640}$

따라서 $\frac{1}{\sum_{n=k+1}^{\infty}b_n}=640$

12. 정답 54

함수 $g(x)$가 $x>-\pi$에서 미분가능하므로

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이고 미분계수가 존재한다.

$\lim_{x\to 0-}\ln(1+\sqrt{3}+2\sin(x-a))=f(0)$에서

$\ln(1+\sqrt{3}+2\sin(-a))=f(0)$ …… ㉠

$-\pi<x<0$일 때, $g'(x)=\frac{2\cos(x-a)}{1+\sqrt{3}+2\sin(x-a)}$

조건 (가)에서 $g'(0)=1$이므로

$\frac{2\cos(-a)}{1+\sqrt{3}+2\sin(-a)}=1$

$2\cos(-a)=1+\sqrt{3}+2\sin(-a)$

$2\cos a=1+\sqrt{3}-2\sin a$

$2(\sin a+\cos a)=1+\sqrt{3}$

$\sin a+\cos a=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ …… ㉡

㉡의 양변을 제곱하면

$\sin^2 a+\cos^2 a+2\sin a\cos a=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin^2 a+\cos^2 a=1$이므로

$\sin a\cos a=\frac{\sqrt{3}}{4}$ …… ㉢

㉡, ㉢에 의하여 $\sin a$, $\cos a$를 두 근으로 하는 t에 대한 이차방정식은

$t^2-\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)t+\frac{\sqrt{3}}{4}=0$

$\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$

$t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\sin a=\frac{1}{2}$ 또는 $\sin a=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0<a<\pi$이므로 $a=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{\pi}{3}$

한편, $-\pi<x<0$에서

$g'(x)=\frac{2\cos(x-a)}{1+\sqrt{3}+2\sin(x-a)}$이므로

$g''(x)=\frac{-2\sin(x-a)(1+\sqrt{3}+2\sin(x-a))-4\cos^2(x-a)}{(1+\sqrt{3}+2\sin(x-a))^2}$

$=\frac{-2(1+\sqrt{3})\sin(x-a)-4(\sin^2(x-a)+\cos^2(x-a))}{(1+\sqrt{3}+2\sin(x-a))^2}$

$=\frac{-2(1+\sqrt{3})\sin(x-a)-4}{(1+\sqrt{3}+2\sin(x-a))^2}$

(i) $a=\frac{\pi}{6}$일 때

$\lim_{x\to 0-}g''(x)=\frac{-2(1+\sqrt{3})\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)-4}{\left(1+\sqrt{3}+2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^2}=\frac{\sqrt{3}-3}{3}<0$

$-\pi<x<0$에서 $g''(x)$는 연속이므로

0보다 작은 어떤 실수 s에 대하여 구간 $(s,\ 0)$에서 항상 $g''(x)<0$이 성립한다.

따라서 구간 $(s,\ 0)$에서 $g'(x)$는 감소하므로

이 구간의 임의의 x에 대하여 $g'(x)>\lim_{x\to 0-}g'(x)=g'(0)=1$

즉, 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $a=\frac{\pi}{3}$일 때

$g''(x)=\frac{-2(1+\sqrt{3})\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-4}{\left(1+\sqrt{3}+2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)^2}$에서

$\left(1+\sqrt{3}+2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)^2>0$

$-2(1+\sqrt{3})\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-4=0$에서

$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{-4}{2(1+\sqrt{3})}=1-\sqrt{3}$ …… ㉣

$-\pi<x<0$에서 ㉣을 만족하는 x의 값을 t라 하자.

① $-\pi<0<t$에서

$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) > 1-\sqrt{3}$이므로 $g''(x) < 0$

즉 $-\pi < x < t$에서 $g'(x)$는 감소한다.

② $t < x < 0$에서

$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) < 1-\sqrt{3}$이므로 $g''(x) > 0$

즉, $t < x < 0$에서 $g'(x)$는 증가한다.

그러므로 $g'(x)$는 $x=t$에서 최솟값을 갖는다.

$\lim_{x \to 0-} g'(x) = g'(0) = 1$이고

$$\lim_{x \to -\pi+} g'(x) = \frac{2\cos\left(-\pi-\frac{\pi}{3}\right)}{1+\sqrt{3}+2\sin\left(-\pi-\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$= \frac{2\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)}{1+\sqrt{3}+2\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)}$$

$$= \frac{-1}{1+2\sqrt{3}} < 1$$

이므로 조건 (가)를 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a = \frac{\pi}{3}$

이때 ㉠에서

$f(0) = \ln\left(1+\sqrt{3}-2\sin\frac{\pi}{3}\right) = \ln 1 = 0$

즉, $f(0)=0$, $f'(0)=1$이므로 최고차항의 계수가 1인 삼차함수

$f(x)$를 $f(x)=x^3+px^2+x$ (p는 상수)로 놓을 수 있다.

$-\pi < x < 0$일 대

$g'(x)=0$에서 $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$이므로

$x-\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}$

즉, $x = -\frac{\pi}{6}$"이고

$g\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \ln\left(1+\sqrt{3}+2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \ln(\sqrt{3}-1)$

따라서 집합 S의 원소 중 하나는 $\ln(\sqrt{3}-1)$이다.

$x \geq 0$일 때 $g(x)=f(x)$이므로 $g'(x)=f'(x)=3x^2+2px+1$

조건 (나)에서 $n(S)=3$이므로

방정식 $g'(x)=0$, 즉 $3x^2+2px+1=0$은 서로 다른 두 양의 실근 α, β를 가져야 한다.

이차방정식 $3x^2+2px+1=0$의 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4} = p^2-3 > 0$이므로

$p < \sqrt{3}$ 또는 $p < -\sqrt{3}$ …… ㉤

$\alpha+\beta = -\frac{2p}{3} > 0$이어야 하므로 $p<0$ …… ㉥

㉤, ㉥에서 $p < -\sqrt{3}$

조건 (나)에서 집합 S의 모든 원소의 합이 $\ln(\sqrt{3}-1)$이므로

$f(\alpha)+f(\beta)=0$

$\alpha\beta = \frac{1}{3}$이고

$f(\alpha)=\alpha^3+p\alpha^2+\alpha$, $f(\beta)=\beta^3+p\beta^2+\beta$이므로

$$f(\alpha)+f(\beta) = \alpha^3+\beta^3+p(\alpha^2+\beta^2)+\alpha+\beta$$
$$= (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+p(\alpha+\beta)^2-2p\alpha\beta+(\alpha+\beta)$$
$$= -\frac{8}{27}p^3+\frac{4}{9}p^2-\frac{2}{3}p=0$$

$2p^3-9p=0$, $p(2p^2-9)=0$에서

$p < -\sqrt{3}$이므로 $p = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$f''(x)=6x+2p=6x-3\sqrt{2}$이므로

$f''(0) = -3\sqrt{2}$

따라서 $\frac{\pi}{a}\times(f''(0))^2 = 3\times(-3\sqrt{2})^2 = 54$

13. 정답 ③

$f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{x}{2}\right)$에서

$$f'(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\times\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{x}{2}\right)'$$
$$= -\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\times\left(-\frac{\pi}{2}\sin\frac{x}{2}\times\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\sin\frac{x}{2}$$

이므로

$$\lim_{x\to\pi}\frac{xf(x)-\pi f(x)}{x-\pi}$$
$$= \lim_{x\to\pi}\frac{(x-\pi)f(x)-\pi(f(x)-f(\pi))}{x-\pi}$$
$$= \lim_{x\to\pi}\left(f(\pi)-\pi\times\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}\right)$$
$$= f(\pi)-\pi\times f'(x)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\right)-\pi\times\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2}$$
$$= 1-0$$
$$= 1$$

14. 정답 ⑤

$y=e^x$에서 $y'=e^x$이므로

$l_P : y = -e^{-t}(x-t)+e^t$,

$l_Q : y = -e^{-s}(x-s)+e^s$

이다.

이때 $t \neq s$이므로

$-e^{-t}(x-t)+e^t = -e^{-s}(x-s)+e^s$

$(e^{-s}-e^{-t})x=se^{-s}-te^{-t}+e^{s}-e^{t}$

$x=\dfrac{se^{-s}-te^{-t}+e^{s}-e^{t}}{e^{-s}-e^{-t}}$

즉, $x_{\mathrm{R}}=\dfrac{se^{-s}-te^{-t}+e^{s}-s^{t}}{e^{-s}-e^{-t}}$

따라서

$x(t)=\lim\limits_{s\to t}\dfrac{se^{-s}-te^{-t}+e^{s}-e^{t}}{e^{-s}-e^{-t}}$

이고

$f(x)=xe^{-x}+e^{x}$, $g(x)=e^{-x}$이라 하면

$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}+e^{x}$, $g'(x)=-e^{-x}$이므로

$$\begin{aligned}x(t)&=\lim_{s\to t}\frac{se^{-s}-te^{-t}+e^{s}-e^{t}}{e^{-s}-e^{-t}}\\&=\lim_{s\to t}\frac{f(s)-f(t)}{g(s)-g(t)}\\&=\lim_{s\to t}\frac{\frac{f(s)-f(t)}{s-t}}{\frac{g(s)-g(t)}{s-t}}\\&=\frac{f'(t)}{g'(t)}\\&=\frac{e^{-t}-te^{-t}+e^{t}}{-e^{-t}}\\&=t-1-e^{2t}\end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned}y(t)&=-e^{-t}(x(t)-t)+e^{t}\\&=-e^{-t}(-1-e^{2t})+e^{t}\\&=e^{-t}+2e^{t}\end{aligned}$$

이므로 점 $(x(t),\ y(t))$를 중심으로 하고 점 P를 지나는 원의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$\begin{aligned}S(t)&=\pi\{(x(t)-t)^{2}+(y(t)-e^{t})^{2}\}\\&=\pi\{(-1-e^{2t})^{2}+(e^{-t}+e^{t})^{2}\}\\&=\pi(e^{4t}+3e^{2t}+e^{-2t}+3)\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_{0}^{1}S(t)dt$

$\displaystyle=\int_{0}^{1}\pi(e^{4t}+3e^{2t}+e^{-2t}+3)dt$

$\displaystyle=\pi\int_{0}^{1}(e^{4t}+3e^{2t}+e^{-2t}+3)dt$

$\displaystyle=\pi\left[\frac{1}{4}e^{4t}+\frac{3}{2}e^{2t}-\frac{1}{2}e^{-2t}+3t\right]_{0}^{1}$

$\displaystyle=\pi\left\{\left(\frac{1}{4}e^{4}+\frac{3}{2}e^{2}-\frac{1}{2}e^{-2}+3\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)\right\}$

$\displaystyle=\pi\left(\frac{1}{4}e^{4}+\frac{3}{2}e^{2}-\frac{1}{2}e^{-2}+\frac{7}{4}\right)$

이므로

$a=-\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{7}{4}$

즉 $a+b=\dfrac{5}{4}$

15. 정답 50

$a_1=a_2=1$이고 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

이 성립하므로

$a_3=2,\ a_4=3,\ a_5=5,\ a_6=8,\ \cdots$

즉, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\ge n-1$이 성립하므로

$1=\tan b_1=\tan b_2>\tan b_3>\tan b_4>\cdots$

이고 $n\to\infty$일 때 $\dfrac{1}{a_n}\to 0$이므로 $\tan b_n\to 0$이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$이다.

또한

$$\begin{aligned}\tan(b_{2m+1}+b_{2m+2})&=\frac{\tan b_{2m+1}+\tan b_{2m+2}}{1-\tan b_{2m+1}\tan b_{2m+2}}\\&=\frac{\frac{1}{a_{2m+1}}+\frac{1}{a_{2m+2}}}{1-\frac{1}{a_{2m+1}}\times\frac{1}{a_{2m+2}}}\\&=\frac{a_{2m+2}+a_{2m+1}}{a_{2m+1}a_{2m+2}-1}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}a_{2m}\tan(b_{2m+1}+b_{2m+2})&=a_{2m}\times\frac{a_{2m+2}+a_{2m+1}}{a_{2m+1}a_{2m+2}-1}\\&=\frac{a_{2m}a_{2m+2}+a_{2m}a_{2m+1}}{a_{2m+1}(a_{2m}+a_{2m+1})-1}\\&=\frac{{a_{2m+1}}^{2}+(-1)^{2m+1}+a_{2m}a_{2m+1}}{a_{2m+1}(a_{2m}+a_{2m+1})-1}\\&=\frac{{a_{2m+1}}^{2}-1+a_{2m}a_{2m+1}}{a_{2m+1}(a_{2m}+a_{2m+1})-1}\\&=\frac{a_{2m+1}(a_{2m}+a_{2m+1})-1}{a_{2m+1}(a_{2m}+a_{2m+1})-1}\\&=1\end{aligned}$$

따라서

$\tan(b_{2m+1}+b_{2m+2})=\dfrac{1}{a_{2m}}=\tan b_{2m}$

이므로

$b_{2m+1}+b_{2m+2}=b_{2m}$

즉, $b_{2m+1}=b_{2m}-b_{2m+2}$이므로

따라서

$k=\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\{a_{2m}b_{2m-1}\tan(b_{2m+1}+b_{2m+2})\}$

$$=\sum_{m=1}^{\infty} b_{2m-1}$$
$$=b_1+b_3+b_5+b_7+\cdots$$
$$=b_1+(b_2-b_4)+(b_4-b_6)+(b_6-b_8)+\cdots$$
$$=b_1+\lim_{l\to\infty}\sum_{m=1}^{l}(b_{2m}-b_{2m+2})$$
$$=b_1+b_2-\lim_{l\to\infty} b_{2l+2}$$
$$=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}-0$$
$$=\frac{\pi}{2}$$
이므로

$$\frac{100k}{\pi}=\frac{100\times\frac{\pi}{2}}{\pi}=50$$

16. 정답 9

$g(t)=\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{t^2+(f(t))^2}$ 에서

$(g(t))^2=t^2+(f(t))^2$

이므로

$(f(t))^2=(g(t))^2-t^2$

$t=1$을 대입하면

$$(f(1))^2=(g(1))^2-1$$
$$=(h(1)+2)^2-1$$
$$=2^2-1=3$$

이때 조건 (가)에 의하여

$f(1)=\sqrt{3}$

또한 구간 $[1,\ t]$에서 곡선 $y=f(x)$의 길이가 $h(t)$이므로

$$h(t)=\int_1^t\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

따라서 $g(t)=h(t)+2$이므로

$$\sqrt{t^2+(f(t))^2}=\int_1^t\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx+2$$

양변을 t에 대하여 미분하면

$$\frac{2t+2f(t)f'(t)}{2\sqrt{t^2+(f(t))^2}}=\sqrt{1+(f'(t))^2}$$
$$\frac{t+f(t)f'(t)}{\sqrt{t^2+(f(t))^2}}=\sqrt{1+(f'(t))^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$t^2+2tf(t)f'(t)+(f(t)f'(t))^2=(t^2+(f(t))^2)(1+(f'(t))^2)$$
$$t^2+2tf(t)f'(t)+(f(t)f'(t))^2$$
$$=t^2+t^2(f'(t))^2+(f(t))^2+(f(t))^2(f'(t))^2$$
$$t^2(f'(t))^2-2tf(t)f'(t)+(f(t))^2=0$$
$$(tf'(t)-f(t))^2=0$$
$$tf'(t)-f(t)=0$$

이때 $\left(\frac{f(t)}{t}\right)'=\frac{tf'(t)-f(t)}{t^2}$ 이므로

$$\left(\frac{f(t)}{t}\right)'=0$$

따라서 $\frac{f(t)}{t}=c$ (c는 상수)이므로

$f(t)=ct$

그런데 $f(1)=\sqrt{3}$ 이므로

$f(1)=c=\sqrt{3}$

즉, $f(t)=\sqrt{3}t$이므로

$f(3\sqrt{3})=\sqrt{3}\times3\sqrt{3}=9$

17. 정답 ②

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(S_n-\frac{16}{3}\right)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\left(S_n-\frac{16}{3}\right)=0$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(S_n-\frac{16}{3}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{16}{3}=\frac{16}{3}$$

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{4}{1-r}\quad(-1<r<1)\text{이므로}$$

$$\frac{4}{1-r}=\frac{16}{3},\ r=\frac{1}{4}$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(S_n-\frac{16}{3}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4\times\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{4}}-\frac{16}{3}\right]$$
$$=-\frac{16}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=-\frac{16}{3}\times\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=-\frac{16}{9}$$

18. 정답 ⑤

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=kx$가 제1사분면에서 만나는 점의 x좌표를 α $(\alpha>0)$이라 하자.

$f(\alpha)=k\alpha$에서 $(\alpha-t)^3=k\alpha$ …… ㉠

$f'(x)=3(x-t)^2$이므로 $f'(\alpha)=6\times2^{\frac{t}{6}}$에서

$3(\alpha-t)^2=6\times2^{\frac{t}{6}}$, $(\alpha-t)^2=2^{\frac{t}{6}+1}$ …… ㉡

$(\alpha-t)^3=k\alpha>0$에서 $\alpha>t>0$이므로 $\alpha-t=2^{\frac{t+6}{12}}$, $\alpha=t+2^{\frac{t+6}{12}}$

$$\frac{d\alpha}{dt}=1+2^{\frac{t+6}{12}}\times\ln\left(2^{\frac{1}{12}}\right)=1+\frac{2^{\frac{t+6}{12}}\times\ln2}{12}\quad\cdots\cdots\ ㉢$$

㉡에서 $t=6$일 때 $\alpha=8$

㉠에 $t=6$, $\alpha=8$을 대입하면 $k=1$

㉢에서 $t=6$일 때 $\frac{d\alpha}{dt}$의 값은 $1+\frac{2\ln2}{12}=1+\frac{\ln2}{6}$

$\frac{d}{dt}(\alpha-t)^3=\frac{d}{dt}k\alpha$에서

$3(\alpha-t)^2\times\frac{d}{dt}(\alpha-t)=\alpha\frac{dk}{dt}+k\frac{d\alpha}{dt}$

$3(\alpha-t)^2\times\left(\frac{d\alpha}{dt}-1\right)=\alpha\frac{dk}{dt}+k\frac{d\alpha}{dt}$

$t=6$일 때 $\frac{dk}{dt}$의 값이 $g'(6)$이므로

$3(8-6)^2\times\left(1+\frac{\ln 2}{6}-1\right)=8g'(6)+1\times\left(1+\frac{\ln 2}{6}\right)$

따라서 $g'(6)=\frac{11\ln 2-6}{48}$

19. 정답 2

사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 -1이므로 $f'(x)$의 최고차항의 계수는 -4이고, 조건 (가)에 의하여

$f'(x)=-4x^2(x-3)$ 또는 $f'(x)=-4x(x-3)^2$

조건 (나)에서

$f(3)-f(0)=\int_0^3 f'(x)dx>0$

이므로 $f'(x)=-4x^2(x-3)$

$f(0)=0$이므로

$f(x)=\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x(-4t^3+12t^2)dt=-x^4+4x^3$

$g'(x)=e^{f(x)}$이고 $g''(x)=f'(x)e^{f(x)}$이므로

$g''(x)=-4x^2(x-3)e^{-x^4+4x^3}$

$g''(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

이때 $g''(3)=0$이고 $g''(x)$는 $x=3$ 좌우에서만 부호가 변하므로 곡선 $y=g(x)$의 변곡점은 점 $(3,\ g(3))$뿐이다.

즉, $a=3$

$$\begin{aligned}\int_0^a f''(x)g(x)dx&=\int_0^3 f''(x)g(x)dx\\&=\Big[f'(x)g(x)\Big]_0^3-\int_0^3 f'(x)g'(x)dx\\&=f'(3)g(3)-f'(0)g(0)-\int_0^3 f'(x)e^{f(x)}dx\\&=-\int_0^3 f'(x)e^{f(x)}dx\\&=\int_0^3 g''(x)dx\\&=g'(0)-g'(3)\\&=1-e^{27}\end{aligned}$$

따라서 $p=1,\ q=-1$이므로

$p-q=2$

20. 정답 675

$$\begin{aligned}g(t)&=\frac{1+\overline{\mathrm{OP}}^2-\overline{\mathrm{AP}}^2}{\overline{\mathrm{OP}}}\\&=\frac{1+t^2+(f(t))^2-(t-1)^2-(f(t))^2}{\sqrt{t^2+(f(t))^2}}\\&=\frac{2t}{\sqrt{t^2+(f(t))^2}}\end{aligned}$$

에서

$$\begin{aligned}g'(t)&=\frac{2\sqrt{t^2+(f(t))^2}-2t\times\frac{2t+2f(t)f'(t)}{2\sqrt{t^2+(f(t))^2}}}{t^2+(f(t))^2}\\&=\frac{2\{t^2+(f(t))^2\}-2t\times(t+f(t)f'(t))}{\{t^2+(f(t))^2\}\sqrt{t^2+(f(t))^2}}\\&=\frac{2f(t)(f(t)-tf'(t))}{\{t^2+(f(t))^2\}\sqrt{t^2+(f(t))^2}}\end{aligned}$$

$g'(t)=0$에서

$f(t)=0$ 또는 $f(t)-tf'(t)=0$ …… ㉠

한편, 조건 (가)에 의하여 열린구간 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$에서 함수 $g(t)$는 증가하고 열린구간 $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$에서 함수 $g(t)$는 감소하므로 조건 (나)에서 실수 b $(b>1)$이 존재하여 열린구간 $(1,\ b)$에서 함수 $g(t)$는 증가하고 함수 $g(t)$는 $t=1$에서 극소이다.

따라서 $g'\left(\frac{1}{2}\right)=0$이고 $g'(1)=0$ …… ㉡

$g'(1)=0$이고 $f(1)>0$이므로 ㉠에서

$f(1)-f'(1)=0$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$이고 접선의 방정식은

$y=f'(1)(x-1)+f(1)=f'(x)x=\sqrt{3}x$

이 직선은 원점을 지나므로 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 한 접선의 접점이 $(1,\ f(1))$이다.

즉, 이 직선은 점 $(0,\ f(0))$을 지나고 점 $(1,\ f(1))$에서 곡선 $y=f(x)$에서 접하므로

삼차방정식 $f(x)-\sqrt{3}x=0$에서

$x=0$ 또는 $x=1$ (중근)

따라서 $f(x)-\sqrt{3}x=kx(x-1)^2$ $(k\neq 0)$이라 하면

$f(x)=kx(x-1)^2+\sqrt{3}x$에서

$f'(x)=k(x-1)^2+2kx(x-1)+\sqrt{3}$

㉡에서 $g'\left(\frac{1}{2}\right)=0$이므로

㉠에서

$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ 또는 $\frac{1}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)=0$

$\frac{1}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{k}{8}-\frac{k}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{k}{8}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{k}{4}$

이므로

$\frac{1}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$, 즉 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{k}{8}+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$에서 $k=-4\sqrt{3}$

즉, $f(x)=-4\sqrt{3}x(x-1)^2+\sqrt{3}x$이므로

$f(-1)=16\sqrt{3}-\sqrt{3}=15\sqrt{3}$

따라서 $(f(-1))^2=(15\sqrt{3}0^2=675$

[참고]

원점 O에 대하여 $\theta=\angle\mathrm{AOP}$라 하면

$g(t)=\frac{1+\overline{\mathrm{OP}}^2-\overline{\mathrm{AP}}^2}{\overline{\mathrm{OP}}}=2\cos\theta\ \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

21. 정답 ⑤

$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_n$에서

$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)$

$=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)$

$=a_{n+1}-a_1$

$=a_{n+1}-2$

이므로

$a_{n+1}-2=a_n$

즉, $a_{n+1}-a_{n2}=2$

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2이고 공차가 2인 등차수열이므로

$a_n=2+(n-1)\times 2=2n$

이때

$b_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}a_n}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+2)\times 2n}$

$=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\frac{1}{4}$

등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r이라 하면

$r=\frac{b_2}{b_1}=\frac{\frac{1}{4}}{2}=\frac{1}{8}$

따라서

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{2}{1-\frac{1}{8}}=\frac{16}{7}$

22. 정답 ②

조건 (가)에서

$\int_{-1}^{3}\{f(x)\}^2f'(x)dx=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 좌변에서 $f(x)=t$로 놓으면

$x=-1$일 때 $t=f(-1)$, $x=3$일 때 $t=f(3)$이고

$\frac{dt}{dx}=f'(x)$이므로

$\int_{f(-1)}^{f(3)}t^2dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_{f(-1)}^{f(3)}$

$=\frac{1}{3}(f(3))^3-\frac{1}{3}(f(-1))^3$

$=\frac{1}{3}(f(3)-f(-1))\{(f(3))^2+f(3)f(-1)+(f(-1))^2\}$

$=0$

$f(3)=f(-1)$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이고 조건 (나)에서 $f(0)=0$이므로 $f(2)=0$이다.

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 p $(p\neq 0)$이라 하면

$f(x)=px(x-2)=p(x^2-2x)$

로 놓을 수 있다.

한편, $h(x)=\ln x+a$라 하자.

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 미분가능해야 한다. 즉,

$f(2)=h(2)$, $f'(2)=h'(2)$

이어야 한다.

$f(2)=h(2)$에서

$0=\ln 2+a$, 즉 $a=-\ln 2$

$f'(x)=p(2x-2)$, $h'(x)=\frac{1}{x}$이므로

$f'(2)=h'(2)$에서

$2p=\frac{1}{2}$, 즉 $p=\frac{1}{4}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}x(x-2)$이므로

$f(e^a)=f(e^{-\ln 2})=f\left(\frac{1}{2}\right)$

$=-\frac{3}{16}$

23. 정답 25

삼각형 AOP에서

$\angle\mathrm{APO}=\angle\mathrm{PAO}=\theta$

이므로

$$\angle\mathrm{AOP}=\pi-2\theta,\ \angle\mathrm{AOQ}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{AOP}=\frac{\pi}{2}-\theta$$

직각삼각형 $\mathrm{OQH_1}$에서

$$\overline{\mathrm{OH_1}}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$

이므로

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times1\times\sin\theta\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$$

한편, $\angle\mathrm{BOP}=2\theta$이므로

$$\angle\mathrm{POR}=\frac{4}{3}\theta,\ \angle\mathrm{ROB}=\frac{2}{3}\theta$$

직각삼각형 $\mathrm{ROH_2}$에서

$$\overline{\mathrm{RH_2}}=\sin\frac{2}{3}\theta$$

직각삼각형 $\mathrm{ROH_3}$에서

$$\overline{\mathrm{RH_3}}=\sin\frac{4}{3}\theta$$

사각형 $\mathrm{OH_2RH_3}$에서

$\angle\mathrm{H_2RH_3}=\pi-2\theta$

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\sin\frac{2}{3}\theta\times\sin\frac{4}{3}\theta\times\sin(\pi-2\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\sin\frac{2}{3}\theta\sin\frac{4}{3}\theta\sin2\theta$$

이때,

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{2}{3}\theta\sin\frac{4}{3}\theta\sin2\theta}{\theta^2\times\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{16}{9}\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\sin\frac{2}{3}\theta}{\frac{2}{3}\theta}\times\frac{\sin\frac{4}{3}\theta}{\frac{4}{3}\theta}\times\frac{\sin2\theta}{2\theta}\times\frac{\theta}{\sin\theta}\times\frac{1}{\cos\theta}\right\}$$

$$=\frac{16}{9}(1\times1\times1\times1\times1)$$

$$=\frac{16}{9}$$

따라서 $p=9,\ q=16$이므로

$p+q=9+16=25$

24. 정답 4

$$\int_0^x(x-t)f(t)dt=e^x-\frac{1}{2}x^2-x+a \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=e^0+a$

$a=-1$

㉠에서

$$x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=e^x-\frac{1}{2}x^2-x+1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t)dt=e^x-x-1 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉢의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=e^x-1$

한편, $x>1$인 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)>0$이므로 함수 $g(x)$의 역함수 $g^{-1}(x)$가 존재한다.

$g\left(\frac{f(x)+1}{ex}\right)=x$에서

$$g^{-1}(x)=\frac{f(x)+1}{ex}$$

$$=\frac{e^x}{ex}$$

$$=\frac{e^{x-1}}{x}$$

$\int_1^{\frac{e}{2}}\{g(x)\}^2dx$에서

$y=g(x)$, 즉 $x=g^{-1}(y)$로 놓으면

$g(1)=1,\ g\left(\frac{e}{2}\right)=2$이므로

$g^{-1}(1)=1,\ g^{-1}(2)=\frac{e}{2}$이고

$\frac{dx}{dy}=(g^{-1})'(y)$이므로

$$\int_1^2 y^2(g^{-1})'(y)dy$$

$$=\int_1^2\left\{y^2\times\frac{(y-1)e^{y-1}}{y^2}\right\}dy$$

$$=\int_1^2(y-1)e^{y-1}dy$$

$$=\left[(y-1)e^{y-1}\right]_1^2-\int_1^2 e^{y-1}dy$$

$$=\left[(y-1)e^{y-1}\right]_1^2-\left[e^{y-1}\right]_1^2$$

$=e-(e-1)$

$=1$

따라서 $b=1$이므로

$(a-b)^2=(-1-1)^2=4$

25. 정답 ②

선분 PQ의 중점의 좌표는 $\left(\frac{s+t}{2},\ \frac{s^2+t^2}{2}\right)$이고, 중점이 곡선 $y=e^{x+1}$ 위에 있으므로

$$e^{\frac{s+t}{2}+1}=\frac{s^2+t^2}{2}$$

이 식의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{2}e^{\frac{s+t}{2}+1}\frac{ds}{dt}+\frac{1}{2}e^{\frac{s+t}{2}+1}=s\frac{ds}{dt}+t$$

이므로

$$\frac{ds}{dt}=\frac{-\frac{1}{2}e^{\frac{s+t}{2}+1}+t}{\frac{1}{2}e^{\frac{s+t}{2}+1}-s}\ \left(\text{단, } \frac{1}{2}e^{\frac{s+t}{2}+1}-s\neq 0\right)$$

한편, 선분 PQ의 중점의 x좌표가 0이면 $\frac{s+t}{2}=0$이므로 $t=-s$이다.

그러므로 직선 PQ는 x축과 평행하고 점 $(0,\ e)$를 지나는 직선이다.

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=e$의 교점의 좌표를 구하면

$(-\sqrt{e},\ e)$, $(\sqrt{e},\ e)$이므로

$s=-\sqrt{e}$, $t=\sqrt{e}$

따라서 선분 PQ의 중점의 x좌표가 0일 때의 $\frac{ds}{dt}$의 값은

$$\frac{ds}{dt}=\frac{-\frac{1}{2}e^{\frac{-\sqrt{e}+\sqrt{e}}{2}+1}+\sqrt{e}}{\frac{1}{2}e^{\frac{-\sqrt{e}+\sqrt{e}}{2}+1}+\sqrt{e}}=\frac{-e+2\sqrt{e}}{e+2\sqrt{e}}=\frac{2-\sqrt{e}}{2+\sqrt{e}}$$

26. 정답 ①

$g(f(x))=(x^2+10)e^x$의 양변을 미분하면

$g'(f(x))f'(x)=(x^2+2x+10)e^x$이다.

모든 실수 x에 대하여 $(x^2+2x+10)e^x>0$이므로 $f'(x)\neq 0$

따라서 $f'(x)$의 부호는 일정하다.

또한

$$\frac{g'(f(x))f'(x)}{g(f(x))}=\frac{(x^2+2x+10)e^x}{(x^2+10)e^x}=\frac{x^2+2x+10}{x^2+10}$$

에서

$\frac{g'(f(x))}{g(f(x))}=\frac{x^2+2x+10}{(x^2+10)f'(x)}$이다.

한편, $\frac{e^x}{g(f(x))}=\frac{e^x}{(x^2+10)e^x}=\frac{1}{x^2+10}$이므로

$$\frac{g'(f(x))-e^x}{g(f(x))}=\frac{x^2+2x+10}{(x^2+10)f'(x)}-\frac{1}{x^2+10}=\frac{(x^2+2x+10)-f'(x)}{(x^2+10)f'(x)}$$

따라서 모든 실수 x에 대하여

$$x\times\frac{(x^2+2x+10)-f'(x)}{(x^2+10)f'(x)}\leq 0$$

이때, $(x^2+10)f'(x)$의 부호는 일정하므로 모든 실수 x에 대하여

$x\{(x^2+2x+10)-f'(x)\}\leq 0$ 또는 모든 실수 x에 대하여

$x\{(x^2+2x+10)-f'(x)\}\geq 0$이다.

$(x^2+2x+10)-f'(x)$는 차수가 2이하인 다항식이므로 주어진 조건을 만족하려면 $(x^2+2x+10)-f'(x)$는 x를 인수로 가지는 일차식 또는 0이어야 한다.

따라서 어떤 실수 a에 대하여 $(x^2+2x+10)-f'(x)=ax$이다.

그러면 $f'(x)=x^2+(2-a)x+10$이고 $f'(1)=15$이므로

$1+(2-a)+10=15$, $a=-2$

따라서 $f'(x)=x^2+4x+10$이고

$f'(-1)=1-4+10=7$

27. 정답 10

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(-1<r<1)$이라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=6$에서 $\frac{a_1}{1-r}=6$이고

$a_1=6(1-r)$ …… ㉠

수열 $\left\{\frac{1}{3^{n-1}\times a_n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{1}{a_1}$, 공비가 $\frac{1}{3r}$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}\times a_n}=\frac{1}{15}$에서

$\frac{1}{a_1}\times\frac{1}{1-\frac{1}{3r}}=\frac{1}{15}$이고

$a_1\left(1-\frac{1}{3r}\right)=15$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$6(1-r)\left(1-\frac{1}{3r}\right)=15$

양변에 r을 곱한 후 모든 항을 좌변으로 이항하면

$6(1-r)\left(r-\frac{1}{3}\right)-15r=0$

$2(1-r)(3r-1)-15r=0$

$-6r^2+8r-2-15r=0$

$6r^2+7r+2=0$

$(2r+1)(3r+2)=0$에서

$r=-\frac{1}{2}$ 또는 $r=-\frac{2}{3}$

㉠에서 $r=-\frac{1}{2}$이면 $a_1=9$, $r=-\frac{2}{3}$이면 $a_1=10$이다.

등비수열 $\{b_n\}$도

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=6,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}\times b_n}=\frac{1}{15}$$

을 만족하고, $a_1<b_1$이므로

$$a_n=9\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ b_n=10\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$ 이다.

$$|a_{n+k}b_{n+l}|=9\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-1}\times 10\left(\frac{2}{3}\right)^{n+l-1}$$
$$=90\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{l}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n+k}b_{n+l}|=\sum_{n=1}^{\infty}90\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{l}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
$$=90\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{l}\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}}$$
$$=135\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{l}$$

$135\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{l}$이 정수이고 $135=3^3\times 5$이므로 l의 값은 $0,\ 1,\ 2,\ 3$ 중 하나이다. 각 경우에 가능한 k의 값과 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n+k}b_{n+l}|$의 값을 구해 보자.

(ⅰ) $l=0$이면 $135\left(\frac{1}{2}\right)^{k}$의 값이 정수가 되어야 하므로 가능한 k의 값은 0뿐이다.

(ⅱ) $l=1$이면 $90\left(\frac{1}{2}\right)^{k}$의 값이 정수가 되어야 하므로 가능한 k의 값은 $0,\ 1$

(ⅲ) $l=2$이면 $60\left(\frac{1}{2}\right)^{k}$의 값이 정수가 되어야 하므로 가능한 k의 값은 $0,\ 1,\ 2$

(ⅳ) $l=3$이면 $40\left(\frac{1}{2}\right)^{k}$의 값이 정수가 되어야 하므로 가능한 k의 값은 $0,\ 1,\ 2,\ 3$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n+k}b_{n+l}|$의 값이 정수가 되도록 하는 음이 아닌 두 정수 k, l의 모든 순서쌍 $(k,\ l)$의 개수는 10이다.

28. 정답 11

$h(x)=\sin^2\pi x+\sin\pi x$라 하면

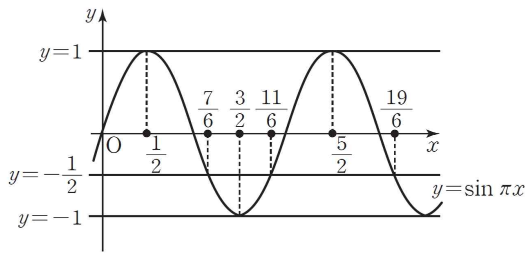
$$h'(x)=2\pi\sin\pi x\cos\pi x+\pi\cos\pi x$$
$$=\pi\cos\pi x(2\sin\pi x+1)$$
$$g'(x)=f'(h(x))h'(x)$$
$$=\pi f'(\sin^2\pi x+\sin\pi x)\cos\pi x(2\sin\pi x+1)$$

이때, $\cos\pi x=0$ 또는 $\sin\pi x=-\frac{1}{2}$인 x의 값의 좌우에서 $\cos\pi x(2\sin\pi x+1)$의 부호가 바뀐다.

$\cos\pi x=0$ 또는 $\sin\pi x=-\frac{1}{2}$인 x의 값의 좌우에서 $f'(h(x))$의 부호가 바뀌는지 조사해 보자.

(ⅰ) 방정식 $f'(x)=0$의 근이 존재하지 않는 경우
$f'(h(x))$의 부호는 변하지 않는다.

(ⅱ) $f'(x)=3(x-a)(x-b)$ (단, a, b는 상수)라고 하면 …… ㉠
$f'(h(x))=3(h(x)-a)(h(x)-b)$이다.
$h'(x)=0$인 x의 값, 즉 $\cos\pi x(2\sin\pi x+1)=0$인 x의 값에서 $h(x)$가 극값을 가지므로 이 x의 값에서 $h(x)-a$와 $h(x)-b$는 항상 극값을 가지며, 이 값들의 좌우에서 $f'(\sin^2\pi x+\sin\pi x)$의 부호는 바뀌지 않는다.
따라서 $\cos\pi x(2\sin\pi x+1)=0$인 x의 값에서 $g'(x)=\pi f'(\sin^2\pi x+\sin\pi x)\cos\pi x(2\sin\pi x+1)$의 부호가 바뀌므로 이 x의 값에서 함수 $g(x)$는 극값을 갖는다.
$\cos\pi x=0 \Leftrightarrow (\sin\pi x=-1$ 또는 $\sin\pi x=1)$이므로
$\cos\pi x(2\sin\pi x+1)=0$을 만족하는 x의 값을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



조건 (가)에서 x의 값이
$\frac{1}{6},\ \frac{5}{6},\ \frac{13}{6},\ \frac{17}{6},\ \cdots$
일 때에도 함수 $g(x)$가 극값을 가지므로 방정식 $f'(\sin^2\pi x+\sin\pi x)=0$이 이 값을 근으로 가진다.
$x=\frac{1}{6},\ \frac{5}{6},\ \frac{13}{6},\ \frac{17}{6},\ \cdots$일 때, $\sin^2\pi x+\sin\pi x=\frac{3}{4}$이므로

$$f'\left(\frac{3}{4}\right)=0$$

따라서 $f'(x)$는 $\left(x-\frac{3}{4}\right)$을 인수로 가지고, ㉠에서 $b=\frac{3}{4}$이라고 하면

$$f'(x)=\left(x-\frac{3}{4}\right)(3x-3a)$$

$$f'(x)=3x^2-\left(\frac{9}{4}+3a\right)x+\frac{9}{4}a$$에서

$$f(x)=x^3-\left(\frac{9}{8}+\frac{3}{2}a\right)x^2+\frac{9}{4}ax+C$$ (단, C는 적분상수)

이때, 함수 $g(x)$가 $x=t$에서 극값을 갖도록 하는 음이 아닌 t의 값 중 $\frac{1}{6},\ \frac{1}{2},\ \frac{5}{6},\ \frac{7}{6},\ \frac{3}{2},\ \frac{11}{6},\ \frac{13}{6},\cdots$이 아닌 값이

존재한다고 가정하면

$3(\sin^2\pi x+\sin\pi x)-3a=0$의 해가

$\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{13}{6}, \cdots$의 이웃하는 두 수 사이에 적어도 하나씩 존재해야 한다.

그러면 $0<x<2$에서 $3(\sin^2\pi x+\sin\pi x)-3a=0$의 해가 적어도 5개 존재하여야 하고, 이는 불가능하다.

그러므로 함수 $g(x)$가 $x=t$에서 극값을 갖도록 하는 음이 아닌 t의 값은 $\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{13}{6}, \cdots$뿐이다.

$x=\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{13}{6}, \cdots$일 때

$\sin^2\pi x+\sin\pi x$의 값은 $\frac{3}{4}$, 2, $\frac{3}{4}$, $-\frac{1}{4}$, 0, $-\frac{1}{4}$이 반복되어 나타난다.

그러므로 $g(x)$의 극값은

$f\left(\frac{3}{4}\right)$, $f(2)$, $f\left(\frac{3}{4}\right)$, $f\left(-\frac{1}{4}\right)$, $f(0)$, $f\left(-\frac{1}{4}\right)$

로 극댓값과 극솟값이 반복되어 나타난다.

한 극값 다음에 나오는 극값은 서로 같을 수 없으므로 극댓값과 극솟값이 같은 경우는 $f(2)=f(0)$인 경우뿐이다.

따라서 $f(0)=f(2)=0$

$f(0)=0$에서 $C=0$

$f(0)=f(2)$에서

$0=\frac{7}{2}-\frac{3}{2}a$

$\frac{3}{2}a=\frac{7}{2}$

$a=\frac{7}{3}$

따라서 $f(x)=x^3-\frac{37}{8}x^2+\frac{21}{4}x$이고

$f(4)=64-74+21=11$

29. 정답 ②

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 방정식이 $y=3x-1$이므로

$f(1)=2$, $f'(1)=3$

이때, $f(5x)=h(x)$라 하면

$h'(x)=5f'(5x)$이고

$g'(2)=\frac{1}{h'(g(2))}$

이때 $g(2)=k$라 하면

$h(k)=2$, 즉 $f(5k)=2$이므로

$k=\frac{1}{5}$

따라서

$$\begin{aligned}h'(g(2))&=h'\left(\frac{1}{5}\right)\\&=5f'(1)\\&=5\times3\\&=15\end{aligned}$$

이므로

$g'(2)=\frac{1}{15}$

30. 정답 ①

$f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2$에서

$f'(x)=\frac{\ln x}{x}$

이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{2}\right)$에서의 접선 l의 기울기는

$f'\left(\frac{1}{e}\right)=-e$

점 A의 x좌표를 k라 하면 점 A에서의 접선이 직선 l과 서로 수직이므로

$f'(k)=\frac{1}{e}$

즉, $\frac{\ln k}{k}=\frac{1}{e}$ $\cdots\cdots$ ㉠

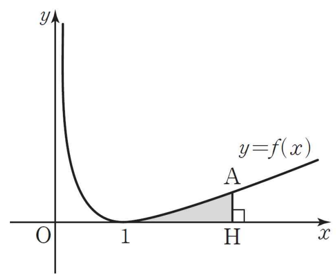
한편, $g(x)=\frac{\ln x}{x}$라 하면

$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

이므로 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 조사하면 함수 $g(x)$는 $x=e$에서 극대이면서 최대이다.

이때 $g(e)=\frac{1}{e}$이므로 ㉠을 만족시키는 실수 k의 값은 e뿐이다.

또, 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극솟값 0을 갖고 $0<x<1$일 때 감소, $x>1$일 때 증가하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



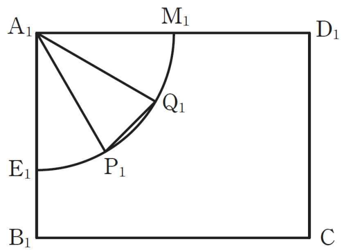
따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}\int_1^e f(x)dx&=\int_1^e \frac{1}{2}(\ln x)^2dx\\&=\left[\frac{1}{2}x(\ln x)^2\right]_1^e-\int_1^e \ln x dx\\&=\frac{e}{2}-\left[x\ln x-x\right]_1^e\end{aligned}$$

$= \frac{e}{2} - (e-e) + (0-1)$

$= \frac{e}{2} - 1$

31. 정답 125



삼각형 $A_1P_1Q_1$에서

$\overline{A_1P_1} = \overline{A_1Q_1} = 8$, $\angle P_1A_1Q_1 = \frac{\pi}{6}$

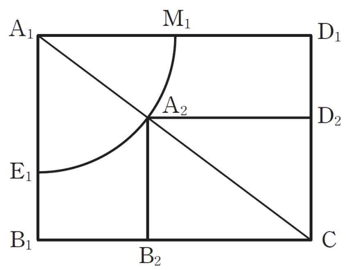
이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{P_1Q_1}^2 = 8^2 + 8^2 - 2\times8\times8\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 128 - 64\sqrt{3}$

그러므로 선분 P_1Q_1을 한 변으로 하는 정삼각형의 넓이는

$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}(128 - 64\sqrt{3}) = 32\sqrt{3} - 48$



한편, 세 점 A_1, A_2, C는 한 직선 위에 있고 $\overline{A_1C} = 20$,

$\overline{A_1A_2} = 8$이므로 $\overline{A_2C} = 12$

그러므로 직사각형 $A_1B_1CD_1$과 직사각형 $A_2B_2CD_2$의 닮음비는

$20 : 12 = 5 : 3$

이다.

즉, 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $32\sqrt{3} - 48$이고 공비가 $\frac{9}{25}$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{32\sqrt{3} - 48}{1 - \frac{9}{25}}$

$= \frac{25}{16}(32\sqrt{3} - 48)$

$= 50\sqrt{3} - 75$

따라서 $p = 50$, $q = -75$이므로

$p - q = 50 - (-75) = 125$

32. 정답 3

$f'(x) = \begin{cases} (k-x)e^{-x} & (x \geq 0) \\ (k-x)e^{x} & (x < 0) \end{cases}$이므로

$f(x) = \begin{cases} (x-k+1)e^{-x} + C_1 & (\text{단, } C_1\text{은 적분상수})(x \geq 0) \\ (k+1-x)e^{x} + C_2 & (\text{단, } C_2\text{는 적분상수})(x < 0) \end{cases}$

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$는 $x = 0$에서 연속이어야 하므로

$-k + 1 + C_1 = k + 1 + C_2$

즉, $C_1 - C_2 = 2k$

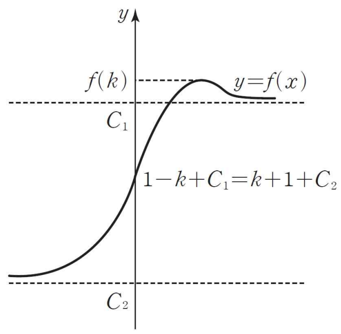
한편, $x \geq 0$일 때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 조사하면 $f(x)$는 $x = k$에서 극대이고

$\lim_{x\to\infty} f(x) = C_1$

이다. 또, $x < 0$일 때 $f'(x) > 0$이므로 함수 $f(x)$는 증가하고

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = C_2$

이다. 그러므로 함수 $y = f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때, 방정식 $f(x) = t$의 서로 다른 실근의 개수 $g(t)$는 곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = t$가 만나는 점의 개수와 같으므로

$g(t) = \begin{cases} 0 & (t > f(k),\ t \leq C_2) \\ 1 & (t = f(k),\ C_2 < t \leq C_1) \\ 2 & (C_1 < t < f(k)) \end{cases}$이므로

이다. 즉, 함수 $g(t)$는 $t = f(k)$, $t = C_1$, $t = C_2$에서만 불연속이고

$\lim_{t\to f(k)+} g(t) = 0$, $\lim_{t\to f(k)-} g(t) = 2$,

$\lim_{t\to C_1+} g(t) = 2$, $\lim_{t\to C_1-} g(t) = 1$,

$\lim_{t\to C_2+} g(t) = 1$, $\lim_{t\to C_2-} g(t) = 0$,

이므로 $\lim_{t\to a+} g(t) > \lim_{t\to a-} g(t)$를 만족시키는 실수 a의 값은 C_1, C_2이다.

이때 $C_1 - C_2 = 2k > 0$이므로 주어진 조건에 의하여

$C_1 = 7$, $C_2 = -1$이고

$k = \frac{7 - (-1)}{2} = 4$

그러므로

$f(x) = \begin{cases} (x-3)e^{-x} + 7 & (x \geq 0) \\ (5-x)e^{x} - 1 & (x < 0) \end{cases}$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은

$f(4) = e^{-4} + 7$

이므로

$p+q=(-4)+7=3$

33. 정답 ①

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n-1}b+ab^{n-1}}{a^{n-1}b^{-1}+a^{-1}b^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^nb^2+a^2b^n}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^nb^2+a^2}{\left(\frac{a}{b}\right)^n+1}=a^2$$

a^2이 10이하의 자연수이므로

$a=2$ 또는 $a=3$

조건 (나)에서 수열 $\left\{\left(\frac{b-3}{a^2+2}\right)^n\right\}$이 수렴하므로

$-1<\frac{b-3}{a^2+2}\le 1$

$-a^2+1<b\le a^2+5$

(i) $a=2$인 경우

$-3<b\le 9$

$b>2$이므로 자연수 b의 값은 $3,\ 4,\ \cdots,\ 9$

(ii) $a=3$인 경우

$-8<b\le 14$

$b>3$이므로 자연수 b의 값은 $4,\ 5,\ \cdots,\ 14$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\frac{a}{b}}$의 값은 $\frac{a}{b}$의 값이 최소일 때, 최솟값을 가지고 $\frac{a}{b}$의 값이 최대일 때, 최댓값을 갖는다.

$\frac{a}{b}=\frac{3}{14}$일 때,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\frac{3}{14}}=\frac{14}{11}$$

$\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$일 때,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=4$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}$의 최솟값과 최댓값의 합은

$\frac{14}{11}+4=\frac{58}{11}$

34. 정답 ①

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)$이다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}f(x)&=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2+ax}-1}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2+ax}-1}{x^2+ax}\times\frac{x^2+ax}{x}\right)\\&=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2+ax}-1}{x^2+ax}\times\lim_{x\to 0}(x+a)\\&=a\end{aligned}$$

$f(0)=2$

이므로 $a=2$이다.

$x>0$에서 $f(x)=\frac{e^{x^2+ax}-1}{x}$이므로

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{\{(2x+2)e^{x^2+2x}\}x-(e^{x^2+2x}-1)\times 1}{x^2}\\&=\frac{(2x^2+2x-1)e^{x^2+ax}+1}{x^2}\end{aligned}$$

이다. $h(x)=(2x^2+2x-1)e^{x^2+2x}+1$이라 하면

$$\begin{aligned}h'(x)&=(4x+2)e^{x^2+2x}+(2x^2+2x-1)(2x+2)e^{x^2+2x}\\&=(4x^3+8x^2+6x)e^{x^2+2x}\end{aligned}$$

$x>0$에서 $h'(x)>0$이고 $h(0)=0$이므로 $x>0$에서 $h(x)>0$이다.

그러므로 $f'(x)=\frac{(2x^2+2x-1)e^{x^2+2x}+1}{x^2}>0$이다.

$0<x<t$일 때 $f(x)<f(t)$, 즉

$\frac{e^{x^2+2x}-1}{x}<f(t)$

$t<x<1$일 때 $f(x)>f(t)$, 즉

$\frac{e^{x^2+2x}-1}{x}>f(t)$

$g(t)=\int_0^1\left|xf(t)-e^{x^2+2x}+1\right|dx$라 하면

$$\begin{aligned}g(t)&=\int_0^t\{xf(t)-e^{x^2+2x}+1\}dx+\int_t^1\{e^{x^2+2x}-1-xf(t)\}dx\\&=f(t)\times\int_0^t xdx-\int_0^t e^{x^2+2x}dx+\int_0^t 1dx\\&\quad+\int_t^1 e^{x^2+2x}dx-\int_t^1 1dx-f(t)\int_t^1 xdx\\&=f(t)\times\frac{1}{2}t^2-\int_0^t e^{x^2+2x}dx+t-\int_1^t e^{x^2+2x}dx\\&\quad-(1-t)-f(t)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t^2\right)\\&=f(t)\times t^2-\frac{1}{2}f(t)+2t-1-\int_0^t e^{x^2+2x}dx-\int_1^t e^{x^2+2x}dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g'(t)&=f'(t)\times t^2+f(t)\times 2t-\frac{1}{2}f'(t)+2-e^{t^2+2t}-e^{t^2+2t}\\&=f'(t)\times t^2+\frac{e^{t^2+2t}-1}{t}\times 2t-\frac{1}{2}f'(t)+2-2e^{t^2+2t}\\&=f'(t)\times t^2-\frac{1}{2}f'(t)\end{aligned}$$

$$=\left(t^2-\frac{1}{2}\right)f'(t)$$

그러므로 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 극소이며 최소이다.

따라서 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$

35. 정답 6

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 -4를 가지므로

$f(1)=-4$, $f'(1)=0$

이다.

$f(1)=-4$에서

$$f(1)=\frac{3\times0+a\times0+b}{1}=b,\ b=-4$$

$f(x)=\frac{3(\ln x)^2+a\ln x+b}{x}$에서

$$f'(x)=\frac{\left\{6(\ln x)\frac{1}{x}+\frac{a}{x}\right\}x-\{3(\ln x)^2+a\ln x+b\}\times1}{x^2}$$

$$=\frac{-3(\ln x)^2+(6-a)\ln x+a-b}{x^2}$$

에서

$f'(1)=a-b=0$, $a=-4$

즉, $f(x)=\frac{3(\ln x)^2-4\ln x-4}{x}$이다.

$$f'(x)=\frac{3(\ln x)^2+10\ln x}{x^2}$$

$$=\frac{-3\ln x\left(\ln x-\frac{10}{3}\right)}{x^2}$$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 아래와 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	$e^{\frac{10}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)=\frac{3(\ln x)^2-4\ln x-4}{x}$의 그래프는 구간 $(0,\ 1)$에서 감소하고 구간 $\left[1,\ e^{\frac{10}{3}}\right]$에서 증가하므로 구간 $\left[k,\ e^{\frac{10}{3}}\right]$에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하도록 하는 실수 k의 최솟값 $m=1$이다.

$$f(x)=\frac{3(\ln x)^2-4\ln x-4}{x}$$

$$=\frac{(3\ln x+2)(\ln x-2)}{x}=0$$

구간 $\left[1,\ e^{\frac{10}{3}}\right]$에서 $f(e^2)=0$이므로 $g(0)=e^2$이다.

$$f'(e^2)=\frac{-3\times2\left(2-\frac{10}{3}\right)}{e^4}=\frac{8}{e^4}$$

이므로

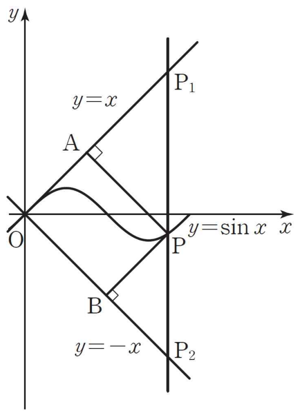
$$g'(m-1)=g'(0)=\frac{1}{f'(e^2)}=\frac{e^4}{8}$$

따라서

$$\frac{48\times g'(m-1)}{e^4}=\frac{48}{e^4}\times\frac{e^4}{8}=6$$

36. 정답 34

직선 $x=t$와 두 직선 $y=x$, $y=-x$가 만나는 점을 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{P_2}$라 하자.



삼각형 $\mathrm{P_1AP}$는 빗변의 길이가 $\{t-f(t)\}$이고 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AP_1}}$인 직각삼각형이다. 삼각형 $\mathrm{PBP_2}$는 빗변의 길이가 $\{f(t)-f(-t)\}$이고 $\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{BP_2}}$인 직각삼각형이다.

함수 $g(t)$는 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=x$, $x=t$로 둘러싸인 부분의 넓이에서 삼각형 $\mathrm{P_1AP}$의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$g(t)=\int_0^t\{x-f(x)\}dx-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\{t-f(t)\}\right]^2$$

함수 $h(t)$는 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=x$, $x=t$로 둘러싸인 부분의 넓이에서 삼각형 $\mathrm{PBP_2}$의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$h(t)=\int_0^t\{f(x)-(-x)\}dx-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\{f(t)-(-t)\}\right]^2$$

이다. 그러므로

$$h(t)-g(t)=\int_0^t 2f(x)dx+\frac{1}{4}\left[\{t-f(t)\}^2-\{t+f(t)\}^2\right]$$

$$=\int_0^t 2f(x)dx-tf(t)$$

이다.

$$h'(t)-g'(t)=2f(t)-f(t)-tf'(t)$$

$$=f(t)-tf'(t)$$

$$=\sin t-t\cos t$$

이므로

$$h'\left(\frac{5}{3}\pi\right)-g'\left(\frac{5}{3}\pi\right)=\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right)-\frac{5}{3}\pi\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{3}\pi\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{-3\sqrt{3}-5\pi}{6}$$

따라서 $a=-3,\ b=-5$이므로

$a^2+b^2=9+25=34$

37. 정답 ④

함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+3h}f(t)\,dt$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\Big[F(t)\Big]_x^{x+3h}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+3h)-F(x)}{3h}\times 3$$
$$=3F'(x)$$
$$=3f(x)$$

$$g(n)=\int_{2n-1}^{2n+1}f(x)\,dx$$
$$=\int_{2n-1}^{2n+1}\frac{f'(x)}{3}\,dx$$
$$=\left[\frac{f(x)}{3}\right]_{2n-1}^{2n+1}$$
$$=\frac{f(2n+1)-f(2n-1)}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{5}g(n)=\sum_{n=1}^{5}\frac{f(2n+1)-f(2n-1)}{3}$$
$$=\frac{f(3)-f(1)}{3}+\frac{f(5)-f(3)}{3}+\cdots+\frac{f(11)-f(9)}{3}$$
$$=\frac{f(11)-f(1)}{3}$$
$$=\frac{e^{30}-1}{3}$$

38. 정답 ①

$f(x)=x+\sin\frac{x}{2}$에서

$f'(x)=1+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$

$b_n=(2n+1)\pi-a_n$이므로

$$f'(a_{2n-1})=1+\frac{1}{2}\cos\frac{(4n-1)\pi-b_{2n-1}}{2}$$
$$=1-\frac{1}{2}\sin\frac{b_{2n-1}}{2}$$
$$f'(a_{2n})=1+\frac{1}{2}\cos\frac{(4n+1)\pi-b_{2n}}{2}$$
$$=1+\frac{1}{2}\sin\frac{b_{2n}}{2}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4}\sin\frac{x}{2}$$

자연수 n에 대하여 곡선 $y=f(x)$는 열린구간 $(4n\pi-2\pi,\ 4n\pi)$에서 아래로 볼록이고, 열린구간 $(4n\pi,\ 4n\pi+2\pi)$에서 위로 볼록이므로

$(4n-2)\pi<a_{2n-1}<(4n-1)\pi,\ 4n\pi<a_{2n}<(4n+1)\pi$

점 $\left(a_n,\ a_n+\sin\frac{a_n}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$$y=\left(1+\frac{1}{2}\cos\frac{a_n}{2}\right)(x-a_n)+a_n+\sin\frac{a_n}{2}$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0=\left(1+\frac{1}{2}\cos\frac{a_n}{2}\right)(0-a_n)+a_n+\sin\frac{a_n}{2}$$
$$0=-\frac{a_n}{2}\left(\cos\frac{a_n}{2}\right)+\sin\frac{a_n}{2}$$

이때 $\sin^2\frac{a_n}{2}+\cos^2\frac{a_n}{2}=1$이므로

$$\cos^2\frac{a_n}{2}\times\frac{{a_n}^2+4}{4}=1$$
$$\cos\frac{a_n}{2}=\pm\frac{2}{\sqrt{4+{a_n}^2}}$$

즉 $f'(a_n)=1\pm\frac{1}{\sqrt{4+{a_n}^2}}$에서

$n\to\infty$일 때, $a_n\to\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}f'(a_n)=1$$

$$f'(a_{2n-1})=1-\frac{1}{2}\sin\frac{b_{2n-1}}{2}$$
$$f'(a_{2n})=1+\frac{1}{2}\sin\frac{b_{2n}}{2}$$

이고 $\lim_{n\to\infty}f'(a_n)=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{b_n}{2}=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $(4n-2)\pi<a_{2n-1}<(4n-1)\pi,\ 4n\pi<a_{2n}<(4n+1)\pi$이므로

$$0<\frac{b_n}{2}<\frac{\pi}{2} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\lim_{n\to\infty}b_n=0$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{f'(a_{2n-1})-1}{b_{2n-1}}-\frac{f'(a_{2n})-1}{b_{2n}}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-\frac{1}{2}\sin\frac{b_{2n-1}}{2}}{b_{2n-1}}-\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{b_{2n}}{2}}{b_{2n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{4}\times\frac{\sin\frac{b_{2n-1}}{2}}{\frac{b_{2n-1}}{2}}-\frac{1}{4}\times\frac{\sin\frac{b_{2n}}{2}}{\frac{b_{2n}}{2}}\right)$$

$$=-\frac{1}{4}\times1-\frac{1}{4}\times1$$

$$=-\frac{1}{2}$$

39. 정답 62

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$$a_n=a+(n-1)d$$

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{S_k}-\frac{1}{S_{k+1}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)+\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{S_1}$$

$$=\frac{1}{a_1}$$

$$=\frac{1}{a}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{6S_n}-a_n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{3n(2a-d+nd)}-(a-d+nd)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n(2a-d+nd)-(a-d+nd)^2}{\sqrt{3n(2a-d+nd)}+(a-d+nd)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(3d-d^2)n^2+\{(6a-3d)-2d(a-d)\}n-(a-d)^2}{\sqrt{3n(2a-d+nd)}+(a-d+nd)}$$

이 극한이 수렴하려면

$3d-d^2=0$, $d(d-3)=0$

$d=0$ 또는 $d=3$

이때 $d=0$이면

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{6S_n}-a_n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{6an}-a\right)$$

가 발산하므로 $d\neq0$

즉, $d=3$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3d-d^2)n^2+\{(6a-3d)-2d(a-d)\}n-(a-d)^2}{\sqrt{3n(2a-d+nd)}+(a-d+nd)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9n-(a-3)^2}{\sqrt{3n(2a-3+3n)}+(a-3+3n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9-\frac{(a-3)^2}{n}}{\sqrt{3\left(\frac{2a-3}{n}+3\right)}+\left(\frac{a-3}{n}+3\right)}$$

$$=\frac{9}{\sqrt{9}+3}$$

$$=\frac{3}{2}$$

즉, $k=\frac{3}{2}$이므로 $a=\frac{2}{3}$

$a_n=\frac{2}{3}+3(n-1)$에서

$a_2=\frac{2}{3}+3=\frac{11}{3}$

따라서

$$12(k+a_2)=12\left(\frac{3}{2}+\frac{11}{3}\right)=62$$

40. 정답 129

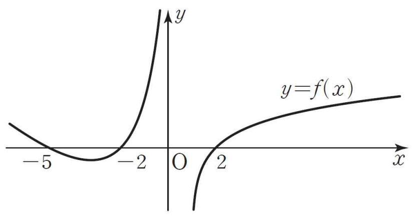
$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+7x+10}{1-x} & (x<1)\\ \ln(x-1) & (x>1)\end{cases}$$에서

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{-x^2+2x+17}{(1-x)^2} & (x<1)\\ \frac{1}{x-1} & (x>1)\end{cases}$$

$f'(x)=0$일 때, $x=1-3\sqrt{2}$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$1-3\sqrt{2}$	$\cdots$	(1)	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$x<1-3\sqrt{2}$에서의 함수 $f(x)$를 $g(x)=\frac{x^2+7x+10}{1-x}$이라 하고,

$x>1$에서의 함수 $f(x)$를 $h(x)=\ln(x-1)$이라 하자.

점 P의 x좌표는 $g^{-1}(t)$, 점 Q의 x좌표는 $h^{-1}(t)$이므로 원점을 지나고 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선과 평행한 직선의 방정식은

$$y=g'\left(g^{-1}(t)\right)x$$

이므로 점 R의 좌표는

$$\mathrm{R}\left(\frac{t}{g'\left(g^{-1}(t)\right)},\ t\right)$$

원점을 지나고 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 Q에서의 접선과 평행한 직선의 방정식은

$y=h'(h^{-1}(t))x$

이므로 점 S의 좌표는

$\mathrm{S}\left(\dfrac{t}{h'(h^{-1}(t))},\ t\right)$

이때 $x<1-3\sqrt{2}$에서 $g'(x)<0$이고, $x>1$에서 $h'(x)>0$이므로

$$l(t)=\frac{t}{h'(h^{-1}(t))}-\frac{t}{g'(g^{-1}(t))}$$

$$\begin{aligned}\int_0^2 l(t)\,dt&=\int_0^2\left\{\frac{t}{h'(h^{-1}(t))}-\frac{t}{g'(g^{-1}(t))}\right\}dt\\&=\int_0^2\frac{t}{h'(h^{-1}(t))}\,dt-\int_0^2\frac{t}{g'(g^{-1}(t))}\,dt\end{aligned}$$

(i) $\displaystyle\int_0^2\frac{t}{h'(h^{-1}(t))}\,dt$에서

$t=h(h^{-1}(t))$이고, $h'(h^{-1}(t))(h^{-1})'(t)=1$이므로

$$\int_0^2\frac{t}{h'(h^{-1}(t))}\,dt=\int_0^2 h(h^{-1}(t))(h^{-1})'(t)\,dt$$

이고, $h^{-1}(t)=x$라 하면

$(h^{-1})'(t)=\dfrac{dx}{dt}$, $h^{-1}(0)=2$, $h^{-1}(2)=e^2+1$

$$\begin{aligned}\int_0^2 h(h^{-1}(t))(h^{-1})'(t)\,dt&=\int_2^{e^2+1}h(x)\,dx\\&=\int_2^{e^2+1}\ln(x-1)\,dx\\&=\int_1^{e^2}\ln x\,dx\\&=\Big[x\ln x-x\Big]_1^{e^2}\\&=(2e^2-e^2)-(0-1)\\&=e^2+1\end{aligned}$$

(ii) $\displaystyle\int_0^2\frac{t}{g'(g^{-1}(t))}\,dt$에서

$t=g(g^{-1}(t))$이고, $g'(g^{-1}(t))(g^{-1})'(t)=1$이므로

$$\int_0^2\frac{t}{g'(g^{-1}(t))}\,dt=\int_0^2 g(g^{-1}(t))(g^{-1})'(t)\,dt$$

$g^{-1}(t)=x$라 하면

$(g^{-1})'(t)=\dfrac{dx}{dt}$, $g^{-1}(0)=-5$, $g^{-1}(2)=-8$이므로

$$\begin{aligned}&\int_0^2 g(g^{-1}(t))(g^{-1})'(t)\,dt\\&=\int_{-5}^{-8}g(x)\,dx\\&=\int_{-5}^{-8}\frac{x^2+7x+10}{1-x}\,dx\\&=\int_{-8}^{-5}\left(x+8+\frac{18}{x-1}\right)dx\\&=\left[\frac{1}{2}x^2+8x+18\ln|x-1|\right]_{-8}^{-5}\\&=\left(\frac{25}{2}-40+18\ln 6\right)-(32-64+18\ln 9)\\&=\frac{9}{2}+18\ln\frac{2}{3}\end{aligned}$$

(i), (ii)에 의하여

$$\begin{aligned}\int_0^2 l(t)\,dt&=\int_0^2\frac{t}{h'(h^{-1}(t))}\,dt-\int_0^2\frac{t}{g'(g^{-1}(t))}\,dt\\&=e^2+1-\left(\frac{9}{2}+18\ln\frac{2}{3}\right)\\&=e^2-\frac{7}{2}-18\ln\frac{2}{3}\end{aligned}$$

따라서 $p=-\dfrac{7}{2}$, $q=-18$이므로

$$\begin{aligned}6|p+q|&=6\left|-\frac{7}{2}+(-18)\right|\\&=129\end{aligned}$$

41. 정답 ④

$f'(x)=t-\dfrac{e^x}{1+e^x}=0$에서

$t=\dfrac{e^x}{1+e^x}$, $e^x=\dfrac{t}{1-t}$

따라서 $x=\ln\dfrac{t}{1-t}$

$f'(x)=t-1+\dfrac{1}{1+e^x}$에서

$x<\ln\dfrac{t}{1-t}$일 때, $f'(x)>0$

$x>\ln\dfrac{t}{1-t}$일 때, $f'(x)<0$이므로

$f(x)$는 $x=\ln\dfrac{t}{1-t}$에서 극대이고 최대이다.

$$\begin{aligned}g(t)&=f\left(\ln\frac{t}{1-t}\right)=t\ln\frac{t}{1-t}-\ln\left(1+e^{\ln\frac{t}{1-t}}\right)\\&=t\ln t-t\ln(1-t)-\ln\left(\frac{1}{1-t}\right)\\&=t\ln t+(1-t)\ln(1-t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g'(t)&=\ln t+1+(-1)\ln(1-t)+(1-t)\frac{-1}{1-t}\\&=\ln t-\ln(1-t)\\&=\ln\frac{t}{1-t}\\&=0\end{aligned}$$

에서

$\dfrac{t}{1-t}=1$ 즉, $t=\dfrac{1}{2}$이고

$0 < t < \frac{1}{2}$일 때

$\frac{t}{1-t} < 1$에서 $g'(t) < 0$이고

$\frac{1}{2} < t < 1$일 때,

$\frac{t}{1-t} > 1$에서 $g'(t) > 0$이므로

$g(t)$는 $t = \frac{1}{2}$에서 극소이고 최소이다.

따라서

$a = \frac{1}{2}$

42. 정답 ②

$f(x) = \ln(x+1) + x^2$에서

$f'(x) = \frac{1}{x+1} + 2x$

이고

$f''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} + 2$

$x > 0$에서 $f''(x) > 0$이므로

곡선 $y = f(x)$는 $x > 0$에서 아래로 볼록하다.

점 $(1,\ f(1))$에서의 접선은 곡선 $y = f(x)$ $(x > 0)$의 아래쪽에 존재하고, 접선과 곡선 $y = f(x)$의 교점은 $(1,\ f(1))$뿐이다.

$f(1) = \ln 2 + 1$, $f'(1) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$이므로

점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 방정식은

$y = \frac{5}{2}(x-1) + \ln 2 + 1$

즉, $y = \frac{5}{2}x + \ln 2 - \frac{3}{2}$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$S = \int_0^1 \left\{\ln(x+1) + x^2 - \left(\frac{5}{2}x + \ln 2 - \frac{3}{2}\right)\right\}dx$

이고

$\int \ln(x+1)dx$

$= x\ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1}dx$

$= x\ln(x+1) - \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx$

$= x\ln(x+1) - x + \ln(x+1) + C$ (단, C는 적분상수)

$= (x+1)\ln(x+1) - x + C$

이므로

$S = \left[(x+1)\ln(x+1) - x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{4}x^2 - x\ln 2 + \frac{3}{2}x\right]_0^1$

$= 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{5}{4} - \ln 2 + \frac{3}{2}$

$= \ln 2 - \frac{5}{12}$

43. 정답 5

$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + a_n) = \frac{9}{2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| - a_n) = \frac{3}{2}$에서

$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + a_n) + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| - a_n)$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\{(|a_n| + a_n) + (|a_n| - a_n)\}$

$= 2\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$

$= 6$

이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = 3$

$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + a_n) - \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| - a_n)$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\{(|a_n| + a_n) - (|a_n| - a_n)\}$

$= 2\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

$= 3$

이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n = \frac{3}{2}$

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로

$-1 < r < 1$

이때 $r \geq 0$이면

$a < 0$일 때 모든 자연수 n에 대하여 $|a_n| + a_n = 0$이고, $a > 0$일 때 모든 자연수 n에 대하여 $|a_n| - a_n = 0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $-1 < r < 0$

(ⅰ) $a < 0$일 때

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}(|a| \times |r|^{n-1})$

$= \sum_{n=1}^{\infty}(-a)(-r)^{n-1}$

$= 3$

이므로

$\frac{-a}{1-(-r)} = 3$, 즉

$\frac{a}{1+r} = -3$ …… ㉠

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{3}{2}$이므로

$\dfrac{a}{1-r} = \dfrac{3}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=6,\ r=-3$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a>0$일 때

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 3$이므로

$\dfrac{a}{1-(-r)} = 3$, 즉

$\dfrac{a}{1+r} = 3$ …… ㉢

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{3}{2}$이므로

$\dfrac{a}{1-r} = \dfrac{3}{2}$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$a=2,\ r=-\dfrac{1}{3}$

(ⅰ), (ii)에 의하여

$a_n = 2\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

한편, 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5|a_n|+b_n}{a_n}$이 수렴하므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{5|a_n|+b_n}{a_n} = 0$이어야 한다.

등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 s라 하면

$\dfrac{|a_n|}{a_n} = (-1)^{n-1}$,

$\dfrac{b_n}{a_n} = \dfrac{b_1\times s^{n-1}}{2\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}} = \dfrac{b_1}{2}\times(-3s)^{n-1}$

이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{5|a_n|+b_n}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5|a_n|}{a_n}+\frac{b_n}{a_n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{5\times(-1)^{n-1}+\frac{b_1}{2}\times(-3s)^{n-1}\right\}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[(-1)^{n-1}\left\{5+\frac{b_1}{2}\times(3s)^{n-1}\right\}\right]\end{aligned}$$

(ⅲ) $-1<3s<1$인 경우

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3s)^{n-1}=0$이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5|a_n|+b_n}{a_n}$은 발산한다.

(ⅳ) $3s<-1$ 또는 $3s>1$인 경우

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3s)^{n-1}$은 발산하므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5|a_n|+b_n}{a_n}$은 발산한다.

(ⅴ) $3s=-1$인 경우

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{5|a_n|+b_n}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\left[(-1)^{n-1}\left\{5+\frac{b_1}{2}\times(-1)^{n-1}\right\}\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{(-1)^{n-1}\times5+\frac{b_1}{2}\right\}\end{aligned}$$

은 발산한다.

(ⅵ) $3s=1$인 경우

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5|a_n|+b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left\{(-1)^{n-1}\left(5+\frac{b_1}{2}\right)\right\}$이고

$b_1=-10$일 때

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5|a_n|+b_n}{a_n}=0$

이고, $b_1\neq-10$일 때 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5|a_n|+b_n}{a_n}$은 발산한다.

(ⅲ)~(ⅵ)에 의하여 $b_1=-10,\ s=\dfrac{1}{3}$이므로

$b_n = -10\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

따라서

$$\begin{aligned}b_1-\sum_{n=1}^{\infty}b_n &= -10-\frac{-10}{1-\frac{1}{3}}\\ &= -10+15\\ &= 5\end{aligned}$$

44. 정답 9

조건 (가)에서

$f'(-1)=0,\ f'(1)=0$

$f(x)=(ax^2+bx+c)e^x$에서

$$\begin{aligned}f'(x) &= (2ax+b)e^x+(ax^2+bx+c)e^x\\ &= \{ax^2+(2a+b)x+b+c\}e^x\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서

$ax^2+(2a+b)x+b+c=0$

이 이차방정식의 두 근이 $-1,\ 1$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\dfrac{2a+b}{a}=0,\ \dfrac{b+c}{a}=-1$

따라서

$b=-2a,\ a=c$

조건 (나)에서 $f(2)=e$이므로

$$\begin{aligned}f(x) &= (ax^2+bx+c)e^x\\ &= (ax^2-2ax+a)e^x\end{aligned}$$

$f(2)=(4a-4a+a)e^2=ae^2=e$

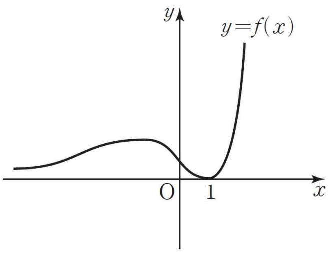
이므로

$a=\dfrac{1}{e}$

따라서

$f(x)=\dfrac{1}{e}(x-1)^2e^x=(x-1)^2e^{x-1}$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같으므로 $g(x)=f(x)\ (x \ge 1)$는 역함수를 갖는다.



이때 $g(k)=4e^2$이라 하면

$(k-1)^2e^{k-1}=4e^2$에서

$k=3$

또 $g(s)=e$라 하면

$(s-1)^2e^{s-1}=e$에서 $s=2$

따라서

$h(4e^2)=3,\ h(e)=2$

따라서 $h(x)=t$로 놓으면

함수 $h(x)$는 함수 $g(x)$의 역함수이므로 $x \ge 1$인 모든 실수 x에 대하여

$g(h(x))=x$ …… ㉠

가 성립한다.

이때 ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(h(x))h'(x)=1$이고, $h(x)=t$이므로

$g'(t)h'(x)=1$

이때 $t>1$에서 $g'(t) \ne 0$이므로

$\dfrac{dt}{dx}=h'(x)=\dfrac{1}{g'(t)}$이므로

$$\int_e^{4e^2} h(x)dx=\int_2^3 tg'(t)dt$$
$$=\int_2^3 t(t^2-1)e^{t-1}dt$$
$$=\int_2^3 (t^3-t)e^{t-1}dt$$
$$=\left[(t^3-t)e^{t-1}\right]_2^3-\int_2^3 (3t^2-1)e^{t-1}dt$$
$$=24e^2-6e-\left[(3t^2-1)e^{t-1}\right]_2^3+\int_2^3 6te^{t-1}dt$$
$$=24e^2-6e-26e^2+11e+\left[6te^{t-1}\right]_2^3-6\int_2^3 e^{t-1}dt$$
$$=-2e^2+5e+18e^2-12e-6\left[e^{t-1}\right]_2^3$$
$$=16e^2-7e-6e^2+6e$$
$$=10e^2-e$$

따라서 $p=10,\ q=-1$이므로

$p+q=10+(-1)=9$

45. 정답 ⑤

$$\left\{f\left(\frac{x+1}{x}\right)\right\}'=\left\{f\left(1+\frac{1}{x}\right)\right\}'$$
$$=-\frac{1}{x^2}f'\left(1+\frac{1}{x}\right)$$
$$=-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

이므로

$$\int_1^2 \left\{\frac{1}{x}f'\left(\frac{x+1}{x}\right)\right\}dx=\int_1^2 (-x)\times\left\{-\frac{1}{x^2}\times f'\left(\frac{x+1}{x}\right)\right\}dx$$
$$=\left[-x\times f\left(\frac{x+1}{x}\right)\right]_1^2-\int_1^2\left\{-f\left(\frac{x+1}{x}\right)\right\}dx$$
$$=-2\times f\left(\frac{3}{2}\right)-\{-f(2)\}+\int_1^2 f\left(\frac{x+1}{x}\right)dx$$

따라서 $6=-2\times f\left(\dfrac{3}{2}\right)+7+4$이므로

$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{5}{2}$

46. 정답 ③

$a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{3}a_n(a_n+3)-a_n=\dfrac{1}{3}{a_n}^2 \ge 0$

이므로 $a_{n+1} \ge a_n$

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3}{a_n(a_n+3)}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_n+3}$$

이므로

$$\frac{1}{a_n+3}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n+3}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)+\ \cdots\ +\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{3}a_n(a_n+3)-a_n=\dfrac{1}{3}{a_n}^2 \ge 0$

이므로 $a_{n+1} \ge a_n$

따라서 $a_{n+1}+3 \ge a_n+3 \ge\ \cdots\ \ge a_1+3=5$이다.

$a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n(a_n+3)$에서 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$을 대입하면

$a_2=\dfrac{1}{3}a_1(a_1+3)$

$a_3=\dfrac{1}{3}a_2(a_2+3)$

⋮

$a_n=\frac{1}{3}a_{n-1}(a_{n-1}+3)$

위 식을 모두 곱하면

$a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\times a_1(a_1+3)(a_2+3)\cdots(a_{n-1}+3)$

$\ge\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\times a_1(a_1+3)(a_1+3)\cdots(a_1+3)$

$=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\times a_1(a_1+3)^{n-1}$

$=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\times 2\times 5^{n-1}$

$=2\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$

이때 $a_n\ge 2\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$이고 $\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}=\infty$이므로

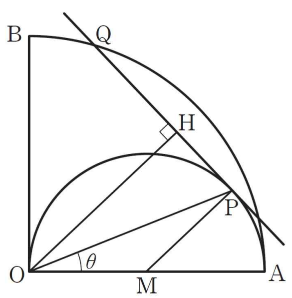
$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$

따라서

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n+3}=\frac{1}{a_1}=\frac{1}{2}$

47. 정답 16

선분 OA의 중점을 M이라 하고, 점 O에서 직선 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\angle\mathrm{POA}=\theta$이므로

$\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OA}}\cos\theta=\cos\theta$

$\angle\mathrm{POH}=\angle\mathrm{MPO}=\angle\mathrm{POA}=\theta$이므로

$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{OP}}\times\sin\theta$

$=\cos\theta\times\sin\theta$

$=\sin\theta\cos\theta$

$\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{OP}}\times\cos\theta$

$=\cos\theta\times\cos\theta$

$=\cos^2\theta$

직각삼각형 OHQ에서

$\overline{\mathrm{QH}}=\sqrt{1-\cos^4\theta}$

$=\sqrt{(1-\cos^2\theta)(1+\cos^2\theta)}$

$=\sin\theta\sqrt{1+\cos^2\theta}$

$f(\theta)=\overline{\mathrm{OP}}\times\overline{\mathrm{PQ}}$

$=\cos\theta\times\left(\sin\theta\cos\theta+\sin\theta\sqrt{1+\cos^2\theta}\right)$

$=\sin\theta\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta\sqrt{1+\cos^2\theta}$

$\int_0^a f(\theta)d\theta=\int_0^a\left(\sin\theta\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta\sqrt{1+\cos^2\theta}\right)d\theta$

$\cos\theta=t$라 하면

$\theta=0$일 때 $t=1$, $\theta=a$일 때 $t=\frac{2\sqrt{2}}{3}$이고

$\frac{dt}{d\theta}=-\sin\theta$이므로

$\int_0^a f(\theta)d\theta=-\int_1^{\frac{2\sqrt{2}}{3}}\left(t^2+t\sqrt{1+t^2}\right)dt$

$\int_1^{\frac{2\sqrt{2}}{3}}t^2dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$

$=\frac{1}{3}\times\left\{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^3-1^3\right\}$

$=\frac{16\sqrt{2}}{81}-\frac{1}{3}$

$\int_1^{\frac{2\sqrt{2}}{3}}t\sqrt{1+t^2}\,dt$에서 $1+t^2=s$라 하면

$t=1$일 때 $s=2$, $t=\frac{2\sqrt{2}}{3}$일 때 $s=\frac{17}{9}$이고

$\frac{ds}{dt}=2t$이므로

$\int_1^{\frac{2\sqrt{2}}{3}}t\sqrt{1+t^2}\,dt=\frac{1}{2}\int_2^{\frac{17}{9}}\sqrt{s}\,ds$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}\right]_2^{\frac{17}{9}}$

$=\frac{1}{3}\times\left\{\left(\frac{17}{9}\right)^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}\right\}$

$=\frac{17\sqrt{17}}{81}-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\int_0^a f(\theta)d\theta=-\left(\frac{16\sqrt{2}}{81}-\frac{1}{3}+\frac{17\sqrt{17}}{81}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

$=\frac{1}{3}+\frac{38\sqrt{2}}{81}-\frac{17\sqrt{17}}{81}$

따라서 $p=\frac{1}{3}$, $q=\frac{38}{81}$, $r=-\frac{17}{81}$이므로

$27(p+q+r)=27\left(\frac{1}{3}+\frac{38}{81}-\frac{17}{81}\right)=16$

48. 정답 7

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x\le 1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다. …… ㉠

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-} g(x) = \lim_{x\to1-} \frac{x}{f(x)} = \frac{1}{f(1)}$

$\lim_{x\to1+} g(x) = \lim_{x\to1+} \frac{f(x)}{x} = f(1)$

$g(1) = \frac{1}{f(1)}$에서

$\frac{1}{f(1)} = f(1)$

$\{f(1)\}^2 = 1$

㉠에서 $f(1) = 1$이므로

$f(x) = x^2 - ax + a$ (a는 상수)

라 놓을 수 있다.

$\frac{a}{2} \geq 1$이면 ㉠에서 $f(1) = 1 > 0$이므로

$a \geq 2$ …… ㉡

$\frac{a}{2} < 1$이면

㉠에서

$f\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4} + a > 0$

$\frac{a}{4}(a-4) < 0$, $0 < a < 4$이므로

$0 < a < 2$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $a > 0$

$x \leq 1$일 때

$g(x) = \frac{x}{x^2 - ax + a}$에서

$g'(x) = \frac{-x^2 + a}{(x^2 - ax + a)^2}$

$g'(x) = 0$에서

$x = -\sqrt{a}$ 또는 $x = \sqrt{a}$

함수 $g(x)$는 $x = -\sqrt{a}$에서 극솟값 $g(-\sqrt{a})$를 갖는다.

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{f(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2 - ax + a} = 0$

이므로 곡선 $y = g(x)$는 x축을 점근선으로 갖는다.

$x > 1$일 때

$g(x) = x - a + \frac{a}{x}$에서 $g'(x) = 1 - \frac{a}{x^2}$

$g'(x) = 0$에서 $x = -\sqrt{a}$ 또는 $x = \sqrt{a}$

(i) $0 < a \leq 1$일 때

함수 $g(x)$는 구간 $(1, \infty)$에서 증가하므로

$g(-\sqrt{a}) < k < 0$

인 모든 실수 k에 대하여 방정식 $g(x) = k$의 서로 다른 실근의 개수는 2이고 두 실근은 모두 음수이다.

즉, 두 실근의 곱이 양수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a > 1$일 때

함수 $g(x)$는 $x = \sqrt{a}$에서 극솟값 $g(\sqrt{a})$를 가지므로

$g(\sqrt{a}) \geq 0$이면 $g(-\sqrt{a}) < k < 0$인 모든 실수 k에 대하여 방정식 $g(x) = k$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

$g(\sqrt{a}) \geq 0$에서

$g(\sqrt{a}) = \frac{a - a\sqrt{a} + a}{\sqrt{a}} = 2\sqrt{a} - a \geq 0$

이므로 $a \leq 4$

즉, $1 < a \leq 4$

$k = g(\sqrt{a}) = g(-\sqrt{a})$이면 방정식 $g(x) = k$의 서로 다른 실근의 개수는 2이고 두 실근의 곱은 음수이므로 조건을 만족시킨다.

$g(-\sqrt{a}) = \frac{-\sqrt{a}}{a + a\sqrt{a} + a} = -\frac{1}{2\sqrt{a} + a}$

이므로

$2\sqrt{a} - a = -\frac{1}{2\sqrt{a} + a}$

$4a - a^2 = -1$, $a^2 - 4a - 1 = 0$

즉, $a = 2 + \sqrt{5}$

$f(2) = 4 - a$

$= 4 - (2 + \sqrt{5})$

$= 2 - \sqrt{5}$

따라서 $m = 2$, $n = 5$이므로

$m + n = 7$

49. 정답 ①

합성함수의 미분법

$g(x) = \ln\left[1 + f(x)^2\right]$에서

$g'(x) = \frac{2f(x)f'(x)}{1 + \{f(x)^2\}}$

즉, $-2 < x < 2$인 모든 실수 x에 대하여

$\frac{2f(x)f'(x)}{1 + \{f(x)^2\}} = \frac{\pi}{2} f(x)$

가 성립하고 $f(1) = 1$이므로

$\frac{2f(1)f'(1)}{1 + \{f(1)^2\}} = \frac{\pi}{2} f(1)$에서

$f'(1) = \frac{\pi}{4}\left[1 + \{f(1)\}^2\right]$

$= \frac{\pi}{4} \times 2$

$= \frac{\pi}{2}$

따라서

$\lim_{x\to1} \frac{f(x) - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x\to1} \left\{\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \frac{1}{x + 1}\right\}$

$= f'(1) \times \frac{1}{2}$

$= \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2}$

$=\frac{\pi}{4}$

50. 정답 ③

삼각함수의 극한

삼각형 DAB에서 $\angle DAB=\theta$, $\angle DBA=2\theta$이므로

$\angle ADB=\pi-\angle DAB-\angle DBA$

$=\pi-\theta-2\theta$

$=\pi-3\theta$

$\overline{AB}=1$이므로 삼각형 DAB에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle ABD)}=\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle ADB)}$$

$$\overline{AD}=\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle ADB)}\times\sin(\angle ADB)$$

$$=\frac{1\times sin2\theta}{\sin(\pi-3\theta)}$$

$$=\frac{\sin2\theta}{\sin3\theta}$$

직각삼각형 ABC에서

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\cos\theta$$

이므로

$$\overline{AC}=\frac{\overline{AB}}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}$$

$\overline{CD}=\overline{AC}-\overline{AD}$

$$=\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\sin2\theta}{\sin3\theta}$$

두 직선 AB, CE가 서로 평행하므로 두 삼각형 DAB, DCE는 서로 닮은 도형이고, 닮음비는

$$\overline{AD}:\overline{CD}=\frac{\sin2\theta}{\sin3\theta}:\left(\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\sin2\theta}{\sin3\theta}\right)$$

이다. 즉, 삼각형 DCE의 넓이는 삼각형 DAB의 넓이의

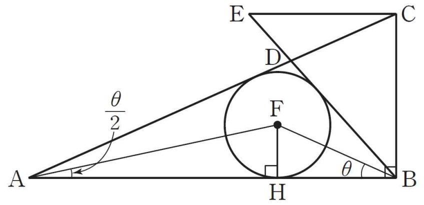
$$\left(\frac{\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\sin2\theta}{\sin3\theta}}{\frac{\sin2\theta}{\sin3\theta}}\right)^2$$ 배이므로

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\sin\theta\times\left(\frac{\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\sin2\theta}{\sin3\theta}}{\frac{\sin2\theta}{\sin3\theta}}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sin2\theta}{\sin3\theta}\times sin\theta\times\left(\frac{\sin3\theta}{\cos\theta\sin2\theta}-1\right)^2$$

$$=\frac{\sin\theta\sin2\theta}{2\sin3\theta}\times\left(\frac{\sin3\theta}{\cos\theta\sin2\theta}-1\right)^2$$

한편, 삼각형 DAB에 내접하는 원의 중심을 F라 하면 점 F는 $\angle DAB$의 이등분선과 $\angle DBA$의 이등분선의 교점이다. 점 F에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$$\angle FAH=\frac{1}{2}\angle DBA=\frac{\theta}{2}$$

이므로 직각삼각형 FAH에서

$$\frac{\overline{FH}}{\overline{AH}}=\tan\frac{\theta}{2}$$

$$\overline{AH}=\frac{\overline{FH}}{\tan\frac{\theta}{2}}$$

$$\angle FBA=\frac{1}{2}\angle DBA$$

$=\theta$

이므로 직각삼각형 FBH에서

$\frac{\overline{FH}}{\overline{BH}}=\tan\theta$이고

$$\overline{BH}=\frac{\overline{FH}}{\tan\theta}$$

$\overline{AH}+\overline{BH}=\overline{AB}$

$=1$

이므로

$$\frac{\overline{FH}}{\tan\frac{\theta}{2}}+\frac{\overline{FH}}{\tan\theta}=1$$

$$\overline{FH}=\frac{1}{\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}+\frac{1}{\tan\theta}}$$

$$=\frac{\tan\theta\tan\frac{\theta}{2}}{\tan\theta+\tan\frac{\theta}{2}}$$

즉, 삼각형 DAB에 내접하는 원의 반지름의 길이가

$$\frac{\tan\theta\tan\frac{\theta}{2}}{\tan\theta+\tan\frac{\theta}{2}}$$

이므로 이 원의 넓이 $g(\theta)$는

$$g(\theta)=\left(\frac{\tan\theta\tan\frac{\theta}{2}}{\tan\theta+\tan\frac{\theta}{2}}\right)^2\pi$$

직각삼각형 ABC에서

$\overline{BC}=\overline{AB}\tan(\angle CAB)$

$=\tan\theta$

이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\overline{BC}\times f(\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(\dfrac{\tan\theta\tan\dfrac{\theta}{2}}{\tan\theta+\tan\dfrac{\theta}{2}}\right)^2\pi}{\tan\theta\times\dfrac{\sin\theta\sin2\theta}{2\sin3\theta}\times\left(\dfrac{\sin3\theta}{\cos\theta\sin2\theta}-1\right)^2}$$

이때

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\dfrac{\tan\theta}{\theta}\times\dfrac{\tan\dfrac{\theta}{2}}{\dfrac{\theta}{2}}\times\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\tan\theta}{\theta}+\dfrac{\tan\dfrac{\theta}{2}}{\dfrac{\theta}{2}}\times\dfrac{1}{2}}\right)^2\pi$$

$$=\left(\frac{1\times1\times\dfrac{1}{2}}{1+1\times\dfrac{1}{2}}\right)^2\pi$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^2\pi$$

$$=\frac{\pi}{9}$$

이고

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{BC}\times f(\theta)}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\theta\times\dfrac{\sin\theta\sin2\theta}{2\sin3\theta}\times\left(\dfrac{\sin3\theta}{\cos\theta\sin2\theta}-1\right)^2}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\theta}{\theta}\times\frac{\dfrac{\sin\theta}{\theta}\times\dfrac{\sin2\theta}{2\theta}\times2}{2\times\dfrac{\sin3\theta}{3\theta}\times3}\times\left(\frac{\dfrac{\sin3\theta}{3\theta}\times3}{\cos\theta\times\dfrac{\sin2\theta}{2\theta}\times2}-1\right)^2$$

$$=1\times\frac{1\times1\times2}{2\times1\times3}\times\left(\frac{1\times3}{1\times1\times2}-1\right)^2$$

$$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{12}$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\overline{BC}\times f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\dfrac{g(\theta)}{\theta^2}}{\dfrac{\overline{BC}\times f(\theta)}{\theta^2}}$$

$$=\frac{\dfrac{\pi}{9}}{\dfrac{1}{12}}$$

$$=\frac{4}{3}\pi$$

51. 정답 4

등비급수의 수렴 조건과 합

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면 수열 $\{|a_n|\}$의 첫째항은 $|a|$, 공비는 $|r|$이다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $-1<r<1$, $r\neq0$이고,

$0<|r|<1$이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 또한 수렴한다.

$a\neq0$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\dfrac{a}{1-r}$

이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+|a_n|)$의 값은 a, r의 값의 부호에 따라 다음과 같다.

(ⅰ) $a>0$, $0<r<1$일 때

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\frac{|a|}{1-|r|}=\frac{a}{1-r}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+|a_n|)=\frac{a}{1-r}+\frac{a}{1-r}=\frac{2a}{1-r}\neq0$$

(ⅱ) $a>0$, $-1<r<0$일 때

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\frac{|a|}{1-|r|}=\frac{a}{1+r}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+|a_n|)=\frac{a}{1-r}+\frac{a}{1+r}=\frac{2a}{1-r^2}\neq0$$

(ⅲ) $a<0$, $0<r<1$일 때

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\frac{|a|}{1-|r|}=-\frac{a}{1-r}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+|a_n|)=\frac{a}{1-r}+\left(-\frac{a}{1-r}\right)=0$$

(ⅳ) $a<0$, $-1<r<0$일 때

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\frac{|a|}{1-|r|}=-\frac{a}{1+r}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+|a_n|)=\frac{a}{1-r}+\left(-\frac{a}{1+r}\right)$$

$$=\frac{2ar}{1-r^2}\neq 0$$

조건 (나)에서

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+|a_n|)=0$이므로

$a<0,\ 0<r<1$

수열 $\{|a_{2n}|\}$의 첫째항은 $|ar|$, 공비는 r^2이고

수열 $\{|a_{3n}|\}$의 첫째항은 $|ar^2|$, 공비는 $|r|^3$이다.

이때 $a<0,\ 0<r<1$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_{2n}|=\frac{|ar|}{1-r^2}$$
$$=-\frac{ar}{1-r^2}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_{3n}|=\frac{|ar^2|}{1-|r|^3}$$
$$=-\frac{ar^2}{1-r^3}$$

조건 (다)에서

$$3\times\left(-\frac{ar}{1-r^2}\right)=7\times\left(-\frac{ar^2}{1-r^3}\right)-3\times\frac{ar}{(1-r)(1+r)}$$
$$=-7\times\frac{ar^2}{(1-r)(1+r+r^2)}$$
$$\frac{3}{1+r}=\frac{7r}{1+r+r^2}$$

$4r^2+4r-3=0$

$(2r-1)(2r+3)=0$

$0<r<1$이므로

$$r=\frac{1}{2}$$

즉, $a<0,\ r=\frac{1}{2}$

따라서

$$\frac{|a_1|+a_2}{a_1}=\frac{|a_1|}{a_1}+\frac{a_2}{a_1}$$
$$=\frac{|a|}{a}+\frac{ar}{a}$$
$$=-\frac{a}{a}+r$$
$$=-1+\frac{1}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}$$

$k=-\frac{1}{2}$이므로

$$16k^2=16\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2$$
$$=16\times\frac{1}{4}$$
$$=4$$

[참고]

조건 (나)에서 $a_n+|a_n|$의 값은 $a_n>0$이면 $2a_n>0$, $a_n<0$이면 0이고

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+|a_n|)=0$$

이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<0$이다.

따라서 $a<0$, $r>0$임을 알 수 있다.

52. 정답 4

함수의 그래프의 방정식에의 활용

함수 $f(x)$는 $f(0)=0$인 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)

이라 하면

$f'(x)=2ax+b$

$$g(x)=f'(x)e^{-f(x)}$$
$$=(2ax+b)e^{-f(x)}$$

에서

$$g'(x)=2ae^{-f(x)}-(2ax+b)^2e^{-f(x)}$$
$$=\{2a-(2ax+b)^2\}e^{-f(x)} \quad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (가)에서 $g'(0)=0$이므로

$2a-b^2=0$

$b^2=2a \quad \cdots\cdots ㉡$

$a\neq 0$이므로 $b\neq 0$, $a=\frac{b^2}{2}>0$이고,

㉡을 ㉠에 대입하면

$$g'(x)=\{b^2-(b^2x+b)^2\}e^{-f(x)}$$
$$=b^2\{1-(bx+1)^2\}e^{-f(x)}$$
$$=-b^4x\left(x+\frac{2}{b}\right)e^{-f(x)}$$

$g'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=-\frac{2}{b}$

(i) $b>0$인 경우

$b>0$에서 $-\frac{2}{b}<0$이고, 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{2}{b}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

$f(x)=\frac{b^2}{2}x^2+bx$,

$f'(x)=b^2x+b$에서

$f\left(-\frac{2}{b}\right)=\frac{b^2}{2}\times\left(-\frac{2}{b}\right)^2+b\times\left(-\frac{2}{b}\right)$
$=0$

$f'\left(-\frac{2}{b}\right)=b^2\times\left(-\frac{2}{b}\right)+b$
$=-b$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=-\frac{2}{b}$에서 극솟값

$g'\left(-\frac{2}{b}\right)=f'\left(-\frac{2}{b}\right)e^{-f\left(-\frac{2}{b}\right)}=-b$

를 갖고,

$f(0)=0,\ f'(0)=b$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극댓값

$g(0)=f'(0)e^{-f(0)}=b$

를 갖는다.

함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는

$g(x)=f'(x)e^{-f(x)}=0$에서

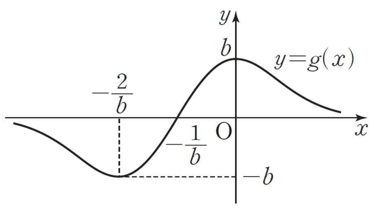
$f'(x)=b^2x+b$에서

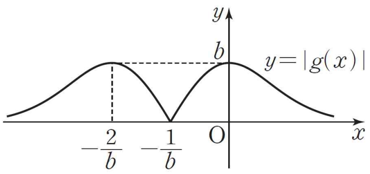
$x=-\frac{1}{b}$

즉, $g\left(-\frac{1}{b}\right)=0$이고,

$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=0$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 함수 $y=|g(x)|$의 그래프는 그림과 같다.





이때 함수 $h(t)$는 함수 $y=|g(x)|$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점 중 x좌표가 양수인 것의 개수이므로

$$h(t)=\begin{cases}0 & (t\le 0)\\ 1 & (0<t<b)\\ 0 & (t\ge b)\end{cases}$$

임의의 양수 k에 대하여

$0<g(k)<b$

이므로

$\lim_{t\to g(k)+}h(t)=\lim_{t\to g(k)-}h(t)=1$

이다.

그러므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $b<0$인 경우

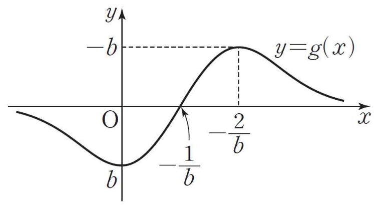
$b<0$에서 $-\frac{2}{b}>0$이고, 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

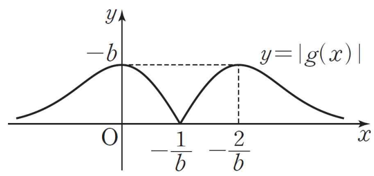
x	$\cdots$	0	$\cdots$	$-\frac{2}{b}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값 $g(0)=b$를 갖고, $x=-\frac{2}{b}$에서 극댓값 $g\left(-\frac{2}{b}\right)=-b$를 갖는다. 또한 $g\left(-\frac{1}{b}\right)=0$이고,

$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=0$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 함수 $y=|g(x)|$의 그래프는 그림과 같다.

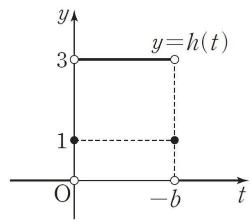




이때 함수 $h(t)$는 함수 $y=|g(x)|$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점 중 x좌표가 양수인 것의 개수이므로

$$h(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t=0)\\ 3 & (0<t<-b)\\ 1 & (t=-b)\\ 0 & (t>-b)\end{cases}$$

이고 함수 $y=h(t)$의 그래프는 그림과 같다.



임의의 양수 k에 대하여

$b<g(k)\le -b$

이므로

$\lim_{t\to g(k)+}h(t)\neq\lim_{t\to g(k)-}h(t)$

를 만족시키는 $g(k)$의 값은 $0,\ -b$이다.

$g(k)=0$에서 양수 k의 값은 $-\frac{1}{b}$이고,

$g(k)=-b$에서 양수 k의 값은 $-\frac{2}{b}$이다.

$k\neq-\frac{1}{b}$, $k\neq-\frac{2}{b}$인 모든 양수 k에 대하여

$0<|g(k)|<-b$

이므로

$\lim_{t\to g(k)+}h(t)=\lim_{t\to g(k)-}h(t)$이다.

그러므로

$-\frac{1}{b}+\left(-\frac{2}{b}\right)=3$

즉, $b=-1$일 때 조건 (나)를 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $b=-1$이고 이를 ㉡에 대입하면

$a=\frac{1}{2}$이므로

$f(x)=\frac{1}{2}x^2-x$

따라서

$$f(4)=\frac{1}{2}\times4^2-4$$
$$=4$$

53. 정답 ③

정적분을 활용한 곡선의 길이

$g(x)=\int_1^x(t-1)f(x-t+1)dt$에서

$x-t+1=s$로 놓으면

$-1=\frac{ds}{dt}$이고 $t-1=x-s$

$t=1$일 때 $s=x$, $t=x$일 때 $s=1$이므로

$$\begin{aligned}g(x)&=\int_1^x(t-1)f(x-t+1)dt\\&=\int_x^1(x-s)f(s)(-ds)\\&=\int_1^x(x-s)f(s)ds\\&=x\int_1^xf(s)ds-\int_1^xsf(s)ds\end{aligned}$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}g'(x)&=\int_1^xf(s)ds+xf(x)-xf(x)\\&=\int_1^xf(s)ds\\&=\int_1^x\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2s^2}\right)ds\\&=\left[\frac{1}{2}s-\frac{1}{2s}\right]_1^x\\&=\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\end{aligned}$$

따라서 $x=2$에서 $x=4$까지의 곡선 $y=g(x)$의 길이는

$$\begin{aligned}\int_2^4\sqrt{1+\{g'(x)\}^2}\,dx&=\int_2^4\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx\\&=\int_2^4\sqrt{\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx\\&=\int_2^4\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)dx\\&=\left[\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}\ln|x|\right]_2^4\\&=4+\frac{1}{2}\ln4-\left(1+\frac{1}{2}\ln2\right)\\&=3+\frac{1}{2}\ln2\end{aligned}$$

54. 정답 ①

부분적분법을 이용한 역함수의 정적분

함수 $f(x)$가 모든 양의 실수 x와 $-x$보다 큰 모든 실수 y에 대하여

$f(x+y)=\frac{x+y}{x}f(x)+xf\left(\frac{x+y}{x}\right)$

이므로 $x=1$, $y=0$을 대입하면

$f(1)=f(1)+f(1)$

$f(1)=0$

한편,

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\frac{x+h}{x}f(x)+xf\left(\frac{x+h}{x}\right)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+\frac{h}{x}f(x)+xf\left(1+\frac{h}{x}\right)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h}{x}f(x)+xf\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\left(\frac{f(x)}{x}+\frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}\right)\\&=\lim_{h\to0}\left(\frac{f(x)}{x}+\frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)-f(1)}{\frac{h}{x}}\right)\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(x)}{x}+\lim_{h\to0}\frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)-f(1)}{\frac{h}{x}}\\&=\frac{f(x)}{x}+f'(1)\qquad\cdots\cdots\ ㉠\end{aligned}$$

㉠에서 $xf'(x)-f(x)=f'(1)x$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡

한편, ㉠의 우변이 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$는 이계도함수가 존재하고

$$f''(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{x}+f'(1)\right)$$
$$=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$$

이므로 ㉡에 의하여

$$f''(x)=\frac{f'(1)}{x}$$
$$f'(x)=\int f''(x)dx$$
$$=\int \frac{f'(1)}{x}dx$$
$$=f'(1)\ln x+C_1 \text{ (단, } C_1\text{은 적분상수)}$$

위의 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$f'(1)=C_1$$

이므로

$$f'(x)=f'(1)\ln x+f'(1)$$
$$=f'(1)(\ln x+1)$$

$f'(k)=0$에서

$$f'(1)(\ln k+1)=0$$

$f'(1)\neq 0$이므로 $k=\frac{1}{e}$ …… ㉢

한편

$$\int \ln x dx=x\ln x-\int dx$$
$$=x\ln x-x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int f'(1)(\ln x+1)dx$$
$$=f'(1)\left(\int \ln x dx+\int dx\right)$$
$$=f'(1)x\ln x+C_2 \text{ (단, } C_2\text{는 적분상수)}$$
$$f(1)=C_2=0$$
$$f(x)=f'(1)x\ln x$$

$f\left(\frac{1}{k}\right)=1$이고 ㉢에서 $\frac{1}{k}=e$이므로

$$f(e)=f'(1)e$$
$$=1$$
$$f'(1)=\frac{1}{e}$$

즉, $f(x)=\frac{1}{e}x\ln x$

구간 $\left(\frac{1}{e},\ \infty\right)$에서

$$f'(x)=\frac{1}{e}(\ln x+1)>0$$

이므로 함수 $f(x)$는 증가하고 일대일대응이다.

$f(g(x))=3x$이므로

$$f\left(g\left(\frac{1}{3}\right)\right)=1$$

$f(e)=1$에서

$$g\left(\frac{1}{3}\right)=e$$

$$\int_0^{\frac{1}{3}}g(x)dx=\Big[xg(x)\Big]_0^{\frac{1}{3}}-\int_0^{\frac{1}{3}}xg'(x)dx$$
$$=\frac{1}{3}g\left(\frac{1}{3}\right)-\int_0^{\frac{1}{3}}xg'(x)dx$$
$$=\frac{e}{3}-\int_0^{\frac{1}{3}}xg'(x)dx$$

이때 $g(x)=t$로 치환하면 $g'(x)=\frac{dt}{dx}$이고

$f(g(x))=3x$에서 $x=\frac{1}{3}f(t)$이며

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{1}{3}$일 때 $t=e$이므로

$$\int_0^{\frac{1}{3}}xg'(x)dx=\int_0^e\frac{1}{3}f(t)dt$$
$$=\frac{1}{3}\int_0^e\frac{1}{e}t\ln t dt$$
$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2e}t^2\ln t\right]_1^e-\frac{1}{3}\int_0^e\frac{1}{2e}tdt$$
$$=\frac{e}{6}-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4e}t^2\right]_1^e$$
$$=\frac{e}{6}-\frac{1}{3}\left(\frac{e}{4}-\frac{1}{4e}\right)$$
$$=\frac{1}{12e}+\frac{e}{12}$$

이고

$$\int_0^{\frac{1}{3}}g(x)dx=\frac{e}{3}-\int_0^{\frac{1}{3}}xg'(x)dx$$
$$=\frac{e}{3}-\left(\frac{1}{12e}+\frac{e}{12}\right)$$
$$=\frac{e}{4}-\frac{1}{12e}$$

55. 정답 24

등비급수의 수렴 조건과 합

조건 (가)에서 수열 $\{a_n\}$은 공비가 r인 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 공비가 r^2-1인 등비수열이다.

조건 (나)에서 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 수렴하므로

$-1<r<1$ …… ㉠

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$도 수렴하므로

$-1 < r^2 - 1 < 1$에서 $0 < r^2 < 2$이고

$-\sqrt{2} < r < 0$ 또는 $0 < r < \sqrt{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 r의 값의 범위는

$-1 < r < 0$ 또는 $0 < r < 1$

두 등비급수의 합을 각각 구하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{b_1}{1-(r^2-1)} = \frac{b_1}{2-r^2}$$

조건 (나)에서

$$\frac{a_1}{1-r} : \frac{b_1}{2-r^2} = 14 : 3$$

$$\frac{3a_1}{1-r} = \frac{14b_1}{2-r^2}$$

에서 $a_1 = b_1 \neq 0$이므로 양변을 a_1로 나누면

$$\frac{3}{1-r} = \frac{14}{2-r^2}$$

$3(2-r^2) = 14(1-r)$

$3r^2 - 14r + 8 = 0$

$(3r-2)(r-4) = 0$

이때 $-1 < r < 0$ 또는 $0 < r < 1$이므로

$$r = \frac{2}{3}$$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이고,

수열 $\{b_n\}$은 공비가 $-\frac{5}{9}$인 등비수열이다.

두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 일반항을 각각 구하면

$$a_n = a_1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},\ b_n = b_1 \times \left(-\frac{5}{9}\right)^{n-1}$$

이므로

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{b_1 \times \left(-\frac{5}{9}\right)^{n-1}}{a_1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}} = \left(-\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\left(-\frac{5}{6}\right)} = \frac{6}{11}$$

이므로

$p = \frac{6}{11}$이고

$$44p = 44 \times \frac{6}{11} = 24$$

56. 정답 16

풀이 함수의 극대와 극소

$h(x) = -a\{\log_4(x+1)\}^2 + a$라 하면

$$h'(x) = -a \times 2\log_4(x+1) \times \{\log_4(x+1)\}' = \frac{-2a\log_4(x+1)}{(x+1)\ln 4}$$

이므로 $h'(x) = 0$에서

$\log_4(x+1) = 0$ 즉, $x = 0$

$a > 0$이므로 $h'(x)$의 부호는 $x = 0$의 좌우에서 양에서 음으로 바뀐다.

그러므로 함수 $f(x)$는 $x = 0$에서 극댓값

$f(0) = h(0) = a$

를 갖고,

$$\lim_{x \to 3-} f(x) = \lim_{x \to 3-} \left[-a\{\log_4(x+1)\}^2 + a\right] = -a(\log_4 4)^2 + a = 0$$

$$\lim_{x \to 3+} f(x) = f(3) = 2 \times e^0 + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (2e^{3-x} + 1) = 1$$

$$\lim_{x \to -1+} f(x) = \lim_{x \to -1+} \left[-a\{\log_4(x+1)\}^2 + a\right] = -\infty$$

한편, 함수 $y = f(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 1)$을 지날 조건은

$$f(1) = -a(\log_4 2)^2 + a = -a \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + a = \frac{3}{4}a = 1$$

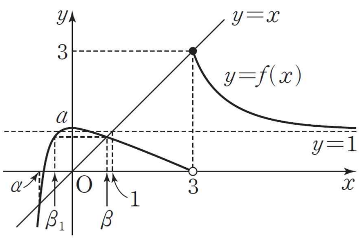
에서

$$a = \frac{4}{3}$$

방정식 $f(f(x)) = f(x)$에서 $f(x) = t$로 놓으면 $f(t) = t$를 만족시키는 각각의 실수 t에 대하여 $f(x) = t$를 만족시키는 모든 실수 x가 방정식 $f(f(x)) = f(x)$의 모든 실근이다.

따라서 양수 a의 값의 범위에 따라 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 다음과 같다.

(ⅰ) $0 < a \le \dfrac{4}{3}$일 때



위 그래프에서 $f(t)=t$를 만족시키는 실수 t는

α, β, $3(\alpha<0<\beta\le 1)$

$f(x)=\alpha$를 만족시키는 실수 x의 값은 α뿐이다.

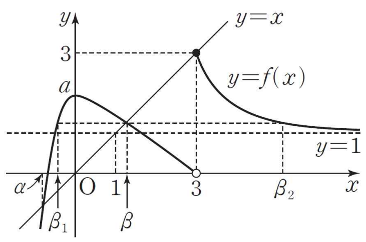
$f(x)=\beta$를 만족시키는 실수 x의 값은 β_1, $\beta(\alpha<\beta_1<0)$이다.

$f(x)=3$을 만족시키는 실수 x의 값은 3뿐이다.

따라서 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 모든 실근은 α, β_1, β, 3의 4개이므로

$g(a)=4$

(ⅱ) $\dfrac{4}{3}<a<3$일 때



위 그래프에서 $f(t)=t$를 만족시키는 실수 t는

α, β, $3(\alpha<0,\ 1<\beta<3)$

$f(x)=\alpha$를 만족시키는 실수 x의 값은 α뿐이다.

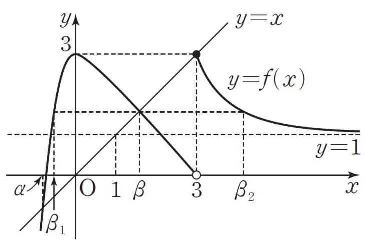
$f(x)=\beta$를 만족시키는 실수 x의 값은 β_1, β, $\beta_2(\alpha<\beta_1<0$, $\beta_2>3)$이다.

$f(x)=3$을 만족시키는 실수 x의 값은 3뿐이다.

따라서 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 모든 실근은 α, β_1, β, 3, β_2의 5개이므로

$g(a)=5$

(ⅲ) $a=3$일 때



위 그래프에서 $f(t)=t$를 만족시키는 실수 t는

α, β, $3(\alpha<0,\ 1<\beta<3)$

$f(x)=\alpha$를 만족시키는 실수 x의 값은 α뿐이다.

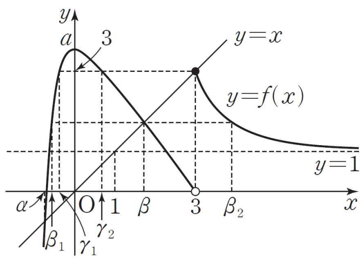
$f(x)=\beta$를 만족시키는 실수 x의 값은 β_1, β, $\beta_2(\alpha<\beta_1<0$, $\beta_2>3)$이다.

$f(x)=3$을 만족시키는 실수 x의 값은 0, 3이다.

따라서 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 모든 실근은 α, β_1, 0, β, 3, β_2의 6개이므로

$g(a)=6$

(ⅳ) $a>3$일 때



위 그래프에서 $f(t)=t$를 만족시키는 실수 t는

α, β, $3(\alpha<0,\ 1<\beta<3)$

$f(x)=\alpha$를 만족시키는 실수 x의 값은 α뿐이다.

$f(x)=\beta$를 만족시키는 실수 x의 값은 β_1, β, $\beta_2(\alpha<\beta_1<0$, $\beta_2>3)$이다.

$f(x)=3$을 만족시키는 실수 x의 값은 γ_1, γ_2, $3(\beta_1<\gamma_1<0<\gamma_2<\beta)$이다.

따라서 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 모든 실근은 α, β_1, γ_1, γ_2, β, 3, β_2의 7개이므로

$g(a)=7$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여

$$g(a)=\begin{cases} 4 & \left(0<a\le \dfrac{4}{3}\right) \\ 5 & \left(\dfrac{4}{3}<a<3\right) \\ 6 & (a=3) \\ 7 & (a>3) \end{cases}$$

이므로 함수 $g(a)$는 $a=\dfrac{4}{3}$와 $a=3$에서만 불연속이다.

따라서 함수 $g(a)$가 $a=k$에서 불연속인 모든 양수 k의 값의 합은

$\dfrac{4}{3}+3=\dfrac{13}{3}$

이므로

$p+q=3+13$

$\quad=16$

57. 정답 ①

정적분과 급수

O를 원점이라 하면 선분

OP_k $(1\le k\le n-1)$

이 $\angle\mathrm{AOB}\left(=\dfrac{\pi}{2}\right)$를 n등분하므로

$\angle\mathrm{AOP}_k=\dfrac{\pi}{2}\times\dfrac{k}{n}=\dfrac{k\pi}{2n}$

부채꼴 AOP_k의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{k\pi}{2n}=\frac{1}{2}\times\frac{k\pi}{2n}$

$\angle \mathrm{COP}_k=\pi-\frac{k\pi}{2n}$

이므로 삼각형 COP_k의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 1^2\times\sin\left(\pi-\frac{k\pi}{2n}\right)=\frac{1}{2}\times\sin\frac{k\pi}{2n}$

구하는 도형의 넓이는 부채꼴 AOP_k의 넓이와 삼각형 COP_k의 넓이의 합이므로

$S(k)=\frac{1}{2}\times\frac{k\pi}{2n}+\frac{1}{2}\times\sin\frac{k\pi}{2n}$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S(k)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\times\frac{k\pi}{2n}+\frac{1}{2}\times\sin\frac{k\pi}{2n}\right)\\&=\frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\times\frac{k\pi}{2n}+\frac{1}{2}\times\sin\frac{k\pi}{2n}\right)\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\times x+\frac{1}{2}\times\sin x\right)dx\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+\sin x)dx\\&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{\pi^2}{8}-0-(0-1)\right\}\\&=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{\pi}\end{aligned}$$

58. 정답 ②

정적분의 성질과 활용(넓이)

음이 아닌 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)<0$이므로

곡선 $y=f(x)$는 $x\ge 0$에서 위로 볼록이다.

따라서 양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선과 곡선 $y=f(x)$ $(x>0)$은 점 $(t,\ f(t))$에서만 만나고, 접선은 곡선의 위쪽에 위치한다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식을 $g(x)$라 하면

$g(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선과 곡선 $y=f(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이가

$\frac{t^3}{3}-\frac{1}{2}(t^2+1)e^{1-t^2}+\frac{e}{2}$

이고 양수 x에 대하여 $g(x)\ge f(x)$이므로

$\int_0^t(f'(t)(x-t)+f(t)-f(x))dx$

$=\frac{t^3}{3}-\frac{1}{2}(t^2+1)e^{1-t^2}+\frac{e}{2}$

$h_1(t)=\int_0^t(f'(t)(x-t)+f(t)-f(x))dx$,

$h_2(t)=\frac{t^3}{3}-\frac{1}{2}(t^2+1)e^{1-t^2}+\frac{e}{2}$라 하자.

$$\begin{aligned}h_1(t)&=\int_0^t(f'(t)(x-t)+f(t)-f(x))dx\\&=\left[\frac{1}{2}f'(t)x^2-tf'(t)x+f(t)x\right]_0^t-\int_0^t f(x)dx\\&=\frac{t^2}{2}f'(t)-t^2f'(t)+tf(t)-\int_0^t f(x)dx\\&=-\frac{t^2}{2}f'(t)+tf(t)-\int_0^t f(x)dx\end{aligned}$$

함수 $h_1(t)$를 t에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}h_1'(t)&=-tf'(t)-\frac{t^2}{2}f''(t)+f(t)+tf'(t)-f(t)\\&=-\frac{t^2}{2}f''(t)\end{aligned}$$

함수 $h_2(t)$를 t에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}h_2'(t)&=t^2-te^{1-t^2}+t(t^2+1)e^{1-t^2}\\&=t^2+t^3e^{1-t^2}\end{aligned}$$

$h_1'(t)=h_2'(t)$이므로

$-\frac{t^2}{2}f''(t)=t^2+t^3e^{1-t^2}$

따라서

$f''(x)=-2-2xe^{1-x^2}$

$$\begin{aligned}f'(x)&=\int f''(x)dx\\&=\int(-2-2xe^{1-x^2})dx \qquad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

㉠에서 $1-x^2=k$라 하면

$-2x=\frac{dk}{dx}$

이므로

$$\begin{aligned}f'(x)&=\int(-2)dx+\int(-2xe^{1-x^2})dx\\&=-2x+\int e^k dk\\&=-2x+e^k+C\\&=-2x+e^{1-x^2}+C\end{aligned}$$
(단, C는 적분상수)

이 식에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)=e+C$

$f'(0)=e$이므로

$e+C=e$에서

$C=0$

즉, $f'(x)=-2x+e^{1-x^2}$

$\int_0^1 f(x)dx=\Big[xf(x)\Big]_0^1-\int_0^1 xf'(x)dx$

$= f(1) - \int_0^1 (-2x^2 + xe^{1-x^2})dx$

$= f(1) - \left[-\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}e^{1-x^2}\right]_0^1$

$= f(1) - \left\{\left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(0 - \frac{1}{2}e\right)\right\}$

$= f(1) + \frac{7}{6} - \frac{e}{2}$

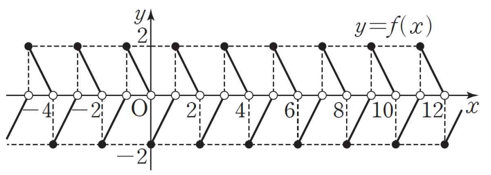
따라서

$\int_0^1 f(x)dx - f(1) = \frac{7}{6} - \frac{e}{2}$

59. 정답 67

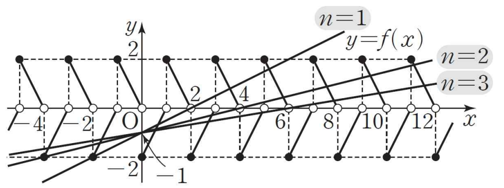
등비급수의 수렴 조건과 합

조건 (가), (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 직선 $y = \frac{1}{2n}x - 1$은 기울기가 $\frac{1}{2n}$ 이고 y절편이 -1인 직선이므로 세 점 $(-2n,\ -2)$, $(2n,\ 0)$, $(6n,\ 2)$를 지난다.

$n=1,\ 2,\ 3$일 때, 각각의 직선 $y = \frac{1}{2n}x - 1$은 그림과 같다.



즉, $-2n \le x < 0$에서 교점이 n개,

$0 \le x < 2n$에서 교점이 n개,

$2n \le x < 6n$에서 교점이 $2n$개이므로

$a_n = n + n + 2n$

$= 4n$

따라서

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+2}}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n \times 4(n+2)}$

$= \frac{1}{16}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$

$= \frac{1}{16}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$

$= \frac{1}{32}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)\right.$

$\left. + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\right\}$

$= \frac{1}{32}\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$

$= \frac{1}{32} \times \frac{3}{2}$

$= \frac{3}{64}$

이므로

$p + q = 64 + 3$

$= 67$

60. 정답 4

함수의 그래프와 최대 · 최소

$f(x) = \frac{-x^2 + ax + b}{e^x}$ 에서

$f'(x) = \frac{(-2x+a)e^x - (-x^2+ax+b)e^x}{e^{2x}}$

$= \frac{x^2 - (a+2)x + a - b}{e^x}$

$f'(x) = 0$에서

$x^2 - (a+2)x + a - b = 0$ …… ㉠

조건 (가)에서 x_1, x_2는 ㉠의 실근이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$x_1 + x_2 = a + 2$, 즉 $2 = a + 2$이므로

$a = 0$

이차방정식 ㉠의 판별식을 D_1이라 하면

이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$D_1 = (a+2)^2 - 4(a-b)$

$= 4 + 4b > 0$

에서

$b > -1$

이때 $f(x) = \frac{x^2 - 2x - b}{e^x}$ 이므로

$f''(x) = \frac{(2x-2)e^x - (x^2 - 2x - b)e^x}{e^{2x}}$

$= \frac{-x^2 + 4x + b - 2}{e^x}$

$f''(x) = 0$에서

$-x^2 + 4x + b - 2 = 0$

즉, $x^2 - 4x - b + 2 = 0$ …… ㉡

조건 (나)에서 x_3, x_4는 ㉡의 실근이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$x_3 + x_4 = 4$, $x_3 \times x_4 = -b + 2$

이고,

$(x_3)^2+(x_4)^2=14$에서

$(x_3+x_4)^2-2x_3x_4=14$

$4^2-2(-b+2)=14$

$b=1$

이를 ㉡에 대입하면

$x^2-4x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=2^2-1=3>0$

이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

그러므로

$f(x)=\frac{-x^2+1}{e^x}$,

$f'(x)=\frac{x^2-2x-1}{e^x}$,

$f''(x)=\frac{-x^2+4x-1}{e^x}$ 이다.

$f'(x)=0$에서

$x^2-2x-1=0$이므로

$x=1-\sqrt{2}$ 또는 $x=1+\sqrt{2}$

$f''(x)=0$에서

$-x^2+4x-1=0$

즉, $x^2-4x+1=0$이므로

$x=2-\sqrt{3}$ 또는 $x=2+\sqrt{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 곡선 $y=f(x)$의 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$1-\sqrt{2}$	$\cdots$	$2-\sqrt{3}$	$\cdots$	$1+\sqrt{2}$	$\cdots$	$2+\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극댓값	↘	변곡점	↘	극솟값	↗	변곡점	↗

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$

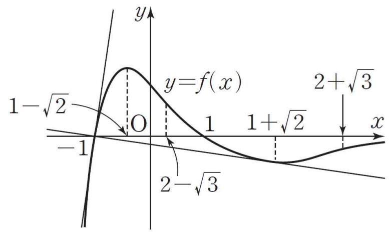
이므로

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2+1}{e^x}=0$

이다.

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선은 x축이다.

한편, $f(-1)=f(1)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$t>-1$일 때, $g(t)=\frac{f(t)}{t+1}$의 값은 두 점 $(-1,\ 0)$, $(t,\ f(t))$를 지나는 직선의 기울기이고

$g(-1)=f'(-1)$

이므로 구간 $[-1,\ \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최댓값은

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ 0)$에서의 접선의 기울기이고,

함수 $g(t)$의 최솟값은 두 점 $(-1,\ 0)$, $(t,\ f(t))(t>-1)$을 지나는 직선이 곡선 $y=f(x)$에 접할 때 이 접선의 기울기이다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y-\frac{-t^2+1}{e^t}=\frac{t^2-2t-1}{e^t}(x-t)$

이 직선이 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$0-\frac{-t^2+1}{e^t}=\frac{t^2-2t-1}{e^t}(-1-t)$

$(t+1)^2(t-2)=0$

$t>-1$이므로

$t=2$

이때 $f'(2)=-\frac{1}{e^2}$ 이므로 구간 $[-1,\ \infty)$에서

함수 $g(t)$의 최솟값은 $-\frac{1}{e^2}$ 이다.

한편, $f(-1)=0$이고

$$\lim_{t\to-1+}g(t)=\lim_{t\to-1+}\frac{f(t)}{t+1}$$
$$=f'(-1)$$
$$=2e$$

이므로 구간 $[-1,\ \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최댓값은 $2e$이다.

따라서 $m=-\frac{1}{e^2}$, $M=2e$이므로

$$(emM)^2=\left\{e\times\left(-\frac{1}{e^2}\right)\times2e\right\}^2$$
$$=4$$

다른 풀이

$f(x)=\frac{-x^2+1}{e^x}$

$f'(x)=\frac{x^2-2x-1}{e^x}$ (위의 풀이 참조)

한편,

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{-t^2+1}{(t+1)e^t} & (t\neq -1)\\ f'(-1) & (t=-1)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1-t}{e^t} & (t\neq -1)\\ 2e & (t=-1)\end{cases}$$

이때

$$\lim_{t\to -1} g(t)=\frac{1-(-1)}{e^{-1}}=2e,$$

$g(-1)=2e$

이므로

$$g(t)=\frac{1-t}{e^t}$$

$$g'(t)=\frac{-e^t-(1-t)e^t}{e^{2t}}=\frac{t-2}{e^t}$$

$$g''(t)=\frac{e^t-(t-2)e^t}{e^{2t}}=\frac{3-t}{e^t}$$

$g'(t)=0$에서 $t=2$이고,

$g''(t)=0$에서 $t=3$

함수 $g(t)$의 증가와 감소, 곡선 $y=g(t)$의 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

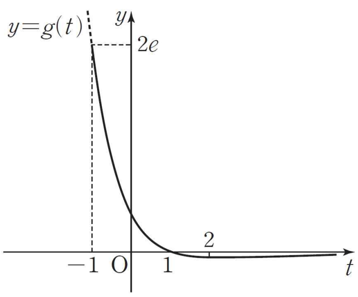
t	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$g''(t)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$g(t)$	↘	극솟값	↗	변곡점	↗

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0$이므로

$\lim\limits_{t\to\infty}g(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1-t}{e^t}=0$이다.

즉, 함수 $y=g(t)$의 그래프의 점근선은 x축이다.

한편, $g(1)=0$이므로 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.



구간 $[-1,\ \infty)$에서 함수 $g(t)$는

$t=-1$일 때 최댓값 $g(-1)=2e$를 갖고

$t=2$일 때 최솟값 $g(2)=-\dfrac{1}{e^2}$ 을 갖는다.

따라서 $M=2e,\ m=-\dfrac{1}{e^2}$ 이므로

$$(emM)^2=\left\{e\times\left(-\frac{1}{e^2}\right)\times 2e\right\}^2$$

$$=4$$

61. 정답 ④

부분적분법을 이용한 정적분

$f(x)=(2x^2+3)e^x$에서

$$f'(x)=4xe^2+(2x^2+3)e^x$$

$$=\{2(x+1)^2+1\}e^x>0$$

이고,

$f(g(x))=x$에서 $f'(g(x))g'(x)=1$이므로

$$\frac{1}{f'(g(x))}=g'(x)$$

그러므로

$$\int_3^{5e}\frac{x}{f'(g(x))}dx=\int_3^{5e}xg'(x)dx$$

$$=\Big[xg(x)\Big]_3^{5e}-\int_3^{5e}g(x)dx$$

$$=5e\times g(5e)-3g(3)-\int_3^{5e}g(x)dx$$

이때 $f(0)=3$에서 $g(3)=0,\quad f(1)=5e$에서 $g(5e)=1$이고,

$$\int_3^{5e}g(x)dx=5e-\int_0^1 f(x)dx$$

따라서

$$\int_3^{5e}\frac{x}{f\,'(g(x))}dx=5e\times g(5e)-3g(3)-\int_3^{5e}g(x)dx$$

$$=5e\times 1-3\times 0-5e+\int_0^1 f(x)dx$$

$$=\int_0^1 f(x)dx$$

$$=\int_0^1(2x^2+3)e^x dx$$

$$=\Big[(2x^2+3)e^2\Big]_0^1-\int_0^1 4xe^x dx$$

$$=5e-3-\Big[4xe^x\Big]_0^1+\int_0^1 4e^x dx$$

$$=5e-3-4e+\Big[4e^x\Big]_0^1$$

$$=e-3+4e-4$$

$$=5e-7$$

62. 정답 ③

함수의 그래프(극대, 극소)

조건 (가)에서 $f(0)=\cos a=0$이고 $0<a<4\pi$이므로

a는 $\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{5}{2}\pi,\ \dfrac{7}{2}\pi$ 중 하나이다.

$$\lim_{x\to 0+}xe^{\frac{1}{2}-x^2}=\lim_{x\to 0+}x\times\lim_{x\to 0+}e^{\frac{1}{2}-x^2}$$

$=0\times e^{\frac{1}{2}}=0$

이고 $b>0$이므로

$a=\frac{\pi}{2}$이면 $\frac{\pi}{2}<a+bxe^{\frac{1}{2}-x^2}<\frac{3}{2}\pi$를 만족시키는

충분히 작은 양수 x에 대하여 $f(x)<0$이 되어

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

마찬가지로, $a=\frac{5}{2}\pi$도 조건을 만족시키지 못하므로

가능한 a의 값은 $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{7}{2}\pi$이다.

$a=\frac{3}{2}\pi$ 또는 $a=\frac{7}{2}\pi$라 하면

$f(-x)=\cos\left(a-bxe^{\frac{1}{2}-x^2}\right)$

$=-\cos\left(a+bxe^{\frac{1}{2}-x^2}\right)=-f(x)$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

$f(x)=\cos\left(a+bxe^{\frac{1}{2}-x^2}\right)$이므로

$f'(x)=be^{\frac{1}{2}-x^2}(2x^2-1)\sin\left(a+bxe^{\frac{1}{2}-x^2}\right)$

$f'(x)=0$에서

$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 방정식

$\sin\left(a+bxe^{\frac{1}{2}-x^2}\right)=0$을 만족시키는 실수 x에서

함수 $f(x)$는 극대 또는 극소이다.

한편, 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소인 α의 개수가 6이려면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 $\alpha>0$이고 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소인 실수 α의 개수는 3이어야 한다.

따라서 방정식 $\sin\left(a+bxe^{\frac{1}{2}-x^2}\right)=0$을 만족시키는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$가 아닌 양수 x의 개수는 2이어야 한다.

이제 함수 $y=a+bxe^{\frac{1}{2}-x^2}$의 최댓값 M과 최솟값 m을 구해 보자.

함수 $g(x)=a+bxe^{\frac{1}{2}-x^2}$이라 하면

$g'(x)=be^{\frac{1}{2}-x^2}(1-2x^2)$

$g'(x)=0$에서

$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\lim_{x\to-\infty}\left(a+bxe^{\frac{1}{2}-x^2}\right)=a$, $\lim_{x\to\infty}\left(a+bxe^{\frac{1}{2}-x^2}\right)=a$

이므로 함수 $g(x)=a+bxe^{\frac{1}{2}-x^2}$은

$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$에서 극소이면서 최소이고,

$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$에서 극대이면서 최대이다.

$m=g\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=a-\frac{\sqrt{2}}{2}b$,

$M=g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=a+\frac{\sqrt{2}}{2}b$

에서

$a-\frac{\sqrt{2}}{2}b\le g(x)\le a+\frac{\sqrt{2}}{2}b$

(i) $a=\frac{3}{2}\pi$일 때

$x=k$에서 $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+bxe^{\frac{1}{2}-x^2}\right)$의 값이 0이 되고

$x=k$의 좌우에서 $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+bxe^{\frac{1}{2}-x^2}\right)$의 값의 부호가 바뀌는

$\frac{\sqrt{2}}{2}$가 아닌 양수 k의 값이 2개 존재하려면

$2\pi<\frac{3}{2}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}b\le3\pi$

이어야 한다.

이때 조건 (나)를 만족시키려면

$2\pi<\frac{3}{2}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}b<\frac{5}{2}\pi$

이어야 하므로

$\frac{\sqrt{2}}{2}\pi<b<\sqrt{2}\pi$에서

$2.22<b<4.44$

b는 자연수이므로 $b=3$ 또는 $b=4$이다.

따라서 구하는 순서쌍 (a, b)는

$\left(\frac{3}{2}\pi, 3\right)$, $\left(\frac{3}{2}\pi, 4\right)$이다.

(ii) $a=\frac{7}{2}\pi$일 때

$4\pi<\frac{7}{2}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}b<5\pi$이어야 한다.

$x=k$에서 $\sin\left(\frac{7}{2}\pi+bxe^{\frac{1}{2}-x^2}\right)$의 값이 0이 되고

$x=k$의 좌우에서 $\sin\left(\frac{7}{2}\pi+bxe^{\frac{1}{2}-x^2}\right)$의 값의 부호가 바뀌는

$\frac{\sqrt{2}}{2}$가 아닌 양수 k의 값이 2개 존재하려면

$4\pi<\frac{7}{2}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}b\le5\pi$

이어야 한다.

이때 조건 (나)를 만족시키려면

$4\pi<\frac{7}{2}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}b<\frac{9}{2}\pi$

이어야 하므로

$\frac{\sqrt{2}}{2}\pi < b < \sqrt{2}\pi$

$2.22 < b < 4.44$

b는 자연수이므로 $b=3$ 또는 $b=4$이다.

따라서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$는

$\left(\frac{7}{2}\pi,\ 3\right),\ \left(\frac{7}{2}\pi,\ 4\right)$이다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$2+2=4$

이다.

[참고]

$a=\frac{3}{2}\pi$ 또는 $a=\frac{7}{2}\pi$이고 $b=3,\ 4$이면 방정식

$\sin\left(a+bxe^{\frac{1}{2}-x^2}\right)=0$을 만족시키는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$가 아닌 양수 x의 개수는

2이고 그 값을 각각

$\alpha_1,\ \alpha_2\,(\alpha_1<\alpha_2)$

라 하면 함수 $f(x)$는

$x=-\alpha_2,\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\alpha_1,\ \alpha_1,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \alpha_2$

에서 극대 또는 극소이다.

63. 정답 45

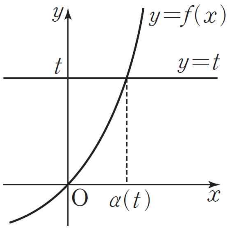
적분으로 나타낸 함수의 미분과 지수함수의 적분

$f(x)=e^{2x}+2e^x-3$에서

$f'(x)=2e^{2x}+2e^x=2e^x(e^x+1)>0$

이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고, $f(0)=0$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 x좌표를 $\alpha(t)$라 하면 함수

$g(x)=\int_0^x\{t-f(s)\}ds$

는 $x=\alpha(t)$에서 극대인 동시에 최대이므로

$h(t)=\alpha(t)$이다.

즉, $f(h(t))=t$이므로 양변을 t에 대하여 미분하면

$f'(h(t))h'(t)=1$ …… ㉠

$h'(k)=\frac{1}{12}$이므로 ㉠에 $t=k$를 대입하면

$f'(h(k))h'(k)=1$에서

$f'(h(k))=\frac{1}{h'(k)}=12$

즉, $2e^{2h(k)}+2e^{h(k)}=12$에서

$e^{2h(k)}+e^{h(k)}-6=0$

$\{e^{h(k)}+3\}\{e^{h(k)}-2\}=0$

$e^{h(k)}+3>0$이므로

$e^{h(k)}-2=0,\ h(k)=\ln 2$

$f(h(k))=k$에서

$k=f(\ln 2)=4+2\times 2-3=5$

그러므로

$$g(h(k))=g(\ln 2)=\int_0^{\ln 2}(t-f(s))ds$$

$0<t\le 5$에서 $g(\ln 2)$의 최댓값은 $t=5$일 때이므로 최댓값은

$$\int_0^{\ln 2}\{5-(e^{2s}+2e^s-3)\}ds=\int_0^{\ln 2}(-e^{2s}-2e^s+8)ds=\left[-\frac{1}{2}e^{2s}-2e^s+8s\right]_0^{\ln 2}=-\frac{7}{2}+8\ln 2$$

따라서 $p=-\frac{7}{2},\ q=8$이므로

$$10(p+q)=10\times\left(-\frac{7}{2}+8\right)=10\times\frac{9}{2}=45$$

64. 정답 9

함수의 미분가능성과 역함수의 미분법

조건 (가)에서 $f(1)=1$이므로

$\frac{1}{2}\ln a+b+c=1$ …… ㉠

$f'(x)=\frac{1}{2x}+2bx+c=\frac{4bx^2+2cx+1}{2x}$

조건 (나)에서 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하려면 모든 양수 x에 대하여 항상 $f'(x)\ge 0$이거나 항상 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

이때 $\lim_{x\to 0+}f'(x)=\infty$이므로 모든 양수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$, 즉

$4bx^2+2cx+1\ge 0$이어야 한다.

$4bx^2+2cx+1=4b\left(x+\frac{c}{4b}\right)^2+1-\frac{c^2}{4b}$

$b>0,\ c<0$에서 $-\frac{c}{4b}>0$이므로 모든 양수 x에 대하여

$f'(x)\ge 0$이려면

$1-\frac{c^2}{4b}\ge 0$, 즉 $c^2-4b\le 0$ …… ㉡

한편, 함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$f(1)=1$에서 $g(1)=1$이므로 $h(1)=0$이다.
이때 조건 (나)에서 함수 $|h(x)|$가 $x=1$에서 미분가능하므로
$h'(1)=0$이어야 한다.

$g'(1)=\dfrac{1}{f'(1)}$에서

$$h'(1)=f'(1)-g'(1)$$
$$=f'(1)-\frac{1}{f'(1)}$$

$h'(1)=0$에서 $f'(1)>0$이므로

$f'(1)=1$

$f'(1)=\dfrac{4b+2c+1}{2}=1$에서

$$b=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}c \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉢을 ㉠에 대입하면

$$\frac{1}{2}\ln a+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}c\right)+c=1$$

$$\ln a=\frac{3}{2}-c \qquad \cdots\cdots ㉣$$

㉢을 ㉡에 대입하면

$$c^2-4\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}c\right)\le 0$$
$$c^2+2c-1\le 0$$
$$-1-\sqrt{2}\le c\le -1+\sqrt{2}$$

$c<0$이므로

$$-1-\sqrt{2}\le c<0$$

㉢, ㉣에서

$$f(2)=\frac{1}{2}\ln 2a+4b+2c$$
$$=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln a+4b+2c$$
$$=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-c\right)+4\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}c\right)+2c$$
$$=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{7}{4}-\frac{1}{2}c$$

따라서 $f(2)$의 값은 $c=-1-\sqrt{2}$일 때 최댓값

$$\frac{1}{2}\ln 2+\frac{7}{4}-\frac{1}{2}(-1-\sqrt{2})$$
$$=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{9}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

를 갖는다.

즉, $p=\dfrac{9}{4}$, $q=\dfrac{1}{2}$이므로

$$8pq=8\times\frac{9}{4}\times\frac{1}{2}=9$$

65. 정답 ④

매개변수로 나타낸 곡선의 길이

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\{f'(t)\}^2=e^{2t}\{g(t)\}^2,$$
$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\{g'(t)\}^2=e^{2t}\{f(t)\}^2$$

이므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=e^{2t}\left[\{f(t)\}^2+\{g(t)\}^2\right]$$

$f'(t)=e^t g(t)$, $g'(t)=-e^t f(t)$

이므로

$$\left[\{f(t)\}^2+\{g(t)\}^2\right]'=2f(t)f'(t)+2g(t)g'(t)$$
$$=2e^t f(t)g(t)-2e^t g(t)f(t)=0$$

그러므로 $\{f(t)\}^2+\{g(t)\}^2$은 상수함수이다.

$g(1)=k$라 하면

$\{f(1)\}^2+\{g(1)\}^2=0+k^2=k^2$이므로

$\{f(t)\}^2+\{g(t)\}^2=k^2$

그러므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=e^{2t}\left[\{f(t)\}^2+\{g(t)\}^2\right]$$
$$=k^2e^{2t}$$

$1\le t\le 3$일 때, 곡선 $x=f(t)$, $y=g(t)$의 길이가 2이므로

$$\int_1^3\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_1^3\sqrt{k^2e^{2t}}\,dt$$
$$=\int_1^3|k|e^t\,dt$$
$$=\Big[|k|e^t\Big]_1^3$$
$$=|k|(e^3-e)=2$$

따라서

$$|g(1)|=|k|=\frac{2}{e^3-e}$$

66. 정답 ②

삼각함수의 그래프, 삼각방정식

$\dfrac{2}{k}\cos^3\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\dfrac{1}{k}\sin x+1$에서

$$\frac{2}{k}\sin^3 x=\frac{1}{k}\sin x+1$$
$$2\sin^3 x=\sin x+k$$
$$2\sin^3 x-\sin x=k$$

$h(x)=2\sin^3 x-\sin x$라 하면

$h'(x)=6\sin^2 x\cos x-\cos x=\cos x(6\sin^2 x-1)$

$h'(x)=0$을 만족시키는 x의 값에 대하여 $\cos x=0$ 또는

$\sin^2 x=\dfrac{1}{6}$이어야 하므로 $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$인 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$에 대하여

$x=\alpha$, $\dfrac{\pi}{2}$, $\pi-\alpha$, $\pi+\alpha$, $\dfrac{3}{2}\pi$, $2\pi-\alpha$에서 함수 $h(x)$는 극값을

갖는다.

$h(\alpha)=h(\pi-\alpha)=-\frac{\sqrt{6}}{9}$

$h(\pi+\alpha)=h(2\pi-\alpha)=\frac{\sqrt{6}}{9}$

$h\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\ h\left(\frac{3}{2}\pi\right)=-1$

이므로 함수 $y=h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$
$h'(x)$	-1	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	0	↘	$-\frac{\sqrt{6}}{9}$	↗	1	↘

x	$\cdots$	$\pi-\alpha$	$\cdots$	$\pi+\alpha$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$h(x)$	↘	$-\frac{\sqrt{6}}{9}$	↗	$\frac{\sqrt{6}}{9}$	↘	-1

x	$\cdots$	$2\pi-\alpha$	$\cdots$	(2π)
$h'(x)$	$+$	0	$-$	(0)
$h(x)$	↗	$\frac{\sqrt{6}}{9}$	↘	(0)

따라서 $2\sin^3 x-\sin x=k$의 서로 다른 실근의 개수가 4일 때,

$k=\frac{\sqrt{6}}{9}$이다.

67. 정답 88

등비급수

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a(a\neq 0)$, 공비를 r이라 하자.

$|r|>1$이면 수열 $\{a_n\}$의 각 항의 절댓값이 커지므로 어떤 자연수 N이 존재하여 $n\geq N$이면 $|a_n|\geq 1,\ b_n=a_n$이 성립한다.

그러면 $n\geq N$일 때 수열 $\{b_n\}$은 공비가 r인 등비수열이고, 두 수열 $\{b_{3n}\},\ \{b_{3n-1}\}$은 공비가 r^3인 등비수열이므로 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_{3n-1},\ \sum_{n=1}^{\infty}b_{3n}$은 각각 발산한다. $|r|=1$이면 수열 $\{a_n\}$의 각 항의 절댓값이 같으므로 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_{3n-1},\ \sum_{n=1}^{\infty}b_{3n}$은 각각 발산한다.

그러므로 $|r|<1$이다.

(ⅰ) $|a_4|<1,\ |a_5|\geq 1$이면

$b_4=4a_4=-1,\ a_5=b_5=2$이므로 $r=-8$이고 $|r|<1$을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $|a_4|<1,\ |a_5|<1$이면

$b_4=4a_4=-1,\ b_5=4a_5=2$이므로 $r=-2$이고 $|r|<1$을 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $|a_4|\geq 1,\ |a_5|\geq 1$이면

$b_4=a_4=-1,\ b_5=a_5=2$이므로 $r=-2$이고 $|r|<1$을 만족시키지 않는다.

(ⅳ) $|a_4|\geq 1,\ |a_5|<1$이면

$b_4=a_4=-1,\ b_5=4a_5=2$이므로 $r=-\frac{1}{2}$이고 $|r|<1$을 만족시킨다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서 두 수열 $\{a_n\},\ \{b_n\}$은 다음과 같다.

$\{a_n\}$: $8,\ -4,\ 2,\ -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ -\frac{1}{64}\cdots$

$\{b_n\}$: $8,\ -4,\ 2,\ -1,\ 2,\ -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{16}\cdots$

두 수열 $\{b_{3n}\},\ \{b_{3n-1}\}$은 각각 두 번째 항부터 공비가 $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$인 등비수열이므로 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_{3n-1},\ \sum_{n=1}^{\infty}b_{3n}$이 각각 수렴한다.

따라서

$$14\times\sum_{n=1}^{\infty}|b_{3n-1}|=14\times\left(|b_2|+\frac{|b_5|}{1-\frac{1}{8}}\right)$$

$$=14\times\left(4+\frac{2}{1-\frac{1}{8}}\right)$$

$$=14\times\left(\frac{28}{7}+\frac{16}{7}\right)=88$$

68. 정답 9

함수의 그래프, 함수의 극대, 극소

$g(x)=\frac{a+f(x)}{e^{f(x)}}=\{a+f(x)\}e^{-f(x)}$이므로

$g'(x)=f'(x)e^{-f(x)}+\{a+f(x)\}e^{-f(x)}\{-f'(x)\}$

$=-f'(x)\{f(x)+a-1\}e^{-f(x)}$

함수 $g(x)$는 $f(x)=1-a$ 또는 $f'(x)=0$인 실수 x에서 극값을 갖는다.

$f(x)=1-a$의 해를 $x=\alpha,\ x=\beta(\alpha<\beta)$라 하면 함수 $f(x)$가 이차함수이므로 대칭성에 의해 $f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=0$

이며 $g'(x)$의 부호에 따라 함수 $g(x)$는 $x=\alpha,\ \beta$에서 극대, $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$에서 극소를 갖는다.

그러므로 $\alpha=2,\ \frac{\alpha+\beta}{2}=4$이고 $\beta=6$이다.

$g(2)=\frac{a+f(2)}{e^{f(2)}}=\frac{a+(1-a)}{e^{1-a}}=\frac{1}{e^4}$

$a=-3$

이고 $f(x)=4$의 해가 $\alpha=2,\ \beta=6$이므로

$f(x)=(x-2)(x-6)+4=x^2-8x+16$

이고

$g(4)=\frac{-3+f(4)}{e^{f(4)}}=\frac{-3+0}{e^0}=-3$

이다. 따라서
$a\times g(4)=(-3)\times(-3)=9$

69. 정답 ⑤
역함수의 미분법
곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(3,\ g(3))$에서의 접선의 기울기는 $g'(3)$이다.
$g(3)=k$라 하면 $f(k)=3$

$\dfrac{9}{k^2-1}=3,\ k^2-1=3,\ k^2=4$

$k>1$이므로 $k=2$이고

$f'(x)=-\dfrac{18x}{(x^2-1)^2}$에서

$f'(2)=-\dfrac{18\times2}{(2^2-1)^2}=-\dfrac{36}{9}=-4$

따라서

$g'(3)=\dfrac{1}{f'(g(3))}=\dfrac{1}{f'(k)}=\dfrac{1}{f'(2)}=-\dfrac{1}{4}$

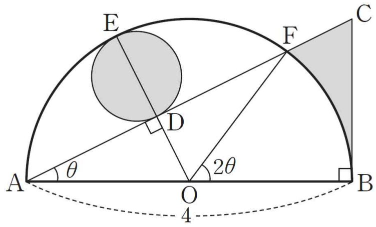
70. 정답 ①
삼각함수의 극한
넓이가 $f(\theta)$인 원의 지름이 선분 DE이므로

$f(\theta)=\pi\left(\dfrac{\overline{\mathrm{DE}}}{2}\right)^2$

$\overline{\mathrm{OE}}=2,\ \overline{\mathrm{OD}}=2\sin\theta$이므로
$\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{OE}}-\overline{\mathrm{OD}}=2-2\sin\theta$에서

$f(\theta)=\pi\left(\dfrac{2-2\sin\theta}{2}\right)^2=\pi(1-\sin\theta)^2$

즉 $f(\theta)=\pi-2\pi\sin\theta+\pi\sin^2\theta$
그림과 같이 선분 OF에 대하여 $g(\theta)$는 직각삼각형 ABC의 넓이에서 삼각형 AOF의 넓이와 부채꼴 OBF의 넓이를 빼서 구할 수 있다.



삼각형 AOF는 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OF}}$인 이등변삼각형이므로 그 넓이는 삼각형 AOD의 넓이의 두 배이다.
$\overline{\mathrm{AD}}=2\cos\theta,\ \overline{\mathrm{OD}}=2\sin\theta$이므로
삼각형 AOF의 넓이는

$2\times\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{OD}}=2\cos\theta\times2\sin\theta$

$=4\sin\theta\cos\theta$ …… ㉠

한편 부채꼴 OBF에서 각 $\angle\mathrm{BOF}$는 호 BF에 대한 중심각이고 호 BF에 대한 원주각의 크기가 θ이므로
$\angle\mathrm{BOF}=2\theta$

부채꼴 OBF의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times2^2\times2\theta=4\theta$ …… ㉡

또 $\overline{\mathrm{BC}}=4\tan\theta$이므로 삼각형 ABC의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\times4\times4\tan\theta=8\tan\theta$

따라서 $g(\theta)=8\tan\theta-4\sin\theta\cos\theta-4\theta$이고

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\pi-f(\theta)}{g(\theta)+3\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\pi-\pi+2\pi\sin\theta-\pi\sin^2\theta}{8\tan\theta-4\sin\theta\cos\theta-4\theta+3\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\pi\sin\theta-\pi\sin\theta}{8\tan\theta-4\sin\theta\cos\theta-\theta}\times\sin\theta$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\pi\times\dfrac{\sin\theta}{\theta}-\pi\times\dfrac{\sin\theta}{\theta}\times\sin\theta}{8\times\dfrac{\tan\theta}{\theta}-4\times\dfrac{\sin\theta}{\theta}\times\cos\theta-\dfrac{\theta}{\theta}}$$
$$=\frac{2\pi\times1-\pi\times1\times0}{8\times1-4\times1\times1-1}=\frac{2}{3}\pi$$

71. 정답 30
치환적분
조건 (가)에서 $x>0$이므로

$-\dfrac{1}{x^2}f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)+(x-2)e^x$

$f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x^2}f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-f(x)+(x-2)e^x$

$\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-f(x)+(x-2)e^x$

$\displaystyle\int_1^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)f\left(x+\frac{1}{x}\right)dx$에서

$x+\dfrac{1}{x}=t$로 치환하면 $1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{dt}{dx}$

$x=1$일 때 $t=2$이고, $x=2$일 때, $t=\dfrac{5}{2}$

따라서 $\displaystyle\int_1^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)f\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=\int_2^{\frac{5}{2}}f(t)dt$

한편

$\displaystyle\int_1^2\left\{f\left(x+\frac{1}{x}\right)-f(x)+(x-2)e^x\right\}dx$

$\displaystyle=\int_1^2 f\left(x+\frac{1}{x}\right)dx-\int_1^2 f(x)dx+\int_1^2(x-2)e^x dx$

에서

$\displaystyle\int_1^2(x-2)e^x dx=\Big[(x-2)e^x\Big]_1^2-\int_1^2 e^x dx$

$=-(-1)e-(e^2-e)$

$=2e-e^2$

이므로

$\int_2^{\frac{5}{2}} f(t)dt = \int_1^2 f\left(x+\frac{1}{x}\right)dx - \int_1^2 f(x)dx + 2e - e^2$

$\int_2^{\frac{5}{2}} f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 f\left(x+\frac{1}{x}\right)dx + 2e - e^2$

$\int_2^{\frac{5}{2}} f(t)dt = 3e + e^2 + 2e - e^2 = 5e$에서

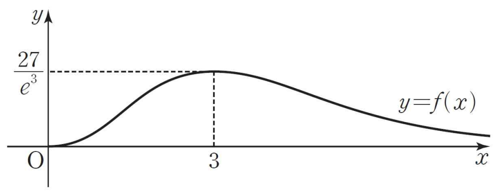
$k=5$

따라서 $6k=30$

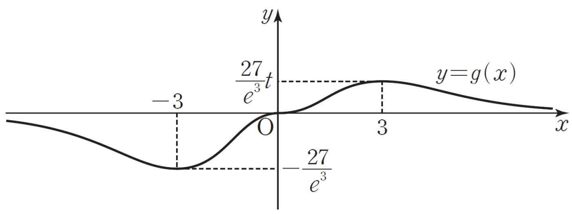
72. 정답 43

도함수의 활용

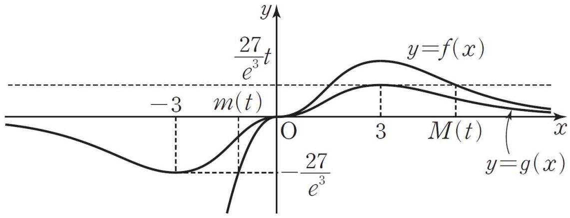
$f'(x) = (3x^2 - x^3)e^{-x} = x^2(3-x)e^{-x}$이므로 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극댓값 $f(3) = \frac{27}{e^3}$을 갖고 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$이므로 $x \geq 0$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



한편 곡선 $y=-f(-x)$는 곡선 $y=f(x)$를 원점에 대하여 대칭이동시킨 곡선이고 $x \geq 0$일 때 곡선 $y=tf(x)$의 그래프는 $x=3$에서 극댓값 $\frac{27}{e^3}t$를 갖고 $0<t<1$이므로 함수 $g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 방정식 $g(x) = f(a)$의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되려면 그림과 같이 $f(a) = -\frac{27}{e^3}$이거나 $f(a)=0$ 또는 $f(a) = \frac{27}{e^3}t$이어야 한다.



$f(a) = -\frac{27}{e^3}$을 만족시키는 a의 값이 $m(t)$이므로

$f(m(t)) = -\frac{27}{e^3}$에서 $m(t)$는 음의 실수이다.

$f(a) = \frac{27}{e^3}t$를 만족시키는 a의 최댓값이 $M(t)$이므로

$f(M(t)) = \frac{27}{e^3}t$

$h(t) = M(t) - m(t)$에서 $h(k) + m(k) = 4$이므로

$M(k) = 4$

$f(M(t)) = \frac{27}{e^3}t$의 양변을 t에 대하여 미분하면

$f'(M(t))M'(t) = \frac{27}{e^3}$이고 $t=k$를 대입하면

$f'(4) \times M'(k) = \frac{27}{e^3}$

$f'(4) = 4^2 \times (3-4)e-4 = -\frac{16}{e^4}$이므로

$M'(k) = \frac{27}{e^3} \times \left(-\frac{e^4}{16}\right) = -\frac{27}{16}e$

따라서 $h(t) = M(t) - m(t)$에서 $m(t)$는 상수이므로

$h'(t) = M'(t)$이고

$|h'(k)| = \frac{27}{16}e$에서 $p=16$, $q=27$이므로 $p+q=43$

73. 정답 ②

여러 가지 미분법, 접선

$f(x) = (\ln x)^2 + a\ln x$

$f'(x) = 2(\ln x) \times \frac{1}{x} + a \times \frac{1}{x}$

$f\left(\frac{1}{e}\right) = 1-a$

$f'\left(\frac{1}{e}\right) = -2e + ae$

이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(\frac{1}{e},\ f\left(\frac{1}{e}\right)\right)$에서의 접선의 방정식은

$y = e(a-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)+1-a$ …… ㉠

$f(e) = 1+a$

$f'(e) = \frac{2}{e} + \frac{a}{e}$

이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(e,\ f(e))$에서의 접선의 방정식은

$y = \frac{a+2}{e}(x-e)+1+a$ …… ㉡

위에서 구한 두 접선이 만나는 점의 x좌표가 0이므로

㉠, ㉡에 각각 $x=0$을 대입하면 y 값이 서로 같다.

즉, $-a+2+1-a = -a-2+1+a$에서

$-2a+3=-1$, $a=2$

즉, $f'(x) = 2(\ln x) \times \frac{1}{x} + 2 \times \frac{1}{x}$에서

$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=f'(1)=2$

74. 정답 ⑤

적분, 역함수, 이계도함수, 함수의 그래프

$f(x)=ae^{2x}+be^{x}+c$이므로

$f'(x)=2ae^{2x}+be^{x}$

조건 (가)에서 $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{f(x)+3}$의 극한값이 0이 아닌 값으로 존재하고

$x\to 0$일 때 (분자) $\to 0$이므로 (분모) $\to 0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to 0}\{f(x)+3\}=0$에서

$f(0)=-3$이므로

$a+b+c=-3$ …… ㉠

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(x+2)}{f(x)+3}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x-0}{f(x)-f(0)}\times(x+2)\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-0}{f(x)-f(0)}\times\lim_{x\to 0}(x+2)$$

$$=\frac{2}{f'(0)}$$

즉, $\frac{2}{f'(0)}=\frac{2}{5}$에서 $f'(0)=5$이므로

$2a+b=5$ …… ㉡

조건 (나)에서 $f(x)\geq f'(t)(x-t)+f(t)$의 우변은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 식이므로 임의의 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선보다 항상 위에 있다. 즉, 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록이므로

$f''(x)\geq 0$이다.

$f''(x)=4ae^{2x}+be^{x}$

$=e^{x}(4ae^{x}+b)$

$a\neq 0$인 상수 a와 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)\geq 0$이고

$e^{x}>0$이므로 $4ae^{x}+b\geq 0$에서 $a>0,\ b\geq 0$이어야 한다.

b의 최솟값은 0이므로 $b=0$을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$a=\frac{5}{2},\ c=-\frac{11}{2}$

즉, b가 최소일 때 $f(x)=\frac{5}{2}e^{2x}-\frac{11}{2}$이다.

$f(0)=-3$이므로 $g(-3)=0$

$f(p)=17$에서

$f(p)=\frac{5}{2}e^{2p}-\frac{11}{2}=17$

$e^{2p}=9,\ p=\ln 3$

$f(\ln 3)=17$이므로 $g(17)=\ln 3$

$\int_{-3}^{17}g(x)dx$에서 $g(x)=t$로 놓으면 $g'(x)=\frac{dt}{dx}$이고

$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}=\frac{1}{f'(t)}$

이므로

$$\int_{-3}^{17}g(x)dx=\int_{0}^{\ln 3}tf'(t)dt$$

$$=\Big[tf(t)\Big]_{0}^{\ln 3}-\int_{0}^{\ln 3}f(t)dt$$

$$=(17\ln 3-0)-\int_{0}^{\ln 3}\left(\frac{5}{2}e^{2t}-\frac{11}{2}\right)dt$$

$$=17\ln 3-\left[\frac{5}{4}e^{2t}-\frac{11}{2}t\right]_{0}^{\ln 3}$$

$$=17\ln 3-\left\{\left(\frac{45}{4}-\frac{11}{2}\ln 3\right)-\frac{5}{4}\right\}$$

$$=\frac{45}{2}\ln 3-10$$

75. 정답 7

등비급수

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(2|a_n|+a_n),\ \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+2a_n)$이 모두 수렴하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{3}(2|a_n|+a_n)-\frac{1}{3}(|a_n|+2a_n)\right\}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{3}(|a_n|+2a_n)-\frac{1}{3}(2|a_n|+a_n)\right\}$$

에서 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|,\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n$도 모두 수렴한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 $r(r\neq 0)$이라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로

$-1<r<1$ …… ㉠

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\frac{|a|}{1-|r|},\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a}{1-r}$$

조건 (나)에서 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|+\sum_{n=1}^{\infty}a_n=0$이므로

$\frac{|a|}{1-|r|}=-\frac{a}{1-r}$ …… ㉡

$-1<r<1$에서 $1-|r|>0,\ 1-r>0$이다.

$a>0$이면 ㉡의 좌변은 양수이고 우변은 음수이므로 성립하지 않는다.

$a=0$이면 $a_m+1=0$인 항이 존재하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $a<0$이므로 ㉡에서

$\frac{-a}{1-|r|}=-\frac{a}{1-r}$

$|r|=r$

$r\neq 0$이므로 $r>0$

따라서 $a<0,\ r>0$

㉠에 의하여

$a<0,\ 0<r<1$

어떤 자연수 m에 대하여

$a_m+1=ar^{m-1}+1=0$

$a=-\dfrac{1}{r^{m-1}}$ …… ㉢

$\displaystyle\sum_{n=1}^{2m}|a_n+1|=\sum_{n=1}^{m}(-a_n-1)+\sum_{n=m+1}^{2m}(a_n+1)$

$\displaystyle=\sum_{n=1}^{m}(-a_n)+\sum_{n=m+1}^{2m}a_n$

$\displaystyle=\sum_{n=1}^{m}(-a_n)+r^m\sum_{n=1}^{m}a_n$

$\displaystyle=(r^m-1)\sum_{n=1}^{m}a_n$

$=(r^{m-1})\times\dfrac{a(1-r^m)}{1-r}$

$=\dfrac{-a(1-r^m)^2}{1-r}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{2m}|a_n+1|+\frac{225}{256}\sum_{n=1}^{\infty}a_n=0$에서

$\dfrac{-a(1-r^m)^2}{1-r}+\dfrac{225}{256}\times\dfrac{a}{1-r}=0$

$\dfrac{225}{256}=(1-r^m)^2$

$\dfrac{15}{16}=1-r^m$

$r^m=\dfrac{1}{16}$

$0<r<1$이므로

$r=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{4}{m}}$

따라서 r이 유리수가 되도록 하는 자연수 m의 값은 $1,\ 2,\ 4$이므로 그 합은 7이다.

76. 정답 5

함수의 그래프, 극대, 극소

$f(x)=a\pi x(x^2-3b^2)$

$=a\pi(x^3-3b^2x)$

$f'(x)=a\pi(3x^2-3b^2)$

$=3a\pi(x+b)(x-b)$

$g(x)=\sin f(x)$

$g'(x)=f'(x)\cos f(x)$

$=3a\pi(x+b)(x-b)\cos\{a\pi x(x^2-3b^2)\}$

$g'(x)=0$에서

$x=-b$ 또는 $x=b$ 또는 $\cos\{a\pi x(x^2-3b^2)\}=0$

(i) $x=-b$일 때

$\cos\{a\pi x(x^2-3b^2)\}=\cos a\pi\times(-b)\times(b^2-3b^2)\}$

$=\cos 2ab^3\pi=1$

이고 $x=-b$의 좌우에서 $(x+b)(x-b)$의 값이 양에서 음으로 바뀌므로 $g'(x)$의 부호도 양에서 음으로 바뀐다.

따라서 함수 $g(x)$는 $x=-b$에서 극대이다.

(ii) $x=b$일 때

$\cos\{a\pi x(x-3b^2)\}=\cos\{a\pi\times b(b^2-3b^2)\}$

$=\cos 2ab^3\pi=1$

이고 $x=b$의 좌우에서 $(x+b)(x-b)$의 값이 음에서 양으로 바뀌므로 $g'(x)$의 부호도 음에서 양으로 바뀐다.

따라서 함수 $g(x)$는 $x=b$에서 극소이다.

(iii) $-2b<x<-b$ 또는 $b<x<2b$일 때

$\cos\{a\pi x(x^2-3b^2)\}=0$인 x의 좌우에서

$(x+b)(x-b)$의 값이 양수이고 $\cos\{a\pi x(x^2-3b^2)\}$의 부호가 양에서 음으로 바뀌거나, 음에서 양으로 바뀐다.

따라서 함수 $g(x)$는 $\cos\{a\pi x(x^2-3b^2)\}=0$인 x의 값에서 극대 또는 극소이다.

(iv) $-b<x<b$일 때

$\cos\{a\pi x(x^2-3b^2)\}=0$인 x의 좌우에서 $(x+b)(x-b)$의 값이 음수이고 $\cos\{a\pi x(x^2-3b^2)\}$의 부호가 양에서 음으로 바뀌거나, 음에서 양으로 바뀐다.

따라서 함수 $g(x)$는 $\cos\{a\pi x(x^2-3b^2)\}=0$인 x의 값에서 극대 또는 극소이다.

(i)~(iv)에 의하여 함수 $g(x)$는

$x=-b$ 또는 $x=b$ 또는 $\cos\{a\pi x(x^2-3b^2)\}=0$

인 x의 값에서 모두 극대 또는 극소이다.

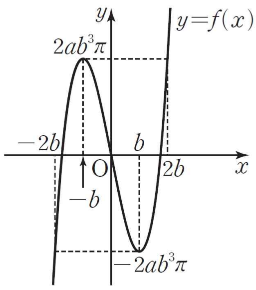
즉, 열린구간 $(-2b,\ 2b)$에서

$x=-b$ 또는 $x=b$ 또는 $\cos\{a\pi x(x^2-3b^2)\}=0$

인 모든 x의 값의 집합이 A이다.

$f'(x)=a\pi(3x^2-3b^2)$이고

$f'(x)=0$에서 $x=-b$ 또는 $x=b$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-b$에서 극대이고 $x=b$에서 극소이고, 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



곡선 $y=\cos x$의 주기가 2π이고 $0<x<2\pi$에서 $\cos x=0$을 만족시키는 x 값의 개수가 2이므로 집합 A의 원소의 개수는 다음과 같이 구할 수 있다.

$-2b<x<-b$와 $b<x<2b$에서 $f(x)$의 값이 $-2ab^3\pi$에서 $2ab^3\pi$로 변하며 일대일대응이므로, $-2b<x<-b$와 $b<x<2b$에서 집합 A에 속하는 원소의 개수는 $\dfrac{2ab^3\pi-(-2ab^3\pi)}{2\pi}\times2\times2=8ab^3$이다.

또, $-b<x<b$에서 $f(x)$의 값이 $2ab^3\pi$에서 $-2ab^3\pi$로 변하며

일대일대응이므로, $-b<x<b$에서 집합 A에 속하는 원소의 개수는

$\dfrac{2ab^3\pi-(-2ab^3\pi)}{2\pi}\times 2=4ab^3$이다.

$x=-b$ 또는 $x=b$도 집합 A에 속하는 원소이므로 집합 A의 원소의 개수는 $8ab^3+4ab^3+2$, 즉 $12ab^3+2$이다.

이때 집합 A의 원소의 개수가 290이므로

$12ab^3+2=290$

$12ab^3=288$

$ab^3=24=3\times 2^3$

그런데 a, b는 1이 아닌 두 자연수이므로 $a=3$, $b=2$

따라서 $a+b=3+2=5$

77. 정답 ①

부정적분과 역함수의 미분법

조건 (나)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\dfrac{x}{(x^2+1)f(x)}$

$f(x)f'(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ …… ㉠

$\displaystyle\int f(x)f'(x)dx=\int\frac{x}{x^2+1}dx$

$\dfrac{1}{2}\{f(x)\}^2=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$ (단, C는 적분상수) …… ㉡

또한 조건 (나)에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=1$

이므로 ㉡에 $x=0$을 대입하면

$\dfrac{1}{2}=C$

$\dfrac{1}{2}\{f(x)\}^2=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+\dfrac{1}{2}$에서

$\{f(x)\}^2=\ln(x^2+1)+1$ …… ㉢

또한 $g'(\sqrt{2})=\dfrac{1}{f'(g(\sqrt{2}))}$이고 $g(\sqrt{2})=k$ $(k\geq 0)$이라 하면

$f(k)=\sqrt{2}$

㉢에 $x=k$를 대입하면

$2=\ln(k^2+1)+1$, $\ln(k^2+1)=1$

$k^2+1=e$, $k^2=e-1$

$k=\sqrt{e-1}$

즉, $f(\sqrt{e-1})=\sqrt{2}$

㉠에 $x=\sqrt{e-1}$을 대입하면

$f(\sqrt{e-1})f'(\sqrt{e-1})=\dfrac{\sqrt{e-1}}{(\sqrt{e-1})^2+1}$

$\sqrt{2}f'(\sqrt{e-1})=\dfrac{\sqrt{e-1}}{e}$

$f'(\sqrt{e-1})=\dfrac{\sqrt{e-1}}{\sqrt{2}e}$

따라서

$g'(\sqrt{2})=\dfrac{1}{f'(g(\sqrt{2}))}=\dfrac{\sqrt{2}e}{\sqrt{e-1}}$

78. 정답 ⑤

부분적분법

$f(x)=\ln\dfrac{3x+3}{x^2+3}$에서

$f'(x)=\dfrac{1}{\dfrac{3x+3}{x^2+3}}\times\dfrac{3(x^2+3)-(3x+3)\times 2x}{(x^2+3)^2}$

$=\dfrac{-3x^2-6x+9}{3(x+1)(x^2+3)}$

$=\dfrac{-(x+3)(x-1)}{(x+1)(x^3+3)}$

따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(-1)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\ln\frac{3}{2}$	↘

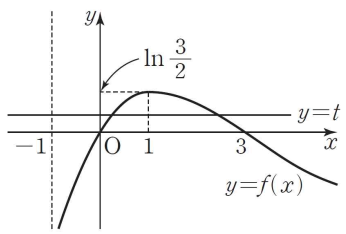
즉, 함수 $f(x)=\ln\dfrac{3x+3}{x^2+3}$은 $x=1$에서 극대이면서 최댓값 $\ln\dfrac{3}{2}$을 가지므로 $\alpha=\ln\dfrac{3}{2}$이다.

또한 $\ln\dfrac{3x+3}{x^2+3}=0$에서 $\dfrac{3x+3}{x^2+3}=1$이므로

$3x+3=x^2+3$, $x(x-3)=0$

즉, $x=0$ 또는 $x=3$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $\displaystyle\int_0^{\alpha}g(t)dt=\int_0^{\ln\frac{3}{2}}g(t)dt$의 값은 $0\leq t\leq\ln\dfrac{3}{2}$이고 $k>0$이므로

$\displaystyle\int_0^{\ln\frac{3}{2}}g(t)dt=\int_0^3 f(x)dx$ 즉, $k=3$

$\displaystyle\int_0^3 xf(x)dx=\int_0^3 x\ln\frac{3x+3}{x^2+3}dx$

$\displaystyle=\int_0^3 x\ln(3x+3)dx-\int_0^3 x\ln(x^2+3)dx$

이때 $\displaystyle\int_0^3 x\ln(3x+3)dx$에서

$u'(x)=x$, $v(x)=\ln(3x+3)$이라 하면

$u(x)=\frac{1}{2}x^2$, $v'(x)=\frac{3}{3x+3}=\frac{1}{x+1}$

이므로

$$\int_0^3 x\ln(3x+3)dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln(3x+3)\right]_0^3-\frac{1}{2}\int_0^3\frac{x^2}{x+1}dx$$
$$=\frac{9}{2}\ln 12-\frac{1}{2}\int_0^3\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\frac{9}{2}\ln 12-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2-x+\ln|x+1|\right]_0^3$$
$$=\frac{9}{2}\ln 12-\frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}-3+\ln 4\right)$$
$$=\frac{9}{2}\ln 12-\frac{1}{2}\ln 4-\frac{3}{4}$$

또한 $\int_0^3 x\ln(x^2+3)dx$에서 $x^2+3=y$라 하면

$x=0$일 때 $y=3$, $x=3$일 때 $y=12$이고

$2x=\frac{dy}{dx}$이므로

$$\int_0^3 x\ln(x^2+3)dx=\int_3^{12}\frac{1}{2}\ln y\,dy$$
$$=\frac{1}{2}\int_3^{12}\ln y\,dy$$
$$=\frac{1}{2}\left[y\ln y-y\right]_3^{12}$$
$$=\frac{1}{2}\{(12\ln 12-12)-(3\ln 3-3)\}$$
$$=6\ln 12-\frac{3}{2}\ln 3-\frac{9}{2}$$

따라서

$$\int_0^k xf(x)dx=\left(\frac{9}{2}\ln 12-\frac{1}{2}\ln 4-\frac{3}{4}\right)-\left(6\ln 12-\frac{3}{2}\ln 3-\frac{9}{2}\right)$$
$$=-\frac{3}{2}\ln 12+\frac{3}{2}\ln 3-\frac{1}{2}\ln 4+\frac{15}{4}$$
$$=-\frac{3}{2}(\ln 3+2\ln 2)+\frac{3}{2}\ln 3-\ln 2+\frac{15}{4}$$
$$=-4\ln 2+\frac{15}{4}$$

79. 정답 167

급수

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_n=a_1+(n-1)d=a_1-d+dn$이므로 조건 (가)에서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{2n+a_1}{n+1}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{a_1-d+dn}{n}-\frac{2(n+1)+a_1-2}{n+1}\right\} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이고 급수가 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a_1-d+dn}{n}-\frac{2(n+1)+a_1-2}{n+1}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(d+\frac{a_1-d}{n}-2-\frac{a_1-2}{n+1}\right)$$
$$=d+0-2-0$$
$$=d-2=0$$
$$d=2$$

따라서 ㉠에서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{a_1-2+2n}{n}-\frac{2(n+1)+a_1-2}{n+1}\right\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_1-2}{n}+2-2-\frac{a_1-2}{n+1}\right)$$
$$=(a_1-2)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=(a_1-2)\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=(a_1-2)\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=a_1-2=1$$
$$a_1=3$$

또한 등비수열 b_n의 공비를 r이라 하면 조건 (나)에 의하여

$-1<r<0$ 또는 $0<r<1$

(ⅰ) $b_1>0$, $0<r<1$일 때

$$\sum_{n=1}^{\infty}|2b_n|=2\sum_{n=1}^{\infty}b_n=2\times\frac{b_1}{1-r}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}7b_{2n}=7\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}=7\times\frac{b_2}{1-r^2}=7\times\frac{b_1r}{1-r^2}$$

즉, $2\times\frac{b_1}{1-r}=7\times\frac{b_1r}{1-r^2}$에서

$2=\frac{7r}{1+r}$, $2+2r=7r$

$r=\frac{2}{5}$

(ⅱ) $b_1<0$, $0<r<1$일 때

$b_n<0$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}|2b_n|=-2\sum_{n=1}^{\infty}b_n=-2\times\frac{b_1}{1-r}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}7b_{2n}=7\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}=7\times\frac{b_2}{1-r^2}=7\times\frac{b_1r}{1-r^2}$$

즉, $-2\times\frac{b_1}{1-r}=7\times\frac{b_1r}{1-r^2}$에서

$-2=\frac{7r}{1+r}$, $-2-2r=7r$

$r=-\frac{2}{9}$이므로 모순이다.

(ⅲ) $b_1>0$, $-1<r<0$일 때

$$\sum_{n=1}^{\infty}|2b_n|=2\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|=2\times\frac{b_1}{1+r}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}7b_{2n}=7\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}=7\times\frac{b_2}{1-r^2}=7\times\frac{b_1r}{1-r^2}$$

즉, $2\times\dfrac{b_1}{1+r}=7\times\dfrac{b_1r}{1-r^2}$에서

$2=\dfrac{7r}{1-r}$, $2-2r=7r$

$r=\dfrac{2}{9}$이므로 모순이다.

(iv) $b_1<0$, $-1<r<0$일 때

$$\sum_{n=1}^{\infty}|2b_n|=2\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|=2\times\frac{-b_1}{1+r}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}7b_{2n}=7\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}=7\times\frac{b_2}{1-r^2}=7\times\frac{b_1r}{1-r^2}$$

즉, $2\times\dfrac{-b_1}{1+r}=7\times\dfrac{b_1r}{1-r^2}$에서

$-2=\dfrac{7r}{1-r}$, $-2+2r=7r$

$r=-\dfrac{2}{5}$

(ⅰ)~(iv)에 의하여 $b_1>0$, $r=\dfrac{2}{5}$ 또는 $b_1<0$, $r=-\dfrac{2}{5}$이므로

$b_n=b_1\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}\ (b_1>0)$ 또는 $b_n=b_1\left(-\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}\ (b_1<0)$

또한 $a_n=2n+1$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}b_1\left(\frac{4}{25}\right)^n$$

$$=\frac{\frac{4}{25}b_1}{1-\frac{4}{25}}$$

$$=\frac{4b_1}{21}=\frac{8}{21}$$

$b_1=2$

즉, $b_n=2\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$이므로

$$25(a_3-b_3)=25\left(7-\frac{8}{25}\right)$$

$$=167$$

80. 정답 75

도함수의 활용

실수 전체의 집합에서 함수

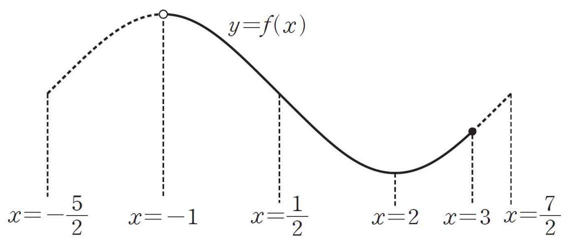
$f(x)=a\sin\left\{\dfrac{\pi}{3}\left(x+\dfrac{5}{2}\right)\right\}+b$의 주기는

$$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$$

이고 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=a\sin\dfrac{\pi}{3}x+b$의 그래프를

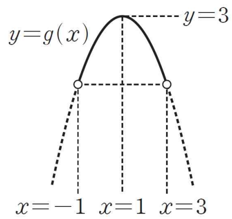
x축의 방향으로 $-\dfrac{5}{2}$만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=f(x)$의

그래프는 다음과 같다.



또한 $g(x)=-x^2+2x+2=-(x-1)^2+3$이므로 함수 $y=g(x)$의

그래프는 다음과 같다.



이때 $h(x)=f(g(x))$에서 $h'(x)=f'(g(x))\times g'(x)$이므로

$h'(x)>0$일 때

$f'(g(x))>0$, $g'(x)>0$ 또는 $f'(g(x))<0$, $g'(x)<0$

(ⅰ) $-1<x<3$이고 $f'(g(x))>0$, $g'(x)>0$일 때

$f'(g(x))>0$에서 $2<g(x)\le 3$

$2<-x^2+2x+2\le 3$

$2<-x^2+2x+2$에서

$x^2-2x<0$, $x(x-2)<0$

$0<x<2$ …… ㉠

$-x^2+2x+2\le 3$에서

$x^2-2x+1=(x-1)^2\ge 0$

$-1<x<3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $0<x<2$ …… ㉢

$g'(x)>0$에서 $-1<x<1$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $0<x<1$

(ⅱ) $-1<x<3$이고 $f'(g(x))<0$, $g'(x)<0$일 때

$f'(g(x))<0$에서 $-1<g(x)<2$

$-1<-x^2+2x+2<2$

$-1<-x^2+2x+2$에서

$x^2-2x-3<0$, $(x-3)(x+1)<0$

$-1<x<3$ …… ㉤

$-x^2+2x+2<2$에서

$x^2-2x=x(x-2)>0$

$x<0$ 또는 $x>2$ …… ㉥

㉤, ㉥에서 $-1<x<0$ 또는 $2<x<3$ …… ㉦

$g'(x)<0$에서 $1<x<3$ …… ㉧

㉦, ㉧에서 $2<x<3$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $h'(x)>0$인 범위가 $0<x<1$ 또는 $2<x<3$이므로 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(-1)		0		1		2		(3)
$h'(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	
$h(x)$		↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗	

이때 $g(0)=g(2)$이고 함수 $h(x)$의 극댓값이 $\frac{1}{4}$, 극솟값이 -1이므로

$h(1)=f(g(1))=f(3)=a\sin\frac{11}{6}\pi+b$

$=-\frac{1}{2}a+b=\frac{1}{4}$ …… ㉨

$h(0)=f(g(0))=f(2)=a\sin\frac{3}{2}\pi+b$

$=-a+b=-1$ …… ㉩

㉨, ㉩에 의하여 $a=\frac{5}{2}$, $b=\frac{3}{2}$이므로

$20ab=20\times\frac{5}{2}\times\frac{5}{2}=75$

81. 정답 ⑤

함수의 그래프

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하므로

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$ 또는

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이다.

$f'(x)=(ax^2+2ax+b)e^x$이고 $a>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$일 수 없으므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이다.

따라서 모든 실수 x에 대하여

$(ax^2+2ax+b)e^x\ge 0$

$ax^2+2ax+b\ge 0$

이므로 x에 대한 이차방정식 $ax^2+2ax+b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-ab=a(a-b)\le 0$

$a>0$이므로 $a-b\le 0$ …… ㉠

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-2$이고 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(\alpha)=0$인 실수 α가 적어도 하나 존재하게 되는데, 함수 $f(x)$는 증가함수이므로 α는 방정식 $f(x)=0$의 유일한 실근이다.

함수 $|f(x)|$는 $x=\alpha$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to\alpha-}\frac{|f(x)|}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha+}\frac{|f(x)|}{x-\alpha}$, 즉 $f'(\alpha)=0$이다.

즉, $ax^2+2ax+b=0$의 실근 α가 존재하므로 x에 대한 이차방정식 $ax^2+2ax+b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-ab=a(a-b)\ge 0$

$a>0$이므로 $a-b\ge 0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=b$이므로 방정식 $ax^2+2ax+b=0$의 실근은 -1이다.

즉, $\alpha=-1$

$\alpha=-1$은 x에 대한 방정식 $(ax^2+a)e^x-2=0$의 실근이므로

$\{a(-1)^2+a\}e^{-1}-2=0$에서 $a=b=e$

따라서 $f(x)=(x^2+1)e^{x+1}-2$

$g(5e^3-2)=k$라 하면 $f(k)=5e^3-2$이므로

$(k^2+1)e^{k+1}-2=5e^3-2$에서 $k=2$

역함수의 미분법에 의하여

$$g'(5e^3-2)=\frac{1}{f'(g(5e^3-2))}$$
$$=\frac{1}{f'(2)}$$
$$=\frac{1}{(2+1)^2e^{2+1}}$$
$$=\frac{1}{9e^3}$$

82. 정답 ⑤

역함수의 미분법

$M(t)$는 x에 대한 방정식 $te^x=x$의 실근이므로

$te^{M(t)}=M(t)$

$\frac{M(t)}{e^{M(t)}}=t$

$M(t)=x$라 하면 $x>1$이고,

$h(x)=\frac{x}{e^x}(x>1)$이라 하면

$h'(x)=(1-x)e^{-x}$이므로 $x>1$에서 함수 $h(x)$는 감소하고,

$h(M(x))=x$이므로 함수 $M(x)\left(0<x<\frac{1}{e}\right)$은 함수 $h(x)$ $(x>1)$의 역함수이다.

한편, $h''(x)=(x-2)e^{-x}$이므로 곡선 $y=h(x)$의 변곡점은 $(2,\ h(2))$, 즉 $(2,\ 2e^{-2})$이다.

또한 $M'(x)=\frac{1}{h'(M(x))}$이고

$M''(x)=\frac{-h''(M(x))}{\{h'(M(x))\}^3}$이므로 $x=2e^{-2}$의 좌우에서 $M''(x)$의 부호가 바뀐다.

따라서 함수 $y=M(x)\left(0<x<\frac{1}{e}\right)$의 그래프의 변곡점은 $(2e^{-2},\ 2)$이다.

한편, $h(M(x))=x$에서 $M'(x)h'(M(x))=1$이므로

$M'(2e^{-2})=\frac{1}{h'(M(2e^{-2}))}$ …… ㉠

$M(2e^{-2})=2$이고 $h'(2)=-e^{-2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$$M'(2e^{-2})=\frac{1}{h'(2)}=-e^{2}$$

따라서 곡선 $y=M(x)\left(0<x<\frac{1}{e}\right)$ 위의 변곡점에서의 접선의 방정식은

$$y-2=-e^{2}(x-2e^{-2})$$

$$y=-e^{2}x+4$$

이 직선의 x절편은 $\frac{4}{e^{2}}$, y절편은 4이므로

$$a=\frac{4}{e^{2}},\ b=4$$

따라서 $ab=\frac{4}{e^{2}}\times4=\frac{16}{e^{2}}$

83. 정답 12

부분적분법

자연수 n에 대하여

$$\int_{\frac{(n-1)}{a}\pi}^{\frac{n}{a}\pi} x\sin ax\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{a}x\cos ax\right]_{\frac{(n-1)}{a}\pi}^{\frac{n}{a}\pi}+\frac{1}{a}\int_{\frac{(n-1)}{a}\pi}^{\frac{n}{a}\pi}\cos ax\,dx$$

$$=(-1)^{n-1}\times\frac{(2n-1)}{a^{2}}\pi$$

이고, 0 이상의 정수 k에 대하여

$\frac{2k}{a}\pi\le t\le\frac{(2k+1)}{a}\pi$에서

$|t\sin at|-t\sin at=0$이므로

$$\int_{\frac{2k}{a}\pi}^{\frac{(2k+1)}{a}\pi}\{|t\sin at|-t\sin at\}dt=0$$

$\frac{(2k+1)}{a}\pi\le t\le\frac{(2k+2)}{a}\pi$에서

$|t\sin at|-t\sin at=-2t\sin at$이므로

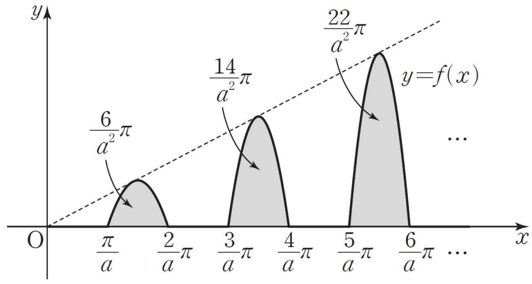
$$\int_{\frac{(2k+1)}{a}\pi}^{\frac{(2k+2)}{a}\pi}\{|t\sin at|-t\sin at\}dt$$

$$=-2\int_{\frac{(2k+1)}{a}\pi}^{\frac{(2k+2)}{a}\pi}t\sin at\,dt$$

$$=-2\times(-1)^{2k+2-1}\times\frac{\{2(2k+2)-1\}}{a^{2}}\pi$$

$$=\frac{2(4k+3)}{a^{2}}\pi$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서 $t_1=\frac{\pi}{a}$, $t_2=\frac{2}{a}\pi$, $\cdots$, $t_6=\frac{6}{a}\pi$이고

$$\int_{0}^{t_6}f(x)dx=\frac{6}{a^{2}}\pi+\frac{14}{a^{2}}\pi+\frac{22}{a^{2}}\pi$$

$$=\frac{42}{a^{2}}\pi=\frac{7}{24}\pi$$

따라서 $a^{2}=144$, $a=12$

84. 정답 9

삼각함수의 덧셈정리

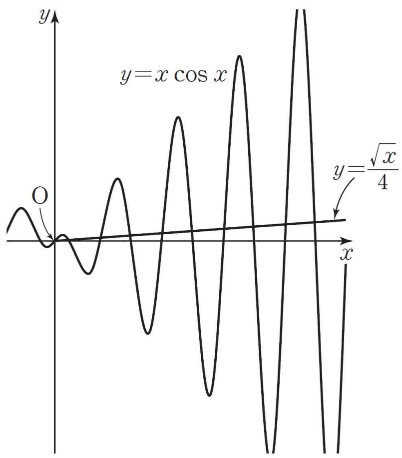
$\frac{\sqrt{a_n}}{4}=a_n\cos a_n$에서

$$\cos a_n=\frac{1}{4\times\sqrt{a_n}} \quad \cdots\cdots \ ㉠$$

따라서 $\cos^{2}an=\frac{1}{16a_n}$이므로

$$\sin^{2}a_n=1-\cos^{2}a_n=\frac{16a_n-1}{16a_n}$$

$$\sin a_n=\pm\sqrt{\frac{16a_n-1}{16a_n}} \quad \cdots\cdots \ ㉡$$



$x>0$일 때 함수 $y=\frac{\sqrt{x}}{4}$의 그래프와 함수 $y=x\cos x$의 그래프는 제1사분면에서만 만나므로 두 그래프의 교점은 $\cos x>0$인 x의 범위에서만 존재한다.

한편, $(x\cos x)'=\cos x-x\sin x=0$에서

$\tan x = \frac{1}{x} > 0$이므로, $x > 0$일 때 함수 $y = x\cos x$는 x가
제1사분면의 각일 때 극대이고, x가 제3사분면의 각일 때 극소이다.
따라서 $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여

$$2(n-1)\pi < a_{2n} < 2(n-1)\pi + \frac{\pi}{2}$$

따라서 ㉡에서

$$\sin a_{2n} = \sqrt{\frac{16a_{2n}-1}{16a_{2n}}} \qquad \cdots\cdots \text{㉢}$$

한편, ㉠과 ㉢에 의하여

$$\sin(a_{2n+2} - a_{2n})$$
$$= \sin a_{2n+2}\cos a_{2n} - \sin a_{2n}\cos a_{2n+2}$$
$$= \sqrt{\frac{16a_{2n+2}-1}{16a_{2n+2}}} \times \frac{1}{\sqrt{16a_{2n}}} - \sqrt{\frac{16a_{2n}-1}{16a_{2n}}} \times \frac{1}{\sqrt{16a_{2n+2}}}$$
$$= \frac{\sqrt{16a_{2n+2}-1} - \sqrt{16a_{2n}-1}}{\sqrt{16a_{2n+2}}\sqrt{16a_{2n}}}$$
$$= \frac{a_{2n+2} - a_{2n}}{\sqrt{a_{2n+2}}\sqrt{a_{2n}}\left(\sqrt{16a_{2n+2}-1} + \sqrt{16a_{2n}-1}\right)}$$

한편, $2(n-1)\pi < a_{2n} < 2(n-1)\pi + \frac{\pi}{2}$,

$2n\pi < a_{2n+2} < 2n\pi + \frac{\pi}{2}$이므로

$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \infty$이고

$$\frac{2n\pi}{2(n-1)\pi + \frac{\pi}{2}} < \frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} < \frac{2n\pi + \frac{\pi}{2}}{2(n-1)\pi}$$

이때 $\lim_{n\to\infty} \frac{2n\pi}{2(n-1)\pi + \frac{\pi}{2}} = 1$이고 $\lim_{n\to\infty} \frac{2n\pi + \frac{\pi}{2}}{2(n-1)\pi} = 1$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} = 1$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(a_{2n})^{\frac{3}{2}}\sin(a_{2n+2} - a_{2n})}{a_{2n+2} - a_{2n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} (a_{2n})^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{a_{2n+2}}\sqrt{a_{2n}}\left(\sqrt{16a_{2n+2}-1} + \sqrt{16a_{2n}-1}\right)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}}}\sqrt{\frac{a_{2n}}{a_{2n}}}\left(\sqrt{\frac{16a_{2n+2}}{a_{2n}} - \frac{1}{a_{2n}}} + \sqrt{\frac{16a_{2n}}{a_{2n}} - \frac{1}{a_{2n}}}\right)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{16} + \sqrt{16}} = \frac{1}{8}$$

따라서 $p = 8$, $q = 1$이므로
$p + q = 9$

85. 정답 ④
여러 가지 미분법

$f(x) = \frac{tx - t + 1}{e^x}$에서

$$f'(x) = -\frac{tx - 2t + 1}{e^x},$$
$$f''(x) = \frac{tx - 3t + 1}{e^x}$$

$f''(x) = 0$에서 $x = \frac{3t-1}{t}$이고 $x = \frac{3t-1}{t}$의 좌우에서 $f''(x)$의
부호가 바뀌므로
점 $\left(\frac{3t-1}{t},\ f\left(\frac{3t-1}{t}\right)\right)$은 곡선 $y = f(x)$의 변곡점이다.
변곡점에서의 접선의 방정식은

$$y = f'\left(\frac{3t-1}{t}\right)\left(x - \frac{3t-1}{t}\right) + f\left(\frac{3t-1}{t}\right) \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

직선 ㉠의 y절편이 $g(t)$이므로

$$g(t) = f'\left(\frac{3t-1}{t}\right)\left(0 - \frac{3t-1}{t}\right) + f\left(\frac{3t-1}{t}\right)$$
$$g(t) = -\frac{3t-1}{t} f'\left(\frac{3t-1}{t}\right) + f\left(\frac{3t-1}{t}\right)$$
$$= \left(-\frac{3t-1}{t}\right)\left(-te^{\frac{1-3t}{t}}\right) + 2te^{\frac{1-3t}{t}}$$
$$= (3t-1)e^{\frac{1-3t}{t}} + 2te^{\frac{1-3t}{t}}$$
$$= (5t-1)e^{\frac{1-3t}{t}} \quad \left(0 < t < \frac{1}{4}\right)$$

$h(0) = a$라 하면 $g(a) = 0$이므로 $a = \frac{1}{5}$

$g(t) = (5t-1)e^{\frac{1-3t}{t}}$에서

$$g'(t) = \frac{(5t^2 - 5t + 1)e^{\frac{1-3t}{t}}}{t^2}$$

이므로

$$h'(0) = \frac{1}{g'(h(0))} = \frac{1}{g'(a)}$$
$$= \frac{1}{g'\left(\frac{1}{5}\right)}$$
$$= \frac{1}{5e^2}$$

86. 정답 ⑤
도함수의 활용
함수 $f(x)$의 차수가 3 이상인 경우
$\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ 또는 $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$
이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
$f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c는 상수)라 하자.

$a=0$이라 가정하면 $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다. 즉, $a\neq 0$

$g(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2+4}$에서

$g'(x)=\dfrac{(2ax+b)(x^2+4)-(ax^2+bx+c)\times 2x}{(x^2+4)^2}$

$=\dfrac{-bx^2+(8a-2c)x+4b}{(x^2+4)^2}$

$g'(x)=0$에서 $x^2+4\neq 0$이므로

$h(x)=-bx^2+(8a-2c)x+4b$라 하자.

(ⅰ) 방정식 $h(x)=0$이 실근을 갖지 않는 경우

$b=0$이면 방정식 $h(x)=0$이 반드시 실근을 가지므로 $b\neq 0$이다.

$b\neq 0$이면 $h(x)$가 이차식으로 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)>0$ 또는 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)<0$이다.

즉, 함수 $g(x)$는 일대일함수이다.

그러나 $\lim_{x\to\infty} g(x)=a$, $\lim_{x\to\infty} g(x)=a$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) 방정식 $h(x)=0$이 실근을 한 개 갖는 경우

$b\neq 0$이면 $h(x)$가 이차식이므로 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\geq 0$ 또는 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\leq 0$이다.

즉, (ⅰ)과 마찬가지로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

$b=0$이므로 $g'(x)=0$에서 $x=0$

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 유일한 극값을 갖는다.

즉, k의 값의 범위가 $\dfrac{9}{4}\leq k<3$이므로 $g(0)=\dfrac{9}{4}$, 곡선 $y=g(x)$의 점근선의 방정식은 $y=3$이다.

$\lim_{x\to\infty} g(x)=a$, $\lim_{x\to-\infty} g(x)=a$에서 $a=3$

$g(0)=\dfrac{9}{4}$에서 $c=9$

(ⅲ) 방정식 $h(x)=0$이 실근을 두 개 갖는 경우

$b\neq 0$이므로 두 실근을 α, β라 하면 $g'(x)=0$에서 $x=\alpha$, $x=\beta$이고 함수 $g(x)$는 극댓값 M, 극솟값 m을 모두 갖는다.

조건 (가)에서 함수 $g(x)$는 극솟값 $\dfrac{9}{4}$를 갖고 곡선 $y=g(x)$의 점근선의 방정식은 $y=3$이다.

이때 함수 $g(x)$의 극댓값 M이 3보다 작아야 하므로 모순이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $f(x)=3x^2+9$이므로

$g(x)=\dfrac{3x^2+9}{x^2+4}$

따라서 $g(1)=\dfrac{12}{5}$

87. 정답 96

급수

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(-1<r<1,\ r\neq 0)$이라 하자.

$\lim_{n\to\infty} a_n=0$, $\lim_{n\to\infty} b_n=0$이므로

$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+a_2)^2+k\}$에서

$0={a_2}^2+k$, $k=-{a_2}^2$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\{(a_n+a_2)^2+k\}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}({a_n}^2+2a_2a_n)$

$=\dfrac{a^2}{1-r^2}+\dfrac{2a^2r}{1-r}$

$=\dfrac{a^2}{1-r}\left(\dfrac{1}{1+r}+2r\right)$ ...... ㉠

$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})\right\}\times\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)=a\times\dfrac{a}{1-r}$

$=\dfrac{a^2}{1-r}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$\dfrac{a^2}{1-r}\left(\dfrac{1}{1+r}+2r\right)=\dfrac{a^2}{1-r}$

$\dfrac{1}{1+r}+2r=1$

$2r^2+r=0$

$r(2r+1)=0$

$r\neq 0$이므로 $r=-\dfrac{1}{2}$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_n\leq 8$에서

$\dfrac{a}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)}\leq 8$

$a\leq 12$

㉠에서

$\sum_{k=1}^{\infty} b_n=\dfrac{2a^2}{3}\leq 96$

따라서 구하는 급수의 합의 최댓값은 96이다.

88. 정답 575

여러 가지 적분법

$F(x)=f(x)-f^{-1}(x)$라 하자.

$f(0)=0$에서 $f(2)=f(0)+2=2$

구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $y=f(x)$는 증가하고 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\int_0^2 F(x)dx=\int_0^2\{f(x)-f^{-1}(x)\}dx$

$=2\int_0^2 \{f(x)-x\}dx$

$=\frac{4}{15}$ …… ㉠

$y=f(x)$에서 $x=f^{-1}(y)$이므로

$f(x+2)=f(x)+2$에서

$f^{-1}(f(x)+2)=x+2$

$f^{-1}(y+2)=f^{-1}(y)+2$

그러므로

$F(x+2)=f(x+2)-f^{-1}(x+2)$

$=\{f(x)+2\}-\{f^{-1}(x)+2\}$

$=f(x)-f^{-1}(x)$

$=F(x)$

$\int_0^{10} x\{f(x)-f^{-1}(x)\}dx=\int_0^{10} xF(x)dx$

$=\sum_{k=1}^{5}\int_{2k-2}^{2k} xF(x)dx$

$F(x+2)=F(x)$이므로 $t=x-(2k-2)$라 하면

$x=2k-2$일 때 $t=0$, $x=2k$일 때 $t=2$이고

$\frac{dx}{dt}=1$, $F(t+2k-2)=F(t)$이므로

$\sum_{k=1}^{5}\int_{2k-2}^{2k} xF(x)dx=\sum_{k=1}^{5}\int_0^2 (t+2k-2)F(t)dt$

$=\sum_{k=1}^{5}\int_0^2 \{tF(t)+(2k-2)F(t)\}dt$

$\int_0^2 tF(t)dt=\int_0^2 t\{f(t)-f^{-1}(t)\}dt$

$=\frac{175}{315}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\sum_{k=1}^{5}\int_0^2 \{tF(f)+(2k-2)F(t)\}dt$

$=\sum_{k=1}^{5}\left\{\int_0^2 tF(t)dt+(2k-2)\int_0^2 F(t)dt\right\}$

$=\sum_{k=1}^{5}\left\{\frac{176}{315}+(k-1)\times\frac{8}{15}\right\}$

$=\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{8}{15}k+\frac{8}{315}\right)$

$=\frac{8}{15}\sum_{k=1}^{5}k+\frac{8}{63}$

$=\frac{8}{15}\times 15+\frac{8}{63}$

$=\frac{512}{63}$

따라서 $p=63$, $q=512$이므로 $p+q=575$

89. 정답 ②

[넓이]

$0\le x\le 1$에서 $0\le \pi x\le \pi$, $\pi\le \pi(x+1)\le 2\pi$이므로

$f(x)=\int_x^{x+1}|t\sin \pi t|dt$

$=\int_x^1 t\sin\pi t\,dt-\int_1^{x+1} t\sin\pi t\,dt$

$=\frac{1}{\pi}\Big[-t\cos\pi t\Big]_x^1+\frac{1}{\pi}\int_x^1 \cos\pi t dt+\frac{1}{\pi}\Big[t\cos\pi t\Big]_1^{x+1}$

$-\frac{1}{\pi}\int_1^{x+1}\cos\pi t dt$

$=\frac{1}{\pi}\Big[-t\cos\pi t\Big]_x^1+\frac{1}{\pi^2}\Big[\sin\pi t\Big]_x^1$

$+\frac{1}{\pi}\Big[t\cos\pi t\Big]_1^{x+1}-\frac{1}{\pi^2}\Big[\sin\pi t\Big]_1^{x+1}$

$=\frac{1}{\pi}(1+x\cos\pi x)+\frac{1}{\pi^2}(0-\sin\pi x)$

$+\frac{1}{\pi}[(x+1)\cos\{\pi(x+1)\}+1]$

$-\frac{1}{\pi^2}[\sin\{\pi(x+1)\}-0]$

이때

$\cos\{\pi(x+1)\}=\cos(\pi x+\pi)$

$=-\cos\pi x$,

$\sin\{\pi(x+1)\}=\sin(\pi x+\pi)$

$=-\sin\pi x$

이므로

$f(x)$

$=\frac{1}{\pi}(1+x\cos\pi x)+\frac{1}{\pi^2}(-\sin\pi x)$

$+\frac{1}{\pi}\{-(x+1)\cos\pi x+1\}+\frac{1}{\pi^2}\sin\pi x$

$=\frac{1}{\pi}(2-\cos\pi x)$

$0\le x\le\frac{1}{2}$에서 $f(x)>0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=\frac{1}{2}$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\pi}(2-\cos\pi x)dx$

$=\frac{1}{\pi}\left[2x-\frac{1}{\pi}\sin\pi x\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{\pi}\left(1-\frac{1}{\pi}\right)$

$=\frac{1}{\pi}-\frac{1}{\pi^2}$

90. 정답 ④

[역함수의 미분법]
양수 t에 대하여 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 $\alpha(t)$, $\beta(t)$ $(\alpha(t)<\beta(t))$라 하자.

$\tan^2 x-\tan x+x=x+t$에서

$\tan^2 x-\tan x=t$ …… ㉠

$h(x)=\tan^2 x-\tan x$라 하면

$h(\alpha(t))=t$, $h(\beta(t))=t$

이므로

$h'(\alpha(t))\alpha'(t)=1$,

$\alpha'(t)=\dfrac{1}{h'(\alpha(t))}$,

$h'(\beta(t))\beta'(t)=1$,

$\beta'(t)=\dfrac{1}{h'(\beta(t))}$

이고

$h'(x)=2\tan x\sec^2 x-\sec^2 x$

$\quad=(2\tan x-1)\sec^2 x$

한편, 직선 $y=x+t$의 기울기가 1이므로 선분 PQ의 길이 $g(t)$는

$g(t)=\sqrt{2}\times\{\beta(t)-\alpha(t)\}$

$g'(t)=\sqrt{2}\times\{\beta'(t)-\alpha'(t)\}$이므로

$g'(2)=\sqrt{2}\times\{\beta'(2)-\alpha'(2)\}$

㉠에 $t=2$를 대입하면

$\tan^2 x-\tan x=2$에서

$\tan^2 x-\tan x-2=0$

$(\tan x+1)(\tan x-2)=0$

$\tan x=-1$ 또는 $\tan x=2$

즉, $\tan(\alpha(2))=-1$, $\tan(\beta(2))=2\tan(\beta(2))=2$

이때

$\sec^2(\alpha(2))=1+\tan^2(\alpha(2))$

$\quad=1+(-1)^2=2$,

$\sec^2(\beta(2))=1+\tan^2(\beta(2))$

$\quad=1+2^2=5$

이므로

$\alpha'(2)=\dfrac{1}{h'(\alpha(2))}$

$=\dfrac{1}{2\times\{2\times(-1)-1\}}$

$=-\dfrac{1}{6}$

$\beta'(2)=\dfrac{1}{h'(\beta(2))}$

$=\dfrac{1}{5\times(2\times 2-1)}$

$=\dfrac{1}{15}$

따라서

$g'(2)=\sqrt{2}\times\{\beta'(2)-\alpha'(2)\}$

$\quad=\sqrt{2}\times\left\{\dfrac{1}{15}-\left(-\dfrac{1}{6}\right)\right\}$

$\quad=\sqrt{2}\times\dfrac{7}{30}$

$\quad=\dfrac{7\sqrt{2}}{30}$

91. 정답 840

[수열의 극한]

$\dfrac{\cos x}{x}=\sin x+a_k x$에서

$\dfrac{\cos x}{x}-\sin x=a_k x$

$\dfrac{\cos x-x\sin x}{x^2}=a_k$

$g(x)=\dfrac{\cos x-x\sin x}{x^2}$라 하면

$g'(x)=\dfrac{(-\sin x-\sin x-x\cos x)\times x^2-(\cos x-x\sin x)\times 2x}{x^4}$

$=-\dfrac{x^2+2}{x^3}\cos x$

$x>0$일 때, $-\dfrac{x^2+2}{x^3}<0$이므로

$g'(x)=0$에서 $\cos x=0$

$x>0$에서 방정식 $g'(x)=0$의 양의 실근을 작은 수부터 차례로 나열하면 $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2}+\pi$, $\dfrac{\pi}{2}+2\pi$, $\cdots$

이때 자연수 n에 대하여

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+(n-1)\pi\right)=0$,

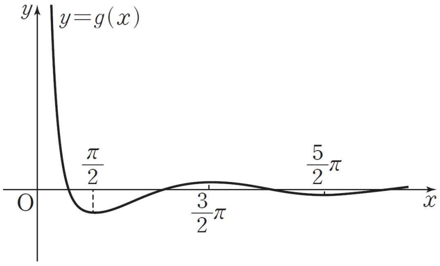
$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+(n-1)\pi\right)=(-1)^{n-1}$

이므로

$g\left(\dfrac{\pi}{2}+(n-1)\pi\right)=-\dfrac{(-1)^{n-1}}{\dfrac{\pi}{2}+(n-1)\pi}$

$\quad=\dfrac{(-1)^n\times 2}{(2n-1)\pi}$

또 함수 $g(x)$는 n이 홀수일 때 극솟값을, n이 짝수일 때 극댓값을 갖고, $\lim_{x\to 0+}g(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}g(x)=0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



조건 (나)에서 k가 홀수일 때 $a_k<0$, k가 짝수일 때 $a_k>0$이고,
조건 (가)에서 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=a_k$의 교점의 개수가 k이므로 위의 함수의 그래프에서

$a_1=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2}{\pi}$,

$a_2=g\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)=\frac{2}{3\pi}$,

$a_3=g\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\right)=-\frac{2}{5\pi}$ 이므로

$$f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\pi a_1)^{n+1}+4\times(\pi a_1+1)^n}{3\times(\pi a_1)^n+(\pi a_1+1)^{n+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^{n+1}+4\times(-1)^n}{3\times(-2)^n+(-1)^{n+1}}$$
$$=-\frac{2}{3}$$

$$f(2)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\pi a_2)^{n+1}+4\times(\pi a_2+1)^n}{3\times(\pi a_2)^n+(\pi a_2+1)^{n+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+4\times\left(\frac{5}{3}\right)^n}{3\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}}$$
$$=\frac{4}{\frac{5}{3}}=\frac{12}{5}$$

$$f(3)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\pi a_3)^{n+1}+4\times(\pi a_3+1)^n}{3\times(\pi a_3)^n+(\pi a_3+1)^{n+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{2}{5}\right)^{n+1}+4\times\left(\frac{3}{5}\right)^n}{3\times\left(-\frac{2}{5}\right)^n+\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}$$
$$=\frac{4}{\frac{3}{5}}=\frac{20}{3}$$

따라서 $100\times\{f(1)+f(2)+f(3)\}$

$=100\times\left(-\frac{2}{3}+\frac{12}{5}+\frac{20}{3}\right)$

$=100\times\left(6+\frac{12}{5}\right)$

$=600+240=840$

92. 정답 22

[도함수의 활용]

함수 $f(x)$가 양의 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=e$에서 연속이다.

$g(x)=-(\ln x-a)^2+b$

$h(x)=(x-a)^2+c$라 하면

$\lim_{x\to e-}f(x)=\lim_{x\to e-}g(x)=g(e)$

$\lim_{x\to e+}f(x)=\lim_{x\to e+}h(x)=h(e)$,

$f(e)=g(e)$

이므로

$f(e)=g(e)=h(e)$ $\cdots\cdots$ ㉠

한편, $g(x)=-(\ln x-a)^2+b$에서

$g'(x)=-2(\ln x-a)\times\frac{1}{x}$

$g''(x)=-2\times\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}-2(\ln x-a)\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$\quad=-\frac{2}{x^2}(1-\ln x+a)$

$g'(x)=0$에서 $x=e^a$이고, $x=e^a$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 $+$에서 $-$ 로 변하므로 함수 $g(x)$는 극댓값 $g(e^a)$을 갖는다.

$g''(x)=0$에서 $x=e^{a+1}$이고, $x=e^{a+1}$의 좌우에서 $g''(x)$의 부호가 변하므로 점 $(e^{a+1},\ g(e^{a+1}))$은 함수 $g(x)$의 그래프의 변곡점이다.

조건 (가)에서

$0<x<1$이면 $f(x)\le f'(1)(x-1)+f(1)$,

$x>1$이면 $f(x)\ge f'(1)(x-1)+f(1)$

이고, 직선 $y=f'(1)(x-1)+f(1)$은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선이므로 점 $(1,\ f(1))$은 함수 $y=f(x)$의 그래프의 변곡점이다.

그러므로 $e^{a+1}=1$에서

$a+1=0$

$a=-1$

즉, $g(x)=-(\ln x+1)^2+b$,

$g'(x)=-2(\ln x+1)\times\frac{1}{x}$이고,

$e^a=e^{-1}<e$이므로

함수 $f(x)$는 $x=e^{-1}$에서 극댓값

$f(e^{-1})=g(e^{-1})$

$\quad=-(-1+1)^2+b$

$\quad=b$

를 갖는다.

한편, $h(x)=(x+1)^2+c$ $(x>e)$이고 $-1<e$이므로

함수 $h(x)$는 $x>e$에서 극솟값을 갖지 않는다.

$h(x)=(x+1)^2+c$에서

$h'(x)=2(x+1)$,

$h''(x)=2$

이고 $\frac{1}{e}<x<e$일 때 $g'(x)<0$, $x>e$일 때

$h'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=e$에서 극솟값 $f(e)$를 갖는다.

이때 ㉠에서 $f(e)=g(e)$이므로

$$f(e)=-(1+1)^2+b$$
$$=b-4$$

조건 (나)에서 모든 극값의 합은 $2e^2+4e$이므로

$$f(e^{-1})+f(e)=b+(b-4)$$
$$=2e^2+4e\text{에서}$$

$$2b=2e^2+4e+4$$
$$b=e^2+2e+2$$

또 ㉠에서 $f(e)=h(e)$이므로

$$b-4=(e+1)^2+c$$
$$e^2+2e-2=e^2+2e+1+c$$
$$c=-3$$

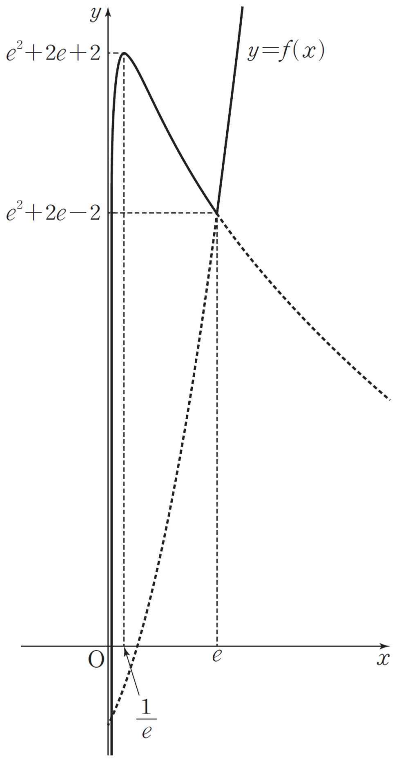
따라서

$$f(x)=\begin{cases}-(\ln x+1)^2+e^2+2e+2 & (0<x\le e)\\ (x+1)^2-3 & (x>e)\end{cases}$$

이므로

$$f(4)=(4+1)^2-3$$
$$=25-3=22$$

[참고]



93. 정답 ③

[삼각함수의 미분]

$f(1)=a\tan\frac{\pi}{4}+b\ln 1=a$이므로

조건 (가)에서

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(\cos x)-a}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{f(\cos x)-f(1)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\left\{\frac{f(\cos x)-f(1)}{\cos x-1}\times\frac{-(1-\cos x)}{x^2}\right\}$$

$\cos x=s$라 하면 $x\to 0+$일 때 $s\to 1-$이므로

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(\cos x)-f(1)}{\cos x-1}=\lim_{s\to 1-}\frac{f(s)-f(1)}{s-1}=f'(1)$$

그러므로

$$\lim_{x\to 0+}\left\{\frac{f(\cos x)-f(1)}{\cos x-1}\times\frac{-(1-\cos x)}{x^2}\right\}$$
$$=f'(1)\times\lim_{x\to 0+}\frac{-(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=f'(1)\times\lim_{x\to 0+}\frac{-(1-\cos^2 x)}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=f'(1)\times\lim_{x\to 0+}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\times\frac{-1}{1+\cos x}\right)$$
$$=f'(1)\times 1\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{4}\text{이므로}$$

$$f'(1)=-\frac{1}{2}$$

$f(x)=a\tan\frac{\pi}{4}x+b\ln x$에서

$f'(x)=\frac{\pi}{4}a\sec^2\frac{\pi}{4}x+\frac{b}{x}$이므로

$$f'(1)=\frac{\pi}{4}a\sec^2\frac{\pi}{4}+b=\frac{\pi}{2}a+b=-\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (나)에서

$$f'\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{4}a\times\sec^2\frac{\pi}{6}+\frac{3}{2}b$$
$$=\frac{\pi}{4}a\times\frac{4}{3}+\frac{3}{2}b$$
$$=\frac{\pi}{3}a+\frac{3}{2}b$$
$$=-\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-\frac{3}{5\pi},\ b=-\frac{1}{5}$$

따라서

$$a\times b=-\frac{3}{5\pi}\times\left(-\frac{1}{5}\right)$$
$$=\frac{3}{25\pi}$$

94. 정답 ④

[풀이]

$f(x)=\dfrac{ax}{\sqrt{2x^2+1}}=ax(2x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$에서

$f'(x)=a(2x^2+1)^{-\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{2}ax(2x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\times 4x$

$=a(2x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\times\{(2x^2+1)-2x^2\}$

$=a(2x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$

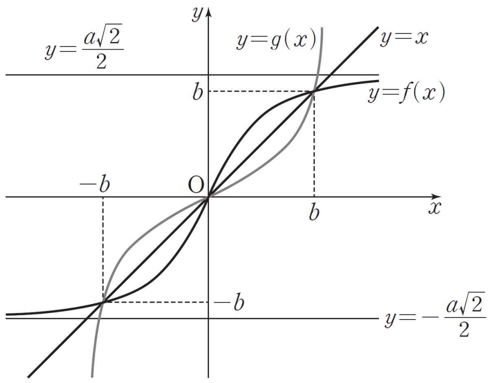
$f''(x)=-\dfrac{3}{2}a(2x^2+1)^{-\frac{5}{2}}\times 4x$

$=\dfrac{-6ax}{(2x^2+1)^2\sqrt{2x^2+1}}$

모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로 곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이고, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

$x>0$ 일 때 $f''(x)<0$이므로 $x>0$에서 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록, $x<0$ 일 때 $f''(x)>0$이므로 $x<0$에서 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록하고, $f''(0)=f(0)=0$이므로 점 $(0,0)$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

또 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=-\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$이고, $f'(0)=a>1$이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 직선 $y=x$는 그림과 같다.



두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표와 같고, 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점의 x좌표가 b이므로

$\dfrac{ab}{\sqrt{2b^2+1}}=b$에서

$a=\sqrt{2b^2+1}$

$a^2=2b^2+1$

$b^2=\dfrac{a^2-1}{2}$

$b>0$ 이므로 $b=\sqrt{\dfrac{a^2-1}{2}}$ …… ㉠

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 서로 다른 세 점 $(-b,-b)$, $(0,0)$, (b,b)에서 만나고, 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로

$f(g(x))=x$에서 $f'(g(x))g'(x)=1$

이때 모든 실수 x에 대하여 $f'(g(x))>0$이므로

$g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$

그러므로 $\displaystyle\int_0^b\frac{x}{f'(g(x))}dx=\int_0^b xg'(x)dx$

$\displaystyle=\Big[xg(x)\Big]_0^b-\int_0^b g(x)dx$

$\displaystyle=bg(b)-\int_0^b g(x)dx$

$\displaystyle=b^2-\int_0^b g(x)dx$

즉, $\displaystyle b^2-\int_0^b g(x)dx=3$

$g(x)=t$로 놓으면

$f(t)=x$, $f'(t)=\dfrac{dx}{dt}$이고

$x=0$일 때 $t=g(0)=0$, $x=b$일 때 $t=g(b)=b$이므로

$\displaystyle b^2-\int_0^b g(x)dx$

$\displaystyle=b^2-\int_0^b tf'(t)dt=b^2-\Big[tf(t)\Big]_0^b+\int_0^b f(t)dt$

$\displaystyle=b^2-bf(b)+\int_0^b f(t)dt$

$\displaystyle=\int_0^b f(t)dt$

$\displaystyle\int_0^b f(x)dx=3$, 즉 $\displaystyle\int_0^b\frac{ax}{\sqrt{2x^2+1}}dx=3$

이때 $2x^2+1=t$로 놓으면 $4x=\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=b$일 때 $t=2b^2+1$이므로

$\displaystyle\int_0^b\frac{ax}{\sqrt{2x^2+1}}dx=\int_1^{2b^2+1}\frac{a}{4\sqrt{t}}dt$

$=\dfrac{a}{2}\Big[\sqrt{t}\Big]_1^{2b^2+1}$

$=\dfrac{a}{2}\left(\sqrt{2b^2+1}-1\right)$

즉, $\dfrac{a}{2}\left(\sqrt{2b^2+1}-1\right)=3$ …… ㉡

㉠에서 $2b^2+1=a^2$이므로 이를 ㉡에 대입하면

$a(a-1)=6$

$a^2-a-6=0$

$(a-3)(a+2)=0$

$a>1$이므로

$a=3$이고 $b=2$

그러므로

$\displaystyle S=4\int_0^2\{f(x)-x\}dx$

$=4\left\{\int_0^2 f(x)\,dx-\int_0^2 x\,dx\right\}$

$=4\left\{3-\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2\right\}$

$=4\times(3-2)$

$=4$

따라서

$a+b+S=3+2+4$

$=9$

[참고] $f'(x)>0$이면 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 점과 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 만나는 점이 같다.

95. 정답 18

[수열의 극한]

(i) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x+\frac{1}{x^{2n-1}}+\frac{1}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}$$

$$=\frac{2x+0+0}{1+0}$$

$$=2x$$

(ii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=1$ 이므로

$$f(1)=\frac{2+1+1}{1+1}$$

$$=2$$

(iii) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=0$ 이므로

$$f(x)=\frac{0+x+1}{0+1}$$

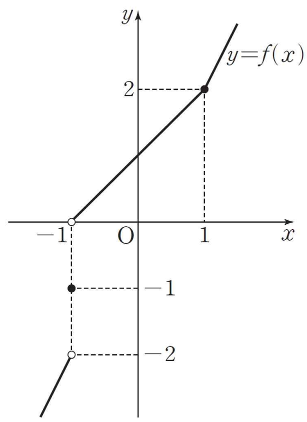
$$=x+1$$

(iv) $x=-1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=-1$, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$이므로

$$f(-1)=\frac{-2-1+1}{1+1}$$

$$=-1$$

(i)~(iv)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같이 $x=-1$에서만 불연속이다.



$g(x)=f(x+n)+a_n$ (n은 자연수)라 하면 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-n$만큼, y축의 방향으로 a_n만큼 평행이동한 것이므로 $x=-1$에서 연속이다.

즉,

$g(-1)=\lim_{x\to-1}g(x)$

$=f(-1+n)+a_n$

$=\begin{cases}1+a_1 & (n=1)\\ 2(n-1)+a_n & (n\ge 2)\end{cases}$

한편, 함수 $f(x)g(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로

$f(-1)g(-1)=\lim_{x\to-1}f(x)g(x)$

그런데 함수 $y=f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이므로

$g(-1)=\lim_{x\to-1}g(x)=0$ 이어야 한다.

$n=1$일 때, $1+a_1=0$이므로

$a_1=-1$

$n\ge 2$ 일 때, $2(n-1)+a_n=0$ 이므로

$a_n=-2(n-1)$

그러므로

$\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+\sum_{k=2}^{n}a_k$

$=-1-2\sum_{k=2}^{n}(k-1)$

$=-1-2\sum_{k=1}^{n-1}k$

$=-1-2\times\frac{(n-1)n}{2}$

$=-n^2+n-1$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}\sum_{k=1}^{n}a_k=\alpha$ $(\alpha\ne0)$, 즉

$\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2+n-1}{n^p}=\alpha$ $(\alpha\ne0)$에서

$p=2$, $\alpha=-1$

따라서

$a_1-a_{10}+p+\alpha=-1-(-18)+2+(-1)$

$=18$

96. 정답 32

[도함수의 활용]

$f(x)=\begin{cases} x^2+ax & (x\le 0) \\ bxe^{-x}+2x & (x>0) \end{cases}$이 실수 전체의 집합에서

미분가능하므로 $x=0$에서 미분가능하다.

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{x^2+ax}{x}=\lim_{x\to 0-}(x+a)=a$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{bxe^{-x}+2x}{x}=\lim_{x\to 0+}(be^{-x}+2)=b+2$$

에서 $x=0$에서 미분가능하려면

$a=b+2$이므로

$$f(x)=\begin{cases} x^2+(b+2)x & (x\le 0) \\ bxe^{-x}+2x & (x>0) \end{cases} \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편, $x\le 0$ 일 때,

$f(x)-2x=x^2+bx$

$\quad =x(x+b)$

이므로

$x<-b$에서 $f(x)>2x$

$-b\le x\le 0$에서 $f(x)\le 2x$

$x>0$일 때

$f(x)-2x=bxe^{-x}>0$이므로

$f(x)>2x$

그러므로

$$g(x)=\begin{cases} f(x)-2x & (x<-b \text{ 또는 } x>0) \\ 2x-f(x) & (-b\le x\le 0) \end{cases} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$g(x)=\begin{cases} x^2+bx & (x<-b) \\ -x^2-bx & (-b\le x\le 0) \\ bxe^{-x} & (x>0) \end{cases} \quad \cdots\cdots ㉢$$

(ⅰ) $x<-b$일 때

$g'(x)=2x+b<-2b+b=-b<0$

그러므로 $x<-b$에서 함수 $g(x)$는 감소한다.

(ⅱ) $-b<x<0$일 때

$g'(x)=-2x-b$

$g'(x)=0$ 에서 $x=-\dfrac{b}{2}$이고 $x=-\dfrac{b}{2}$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x=-\dfrac{b}{2}$에서 극대이다.

(ⅲ) $x>0$ 일 때

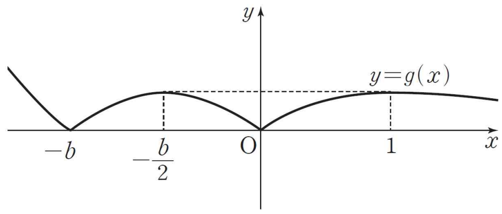
$g'(x)=b\times e^{-x}$

$\quad =bx\times(-e^{-x})$

$\quad =be^{-x}(1-x)$

$g'(x)=0$ 에서 $x=1$이고 $x=1$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극대이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)과 $\lim\limits_{x\to\infty}xe^{-x}=0$에 의하여 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $g(x)$는 $x=-\dfrac{b}{2}$, $x=1$에서 극대이고, 극댓값 $g\left(-\dfrac{b}{2}\right)$와 $g(1)$)에 대하여 $g\left(-\dfrac{b}{2}\right)\neq g(1)$이면 집합 $\left\{x \mid g(x)=g\left(-\dfrac{b}{2}\right)\right\}$와 $\{x \mid g(x)=g(1)\}$의 원소의 개수는 2 또는 4가 되어 조건을 만족시키지 않고, $g\left(-\dfrac{b}{2}\right)=g(1)$이면 집합 $\left\{x \mid g(x)=g\left(-\dfrac{b}{2}\right)\right\}=\{x \mid g(x)=g(1)\}$의 원소의 개수가 3이 되어 조건을 만족시킨다.

㉢에서

$$g\left(-\frac{b}{2}\right)=-\left(-\frac{b}{2}\right)^2-b\times\left(-\frac{b}{2}\right)=\frac{1}{4}b^2$$

$$g(1)=be^{-1}=\frac{b}{e}$$

이므로 $g\left(-\dfrac{b}{2}\right)=g(1)$

$$\frac{1}{4}b^2=\frac{b}{e}$$

$b>0$이므로 $b=\dfrac{4}{e}$

㉠에서

$$f(x)=\begin{cases} x^2+\left(\dfrac{4}{e}+2\right)x & (x\le 0) \\ \dfrac{4}{e}xe^{-x}+2x & (x>0) \end{cases}$$

이므로

$$f(-2)+f(2)=\left(4-\frac{8}{e}-4\right)+\left(\frac{8}{e^3}+4\right)=4-\frac{8}{e}+\frac{8}{e^3}$$

따라서 $p=4$, $q=-8$이므로

$10p+q=40-8$

$\quad =32$

97. 정답 ①

[치환적분과 부피]

입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 x축과 만나는 점의 x좌표를 $t\left(0 \le t \le \frac{\pi}{3}\right)$라 하면 단면은 한 변의 길이가 $\frac{\sqrt{\sin t+1}}{\cos t}$인 정사각형이므로 단면의 넓이 $S(t)$는

$$S(t)=\left(\frac{\sqrt{\sin t+1}}{\cos t}\right)^2 = \frac{\sin t+1}{\cos^2 t}$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t+1}{\cos^2 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{\cos^2 t}dt+\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 t}dt$$

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{\cos^2 t}dt$에서 $\cos t=x$라 하면

$-\sin t=\frac{dx}{dt}$ 이고,

$t=0$일 때 $x=1$, $t=\frac{\pi}{3}$ 일 때 $x=\frac{1}{2}$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{\cos^2 t}dt+\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 t}dt$$
$$=\int_1^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)dx+\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 t dt$$
$$=\left[\frac{1}{x}\right]_1^{\frac{1}{2}}+\left[\tan t\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=(2-1)+(\sqrt{3}-0)$$
$$=1+\sqrt{3}$$

98. 정답 ②

[이계도함수와 합성함수의 미분]

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$, $f''(x)=6x+2a$

$f''(0)=2a$이므로 $2a$는 자연수이다.

$h(x)=f(\ln x)$라 하면

$$h'(x)=f'(\ln x)\times\frac{1}{x} = \frac{3(\ln x)^2+2a\ln x+b}{x}$$

접선이 오직 하나인 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(\ln x)$ 위의 점 $(g(t),\ h(g(t)))$에서의 접선의 기울기가 t이고, $g(3)=1$이므로

$h'(g(3))=3$

$h'(1)=b=3$

$h''(x)$

$$=\frac{\left(6\ln x\times\frac{1}{x}+2a\times\frac{1}{x}\right)\times x-\{3(\ln x)^2+2a\ln x+3\}}{x^2}$$
$$=\frac{-3(\ln x)^2+(6-2a)\ln x+2a-3}{x^2}$$
$$=\frac{-(3\ln x+2a-3)(\ln x-1)}{x^2}$$

$h''(x)=0$에서

$x=e^{1-\frac{2a}{3}}$ 또는 $x=e$

이때 $2a>0$이므로 $e^{1-\frac{2a}{3}}<e$

함수 $h'(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$e^{1-\frac{2a}{3}}$	$\cdots$	e	$\cdots$
$h''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$h'(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

곡선 $y=f(\ln x)$에 접하고 기울기가 t인 직선이 오직 하나일 때 $g(t)$가 정의되고, $g(3)=1$이므로 함수 $y=h'(x)$의 그래프는 직선 $y=3$과 점 $(1,\ 3)$에서만 만나야 한다.

$h'(e)=\frac{2a+6}{e}<3$

$2a<3e-6$

이때 $2.1<3e-6<3$이고, $2a$는 자연수이므로

$2a=1$ 또는 $2a=2$

$a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=1$ …… ㉠

함수 $g(t)$는 정의역에서 미분가능한 함수이고,

$h'(g(t))=t$이므로 $h''(g(t))g'(t)=1$

$$g'(3)=\frac{1}{h''(g(3))} =\frac{1}{h''(1)} =\frac{1}{2a-3}$$

㉠에서 $a=\frac{1}{2}$일 때

$g'(3)=\frac{1}{2a-3}=-\frac{1}{2}$이고,

$a=1$일 때

$g'(3)=\frac{1}{2a-3}=-1$이다.

따라서 구하는 $g'(3)$의 값의 합은

$-\frac{1}{2}+(-1)=-\frac{3}{2}$

99. 정답 11

[급수의 합]

등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은 n에 대한 일차식이므로

$a_n=pn+q$ (p, q는 상수)로 놓을 수 있다.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-3n+c}{n}$가 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-3n+c}{n}=0$$

즉,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(pn+q)-3n+c}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(p-3)+\frac{q+c}{n}}{1}$$

$$=p-3$$

에서

$p-3=0$

$p=3$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}+a_{n+2}}{S_nS_{n+2}}=0$에서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}+a_{n+2}}{S_nS_{n+2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}+a_{k+2}}{S_kS_{k+2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{S_{k+2}-S_k}{S_kS_{k+2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{S_k}-\frac{1}{S_{k+2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_3}\right)+\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_4}\right)+\left(\frac{1}{S_3}-\frac{1}{S_5}\right)+\left(\frac{1}{S_4}-\frac{1}{S_6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)+\left(\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+2}}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_{n+1}}-\frac{1}{S_{n+2}}\right)$$

$$=\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}$$

$$=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1+a_2}$$

$$=\frac{1}{3+q}+\frac{1}{(3+q)+(6+q)}$$

이므로

$$\frac{1}{3+q}+\frac{1}{9+2q}=0$$

$$\frac{1}{3+q}=-\frac{1}{9+2q}$$

$3+q=-9-2q$

$3q=-12$

$q=-4$

따라서 $a_n=3n-4$이므로

$a_5=3\times5-4$

$\quad=11$

[참고]

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(pk+q)$$

$$=\frac{p}{2}n(n+1)+qn$$

$$=\frac{p}{2}n^2+\frac{p}{2}n+qn$$

$$=\frac{n}{2}(pn+p+2q)$$

에서

$$\frac{1}{S_n}=\frac{2}{n(pn+p+2q)}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_{n+1}=\lim_{n\to\infty}S_{n+2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}S_n=0$$이다.

100. 정답 10

[부분적분]

$h(x)=(ax^3+bx+c)e^x$ ($a<0$, a, b, c는 상수)라 하면

$$g(x)=\begin{cases} h(x) & (x\ge1)\\ -h(2-x) & (x<1)\end{cases}$$

$h'(x)$

$=(2ax+b)e^x+(ax^2+bx+c)e^x$

$=\{ax^2+(2a+b)x+b+c\}e^x$

$h''(x)$

$=\{2ax+(2a+b)\}e^x+\{ax^2+(2a+b)x+b+c\}e^x$

$=\{ax^2+(4a+b)x+2a+2b+c\}e^x$

조건 (가)에서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

$$g(1)=\lim_{x\to1+}g(x)=\lim_{x\to1-}g(x)$$

$g(1)=(a+b+c)e$

$$\lim_{x\to1+}g(x)=\lim_{x\to1+}h(x)$$

$$=(a+b+c)e$$

$$\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1-}\{-h(2-x)\}$$

$$=-(a+b+c)e$$

즉, $(a+b+c)e=-(a+b+c)e$

$(a+b+c)e=0$

$a+b+c=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$$g'(1)=\lim_{x\to1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1+}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}$$
$$=h'(1)$$
$$=(3a+2b+c)e$$
$$=5e$$

$3a+2b+c=5$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$b=-2a+5,\ c=a-5$ …… ㉢

이므로

$h''(x)=\{ax^2+(2a+5)x+5-a\}e^x$

곡선 $y=h(x)$의 변곡점이 $x>1$에서 존재한다면 $x<1$일 때 $2-x>1$이므로 곡선 $y=g(x)$는 $x>1$과 $x<1$에서 각각 적어도 한 개의 변곡점을 갖는다.

이것은 조건 (나)를 만족시키지 않으므로 곡선 $y=h(x)$의 변곡점이 존재하면 그 x좌표는 1 이하이다.

즉, 곡선 $y=g(x)$의 변곡점의 x좌표로 가능한 것은 1뿐이고, 방정식 $h''(x)=0$의 실근이 모두 1 이하이거나 존재하지 않아야 한다.

$\{ax^2+(2a+5)x+5-a\}e^x=0$에서

$e^x>0$이므로 이차방정식

$ax^2+(2a+5)x+5-a=0$

의 판별식을 D라 하면

$$D=(2a+5)^2-4a(5-a)$$
$$=4a^2+20a+25-20a+4a^2$$
$$=8a^2+25>0$$

이므로 이차방정식 $ax^2+(2a+5)x+5-a=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고 이 두 실근은 모두 1 이하이어야 한다.

$a<0$이므로

$a+(2a+5)+5-a\le0$

$2a+10\le0$

에서 $a\le-5$이고,

$-\dfrac{2a+5}{2a}<1$

에서 $a<-\dfrac{5}{4}$이므로 $a\le-5$

㉢에 의하여

$h(x)=\{ax^2+(-2a+5)x+a-5\}e^x$

이므로

$$\int_0^3 g(x)dx$$
$$=\int_0^1\{-h(2-x)\}dx+\int_1^3 h(x)dx$$
$$=\int_2^1 h(t)dx+\int_1^3 h(x)dx$$
$$=\int_2^3 h(x)dx$$
$$=\Big[\{ax^2+(-2a+5)x+a-5\}e^x\Big]_3^2-\int_2^3(2ax-2a+5)e^xdx$$
$$=\{(4a+10)e^3-(a+5)e^2\}-\left\{\Big[(2ax-2a+5)e^x\Big]_2^3-\int_2^3 2ae^xdx\right\}$$
$$=\{(4a+10)e^3-(a+5)e^2\}-\{(4a+5)e^3-(2a+5)e^2\}+\Big[2ae^x\Big]_2^3$$
$$=(5e^3+ae^2)+(2ae^3-2ae^2)$$
$$=ae^2(2e-1)+5e^3$$
$$\le-5e^2(2e-1)+5e^3$$
$$=5e^2-5e^3$$

따라서 $\displaystyle\int_0^3 g(x)dx$의 최댓값은 $e^2(5-5e)$이므로

$p=5,\ q=-5$에서

$$p-q=5-(-5)$$
$$=10$$

101. 정답 ②

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

조건 (가)에 의하여 방정식 $f(x)-x=0$의 실근이 1이므로

$f(1)-1=0,\ f(1)=1$

조건 (나)에 의하여 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-a}{x^3-a^3}=\frac{1}{a^2}$에서 $x\to a$일 때

(분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to a}\{f(x)-a\}=0$이고 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이므로

$f(a)-a=0$

조건 (가)에 의하여 $a=1$이므로

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-a}{x^3-a^3}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^3-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2+x+1}$$
$$=\frac{1}{3}f'(1)$$

$\dfrac{1}{3}f'(1)=1$에서 $f'(1)=3$

$f^{-1}(x)=h(x)$라 하면

$f(1)=1$이므로 $h(1)=1$이고

역함수의 미분법에 의하여

$$h'(1)=\frac{1}{f'(h(1))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{3}$$

$(g\circ f^{-1})(x)=(g\circ h)(x)=g(h(x))$이므로 $g(h(x))=x^3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(h(x))h'(x)=3x^2$

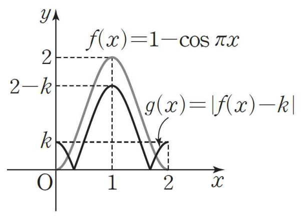
양변에 $x=1$을 대입하면

$g'(h(1))h'(1)=3$, $g'(1)\times\dfrac{1}{3}=3$

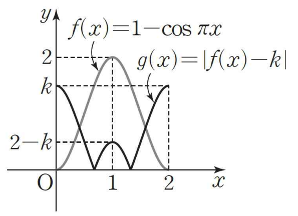
따라서 $g'(1)=9$

102. 정답 ⑤

닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



[$0<k<1$인 경우]



[$1\le k<2$인 경우]

k, $2-k$ 중 작지 않은 값이 M이므로 $0<k<2$에서 $1\le M<2$

또 $1\le M<2$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=M$은 서로 다른 두 점에서 만나고

$\dfrac{1}{2}\le\alpha<1$

함수 $f(x)-g(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$F'(x)=f(x)-g(x)$이므로

$\displaystyle\int_t^{2-t}\{f(x)-g(x)\}dx=k(2-2t)$에서

$F(2-t)-F(t)=k(2-2t)$

양변을 t에 대하여 미분하면 $-F'(2-t)-F'(t)=-2k$

즉, $-\{f(2-t)-g(2-t)\}-\{f(t)-g(t)\}=-2k$ …… ㉠

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 모두 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$f(t)=f(2-t)$, $g(t)=g(2-t)$

이 식을 ㉠에 대입하면 $-2\{f(t)-g(t)\}=-2k$

즉, 닫힌구간 $[p,\ \alpha]$에서 $f(x)-g(x)=k$이고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 모두 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로

닫힌구간 $[2-\alpha,\ 2-p]$에서 $f(x)-g(x)=k$이다. …… ㉡

또한 닫힌구간 $[\alpha,\ 2-\alpha]$에서

$f(x)-g(x)=f(x)-|f(x)-k|$

$=f(x)-f(x)+k=k$ …… ㉢

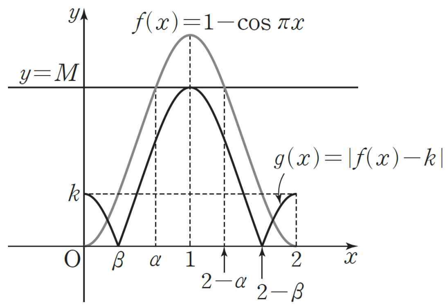
㉡, ㉢에 의하여 닫힌구간 $[p,\ 2-p]$에서 $f(x)-g(x)=k$

이때 실수 p의 최솟값이 $\alpha-\dfrac{1}{3}$이므로 닫힌구간

$\left[\alpha-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{7}{3}-\alpha\right]$에서 $f(x)-g(x)=k$이고, 닫힌구간

$\left[\alpha-\dfrac{1}{3}-h,\ \dfrac{7}{3}-\alpha+h\right]$에서 $f(x)-g(x)=k$인 양수 h가 존재하지 않는다. …… ㉣

(ⅰ) $0<k<1$인 경우



방정식 $g(x)=0$의 실근 중 작은 근을 β라 하면 닫힌구간 $[\beta,\ 2-\beta]$에서만 $f(x)-g(x)=k$이므로 ㉣에서

$\beta=\alpha-\dfrac{1}{3}$

즉, $g\left(\alpha-\dfrac{1}{3}\right)=0$이므로

$f\left(\alpha-\dfrac{1}{3}\right)=k$, $k=1-\cos\pi\left(\alpha-\dfrac{1}{3}\right)$ …… ㉤

$g(1)=f(\alpha)$이므로

$2-k=1-\cos\pi\alpha$, $k=1+\cos\pi\alpha$ …… ㉥

㉤, ㉥에서

$\cos\pi\alpha=-\cos\left(\pi\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\cos\pi\alpha\cos\dfrac{\pi}{3}-\sin\pi\alpha\sin\dfrac{\pi}{3}$

$=-\dfrac{1}{2}\cos\pi\alpha-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\pi\alpha$

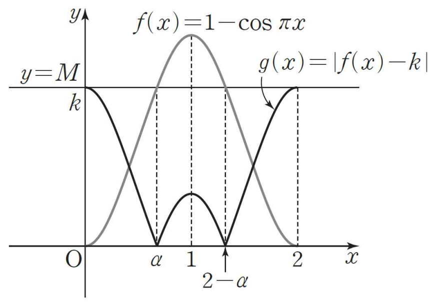
즉, $\dfrac{3}{2}\cos\pi\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\pi\alpha$이므로

$\dfrac{\sin\pi\alpha}{\cos\pi i\alpha}=-\dfrac{3}{\sqrt{3}}$, $\tan\pi\alpha=-\sqrt{3}$

$\dfrac{\pi}{2}\le\pi\alpha<\pi$이므로 $\pi\alpha=\dfrac{2}{3}\pi$, $\alpha=\dfrac{2}{3}$

따라서 ㉥에서 $k=1+\cos\dfrac{2}{3}\pi=1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$

(ⅱ) $1\le k<2$인 경우



㉣을 만족시키는 $\dfrac{1}{2}\le\alpha<1$인 α가 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $k=\dfrac{1}{2}$이므로

$g(k)=g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left|f\left(\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{1}{2}\right|=\left|1-\cos\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$

103. 정답 11

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 2이고 공비 r은 $2 \le r \le 6$인 자연수이므로

$$a_n = 2\times r^{n-1},\ S_n = \frac{2(r^n-1)}{r-1} = \frac{2}{r-1}(r^n-1)$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2^{2n+1}}{S_n+4^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\times r^{n-1}+2^{2n+1}}{\frac{2}{r-1}(r^n-1)+4^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{r}\times r^n + 2\times 4^n}{\frac{2}{r-1}\times r^n + 4^n - \frac{2}{r-1}}$$

(ⅰ) $2 \le r < 4$일 때

$\frac{1}{2} \le \frac{r}{4} < 1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{r}\times r^n + 2\times 4^n}{\frac{2}{r-1}\times r^n + 4^n - \frac{2}{r-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{r}\times\left(\frac{r}{4}\right)^n + 2}{\frac{2}{r-1}\times\left(\frac{r}{4}\right)^n + 1 - \frac{2}{r-1}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n} = 2$$

즉, $\lim_{n\to\infty} b_n = 2 > 1$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $r=4$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{r}\times r^n + 2\times 4^n}{\frac{2}{r-1}\times r^n + 4^n - \frac{2}{r-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\times 4^n + 2\times 4^n}{\frac{2}{3}\times 4^n + 4^n - \frac{2}{3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}+2}{\frac{2}{3}+1-\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

$$= \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{2}$$

즉, $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{3}{2} > 1$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $4 < r \le 6$일 때

$\frac{1}{6} \le \frac{1}{r} < \frac{1}{4}$, $\frac{2}{3} \le \frac{4}{r} < 1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{r}\times r^n + 2\times 4^n}{\frac{2}{r-1}\times r^n + 4^n - \frac{2}{r-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{r}+2\times\left(\frac{4}{r}\right)^n}{\frac{2}{r-1}+\left(\frac{4}{r}\right)^n - \frac{2}{r-1}\times\left(\frac{1}{r}\right)^n} = \frac{\frac{2}{r}}{\frac{2}{r-1}} = \frac{r-1}{r}$$

이때 r은 자연수이므로 $r=5$ 또는 $r=6$

즉, $r=5$일 때 $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{4}{5}$, $r=6$일 때 $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{5}{6}$이므로 조건을 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 조건을 만족시키는 r의 값은 5, 6이므로 그 합은

$5+6=11$

104. 정답 40

$g(x) = \int_k^x f(t)f'(t)dt$에서 $g(k) = \int_k^k f(t)f'(t)dt = 0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 점 $(k,\ 0)$ $(k<0)$을 지난다.

조건 (가)에 의하여 $g(\alpha)=0$, $g'(\alpha)\ne 0$ $(\alpha>0)$이고, $x\ne\alpha$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=0$이면 $g'(x)=0$이므로 $g(k)=0$에서 $g'(k)=0$이다. …… ㉠

$f(x) = xe^{ax+b}+x$에서 $f'(x) = (ax+1)e^{ax+b}+1$

$$g(x) = \int_k^x f(t)f'(t)dt = \left[\frac{1}{2}\{f(t)\}^2\right]_k^x = \frac{1}{2}\{f(x)\}^2 - \frac{1}{2}\{f(k)\}^2$$

이때 $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$이므로

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(xe^{ax+b}+x) = -\infty$이고

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{2}\{f(x)\}^2 - \frac{1}{2}\{f(k)\}^2\right] = \infty$ …… ㉡

한편,

$$g'(x) = f(x)f'(x)$$
$$= (xe^{ax+b}+x)\{(ax+1)e^{ax+b}+1\}$$
$$= x(e^{ax+b}+1)\{(ax+1)e^{ax+b}+1\}$$

이고 $e^{ax+b}+1>0$이므로 $h(x) = (ax+1)e^{ax+b}+1$이라 하면

$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $h(x)=0$

$h'(x) = ae^{ax+b}+a(ax+1)e^{ax+b} = a(ax+2)e^{ax+b}$이므로

$h'(x)=0$에서 $x=-\frac{2}{a}$ $(a>0)$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{2}{a}$	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	극소	↗

(ⅰ) $h\left(-\frac{2}{a}\right) > 0$인 경우

㉠에서 $g'(k)=0$ $(k<0)$에 모순이다.

(ⅱ) $h\left(-\frac{2}{a}\right) < 0$인 경우

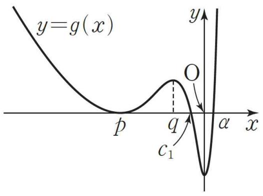
$h(x)=0$인 서로 다른 두 실수를 p, q $(p<q)$라 하자.

$h(0)>0$에서 $p<q<0$이므로 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

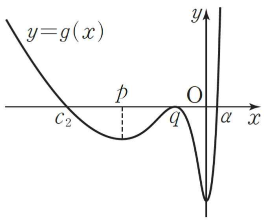
x	$\cdots$	p	$\cdots$	q	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

㉠에서 양수 α에 대하여 $g(\alpha)=0$이므로 $g(0)<0$이다.

[그림 1]과 같이 $k=p$이면 $g(q)>0$이므로 $g(c_1)=0$인 c_1이 열린 구간 $(q,\ 0)$에 존재하고, 이는 ㉠에 모순이다.
[그림 2]와 같이 $k=q$이면 $g(p)<0$이므로 ㉡에서 $g(c_2)=0$인 c_2가 구간 $(-\infty,\ p)$에 존재하고, 이는 ㉠에 모순이다



[그림 1]



[그림 2]

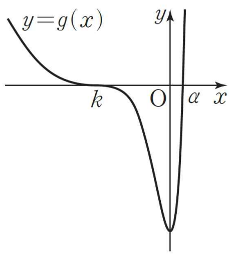
(ⅲ) $h\left(-\dfrac{2}{a}\right)=0$인 경우

$h(x)=0$인 x의 값은 $-\dfrac{2}{a}$뿐이다.

㉠에서 $k=-\dfrac{2}{a}$이므로 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	k	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	0	↘	극소	↗

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $k=-\dfrac{2}{a}$이고



$$h\left(-\frac{2}{a}\right)=\left\{a\times\left(-\frac{2}{a}\right)+1\right\}e^{a\times\left(-\frac{2}{a}\right)+b}+1$$
$$=-e^{b-2}+1=0$$

이므로 $b=2$
조건 (나)에서 $f(k)=g(k)-8$이고 $g(k)=0$이므로

$$f(k)=ke^{-\frac{2}{k}\times k+2}+k=2k=-8$$

$k=-4$

따라서 $a=\dfrac{1}{2}$이므로

$$16(a+b)=16\times\left(\frac{1}{2}+2\right)=40$$

105. 정답 ②
등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면
$a_n=a_1\times r^{n-1}$

조건 (가)에서 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $-1<r<1$이고, 그 합이 15이므로

$$\frac{a_1}{1-r}=15 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ (α, β, γ는 상수)
로 놓을 수 있고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\neq 0$이므로

$$\frac{f(a_n)}{a_n}=\frac{a_n^3+\alpha a_n^2+\beta a_n+\gamma}{a_n}$$
$$=a_n^2+\alpha a_n+\beta+\frac{\gamma}{a_n} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

조건 (가)에 의하여 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\alpha a_n$이 수렴하고,

$0<r^2<1$이므로 등비급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$도 수렴한다.

그러므로 ㉡에서 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(a_n)}{a_n}$이 수렴하려면 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\beta+\frac{\gamma}{a_n}\right)$가 수렴해야 한다.

(ⅰ) $\gamma\neq 0$일 때

$-1<r<1$에서 $\left|\dfrac{1}{r}\right|>1$이므로 수열 $\left\{\beta+\dfrac{\gamma}{a_n}\right\}$는 발산한다.

즉, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\beta+\frac{\gamma}{a_n}\right)\neq 0$이므로 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\beta+\frac{\gamma}{a_n}\right)$는 발산한다.

(ⅱ) $\gamma=0$일 때

① $\beta\neq 0$일 때

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\beta+\frac{\gamma}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\beta\neq 0$이므로 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\beta+\frac{\gamma}{a_n}\right)$는 발산한다.

② $\beta=0$일 때

모든 자연수 n에 대하여 $\beta+\dfrac{\gamma}{a_n}=0$이므로 급수

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\beta+\frac{\gamma}{a_n}\right)$는 수렴한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\beta+\frac{\gamma}{a_n}\right)$가 수렴하기 위해서는

$\beta=0$, $\gamma=0$이어야 한다.
이때 $f(x)=x^3+ax^2$이고 $f(1)=-2$이므로
$1+\alpha=-2$, $\alpha=-3$
$f(x)=x^3-3x^2$이고 ㉡에서

$$\frac{f(a_n)}{a_n}=a_n^2-3a_n$$

조건 (나)에서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(a_n)}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2-3a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2-3\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a_1^2}{1-r^2}-3\times 15=0$$

이므로 $\dfrac{a_1^2}{1-r^2}=45$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉢에서

$$\frac{a_1^2}{1-r^2}=\frac{a_1}{1+r}\times\frac{a_1}{1-r}=\frac{a_1}{1+r}\times 15=45$$

이므로 $\dfrac{a_1}{1+r}=3$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉣

㉣÷㉠을 하면 $\frac{1-r}{1+r}=\frac{1}{5}$이므로

$5-5r=1+r$, $6r=4$, $r=\frac{2}{3}$

㉠에서 $a_1=5$

따라서 $a_n=5\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$이므로

$a_3=5\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=5\times\frac{4}{9}=\frac{20}{9}$

106. 정답 ③

원의 중심의 좌표를 $(a,\ t)$ $(a>0)$이라 하면 원의 중심에서 점 $(0,\ 1)$까지의 거리가 t이므로

$a^2+(t-1)^2=t^2$에서

$a^2=2t-1, a=\sqrt{2t-1}$

원의 중심과 두 직선 $y=-\frac{3}{4}x+f(t)$, $y=-\frac{3}{4}x+g(t)$, 즉

$3x+4y-4f(t)=0$, $3x+4y-4g(t)=0$ 사이의 거리가 t이므로

$\frac{|3a+4t-4f(t)|}{\sqrt{3^2+4^2}}=t$, $\frac{|3a+4t-4g(t)|}{\sqrt{3^2+4^2}}=t$

$f(t)<g(t)$이므로

$3a+4t-4f(t)=5t$, $3a+4t-4g(t)=-5t$

$4f(t)=3\sqrt{2t-1}-t$, $4g(t)=3\sqrt{2t-1}+9t$

$f(t)=\frac{3}{4}\sqrt{2t-1}-\frac{1}{4}t$에서

$f'(t)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{2\sqrt{2t-1}}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{\sqrt{2t-1}}-\frac{1}{4}$

$f'(k)=0$에서

$\sqrt{2k-1}=3$이므로 $k=5$

$g(t)=\frac{3}{4}\sqrt{2t-1}+\frac{9}{4}t$에서

$g'(t)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{2\sqrt{2t-1}}+\frac{9}{4}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{\sqrt{2t-1}}+\frac{9}{4}$이므로

$g'(k+8)=g'(13)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{\sqrt{26-1}}+\frac{9}{4}=\frac{3}{20}+\frac{9}{4}=\frac{12}{5}$

107. 정답 18

$f(x)=\ln x+e^t$에서 $f'(x)=\frac{1}{x}$

점 A의 좌표를 $(s, \ln s+e^t)$ $(s>0)$이라 하면 직선 OA의 기울기가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 기울기와 같으므로

$\frac{\ln s+e^t}{s}=\frac{1}{s}$ …… ㉠

㉠에서 $s>0$이므로 $\ln s+e^t=1$

즉, $\ln s=1-e^t$에서 $s=e^{1-e^t}$ …… ㉡

그러므로 $g(t)=\frac{1}{s}=e^{e^t-1}$ …… ㉢

한편, 점 A를 지나고 직선 l에 수직인 직선의 방정식은

$y-(\ln s+e^t)=-s(x-s)$

$y=-sx+s^2+\ln s+e^t$

위 식에 $y=0$을 대입하면

$0=-sx+s^2+\ln s+e^t$

$x=s+\frac{\ln s+e^t}{s}=s+\frac{1}{s}$(㉠에 의해)

그러므로 점 B의 좌표는 $\left(s+\frac{1}{s},\ 0\right)$

점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$h(t)=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BH}}{\overline{OH}}=\frac{\frac{1}{s}}{s}=\frac{1}{s^2}$

㉡에 의하여

$h(t)=\frac{1}{s^2}=e^{2e^t-2}$ …… ㉣

$h(a)=e^4$에서

$e^{2e^a-2}=e^4$이므로

$2e^a-2=4, e^a=3$

$a=\ln 3$

㉢, ㉣에서

$g'(t)=e^{e^t-1}\times(e^t-1)'=e^{e^t+t-1}$

$h'(t)=e^{2e^t-2}\times(2e^t-2)'=2e^{2e^t+t-2}$

따라서

$g'(a)=g'(\ln 3)=e^{2+\ln 3}=3e^2$,

$h'(a)=h'(\ln 3)=2e^{4+\ln 3}=6e^4$

이므로

$\frac{1}{e^6}\times g'(a)\times h'(a)=\frac{1}{e^6}\times 3e^2\times 6e^4=18$

108. 정답 36

$g(x)=\int_0^x f(t)dt$에서 $g'(x)=f(x)$, $g''(x)=f'(x)$

$f(x)=(ax^3+bx^2)e^{-x}$에서

$f'(x)=(3ax^2+2bx)e^{-x}-(ax^3+bx^2)e^{-x}$

$=-(ax^3+bx^2-3ax^2-2bx)e^{-x}$

$=-x\{ax^2+(b-3a)x-2b\}e^{-x}$

$g''(x)=f'(x)=0$에서 $e^{-x}>0$이므로

$x\{ax^2+(b-3a)x-2b\}=0$ …… ㉠

$x=0$이 ㉠의 한 근이므로 조건 (가)에 의하여 이차방정식 $ax^2+(b-3a)x-2b=0$의 두 근의 합은 5이다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{b-3a}{a}=5$이므로

$b-3a=-5a$

$b=-2a$ $\cdots\cdots$ ㉡

따라서 $f(x)=(ax^3-2ax^2)e^{-x}=ax^2(x-2)e^{-x}$이고

$f'(x)=(3ax^2-4ax)e^{-x}-(ax^3-2ax^2)e^{-x}$

$\quad=-(ax^3-5ax^2+4ax)e^{-x}$

$f'(x)e^x+2x=-(ax^3-5ax^2+4ax)+2x$

$\quad=-ax(x^2-5x+4)+2x$

$\quad=-ax(x-1)(x-4)+2x$

$p(x)=f'(x)e^x+2x$라 하고, $p(x)$의 부정적분을 $P(x)$라 하면

$h(x)=\int_{x+1}^{x+2}\{f'(t)e^t+2t\}dt$

$\quad=\Big[P(t)\Big]_{x+1}^{x+2}$

$\quad=P(x+2)-P(x+1)$

에서

$h'(x)=p(x+2)-p(x+1)$

$\quad=-a(x+2)(x+1)(x-2)+2(x+2)$

$\qquad+ax(x+1)(x-3)-2x(x+1)$

$\quad=a(x+1)(-x^2+4+x^2-3x)+2$

$\quad=a(x+1)(-3x+4)+2$

$\quad=-3ax^2+ax+4a+2$

조건 (나)에 의하여 이차방정식 $-3ax^2+ax+4a+2=0$의 두 근의 곱은 $-\frac{2}{3}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{4a+2}{-3a}=-\frac{2}{3}$

$12a+6=6a,\ a=-1$

$a=-1$을 ㉡에 대입하면 $b=2$이므로

$p(x)=x^3-5x^2+6x=x(x-2)(x-3)$

$h'(x)=3x^2-x-2=(3x+2)(x-1)$

또한 ㉠에서

$x(-x^2+5x-4)=0,\ -x(x-1)(x-4)=0$

즉, $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=4$이므로 $a_1=0,\ a_2=1,\ a_3=4$

열린구간 $(2\alpha_1,\ 2\alpha_3)$, 즉 열린구간 $(0,\ 8)$에서

$H(x)=h\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)$를 x에 대하여 미분하면

$H'(x)=h'\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)\times\cos\frac{\pi}{2}x\times\frac{\pi}{2}$

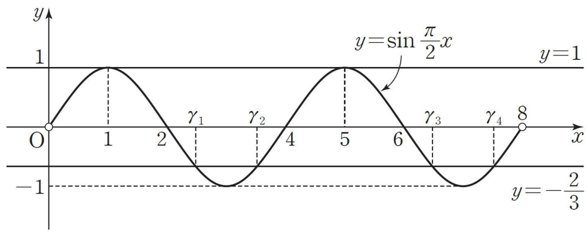
$H'(x)=0$에서

$\cos\frac{\pi}{2}x=0$ 또는 $h'\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)=0$

(ⅰ) $\cos\frac{\pi}{2}x=0$인 x의 값은 $1,\ 3,\ 5,\ 7$이고 x의 값의 좌우에서 $\cos\frac{\pi}{2}x$의 값의 부호가 바뀐다.

(ⅱ) $h'\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)=0$, 즉 $\left(3\sin\frac{\pi}{2}x+2\right)\left(\sin\frac{\pi}{2}x-1\right)=0$에서

$\sin\frac{\pi}{2}x=-\frac{2}{3}$ 또는 $\sin\frac{\pi}{2}x=1$



$\sin\frac{\pi}{2}x=1$인 x의 값은 $1,\ 5$이고, 이때 $\sin\frac{\pi}{2}x\le 1$이므로 x의 값의 좌우에서 $h'\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)$의 값의 부호가 바뀌지 않는다.

$\sin\frac{\pi}{2}x=-\frac{2}{3}$인 x의 값은 4개이고 각각의 x의 값의 좌우에서 $h'\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)$의 값의 부호가 바뀐다.

이 x의 값을 $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_4(\gamma_1<\gamma_2<\gamma_3<\gamma_4)$라 하면

$\gamma_1+\gamma_2=6,\ \gamma_3+\gamma_4=14$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$x=1,\ x=3,\ x=5,\ x=7$일 때는 $\cos\frac{\pi}{2}x$의 값의 부호가 바뀌고 $h'\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)$의 값의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $H(x)$는 극값을 갖는다.

$x=\gamma_1,\ x=\gamma_2,\ x=\gamma_3,\ x=\gamma_4$일 때는 $\cos\frac{\pi}{2}x$의 값의 부호가 바뀌지 않고 $h'\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)$의 값의 부호가 바뀌므로 함수 $H(x)$는 극값을 갖는다.

따라서 함수 $H(x)$가 $x=\beta$에서 극값을 갖도록 하는 모든 β의 값의 합은

$1+3+5+7+(\gamma_1+\gamma_2)+(\gamma_3+\gamma_4)=1+3+5+7+6+14=36$

109. 정답 ⑤

$\angle\mathrm{BDC}=\frac{\pi}{2}$이므로

$\tan(\angle\mathrm{DBC})=\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{BD}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$에서

$\overline{\mathrm{BD}}=2k,\ \overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{3}k\ (k>0)$이라 하면

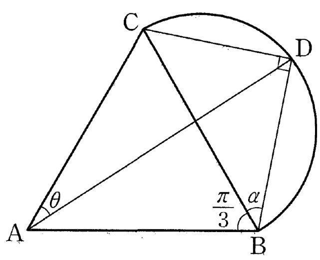
$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{BD}}^2+\overline{\mathrm{CD}}^2}$

$\quad=\sqrt{4k^2+3k^2}=\sqrt{7}k$

$\angle\mathrm{DBC}=\alpha$라 하면

$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}k}{\sqrt{7}k}=\frac{\sqrt{21}}{7}$,

$\cos\alpha=\frac{2k}{\sqrt{7}k}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$



또 $\angle \mathrm{ABC} = \dfrac{\pi}{3}$이므로

$$\cos(\angle \mathrm{ABD}) = \cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{7}}{7} - \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{21}}{7} = -\frac{\sqrt{7}}{14}$$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{AD}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{BD}}^2 - 2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BD}}\times\cos(\angle \mathrm{ABD})$$

$$= (\sqrt{7}k)^2 + (2k)^2 - 2\times\sqrt{7}k\times 2k\times\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right)$$

$$= 13k^2$$

이므로 $\overline{\mathrm{AD}} = \sqrt{13}k$

$\angle \mathrm{DAC} = \theta$라 하면 삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta = \frac{\overline{\mathrm{AC}}^2 + \overline{\mathrm{AD}}^2 - \overline{\mathrm{CD}}^2}{2\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{AD}}} = \frac{7k^2+13k^2-3k^2}{2\times\sqrt{7}k\times\sqrt{13}k} = \frac{17}{2\sqrt{91}}$$

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$이고 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이므로

$$\tan\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}-1}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{91}}{17}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{75}{289}} = \frac{5\sqrt{3}}{17}$$

따라서 $\tan(\angle \mathrm{DAC}) = \dfrac{5\sqrt{3}}{17}$

110. 정답 ③

$f(x) = \dfrac{x^2+ax+b}{e^x}$에서

$$f'(x) = \frac{(2x+a)e^x - (x^2+ax+b)e^x}{e^{2x}} = \frac{-x^2+(2-a)x+a-b}{e^x}$$

$e^x>0$이므로 방정식 $f'(x)=0$의 근은 이차방정식

$-x^2+(2-a)x+a-b=0$의 근과 같다.

그러므로 함수 $f(x)$는 극값을 갖지 않거나 극댓값과 극솟값을 1개씩 갖는다.

또한 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$이므로 x축은 곡선 $y=f(x)$의 점근선이다.

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않는 경우 함수 $g(t)$는 $t=0$에서만 불연속이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

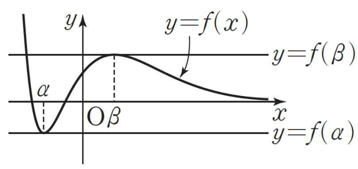
그러므로 함수 $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 1개씩 가져야 한다.

방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하고 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

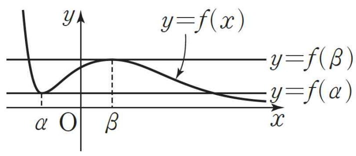
곡선 $y=f(x)$의 점근선이 x축이므로 함수 $f(x)$의 극댓값은 0보다 커야 한다.

[그림 1]과 같이 함수 $f(x)$의 극솟값이 0보다 작은 경우 함수 $g(t)$는 $t=f(\alpha)$, $t=0$, $t=f(\beta)$에서 불연속이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.



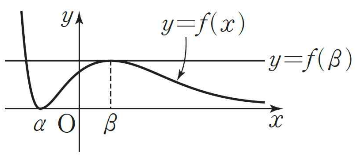
[그림 1]

[그림 2]와 같이 함수 $f(x)$의 극솟값이 0보다 큰 경우 함수 $g(t)$는 $t=0$, $t=f(\alpha)$, $t=f(\beta)$에서 불연속이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.



[그림 2]

[그림 3]과 같이 함수 $f(x)$의 극솟값이 0인 경우 함수 $g(t)$는 $t=0$, $t=f(\beta)$에서 불연속이므로 조건 (가)를 만족시킨다.



[그림 3]

즉, 함수 $f(x)$의 극솟값이면서 최솟값이 0이어야 한다.

이때 모든 실수 x에 대하여 $e^x>0$이므로 함수 $f(x)$의 최솟값이 0이려면

$f(x) = \dfrac{(x-\alpha)^2}{e^x} = \dfrac{x^2-2\alpha x+\alpha^2}{e^x}$이어야 하고

$$f'(x) = \frac{(2x-2\alpha)e^x - (x^2-2\alpha x+\alpha^2)e^x}{e^{2x}}$$

$$= \frac{-x^2+(2\alpha+2)x-(\alpha^2+2\alpha)}{e^x} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$f''(x) = \frac{(-2x+2\alpha+2)e^x - \{-x^2+(2\alpha+2)x-(\alpha^2+2\alpha)\}e^x}{e^{2x}}$$

$$= \frac{x^2-(2\alpha+4)x+\alpha^2+4\alpha+2}{e^x}$$

$e^x>0$이므로 방정식 $f''(x)=0$의 근은 이차방정식

$x^2-(2\alpha+4)x+\alpha^2+4\alpha+2=0$의 근과 같다. 즉, 곡선 $y=f(x)$의 두 변곡점 P, Q의 x좌표를 각각 p, q라 하면 p와 q는 이차방정식 $x^2-(2\alpha+4)x+\alpha^2+4\alpha+2=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$p+q = 2\alpha+4$, $pq = \alpha^2+4\alpha+2$

조건 (나)에서 두 점 P, Q의 중점의 x좌표가 1이므로

$$\frac{p+q}{2} = 1$$

즉, $p+q=2$이므로 $2\alpha+4=2$에서 $\alpha=-1$

$pq = (-1)^2+4\times(-1)+2 = -1$

㉠에 $\alpha=-1$을 대입하면 $f'(x) = \dfrac{-x^2+1}{e^x}$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기와 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 Q에서의 접선의 기울기의 곱은

$f'(p)\times f'(q)=\dfrac{-p^2+1}{e^p}\times\dfrac{-q^2+1}{e^q}=\dfrac{p^2q^2-(p^2+q^2)+1}{e^{p+q}}$

이때

$p^2q^2=(pq)^2=(-1)^2=1,$

$p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=2^2-2\times(-1)=6$

이므로

$f'(p)\times f'(q)=\dfrac{p^2q^2-(p^2+q^2)+1}{e^{p+q}}=\dfrac{1-6+1}{e^2}=-\dfrac{4}{e^2}$

111. 정답 21

$\displaystyle\int_0^1\{f(x)\}^2e^{2x}dx$에서 $u(x)=\{f(x)\}^2,\ v'(x)=e^{2x}$으로 놓으면

$u'(x)=2f(x)f'(x),\ v(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}$이므로

$\displaystyle\int_0^1\{f(x)\}^2e^{2x}dx=\left[\frac{1}{2}\{f(x)\}^2e^{2x}\right]_0^1-\int_0^1 f(x)f'(x)e^{2x}dx$

이때

$\displaystyle\int_0^1\{f(x)\}^2e^{2x}dx+\int_0^1 f(x)f'(x)e^{2x}dx$

$=\left[\dfrac{1}{2}\{f(x)\}^2e^{2x}\right]_0^1$

$=\dfrac{1}{2}e^2\{f(1)\}^2-\dfrac{1}{2}\{f(0)\}^2$

$=\dfrac{1}{2}\{ef(1)-f(0)\}\{ef(1)+f(0)\}$ …… ㉠

조건 (가)에서 $\displaystyle\int_0^1\{f(x)\}^2e^{2x}dx=7k,$

$\displaystyle\int_0^1 f(x)f'(x)e^{2x}dx=7k\times\left(-\frac{23}{14}\right)=-\frac{23}{2}k$이므로 ㉠에서

$\dfrac{1}{2}\{ef(1)-f(0)\}\{ef(1)+f(0)\}=-\dfrac{9}{2}k$ …… ㉡

$\displaystyle\int_0^1 f(x)e^xdx$에서 $p(x)=f(x),\ q'(x)=e^x$으로 놓으면

$p'(x)=f'(x),\ q(x)=e^x$이므로

$\displaystyle\int_0^1 f(x)e^xdx=\Big[f(x)e^x\Big]_0^1-\int_0^1 f'(x)e^xdx$

이때

$\displaystyle\int_0^1 f(x)e^xdx+\int_0^1 f'(x)e^xdx=\Big[f(x)e^x\Big]_0^1=ef(1)-f(0)$

즉, $\displaystyle\int_0^1\{f(x)+f'(x)\}e^xdx=ef(1)-f(0)$

조건 (나)에 의하여 $\{f(x)+f'(x)\}e^x=k$이므로

$\displaystyle\int_0^1 kdx=ef(1)-f(0)$

$\displaystyle\int_0^1 kdx=\Big[kx\Big]_0^1=k-0=k$이므로

$ef(1)-f(0)=k$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$\dfrac{1}{2}k\{ef(1)+f(0)\}=-\dfrac{9}{2}k$에서 $ef(1)+f(0)=-9$

조건 (다)에서 $-\dfrac{e}{2}f(1)=\dfrac{ef(1)+f(0)}{f(0)}$이므로

$-\dfrac{e}{2}f(1)f(0)=-9,\ ef(1)f(0)=18$

㉢에 의하여

$k^2=\{ef(1)-f(0)\}^2=\{ef(1)+f(0)\}^2-4\times ef(1)f(0)$

$=(-9)^2-4\times18=9$

$k>0$이므로 $k=3$

따라서

$\displaystyle\int_0^1\{f(x)\}^2e^{2x}dx=7k=7\times3=21$

[참고]

주어진 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$는 $f(x)=\dfrac{3x-6}{e^x}$이다.

112. 정답 28

$\displaystyle h(x)=\int_{-3}^x f(t)\ln\frac{g(x)}{g(t)}dt=\int_{-3}^x f(t)\{\ln g(x)-\ln g(t)\}dt$

$\displaystyle=\ln g(x)\times\int_{-3}^x f(t)dt-\int_{-3}^x f(t)\ln g(t)dt$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\displaystyle h'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}\int_{-3}^x f(t)dt+f(x)\ln g(x)-f(x)\ln g(x)$

$\displaystyle=\frac{g'(x)}{g(x)}\int_{-3}^x f(t)dt$ …… ㉠

위 식의 양변에 $x=-3$을 대입하면 $h'(-3)=0$

일차함수 $f(x)$에 대하여 $f(-1)=0$이므로

$f(x)=ax+a$ (a는 0이 아닌 상수)라 하면

$\displaystyle\int_{-3}^x f(t)dt=\int_{-3}^x(at+a)dt=\left[\frac{a}{2}t^2+at\right]_{-3}^x$

$=\left(\dfrac{a}{2}x^2+ax\right)-\left(\dfrac{9}{2}a-3a\right)=\dfrac{a}{2}(x+3)(x-1)$

이므로 $\displaystyle\int_{-3}^1 f(t)dt=0$이고 $h'(1)=0$

이때 $g(x)$가 이차함수이므로 $g'(x)$는 일차함수이고, 함수 $h(x)$가 오직 하나의 극값을 가지려면 $g'(-3)=0$ 또는 $g'(-1)=0$이어야 한다.

$g(x)$가 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로 $g'(x)$는 최고차항의 계수가 2인 일차함수이다.

(ⅰ) $g'(-3)=0$인 경우

$g'(x)=2x+6$이므로

$g(x)=\displaystyle\int(2x+6)dx=x^2+6x+C_1$ (C_1은 적분상수)

조건 (나)에서 $g(2)=4+12+C_1=5$이므로 $C_1=-11$

이때 $g(x)=x^2+6x-11$은 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $g'(1)=0$인 경우

$g'(x)=2x-2$이므로

$g(x)=\int(2x-2)dx=x^2-2x+C_2$ (C_2는 적분상수)

조건 (나)에서 $g(2)=4-4+C_2=5$이므로 $C_2=5$

이때 $g(x)=x^2-2x+5=(x-1)^2+4$는 조건 (가)를 만족시킨다.

즉, $g(x)=x^2-2x+5$, $g'(x)=2x-2$이므로 ㉠에서

$$h'(x)=\frac{2x-2}{x^2-2x+5}\int_{-3}^{x}(at+a)dt=\frac{2x-2}{x^2-2x+5}\times a\int_{-3}^{x}(t+1)dt$$

$h'(3)=4$이므로

$$h'(3)=\frac{6-2}{9-6+5}\times a\int_{-3}^{3}(t+1)dt=\frac{1}{2}a\int_{-3}^{3}(t+1)dt=a\int_{0}^{3}1\,dt$$

$$=3a=4$$

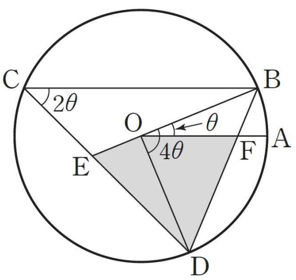
에서 $a=\frac{4}{3}$이고 $f(x)=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$

따라서 $f(5)=\frac{20}{3}+\frac{4}{3}=8$, $g(5)=25-10+5=20$이므로

$f(5)+g(5)=8+20=28$

113. 정답 ④

$\angle\mathrm{BCD}=2\theta$에서 호 BD의 원주각의 크기가 2θ이므로 중심각의 크기는 4θ이다.



즉, $\angle\mathrm{DOB}=4\theta$이므로

$\angle\mathrm{DOF}=3\theta$이고

$$\angle\mathrm{FDO}=\frac{\pi-4\theta}{2}=\frac{\pi}{2}-2\theta$$

$$\angle\mathrm{OFD}=\pi-3\theta-\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)=\frac{\pi}{2}-\theta$$

또 $\overline{\mathrm{OA}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{CB}}$에서 $\angle\mathrm{OBC}=\angle\mathrm{AOB}=\theta$이므로

$\angle\mathrm{DEO}=3\theta$,

$\angle\mathrm{ODE}=\angle\mathrm{DOB}-\angle\mathrm{DEO}=4\theta-3\theta=\theta$

$\overline{\mathrm{OD}}=1$이므로 삼각형 OED에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{OD}}}{\sin3\theta}=\frac{\overline{\mathrm{OE}}}{\sin\theta},\quad \overline{\mathrm{OE}}=\frac{\sin\theta}{\sin3\theta}$$

또 삼각형 ODF에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{OD}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{\overline{\mathrm{OF}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)},\quad \overline{\mathrm{OF}}=\frac{\cos2\theta}{\cos\theta}$$

사각형 OEDF의 넓이는 두 삼각형 OED, ODF의 넓이의 합과 같으므로

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OE}}\times\overline{\mathrm{OD}}\times\sin(\pi-4\theta)+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OD}}\times\overline{\mathrm{OF}}\times\sin3\theta$$

$$=\frac{\sin\theta\sin4\theta}{2\sin3\theta}+\frac{\cos2\theta\sin3\theta}{2\cos\theta}$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{\sin\theta\sin4\theta}{2\sin3\theta}+\frac{\cos2\theta\sin3\theta}{2\cos\theta}}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{2}{3}\times\frac{\frac{\sin\theta}{\theta}}{\frac{\sin3\theta}{3\theta}}\times\frac{\sin4\theta}{4\theta}+\frac{3\cos2\theta}{2\cos\theta}\times\frac{\sin3\theta}{3\theta}\right\}$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{1}\times1+\frac{3}{2}\times1=\frac{13}{6}$$

114. 정답 ①

$y=\ln x$에서 $y'=\frac{1}{x}$

곡선 $y=\ln x$ 위의 점 $(t,\ \ln t)$에서의 접선의 방정식은

$y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t)$, 즉 $y=\frac{x}{t}-1+\ln t$

이므로 $f(x)=\frac{x}{t}-1+\ln t$

$h(x)=f(x)-x^2+m$으로 놓으면

$$h(x)=-x^2+\frac{x}{t}-1+\ln t+m$$

$$=-\left(x-\frac{1}{2t}\right)^2+\frac{1}{4t^2}-1+\ln t+m$$

함수 $y=|h(x)|$가 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x\ge0$일 때 $h(x)\le0$이어야 한다.

$t>0$에서 $\frac{1}{2t}>0$이므로

$$\frac{1}{4t^2}-1+\ln t+m\le0$$

$$m\le1-\ln t-\frac{1}{4t^2}$$

이때 m의 최댓값 $g(t)$는

$g(t)=1-\ln t-\frac{1}{4t^2}$이므로

$$\int_1^e g(t)dt=\int_1^e\left(1-\ln t-\frac{1}{4t^2}\right)dt$$

$$=\int_1^e\left(1-\frac{1}{4t^2}\right)dt-\int_1^e\ln t\,dt$$

$$\int_1^e\left(1-\frac{1}{4t^2}\right)dt=\left[t+\frac{1}{4t}\right]_1^e=\left(e+\frac{1}{4e}\right)-\left(1+\frac{1}{4}\right)$$

$$=e+\frac{1}{4e}-\frac{5}{4}$$

$\int_1^e\ln t\,dt$에서 $u(t)=\ln t$, $v'(t)=1$이라 하면

$u'(t)=\frac{1}{t}$, $v(t)=t$이므로

$$\int_1^e \ln t\,dt = \Big[\ t\ln t\ \Big]_1^e - \int_1^e 1\,dt = e\ln e - \ln 1 - \Big[\ t\ \Big]_1^e$$

$$= e-(e-1) = 1$$

따라서

$$\int_1^e g(t)dt = \int_1^e \left(1-\frac{1}{4t^2}\right)dt - \int_1^e \ln t\,dt$$

$$= \left(e+\frac{1}{4e}-\frac{5}{4}\right)-1 = e+\frac{1}{4e}-\frac{9}{4}$$

115. 정답 11

$f(x)=(x^2+1)e^{-x}$에서

$f'(x)=2xe^{-x}-(x^2+1)e^{-x}=-(x-1)^2e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

$f''(x)=(-2x+2)e^{-x}-(-x^2+2x-1)e^{-x}=(x^2-4x+3)e^{-x}$

$\quad=(x-1)(x-3)e^{-x}$

$f''(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

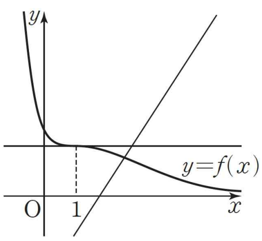
x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	변곡점	↘	변곡점	↘

$f'(1)=0,\ f'(3)=-\dfrac{4}{e^3}$

(i) $m>0$일 때

[그림 1]과 같이 기울기가 양수인 직선은 곡선 $y=f(x)$와 항상 한 점에서 만나므로

$g(m)=1-1=0$



[그림 1]

(ii) $m=0$일 때

[그림 1]과 같이 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이고,

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$이므로 기울기가 0인 직선의 y절편이 0 또는 음수이면 이 직선은 곡선 $y=f(x)$와 만나지 않는다. 또 기울기가 0인 직선의 y절편이 양수이면 이 직선은 곡선 $y=f(x)$와 항상 한 점에서 만나므로

$g(m)=1-0=1$

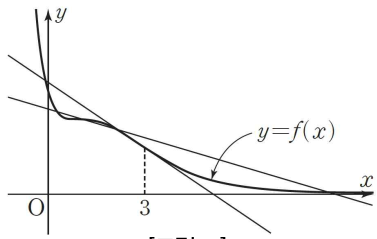
(iii) $-\dfrac{4}{e^3}<m<0$일 때

[그림 2]와 같이 기울기가 m인 직선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 서로 다른 점의 개수의 최댓값은 4이고 최솟값은 0이므로$g(m)=4-0=4$

(iv) $m\le-\dfrac{4}{e^3}$일 때

[그림 2]와 같이 기울기가 m인 직선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 서로 다른 점의 개수의 최댓값은 2이고 최솟값은 0이므로

$g(m)=2-0=2$



[그림 2]

(i)~(iv)에서

$A=\{0,\ 1,\ 2,\ 4\}$이므로 $p=4,\ q=0+1+2+4=7$

따라서 $p+q=4+7=11$

116. 정답 36

함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 -1인 이차함수이므로 조건 (다)에 의하여

$g(x)=-(x-a)(x-a-2)$

로 놓으면

$g(1)=-(1-a)(1-a-2)=1$에서

$(1-a)(1+a)=1,\ 1-a^2=1$

$a^2=0,\ a=0$

즉, $g(x)=-x(x-2)=-x^2+2x$

조건 (가)에 의하여 모든 실수 x에 대하여 $f(x)-g(x)\ge0$이다.

조건 (나)에서 두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$가 두 점에서만 만나므로 방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $f(x)=g(x)=0$의 실근은 2개뿐이다.

이때 조건 (다)에 의하여 $f(0)-g(0)=0$이므로 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 한 실근은 0이고, 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로

$f(x)-g(x)=x^2(x-b)^2$ (b는 상수)

로 놓을 수 있다.

$f(x)=x^2(x-b)^2+g(x)=x^2(x-b)^2-x^2+2x$

$=x^4-2bx^3+(b^2-1)x^2+2x$

에서

$f'(x)=4x^3-6bx^2+2(b^2-1)x+2$

$f''(x)=12x^2-12bx+2(b^2-1)$

$f'(1)=2b^2-6b+4=0$에서

$2(b-1)(b-2)=0$

$b=1$ 또는 $b=2$ …… ㉠

$f''(1)=2b^2-12b+10=0$에서

$2(b-1)(b-5)=0$

$b=1$ 또는 $b=5$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $b=1$이므로

$f'(x)=4x^3-6x^2+2=2(x-1)^2(2x+1)$

또한 $g'(x)=-2x+2=-2(x-1)$이므로

$$\int_2^4 \frac{g'(x)}{f'(x)}dx = \int_2^4 \frac{-2(x-1)}{2(x-1)^2(2x+1)}dx$$

$$=-\int_2^4 \frac{1}{(x-1)(2x+1)}dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_{2}^{4}\left(\frac{2}{2x+1}-\frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}\Big[\ \ln|2x+1|-\ln|x-1|\ \Big]_{2}^{4}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\ln\frac{9}{3}-\ln\frac{5}{1}\right)=\frac{1}{3}\ln\frac{3}{5}=\ln\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$$

따라서 $p=\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$ 이므로

$$100\times p^{6}=100\times\left(\sqrt[3]{\frac{3}{5}}\right)^{6}=100\times\frac{9}{25}=36$$

117. 정답 ②

조건 (가)에서

$$\int_{0}^{x}tg(t)dt-\int_{0}^{x}xg(t)dt=-\sin x+x \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$xg(x)-\int_{0}^{x}g(t)dt-xg(x)=-\cos x+1$$

$$\int_{0}^{x}g(t)dt=\cos x-1 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g(x)=-\sin x$

이때 $g'(x)=-\cos x$이므로 조건 (나)에서

$$\{f'(x)\}^{2}=\frac{\cos^{2}x}{1-2\sin^{2}x+\sin^{4}x}-1$$

$$1+\{f'(x)\}^{2}=\frac{\cos^{2}x}{(1-\sin^{2}x)^{2}}$$

$x=0$에서 $x=\frac{\pi}{6}$까지의 곡선 $y=f(x)$의 길이를 l이라 하면

$$l=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+\{f'(x)\}^{2}}\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{\frac{\cos^{2}x}{(1-\sin^{2}x)^{2}}}\,dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\left|\frac{\cos^{2}x}{(1-\sin^{2}x)}\right|dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos^{2}x}{1-\sin^{2}x}dx \quad \cdots\cdots \text{㉢}$$

㉢에서 $\sin x=s$로 놓으면

$x=0$일 때 $s=0$, $x=\frac{\pi}{6}$일 때 $s=\frac{1}{2}$이고,

$\frac{ds}{dx}=\cos x$이므로

$$l=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-s^{2}}ds=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(1+s)(1-s)}ds$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s-1}\right)dx=\frac{1}{2}\big[\ln|s+1|-\ln|s-1|\big]_{0}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{3}{2}-\ln\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln 3$$

118. 정답 ③

$f(x)=ax^{2}+bx+c$(a, b, c는 상수, $a>0$)이라 하면

$g(x)=(ax^{2}+bx+c)e^{x}$

$g'(x)=(2ax+b)e^{x}+(ax^{2}+bx+c)e^{x}$

$\quad\quad=\{ax^{2}+(2a+b)x+(b+c)\}e^{x}$

$e^{x}>0$이므로 $g'(x)=0$에서 $ax^{2}+(2a+b)x+(b+c)=0$

조건 (가)에서 함수 $g(x)$가 $x=-\sqrt{2}$와 $x=\sqrt{2}$에서 극값을 가지므로

이차방정식 $ax^{2}+(2a+b)x+(b+c)=0$의 서로 다른 두 실근이 $x=-\sqrt{2}$와 $x=\sqrt{2}$이다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{2a+b}{a}=-\sqrt{2}+\sqrt{2}=0$이므로 $b=-2a$

$\frac{b+c}{a}=-\sqrt{2}\times\sqrt{2}=-2$이므로 $b+c=-2a$

즉, $c=0$이므로 $g(x)=a(x^{2}-2x)e^{x}$, $g'(x)=(ax^{2}-2a)e^{x}$이고,

$g''(x)=(ax^{2}+2ax-2a)e^{x}=a(x^{2}+2x-2)e^{x}$

$g''(x)=0$에서 $x^{2}+2x-2=0$이므로 $x=-1\pm\sqrt{3}$

이때 $\alpha=-1+\sqrt{3}$, $\beta=-1-\sqrt{3}$이라 하면

$g(\alpha)=g(-1+\sqrt{3})=a(6-4\sqrt{3})e^{-1+\sqrt{3}}$

$g(\beta)=g(-1-\sqrt{3})=a(6+4\sqrt{3})e^{-1-\sqrt{3}}$

이므로 $g(\alpha)\times g(\beta)=a^{2}\times\{6^{2}-(4\sqrt{3})^{2}\}e^{-2}=-\frac{12}{e^{2}}a^{2}$

조건 (나)에서 $g(\alpha)\times g(\beta)=-\frac{12}{e^{2}}$이므로 $a^{2}=1$

$a>0$이므로 $a=1$

따라서 $f(x)=x^{2}-2x$, $g(x)=(x^{2}-2x)e^{x}$이고,

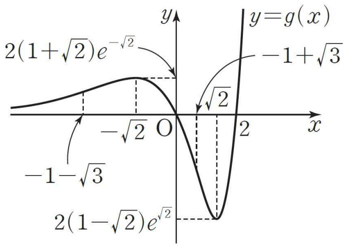
$g'(x)=(x^{2}-2)e^{x}$, $g''(x)=(x^{2}+2x-2)e^{x}$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-1-\sqrt{3}$	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$g''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	$(6+4\sqrt{3})e^{-1-\sqrt{3}}$	$\nearrow$	$2(1+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$	$\searrow$

x	$-1+\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$g''(x)$	0	$+$	$+$	$+$
$g(x)$	$(6-4\sqrt{3})e^{-1+\sqrt{3}}$	$\searrow$	$2(1-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}$	$\nearrow$

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

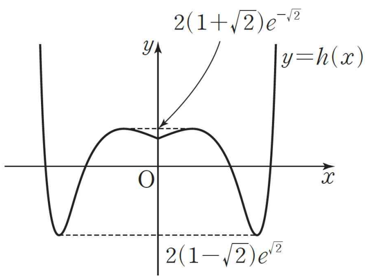


$g(|x|+t)=\begin{cases} g(-x+t) & (x<0) \\ g(x+t) & (x \ge 0) \end{cases}$에서

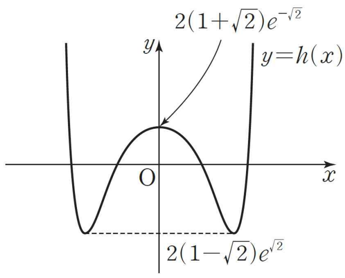
함수 $y=g(x+t)\,(x\ge 0)$의 그래프는 함수 $y=g(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-t$만큼 평행이동한 그래프의 $x\ge 0$인 부분이고, 함수 $y=g(-x+t)\,(x<0)$의 그래프는 함수 $y=g(x+t)\,(x>0)$)의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프이다.

$t<\sqrt{2}$인 실수 t에 대하여 $h(x)=g(|x|+t)$이므로 실수 $t(t<\sqrt{2})$의 값에 따라 함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.

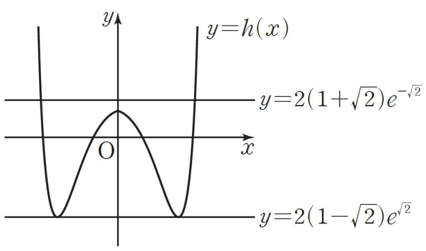
(i) $t<-\sqrt{2}$일 때



(ii) $t=-\sqrt{2}$일 때



(iii) $-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$일 때



따라서 $t<\sqrt{2}$인 실수 t에 대하여 함수 $h(x)$의 극댓값 $k(t)$의 최댓값은

$M=2(1+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$이고, 극솟값 $l(t)$의 최솟값은

$m=2(1-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}$이므로

$mM=2(1-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}\times 2(1+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$

$\quad =2^2\times(-1)\times e^{\sqrt{2}-\sqrt{2}}=-4$

$$\int_{mM}^{0} f(x)dx=\int_{-4}^{0}(x^2-2x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-4}^{0}$$

$$=0-\left\{\frac{1}{3}\times(-4)^3-(-4)^2\right\}=\frac{112}{3}$$

119. 정답 7

조건 (가)에서

(i) $1<a<4$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a\times 4^{n-1}+4\times a^{n+1}}{a^n+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a}{4}+4a\times\left(\frac{a}{4}\right)^n}{\left(\frac{a}{4}\right)^n+1}=\frac{a}{4}$$

이므로 $\frac{a}{4}=\frac{1}{2}$에서 $a=2$

(ii) $a=4$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a\times 4^{n-1}+4\times a^{n+1}}{a^n+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+4^{n+2}}{4^n+4^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{17\times 4^n}{2\times 4^n}=\frac{17}{2}$$

이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(iii) $a>4$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a\times 4^{n-1}+4\times a^{n+1}}{a^n+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a}{4}\times\left(\frac{4}{a}\right)^n+4a}{1+\left(\frac{4}{a}\right)^n}=4a$$

이므로 $4a=\frac{1}{2}$에서 $a=\frac{1}{8}$

이때 $a>4$라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 $a=2$

한편, 조건 (나)에서 함수 $y=b^{x+1}$의 그래프는 함수 $y=b^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

① $1<b<4$일 때

두 함수 $y=4^x$, $y=b^{x+1}$의 그래프는 제 1사분면 위의 한 점에서만 만난다.

② $b=4$일 때

두 함수 $y=4^x$, $y=b^{x+1}$의 그래프는 만나지 않는다.

③ $b>4$일 때

두 함수 $y=4^x$, $y=b^{x+1}$의 그래프는 제 2사분면 위의 한 점에서만 만난다.

①, ②, ③에 의하여 $b>4$일 때만 조건 (나)를 만족시킨다.

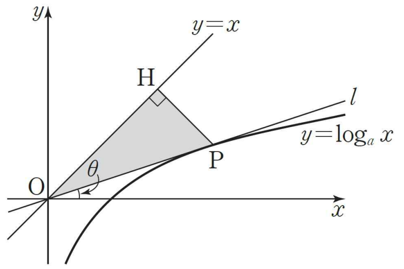
즉, 자연수 b의 최솟값 k는 5이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k\times\left(\frac{1}{a}\right)^{n+1}+a\times\left(\frac{1}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{a}\right)^n+\left(\frac{1}{k}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+2\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{5}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{2}+\frac{2}{5}\times\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n}=\frac{5}{2}$$

따라서 $p=2,\ q=5$이므로 $p+q=2+5=7$

120. 정답 25



$f(x)=\log_a x$라 하면 $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}$

점 P의 x좌표를 t라 하면 점 P의 좌표는 $(t,\ \log_a t)$이다.

직선 l은 직선 OP이므로 직선 l의 기울기는

$$\frac{\log_a t-0}{t-0}=\frac{\log_a t}{t}=\frac{\ln t}{t\ln a}$$

점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln a}$이므로

$\dfrac{1}{t\ln a}=\dfrac{\ln t}{t\ln a}$에서 $\ln t=1, t=e$

즉, $\mathrm{P}\left(e,\ \dfrac{1}{\ln a}\right)$

점 P에서 직선 $y=x$에 내린 수선의 발이 H이므로 선분 PH의 길이는 점 $\mathrm{P}\left(e,\ \dfrac{1}{\ln a}\right)$과 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리와 같다.

$$\overline{\mathrm{PH}}=\frac{\left|e-\frac{1}{\ln a}\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e-\frac{1}{\ln a}\right)=\frac{e\ln a-1}{\sqrt{2}\ln a}$$

직선 l이 x축과 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\tan\theta$는 직선 l의 기울기와 같으므로

$$\tan\theta=\frac{1}{e\ln a}$$

$$\tan(\angle\mathrm{POH})=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\theta}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{e\ln a}}{1+\frac{1}{e\ln a}}=\frac{e\ln a-1}{e\ln a+1}$$

삼각형 OPH에서 $\tan(\angle\mathrm{POH})=\dfrac{\overline{\mathrm{PH}}}{\overline{\mathrm{OH}}}$이므로

$$\overline{\mathrm{OH}}=\frac{\overline{\mathrm{PH}}}{\tan(\angle\mathrm{POH})}=\frac{e\ln a-1}{\sqrt{2}\ln a}\times\frac{e\ln a+1}{e\ln a-1}=\frac{e\ln a+1}{\sqrt{2}\ln a}$$

따라서 삼각형 OPH의 넓이 $S(a)$는

$$S(a)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OH}}\times\overline{\mathrm{PH}}=\frac{1}{2}\times\frac{e\ln a+1}{\sqrt{2}\ln a}\times\frac{e\ln a-1}{\sqrt{2}\ln a}$$
$$=\frac{(e\ln a+1)(e\ln a-1)}{4(\ln a)^2}$$

이므로

$$\lim_{a\to\infty}\frac{100\times S(a)}{e^2}=\frac{100}{e^2}\times\lim_{a\to\infty}\frac{(e\ln a+1)(e\ln a-1)}{4(\ln a)^2}$$
$$=\frac{100}{e^2}\times\frac{e^2}{4}=25$$

다른 풀이

삼각형 OPH의 넓이 $S(a)$를 다음과 같이 구할 수도 있다.

$$\overline{\mathrm{PH}}=\frac{e\ln a-1}{\sqrt{2}\ln a}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e-\frac{1}{\ln a}\right)$$

직선 PH는 기울기가 -1이고 점 $\mathrm{P}\left(e,\ \dfrac{1}{\ln a}\right)$을 지나므로 직선 PH의 방정식은

$$y=-(x-e)+\frac{1}{\ln a}$$

이 직선과 직선 $y=x$의 교점이 H이므로

$-(x-e)+\dfrac{1}{\ln a}=x$에서 $x=\dfrac{1}{2}\left(e+\dfrac{1}{\ln a}\right)$

즉, $\mathrm{H}\left(\dfrac{1}{2}\left(e+\dfrac{1}{\ln a}\right),\ \dfrac{1}{2}\left(e+\dfrac{1}{\ln a}\right)\right)$이므로

$$\overline{\mathrm{OH}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(e+\frac{1}{\ln a}\right)$$

따라서

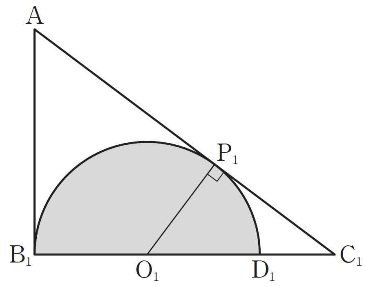
$$S(a)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OH}}\times\overline{\mathrm{PH}}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\left(e+\frac{1}{\ln a}\right)\times\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e-\frac{1}{\ln a}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left\{e^2-\frac{1}{(\ln a)^2}\right\}$$

이므로

$$\lim_{a\to\infty}\frac{100\times S(a)}{e^2}=\frac{100}{e^2}\times\lim_{a\to\infty}\frac{1}{4}\left\{e^2-\frac{1}{(\ln a)^2}\right\}$$
$$=\frac{100}{e^2}\times\frac{e^2}{4}=25$$

121. 정답 ②

다음 그림과 같이 선분 $\mathrm{B_1D_1}$의 중점을 $\mathrm{O_1}$, 점 $\mathrm{O_1}$에서 선분 $\mathrm{AC_1}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{P_1}$이라 하고, $\overline{\mathrm{B_1O_1}}=r_1$이라 하자.



$\overline{O_1P_1}=r_1$, $\overline{C_1O_1}=4-r_1$, $\overline{AC_1}=\sqrt{3^2+4^2}=5$이고

두 삼각형 $O_1P_1C_1$과 AB_1C_1은 닮은 도형이므로

$\overline{O_1P_1}:\overline{AB_1}=\overline{O_1C_1}:\overline{AC_1}$

$r_1:3=(4-r_1):5$

$5r_1=12-3r_1$

$r_1=\dfrac{3}{2}$

그러므로 선분 B_1D_1과 호 B_1D_1로 둘러싸인 반원의 내부의 넓이 S_1은

$S_1=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{9}{4}\pi=\dfrac{9}{8}\pi$

한편, $\overline{B_1B_2}=r_1=\dfrac{3}{2}$이므로

$\overline{AB_2}=3-\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$

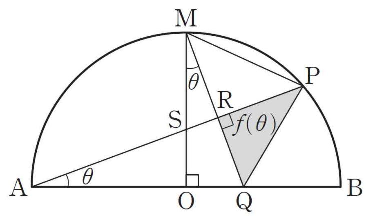
즉, 두 삼각형 AB_1C_1과 AB_2C_2의 닮음비가 $2:1$이고, 마찬가지 방법으로 하면 두 삼각형 AB_nC_n과 $AB_{n+1}C_{n+1}$의 닮음비도 $2:1$임을 알 수 있다.

즉, n번째 얻은 반원과 $(n+1)$번째 얻은 반원의 넓이의 비는 $2^2:1^2=4:1$이다.

따라서 $S_1=\dfrac{9}{8}\pi$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $S_{n+1}=\dfrac{1}{4}S_n$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{9}{8}\pi}{1-\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}\pi$$

122. 정답 ②



위 그림과 같이 선분 AB의 중점을 O라 하고 선분 MO와 선분 AP의 교점을 S라 하면 $\angle RMS=\theta$이고 $\overline{SO}=\overline{AO}\tan\theta=\tan\theta$이므로

$\overline{MS}=1-\tan\theta$

$\overline{MR}=\overline{MS}\cos\theta=(1-\tan\theta)\cos\theta$

$\angle MPA=\dfrac{\pi}{4}$이므로

$\overline{PR}=\overline{MR}=(1-\tan\theta)\cos\theta$ …… ㉠

$\overline{OQ}=\overline{OM}\tan\theta=\tan\theta$이므로

$\overline{QR}=\overline{AQ}\sin\theta=(1+\tan\theta)\sin\theta$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 삼각형 PRQ의 넓이 $f(\theta)$는

$f(\theta)=\dfrac{1}{2}(1-\tan\theta)\cos\theta(1+\tan\theta)\sin\theta$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta}&=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\tan\theta)\cos\theta(1+\tan\theta)\sin\theta}{2\theta}\\&=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to0+}\left\{(1-\tan^2\theta)\times\cos\theta\times\frac{\sin\theta}{\theta}\right\}\\&=\frac{1}{2}\times(1\times1\times1)\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

123. 정답 9

$f(x)=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}|\sin t|\,dt$에서 $f'(x)=|\sin x|$이고

$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,dt=0$

$$\begin{aligned}f(0)&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}|\sin t|\,dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(-\sin t)\,dt\\&=\Big[\cos t\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(\pi)&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}|\sin t|\,dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(-\sin t)\,dt+\int_{0}^{\pi}\sin t\,dt\\&=\Big[\cos t\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}+\Big[-\cos t\Big]_{0}^{\pi}\\&=1+2=3\end{aligned}$$

$-\dfrac{\pi}{2}\le x\le0$일 때 $f'(x)=-\sin x$이고,

$0\le x\le\pi$일 때 $f'(x)=\sin x$이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\sin x\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\{-f(x)f'(x)\}\,dx+\int_{0}^{\pi}f(x)f'(x)\,dx$$

$f(x)=s$로 놓으면 $f'(x)=\dfrac{ds}{dx}$이고

$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$, $f(0)=1$, $f(\pi)=3$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\sin x\,dx&=\int_{0}^{1}(-s)\,ds+\int_{1}^{3}s\,ds\\&=\left[-\frac{1}{2}s^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{2}s^2\right]_1^3\\&=-\frac{1}{2}+4=\frac{7}{2}\end{aligned}$$

따라서 $p=2,\ q=7$이므로
$p+1=2+7=9$

124. 정답 29

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (0 \le x \le 3) \\ \dfrac{f(x)}{x-2} & (x<0,\ x>3) \end{cases}$$에서

$$g'(x)=\begin{cases} f'(x) & (0<x<3) \\ \dfrac{f'(x)(x-2)-f(x)}{(x-2)^2} & (x<0,\ x>3) \end{cases}$$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.
즉, $\lim_{x\to 0+} g(x)=\lim_{x\to 0-} g(x)=g(0)$이어야 하므로

$f(0)=-\dfrac{f(0)}{2}$

$f(0)=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

또 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능해야 하므로

$f'(0)=-\dfrac{2f'(0)-f(0)}{4}=-\dfrac{f(0)}{2}$

$f'(0)=0$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $f(x)=x^3-ax^2$ (a는 실수)로 놓을 수 있다.
그러므로

$$g(x)=\begin{cases} x^3-ax^2 & (0 \le x \le 3) \\ \dfrac{x^3-ax^2}{x-2} & (x<0,\ x>3) \end{cases}$$

$$g'(x)=\begin{cases} 3x^2-2ax & (0<x<3) \\ \dfrac{2x^3-(a+6)x^2+4ax}{(x-2)^2} & (x<0,\ x>3) \end{cases}$$

이때 $g(3)=27-9a \ge -27$이므로 $a \le 6$

(ⅰ) $a<0$일 때

$2x^3-(a+6)x^2+4ax=x\{2x^2-(a+6)x+4a\}$

에서 $2x^2-(a+6)x+4a=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
이때의 두 실근을 $\alpha,\ \beta$ $(\alpha<\beta)$라 하면 $\alpha\beta<0$이므로 $\alpha<0$, $\beta>0$이다.
이때 함수 $g(x)$는 $x=\alpha$에서 극솟값을 갖고 $x=\alpha$에서 미분가능하므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a=0$일 때

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖고 $x=0$에서 미분가능하므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $0<a<\dfrac{9}{2}$일 때

$f'(x)=3x^2-2ax=0$에서

$x=0$ 또는 $x=\dfrac{2}{3}a$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{2}{3}a$에서 극솟값을 갖는다.

이때 $0<\dfrac{2}{3}a<3$이므로 함수 $g(x)$는 $x=\dfrac{2}{3}a$에서 극솟값을 갖고 $x=\dfrac{2}{3}a$에서 미분가능하다. 즉, 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

(ⅳ) $\dfrac{9}{2} \le a \le 6$일 때

x에 대한 방정식 $2x^2-(a+6)x+4a=0$은 실근을 갖지 않으므로 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$-$		$+$
$g(x)$	↘	0	↘	$27-9a$	↗

즉, 함수 $g(x)$는 $x=3$에서만 극솟값을 갖고

$\lim_{x\to 3-} g'(x)=27-6a,\ \lim_{x\to 3+} g'(x)=3a$

이다. $\dfrac{9}{2} \le a \le 6$일 때, $27-6a \ne 3a$이므로 조건 (다)를 만족시킨다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서 조건을 만족시키는 모든 함수 $g(x)$는 $x=3$일 때, 극솟값 $27-9a$를 갖고 $\dfrac{9}{2} \le a \le 6$이다.

따라서 함수 $g(x)$의 극솟값의 최댓값은 $a=\dfrac{9}{2}$일 때

$27-9\times\dfrac{9}{2}=-\dfrac{27}{2}$

이므로
$p+q=2+27=29$

125. 정답 ②

$\overline{AB}=\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{(s-t)^2+(s^2-t^2)^2}=\sqrt{2}$

양변을 제곱하면

$s^2-2st+t^2+s^4-2s^2t^2+t^4=2$

이 식의 양변을 s에 대하여 미분하면

$2s-2t-2s\dfrac{dt}{ds}+2t\dfrac{dt}{ds}+4s^3-4st^2-4s^2t\dfrac{dt}{ds}+4t^3\dfrac{dt}{ds}=0$

이 식을 정리하면

$\dfrac{dt}{ds}=\dfrac{4s^3-4st^2+2s-2t}{4s^2t+2s-4t^3-2t}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$s=0$일 때의 t의 값을 구하면

$\sqrt{t^2+(t^2)^2}=\sqrt{2}$

양변을 제곱하면

$t^2+t^4=2,\ t^4+t^2-2=0$

$(t+1)(t-1)(t^2+2)=0$

$t>s$이므로 $t=1$

따라서 $s=0,\ t=1$일 때 $\dfrac{dt}{ds}$의 값은

$\dfrac{-2}{-6}=\dfrac{1}{3}$

126. 정답 ⑤

$x<-e$에서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$ $(x>e)$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프이다.

함수 $h(x)$는 연속이므로

$g(e)=h(e)=\lim\limits_{x\to e+}h(x)=\lim\limits_{x\to e+}f(x)=\dfrac{4}{e}$,

$g(-e)=h(-e)=\lim\limits_{x\to -e-}h(x)=\lim\limits_{x\to -e-}\{-f(-x)\}=-\dfrac{4}{e}$

조건 (가)와 평균값 정리를 이용하면 $-e<x<e$인 모든 실수 x에 대하여

$\dfrac{g(x)-g(-e)}{x-(-e)}=g'(c)\le\dfrac{4}{e^2}$ …… ㉠

인 실수 c가 열린구간 $(-e,\ x)$에 존재하고,

$\dfrac{g(e)-g(x)}{e-x}=g'(c')\le\dfrac{4}{e^2}$ …… ㉡

인 실수 c'이 열린구간 $(x,\ e)$에 존재한다.

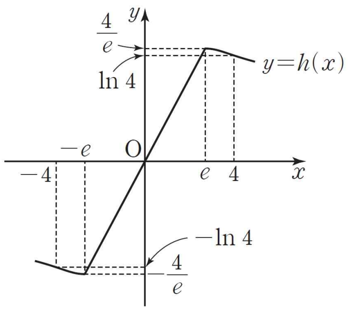
㉠에서 $g(x)\le\dfrac{4}{e^2}(x+e)+g(-e)=\dfrac{4}{e^2}x$이고

㉡에서 $g(x)\ge\dfrac{4}{e^2}(x+e)+g(e)=\dfrac{4}{e^2}x$이므로

$-e<x<e$에서 $\dfrac{4}{e^2}x\le g(x)\le\dfrac{4}{e^2}x$

그러므로 $g(x)=\dfrac{4}{e^2}x$

따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$\displaystyle\int_{-4}^{e}|h(x)|dx=2\int_0^e\frac{4}{e^2}x\,dx+\int_e^4\frac{4\ln x}{x}dx$ …… ㉢

$\displaystyle\int_0^e\frac{4}{e^2}x\,dx=\left[\frac{2}{e^2}x^2\right]_0^e=2$

$\displaystyle\int_e^4\frac{4\ln x}{x}dx$에서 $\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=e$일 때 $t=1$, $x=4$일 때 $t=\ln4$이므로

$\displaystyle\int_e^4\frac{4\ln x}{x}dx=\int_1^{\ln4}4t\,dt=\left[2t^2\right]_1^{\ln4}$

$=2(\ln4)^2-2=8(\ln2)^2-2$

따라서 ㉢에서

$\displaystyle\int_{-4}^{e}|h(x)|dx=2\times2+\{8(\ln2)^2-2\}$

$=8(\ln2)^2+2$

127. 정답 42

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a\ne0)$, 공비를 r이라 하면

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $-1<r<1$이다.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^2=\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right|$에서 $\dfrac{a^2}{1-r}=\left|\dfrac{a}{1-r}\right|$

$1-r>0$이므로 $\dfrac{a^2}{1-r^2}=\dfrac{|a|}{1-r}$

$|a|=1+r$ …… ㉠

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=-\frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}a_n$에서

$\dfrac{|a|}{1-|r|}=-\dfrac{4}{3}\times\dfrac{a}{1-r}$

(i) $r\ge0$인 경우

$|r|=r$이므로

$\dfrac{|a|}{1-r}=-\dfrac{4}{3}\times\dfrac{a}{1-r}$

$|a|=-\dfrac{4}{3}a$

그러므로 $a=0$

이는 문제의 조건에 모순이다.

(ii) $r<0$인 경우

$|r|=-r$이므로

$\dfrac{|a|}{1+r}=-\dfrac{4}{3}\times\dfrac{a}{1-r}$

$\dfrac{1-r}{1+r}=-\dfrac{4}{3}\times\dfrac{a}{|a|}$

이때 $1-r>0$이고 $1+r>0$이므로

$a<0$이고 $\dfrac{1-r}{1+r}=\dfrac{4}{3}$

그러므로 $r=-\dfrac{1}{7}$

㉠에서 $a<0$이므로 $-a=1-\dfrac{1}{7}=\dfrac{6}{7}$, $a=-\dfrac{6}{7}$

(i), (ii)에서 $a_n=-\dfrac{6}{7}\times\left(-\dfrac{1}{7}\right)^{n-1}$이므로

$a_1=-\dfrac{6}{7}$, $a_2=\dfrac{6}{49}$

따라서 $\dfrac{6}{a_1}+\dfrac{6}{a_2}=-7+49=42$

128. 정답 39

함수 $y=g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고 함수 $g(x)$가

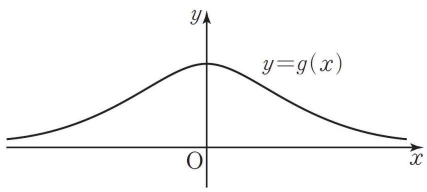
$x=0$에서 미분가능하므로
$g'(0)=0$
따라서 $x=0$에서의 함수 $y=f(x)e^{-x}$의 미분계수도 0이다.
$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수이고 $a>0$)이라 하면
$$\{f(x)e^{-x}\}'=\{f'(x)-f(x)\}e^{-x}$$
$$=\{-ax^2+(2a-b)x+(b-c)\}e^{-x}$$
이므로 $x=0$을 대입하면 $b-c=0$
따라서 $b=c$이고, $x>0$일 때
$$g'(x)=\{f'(x)-f(x)\}e^{-x}$$
$$=\{-ax^2+(b-c)x\}e^{-x}$$
$$=-ax\left(x-\frac{2a-b}{a}\right)e^{-x}$$
또한 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)e^{-x}=0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선은 x축이다.
$\frac{2a-b}{a}$와 $g(0)=c$의 부호에 따라 함수 $g(x)$의 $x\geq 0$에서의 증가와 감소를 표로 나타내고, 조건 (가)에서 y축에 대하여 대칭임을 이용하여 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형을 나타내면 다음 그림과 같다.

(ⅰ) $\frac{2a-b}{a}\leq 0$, $c\leq 0$인 경우

$\frac{2a-b}{a}\leq 0$에서 $0<2a\leq b=c\leq 0$이므로 조건을 만족시키는 상수 a, b, c는 존재하지 않는다.

(ⅱ) $\frac{2a-b}{a}\leq 0$, $c>0$인 경우

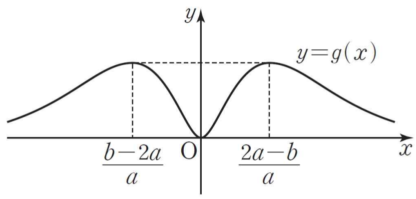
x	0	$\cdots$
$g'(x)$	0	$-$
$g(x)$	$+$	$\searrow$

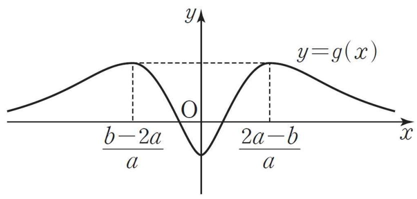


(ⅲ) $\frac{2a-b}{a}>0$, $c\leq 0$인 경우

$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$이므로 $f\left(\frac{2a-b}{a}\right)>0$이고

x	0	$\cdots$	$\frac{2a-b}{a}$	$\cdots$
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-$ 또는 0	$\nearrow$	$+$	$\searrow$

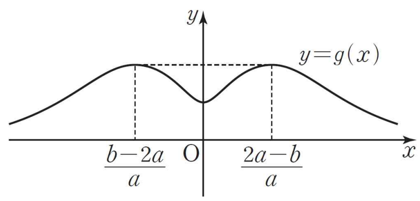




(ⅳ) $\frac{2a-b}{a}>0$, $c>0$인 경우

$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$이므로 $f\left(\frac{2a-b}{a}\right)>0$이고

x	0	$\cdots$	$\frac{2a-b}{a}$	$\cdots$
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$+$	$\nearrow$	$+$	$\searrow$



그래프의 개형을 바탕으로 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(t,\ g(t))$에서의 접선이 곡선 $y=g(t)$와 만나는 점의 개수가 1이 되도록 하는 실수 t의 값은 다음과 같이 찾을 수 있다.
(ⅱ), (ⅲ)의 경우 : 0 또는 점 $(t,\ g(t))$가 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이 되도록 하는 t의 값
(ⅳ)의 경우 : 점 $(t,\ g(t))$가 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이 되도록 하는 t의 값
그러므로 조건을 만족시키는 t의 값의 개수가 5인 경우는 (ⅲ)의 경우뿐이다.
그러므로 $a_3=0$이고 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5는 각각 점 $(t,\ g(t))$가 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이 되도록 하는 t의 값이다.
$x>0$일 때
$$g''(x)=\{f''(x)-2f'(x)+f(x)\}e^{-x}$$
$$=\{ax^2+(-4a+b)x+(2a-2b+c)\}e^{-x}$$
$$=\{ax^2+(-4a+b)x+(2a-b)\}e^{-x}$$
따라서 a_4, a_5는 이차방정식 $ax^2+(-4a+b)x+(2a-b)=0$의 서로 다른 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$$a_4+a_5=4-\frac{b}{a}=6,\ a_4a_5=2-\frac{b}{a}$$
그러므로 $b=-2a$이고 $a_4a_5=4$
$$f(a_4)+f(a_5)=\left(aa_4^2-2aa_4-2a\right)+\left(aa_5^2-2aa_5-2a\right)$$
$$=a\left({a_4}^2+{a_5}^2\right)-2a\left(a_4+a_5\right)-4a$$

$=(6^2-2\times4)a-12a-4a=12a$

이고 $f(a_4)+f(a_5)=6$이므로 $12a=6$

그러므로 $a=\frac{1}{2}$, $b=c=-1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x-1$이므로

$f(10)=50-10-1=39$

129. 정답 ③

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r>0)$이라 하자.

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $0<r<1$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a_1}{a_2}$에서

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a_1}{1-r}$, $\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_1}{1-r}$

이므로

$$\frac{a_1}{1-r}=\frac{1}{r}$$

$$a_1=\frac{1-r}{r} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

한편, $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}+4(a_1)^n}{x^{2n}+(a_1)^{n+1}}$이므로 함수 $f(x)$는 다음과 같다.

(i) $x^2>a_1$, 즉 $|x|>\sqrt{a_1}$일 때

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}+4(a_1)^n}{x^{2n}+(a_1)^{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2+4\left(\frac{a_1}{x^2}\right)^n}{1+a_1\times\left(\frac{a_1}{x^2}\right)^n}$$

$$=x^2$$

(ii) $x^2<a_1$, 즉 $|x|<\sqrt{a_1}$일 때

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}+4(a_1)^n}{x^{2n}+(a_1)^{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2\times\left(\frac{x^2}{a_1}\right)^n+4}{\left(\frac{x^2}{a_1}\right)^n+a_1}$$

$$=\frac{4}{a_1}$$

(iii) $x^2=a_1$, 즉 $|x|=\sqrt{a_1}$일 때

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}+4(a_1)^n}{x^{2n}+(a_1)^{n+1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(a_1)^{n+1}+4(a_1)^n}{(a_1)^n+(a_1)^{n+1}}$$

$$=\frac{a_1+4}{1+a_1}$$

(i), (ii), (iii)에서

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & (|x|>\sqrt{a_1})\\ \frac{4}{a_1} & (|x|<\sqrt{a_1})\\ \frac{a_1+4}{1+a_1} & (|x|=\sqrt{a_1})\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 $x=\sqrt{a_1}$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to\sqrt{a_1}+}f(x)=\lim_{x\to\sqrt{a_1}-}f(x)=f(\sqrt{a_1})$$

이어야 한다.

즉, $a_1=\frac{4}{a_1}=\frac{a_1+4}{1+a_1}$에서 $a_1=2$

$a_1=2$일 때

$$\lim_{x\to-\sqrt{a_1}+}f(x)=\lim_{x\to-\sqrt{a_1}-}f(x)=f(-\sqrt{a_1})$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=-\sqrt{a_1}$에서 연속이다.

그러므로

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & (|x|>\sqrt{2})\\ 2 & (|x|\le\sqrt{2})\end{cases}$$

$a_1=2$를 ㉠에 대입하면

$2=\frac{1-r}{r}$, $r=\frac{1}{3}$

따라서 $a_2=a_1r=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이므로

$$f(a_1)\times f(a_2)=f(2)\times f\left(\frac{2}{3}\right)=2^2\times2=8$$

130. 정답 ④

조건 (가)의 $\int_{-2}^{2}f(x)f'(x)dx$에서

$f(x)=s$로 놓으면 $\frac{ds}{dx}=f'(x)$이고

$x=-2$일 때 $s=f(-2)$, $x=2$일 때 $s=f(2)$이므로

$$\int_{-2}^{2}f(x)f'(x)dx=\int_{f(-2)}^{f(2)}sds$$

$$=\left[\frac{1}{2}s^2\right]_{f(-2)}^{f(2)}$$

$$=\frac{1}{2}\{f(2)\}^2-\frac{1}{2}\{f(-2)\}^2$$

$\int_{-2}^{2}f(x)f'(x)dx=0$에서

$$\frac{1}{2}\{f(2)\}^2-\frac{1}{2}\{f(-2)\}^2=0$$

$\dfrac{\{f(2)+f(-2)\}\{f(2)-f(-2)\}}{2}=0$

조건 (가)에서 $f(2)>0$, $f(-2)>0$이므로

$f(2)=f(-2)$

따라서 함수 $f(x)$는 직선 $x=0$에 대하여 대칭이므로

$f(x)=x^2+a$ (a는 상수)

로 놓을 수 있다.

$g(x)=\dfrac{x^2+a}{e^x}$, $g'(x)=\dfrac{-(x^2-2x+a)}{e^x}$

조건 (나)에서 $g'(-1)=0$이므로

$g'(-1)=\dfrac{-(3+a)}{e^{-1}}=0$

$a=-3$

그러므로 $g(x)=\dfrac{x^2-3}{e^x}$

$g'(x)=\dfrac{-(x^2-2x-3)}{e^x}=\dfrac{-(x+1)(x-3)}{e^x}$이므로

$g'(x)=0$에서 $x=-1$, $x=3$

$g''(x)=\dfrac{x^2-4x-1}{e^x}$이므로

$g''(x)=0$에서 $x^2-4x-1=0$

$x=2\pm\sqrt{5}$

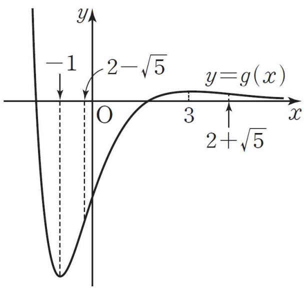
함수 $g(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$2-\sqrt{5}$	$\cdots$	3	$\cdots$	$2+\sqrt{5}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$g''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$g(x)$	⤷	극소	↗	0	↱	극대	↘		⤷

함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 극소이고, $x=3$에서 극대이고,

$x=\dfrac{2-\sqrt{5}}{2}$와 $x=\dfrac{2+\sqrt{5}}{2}$에서 변곡점을 갖는다.

이때 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



한편, $h(x)=|g(x)-g'(t)(x-t)-g(t)|$에서

직선 $y=g'(t)(x-t)+g(t)$는 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(t,\ g(t))$에서의 접선이다.

실수 t에 대하여 함수 $h(x)$가 $x=p$에서 미분가능하지 않은 실수 p의 개수를 $i(t)$라 하면 $i(t)$는 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(t,\ g(t))$에서의 접선이 곡선 $y=g(x)$와 만나는 점 중 접점이 아닌 점의 개수이다.

이때

$$i(t)=\begin{cases}0 & (t\le -1)\\ 1 & (-1<t<2-\sqrt{5})\\ 0 & (t=2-\sqrt{5})\\ 1 & (2-\sqrt{5}<t\le 3)\\ 2 & (3<t<2+\sqrt{5})\\ 1 & (t=2+\sqrt{5})\\ 2 & (t>2+\sqrt{5})\end{cases}$$

따라서 $i(t)=1$인 정수 t의 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 개수는 4이다.

131. 정답 13

직각삼각형 POH에서

$\overline{\mathrm{PH}}=\sin\theta$, $\overline{\mathrm{OH}}=\cos\theta$

이때 $\overline{\mathrm{MH}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{OH}}=\dfrac{\cos\theta}{2}$이므로 삼각형 PMH의 넓이 $f(\theta)$는

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PH}}\times\overline{\mathrm{MH}}=\frac{1}{2}\times\sin\theta\times\frac{\cos\theta}{2}=\frac{\sin\theta\cos\theta}{4}$$

한편, $\angle\mathrm{POB}=\theta$이므로

$\angle\mathrm{QOB}=2\angle\mathrm{POB}=2\theta$

삼각형 QOM에서 $\overline{\mathrm{OM}}=\dfrac{\cos\theta}{2}$, $\overline{\mathrm{OQ}}=1$이므로 삼각형 QOM의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OQ}}\times\overline{\mathrm{OM}}\times\sin 2\theta=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{\cos\theta}{2}\times\sin 2\theta=\frac{\sin 2\theta\cos\theta}{4}\quad\cdots\cdots\ ㉠$$

삼각형 QOR에서 $\angle\mathrm{QOP}=\theta$이므로 삼각형 QOR의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OQ}}\times\overline{\mathrm{OR}}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times 1\times\overline{\mathrm{OR}}\times\sin\theta=\frac{\sin\theta}{2}\times\overline{\mathrm{OR}}\quad\cdots\cdots\ ㉡$$

삼각형 ROM의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OR}}\times\overline{\mathrm{OM}}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OR}}\times\frac{\cos\theta}{2}\times\sin\theta=\frac{\sin\theta\cos\theta}{4}\times\overline{\mathrm{OR}}\quad\cdots\cdots\ ㉢$$

㉠, ㉡, ㉢에서

$$\frac{\sin 2\theta\cos\theta}{4}=\frac{\sin\theta}{2}\times\overline{\mathrm{OR}}+\frac{\sin\theta\cos\theta}{4}\times\overline{\mathrm{OR}}$$

$$\overline{\mathrm{OR}}=\frac{\sin 2\theta\cos\theta}{\sin\theta(2+\cos\theta)}$$

삼각형 QOR의 넓이 $g(\theta)$는

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OQ}}\times\overline{\mathrm{OR}}\times\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{\sin2\theta\cos\theta}{\sin\theta(2+\cos\theta)}\times\sin\theta$$

$$=\frac{\sin2\theta\cos\theta}{2(2+\cos\theta)}$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)\times g(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{\sin\theta\cos\theta}{4}\times\frac{\sin2\theta\cos\theta}{2(2+\cos\theta)}}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta\sin2\theta\cos^2\theta}{\theta^2\times8(2+\cos\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin2\theta}{2\theta}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\cos^2\theta}{4(2+\cos\theta)}$$

$$=1\times1\times\frac{1^2}{4(2+1)}$$

$$=\frac{1}{12}$$

따라서 $p=12$, $q=1$이므로

$p+q=12+1=13$

132. 정답 36

$\int_1^x(x-t)f(t)dt=\frac{a}{2\pi}\sin\pi x+bx^2-bx$에서

$$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=\frac{a}{2\pi}\sin\pi x+bx^2-bx \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\frac{a}{2}\cos\pi x+2bx-b$$

$$\int_1^x f(t)dt=\frac{a}{2}\cos\pi x+2bx-b \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=-\frac{a\pi}{2}\sin\pi x+2b$$

함수 $f(x)$의 최댓값이 $\frac{3(\pi+2)}{2}$이므로

$$\frac{a\pi}{2}+2b=\frac{3(\pi+2)}{2} \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=-\frac{a}{2}+b$, 즉 $b=\frac{a}{2}$

$b=\frac{a}{2}$를 ㉢에 대입하면

$$\frac{a\pi}{2}+a=\frac{3(\pi+2)}{2}$$

$$\frac{a(\pi+2)}{2}=\frac{3(\pi+2)}{2}$$

$a=3$

이때 $b=\frac{3}{2}$이고

$$f(x)=-\frac{3\pi}{2}\sin\pi x+3$$

조건 (나)에서

$\pi g^{-1}(x)+f(x)=3$, 즉 $g^{-1}(x)=\frac{-f(x)+3}{\pi}$이므로

$$g^{-1}(x)=\frac{3}{2}\sin\pi x$$

$\int_0^{\frac{3}{2}}\pi g(x)dx$에서

$y=g(x)$, 즉 $x=g^{-1}(y)$로 놓으면 $g^{-1}(0)=0$, $g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$이고

$\frac{dx}{dy}=\frac{d}{dy}g^{-1}(y)=\frac{3\pi}{2}\cos\pi y$이므로

$$\int_0^{\frac{3}{2}}\pi g(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{3\pi^2}{2}y\cos\pi y\,dy$$

$$=\frac{3\pi^2}{2}\left[\frac{1}{\pi}y\sin\pi y+\frac{1}{\pi^2}\cos\pi y\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{3\pi^2}{2}\left(\frac{1}{2\pi}-\frac{1}{\pi^2}\right)$$

$$=\frac{3\pi-6}{4}$$

따라서 $k=\frac{3\pi-6}{4}$이므로

$(4k-3\pi)^2=(-6)^2=36$

133. 정답 ④

함수 $g(x)$의 정의역이 양의 실수 전체의 집합이므로 그 역함수 $f(x)$의 치역도 양의 실수 전체의 집합이다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다.

한편, 모든 실수 x에 대하여 $g(f(x))=x$이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(f(x))f'(x)=1$, 즉 $f'(x)=\frac{1}{g'(f(x))}$ (단, $g'(f(x))\neq0$)

이고 $f(1)=e^3$이므로

$$\int_1^x\frac{1}{g'(f(t))f(t)}dt=\int_1^x\frac{f'(t)}{f(t)}dt$$

$$=\Big[\ln|f(t)|\Big]_1^x$$

$$=\ln|f(x)|-\ln|f(1)|$$

$$=\ln f(x)-\ln f(1)$$

$$=\ln f(x)-\ln e^3$$

$$=\ln f(x)-3$$

즉, $\ln f(x)-3=3x-3$이므로

$\ln f(x)=3x$

따라서 $f(x)=e^{3x}$이므로

$f(\ln2)=e^{3\ln2}=e^{\ln2^3}=2^3=8$

134. 정답 ③

직각삼각형 ABQ에서 $\tan\theta=\dfrac{\overline{BQ}}{\overline{AB}}$이고 $\overline{AB}=2$이므로

$\overline{BQ}=\overline{AB}\tan\theta=2\tan\theta$

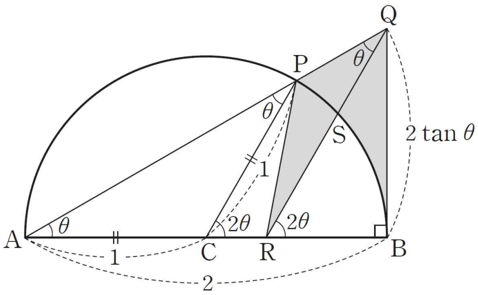
또, 삼각형 AQR에서 $\angle QAR=\angle AQR=\theta$이므로

$\angle QRB=\angle QAR+\angle AQR=\theta+\theta=2\theta$

선분 AB의 중점을 C라 하면 점 C는 반원의 중심이므로

$\overline{CA}=\overline{CP}=1$에서 $\angle CAP=\angle CPA=\theta$이므로

$\angle PCR=\angle CAP+\angle CPA=\theta+\theta=2\theta$



그러므로 두 선분 PQ, BQ와 호 PB로 둘러싸인 부분의 넓이 $f(\theta)$는

$f(\theta)=$(삼각형 ABQ의 넓이)

$\quad -\{$(삼각형 ACP의 넓이)$+$(부채꼴 PCB의 넓이)$\}$

$$=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BQ}$$

$$-\left\{\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{CP}\times\sin(\angle ACP)+\frac{1}{2}\times\overline{BC}^2\times(\angle PCB)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\times2\times2\tan\theta-\left\{\frac{1}{2}\times1^2\times\sin(\pi-\angle PCR)+\frac{1}{2}\times1^2\times2\theta\right\}$$

$$=2\tan\theta-\left\{\frac{1}{2}\sin(\pi-2\theta)+\theta\right\}$$

$$=2\tan\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta-\theta \qquad \cdots\cdots ㉠$$

직각삼각형 RBQ에서 $\sin2\theta=\dfrac{\overline{BQ}}{\overline{QR}}$이므로

$$\overline{QR}=\frac{\overline{BQ}}{\sin2\theta}=\frac{2\tan\theta}{\sin2\theta}$$

한편, $\angle QAR=\angle AQR$이므로 삼각형 AQR는 $\overline{AR}=\overline{QR}=\dfrac{2\tan\theta}{\sin2\theta}$인 이등변삼각형이고, 점 P는 원 위의 점이므로 직각삼각형 ABP에서

$\overline{AP}=\overline{AB}\cos\theta=2\cos\theta$

그러므로 삼각형 PQR의 넓이 $g(\theta)$는

$f(\theta)=$(삼각형 ARQ의 넓이)$-$(삼각형 ARP의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\times\overline{AR}\times\overline{QR}\times\sin(\angle ARQ)-\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{AR}\times\sin(\angle PAR)$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2\tan\theta}{\sin2\theta}\right)^2\times\sin(\pi-2\theta)-\frac{1}{2}\times2\cos\theta\times\frac{2\tan\theta}{\sin2\theta}\times\sin\theta$$

$$=\frac{2\tan^2\theta}{\sin^2 2\theta}\times\sin2\theta-2\sin\theta\cos\theta\times\frac{\tan\theta}{\sin2\theta}$$

$$=\frac{2\tan^2\theta}{\sin2\theta}-2\sin\theta\cos\theta\times\frac{\tan\theta}{\sin2\theta}$$

이때

$\sin2\theta=\sin(\theta+\theta)=\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta$

$\quad=2\sin\theta\cos\theta$

이므로

$$g(\theta)=\frac{2\tan^2\theta}{\sin2\theta}-\sin2\theta\times\frac{\tan\theta}{\sin2\theta}$$

$$=\frac{2\tan^2\theta}{\sin2\theta}-\tan\theta \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(2\tan\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta-\theta\right)-\left(\frac{2\tan^2\theta}{\sin2\theta}-\tan\theta\right)}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{3\tan\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta-\theta-\frac{2\tan^2\theta}{\sin2\theta}}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left(3\times\frac{\tan\theta}{\theta}\right)-\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin2\theta}{2\theta}-\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta}{\theta}-\lim_{\theta\to0+}\frac{2\tan^2\theta}{\theta\sin2\theta}$$

$$=3\times1-1-1-\lim_{\theta\to0+}\left\{\left(\frac{\tan\theta}{\theta}\right)^2\times\frac{2\theta}{\sin2\theta}\right\}$$

$$=1-\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\tan\theta}{\theta}\right)^2\times\lim_{\theta\to0+}\frac{2\theta}{\sin2\theta}$$

$$=1-1^2\times1=0$$

135. 정답 234

$y=2t^3+1=1$에서 $t^3=0$, 즉 $t=0$이므로 점 $(0,\ 1)$은 시각 $t=0$에서의 위치이다.

$x=f(t)$, $y=2t^3+1$에서 $\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$, $\dfrac{dy}{dt}=6t^2$이므로

점 P가 점 $(0,\ 1)$, 즉 시각 $t=0$에서 $t=\dfrac{1}{3}\sqrt{\left(\dfrac{27}{2}s+1\right)^{\frac{2}{3}}-1}$까지 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^t\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^t\sqrt{\{f'(t)\}^2+(6t^2)^2}\,dt$$

$$=\int_0^t\sqrt{\{f'(t)\}^2+36t^4}\,dt \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$t=\dfrac{1}{3}\sqrt{\left(\dfrac{27}{2}s+1\right)^{\frac{2}{3}}-1}$에서

$$3t=\sqrt{\left(\frac{27}{2}s+1\right)^{\frac{2}{3}}-1}$$

양변을 제곱하면

$$9t^2=\left(\frac{27}{2}s+1\right)^{\frac{2}{3}}-1$$

$$(9t^2+1)^{\frac{3}{2}}=\frac{27}{2}s+1,\quad \frac{27}{2}s=(9t^2+1)^{\frac{3}{2}}-1$$

$s=\dfrac{2}{27}\left\{(9t^2+1)^{\frac{3}{2}}-1\right\}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\displaystyle\int_0^t \sqrt{\{f'(t)\}^2+36t^4}\,dt=\dfrac{2}{27}\left\{(9t^2+1)^{\frac{3}{2}}-1\right\}$

양변을 t에 대하여 미분하면

$\sqrt{\{f'(t)\}^2+36t^4}=\dfrac{2}{27}\times\dfrac{3}{2}(9t^2+1)^{\frac{1}{2}}\times 18t$

$\sqrt{\{f'(t)\}^2+36t^4}=2t(9t^2+1)^{\frac{1}{2}}$

양변을 제곱하면

$\{f'(t)\}^2+36t^4=4t^2(9t^2+1)$

$\{f'(t)\}^2=4t^2$

$f'(t)=2t$ 또는 $f'(t)=-2t$

시각 $t=1$일 때 점 P의 속도가 $(2,\ 6)$이므로

$f'(1)=2$에서 $f'(t)=2t$

그러므로 $f(t)=t^2+C$ (단, C는 적분상수)이고, $f(0)=0$이므로

$C=0$, 즉 $f(t)=t^2$

이때 시각 $t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$에서 시각 $t=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$까지 점 P가 움직인 거리 l은

$l=\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{2\sqrt{6}}{3}} \sqrt{\{f'(t)\}^2+(6t^2)^2}\,dt=\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{2\sqrt{6}}{3}} \sqrt{4t^2+36t^4}\,dt$

$=\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{2\sqrt{6}}{3}} 2t\sqrt{1+9t^2}\,dt$

$\sqrt{1+9t^2}=u$로 놓으면

$1+9t^2=u^2$에서 $18t\dfrac{dt}{du}=2u$, 즉 $t\dfrac{dt}{du}=\dfrac{u}{9}$이고

$t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$일 때 $u=2$, $t=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$일 때 $u=5$이므로

$l=\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{2\sqrt{6}}{3}} 2t\sqrt{1+9t^2}\,dt=\int_2^5 \dfrac{2}{9}u^2\,du$

$=\dfrac{2}{9}\displaystyle\int_2^5 u^2\,du=\dfrac{2}{9}\left[\dfrac{1}{3}u^3\right]_2^5$

$=\dfrac{2}{27}(5^3-2^3)=\dfrac{234}{27}$

따라서 $f(3\sqrt{3})\times l=(3\sqrt{3})^2\times\dfrac{234}{27}=234$

136. 정답 8

함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수이다.)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (가)에서 $f'\left(\dfrac{4}{3}\right)=0$이므로

$f'\left(\dfrac{4}{3}\right)=3\times\left(\dfrac{4}{3}\right)^2+2a\times\dfrac{4}{3}+b=\dfrac{16}{3}+\dfrac{8}{3}a+b=0$

$8a+3b=-16$ …… ㉠

조건 (나)에서 $x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to 2}xf(x)=2f(2)=0$이므로 $f(2)=0$

한편, $f(2)=2^3+a\times 2^2+b\times 2+c=8+4a+2b+c$이므로

$4a+2b+c=-8$ …… ㉡

$f(2)=0$이고, 조건 (나)에서 $\displaystyle\lim_{x\to 2}\dfrac{xf(x)}{x-2}=8$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to 2}\dfrac{xf(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\dfrac{x\{f(x)-f(2)\}}{x-2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 2}x\times\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=2\times f'(2)=8$

즉, $f'(2)=4$이고 $f'(2)=3\times 2^2+2a\times 2+b=12+4a+b$이므로

$12+4a+b=4$

$4a+b=-8$ …… ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=0$

이를 ㉡에 대입하면 $c=0$

그러므로 $f(x)=x^3-2x^2$이고

$g(x)=\dfrac{x^2\ln x}{f(x)+2x^2}=\dfrac{\ln x}{x}$

$g'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}\times x-\ln x\times 1}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$g^{-1}(x)=t$로 놓으면 $x=g(t)$이고 $\dfrac{dx}{dt}=g'(t)$

또 $g(1)=0$, $g(e)=\dfrac{1}{e}$에서 $g^{-1}(0)=1$, $g^{-1}\left(\dfrac{1}{e}\right)=e$이므로

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{e}}\{g^{-1}(x)\}^2\,dx=\int_1^e t^2g'(t)\,dt$

$\displaystyle=\int_1^e\left(t^2\times\dfrac{1-\ln t}{t^2}\right)dt$

$\displaystyle=\int_1^e(1-\ln t)\,dt$

$\displaystyle=\int_1^e 1\,dt-\int_1^e\ln t\,dt$

$\displaystyle=\Big[t\Big]_1^e-\left\{\Big[t\ln t\Big]_1^e-\int_1^e\left(\dfrac{1}{t}\times t\right)dt\right\}$

$=e-1-(e-0)+\Big[t\Big]_1^e$

$=-1+(e-1)=e-2$

따라서 $p=1$, $q=-2$이므로

$10p+q=10\times 1+(-2)=8$

137. 정답 ③

그림 R_1에서 원이 선분 $\mathrm{A_1C_1}$에 접하는 점을 $\mathrm{H_1}$이라 하면

$\angle \mathrm{C_1H_1B_2} = \frac{\pi}{2}$이고 $\angle \mathrm{B_2C_1H_1} = \frac{\pi}{3}$이므로 $\overline{\mathrm{H_1C_1}}=2$, $\overline{\mathrm{H_1B_2}}=2\sqrt{3}$

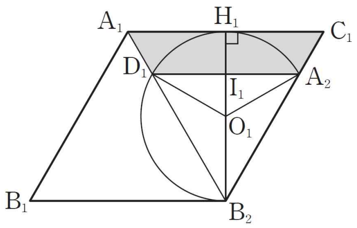
원의 중심을 $\mathrm{O_1}$이라 하면

$\angle \mathrm{D_1B_2O_1} = \frac{\pi}{6}$이므로 $\angle \mathrm{B_2O_1D_1} - \frac{2}{3}\pi$

중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배이므로

$\angle \mathrm{D_1B_2A_2} = \frac{\pi}{3}$에서 $\angle \mathrm{D_1O_1A_2} = 2\angle \mathrm{D_1B_2A_2} = \frac{2}{3}\pi$

즉, 그림 R_1의 색칠한 부분의 넓이는 사각형 $\mathrm{A_1D_1A_2C_1}$의 넓이와 같다.

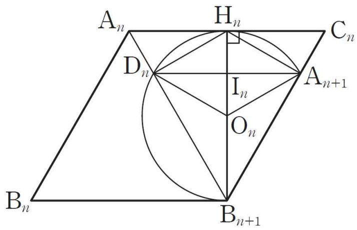


두 선분 $\mathrm{H_1O_1}$, $\mathrm{D_1A_2}$의 교점을 $\mathrm{I_1}$이라 하면

$\overline{\mathrm{O_1A_2}}=\sqrt{3}$이고 $\angle \mathrm{I_1O_1A_2} = \frac{\pi}{3}$이므로 $\overline{\mathrm{I_1A_2}}=\frac{3}{2}$

$\overline{\mathrm{D_1A_2}}=3$이므로 $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}\times 4^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\times 3^2 = \frac{7\sqrt{3}}{4}$

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=a_n$이라 하면 $\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}}=a_{n+1}$



원이 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n$에 접하는 점을 H_n이라 하면

$\angle \mathrm{C}_n\mathrm{H}_n\mathrm{B}_{n+1} = \frac{\pi}{2}$이고 $\angle \mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_n\mathrm{H}_n = \frac{\pi}{3}$이므로

$\overline{\mathrm{H}_n\mathrm{C}_n}=\frac{1}{2}a_n$, $\overline{\mathrm{H}_n\mathrm{B}_{n+1}}=\frac{\sqrt{3}}{2}a_n$

원의 중심을 $\mathrm{O_n}$이라 하고 두 선분 $\mathrm{H}_n\mathrm{O}_n$, $\mathrm{D}_n\mathrm{A}_{n+1}$의 교점을 I_n이라 하면

$\angle \mathrm{O}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1} = \frac{\pi}{6}$에서 $\angle \mathrm{I}_n\mathrm{O}_n\mathrm{A}_{n+1} = \frac{\pi}{3}$이고

$\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{A}_{n+1}}=\frac{\sqrt{3}}{4}a_n$이므로

$\overline{\mathrm{I}_n\mathrm{A}_{n+1}}=\frac{3}{8}a_n$

$\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}}=2\overline{\mathrm{I}_n\mathrm{A}_{n+1}}=\frac{3}{4}a_n$이므로

$a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n$

따라서 S_n은 첫째항이 $\frac{7\sqrt{3}}{4}$이고 공비가 $\left(\frac{3}{4}\right)^2$인 등비수열의 첫째항부터 제$n$항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{7\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{9}{16}} = 4\sqrt{3}$$

138. 정답 ②

$g(x)=(x+a)e^{\frac{x}{2}}$으로 놓으면 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(f(t),\ g(f(t)))$에서의 접선의 기울기가 t이므로

$g'(f(t))=t$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$g'(x)=e^{\frac{x}{2}}+\left(\frac{x}{2}+\frac{a}{2}\right)e^{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}(x+a+2)e^{\frac{x}{2}}$이므로 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1,\ g(1))$에서의 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}(a\sqrt{e}+3\sqrt{e})(x-1)+a\sqrt{e}+\sqrt{e}$

이 직선이 원점을 지나므로

$-\frac{1}{2}a\sqrt{e}-\frac{3}{2}\sqrt{e}+a\sqrt{e}+\sqrt{e}=0$, $\frac{\sqrt{e}}{2}(a-1)=0$

$a=1$

이때 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1,\ g(1))$에서의 접선의 기울기는 $2\sqrt{e}$임을 알 수 있다.

$g(x)=(x+1)e^{\frac{x}{2}}$에서 $g'(x)=\frac{1}{2}(x+3)e^{\frac{x}{2}}$

$g'(x)\geq 0$에서 $x\geq -3$이므로 $f(t)\geq -3$

$g''(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{4}(x+3)e^{\frac{x}{2}}=\frac{1}{4}(x+5)e^{\frac{x}{2}}$

$x\geq -3$인 모든 실수 x에 대하여 $g''(x)\geq 0$이므로 함수 $g'(x)$는 구간 $[-3,\ \infty)$에서 증가한다.

따라서 ㉠에서 두 함수 $g'(t)$와 $f(t)$는 서로 역함수 관계이므로

$g'(f(t))=f(g'(t))=t$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

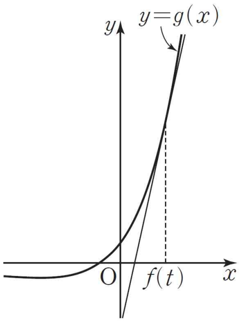
$t=g'(s)$로 놓으면

$t=0$일 때 $s=-3$, $t=2\sqrt{e}$일 때 $s=1$이고 $\frac{dt}{ds}=g''(s)$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{2\sqrt{e}} f(t)dt &= \int_{-3}^{1} f(g'(s))g''(s)ds \\ &= \int_{-3}^{1} sg''(s)dx \quad (\text{㉡에 의하여}) \\ &= \Big[sg'(s)\Big]_{-3}^{1} - \int_{-3}^{1} g'(s)ds \\ &= g'(1)+3g'(-3)-g(1)+g(-3) \\ &= 2\sqrt{e}+0-2\sqrt{e}+\left(-2e^{-\frac{3}{2}}\right) \\ &= -2e^{-\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

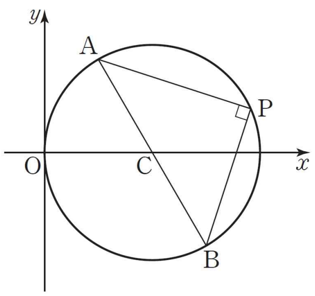
[참고]

곡선 $y=g(x)$는 다음 그림과 같다.



139. 정답 150

$\angle \mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{2}$이므로 점 P는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위에 있다.



선분 AB의 중점을 C라 하면 점 C는 원의 중심이고 점 C의 y좌표는 0이다.

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\left(\frac{2}{n-1}-\frac{2}{n+1}\right)^2+\left(-\frac{2}{\sqrt{n^2-1}}-\frac{2}{\sqrt{n^2-1}}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{4}{n^2-1}\right)^2+\frac{16}{n^2-1}}$$
$$=\sqrt{\frac{6+16(n^2-1)}{(n^2-1)^2}}$$
$$=\frac{4n}{n^2-1}$$

즉, 원의 반지름의 길이가 $\dfrac{2n}{n^2-1}$이므로 점 P의 y좌표는 최댓값 a_n은 반지름의 길이이다.

따라서 $a_n=\dfrac{2n}{n^2-1}$이므로

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{3}{2}$$

에서

$$100\times\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{n}=100\times\frac{3}{2}=150$$

140. 정답 43

$g(x)=\sin\{\pi f(x)\}$에서

$g'(x)=\cos\{\pi f(x)\}\times\pi f'(x)$

$g'(x)=0$에서 $\cos\{\pi f(x)\}=0$ 또는 $f'(x)=0$

$\cos\{\pi f(x)\}=0$일 때,

$$f(x)=\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{7}{2},\ \frac{9}{2},\ \cdots \qquad \cdots\cdots ㉠$$

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이고 $f'(0)<0$이므로 $f'(\alpha)=0$인 양수 α가 존재한다.

$a_7=2$, $g(a_7)=0$이므로 $g(a_7)=g(2)=\sin\{\pi f(2)\}=0$

$f(2)=m$ (단, m은 정수)

이때 $x=2$는 ㉠을 만족시키지 않으므로 $\alpha=2$

즉, $f'(2)=0$

$f(a_7)=m$이므로

$f(a_6)=m+\dfrac{1}{2}$, $f(a_5)=m+\dfrac{3}{2}$, $f(a_4)=m+\dfrac{5}{2}$

$f(a_3)=m+\dfrac{7}{2}$, $f(a_2)=m+\dfrac{9}{2}$, $f(a_1)=m+\dfrac{11}{2}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{6}f(a_n)=6m+18=12$이므로 $m=-1$

$f(a_1)=f(0)=\dfrac{9}{2}$이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+\dfrac{9}{2}$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

$f(2)=8+4a+2b+\dfrac{9}{2}=-1$이므로

$$4a+2b+\frac{27}{2}=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$$f'(2)=12+4a+b=0 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=-\dfrac{21}{8}$, $b=-\dfrac{3}{2}$

따라서 $f(x)=64-\dfrac{21}{8}\times16-\dfrac{3}{2}\times4+\dfrac{9}{2}=\dfrac{41}{2}$

따라서 $p=2$, $q=41$이므로

$p+q=2+41=43$

141. 정답 ③

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-5}{x-1}=7$에서

$x\to1$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to1}\{f(x)-5\}=0$이므로 $f(1)-5=0$, $f(1)=5$

그러므로

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-5}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=7$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)-1}{x-1}=2$에서

$x\to1$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to1}\{g(x)-1\}=0$이므로 $g(1)-1=0$, $g(1)=1$

그러므로

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=2$

$h(x)=f(g^{-1}(x))(g^{-1})'(x)$

$g(1)=1$이므로 $g^{-1}(1)=1$

역함수의 미분법에 의하여

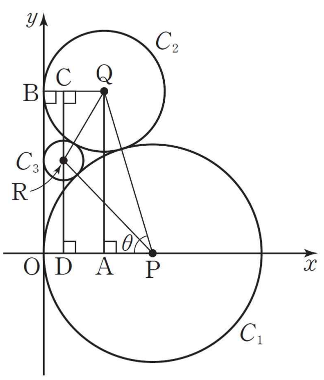
$(g^{-1})'(x)=\dfrac{1}{g'(g^{-1}(x))}$이므로

$(g^{-1})'(1)=\dfrac{1}{g'(g^{-1}(1))}=\dfrac{1}{g'(1)}=\dfrac{1}{2}$

따라서

$$\begin{aligned}h'(1)&=f'(g^{-1}(1))(g^{-1})'(1)\\&=f'(1)\times\frac{1}{2}\\&=7\times\frac{1}{2}=\frac{7}{2}\end{aligned}$$

142. 정답 ④



점 Q에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하면

$\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{QP}}}=\dfrac{1-R(\theta)}{1+R(\theta)}$이므로

$$\begin{aligned}R(\theta)&=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\\&=\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)^2}=\frac{1-\cos^2\theta}{(1+\cos\theta)^2}\\&=\frac{\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^2}=\left(\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)^2\qquad\cdots\cdots\ ㉠\end{aligned}$$

원 C_3의 중심을 R이라 하고, 점 R을 지나고 y축에 평행한 직선이 선분 BQ, OP와 만나는 점을 각각 C, D라 하면 직각삼각형 CRQ에서

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{CR}}&=\sqrt{\overline{\mathrm{QR}}^2-\overline{\mathrm{QC}}^2}\\&=\sqrt{\{R(\theta)+r(\theta)\}^2-\{R(\theta)-r(\theta)\}^2}\\&=2\sqrt{R(\theta)r(\theta)}\end{aligned}$$

또 직각삼각형 DPR에서

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{DR}}&=\sqrt{\overline{\mathrm{PR}}^2-\overline{\mathrm{PD}}^2}\\&=\sqrt{\{1+r(\theta)\}^2-\{1-r(\theta)\}^2}\\&=2\sqrt{r(\theta)}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AQ}}&=\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{CR}}+\overline{\mathrm{DR}}\\&=2\sqrt{R(\theta)r(\theta)}+2\sqrt{r(\theta)}\\&=2\sqrt{r(\theta)}\left(\sqrt{R(\theta)}+1\right)\end{aligned}$$

$\overline{\mathrm{PQ}}^2=\overline{\mathrm{AQ}}^2+\overline{\mathrm{AP}}^2$이므로

$\{1+R(\theta)\}^2=4r(\theta)\left(\sqrt{R(\theta)}+1\right)^2+\{1-R(\theta)\}^2$

$1+2R(\theta)+\{R(\theta)\}^2=4r(\theta)\left(\sqrt{R(\theta)}+1\right)^2+1-2R(\theta)+\{R(\theta)\}^2$

$$r(\theta)=\frac{R(\theta)}{\left(\sqrt{R(\theta)}+1\right)^2}\qquad\cdots\cdots\ ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\begin{aligned}r(\theta)&=\frac{\left(\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)^2}{\left(\sqrt{\left(\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)^2}+1\right)^2}\\&=\frac{\left(\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)^2}{\left(\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+1\right)^2}\\&=\left(\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta+1}\right)^2\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to0+}\frac{R(\theta)\times r(\theta)}{\theta^4}&=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)^2\times\left(\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta+\sin\theta}\right)^2}{\theta^4}\\&=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^4\theta\times\dfrac{1}{(1+\cos\theta)^2}\times\dfrac{1}{(1+\cos\theta+\sin\theta)^2}}{\theta^4}\\&=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^4\times\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{(1+\cos\theta)^2}\\&\quad\times\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{(1+\cos\theta+\sin\theta)^2}\end{aligned}$$

$=1^4\times\dfrac{1}{2^2}\times\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{16}$

143. 정답 160

$f(x)=\sqrt{2}\tan(\sqrt{2}x)$에서

$f'(x)=\sqrt{2}\sec^2(\sqrt{2}x)(\sqrt{2}x)'$

$=2\sec^2(\sqrt{2}x)$

$=2\{1+\tan^2(\sqrt{2}x)\}$

$g(x)$가 $f(x)$의 역함수이므로

$f(g(x))=x$, $\sqrt{2}\tan(\sqrt{2}g(x))=x$이므로

$\tan^2(\sqrt{2}g(x))=\dfrac{x^2}{2}$

역함수의 미분법에 의하여

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}=\frac{1}{2\{1+\tan^2(\sqrt{2}g(x))\}}$$

$$=\frac{1}{2\left(1+\dfrac{x^2}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{x^2+2}$$

$$h(x)=\int_0^x\frac{t}{\sqrt{g'(t)}}dt$$

$$=\int_0^x\frac{t}{\sqrt{\dfrac{1}{t^2+2}}}dt$$

$$=\int_0^x t\sqrt{t^2+2}\,dt$$

이므로

$h'(x)=x\sqrt{x^2+2}$

이때 $x=-1$에서 $x=1$까지 곡선 $y=h(x)$의 길이는

$$\int_{-1}^1\sqrt{1+\{h'(x)\}^2}\,dx=\int_{-1}^1\sqrt{1+\left(x\sqrt{x^2+2}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_{-1}^1\sqrt{1+x^4+2x^2}\,dx$$

$$=\int_{-1}^1\sqrt{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$=\int_{-1}^1(x^2+1)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^1$$

$$=\left(\frac{1}{3}+1\right)-\left(-\frac{1}{3}-1\right)=\frac{8}{3}$$

따라서 $k=\dfrac{8}{3}$이므로

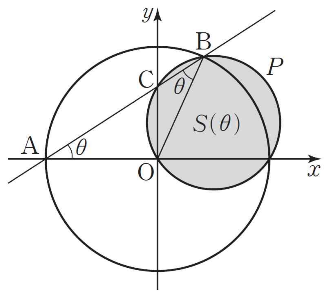
$60k=60\times\dfrac{8}{3}=160$

144. 정답 40

θ의 범위를 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$인 경우와 $\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$인 경우로 나누면 다음과 같다.

(i) $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$일 때

세 점 B, C, O를 지나는 원을 P라 하자.



$\overline{\mathrm{AO}}=\overline{\mathrm{BO}}$이므로 $\angle\mathrm{CAO}=\angle\mathrm{CBO}=\theta$이다.

삼각형 AOC에서 $\tan\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{CO}}}{\overline{\mathrm{AO}}}=\overline{\mathrm{CO}}$

원 P의 반지름의 길이를 $R(\theta)$라 하면 사인법칙에 의하여

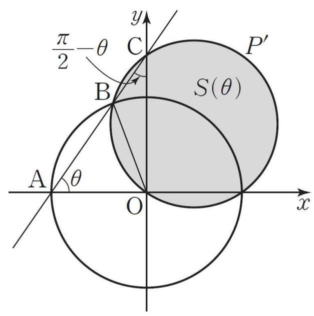
$\dfrac{\overline{\mathrm{CO}}}{\sin\theta}=\dfrac{\tan\theta}{\sin\theta}=2R(\theta)$이므로 $R(\theta)=\dfrac{1}{2\cos\theta}$

따라서 원 P의 넓이 $S(\theta)$는

$S(\theta)=\{R(\theta)\}^2\pi=\dfrac{\pi}{4\cos^2\theta}=\dfrac{\pi}{4}\sec^2\theta$

(ii) $\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$일 때

세 점 B, C, O를 지나는 원을 P'이라 하자.



$\angle\mathrm{BAO}=\theta$이므로 $\angle\mathrm{BCO}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$

원 P'의 반지름의 길이를 $R'(\theta)$라 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{BO}}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}=\dfrac{1}{\cos\theta}=2R'(\theta)$이므로 $R'(\theta)=\dfrac{1}{2\cos\theta}$

따라서 원 P'의 넓이 $S(\theta)$는

$S(\theta)=\{R'(\theta)\}^2\pi=\dfrac{\pi}{4\cos^2\theta}=\dfrac{\pi}{4}\sec^2\theta$

(i), (ii)에서 $S(\theta)=\dfrac{\pi}{4}\sec^2\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

함수 $f(\theta)$가 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$에서 연속이므로

$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} f(\theta) = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, 즉 $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} S(\theta) = a$

이때 $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} S(\theta) = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \frac{\pi}{4}\sec^2\theta = \frac{\pi}{4}\sec^2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$이므로

$a = \frac{\pi}{2}$

$f(\theta) = \frac{\pi}{4}\sec^2\theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\pi}{4}\sec^2\theta d\theta$$

$$= \left[\frac{\pi}{4}\tan\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

따라서

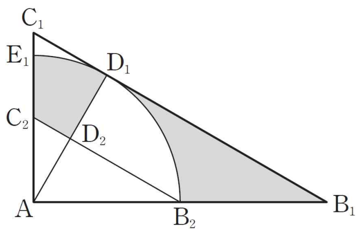
$$a + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)d\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\pi$$

이므로 $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{6}$이고

$$60(p+q) = 60\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) = 40$$

145. 정답 ②



$\angle A = 90^\circ$, $\angle B_1 = 30^\circ$ 이고, $\overline{AC_1} = 2$이므로

$\overline{AB_1} = 2\sqrt{3}$

$\angle B_1D_1A = 90^\circ$ 이므로 직각삼각형 AB_1D_1에서

$\overline{AD_1} = \sqrt{3}$

즉, 부채꼴 AB_2E_1의 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$ 이므로 $\overline{AB_2} = \sqrt{3}$ 이다.

두 삼각형 AB_1C_1과 AB_2C_2가 닮은 도형이고, 닮음비가

$\overline{AB_1} : \overline{AB_2} = 2\sqrt{3} : \sqrt{3} = 2:1$이므로 그 넓이의 비는

$2^2 : 1^2 = 4:1$이다.

또 직각삼각형 AD_1C_1에서 $\angle C_1AD_1 = 30^\circ$, $\overline{C_1D_1} = 1$이므로

$\overline{B_1D_1} = \overline{B_1C_1} - \overline{D_1C_1} = 3$

그러므로 그림 R_1에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_1은

$S_1 =$(부채꼴 AD_1E_1의 넓이)$-$(삼각형 AD_2C_2의 넓이)

$+$(삼각형 AB_1D_1의 넓이)-(부채꼴 AB_2D_1의 넓이)

$$= \frac{1}{2}\times(\sqrt{3})^2\times\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times3\times\sqrt{3} - \frac{1}{2}\times(\sqrt{3})^2\times\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{11}{8}\sqrt{3} - \frac{\pi}{4}$$

따라서 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이의 합 S_n은

$$S_n == S_1 + \frac{1}{4}S_1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 S_1 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} S_1$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{S_1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{11}{8}\sqrt{3} - \frac{\pi}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{11\sqrt{3} - 2\pi}{6}$$

146. 정답 ④

$g(x) = \int_0^x f(t)dt$에서

$g'(x) = f(x) = 4xe^{-x^2}\sin x^2$

$g'(x) = 0$에서

$x = 0,\ \sqrt{\pi},\ \sqrt{2\pi},\ \sqrt{3\pi},\ \cdots$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\alpha_1 = \sqrt{\pi}$, $\alpha_2 = \sqrt{3\pi}$, $\alpha_3 = \sqrt{5\pi}$, $\cdots$, $\alpha_k = \sqrt{(2k-1)\pi}$, $\cdots$ (단, k는 자연수)

$\beta_1 = \sqrt{2\pi}$, $\beta_2 = \sqrt{4\pi}$, $\beta_3 = \sqrt{6\pi}$, $\cdots$, $\beta_k = \sqrt{2k\pi}$, $\cdots$ (단, k는 자연수)

$$g(\alpha_k) = \int_0^{\sqrt{(2k-1)\pi}} 4xe^{-x^2}\sin x^2 dx$$

$$= \left[-2e^{-x^2}\sin x^2\right]_0^{\sqrt{(2k-1)\pi}} + \int_0^{\sqrt{(2k-1)\pi}} 4xe^{-x^2}\cos x^2 dx$$

$$= 0 + \left[-2e^{-x^2}\cos x^2\right]_0^{\sqrt{(2k-1)\pi}} - \int_0^{\sqrt{(2k-1)\pi}} 4xe^{-x^2}\sin x^2 dx$$

$$= 2e^{-(2k-1)\pi} - (-2) - g(\alpha_k)$$

이므로

$$2g(\alpha_k) = 2e^{-(2k-1)\pi} + 2$$

즉, $g(\alpha_k) = e^{-(2k-1)\pi} + 1$

$$g(\beta_k) = \int_0^{\sqrt{2k\pi}} 4xe^{-x^2}\sin x^2 dx$$

$$= \left[-2e^{-x^2}\sin x^2\right]_0^{\sqrt{2k\pi}} + \int_0^{\sqrt{2k\pi}} 4xe^{-x^2}\cos x^2 dx$$

$$=0+\left[-2e^{-x^2}\cos x^2\right]_0^{\sqrt{2k\pi}}-\int_0^{\sqrt{2k\pi}}4xe^{-x^2}\sin x^2dx$$

$$=-2e^{-2k\pi}-(-2)-g(\beta_k)$$

이므로

$2g(\beta_k)=2-2e^{-2k\pi}$

즉, $g(\beta_k)=1-e^{-2k\pi}$

따라서

$$\sum_{k=1}^{4}\{g(\alpha_k)-g(\beta_k)\}=\sum_{k=1}^{4}\{e^{-(2k-1)\pi}+e^{-2k\pi}\}$$

$$=\frac{e^{-\pi}(1-e^{-8\pi})}{1-e^{-2\pi}}+\frac{e^{-2\pi}(1-e^{-8\pi})}{1-e^{-2\pi}}$$

$$=\frac{(e^{\pi}+1)(1-e^{-8\pi})}{e^{2\pi}-1}$$

$$=\frac{1-e^{-8\pi}}{e^{\pi}-1}$$

147. 정답 35

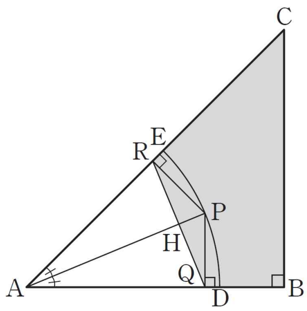
$\angle AQP+\angle ARP=180^\circ$ 이므로 사각형 PRAQ는 지름이 선분 AP인 원에 내접한다.

즉, 삼각형 AQR의 외접원의 반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{QR}}{\sin\theta}=3$, $\overline{QR}=3\sin\theta$

사각형 QBCR의 넓이가 최소이려면 삼각형 AQR의 넓이가 최대이어야 한다.

또 삼각형 AQR의 넓이는 점 A에서 선분 QR에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 AH의 길이가 최대일 때, 즉 그림과 같이 점 P가 호 DE를 이등분하는 점일때 최대이다.



$\angle PAQ=\frac{\theta}{2}$이고, $\overline{RH}=\overline{HQ}=\frac{\overline{QR}}{2}=\frac{3\sin\theta}{2}$이므로

직각삼각형 AHR에서

$\overline{AH}\tan\frac{\theta}{2}=\overline{RH}$, $\overline{AH}\tan\frac{\theta}{2}=\frac{3\sin\theta}{2}$

$\overline{AH}=\frac{3\sin\theta}{2\tan\frac{\theta}{2}}$

따라서 삼각형 AQR의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\times\overline{QR}\times\overline{AH}=\frac{1}{2}\times3\sin\theta\times\frac{3\sin\theta}{2\tan\frac{\theta}{2}}=\frac{9\sin^2\theta}{4\tan\frac{\theta}{2}}$$

이므로 사각형 QBCR의 넓이의 최솟값 $S(\theta)$는

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times4\times4\tan\theta-\frac{9\sin^2\theta}{4\tan\frac{\theta}{2}}$$

$$=8\tan\theta-\frac{9\sin^2\theta}{4\tan\frac{\theta}{2}}$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{\theta}\left(8\tan\theta-\frac{9\sin^2\theta}{4\tan\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{8\times\frac{\tan\theta}{\theta}-\frac{9}{4}\times\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\frac{\frac{\theta}{2}}{\tan\frac{\theta}{2}}\times2\right\}$$

$$=8\times1-\frac{9}{4}\times1^2\times1\times2$$

$$=8-\frac{9}{2}=\frac{7}{2}$$

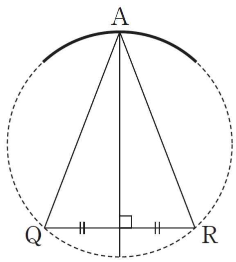
이므로

$$10\times\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=35$$

[참고]

삼각형 AQR은 $\angle QAR=\theta$ $(\theta<90^\circ)$, $\overline{QR}=3\sin\theta$이므로 오른쪽 그림과 같이 점 A는 반지름의 길이가 3인 부채꼴의 호 위에 있다고 생각할 수 있다.

따라서 삼각형 AQR의 넓이가 최대가 되는 점 A의 위치는 선분 QR의 수직이등분선이 부채꼴의 호와 만나는 점이다.



148. 정답 29

조건 (나)에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\{(f\circ f)(x)-f(x)\}=0$이고, $f(x)$는 연속함수이므로

$f(f(1))-f(1)=0$

조건 (가)에 의하여 $f(x)$가 일대일대응이므로

$f(1)=1$이고

$$\lim_{x\to1}\frac{(f\circ f)(x)-f(x)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{(f\circ f)(x)-1}{x-1}-\frac{f(x)-1}{x-1}\right\}$$

$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{(f\circ f)(x)-(f\circ f)(1)}{x-1}-\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right\}$$

$=f'(f(1))f'(1)-f'(1)$

$=\{f'(1)\}^2-f'(1)=6$

즉, $\{f'(1)\}^2-f'(1)-6=0$

$\{f'(1)+2\}\{f'(1)-3\}=0$

이때 $f'(x)\geq 0$이므로 $f'(1)=3$

$f(\alpha)-2=0$이라 하면 조건 (가)에 의하여 $f(x)$는 증가함수이므로

$x>\alpha$일 때 $f(x)>f(\alpha)=2$,

$x<\alpha$일 때 $f(x)<f(\alpha)=2$

$$\lim_{x\to\alpha+}\frac{|f(x)-f(\alpha)|}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)$$

$$\lim_{x\to\alpha-}\frac{|f(x)-f(\alpha)|}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha-}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=-f'(\alpha)$$

조건 (다)에 의하여 $f'(\alpha)=-f'(\alpha)$이므로

$f'(\alpha)=0$

따라서 함수 $f(x)$는 증가하는 삼차함수이므로

$f(x)-2=k(x-\alpha)^3$, $f'(x)=3k(x-\alpha)^2$ (단, $k>0$)

$f(1)-2=k(1-\alpha)^3$이므로

$-1=k(1-\alpha)^3$ …… ㉠

$f'(1)=3k(1-\alpha)^2$이므로

$3=3k(1-\alpha)^2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $k=1$, $\alpha=2$

따라서 $f(x)=(x-2)^3+2$이므로

$f(5)=3^3+2=29$

149. 정답 ⑤

[도함수의 활용]

$g(x)=f(x)\sin^2\frac{x}{4}$에서

$$g'(x)=f'(x)\sin^2\frac{x}{4}+f(x)\times\frac{1}{2}\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}$$

이므로

$$g'(\pi)=f'(\pi)\times\frac{1}{2}+f(\pi)\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{2}f'(\pi)+\frac{1}{4}f(\pi)$$

조건 (가)에서 $f'(\pi)=g'(\pi)$이므로

$f(\pi)=2f'(\pi)$

직선 l의 방정식은

$y=f'(\pi)(x-\pi)+f(\pi)$

$y=f'(\pi)(x-\pi)+2f'(\pi)$

$y=f'(\pi)(x-\pi+2)$

또한, $g(\pi)=f(\pi)\times\frac{1}{2}=f'(\pi)$이므로

직선 m의 방정식은

$y=g'(\pi)(x-\pi)+g(\pi)$

$y=f'(\pi)(x-\pi)+f'(\pi)$

$y=f'(\pi)(x-\pi+1)$

조건 (나)에서 직선 l 위의 점 $(\pi-2,\ 0)$과 직선 m사이의 거리는

$\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$$\frac{|-f'(\pi)|}{\sqrt{\{f'(\pi)\}^2+1}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$4\{f'(\pi)\}^2=3\{f'(\pi)\}^2+3$

$f'(\pi)>0$이므로 $f'(\pi)=\sqrt{3}$

따라서

$f(\pi)=2f'(\pi)=2\sqrt{3}$,

$g(\pi)=f'(\pi)=\sqrt{3}$

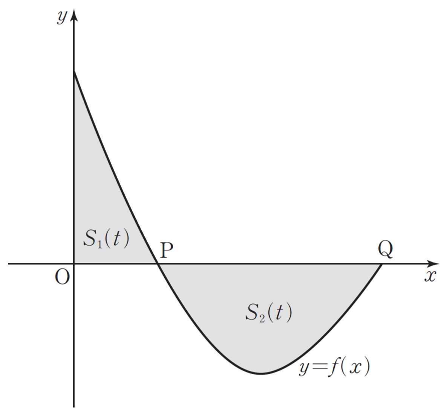
이므로

$f(\pi)+g(\pi)=2\sqrt{3}+\sqrt{3}$

$=3\sqrt{3}$

150. 정답 ③

[정적분의 활용]



$f(0)=1$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$이고 $0<x<\frac{\pi}{2}$일 때 $\cos x>0$이므로

$f(x)=0$에서 $\sin x=\frac{1}{2t}$이다.

$t>\frac{1}{2}$이므로 $0<\frac{1}{2t}<1$이고, 따라서 $\sin\alpha=\frac{1}{2t}$인 실수 α가

열린구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에 유일하게 존재하고, $\mathrm{P}(\alpha,\ 0)$이다.

$0<x<\alpha$일 때 $f(x)>0$,

$\alpha<x<\frac{\pi}{2}$일 때 $f(x)<0$이다.

$(\sin^2 x)'=2\sin x\cos x$이고 $\sin\alpha=\frac{1}{2t}$이므로

$S_1(t)$는

$$S_1(t)=\int_0^{\alpha}|f(x)|\,dx$$

$$=\int_0^{\alpha}(1-2t\sin x)\cos x\,dx$$

$$=\left[\sin x - t\sin^2 x\right]_0^{\alpha}$$
$$=\sin\alpha - t\sin^2\alpha$$
$$=\frac{1}{2t}-t\times\left(\frac{1}{2t}\right)^2$$
$$=\frac{1}{4t}$$

또한, $S_2(t)$는

$$S_2(t)=\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}|f(x)|\,dx$$
$$=\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\cos x(2t\sin x-1)\,dx$$
$$=\left[t\sin^2 x-\sin x\right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=(t-1)-(t\sin^2\alpha-\sin\alpha)$$
$$=t-1-\left(-\frac{1}{4t}\right)$$
$$=t-1+\frac{1}{4t}$$

한편, $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{S_1(t)+S_2(t)-2S_1(a)}{t-a}=b$에서

$t\to a$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $S_1(a)+S_2(a)-2S_1(a)=0$이므로

$S_1(a)=S_2(a)$

$\dfrac{1}{4a}=a-1+\dfrac{1}{4a}$, $a=1$

$$b=\lim_{t\to a}\frac{S_1(t)+S_2(t)-2S_1(a)}{t-a}$$
$$=\lim_{t\to a}\frac{S_1(t)-S_1(a)+S_2(t)-S_2(a)}{t-a}$$
$$=S_1{}'(a)+S_2{}'(a)$$

이때

$S_1{}'(t)=-\dfrac{1}{4t^2}$,

$S_2{}'(t)=1-\dfrac{1}{4t^2}$

이므로

$$b=S_1{}'(1)+S_2{}'(1)$$
$$=-\frac{1}{4}+\left(1-\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{2}$$

따라서

$$a+b=1+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{3}{2}$$

151. 정답 23

[급수]

급수수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하자.

급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $-1<r<1$이고 그 합이 2이므로

$\dfrac{a}{1-r}=2$ …… ㉠

만약 모든 자연수 n에 대하여 $|a_n|<1$이면 모든 자연수 n에 대하여 $b_n=-a_n$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n)$$
$$=-\sum_{n=1}^{\infty}a_n=-2$$

이고, 이는 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$의 합이 2임에 모순이다.

즉, 어떤 자연수 n에 대하여 $|a_n|\ge 1$이다.

이때 $-1<r<1$이므로 모든 자연수 n에 대하여

$|a_n|>|a_{n+1}|$

그러므로 $|a_n|\ge 1$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값을 m이라 하면

$|a_1|>|a_2|>\cdots|a_m|\ge 1>|a_{m+1}|>|a_{m+2}|>\cdots$ …… ㉡

이다. 즉

$$b_n=\begin{cases}a_n-1 & (1\le n\le m)\\ -a_n & (n\ge m+1)\end{cases}$$

$n\ge m+1$인 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=1}^{m}b_k+\sum_{k=m+1}^{n}b_k$$
$$=\sum_{k=1}^{m}(a_k-1)+\sum_{k=m+1}^{n}(-a_k)$$
$$=\sum_{k=1}^{m}a_k-m-\sum_{k=m+1}^{n}a_k$$
$$=\frac{a(1-r^m)}{1-r}-m-\frac{ar^m(1-r^{n-m})}{1-r}$$
$$=2(1-r^m)-m-2r^m(1-r^{n-m})\ \text{(㉠에 의하여)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}b_k$$
$$=\lim_{n\to\infty}\{2(1-r^m)-m-2r^m(1-r^{n-m})\}$$
$$=2(1-r^m)-m-2r^m$$
$$=2-m-4r^m$$

급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$의 합이 2이므로

$$2=2-m-4r^m$$

$r^m=-\frac{m}{4}$

m은 자연수이고 $-1<r<1$에서 $-1<r^m<1$이므로

m이 될 수 있는 값은 1 또는 2 또는 3이다.

(ⅰ) $m=1$인 경우

ⓒ에서 $r=-\frac{1}{4}$

$r=-\frac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면

$a=\frac{5}{2}$

이때 $a_1=a=\frac{5}{2}$이므로 $|a_1\geq 1|$,

$a_2=a\times r=-\frac{5}{8}$이므로 $1>|a_2|$이고, 이는 ⓛ을 만족시킨다.

(ⅱ) $m=2$인 경우

ⓒ에서 $r^2=-\frac{1}{2}$이고 이를 만족시키는 실수 r의 값은 존재하지 않는다.

(ⅲ) $m=3$인 경우

ⓒ에서 $r^3=-\frac{3}{4}$이므로 $r=-\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$

$r=-\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$을 ㉠에 대입하면

$a=2\left(1+\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)$

이때

$a_4=a\times r^3=2\left(1+\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\right)\times\left(-\frac{3}{4}\right)$

$=-\frac{3}{2}\left(1+\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)$

에서 $|a_4|>1$이고 이는 ⓛ을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $a=\frac{5}{2}$, $r=-\frac{1}{4}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2=\frac{a^2}{1-r^2}$$

$$=\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{25}{4}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{20}{3}$$

따라서 $p=3$, $q=20$이므로

$p+q=3+20$

$=23$

152. 정답 34

[함수의 극값]

$f(x)=\ln|x|+\frac{np}{x+p}$에서

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{np}{(x+p)^2}$

$=\frac{(x+p)^2-npx}{x(x+p)^2}$

$x=0$과 $x=-p$는 x에 대한 이차방정식

$(x+p)^2-npx=0$

즉, $x^2+(2p-np)x+p^2=0$ …… ㉠

의 실근이 아니므로 $f'(x)=0$을 만족시키는 x는 ㉠의 실근이다.

㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(2p-np)^2-4p^2$

$=(n^2-4n)p^2$

$=n(n-4)p^2$

즉, 함수 $f(x)$의 극값이 존재하려면 $D>0$이어야 하므로 $m=5$이다. 이때 ㉠의 서로 다른 두 실근을 α, β라 하면 $x=\alpha$와 $x=\beta$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 각각 변하므로 함수 $f(x)$는 서로 다른 극값 $f(\alpha)$, $f'(\beta)$를 갖는다.

$a_n=f(\alpha)+f(\beta)$

$=\ln|\alpha|+\frac{np}{\alpha+p}+\ln|\beta|+\frac{np}{\beta+p}$

$=\ln|\alpha\beta|+\frac{np(\alpha+\beta+2p)}{(\alpha+p)(\beta+p)}$

이때 ㉠에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=np-2p$, $\alpha\beta=p^2$이므로

$a_n=\ln p^2+\frac{n^2p^2}{p^2+(np-2p)p+p^2}$

$=\ln p^2+n$

$=2\ln|p|+n$

$$\sum_{n=m}^{2m}a_n=\sum_{n=5}^{10}a_n$$

$$=\sum_{n=5}^{10}(2\ln|p|+n)$$

$$=12\ln|p|+45=57$$

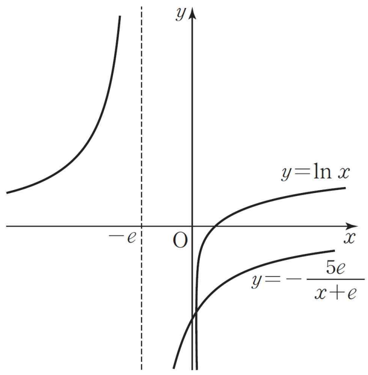
$12\ln|p|=12$에서

$p=e$ 또는 $p=-e$

한편 조건 (나)에서 $n=5$일 때 방정식 $f(x)=0$의 양의 실근의 개수는 2이므로 곡선 $y=\ln x$와 곡선 $y=-\frac{5p}{x+p}$는 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

(ⅰ) $p=e$인 경우

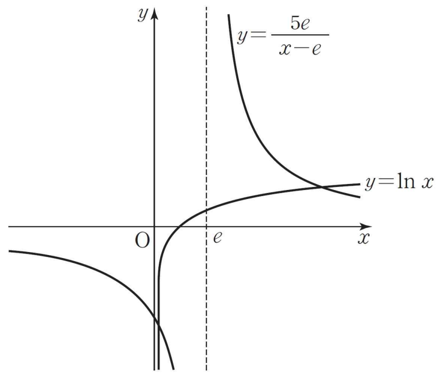
곡선 $y=\ln x$의 점근선은 직선 $x=0$이고, 곡선 $y=-\frac{5e}{x+e}$의 점근선은 직선 $x=-e$와 직선 $y=0$이다.



이때 그림과 같이 두 곡선 $y=\ln x$, $y=-\dfrac{5e}{x+e}$는 한 점에서 만난다.

(ii) $p=-e$인 경우

곡선 $y=\ln x$의 점근선은 직선 $x=0$이고, 곡선 $y=\dfrac{5e}{x-e}$의 점근선은 직선 $x=e$와 직선 $y=0$이다.



이때 그림과 같이 두 곡선 $y=\ln x$, $y=\dfrac{5e}{x-e}$는 서로 다른 두 점에서 만나고

$$f\left(\frac{e}{3}\right)=\ln\frac{e}{3}+\frac{5\times(-e)}{\frac{e}{3}-e}$$

$$=\ln\frac{e}{3}+\frac{15}{2}$$

$$=\frac{17}{2}-\ln 3$$

이다.

따라서 $k=\dfrac{17}{2}$이므로

$$4k=4\times\frac{17}{2}$$

$$=34$$

153. 정답 ②

구하는 곡선의 길이는

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\sqrt{\{4\sqrt{2}(\cos 2t-\sin 2t)\}^2+\{4\sqrt{2}(\cos 2t+\sin 2t)\}^2}\,dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\sqrt{64(\cos^2 2t+\sin^2 2t)}\,dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\sqrt{64}\,dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}8\,dt$$

$$=\Big[8t\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}$$

$$=8\left(2\pi-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=12\pi$$

154. 정답 ①

조건 (가)에서 $f(t)$의 부정적분을 $F(t)$라 하면

$\displaystyle\int_{-x}^{x}f(t)\,dt=F(x)-F(-x)=0$이므로

$F(x)=F(-x)$

$F'(x)=f(x)$이므로 $F(x)=F(-x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-f(-x)$

$f(-x)=-(x)$이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(-x)=f'(x)$

또한 $f(0)=-f(0)$에서 $f(0)=0$

$$\int_0^2\{(x+1)f'(-x)-f(-x)\}\,dx$$

$$=\int_0^2\{(x+1)f'(x)+f(x)\}\,dx$$

$$=\Big[(x+1)f(x)\Big]_0^2$$

$$=3(2)-f(0)=72$$

이므로

$f(2)=24$

$$\int_{-1}^{1}\frac{e^x f'(2x)}{e^x+e^{-x}}\,dx=\int_{-1}^{1}\frac{e^{2x}f'(2x)}{e^{2x}+1}\,dx$$

$2x=t$로 놓으면 $2=\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=-1$일 때$t=-2$, $x=1$일 때 $t=2$이므로

$$\int_{-1}^{1}\frac{e^{2x}f'(2x)}{e^{2x}+1}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\frac{e^t f'(t)}{e^t+1}\,dt \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$g(t)=\dfrac{e^t f'(t)}{e^t+1}$라 하면

$g(-t)=\dfrac{e^{-t}f'(-t)}{e^{-t}+1}=\dfrac{f'(-t)}{1+e^t}=\dfrac{f'(t)}{1+e^t}$이므로

$$g(t)+g(-t)=\frac{e^t f'(t)}{e^t+1}+\frac{f'(t)}{1+e^t}=f'(t)$$

또한 $\int_0^2 g(-t)\,dt=\int_{-2}^0 g(t)\,dt$이므로

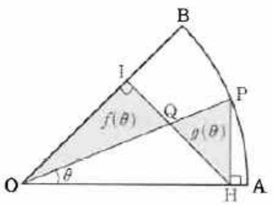
$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 g(t)\,dt&=\int_{-2}^0 g(t)\,dt+\int_0^2 g(t)\,dt\\&=\int_0^2 g(-t)\,dt+\int_0^2 g(t)\,dt\\&=\int_0^2\{g(t)+g(-t)\}\,dt\\&=\int_0^2 f'(t)\,dt\\&=\Big[f(t)\Big]_2^0\\&=f(2)-f(0)\end{aligned}$$

24

㉠에서 $\int_{-1}^1 \frac{e^{2x}f'(2x)}{e^{2x}+1}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^2\frac{e^t f'(t)}{e^t+1}\,dt$

$$=\frac{1}{2}\times 24=12$$

155. 정답 45



$\overline{\mathrm{OH}}=\cos\theta$, $\overline{\mathrm{HP}}=\sin\theta$이므로

$\overline{\mathrm{OI}}=\overline{\mathrm{OH}}\cos 2\theta=\cos\theta\cos 2\theta$, $\overline{\mathrm{HI}}=\overline{\mathrm{OH}}\sin 2\theta=\cos\theta\sin 2\theta$

$f(\theta)-g(\theta)=($ 삼각형 OHI의 넓이$)-($ 삼각형 OHP의 넓이$)$

$$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OI}}\times\overline{\mathrm{HI}}-\frac{1}{2}\times\mathrm{OH}\times\overline{\mathrm{HP}}$$

$$=\frac{1}{2}\times\cos\theta\cos 2\theta\times\cos\theta\sin 2\theta-\frac{1}{2}\times\cos\theta\times\sin\theta$$

이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\times\cos\theta\cos2\theta\times\cos\theta\sin2\theta-\frac{1}{2}\times\cos\theta\times\sin\theta}{\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\times2-\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$$

$\angle\mathrm{OQI}=\angle\mathrm{HQP}=\angle\mathrm{HPQ}=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로

삼각형 HPQ는 $\overline{\mathrm{HP}}=\overline{\mathrm{HQ}}=\sin\theta$인 이등변삼각형이다.

$\angle\mathrm{OHI}=\frac{\pi}{2}-2\theta$이므로 $\angle\mathrm{PHQ}=2\theta$

따라서 $g(\theta)=\frac{1}{2}\times\sin\theta\times\sin\theta\times\sin2\theta$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^3}&=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\times\sin\theta\times\sin\theta\times\sin2\theta}{\theta^3}\\&=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to0+}\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\frac{\sin2\theta}{2\theta}\times2\right\}\\&=\frac{1}{2}\times1^2\times1\times2=1\end{aligned}$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^2\{f(\theta)-g(\theta)\}+g(\theta)}{\theta^3}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta}+\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^3}$$

$$=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

따라서 $k=\frac{3}{2}$이므로

$30k=45$

156. 정답 24

$g'(x)=2\{f(x)+1\}f'(x)$

$h'(x)=3\{f(x)+2x\}^2\{f'(x)+2\}$

함수 $h(x)$가 $x=3$에서 극값을 가지고

$\{f(x)+2x\}^2\geq0$이므로

$f'(3)+2=0$

$f'(3)=-2$ ...... ㉠

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이고

$f'(3)<0$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축은 $x=3$보다 오른쪽에 존재하고 $f'(2)<0$이다.

함수 $g(x)$가 $x=2$에서 극값을 가지므로

$f(2)+1=0$에서 $f(2)=-1$ ...... ㉡

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f'(x)=2x+a$

㉠에서

$f'(3)=6+a=-2$, $a=-8$

㉡에서 $f(2)=4+2a+b=-1$이므로

$4-16+b=-1$, $b=11$

그러므로

$f(x)=x^2-8x+11$

$g(x)=(x^2-8x+12)^2$

$h(x)=(x^2-6x+11)^3$

$$\begin{aligned}g'(x)&=2\{f(x)+1\}f'(x)\\&=2(x^2-8x+12)(2x-8)\\&=4(x-2)(x-4)(x-6)\end{aligned}$$

$x=4$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $g(x)$의 극댓값은 $g(4)$이다.

그러므로

$M=g(4)=(4^2-8\times4+12)^2=(-4)^2=16$

$$h'(x)=3\{f(x)+2x\}^2\{f'(x)+2\}$$
$$=3(x^2-6x+11)^2(2x-6)$$
$$=6(x^2-6x+11)^2(x-3)$$

$x=3$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $h(x)$의 극솟값은 $h(3)$이다.

그러므로

$$m=h(3)=(3^2-6\times3+11)^3=2^3=8$$

따라서

$$M+m=16+8=24$$

157. 정답 ⑤

$f(x)>0$이므로 조건 (나)에서

$$(x^2+1)f'(x)=(x+1)^2f(x)$$
$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$$
$$=\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$$
$$=1+\frac{2x}{x^2+1}$$

양변을 적분하면

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\left(1+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx$$

$\ln|f(x)|=x+\ln|x^2+1|+C$ (단, C는 적분상수) …… ㉠

㉠에 $x=1$을 대입하면

$$\ln|f(1)|=1+\ln2+C$$

$f(1)=2$이므로

$$\ln2=1+\ln2+C,\ C=-1$$

㉠에서

$$\ln|f(x)|=x+\ln|x^2+1|-1$$
$$\ln f(x)-\ln(x^2+1)=x-1$$
$$\ln\frac{f(x)}{x^2+1}=x-1$$
$$\frac{f(x)}{x^2+1}=e^{x-1}$$
$$f(x)=(x^2+1)e^{x-1}$$

따라서 $f(2)=5e$

158. 정답 ④

영역 D_n의 넓이는 S_n은

$$S(n)=\int_0^n e^{2x}dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^n$$
$$=\frac{1}{2}(e^{2n}-1)$$

$f(x)=e^{2x}$이라 하고, 음이 아닌 정수 k에 대하여 영역 D_n에 속하고, 직선 $x=k$ 위에 있는 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 $g(k)$라 하자.

$f(k)$의 값이 정수이면

$$(k,\ 0),\ (k,\ 1),\ (k,\ 2),\ \cdots,\ (k,\ f(k))$$

에서 $g(k)=f(k)+1$이고 $f(k)$의 값이 정수가 아니면

$f(k)<g(k)<f(k)+1$을 만족시킨다.

즉, $f(k)<g(k)\le f(k)+1$

$$f(0)+\sum_{k=1}^{n}f(k)<g(0)+\sum_{k=1}^{n}g(k)$$
$$\le f(0)+1+\sum_{k=1}^{n}\{f(k+1)\}\quad\cdots\cdots ㉠$$

$f(0)=1$이고

$$\sum_{k=1}^{n}f(k)=\sum_{k=1}^{n}e^{2k}=\frac{e^2(e^{2n}-1)}{e^2-1}$$

에서

$$f(0)+\sum_{k=1}^{n}f(k)=1+\frac{e^2(e^{2n}-1)}{e^2-1}$$
$$=\frac{e^{2n+2}-1}{e^2-1}$$

$R(n)=\dfrac{e^{2n+2}-1}{e^2-1}$이라 하면 ㉠에서

$$R(n)<T(n)\le R(n)+n+1$$

$S(n)>0$이므로

$$\frac{R(n)}{S(n)}<\frac{T(n)}{S(n)}\le\frac{R(n)+n+1}{S(n)}$$

그러므로 극한의 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R(n)}{S(n)}\le\lim_{n\to\infty}\frac{T(n)}{S(n)}\le\lim_{n\to\infty}\frac{R(n)+n+1}{S(n)}\quad\cdots\cdots ㉡$$

$$\frac{R(n)}{S(n)}=\frac{\dfrac{e^{2n+2}-1}{e^2-1}}{\dfrac{1}{2}(e^{2n}-1)}$$
$$=\frac{2e^{2n+2}-2}{(e^2-1)(e^{2n}-1)}$$
$$=\frac{2e^{2n+2}-2}{(e^2-1)e^{2n}-(e^2-1)}$$
$$=\frac{2e^2-\dfrac{2}{e^{2n}}}{(e^2-1)-\dfrac{e^2-1}{e^{2n}}}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R(n)}{S(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2e^2-\dfrac{2}{e^{2n}}}{(e^2-1)-\dfrac{e^2-1}{e^{2n}}}=\frac{2e^2}{e^2-1}$$

한편,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{S(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\frac{1}{2}(e^{2n}-1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{e^{2n}-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\frac{n}{e^{2n}}-\frac{2}{e^{2n}}}{1-\frac{1}{e^{2n}}}=0$$

이므로 ⓛ에서

$$\frac{2e^2}{e^2-1}\le\lim_{n\to\infty}\frac{T(n)}{S(n)}\le\frac{2e^2}{e^2-1}$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{T(n)}{S(n)}=\frac{2e^2}{e^2-1}$

159. 정답 19

$f(x)=x(\ln x)^2-3x$에서

$$f'(x)=(\ln x)^2+x\times2\ln x\times\frac{1}{x}-3$$

$$=(\ln x)^2+2\ln x-3$$

$$=(\ln x+3)(\ln x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=-3$ 또는 $\ln x=1$

$x=e^{-3}$ 또는 $x=e$

$$f''(x)=2\ln x\times\frac{1}{x}+\frac{2}{x}$$

$$=\frac{2}{x}(\ln x+1)$$

$f''(x)=0$에서 $\ln x=-1$

$x=e^{-1}$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e^{-3}	$\cdots$	e^{-1}	$\cdots$	e	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$		↗	극대	↘	(변곡점)	↘	극소	↗

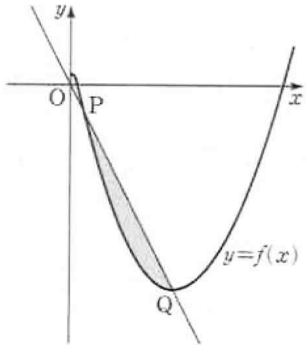
$f(e^{-1})=e^{-1}(\ln e^{-1})^2-3e^{-1}=-2e^{-1}$

$f(e)=e(\ln e)^2-3e=-2e$

에서 변곡점 P의 좌표는 $(e^{-1},\ -2e^{-1})$이다.

함수 $f(x)$는 $x=e$에서 극소이고 $a=e$이고, 점 Q의 좌표는 $(e,\ -2e)$이다.

따라서 직선 PQ의 방정식은 $y=-2x$이다.



$e^{-1}<x<e$에서 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록하므로 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_{e^{-1}}^{e}\{-2x-f(x)\}dx$$

$$=\int_{e^{-1}}^{e}\{x-x(\ln x)^2\}dx$$

$$=\int_{e^{-1}}^{e}xdx-\int_{e^{-1}}^{e}x(\ln x)^2dx$$

$\int x(\ln x)^2dx$에서

$g(x)=(\ln x)^2,\ h'(x)=x$로 놓으면

$g'(x)=2\ln x\times\frac{1}{x},\ h(x)=\frac{1}{2}x^2$이므로

$$S=\int_{e^{-1}}^{e}xdx-\left[\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2\right]_{e^{-1}}^{e}+\int_{e^{-1}}^{e}\left(\frac{1}{2}x^2\times2\ln x\times\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{e^{-1}}^{e}-\left[\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2\right]_{e^{-1}}^{e}+\int_{e^{-1}}^{e}x\ln xdx$$

$$=\frac{1}{2}(e^2-e^{-2})-\frac{1}{2}(e^2-e^{-2})+\int_{e^{-1}}^{e}x\ln xdx$$

$$=\int_{e^{-1}}^{e}x\ln xdx$$

$u(x)=\ln x,\ v'(x)=x$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x},\ v(x)=\frac{1}{2}x^2$이므로

$$S=\int_{e^{-1}}^{e}x\ln xdx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_{e^{-1}}^{e}-\int_{e^{-1}}^{e}\left(\frac{1}{2}x^2\times\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_{e^{-1}}^{e}-\int_{e^{-1}}^{e}\frac{1}{2}xdx$$

$$=\frac{1}{2}(e^2+e^{-2})-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_{e^{-1}}^{e}$$

$$=\frac{1}{2}(e^2+e^{-2})-\frac{1}{4}(e^2-e^{-2})$$

$$=\frac{1}{4}e^2+\frac{3}{4}e^{-2}$$

$$=\frac{1}{e^2}\left(\frac{1}{4}e^4+\frac{3}{4}\right)$$

즉, $e^2\times S=\dfrac{1}{4}e^4+\dfrac{3}{4}$에서

$A=\dfrac{1}{4}$, $B=\dfrac{3}{4}$이므로

$A\times B=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{16}$

따라서 $p=16$, $q=3$이므로

$p+q=19$

160. 정답 9

$f(x)=e^{2x}+ke^{x+1}+2e^2x$에서

$f'(x)=2e^{2x}+ke^{x+1}+2e^2$

$e^x=X$, $h(X)=2X^2+keX+2e^2$이라 할 때, 함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 $X>0$, $h(0)>0$에서 방정식 $h(X)=0$이 서로 다른 양의 두 실근을 가져야 하므로 X에 대한 이차방정식 $2X^2+keX+2e^2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(ke)^2-4\times2\times2e^2>0$

$e^2(k^2-16)>0$

$e^2(k+4)(k-4)>0$

$k<-4$ 또는 $k>4$ …… ㉠

$h(x)=2\left(X+\dfrac{ke}{4}\right)^2-\dfrac{k^2e^2}{8}+2e^2$에서

$X=-\dfrac{ke}{4}>0$, $k<0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $k<-4$이므로 정수 k의 최댓값은 -5이다.

즉, $a=-5$

$g(x)=e^{2x}-5e^{x+1}+2e^2x$이므로

$g'(x)=2e^{2x}-5e^{x+1}+2e^2$

$\quad=(2e^x-e)(e^x-2e)$

$g'(x)=0$에서

$e^x=\dfrac{1}{2}e$ 또는 $e^x=2e$

$x=\ln\dfrac{1}{2}e$ 또는 $x=\ln2e$

$x=1-\ln2$ 또는 $x=1+\ln2$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$1-\ln2$	$\cdots$	$1+\ln2$	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉, 함수 $g(x)$는 $x=1-\ln2$, $x=1+\ln2$에서 극값을 갖는다.

$\alpha<\beta$에서 $\alpha=1-\ln2$, $\beta=1+\ln2$

$e^\alpha=\dfrac{1}{2}e$, $e^\beta=2e$

$\displaystyle\int_\alpha^\beta\{e^{2x}-g(x)\}dx=\int_\alpha^\beta(5e^{x+1}-2e^2x)dx$

$=\left[5e^{x+1}-e^2x^2\right]_\alpha^\beta$

$=(5e^{\beta+1}-e^2\beta^2)-(5e^{\alpha+1}-e^2\alpha^2)$

$=5e(e^\beta-e^\alpha)-e^2(\beta^2-\alpha^2)$

$=5e(e^\beta-e^\alpha)-e^2(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)$

$=5e\times\dfrac{3}{2}e-e^2\times2\times2\ln2$

$=\left(\dfrac{15}{2}-4\ln2\right)e^2$

에서 $A=\dfrac{15}{2}$, $B=-4$이므로

$A+B=\dfrac{15}{2}+(-4)=\dfrac{7}{2}$

따라서 $p=2$, $q=7$이므로

$p+q=9$

161. 정답 ③

$f'(x)=2xe^x+(x^2+a)e^x$

$\quad=(x^2+2x+a)e^x$

$f'(x)=0$에서 $x^2+2x+a=0$

이 이차방정식이 서로 다른 두 실근 $x=\alpha$, $x=\beta(\alpha<\beta)$를 가져야 $x=\alpha$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호는 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극댓값을 갖고, $x=\beta$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호는 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\beta$에서 극솟값을 갖는다.

이차방정식 $x^2+2x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=1-a>0$

이므로 함수 $f(x)$가 극값을 갖기 위한 a의 값의 범위는

$a<1$ …… ㉠

α, β는 이차방정식 $x^2+2x+a=0$의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=a$

$\alpha^2+2\alpha+a=0$, $\beta^2+2\beta+a=0$에서

$\alpha^2+a=-2\alpha$, $\beta^2+a=-2\beta$

$M=f(\alpha)$, $m=f(\beta)$이므로

$M=f(\alpha)=(\alpha^2+a)e^\alpha=-2\alpha e^\alpha$

$m=f(\beta)=(\beta^2+a)e^\beta=-2\beta e^\beta$

$M\times m=f(\alpha)\times f(\beta)$

$\quad=(-2\alpha e^\alpha)\times(-2\beta e^\beta)$

$\quad=4\alpha\beta e^{\alpha+\beta}<0$

이때 $e^{\alpha+\beta}>0$이므로

$\alpha\beta<0$, 즉 $a<0$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a<0$

따라서 $a<0$이므로 $|a|\le3$인 정수 a의 개수는 3이다.

162. 정답 ②

$$f'(x)=\frac{a\times\frac{1}{x}\times x-a\times\ln x\times 1}{x^2}$$
$$=\frac{a(1-\ln x)}{x^2}$$

$f'(x)=0$에서 $a(1-\ln x)=0$

$a>0$이므로 $x=e$

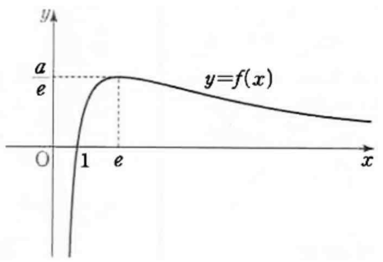
$0<x<e$에서 $1-\ln x>0$이고 $a>0$이므로 $f'(x)>0$

$x>e$에서 $1-\ln x<0$이고 $a>0$이므로 $f'(x)<0$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{a}{e}$	$\searrow$

또한 $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$, $\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x}=-\infty$이고 $a>0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



즉, $g(x)=\begin{cases} f(x) & (0<x\le e) \\ -f(x)+b & (x>e)\end{cases}$

함수 $g(x)$가 양의 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=e$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to e-}g(x)=\lim_{x\to e+}g(x)=g(e)$$

이때

$$\lim_{x\to e-}g(x)=\lim_{x\to e-}f(x)=f(e)$$
$$\lim_{x\to e+}g(x)=\lim_{x\to e+}\{-f(x)+b\}=-f(e)+b$$
$$g(e)=f(e)$$

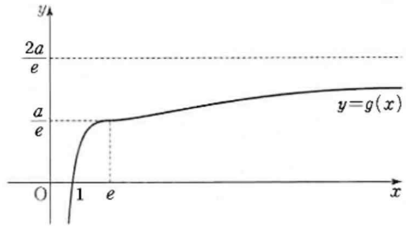
이므로

$$f(e)=-f(e)+b,\ f(e)=\frac{b}{2}$$

$f(e)=\frac{a}{e}=\frac{b}{2}$이므로 $b=\frac{2a}{e}$

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (0<x\le e) \\ -f(x)+\frac{2a}{e} & (x>e)\end{cases}$$

이고 $f'(e)=0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $h(t)$가 불연속인 양의 실수 t의 값의 개수가 1이상이 되려면 실수 t에 대하여 점 $(0,\ k)$를 지나고 기울기가 t인 직선이 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나는 서로 다른 점의 개수가 양수 t를 기준으로 바뀔 때가 존재해야 한다.

(ⅰ) $k\ge\frac{2a}{e}$인 경우

$t\ge 0$이면 $h(t)=0$이고, $t<0$이면 $h(t)=1$이므로 함수 $h(t)$가 불연속인 양의 실수 t의 값의 개수는 0이다.

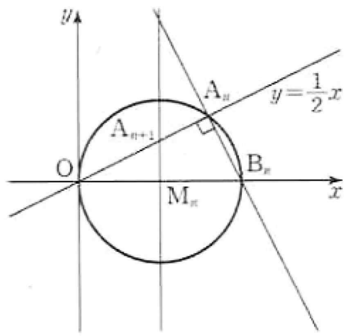
(ⅱ) $k<\frac{2a}{e}$인 경우

점 $(0,\ k)$를 지나고 기울기가 t인 직선이 함수 $y=g(x)$의 그래프와 접할 때의 t의 값을 $m(m>0)$이라 하면, 점 $(0,\ k)$를 지나고 기울기가 t인 직선이 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나는 서로 다른 점의 개수가 $t=m$의 좌우에서 바뀐다.
즉, 함수 $h(t)$가 불연속인 양의 실수 t의 값의 개수가 항상 1이상이다.
이때 함수 $h(t)$가 불연속인 양의 실수 t의 값의 개수가 1이상이 되도록 하는 자연수 k의 값의 최댓값이 6인 경우는

$$6<\frac{2a}{e}\le 7$$

따라서 $3e<a\le\frac{7e}{2}$이므로 $a>0$인 상수 a의 최댓값은 $\frac{7e}{2}$이다.

163. 정답 80



직선 $y=\frac{1}{2}x$에 수직인 직선의 기울기는 -2이므로 점 $A_n\left(x_n,\ \frac{1}{2}x_n\right)$을 지나고 직선 $y=\frac{1}{2}x$에 수직인 직선의 방정식은

$$y=-2(x-x_n)+\frac{1}{2}x_n$$

이 직선이 x축과 만나는 점을 $y=0$일 때이므로

$$0=-2(x-x_n)+\frac{1}{2}x_n$$

에서 $x=\frac{5}{4}x_n$이므로 $\mathrm{B}_n\left(\frac{5}{4}x_n,\ 0\right)$

삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{OB}_n$의 외접원의 중심 M_n은 두 점 O, B_n의 중점이므로

$\mathrm{M}_n\left(\frac{5}{8}x_n,\ 0\right)$

점 M_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 직선 $y=\frac{1}{2}x$와 만나는 점의

좌표는 $\left(\frac{5}{8}x_n,\ \frac{5}{16}x_n\right)$이므로

$x_{n+1}=\frac{5}{8}x_n$

다라서 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$은 첫째항이 30이고 공비가 $\frac{5}{8}$인 등비급수의 합이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n=\frac{30}{1-\frac{5}{8}}=\frac{30}{\frac{3}{8}}=80$$

164. 정답 230

$f'(x)$

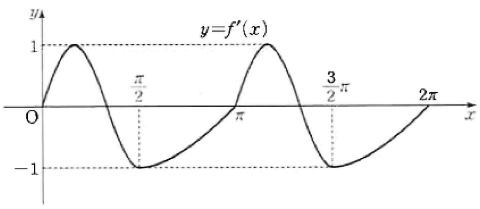
$=|\sin x|\cos 2x+|\cos x|\sin 2x$

$$=\begin{cases}\sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x & (\sin x\ge 0,\ \cos x\ge 0)\\ \sin x\cos 2x-\cos x\sin 2x & (\sin x\ge 0,\ \cos x<0)\\ -\sin x\cos 2x-\cos x\sin 2x & (\sin x<0,\ \cos x<0)\\ -\sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x & (\sin x<0,\ \cos x\ge 0)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\sin 3x & (\sin x\ge 0,\ \cos x\ge 0)\\ -\sin x & (\sin x\ge 0,\ \cos x<0)\\ -\sin 3x & (\sin x<0,\ \cos x<0)\\ \sin x & (\sin x<0,\ \cos x\ge 0)\end{cases}$$

이때 두 함수 $y=\sin 3x$, $y=\sin x$의 주기는 각각 $\frac{2}{3}\pi$, 2π이므로

함수 $y=f'(x)$의 그래프의 개형을 $0\le x\le 2\pi$에서 그리면 다음과 같다.



함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 양수 a의 값은 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌는 경우이다.

이때 두 함수 $y=\sin 3x$, $y=\sin x$의 주기를 이용하여 양수 a의 값을 작은 수부터 차례대로 구하면

$\frac{\pi}{3}$, π, $\frac{4}{3}\pi$, 2π, $\cdots$

이므로

$a_{2n-1}=\frac{3n-2}{3}\pi$, $a_{2n}=n\pi$

따라서

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{30}a_n&=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{15}(a_{2n-1}+a_{2n})\\&=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{15}(3n-2)+\sum_{n=1}^{15}n\\&=\frac{15\times16}{2}-\frac{1}{3}\times30+\frac{15\times16}{2}=230\end{aligned}$$

165. 정답 ⑤

$y'=\frac{1}{4}x-\frac{1}{x}$이므로

$$\begin{aligned}l(t)&=\int_1^t\sqrt{1+(y')^2}\,dx\\&=\int_1^t\sqrt{1+\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{x}\right)^2}\,dx\\&=\int_1^t\sqrt{1+\left(\frac{1}{16}x^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}\right)}\,dx\\&=\int_1^t\sqrt{\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}}\,dx\\&=\int_1^t\sqrt{\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{x}\right)^2}\,dx\\&=\int_1^t\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{x}\right)dx\end{aligned}$$

이때 $l(1)=\int_1^1\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{x}\right)dx=0$이고

$l'(t)=\frac{1}{4}t+\frac{1}{t}$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{t\to1+}\frac{l(t)}{t-1}&=\lim_{t\to1+}\frac{l(t)-l(1)}{t-1}\\&=l'(1)=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}\end{aligned}$$

166. 정답 ④

$f(x)=e^{2x}+10se^{x+1}+2e^2x$에서

$f'(x)=2e^{2x}+10se^{x+1}+2e^2$

이때 $e^x=X$ $(X>0)$이라 하고 $f'(x)=g(X)$라 하면

$$\begin{aligned}f'(x)&=g(X)\\&=2X^2+10esX+2e^2\end{aligned}$$

이고 $f(x)$가 $x=x_1$과 $x=x_2$에서 극값을 갖기 위해서는

방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

즉, 방정식 $g(X)=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 하므로

이차방정식 $g(X)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=(5es)^2-2\times2e^2\\&=e^2(25s^2-4)\\&=e^2(5s+2)(5s-2)>0\end{aligned}$$

이고 $10es<0$, 즉 $s<0$이어야 한다.

따라서 $s<-\frac{2}{5}$

이때 $s=\frac{1}{t^2+4t+9}$이고 $\frac{1}{t^2+4t+9}<-\frac{2}{5}$에서

$t^2+4t+9=(t+2)^2+5>0$이므로

$5t<-2t^2-8t-18$, $2t^2+13t+18<0$,

$(2t+9)(t+2)<0$

$-\frac{9}{2}<t<-2$

즉, $\alpha=-\frac{9}{2}$, $\beta=-2$이므로

$\alpha\beta=-\frac{9}{2}\times(-2)=9$

또한 함수 $f(x)$는 $x=x_1$과 $x=x_2$에서 극값을 가지므로

방정식 $g(X)=0$의 두 근은 e^{x_1}과 e^{x_2}이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$e^{x_1}\times e^{x_2}=e^{x_1+x_2}=e^2$

즉, $x_1+x_2=2$

따라서 $\alpha\beta(x_1+x_2)=9\times2=18$

167. 정답 25

$f'(x)=ax^{a-1}$, $g'(x)=be^{bx}$이므로 조건 (가)에서

$t^a=e^{bt}$ …… ㉠

$at^{a-1}=be^{bt}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{at^{a-1}}{t^a}=b$이므로 $t=\frac{a}{b}$

따라서 ㉠에 대입하면

$\left(\frac{a}{b}\right)^a=e^a$

이때 $a>0$, $b>0$이므로 $\frac{a}{b}=e$ …… ㉢

또한 $h'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x}}=\frac{1}{\sqrt{2x}}$이므로 조건 (나)에서

$e^{bs}=\sqrt{2s}$ …… ㉣

$be^{bs}=\frac{1}{\sqrt{2s}}$ …… ㉤

㉣, ㉤에서 $\frac{1}{b}=2s$이므로 $s=\frac{1}{2b}$

따라서 ㉣에 대입하면

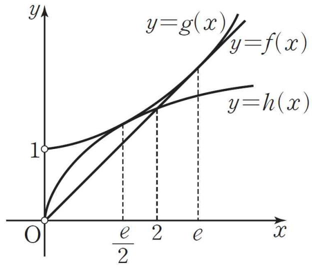
$e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{b}}$ 이므로 $b=\frac{1}{e}$

㉢에 대입하면 $a=eb=1$이므로 $t=\frac{a}{b}=e$

또한 $s=\frac{1}{2b}=\frac{e}{2}$이고 두 곡선 $f(x)=x$, $h(x)=\sqrt{2x}$의 교점의

x좌표는 $x=\sqrt{2x}$, $x^2=2x$, $x(x-2)=0$

에서 $x=0$ 또는 $x=2$이다.



따라서 $x>0$일 때 세 곡선 $f(x)=x$, $g(x)=e^{\frac{1}{e}x}$, $h(x)=\sqrt{2x}$로 모두 둘러싸인 부분은 그림과 같으므로

구하는 넓이는

$$\int_{\frac{e}{2}}^{2}\left(e^{\frac{1}{e}x}-\sqrt{2x}\right)dx+\int_{2}^{e}\left(e^{\frac{1}{e}x}-x\right)dx$$

$$=\left[e\times e^{\frac{1}{e}x}-\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{e}{2}}^{2}+\left[e\times e^{\frac{1}{e}x}-\frac{1}{2}x^2\right]_{2}^{e}$$

$$=e^{1+\frac{2}{e}}-\frac{8}{3}-e\sqrt{e}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{e}{2}\times\sqrt{\frac{e}{2}}+e^2-\frac{1}{2}e^2-e^{1+\frac{2}{e}}+2$$

$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}$$

즉, $p=\frac{1}{2}$, $q=-\frac{2}{3}$이므로

$36(p^2+q^2)=36\left(\frac{1}{4}+\frac{4}{9}\right)=9+16=25$

168. 정답 9

부채꼴 OBP의 넓이는

$\frac{1}{2}\times1^2\times\theta=\frac{\theta}{2}$

$\overline{\mathrm{OP}}=1$이므로

$\overline{\mathrm{OH}}=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$, $\overline{\mathrm{PH}}=\sin\theta$

따라서 삼각형 OPH의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(-\cos\theta)\times\sin\theta=-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$

또한

$\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{OB}}+\overline{\mathrm{OH}}$

$=1+(-\cos\theta)=1-\cos\theta$

이므로 선분 BH를 지름으로 하는 반원의 넓이는

$\frac{1}{2}\pi\times\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)^2=\frac{(1-\cos\theta)^2\pi}{8}$

따라서

$$f(\theta)=\frac{\theta}{2}+\left(-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\right)-\frac{(1-\cos\theta)^2\pi}{8}$$

$$=\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta-\frac{(1-\cos\theta)^2\pi}{8}$$

이므로

$f'(\theta)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos^2\theta+\frac{1}{2}\sin^2\theta-\frac{(1-\cos\theta)\pi}{4}\times\sin\theta$

이때

$\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2},\ \sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이므로

$$f'\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}\pi}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

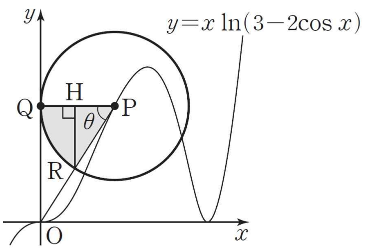
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{3}{8}-\frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}\pi}{8}$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{3\sqrt{3}\pi}{16}$$

$$=\frac{12-3\sqrt{3}\pi}{16}$$

즉, $m=12,\ n=-3$이므로 $m+n=9$

169. 정답 ③



$\angle\mathrm{QPR}=\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하고, 점 R에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하자.

점 R은 중심이 $\mathrm{P}(t,\ t\ln(3-2\cos t))\ (0<t<\pi)$이고 반지름의 길이가 t인 원 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{HR}}=\overline{\mathrm{RP}}\sin\theta=t\sin\theta$

이때 직각삼각형 OPQ에서

$\tan\theta=\frac{t\ln(3-2\cos t)}{t}=\ln(3-2\cos t)$이므로

$f(t)=t\ln(3-2\cos t)-t\sin\theta$

$\quad=t(\tan\theta-\sin\theta)$

$g(t)=\frac{1}{2}t^2\theta$

$t\to0+$일 때, $\theta\to0+$이므로

$$\lim_{t\to0+}\frac{\theta}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0+}\left\{\frac{\theta}{\tan\theta}\times\frac{\ln\{1+2(1-\cos t)\}}{2(1-\cos t)}\times\frac{2\sin^2 t}{t^2(1+\cos t)}\right\}$$

$$=1\times1\times\frac{2}{2}$$

$$=1$$

따라서

$$\lim_{t\to0+}\frac{f(t)}{t^3\times g(t)}=\lim_{t\to0+}\frac{2t(\tan\theta-\sin\theta)}{t^5\theta}$$

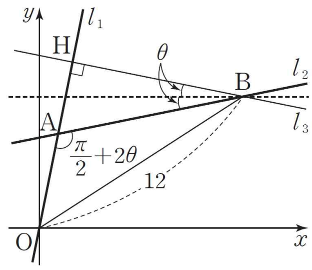
$$=\lim_{t\to0+}\left\{\frac{\sin\theta}{\theta}\times\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)\times\frac{2}{t^4}\right\}$$

$$=\lim_{t\to0+}\left\{\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\times\left(\frac{\theta}{t^2}\right)^2\times\frac{2}{\cos\theta}\right\}$$

$$=1\times\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{2}{1}$$

$$=1$$

170. 정답 ②



점 B를 지나고 직선 l_1에 수직인 직선을 l_3이라 하자.

조건 (나)에 의하여 두 직선 l_2, l_3의 기울기가 절댓값이 같고 부호가 반대이므로 직선 l_2가 x축과 이루는 예각의 크기를 $\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$라 하면 직선 l_3의 기울기는 $-\tan\theta$이다. 이때 두 직선 l_1, l_3이 서로 수직이므로 $-\tan\theta=-\frac{1}{5}$에서 $\tan\theta=\frac{1}{5}$

삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$=\frac{2\times\frac{1}{5}}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}$$

$$=\frac{10}{24}$$

$$=\frac{5}{12}$$

두 직선 l_2, l_3이 이루는 예각의 크기가 2θ이므로

$\angle\mathrm{BAH}=\frac{\pi}{2}-2\theta$

$1+\tan^2 2\theta=\frac{1}{\cos^2 2\theta}$에서

$$\cos^2 2\theta=\frac{1}{1+\left(\frac{5}{12}\right)^2}=\left(\frac{12}{13}\right)^2$$

이때 $0<2\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos2\theta=\frac{12}{13}$

$\angle \mathrm{OAB}=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)=\frac{\pi}{2}+2\theta$

$\sin(\angle \mathrm{OAB})=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)=\cos 2\theta=\frac{12}{13}$

삼각형 OBA의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$2R=\frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\sin(\angle \mathrm{OAB})}=\frac{12}{\frac{12}{13}}=13$

따라서 $R=\frac{13}{2}$

171. 정답 161

$a_n=ar^{n-1}$, $b_n=bs^{n-1}$ (a, b, r, s는 0이 아닌 정수)으로 놓자.

조건 (가)에서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_1}{a_1}\left(\frac{s}{r}\right)^{n-1}$이 수렴하므로

$\left|\frac{s}{r}\right|<1$ …… ㉠

조건 (나)에서

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{11^{n-1}}{a_nb_n}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{a_n}\right)\times\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}}{b_n}\right)$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{ab}\left(\frac{11}{rs}\right)^{n-1}=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a}\left(\frac{3}{r}\right)^{n-1}\right\}\times\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b}\left(\frac{5}{s}\right)^{n-1}\right\}$

$\frac{\frac{1}{ab}}{1-\frac{11}{rs}}=\frac{\frac{1}{a}}{1-\frac{3}{r}}\times\frac{\frac{1}{b}}{1-\frac{5}{s}}$

$1-\frac{11}{rs}=\left(1-\frac{3}{r}\right)\left(1-\frac{5}{s}\right)$

$rs-11=(r-3)(s-5)$

$5r+3s=26$ …… ㉡

(ⅰ) $r=3r'$ (r'은 0이 아닌 정수)일 때,

㉡에서 $s=\frac{26}{3}-5r'$

이때 s가 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $r=3r'-1$ (r'은 정수)일 때

㉡에서 $s=\frac{31}{3}-5r'$

이때 s가 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $r=3r'-2$ (r'은 정수)일 때

㉡에서 $s=12-5r'$

이때 s가 정수라는 조건을 만족시킨다.

(ⅰ)~(ⅲ)에서

$r=3r'-2$, $s=12-5r'$ (r'은 정수)

㉠에서 $\left|\frac{s}{r}\right|<1$, 즉 $\left|\frac{12-5r'}{3r'-2}\right|<1$

$|12-5r'|<|3r'-2|$

① $r'<\frac{2}{3}$일 때,

$12-5r'<-3r'+2$에서 $r'>5$

이때 조건을 만족시키는 r'의 값은 없다.

② $\frac{2}{3}\le r'<\frac{12}{5}$일 때,

$12-5r'<3r'-2$에서 $r'>\frac{7}{4}$

즉, $\frac{7}{4}<r'<\frac{12}{5}$에서 $r'=2$

이때 $s=2$는 $\left|\frac{b_2}{b_1}\right|=|s|>5$를 만족시키지 않는다.

③ $r'\ge\frac{12}{5}$일 때,

$-12+5r'<3r'-2$에서 $r'<5$

즉, $\frac{12}{5}\le r'<5$에서 $r'=3$ 또는 $r'=4$

이때 $\left|\frac{b_2}{b_1}\right|=|s|>5$이어야 하므로 $r'=4$에서

$r=10$, $s=-8$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1b_1}{a_nb_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{rs}\right)^{n-1}$

$=\frac{1}{1-\frac{1}{rs}}$

$=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{80}\right)}$

$=\frac{80}{81}$

따라서 $p=81$, $q=80$이므로

$p+q=161$

[참고]

$|a_2|>3|a_1|$, $|b_2|>5|b_1|$이므로

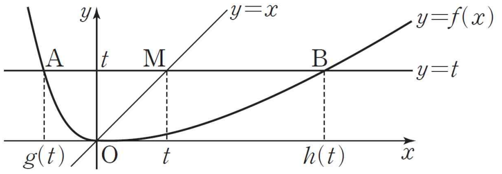
$\left|\frac{a_2}{a_1}\right|=|r|>3$, $\left|\frac{b_2}{b_1}\right|=|s|>5$

즉, $\left|\frac{3}{r}\right|<1$, $\left|\frac{5}{r}\right|<1$이고

$\left|\frac{11}{rs}\right|<\left|\frac{15}{rs}\right|=\left|\frac{3}{r}\right|\left|\frac{5}{s}\right|<1$

이므로 조건 (나)의 모든 급수는 수렴한다.

172. 정답 17



두 점 A, B의 x좌표가 각각 $g(t)$, $h(t)$이고

$g(t)<0$이므로 $h(t)>0$이다.

조건 (나)에서 선분 AB의 중점을 M이라 하면 점 M이 직선 $y=x$ 위의 점이므로

$\dfrac{g(t)+h(t)}{2}=t$ ······ ㉠

$g(t_1)=-2$일 때, 조건 (가)에서 $t_1=f(-2)=4\ln 5$이므로

$h(t_1)=2\times t_1-g(t_1)=8\ln 5+2$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 $x\le 0$인 부분과 y축 및 직선 $y=4\ln 5$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^{4\ln 5}\{-g(t)\}dt=2\times 4\ln 5-\int_{-2}^{0}f(x)dx$$

즉, $\displaystyle\int_0^{4\ln 5}g(t)dt=-8\ln 5+\int_{-2}^{0}f(x)dx$ ······㉡

조건 (가)에서 $x\le 0$일 때 $f(x)=-2x\ln(x^2+1)$이므로

$s=x^2+1$로 놓으면 $\dfrac{ds}{dx}=2x$이고,

$x=0$일 때 $s=1$, $x=-2$일 때, $s=5$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{0}f(x)dx&=\int_{-2}^{0}\{-2x\ln(x^2+1)\}dx\\&=\int_5^1(-\ln s)ds\\&=\int_1^5\ln s\,ds\\&=\Big[s\ln s-s\Big]_1^5\\&=5\ln 5-5-(0-1)\\&=5\ln 5-4\end{aligned}$$ ······ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의하여

$$\begin{aligned}&\int_0^{h(t_1)}f(x)dx\\&=\int_0^{8\ln 5+2}f(x)dx\\&=(8\ln 5+2)\times 4\ln 5-\int_0^{4\ln 5}h(t)dt\\&=32(\ln 5)^2+8\ln 5-\int_0^{4\ln 5}\{2t-g(t)\}dt\\&=32(\ln 5)^2+8\ln 5-\Big[t^2\Big]_0^{4\ln 5}+\int_0^{4\ln 5}g(t)dt\\&=16(\ln 5)^2+\int_{-2}^{0}f(x)dx\\&=16(\ln 5)^2+5\ln 5-4\end{aligned}$$

따라서 $p=16$, $q=5$, $r=-4$이므로

$p+q+r=17$

173. 정답 ②

$f(x)=\dfrac{a}{x^2+1}$에서

$f'(x)=-\dfrac{a\times 2x}{(x^2+1)^2}=-\dfrac{2ax}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

이때 조건 (가)에 의하여 함수 $f(x)$가 최댓값을 가지므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌어야 한다. 그러므로 $a>0$이다.

또한

$$\begin{aligned}f''(x)&=-\frac{2a\times(x^2+1)^2-2ax\times 2(x^2+1)\times 2x}{(x^2+1)^4}\\&=\frac{2a(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}\end{aligned}$$

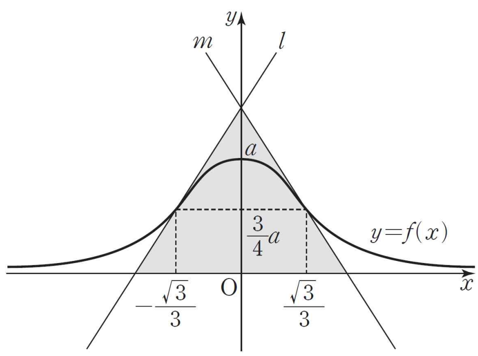
$f''(x)=0$에서 $3x^2-1=0$이므로

$x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	⤴		↗	극대	↘		⤵

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}f(x)=0$이므로 곡선 $y=f(x)$의 개형은 그림과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 $f(0)=a$를 가지므로 조건 (가)에서 $a=b$이다.

또한 $f\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{3}{4}a$이므로 곡선

$y=f(x)$의 두 변곡점의 좌표는

$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{3}{4}a\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{3}{4}a\right)$이다.

$$f'\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{2a\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{\left(\frac{1}{3}+1\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{8}a$$

이므로 직선 l의 기울기는 $\frac{3\sqrt{3}}{8}a$이고 직선 l의 방정식은

$y=\frac{3\sqrt{3}}{8}a\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\frac{3}{4}a$이다.

이때 조건 (나)에 의하여 두 직선 l, m과 x축으로 둘러싸인 도형이 정삼각형이므로 직선 l의 기울기는

$\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$이어야 한다.

$\frac{3\sqrt{3}}{8}a=\sqrt{3}$에서 $a=\frac{8}{3}$

이므로 직선 l의 방정식은 $y=\sqrt{3}\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+2$이고,

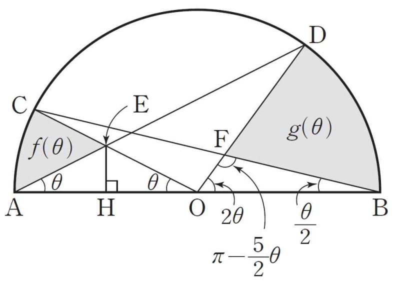
x절편은 $-\sqrt{3}$이다.

그러므로 정삼각형의 한 변의 길이 c는 $c=2\sqrt{3}$이다.

따라서 $a=b=\frac{8}{3}$, $c=2\sqrt{3}$이므로

$$(a+b)c=\left(\frac{8}{3}+\frac{8}{3}\right)\times2\sqrt{3}=\frac{32}{3}\sqrt{3}$$

174. 정답 ②



점 O는 선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심이므로 원주각의 성질에 의하여

$$\angle\mathrm{BAD}=\frac{1}{2}\times(\angle\mathrm{BOD})=\frac{1}{2}\times2\theta=\theta$$

삼각형 EAO는 $\overline{\mathrm{EA}}=\overline{\mathrm{EO}}$인 이등변삼각형이고

$\overline{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\times4=2$이므로 점 E에서 선분 AO에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{OH}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}\times2=1$$

직각삼각형 EHO에서

$$\overline{\mathrm{EH}}=\overline{\mathrm{OH}}\tan\theta=1\times\tan\theta=\tan\theta$$

이때 두 선분 AE, CE와 호 AC로 둘러싸인 부분의 넓이 $f(\theta)$는 부채꼴 OCA의 넓이에서 삼각형 EAO의 넓이를 뺀 것이므로

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}^2\times\theta-\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{EH}}$$

$$=\frac{1}{2}\times2^2\times\theta-\frac{1}{2}\times2\times\tan\theta=2\theta-\boxed{\tan\theta}$$

한편 원주각의 성질에 의하여

$$\angle\mathrm{CBA}=\frac{1}{2}\times(\angle\mathrm{COA})=\frac{\theta}{2}$$

삼각형 OBF에서

$$\angle\mathrm{OFB}=\pi-(\angle\mathrm{BOF}+\angle\mathrm{FBO})$$

$$=\pi-\left(2\theta+\frac{\theta}{2}\right)=\pi-\frac{5}{2}\theta$$

$\overline{\mathrm{OB}}=2$이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\sin\left(\pi-\frac{5}{2}\theta\right)}=\frac{\overline{\mathrm{OF}}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\overline{\mathrm{OF}}=\frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\sin\left(\pi-\frac{5}{2}\theta\right)}\times\sin\frac{\theta}{2}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5}{2}\theta}$$

이때 두 선분 BF, DF와 호 BD로 둘러싸인 부분의 넓이 $g(\theta)$는 부채꼴 OBD의 넓이에서 삼각형 OBF의 넓이를 뺀 것이므로

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}^2\times2\theta-\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\overline{\mathrm{OF}}\times\sin2\theta$$

$$=\frac{1}{2}\times2^2\times2\theta-\frac{1}{2}\times2\times\frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5}{2}\theta}\times\sin2\theta$$

$$=4\theta-\boxed{\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\sin2\theta}{\sin\frac{5}{2}\theta}}$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)-2f(\theta)}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(4\theta-\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\sin2\theta}{\sin\frac{5}{2}\theta}\right)-2(2\theta-\tan\theta)}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{2\tan\theta}{\theta}-\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\sin2\theta}{\theta\sin\frac{5}{2}\theta}\right)$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left(2\times\frac{\tan\theta}{\theta}-\frac{4}{5}\times\frac{\sin2\theta}{2\theta}\times\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\times\frac{\frac{5}{2}\theta}{\sin\frac{5}{2}\theta}\right)$$

$$=2\times1-\frac{4}{5}\times1\times1\times1=\boxed{\frac{6}{5}}$$

따라서 $h(\theta)=\tan\theta$, $i(\theta)=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\sin2\theta}{\sin\frac{5}{2}\theta}$이고,

$p=\frac{6}{5}$이므로 $h\left(\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$,

$$i\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{2}{3}\pi}{\sin\frac{5}{6}\pi}=\frac{2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$$

$$h\left(\frac{\pi}{3}\right)\times i\left(\frac{\pi}{3}\right)+p=\sqrt{3}\times\sqrt{3}+\frac{6}{5}=\frac{21}{5}$$

175. 정답 32

$$\int_0^x f(t)dt=a(\sin x-\cos x)^2+b(x+1) \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에 $x=0$을 대입하면 $\int_0^0 f(t)dt=0$이므로

$0=a(0-1)^2+b(0+1)$

$a+b=0,\ b=-a$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2a(\sin x-\cos x)(\cos x+\sin x)+b$

$\quad=2a(\sin^2x-\cos^2x)-a$

이때 $f(0)=3$이므로

$f(0)=2a(0-1)-a=-3a=3$

$a=-1$

따라서 $b=-a=-1(-1)=1$이고

$f(x)=-2(\sin^2x-\cos^2x)+1$

$\quad=-2\{\sin^2x-(1-\sin^2x)\}+1$

$\quad=-4\sin^2x+3$

이때 모든 실수 x에 대하여

$f(\pi+x)=-4\sin^2(\pi+x)+3$

$\quad=-4(-\sin x)^2+3$

$\quad=-4\sin^2x+3=f(x)$

이고

$f(0)=-4\times0+3=3$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-4\times\frac{1}{2}+3=1$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-4\times1+3=-1$

$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=-4\times\frac{1}{2}+3=1$

이므로

$f(0)=f(\pi)=f(2\pi)=\cdots=3$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=f\left(\frac{5}{4}\pi\right)=f\left(\frac{9}{4}\pi\right)=\cdots=1$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=f\left(\frac{5}{2}\pi\right)=\cdots=-1$

$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=f\left(\frac{7}{4}\pi\right)=f\left(\frac{11}{4}\pi\right)=\cdots=1$

따라서

$$\sum_{n=1}^{30}f\left(\frac{ab+n}{4}\pi\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{30}f\left(\frac{n-1}{4}\pi\right)$$

$$=f(0)+f\left(\frac{\pi}{4}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{3}{4}\pi\right)+\cdots+f\left(\frac{29}{4}\pi\right)$$

$$=7\left\{f(0)+f\left(\frac{\pi}{4}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right\}+f(7\pi)+f\left(\frac{29}{4}\pi\right)$$

$$=7\{3+1+(-1)+1\}+3+1=32$$

176. 정답 54

$g(x)=\ln nx,\ h(x)=n\ln x$라 하자.

두 곡선 $y=g(x),\ y=h(x)$가 만나는 점의 x좌표는

$g(x)=h(x)$에서 $\ln nx=n\ln x$

$(n-1)\ln x=\ln n,\ \ln x=\ln n^{\frac{1}{n-1}}$

$x=n^{\frac{1}{n-1}}$

$g'(x)=\frac{1}{x}$이고 곡선 $y=g(x)$가 직선 l_n과 접하는 점의 좌표는 $(t,\ \ln nt)$이므로 직선 l_n의 방정식은

$y-\ln nt=\frac{1}{t}(x-t)$

$y=\frac{1}{t}x-1+\ln nt \quad \cdots\cdots ㉠$

$h'(x)=\frac{n}{x}$이고 곡선 $y=h(x)$가 직선 l_n과 접하는 점의 좌표는 $(s,\ n\ln s)$이므로 직선 l_n의 방정식은

$y-n\ln s=\frac{n}{s}(x-s)$

$y=\frac{n}{s}x-n+n\ln s \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠과 ㉡이 일치하므로 $\frac{1}{t}=\frac{n}{s} \quad \cdots\cdots ㉢$

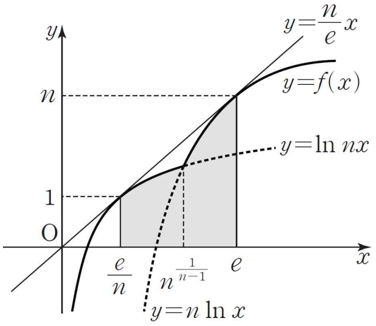
$-1+\ln nt=-n+n\ln s \quad \cdots\cdots ㉣$

㉢에서 $nt=s$이므로 이를 ㉣에 대입하면

$-1+\ln s=-n+n\ln s,\ (n-1)\ln s=n-1$

$n>1$이므로 $\ln s=1,\ s=e$

따라서 직선 l_n의 방정식은 $y=\frac{n}{e}x$이고, $t=\frac{e}{n}$이므로 곡선 $y=f(x)$는 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이 T_n은

$$T_n=\int_{\frac{e}{n}}^{e} f(x)dx$$

$$=\int_{\frac{e}{n}}^{n^{\frac{1}{n-1}}} \ln nx\,dx+\int_{n^{\frac{1}{n-1}}}^{e} n\ln x\,dx$$

이때 $\int \ln x\,dx=x\ln x-x=(\ln x-1)x$이므로

$$\int_{\frac{e}{n}}^{n^{\frac{1}{n-1}}} \ln nx\,dx=\int_{\frac{e}{n}}^{n^{\frac{1}{n-1}}} (\ln n+\ln x)dx$$

$$=\Big[x\ln n+(\ln x-1)x\Big]_{\frac{e}{n}}^{n^{\frac{1}{n-1}}}$$

$$=\left\{n^{\frac{1}{n-1}}\ln n+\left(\ln n^{\frac{1}{n-1}}-1\right)n^{\frac{1}{n-1}}\right\}-\left\{\frac{e}{n}\ln n+\left(\ln\frac{e}{n}-1\right)\frac{e}{n}\right\}$$

$$=n^{\frac{1}{n-1}}\left(\frac{n}{n-1}\ln n-1\right)$$

$$\int_{n^{\frac{1}{n-1}}}^{e} n\ln x\,dx=n\Big[(\ln x-1)x\Big]_{n^{\frac{1}{n-1}}}^{e}$$

$$=n\left\{0-\left(\ln n^{\frac{1}{n-1}}-1\right)n^{\frac{1}{n-1}}\right\}$$

$$=n^{\frac{1}{n-1}}\left(n-\frac{n}{n-1}\ln n\right)$$

따라서

$$T_n=\int_{\frac{e}{n}}^{n^{\frac{1}{n-1}}} \ln nx\,dx+\int_{n^{\frac{1}{n-1}}}^{e} n\ln x\,dx$$

$$=n^{\frac{1}{n-1}}\left(\frac{n}{n-1}\ln n-1\right)+n^{\frac{1}{n-1}}\left(n-\frac{n}{n-1}\ln n\right)$$

$$=n^{\frac{1}{n-1}}(n-1)$$

이므로

$$\sum_{n=2}^{10}\left(\frac{T_n}{n-1}\right)^{n-1}=\sum_{n=2}^{10} n=2+3+4+\cdots+10$$

$$=\frac{9(2+10)}{2}=54$$

177. 정답 ③

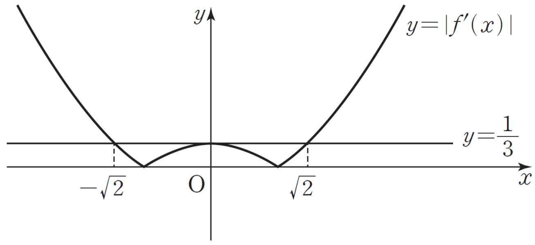
함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이므로 함수 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 이차함수이다

조건 (가)에서 $\sum_{n=1}^{\infty}|f'(x)|^n=\frac{1}{2}$이므로

$-1<f'(x)<1$을 만족시키는 실수 x에 대하여

$\frac{|f'(x)|}{1-|f'(x)|}=\frac{1}{2}$, 즉 $|f'(x)|=\frac{1}{3}$

이때 방정식 $|f'(x)|=\frac{1}{3}$이 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$만을 근으로 가지므로 함수 $y=|f'(x)|$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{3}$은 그림과 같다.



함수 $y=f'(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{3}$이 만나는 점의 x좌표가 $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$이므로

$f'(x)-\frac{1}{3}=a(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$ $(a>0)$

$f'(x)=a(x^2-2)+\frac{1}{3}$ …… ㉠

$f'(0)=-\frac{1}{3}$이므로 ㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)=-2a+\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$, $a=\frac{1}{3}$

그러므로 ㉠에서

$f'(x)=\frac{1}{3}(x^2-2)+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}$

$f(x)=\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{3}x+C$ (단, C는 적분상수) …… ㉡

한편, $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이므로

$M=f(-1)=C+\frac{2}{9}$

조건 (나)에서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}M^n$이 수렴하므로

$-1<M<1$에서 $-\frac{11}{9}<C<\frac{7}{9}$

또 $\sum_{n=1}^{\infty} M^n = \frac{5}{4}$에서

$\frac{M}{1-M} = \frac{5}{4}$, $M = \frac{5}{9}$

즉, $C + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$에서 $C = \frac{1}{3}$

그러므로 ㉡에서

$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

따라서 $f(2) = \frac{8}{9} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$

178. 정답 ②

$f_1(x) = (x^2+2x)e^{-x}$으로 놓으면

$f_1{}'(x) = (2x+2)e^{-x} - (x^2+2x)e^{-x}$

$= -(x^2-2)e^{-x}$

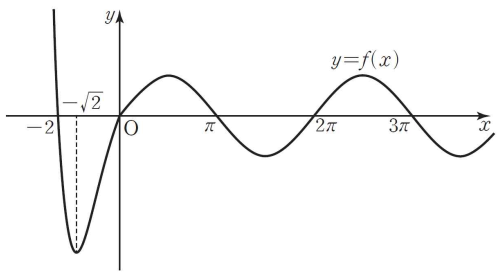
$f_1{}'(x) = 0$에서 $x = -\sqrt{2}$ 또는 $x = \sqrt{2}$

$x \le 0$에서 $f(x) = f_1(x)$이므로 $x \le 0$에서 함수 $y = f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0
$f'(x)$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	↘	극소	↗	

$f(-2) = f(0) = 0$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$이고, $x \ge 0$에서

$f(x) = a\sin x$이므로 함수 $y = f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)dt$으로 놓으면 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $F(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

또 $F'(x) = f(x)$이므로 $F'(x) = 0$에서

$x = -2$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = n\pi$ (단, n은 자연수)

함수 $F(x)$의 도함수 $f(x)$의 그래프에 의하여 함수 $F(x)$는 $x = -2$ 또는 $x = (2n-1)\pi$ (n은 자연수)에서 극대이고, $x = 0$ 또는 $x = 2n\pi$ (n은 자연수)에서 극소임을 알 수 있다.

한편

$\int_{-2}^{0} f(x)dx = \int_{-2}^{0} (x^2+2x)e^{-x}dx$

$= \left[-(x^2+2x)e^{-x}\right]_{-2}^{0} + \int_{-2}^{0} (2x+2)e^{-x}dx$

$= \int_{-2}^{0} (2x+2)e^{-x}dx$

$= \left[-(2x+2)e^{-x}\right]_{-2}^{0} + \int_{-2}^{0} 2e^{-x}dx$

$= (-2-2e^2) + \left[-2e^{-x}\right]_{-2}^{0}$

$= (-2-2e^2) + (-2+2e^2)$

$= -4$

또 자연수 n에 대하여

$\int_{0}^{2n\pi} a\sin x\,dx = \left[-a\cos x\right]_{0}^{2n\pi} = 0$

$\int_{0}^{(2n-1)\pi} a\sin x\,dx = \left[-a\cos x\right]_{0}^{(2n-1)\pi} = 2a$

이때 $x < -2$에서 $F(x) < 0$이고, $F(-2) = F'(-2) = 0$이므로 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 함수 $F(x)$의 극댓값이 0보다 작거나 같아야 한다. 즉, 모든 자연수 n에 대하여

$F((2n-1)\pi) \le 0$

이어야 하므로

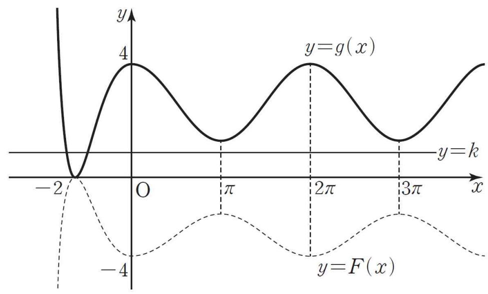
$F((2n-1)\pi) = \int_{-2}^{(2n-1)\pi} f(t)dt$

$= \int_{-2}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{(2n-1)\pi} f(t)dt$

$= -4 + 2a$

$-4 + 2a \le 0$에서 $a \le 2$

그러므로 함수 $y = g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



방정식 $g(x) = k$가 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 함수 $y = g(x)$의 그래프와 직선 $y = k$가 위의 그림과 같이 서로 다른 두점에서 만나야 하고, 이때 k의 값의 범위가 $0 < k < 1$이므로 $x \ge 0$에서 함수 $g(x)$의 극솟값이 1이다.

즉, $x \ge 0$에서 함수 $F(x)$의 극댓값이 -1이므로

$F((2n-1)\pi) = -4 + 2a = -1$에서

$a = \frac{3}{2}$

따라서

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x}{e^x} & (x \le 0) \\ \dfrac{3}{2}\sin x & (x > 0) \end{cases}$$

이므로

$$g\left(\frac{8\pi}{3}\right)=\left|F\left(\frac{8\pi}{3}\right)\right|$$
$$=\left|\int_{-2}^{\frac{8\pi}{3}} f(t)dt\right|$$
$$=\left|\int_{-2}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{\frac{8\pi}{3}} f(t)dt\right|$$
$$=\left|\int_{-2}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}} f(t)dt\right|$$
$$=\left|-4+\left[-\frac{3}{2}\cos x\right]_0^{\frac{2\pi}{3}}\right|$$
$$=\left|-4+\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)\right|$$
$$=\frac{7}{4}$$

179. 정답 5

$f(x)=\ln(x^2+1)-tx$에서

$f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}-t$

$f'(x)=0$에서 $\dfrac{2x}{x^2+1}=t$

$g(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ 로 놓으면

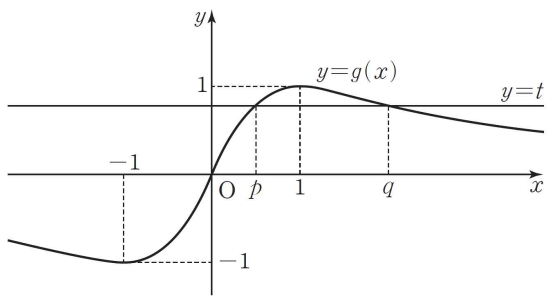
$$g'(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\times 2x}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

$g'(x)=0$에서 $x=-1$또는 $x=1$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극대	↗	극소	↘

$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$0<t<1$이므로 직선 $y=t$와 함수 $y=g(x)$의 그래프는 위의 그림과 같이 서로 다른 두 점에서 만나고, 이 때 이 두 점의 x좌표를 각각 p, q $(p<q)$라 하자.

$f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}-t$이고, $x=p$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=p$에서 극소이고, $x=q$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=q$에서 극대이다.

즉, $p=\beta(t)$, $q=\alpha(t)$이다.

이때 $\alpha(k)=2$이므로

$k=g(\alpha(k))=g(2)=\dfrac{4}{5}$

$g(x)=\dfrac{4}{5}$에서

$\dfrac{2x}{x^2+1}=\dfrac{4}{5}$

$4x^2+4=10x\,2x^2-5x+2=0$

$(2x-1)(x-2)=0$

$x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $x-2$

그러므로 $\beta(k)=\beta\left(\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{1}{2}$

한편, $g(\beta(t))=t$이므로 이 등식의 양변을 t에 대하여 미분하면

$g'\left(\beta\left(\dfrac{4}{5}\right)\right)\times\beta'\left(\dfrac{4}{5}\right)=1$

즉, $g'\left(\dfrac{1}{2}\right)\times\beta'\left(\dfrac{4}{5}\right)=1$이고,

$$g'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}}{\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1\right\}^2}=\frac{24}{25}$$

이므로

$$\beta'\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{1}{g'\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{25}{24}$$

따라서

$6\times k\times\beta'(k)=6\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{25}{24}=5$

180. 정답 37

$f(x)=e^{\sin\frac{\pi x}{2}}-1$에서

$f'(x)=\dfrac{\pi}{2}e^{\sin\frac{\pi x}{2}}\cos\dfrac{\pi x}{2}$

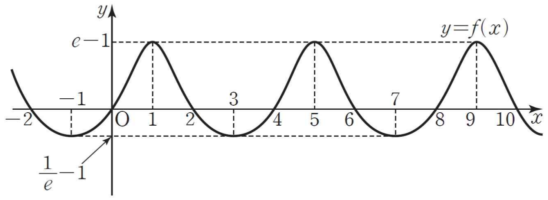
$f'(x)=0$에서 $\cos\dfrac{\pi x}{2}=0$

즉, $x=2n-1$ (단, n은 정수)

정수 m에 대하여 $x=4m-3$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=4m-3$에서 극대이고, $x=4m-1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=4m-1$에서 극소이다.

또 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의

그래프는 그림과 같다.



한편, 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $g(x)$는 $x=k$에서 연속이다.

즉, $f(k)=f(k+3)$에서

$$e^{\sin\frac{k\pi}{2}}-1=e^{\sin\frac{\pi(k+3)}{2}}-1$$

$$e^{\sin\frac{k\pi}{2}}=e^{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{k\pi}{2}\right)}$$

$$e^{\sin\frac{k\pi}{2}}=e^{-\cos\frac{k\pi}{2}} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

위 등식의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\frac{k\pi}{2}=\cos^2\frac{k\pi}{2}$$

이때 $\cos^2\frac{k\pi}{2}=1-\sin^2\frac{k\pi}{2}$이므로

$\sin^2\frac{k\pi}{2}=1-\sin^2\frac{k\pi}{2}$에서 $2\sin^2\frac{k\pi}{2}=1$

㉠에 의하여

$\sin\frac{k\pi}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\frac{k\pi}{2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 또는

$\sin\frac{k\pi}{2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\frac{k\pi}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

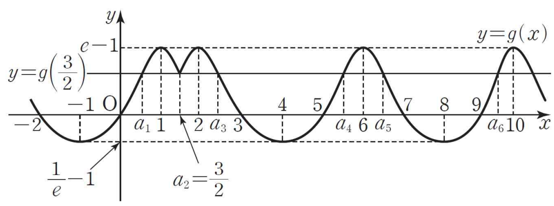
$0<k<4$이므로

$\sin\frac{k\pi}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\frac{k\pi}{2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$에서 $k=\frac{3}{2}$

$\sin\frac{k\pi}{2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\frac{k\pi}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$에서 $k=\frac{7}{2}$

(ⅰ) $k=\frac{3}{2}$일 때

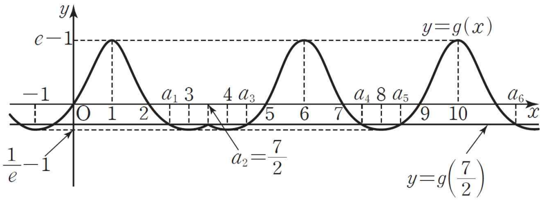
함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=g(k)=g\left(\frac{3}{2}\right)$은 그림과 같다.



이때 $g(a_2)=g\left(\frac{3}{2}\right)>0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $k=\frac{7}{2}$일 때

함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=g(k)=g\left(\frac{7}{2}\right)$은 그림과 같다.



이때 $g(a_2)=g\left(\frac{7}{2}\right)<0$이므로 조건을 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 조건을 만족시키는 k의 값은 $k=\frac{7}{2}$이고, 이때

$a_2=\frac{7}{2}$이므로 곡선 $y=g(x)$의 대칭성을 이용하여 구한

a_1, a_3, a_4, a_5, a_6의 값은 다음과 같다.

$a_1=\frac{5}{2}$, $a_3=\frac{9}{2}$, $a_4=\frac{15}{2}$, $a_5=\frac{17}{2}$, $a_6=\frac{23}{2}$

또 곡선 $y=g(x)$의 대칭성에 의하여

$g'(a_1)+g'(a_3)=0$

$g'(a_4)+g'(a_5)=0$

$$\lim_{h\to0+}\frac{g(a_2+h)-g(a_2)}{h}=g'(a_1)=g'\left(\frac{5}{2}\right)=f'\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}e^{\sin\frac{5\pi}{4}}\times\cos\frac{5\pi}{4}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}\pi}{4}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$g'(a_6)=g'(a_1)=-\frac{\sqrt{2}\pi}{4}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

그러므로

$$\sum_{k=1}^{6}a_k=\frac{5}{2}+\frac{7}{2}+\frac{9}{2}+\frac{15}{2}+\frac{17}{2}+\frac{23}{2}=38$$

$$\sum_{k=1}^{6}\lim_{h\to0+}\frac{g(a_k+h)-g(a_k)}{h}=2\times\left(-\frac{\sqrt{2}\pi}{2}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{2}\pi}{2}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{6}\left\{a_k+\sqrt{2}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\lim_{h\to0+}\frac{g(a_k+h)-g(a_k)}{h}\right\}$$

$$=38+\sqrt{2}\times e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\left(-\frac{\sqrt{2}\pi}{2}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)$$

$$=38-\pi$$

이므로

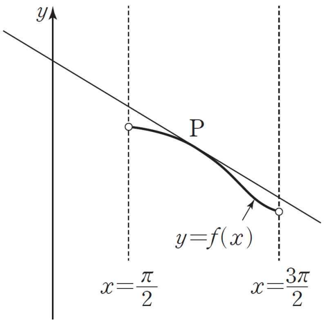
$p+q=38+(-1)=37$

181. 정답 ⑤

$f(x)=\ln(t+\sqrt{2}\sin x)$에서

$f'(x)=\dfrac{\sqrt{2}\cos x}{t+\sqrt{2}\sin x}$

$\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2}$에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(s,\ f(s))$에서의 접선의 y절편이 최대가 될 때는 점 P가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점 일 때이다.

이때

$f''(x)$

$=\dfrac{-\sqrt{2}\sin x\times(t+\sqrt{2}\sin x)-\sqrt{2}\cos x\times\sqrt{2}\cos x}{(t+\sqrt{2}\sin x)^2}$

$=\dfrac{-\sqrt{2}t\sin x-2}{(t+\sqrt{2}\sin x)^2}$

이므로 $f''(x)=0$에서

$-\sqrt{2}t\sin x-2=0$

즉, $\sin x=-\dfrac{\sqrt{2}}{t}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2}$이고, $t>\sqrt{2}$이므로 방정식 ㉠의 해는 존재한다. 이때 방정식 ㉠의 해를 α라 하면 $x=\alpha$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

그러므로 $\alpha=g(t)$이고 ㉠에 의하여

$\sin g(t)=-\dfrac{\sqrt{2}}{t}$ $\cdots\cdots$ ㉡

$g(k)=\dfrac{5\pi}{4}$이므로 ㉡의 양변에 $t=k$를 대입하면

$\sin\dfrac{5\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{k}$

즉, $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{k}$에서

$k=2$

또 ㉡의 양변을 t에 대하여 미분하면

$\cos g(t)\times g'(t)=\dfrac{\sqrt{2}}{t^2}$

위 등식의 양변에 $t=2$를 대입하면

$\cos\dfrac{5\pi}{4}\times g'(2)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times g'(2)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

따라서 $g'(2)=-\dfrac{1}{2}$

[참고]

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(s,\ f(s))$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(s)(x-s)+f(s)$

이 직선의 y절편을 $h(s)$라 하면

$h(s)=-sf'(s)+f(s)$

위 등식의 양변을 s에 대하여 미분하면

$h'(s)=-f'(s)-sf''(s)+f'(s)$

$\quad=-sf''(s)$

$h'(s)=0$에서 $-sf''(s)=0$

$\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2}$이므로 $f''(s)=0$

이때 위의 방정식 ㉠의 해가 존재하고 $f''(s)=0$을 만족시키는 s의 값을 α라 할 때, $s=\alpha$의 좌우에서 $f''(s)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $h'(s)$의 부호가 $s=\alpha$의 좌우에서 양에서 음으로 바뀐다.

즉, 함수 $h(s)$가 $s=\alpha$에서 극대이자 최대이다.

즉, 점 P가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점일 때, $h(s)$는 최대이다.

182. 정답 ①

$\overset{\frown}{\mathrm{AP}}=2\overset{\frown}{\mathrm{PC}}$이므로

$\angle\mathrm{COP}=\dfrac{\theta}{2}$

두 선분 OC, DP가 서로 평행하므로

$\angle\mathrm{PDA}=\angle\mathrm{COD}$

$\quad=\angle\mathrm{COP}+\angle\mathrm{POA}$

$\quad=\dfrac{\theta}{2}+\theta=\dfrac{3}{2}\theta$

$\overline{\mathrm{PF}}=\sin\theta$이므로 직각삼각형 PDF에서

$\sin(\angle\mathrm{PDA})=\dfrac{\overline{\mathrm{PF}}}{\overline{\mathrm{PD}}}$

$\sin\dfrac{3}{2}\theta=\dfrac{\sin\theta}{\overline{\mathrm{PD}}}$

$\overline{\mathrm{PD}}=\dfrac{\sin\theta}{\sin\dfrac{3}{2}\theta}$

그러므로

$f(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{DF}}\times\overline{\mathrm{PF}}$

$=\dfrac{1}{2}\times\left(\overline{\mathrm{PF}}\times\cos\dfrac{3}{2}\theta\right)\times\sin\theta$

$=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{\sin\theta}{\sin\dfrac{3}{2}\theta}\times\cos\dfrac{3}{2}\theta\right)\times\sin\theta$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sin^2\theta}{\sin\dfrac{3}{2}\theta}\times\cos\dfrac{3}{2}\theta$

한편, 두 삼각형 COE, DPE는 서로 닮음이므로

$\overline{CO}:\overline{DP}=\overline{OE}:\overline{PE}$

이때 $\overline{OE}=y$라 하면 $\overline{PE}=1-y$이므로

$$1:\frac{\sin\theta}{\sin\frac{3}{2}\theta}=y:(1-y)$$

$$1-y=\frac{\sin\theta}{\sin\frac{3}{2}\theta}y$$

$$\left(1+\frac{\sin\theta}{\sin\frac{3}{2}\theta}\right)y=1$$

$$y=\frac{\sin\frac{3}{2}\theta}{\sin\theta+\sin\frac{3}{2}\theta}$$

그러므로

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{OC}\times\overline{OE}\times\sin\frac{\theta}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sin\frac{3}{2}\theta}{\sin\theta+\sin\frac{3}{2}\theta}\times\sin\frac{\theta}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sin\frac{3}{2}\theta\times\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\theta+\sin\frac{3}{2}\theta}$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\times\frac{\sin^2\theta}{\sin\frac{3}{2}\theta}\times\cos\frac{3}{2}\theta}{\frac{1}{2}\times\frac{\sin\frac{3}{2}\theta\times\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\theta+\sin\frac{3}{2}\theta}}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta\times\left(\sin\theta+\sin\frac{3}{2}\theta\right)\times\cos\frac{3}{2}\theta}{\sin^2\frac{3}{2}\theta\times\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\left(\frac{\sin\theta}{\theta}+\frac{3}{2}\times\frac{\sin\frac{3}{2}\theta}{\frac{3}{2}\theta}\right)\times\cos\frac{3}{2}\theta}{\left(\frac{3}{2}\times\frac{\sin\frac{3}{2}\theta}{\frac{3}{2}\theta}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)}$$

$$=\frac{1^2\times\left(1+\frac{3}{2}\right)\times1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{9}{8}}=\frac{20}{9}$$

183. 정답 180

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$a_n=a_1\times r^{n-1}$

조건 (가)에서

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-b_{n+1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(b_k-b_{k+1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\{(b_1-b_2)+(b_2-b_3)+(b_3-b_4)+\cdots+(b_n-b_{n+1})\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(b_1-b_{n+1})$$

주어진 급수의 합이 존재하므로 $\lim_{n\to\infty}b_{n+1}$의 값이 존재한다.

조건 (나)에서 $\lim_{n\to\infty}b_{2n-1}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}b_{n+1}=\lim_{n\to\infty}b_{2n-1}=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 $b_{n+1}=a_{n+1}=a_1\times r^n$ 또는

$b_{n+1}=a_{n+1}{}^2=a_1{}^2\times r^{2n}$

이고, ㉠과 조건 (나)에 의하여

$-1<r<1$

조건 (가)에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-b_{n+1})=\lim_{n\to\infty}(b_1-b_{n+1})$$
$$=b_1=4$$

그러므로 a_1의 값은 다음과 같다.

$a_1>0$일 때, $a_1=b_1=4$

$a_1<0$일 때, $a_1{}^2=4$에서 $a_1=-2$

이때 첫째항 a_1의 값과 r의 부호에 따라 경우를 나누면 다음과 같다.

(i) $a_1=4$, $r>0$인 경우

모든 자연수 n에 대하여 $a_n>0$이므로 $b_n=a_n$

조건 (나)에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$$
$$=\frac{4}{1-r^2}$$

즉, $\frac{4}{1-r^2}=\frac{9}{2}$에서

$r^2=\frac{1}{9}$, $r=\frac{1}{3}$

그런데 $b_2=a_1\times r=\frac{4}{3}$, $b_3=a_1\times r^2=\frac{4}{9}$이므로

$b_2=4b_3$을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_1=4$, $r<0$인 경우

수열 $\{b_n\}$을 나열하면 다음과 같다.

$4,\ 16r^2,\ 4r^2,\ 16r^6,\ 4r^4,\ 16r^{10},\ \cdots$

즉, 모든 자연수 n에 대하여

$b_{2n-1}=a_{2n-1}=4r^{2n-2}$

$b_{2n}=a_{2n}{}^2=16r^{4n-2}$

조건 (나)에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}4r^{2n-2}$$
$$=\frac{4}{1-r^2}$$

즉, $\frac{4}{1-r^2}=\frac{9}{2}$에서

$r^2=\frac{1}{9},\ r=-\frac{1}{3}$

이때 $b_2=16r^2=\frac{16}{9},\ b_3=4r^2=\frac{4}{9}$이므로

$b_2=4b_3$을 만족시킨다.

(iii) $a_1=-2,\ r>0$인 경우

모든 자연수 n에 대하여 $a_n<0$이므로

$b_n=a_n{}^2=4r^{2n-2}$

조건 (나)에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}{}^2$$
$$=\frac{4}{1-r^4}$$

즉, $\frac{4}{1-r^4}=\frac{9}{2}$에서

$r^4=\frac{1}{9},\ r=\frac{1}{\sqrt{3}}$

그런데 $b_2=4r^2=\frac{4}{3},\ b_3=4r^4=\frac{4}{9}$이므로

$b_2=4b_3$을 만족시키지 않는다.

(iv) $a_1=-2,\ r<0$인 경우

수열 $\{b_n\}$을 나열하면 다음과 같다.

$4,\ -2r,\ 4r^4,\ -2r^3,\ 4r^8,\ -2r^5,\ \cdots$

즉, 모든 자연수 n에 대하여

$b_{2n-1}=a_{2n-1}{}^2=4r^{4n-4}$

$b_{2n}=a_{2n}=-2r^{2n-1}$

조건 (나)에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}4r^{4n-4}$$
$$=\frac{4}{1-r^4}$$

즉, $\frac{4}{1-r^4}=\frac{9}{2}$에서

$r^4=\frac{1}{9},\ r=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

이때 $b_2=-2r=\frac{2}{\sqrt{3}},\ b_3=4r^4=\frac{4}{9}$이므로

$b_2=4b_3$을 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에서 $a_1=4,\ r=-\frac{1}{3}$이므로

$a_n=4\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

그러므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}16r^{4n-2}$$
$$=\frac{16r^2}{1-r^4}$$
$$=\frac{16\times\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{81}}=\frac{9}{5}$$

따라서

$$100\times\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}=100\times\frac{9}{5}$$
$$=180$$

184. 정답 24

조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(4,\ 0)$에 대하여 대칭이므로

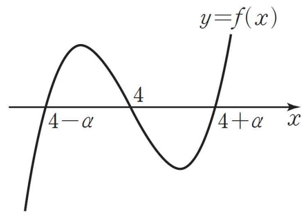
$f(x)=(x-4+\alpha)(x-4)(x-4-\alpha)\ (\alpha\ge 0)$

으로 놓을 수 있다.

그런데 $\alpha=0$이면 $f(x)=(x-4)^3$이고 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

함수 $g(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $|f(g(x))|$는 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

즉, 조건 (나)를 만족시키지 않으므로 $\alpha>0$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



또 $g(x)=kx(\ln x)^2$에서

$g'(x)=k\left\{(\ln x)^2+x\times 2\ln x\times\frac{1}{x}\right\}$

$=k\ln x(\ln x+2)$

$g'(x)=0$

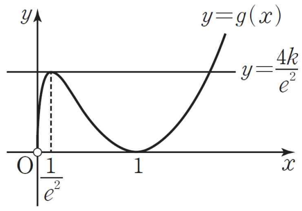
$\ln x=0$ 또는 $\ln x=-2$

$x=1$ 또는 $x=-1$

$x>0$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e^2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$\cdots$
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

$g\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{4k}{e^2}$, $g(1)=0$이고, $\lim_{x\to0+}x(\ln x)^2=0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.

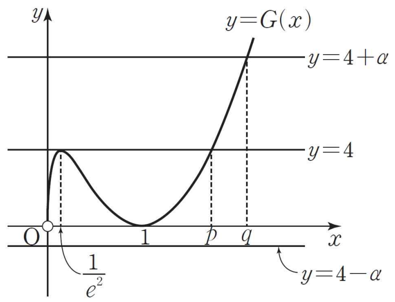


모든 양수 x에 대하여 $g(x)\ge0$이므로 조건 (나)를 만족시키려면 $4-\alpha\le0$이고, $\frac{4k}{e^2}\le4$이어야 한다.

즉, $\alpha\ge4$이고, $0<k\le e^2$ $\cdots\cdots$ ㉠

k의 최댓값이 e^2이므로

$G(x)=e^2x(\ln x)^2$



함수 $y=G(x)$의 그래프와 직선 $y=4$가 만나는 점 중 x좌표가 $\frac{1}{e^2}$보다 큰 점의 x좌표를 p, 함수 $y=G(x)$의 그래프와 직선 $y=4+\alpha$가 만나는 점의 x좌표를 q라 하면 함수 $|f(G(x))|$가 $x=p$, $x=q$에서만 미분가능하지 않으므로

$a_1=p$, $a_2=q$

한편, $f(x)=(x-4+\alpha)(x-4)(x-4-\alpha)$에서

$f(x+4)=x(x+\alpha)(x-\alpha)=x^3-\alpha^2x$

이므로

$f'(x+4)=3x^2-\alpha^2$

이때 $G(a_1)=4$, $G(a_2)=4+\alpha$이므로

$f'(G(a_1))+f'(G(a_2))$

$=f'(4)+f'(4+\alpha)$

$=-\alpha^2+2\alpha^2$

$=\alpha^2$

즉, $\alpha^2=25$에서 ㉠에 의하여

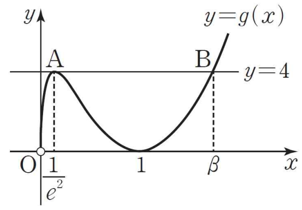
$\alpha=5$

따라서 $f(x)=(x+1)(x-4)(x-9)$이므로

$f(3)=4\times(-1)\times(-6)=24$

[참고]

$i(x)=|f(g(x))|$라 하자.



$\frac{4k}{e^2}=4$, 즉 $k=e^2$일 때, 그림과 같이 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=4$와 서로 다른 두 점 A, B에서 만나고, 이때

$\mathrm{A}\left(\frac{1}{e^2},\ 4\right)$, $\mathrm{B}(\beta,\ 4)$ $\left(\beta>\frac{1}{e^2}\right)$이라 하자.

함수 $i(x)$의 $x=\frac{1}{e^2}$, $x=\beta$에서의 미분가능성을 살펴보면 다음과 같다.

실수 h에 대하여 $h\to0$일 때, $f\left(g\left(\frac{1}{e^2}+h\right)\right)>0$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{i\left(\frac{1}{e^2}+h\right)-i\left(\frac{1}{e^2}\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\left|f\left(g\left(\frac{1}{e^2}+h\right)\right)\right|-\left|f\left(g\left(\frac{1}{e^2}\right)\right)\right|}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f\left(g\left(\frac{1}{e^2}+h\right)\right)-f\left(g\left(\frac{1}{e^2}\right)\right)}{h}$$

$$=f'\left(g\left(\frac{1}{e^2}\right)\right)\times g'\left(\frac{1}{e^2}\right)$$

$$=f'(4)\times g'\left(\frac{1}{e^2}\right)=0$$

즉, 함수 $i(x)$는 $x=\frac{1}{e^2}$에서 미분가능하다.

또 실수 h에 대하여

$h\to0+$ 일 때 $f((\beta+h))<0$,

$h\to0-$ 일 때 $f((\beta+h))>0$

이므로

$$\lim_{i\to0+}\frac{i(\beta+h)-i(\beta)}{h}$$

$$=\lim_{i\to0+}\frac{|f(g(\beta+h))|-|f(g(\beta))|}{h}$$

$$=-\lim_{i\to0+}\frac{f(g(\beta+h))-f(g(\beta))}{h}$$

$$=-f'(g(\beta))\times g'(\beta)$$

$$=-f'(4)\times g'(\beta)>0$$

$$\lim_{i\to0-}\frac{i(\beta+h)-i(\beta)}{h}$$

$=\lim\limits_{i\to 0-}\dfrac{|f(g(\beta+h))|-|f(g(\beta))|}{h}$

$=\lim\limits_{i\to 0-}\dfrac{f(g(\beta+h))-f(g(\beta))}{h}$

$=f'(g(\beta))\times g'(\beta)$

$=f'(4)\times g'(\beta)<0$

즉, $\lim\limits_{i\to 0+}\dfrac{i(\beta+h)-i(\beta)}{h}\neq\lim\limits_{i\to 0-}\dfrac{i(\beta+h)-i(\beta)}{h}$

이므로 함수 $i(x)$는 $x=\beta$에서 미분가능하지 않다.
같은 방법으로 $4-\alpha=0$, 즉 $\alpha=4$일 때 함수 $i(x)$는 $x=1$에서 미분가능함을 보일 수 있다.

185. 정답 ②

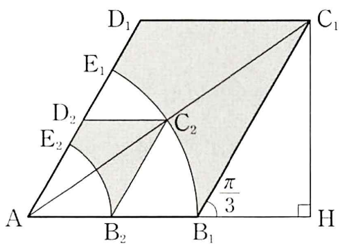
$\overline{AB_1}=3$, $\overline{AD_1}=4$, $\angle D_1AB_1=\dfrac{\pi}{3}$이므로

평행사변형 $AB_1C_1D_1$의 넓이는 $3\times 4\times sin\dfrac{\pi}{3}=6\sqrt{3}$

부채꼴 AB_1E_1의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times 3^2\times\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3}{2}\pi$

따라서 $S_1=6\sqrt{3}-\dfrac{3}{2}\pi$

그림과 같이 점 C_1에서 직선 AB_1에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 C_1B_1H에서 $\overline{C_1B_1}=4$,



$\angle C_1B_1H=\dfrac{\pi}{3}$이므로

$\overline{C_1H}=4\times\sin\dfrac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$

$\overline{B_1H}=4\times\cos\dfrac{\pi}{3}=2$

$\overline{AH}=\overline{AB_1}+\overline{B_1H}=3+2=5$이므로 $\overline{AC_1}=\sqrt{5^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{37}$

이때 $\overline{AC_1}:\overline{AC_2}=\sqrt{37}:3$이므로 그림 R_n에서 새로 색칠한 부분의 넓이를 a_n이라 하면

$a_1:a_n=(\sqrt{37})^2:3^2$, 즉 $\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{9}{37}$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1=S_1=6\sqrt{3}-\dfrac{3}{2}\pi$이고 공비가 $\dfrac{9}{37}$인 등비수열이므로

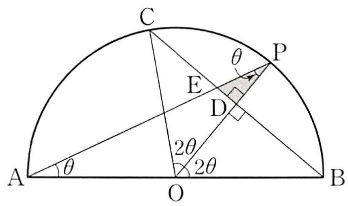
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{6\sqrt{3}-\frac{3}{2}\pi}{1-\frac{9}{37}}=\frac{111(4\sqrt{3}-\pi)}{56}$$

186. 정답 ④

삼각형 OPA에서 $\overline{OA}=\overline{OP}$이므로 $\angle OPA=\theta$

$\angle POB=\angle PAO+\angle OPA$

$=\theta+\theta=2\theta$



$\overline{PB}=\overline{PC}$이므로

$\angle POC=\angle POB=2\theta$

삼각형 OBC는 $\overline{OB}=\overline{OC}$인 이등변삼각형이므로 꼭지각의 이등분선은 밑변을 수직이등분한다.

즉, $\overline{OD}\perp\overline{BC}$이므로 삼각형 OBD와 삼각형 PEF는 각각 $\angle ODB$, $\angle PDE$가 직각인 직각삼각형이다.

직각삼각형 OBD에서 $\overline{OB}=1$이므로 $\overline{OD}=\cos 2\theta$

직각삼각형 PED에서

$\overline{PD}=\overline{OP}-\overline{OD}=1-\cos 2\theta$

따라서 직각삼각형 PED의 넓이는

$S(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\overline{PD}\times\overline{ED}$

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{PD}\times\overline{PD}\tan\theta$

$=\dfrac{1}{2}\times(1-\cos 2\theta)^2\times\tan\theta$

이므로

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^5}=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{1}{2}\times\frac{(1-\cos 2\theta)^2}{\theta^4}\times\frac{\tan\theta}{\theta}\right\}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left[\frac{1}{2}\times\frac{\{(1-\cos 2\theta)(1+\cos 2\theta)\}^2}{\theta^4(1+\cos 2\theta)^2}\times\frac{\tan\theta}{\theta}\right]$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{1}{2}\times\frac{\sin^4 2\theta}{\theta^4(1+\cos 2\theta)^2}\times\frac{\tan\theta}{\theta}\right\}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{1}{2}\times 16\times\left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\right)^4\times\frac{1}{(1+\cos 2\theta)^2}\times\frac{\tan\theta}{\theta}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\times 16\times 1^4\times\frac{1}{2^2}\times 1$$

$$=2$$

187. 정답 20

조건 (가)에서 $f(\pi)=a\pi\sin b\pi=0$이므로 b는 자연수이다. 모든 실수 x에 대하여 $|f(x)|=|ax\sin bx|\leq|ax|$이므로 조건 (나)에 의하여 $|ax|\leq|x|$이고, $a>0$이므로

$0<a\leq 1$ …… ㉠

$f(x)=ax\sin bx$에서

$f'(x)=a\sin bx+abx\cos bx$이므로

$f'(x)=0$에서

$a\sin bx+abx\cos bx=0$ …… ㉡

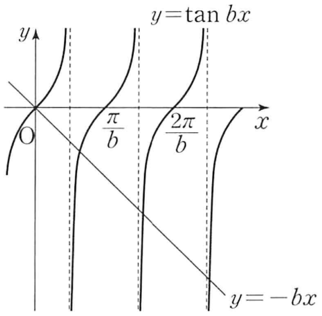
$\cos bx=0$이면 $|\sin bx|=1$이므로 ㉡에서 $a=0$이 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

따라서 $\cos bx\neq 0$이고 ㉡에서

$\dfrac{a\sin bx+abx\cos bx}{a\cos bx}=0$

$\frac{\sin bx}{\cos bx}+bx=0$

$\tan bx=-bx$



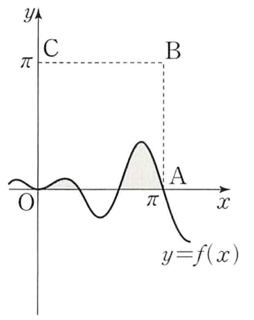
곡선 $y=\tan bx$와 직선 $y=-bx$의 교점의 x좌표 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 x_1, x_2, x_3, $\cdots$이라 하자.

$x\geq 0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

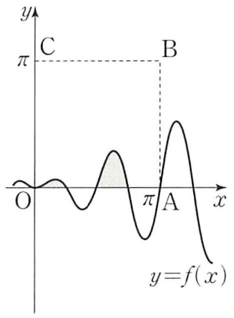
x	0	$\cdots$	x_1	$\cdots$	x_2	$\cdots$	x_3	$\cdots$
$f'(x)$	0	+	0	−	0	+	0	−
$f(x)$	0	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

$0\leq x\leq \pi$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표는 $ax\sin bx=0$에서 $x=0$, $\frac{\pi}{b}$, $\frac{2\pi}{b}$, $\cdots$, $\frac{b\pi}{b}$이고,

$0<x_1<\frac{\pi}{b}<x_2<\frac{2\pi}{b}<x_3<\frac{3\pi}{b}<\cdots<\frac{b\pi}{b}=\pi$이므로 조건 (다)를 만족시키려면 $b=3$ 또는 $b=4$이어야 한다.



[$b=3$일 때]



[$b=4$일 때]

한편, $\int f(x)dx=\int ax\sin bx dx$에서

$u(x)=ax$, $v'(x)=\sin bx$로 놓으면

$u'(x)=a$, $v(x)=-\frac{1}{b}\cos bx$이므로

$\int ax\sin bx dx=-\frac{a}{b}x\cos bx+\int\frac{a}{b}\cos bx dx$

$=-\frac{a}{b}x\cos bx+\frac{a}{b^2}\sin bx+C$ (단, C는 적분상수)

따라서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분과 정사각형 OABC의 내부의 공통부분의 넓이는

$\int_0^{\frac{\pi}{b}}f(x)dx+\int_{\frac{2\pi}{b}}^{\frac{3\pi}{b}}f(x)dx$

$=\left[-\frac{a}{b}x\cos bx+\frac{a}{b^2}\sin bx\right]_0^{\frac{\pi}{b}}+\left[-\frac{a}{b}x\cos bx+\frac{a}{b^2}\sin bx\right]_{\frac{2\pi}{b}}^{\frac{3\pi}{b}}$

$=\frac{a\pi}{b^2}+\left(\frac{2a\pi}{b^2}+\frac{2a\pi}{b^2}\right)$

$=\frac{6a\pi}{b^2}$

(i) $b=3$일 때

$\frac{6a\pi}{3^2}\leq\frac{\pi}{12}$에서 $0<a\leq\frac{1}{8}$이므로

$72a+b\leq 72\times\frac{1}{8}+3=12$

(ii) $b=4$일 때

$\frac{6a\pi}{4^2}\leq\frac{\pi}{12}$에서 $0<a\leq\frac{2}{9}$이므로

$72a+b\leq 72\times\frac{2}{9}+4=20$

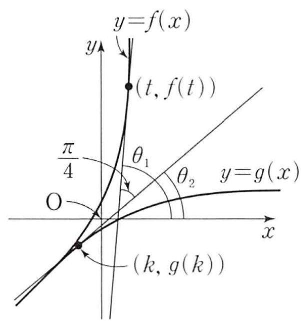
(i), (ii)에서 $72a+b$의 최댓값은 20이다.

188. 정답 25

$f(x)=e^x+x$에서 $f'(x)=e^x+1>1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선과 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 θ_1이라 하면

$\tan\theta_1=f'(t)=e^t+1$, $\frac{\pi}{4}<\theta_1<\frac{\pi}{2}$

함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 점 $(k,\ g(k))$에서의 접선과 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 θ_2라 하면



$\tan\theta_2=g'(k)$, $0<\theta_2<\frac{\pi}{4}$

이때 $0<\theta_2<\frac{\pi}{4}<\theta_1<\frac{\pi}{2}$이므로

$\theta_2=\theta_1-\frac{\pi}{4}$

$g'(k)=\tan\theta_2=\tan\left(\theta_1-\frac{\pi}{4}\right)$

$=\frac{\tan\theta_1-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\theta_1\tan\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{\tan\theta_1-1}{1+\tan\theta_1}$

$=\frac{(e^t+1)-1}{1+(e^t+1)}=\frac{e^t}{e^t+2}$

$f'(g(k))\times g'(k)=1$이므로

$f'(g(k))=\frac{1}{g'(k)}=\frac{e^t+2}{e^t}=\frac{2}{e^t}+1$

$e^{g(k)}+1=\dfrac{2}{e^t}+1$, $e^{g(k)}=\dfrac{2}{e^t}$

$g(k)=\ln\dfrac{2}{e^t}=\ln2-\ln e^t=-t+\ln2$

즉, $k=f(-t+\ln2)$이므로 $h(t)=f(-t+\ln2)$

$h'(t)=f'(-t+\ln2)\times(-t+\ln2)'$

$\quad=-f'(-t+\ln2)$

따라서

$$h'(\ln8)=-f'(-\ln8+\ln2)=-f'\left(\ln\frac{1}{4}\right)$$

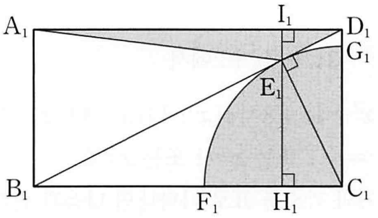
$$=-\left(e^{\ln\frac{1}{4}}+1\right)=-\left(\frac{1}{4}+1\right)=-\frac{5}{4}$$

이므로

$$16\times\{h'(\ln8)\}^2=16\times\left(-\frac{5}{4}\right)^2=25$$

189. 정답 ①

그림 R_n에서 새로 색칠된 부분의 넓이를 a_n이라 하자.



점 C_1에서 선분 B_1D_1에 내린 수선의 발이 E_1이다.

두 직각삼각형 $B_1D_1C_1$, $B_1C_1E_1$은 서로 닮은 도형이므로

$\overline{B_1D_1}:\overline{D_1C_1}=\overline{B_1C_1}:\overline{C_1E_1}$

직각삼각형 $B_1C_1D_1$에서

$\overline{B_1D_1}=\sqrt{\overline{B_1C_1}^2+\overline{C_1D_1}^2}=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5}$

이므로

$5\sqrt{5}:5=10:\overline{C_1E_1}$에서 $\overline{C_1E_1}=2\sqrt{5}$

점 E_1에서 두 선분 B_1C_1, A_1D_1에 내린 수선의 발을 각각 H_1, I_1이라 하면 두 직각삼각형 $B_1C_1E_1$, $E_1C_1H_1$은 서로 닮은 도형이므로

$\overline{B_1C_1}:\overline{C_1E_1}=\overline{E_1C_1}:\overline{C_1H_1}$

$10:2\sqrt{5}=2\sqrt{5}:\overline{C_1H_1}$에서 $\overline{C_1H_1}=2$

직각삼각형 $C_1E_1H_1$에서

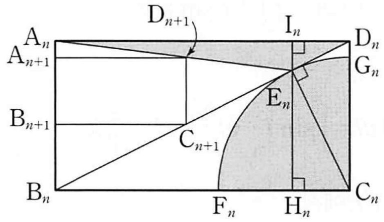
$\overline{E_1H_1}=\sqrt{\overline{C_1E_1}^2-\overline{C_1H_1}^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}=4$

$\overline{E_1I_1}=\overline{C_1D_1}-\overline{E_1H_1}=5-4=1$

그러므로

$$a_1=\frac{1}{4}\times(2\sqrt{5})^2\pi+\frac{1}{2}\times10\times1=5\pi+5$$

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다. 점 E_n에서 두 선분 B_nC_n, A_nD_n에 내린 수선의 발을 각각 H_n, I_n이라 하자.



$\overline{A_nB_n}=x$, $\overline{B_nC_n}=2x$라 하고 $\overline{A_{n+1}B_{n+1}}=y$, $\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=2y$라 하면 $\overline{E_nH_n}=\dfrac{4}{5}x$, $\overline{E_nI_n}=\dfrac{1}{5}x$이고 $\overline{A_nI_n}=\dfrac{8}{5}x$이다.

두 직각삼각형 $B_nD_nC_n$, $C_{n+1}B_nB_{n+1}$은 서로 닮은 도형이므로

$\overline{B_nC_n}:\overline{C_nD_n}=\overline{C_{n+1}B_{n+1}}:\overline{B_{n+1}B_n}$

$2x:x=2y:\overline{B_nB_{n+1}}$에서 $\overline{B_nB_{n+1}}=y$

또한 두 직각삼각형 $A_nE_nI_n$, $D_{n+1}A_nA_{n+1}$은 서로 닮은 도형이므로

$\overline{A_nI_n}:\overline{E_nI_n}=\overline{D_{n+1}A_{n+1}}:\overline{A_nA_{n+1}}$

$\dfrac{8}{5}x:\dfrac{1}{5}x=2y:\overline{A_nA_{n+1}}$에서 $\overline{A_nA_{n+1}}=\dfrac{1}{4}y$

$\overline{A_nB_n}=\overline{A_nA_{n+1}}+\overline{A_{n+1}B_{n+1}}+\overline{B_{n+1}B_n}$이므로

$x=\dfrac{1}{4}y+y+y=\dfrac{9}{4}y$에서 $y=\dfrac{4}{9}x$

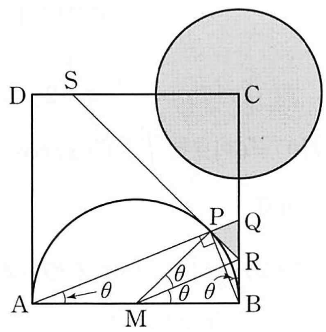
두 직사각형 $A_nB_nC_nD_n$과 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 닮음비가 $9:4$이므로 그림 R_{n+1}에서 추가로 색칠되는 도형의 넓이는

$$a_{n+1}=\left(\frac{4}{9}\right)^2a_n=\frac{16}{81}a_n$$

그러므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $5(\pi+1)$이고 공비가 $\dfrac{16}{81}$인 등비수열이다.

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{5(\pi+1)}{1-\frac{16}{81}}=\frac{81}{13}(\pi+1)$

190. 정답 ②



직각삼각형 ABQ에서

$\tan\theta=\dfrac{\overline{BQ}}{\overline{AB}}$

이때 $\overline{AB}=2$이므로 $\overline{BQ}=2\tan\theta$

삼각형 ABP가 $\angle APB=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형이므로 $\angle PBQ=\theta$이고, 직각삼각형 BPQ에서

$\sin\theta=\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{BQ}}$이므로

$\overline{PQ}=\overline{BQ}\sin\theta=2\tan\theta\sin\theta$

선분 AB의 중점을 M이라 하자.

$\angle BMP=2\theta$이고 두 직각삼각형 MBR, MPR이 서로 합동이므로

$\angle BMR=\angle PMR=\theta$

직각삼각형 MBR에서

$\tan\theta=\dfrac{\overline{BR}}{\overline{MB}}$

이때 $\overline{MB}=1$이므로 $\overline{BR}=\tan\theta$

$\overline{QR}=\overline{BQ}-\overline{BR}=2\tan\theta-\tan\theta=\tan\theta$

$\angle BQA=\dfrac{\pi}{2}-\theta$이므로 삼각형 PQR의 넓이는

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{QR}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2\sin^2\theta}{\cos\theta}\times\tan\theta\times\cos\theta$$

$$=\sin^2\theta\tan\theta$$

한편, $\angle BRP=\pi-2\theta$이므로 $\angle QRP=2\theta$이고

$\overline{CR}=2-\overline{BR}=2-\tan\theta$

직각삼각형 RCS에서 $\tan2\theta=\dfrac{\overline{CS}}{\overline{CR}}$이므로

$\overline{CS}=\tan2\theta\times\overline{CR}=\tan2\theta(2-\tan\theta)$

점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\dfrac{1}{2}\overline{CS}$인 원의 넓이는

$$T(\theta)=\left\{\frac{\tan2\theta(2-\tan\theta)}{2}\right\}^2\pi$$

$$=\frac{\tan^2 2\theta(4-4\tan\theta+\tan^2\theta)}{4}\pi$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta\times T(\theta)}{S(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta\times\dfrac{\tan^2 2\theta(4-4\tan\theta+\tan^2\theta)}{4}\pi}{\sin^2\theta\tan\theta}$$

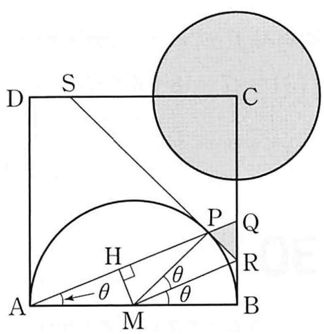
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(\dfrac{\tan2\theta}{2\theta}\right)^2\times(4-4\tan\theta+\tan^2\theta)\pi}{\left(\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\dfrac{\tan\theta}{\theta}}$$

$$=\frac{1^2\times4\pi}{1^2\times1}=4\pi$$

[참고]

선분 PQ의 길이를 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다.

그림과 같이 선분 AB의 중점을 M이라 하고 점 M에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H라 하자.



직각삼각형 AMH에서

$\cos\theta=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{AM}}$

이때 $\overline{AM}=1$이므로

$\overline{AH}=\cos\theta$

$\overline{AP}=2\overline{AH}=2\cos\theta$

직각삼각형 ABQ에서

$\cos\theta=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AQ}}$, $\tan\theta=\dfrac{\overline{BQ}}{\overline{AB}}$

이때 $\overline{AB}=2$이므로

$\overline{AQ}=\dfrac{2}{\cos\theta}$, $\overline{BQ}=2\tan\theta$

$$\overline{PQ}=\overline{AQ}-\overline{AP}=\frac{2}{\cos\theta}-2\cos\theta=2\left(\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}\right)=\frac{2\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

191. 정답 15

최고차항의 계수가 1이고 상수항이 0인 삼차함수 $f(x)$는

$f(x)=x^3+ax^2+bx$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

$g(x)=\dfrac{x^3+ax^2+bx}{e^x}$에서 $g(0)=0$이고,

$$g'(x)=\frac{(3x^2+2ax+b)e^x-(x^3+ax^2+bx)e^x}{e^{2x}}$$

$$=\frac{-x^3+(3-a)x^2+(2a-b)x+b}{e^x}$$

$g(2)=\dfrac{8+4a+2b}{e^2}$,

$$g'(2)=\frac{-8+(12-4a)+(4a-2b)+b}{e^2}=\frac{-b+4}{e^2}$$

이고 조건 (가)에서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ g(2))$에서의 접선이 원점을 지나므로

$$g'(2)=\frac{g(2)-g(0)}{2-0}=\frac{g(2)}{2}$$

즉, $\dfrac{-b+4}{e^2}=\dfrac{4+2a+b}{e^2}$에서

$a+b=0,\ b=-a$ …… ㉠

또한 점 $(2,\ g(2))$가 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이므로 $g''(2)=0$이어야 한다.

$g'(x)=\dfrac{-x^3+(3-a)x^2+3ax-a}{e^x}$에서

$g''(x)$

$$=\frac{\{-3x^2+(6-2a)x+3a\}e^x-\{-x^3+(3-a)x^2+3ax-a\}e^x}{e^{2x}}$$

$$=\frac{x^3+(a-6)x^2+(-5a+6)x+4a}{e^x}$$

이므로

$$g''(2)=\frac{8+(4a-24)+(-10a+12)+4a}{e^2}=\frac{-2a-4}{e^2}=0$$

에서 $a=-2$이고, ㉠에서 $b=2$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+2x$이므로

$f(3)=27-18+6=15$

192. 정답 4

$$f(x)\cos x=x\cos^2 x-\sin x\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(t)\,dt-\int_0^x f(t)\sin t\,dt \quad\cdots\cdots ㉠$$

㉠에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=0$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)\cos x-f(x)\sin x$

$=\cos^2 x-2x\sin x\cos x-\cos x\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(t)\,dt-f(x)\sin x$

$f'(x)\cos x=\cos^2 x-2x\sin x\cos x-\cos x\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(t)\,dt$ …… ㉡

모든 실수 x에 대하여 ㉡이 성립하므로

$f'(x)=\cos x-2x\sin x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(t)\,dt$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(t)\,dt=k$ (k는 상수)라 하면

$f'(x)=\cos x-2x\sin x-k$이므로

$k=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t-2t\sin t-k)\,dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t-k)\,dt-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin t\,dt$ …… ㉢

이때

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t-k)\,dt=\Big[\sin t-kt\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1-\frac{\pi}{2}k$

이고, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin t\,dt$에서

$u(t)=t$, $v'(t)=\sin t$로 놓으면

$u'(t)=1$, $v(t)=-\cos t$이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin t\,dt=\Big[-t\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt$

$=0+\Big[\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=1$

그러므로 ㉢에서

$k=\left(1-\frac{\pi}{2}k\right)-2\times 1$

$\left(1+\frac{\pi}{2}\right)k=-1$

$k=-\frac{2}{\pi+2}$

㉠의 양변에 $x=\frac{\pi}{2}$를 대입하면

$0=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(t)\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\sin t\,dt$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\sin t\,dt=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(t)\,dt=-k=\frac{2}{\pi+2}$

즉, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin x\,dx=\frac{2}{\pi+2}$

이때 $u(x)=f(x)$, $v'(x)=\sin x$로 놓으면

$u'(x)=f'(x)$, $v(x)=-\cos x$이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin x\,dx=\Big[-f(x)\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(x)\cos x\,dx$

$=f(0)+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(x)\cos x\,dx$

$=\frac{2}{\pi+2}$

$f(0)=0$이므로 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(x)\cos x\,dx=\frac{2}{\pi+2}$

따라서

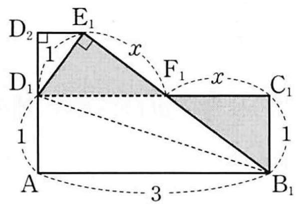
$(\pi+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{f(x)\sin x+f'(x)\cos x\}\,dx$

$=(\pi+2)\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(x)\cos x\,dx\right\}$

$=(\pi+2)\left(\frac{2}{\pi+2}+\frac{2}{\pi+2}\right)$

$=4$

193. 정답 ②



삼각형 $B_1C_1F_1$과 삼각형 $D_1E_1F_1$은 서로 합동이므로

$\overline{C_1F_1}=\overline{E_1F_1}=x$라 하면

$\overline{B_1F_1}=\overline{D_1F_1}=3-x$

피타고라스 정리에 의하여

$1^2+x^2=(3-x)^2$이므로

$1+x^2=9-6x+x^2$

$6x=8$

$x=\frac{4}{3}$

이때 색칠되어 있는 두 직각삼각형의 넓이의 합은

$2\times\frac{1}{2}\times 1\times\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$

두 삼각형 $D_1E_1D_2$, $F_1D_1E_1$이 서로 닮은 도형이므로

$\overline{D_1E_1}:\overline{D_1D_2}=\overline{D_1F_1}:\overline{E_1F_1}$

$1:\overline{D_1D_2}=\left(3-\frac{4}{3}\right):\frac{4}{3}=5:4$에서

$\overline{D_1D_2}=\frac{4}{5}$이므로

$\overline{AD_1}:\overline{AD_2}=1:\left(1+\frac{4}{5}\right)=1:\frac{9}{5}$

즉, 두 직사각형 $AB_1C_1D_1$과 $AB_2C_2D_2$의 닮음비가 $1:\frac{9}{5}$이므로

넓이의 비는 $1:\left(\frac{9}{5}\right)^2$이다.

수열 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{3}{4}$이고 공비가 $\left(\frac{5}{9}\right)^2$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}=\frac{\frac{3}{4}}{1-\left(\frac{5}{9}\right)^2}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{56}{81}}=\frac{243}{224}$$

194. 정답 ⑤

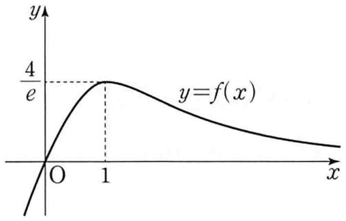
$f(x)=4xe^{-x}$에서

$f'(x)=4e^{-x}-4xe^{-x}=4(1-x)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$



함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 만나는 모든 점에서의 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기가 직선 $y=g(x)$의 기울기와 일치해야 한다.

즉, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 만나는 점은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이고, 이 변곡점에서의 접선의 기울기가 직선 $y=g(x)$의 기울기와 일치해야 한다.

$f''(x)=4\times(-1)\times e^{-x}+4(1-x)\times(-e^{-x})$

$\quad=4(x-2)e^{-x}$

$f''(x)=0$에서 $x=2$

$x=2$의 좌우에서 함수 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 $(2,\ f(2))$, 즉 $(2, 8e^{-2})$이고, 이 변곡점에서의 접선의 방정식은

$y-f(2)=f'(2)\times(x-2)$

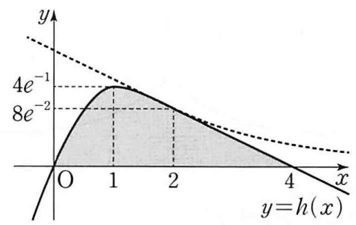
$y-8e^{-2}=-4e^{-2}(x-2)$

$y=-4e^{-2}(x-4)$

즉, $g(x)=-4e^{-2}x+16e^{-2}$이므로

$$h(x)=\begin{cases}4xe^{-x} & (x\le 2)\\ -4e^{-2}(x-4) & (x>2)\end{cases}$$

이고 함수 $h(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=h(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^4 h(x)dx=\int_0^2 4xe^{-x}dx+\int_2^4\{-4e^{-2}(x-4)\}dx$$

$\int_0^2 xe^{-x}dx$에서

$u(x)=x,\ v'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$u'(x)=1,\ v(x)=-e^{-x}$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^2 xe^{-x}dx&=\Big[-xe^{-x}\Big]_0^2-\int_0^2\{1\times(-e^{-x})\}dx\\&=-2e^{-2}+\int_0^2 e^{-x}dx\\&=-2e^{-2}+\Big[-e^{-x}\Big]_0^2\\&=-2e^{-2}-e^{-2}+1\\&=-3e^{-2}+1\end{aligned}$$

$\int_2^4\{-4e^{-2}(x-4)\}dx$의 값은 밑변의 길이가 2이고 높이가 $8e^{-2}$인 직각삼각형의 넓이와 같으므로

$$\int_2^4\{-4e^{-2}(x-4)\}dx=\frac{1}{2}\times2\times8e^{-2}=8e^{-2}$$

따라서

$$\begin{aligned}\int_0^4 h(x)dx&=\int_0^2 4xe^{-x}dx+\int_2^4\{-4e^{-2}(x-4)\}dx\\&=4\times\int_0^2 xe^{-x}dx+\int_2^4\{-4e^{-2}(x-4)\}dx\\&=4\times(-3e^{-2}+1)+8e^{-2}\\&=4-4e^{-2}\\&=4-\frac{4}{e^2}\end{aligned}$$

195. 정답 51

$g(x)=(1+\ln3)f(x)-f(x)\ln f(x)$에서

$g'(x)=(1+\ln3)f'(x)-f'(x)\times\ln f(x)-f(x)\times\frac{f'(x)}{f(x)}$

$\quad=f'(x)\times\{\ln3-\ln f(x)\}$

$g'(x)=0$에서 $f'(x)=0$ 또는 $f(x)=3$

조건 (가)에서 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 가지므로

$g'(3)=0$이다.

$g'(3)=0$이므로 $f'(3)=0$ 또는 $f(3)=3$

이때 $f'(3)\neq0$이라 가정하면 $f(3)=3$이다.

(i) $\alpha>3$에서 $f'(\alpha)=0$인 경우

직선 $x=\alpha$가 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축이므로 $f'(3)<0$이고 $x=3$의 좌우에서 $\ln3-\ln f(x)$의 값이 음에서 양으로 바뀌므로 $g'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌고, 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 극댓값을 갖게 되어 조건 (가)에 모순이다.

(ii) $\alpha<3$에서 $f'(\alpha)=3$인 경우

직선 $x=\alpha$가 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축이므로

$f'(3)>0$이고 $x=3$의 좌우에서 $\ln3-\ln f(x)$의 값이 양에서 음으로 바뀌므로 $g'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌고, 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 극댓값을 갖게 되어 조건 (가)에 모순이다.

(i), (ii)에서 모두 조건 (가)에 모순이므로 $f'(3)=0$이다.

$x=3$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로

$g'(x)=f'(x)\times\{\ln3-\ln f(x)\}$에서 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 극솟값을 가지려면 $\ln3-\ln f(3)>0$이어야 한다.

즉, $f(3)<3$이므로 이차방정식 $f(x)=3$을 만족시키는 서로 다른 두 실근이 존재한다. 이차방정식 $f(x)=3$을 만족시키는 서로 다른 두 실근을 α_1, α_2라 하자.

이때 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=3$의 두 교점은 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로

$\alpha_1+\alpha_2=6$

조건 (나)에 의하여

$3\alpha_1\alpha_2=24$이므로 $\alpha_1\alpha_2=8$

따라서 $f(x)-3=x^2-6x+8$에서

$f(x)=x^2-6x+11$이므로

$f(10)=10^2-6\times10+11=51$

[참고]

함수 $g(x)$의 이계도함수를 이용하여 다음과 같이 $f'(3)=0$임을 구할 수도 있다.

$g'(x)=f'(x)\times\{\ln3-\ln f(x)\}$에서

$$g''(x)=f''(x)\times\{\ln3-\ln f(x)\}+f'(x)\times\left\{-\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}$$

조건 (가)에서 $g'(3)=0$이므로 $f'(3)=0$ 또는 $f(3)=3$

$f'(3)\neq0$이라 가정하면 $f(3)=3$이므로

$$g''(3)=-\frac{\{f'(3)\}^2}{f(3)}<0$$

즉, 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 극댓값을 갖게 되어 조건 (가)에 모순이다.

그러므로 $f'(3)=0$

196. 정답 8

$f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{e^x}$에서

$$f'(x)=\frac{(x^2-x+1)'\times e^x-(x^2-x+1)\times(e^x)'}{(e^x)^2}$$

$$=\frac{(2x-1)e^x-(x^2-x+1)e^x}{e^{2x}}$$

$$=-\frac{x^2-3x+2}{e^x}$$

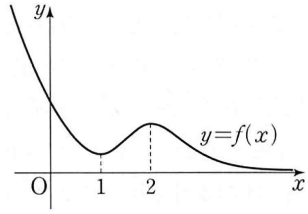
$$=-\frac{(x-1)(x-2)}{e^x}$$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

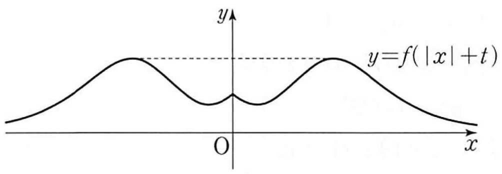
함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$$f(|x|+t)=\begin{cases}f(-x+t) & (x<0)\\ f(x+t) & (x\geq0)\end{cases}$$에서 함수 $y=f(x+t)$ $(x\geq0)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-t$만큼 평행이동한 그래프의 $x\geq0$인 부분이고, 함수 $y=f(-x+t)$ $(x<0)$의 그래프는 함수 $y=f(x+t)$ $(x>0)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프이다.

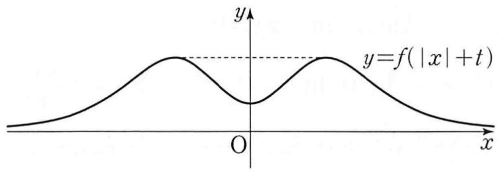
실수 t의 값에 따라 함수 $y=f(|x|+t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

(i) $t<1$일 때



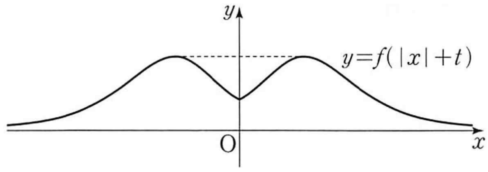
함수 $f(|x|+t)$가 극대인 x의 값은 3개이고 극소인 x의 값은 2개이므로 $g(t)=5$

(ii) $t=1$일 때



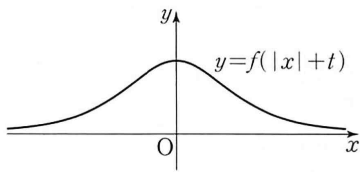
함수 $f(|x|+t)$가 극대인 x의 값은 2개이고 극소인 x의 값은 1개이므로 $g(t)=3$

(iii) $1<t<2$일 때



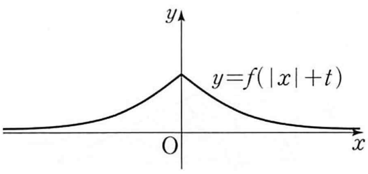
함수 $f(|x|+t)$가 극대인 x의 값은 2개이고 극소인 x의 값은 1개이므로 $g(t)=3$

(iv) $t=2$일 때



함수 $f(|x|+t)$가 극대인 x의 값은 1개이고 극소인 x의 값은 0개이므로 $g(t)=1$

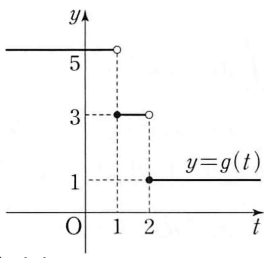
(v) $t>2$일 때



함수 $f(|x|+t)$가 극대인 x의 값은 1개이고 극소인 x의 값은 0개이므로 $g(t)=1$

(i)~(v)에 의하여 함수 $g(t)$와 그 그래프는 다음과 같다.

$$g(t)=\begin{cases} 5 & (t<1) \\ 3 & (1\le t<2) \\ 1 & (t\ge 2) \end{cases}$$



함수 $g(t)$는 $t=1$과 $t=2$에서 불연속이고, 함수 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $h(1)=0$이고 $h(2)=0$이어야 하므로 $h(x)=(x-1)(x-2)$이다.

따라서 $h(0)+h(4)=2+6=8$

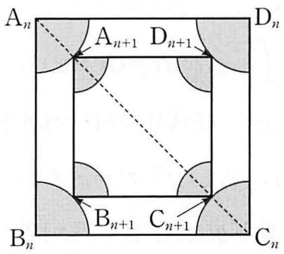
197. 정답 ③

그림 R_1에서 사분면의 반지름의 길이는 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 한 변의 길이의 $\frac{1}{4}$이므로 사분원의 반지름의 길이는 1이다.

그러므로 색칠한 네 개의 사분원의 넓이의 합은

$$S_1=\pi\times 1^2\times\frac{1}{4}\times 4=\pi$$

한편, 그림에서 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 대각선의 길이를 l_n이라 하고 정사각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 대각선의 길이를 l_{n+1}이라 하면 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 한 변의 길이는 $\frac{1}{\sqrt{2}}l_n$이고 사분원의 반지름의 길이는



$$\frac{1}{\sqrt{2}}l_n\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4\sqrt{2}}l_n\text{이므로}$$

$$l_{n+1}=l_n-2\times\frac{1}{4\sqrt{2}}l_n=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)l_n$$

즉, 두 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$, $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 닮음비는 $1\ :\ \left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$이므로 넓이의 비는 $1\ :\ \left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2$,

즉 $1\ :\ \left(\frac{9}{8}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 π이고 공비가 $\frac{9}{8}-\frac{\sqrt{2}}{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제$n$항까지의 합과 같으므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\pi}{1-\left(\frac{9}{8}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{\pi}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{8}}$$

$$=\frac{8}{4\sqrt{2}-1}\pi=\frac{32\sqrt{2}+8}{31}\pi$$

198. 정답 ③

삼각형 ABE에서 $\angle AEB=\frac{2}{3}\pi-\theta$이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)}=\frac{\overline{AE}}{\sin\frac{\pi}{3}}$$

$$\overline{AE}=\frac{\overline{AB}\times\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)}=\frac{1\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)}=\frac{\sqrt{3}}{2\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)}$$

부채꼴 EFG의 넓이는

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times(\overline{AE}\sin\theta)^2\times\frac{\pi}{6}=\left\{\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{2\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)}\right\}^2\times\frac{\pi}{12}$$

부채꼴 ABD의 넓이는

$$T(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{AB}^2\times\theta=\frac{1}{2}\theta$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\{T(\theta)\}^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left\{\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{2\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)}\right\}^2\times\frac{\pi}{12}}{\frac{1}{4}\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\sqrt{3}}{2\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)}\right\}^2\times\frac{\pi}{3}$$

$$=\left(1\times\frac{\sqrt{3}}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2\times\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{\pi}{3}$$

199. 정답 17

$G'(x)=g(x)$라 할 때,

$$\int_{f(1)}^{f(x)}g(t)dt=G(f(x))-G(f(1))\text{이므로}$$

조건 (가)에서 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$G'(f(x))f'(x)=g(f(x))f'(x)=a+\frac{1}{x}$$

함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로 $g(f(x))=x$

그러므로 $xf'(x)=a+\frac{1}{x}$ …… ㉠

또 $x>0$이므로 ㉠의 양변을 x로 나누면

$f'(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{1}{x^2}$

$f(4)-f(2)=\displaystyle\int_2^4 f'(x)dx$이고,

$$\int_2^4 f'(x)dx=\int_2^4\left(\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[a\ln x-\frac{1}{x}\right]_2^4$$
$$=\left(a\ln 4-\frac{1}{4}\right)-\left(a\ln 2-\frac{1}{2}\right)$$
$$=a\ln 2+\frac{1}{4}$$

조건 (나)에 의하여

$a\ln 2+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}+3\ln 2$이므로 $a=3$

한편, $f(x)=\displaystyle\int\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=3\ln x-\frac{1}{x}+C$ (단, C는 적분상수)

이므로 $f(1)=-1+C=2$에서 $C=3$

즉, $f(x)=3\ln x-\dfrac{1}{x}+3$에서

$f(3)=3\ln 3-\dfrac{1}{3}+3=\dfrac{8+9\ln 3}{3}$

따라서 $p=8$, $q=9$이므로

$p+q=8+9=17$

200. 정답 32

$f(x)=\sqrt{2}\cos x\times e^{\sqrt{2}\sin x}$에서

$$f'(x)=-\sqrt{2}\sin x\times e^{\sqrt{2}\sin x}+(\sqrt{2}\cos x)^2\times e^{\sqrt{2}\sin x}$$
$$=\sqrt{2}e^{\sqrt{2}\sin x}(\sqrt{2}\cos^2 x-\sin x)$$
$$=\sqrt{2}e^{\sqrt{2}\sin x}\{\sqrt{2}(1-\sin^2 x)-\sin x\}$$
$$=-\sqrt{2}e^{\sqrt{2}\sin x}(\sin x+\sqrt{2})(\sqrt{2}\sin x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$0\le x<2\pi$에서 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x=\dfrac{3}{4}\pi$

$0\le x<2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{3}{4}\pi$	$\cdots$	(2π)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

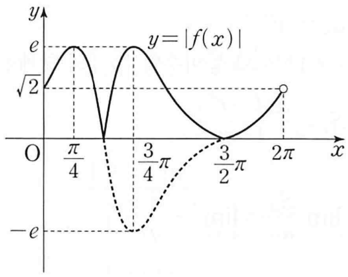
$f(0)=\sqrt{2}\cos 0\times e^{\sqrt{2}\sin 0}=\sqrt{2}\times 1=\sqrt{2}$

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4}\times e^{\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}}=1\times e=e$

$f\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)=\sqrt{2}\cos\dfrac{3}{4}\pi\times e^{\sqrt{2}\sin\frac{3}{4}\pi}=-1\times e=-e$

$\displaystyle\lim_{x\to 2\pi-}f(x)=\sqrt{2}\cos 2\pi\times e^{\sqrt{2}\sin 2\pi}=\sqrt{2}\times 1=\sqrt{2}$

이므로 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 [그림 1]과 같다.

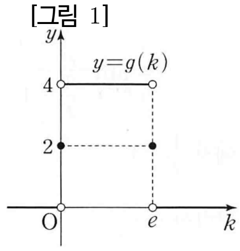


[그림 1]

실수 k에 대하여 방정식 $|f(x)|=k$의 서로 다른 실근의 개수는

$$g(k)=\begin{cases}0 & (k<0,\ k>e)\\ 2 & (k=0,\ k=e)\\ 4 & (0<k<e)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=g(k)$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

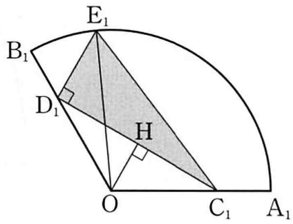
따라서 $A=\{0,\ 2,\ 4\}$, $B=\{0,\ e\}$이므로

$n(A)=3$, $n(B)=2$이고

$10\times n(A)+n(B)=10\times 3+2=32$

201. 정답 ②

삼각형 OC_1D_1은 $\overline{OC_1}=\overline{OD_1}=2$인 이등변삼각형이므로 점 O에서 선분 C_1D_1에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{C_1D_1}=2\,\overline{C_1H}=2\times\overline{OC_1}\sin\frac{\pi}{3}$$
$$=2\times\left(2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{3}$$

삼각형 OE_1D_1에서 $\overline{OE_1}=3$이고, $\angle OD_1E_1=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{2}{3}\pi$이므로

$\overline{D_1E_1}=x$로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$$\overline{OE_1}^2=\overline{OD_1}+\overline{D_1E_1}^2-2\times\overline{OD_1}\times\overline{D_1E_1}\times\cos\frac{2}{3}\pi$$

$$3^2=2^2+x^2-2\times 2\times x\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

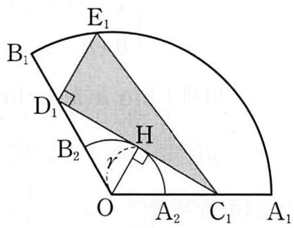
$x^2+2x-5=0$

$x>0$이므로 $x=\sqrt{6}-1$

그러므로

$$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{C_1D_1}\times\overline{D_1E_1}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times(\sqrt{6}-1)=3\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

한편, 호 A_2B_2가 선분 C_1D_1과 접하는 점은 점 H이므로 그림 R_2에서 부채꼴 OA_2B_2의 반지름의 길이를 r이라 하면 직각삼각형 OC_1H에서



$r=\overline{OH}=\overline{OC_1}\sin\dfrac{\pi}{6}=2\times\dfrac{1}{2}=1$

이때 부채꼴 OA_1B_1과 부채꼴 OA_2B_2는 서로 닮은 도형이고 닮음비는 $3:1$이므로 그림 R_2에서 새롭게 색칠된 도형의 넓이는 그림 R_1에 색칠된 도형의 넓이의 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{9}{1}$이다.

따라서 수열 $\{S_n\}$의 각 항은 첫째항이 $3\sqrt{2}-\sqrt{3}$이고 공비가 $\frac{1}{9}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합과 같으므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{27\sqrt{2}-9\sqrt{3}}{8}$$

202. 정답 ④

조건 (가)에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to1}\ln\{1+f(x)\}=0$이므로 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$

이때

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln\{1+f(x)\}}{x-1}=\lim_{x\to1}\left[\frac{\ln\{1+f(x)\}}{f(x)}\times\frac{f(x)}{x-1}\right]=6$$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln\{1+f(x)\}}{f(x)}=1$이므로 $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=6$

$x-1=t$라 하면 $\lim\limits_{t\to0}\frac{f(t+1)}{t}=6$ …… ㉠

조건 (나)에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to0}\{1-\cos\sqrt{f(x)}\}=0$이므로 $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{f(x)}=1$

$0\le f(x)<\frac{\pi^2}{4}$에서 $0\le\sqrt{f(x)}<\frac{\pi}{2}$이므로 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$

이때

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos\sqrt{f(x)}}{e^x-1}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\{1-\cos\sqrt{f(x)}\}\{1+\cos\sqrt{f(x)}\}}{(e^x-1)\{1+\cos\sqrt{f(x)}\}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2\sqrt{f(x)}}{(e^x-1)\{1+\cos\sqrt{f(x)}\}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2\sqrt{f(x)}}{(e^x-1)\{1+\cos\sqrt{f(x)}\}}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin^2\sqrt{f(x)}}{f(x)}\times\frac{x}{e^x-1}\times\frac{f(x)}{x\{1+\cos\sqrt{f(x)}\}}\right]=1$$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2\sqrt{f(x)}}{f(x)}=1$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{e^x-1}=1$, $\lim\limits_{x\to0}\{1+\cos\sqrt{f(x)}\}=2$

이므로 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$ …… ㉡

$$\lim_{x\to0}\frac{f(\sin x)f(\cos x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(\sin x)}{\sin x}\times\frac{f((\cos x-1)+1)}{\cos x-1}\times\frac{\sin x(\cos x-1)}{x^3}\right\}$$

㉠, ㉡에서 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f((\cos x-1)+1)}{\cos x-1}=6$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(\sin x)}{\sin x}=2$이고

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x(\cos x-1)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(\cos x-1)(\cos x+1)}{x^3(\cos x+1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^3 x}{x^3}\times\lim_{x\to0}\frac{-1}{\cos x+1}$$

$$=1^3\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}$$

이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(\sin x)f(\cos x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(\sin x)}{\sin x}\times\lim_{x\to0}\frac{f((\cos x-1)+1)}{\cos x-1}\times\lim_{x\to0}\frac{\sin x(\cos x-1)}{x^3}$$

$$=2\times6\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

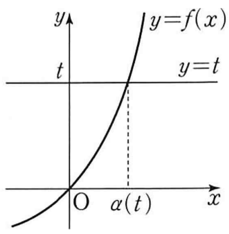
$$=-6$$

203. 정답 45

$f(x)=e^{2x}+2e^x-3$에서

$f'(x)=2e^{2x}+2e^x=2e^x(e^x+1)>0$

이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고, $f(0)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 x좌표를 $\alpha(t)$라 하면 함수

$g(x)=\int_0^x\{t-f(x)\}\,ds$는 $x=\alpha(t)$에서

극대인 동시에 최대이므로 $h(t)=\alpha(t)$이다.

즉, $f(h(t))=t$이므로 양변을 t에 대하여 미분하면

$f'(h(t))h'(t)=1$ …… ㉠

$h'(k)=\frac{1}{12}$이므로 ㉠에 $t=k$를 대입하면

$f'(h(k))h'(k)=1$에서

$$f'(h(k))=\frac{1}{h'(k)}=12$$

즉, $2e^{2h(k)}+2e^{h(k)}=12$에서

$e^{2h(k)}+e^{h(k)}-6=0$

$\{e^{h(k)}+3\}\{e^{h(k)}-2\}=0$

$e^{h(k)}+3>0$이므로

$e^{h(k)}-2=0$, $h(k)=\ln2$

$f(h(k))=k$에서

$k=f(\ln2)=4+2\times2-3=5$

그러므로 $g(h(k))=g(\ln2)=\int_0^{\ln2}\{t-f(s)\}\,dx$

$0<t\le5$에서 $g(\ln2)$의 최댓값은 $t=5$일 때이므로 최댓값은

$$\int_0^{\ln2}\{5-(e^{2s}+2e^s-3)\}\,ds=\int_0^{\ln2}(-e^{2s}-2e^s+8)\,ds$$

$$=\left[-\frac{1}{2}e^{2s}-2e^s+8s\right]_0^{\ln2}$$

$$=-\frac{7}{2}+8\ln 2$$

따라서 $p=-\frac{7}{2}$, $q=8$이므로

$$10(p+q)=10\left(-\frac{7}{2}+8\right)=10\times\frac{9}{2}=45$$

204. 정답 28

$f(x)=ax^2+bx+c\ (a>0)$이라 하자.

$g(x)=ax^2+bx+c+\sin x$에서

$g'(x)=2ax+b+\cos x$

$g''(x)=2a-\sin x$

$g'(x)=0$에서 $\cos x=-2ax-b$

조건 (가)에서 방정식 $g'(x)=0$이 서로 다른 두 실근 α, β $(\alpha<0<\beta)$를 가지므로 $g'(\alpha)=g'(\beta)=0$이고, α, β는 곡선 $y=\cos x$와 직선 $y=-2ax-b$의 교점을 x좌표이다.

$g''(x)=0$에서 $\sin x=2a$

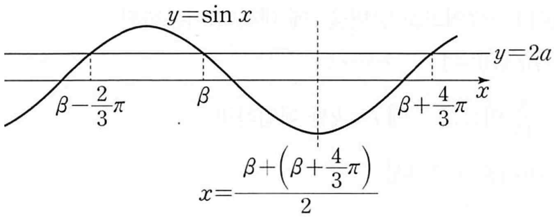
조건 (나)에서 함수 $g'(x)$는 $x=\beta$에서 극소, $x=\beta+k$에서 극대이므로 $g''(\beta)=g''(\beta+k)=0$이고, $x=\beta$의 좌우에서 $g''(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌고, $x=\beta+k$의 좌우에서 $g''(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀐다. …… ㉠

$\sin\beta=\sin(\beta+k)=2a$를 만족시키는 양수 k의 최솟값이 $\frac{4}{3}\pi$이므로

$\sin\beta=\sin\left(\beta+\frac{4}{3}\pi\right)=2a$이고

$\beta<x<\beta+\frac{4}{3}\pi$인 x에 대하여 $\sin x\neq 2a$이다.

$2a>0$이고 ㉠에 의하여 $x=\beta$의 좌우에서 $g''(x)=2a-\sin x$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=2a$를 나타내면 그림과 같다.



함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[-\pi,\ 5\pi]$에서 정의되므로

$\frac{\beta+\left(\beta+\frac{4}{3}\pi\right)}{2}=\beta+\frac{2}{3}\pi$의 값은 $\frac{3}{2}\pi$ 또는 $\frac{7}{2}\pi$ 또는 $\frac{11}{2}\pi$이다.

즉, $\beta=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $\beta=\frac{17}{6}\pi$ 또는 $\beta=\frac{29}{6}\pi$

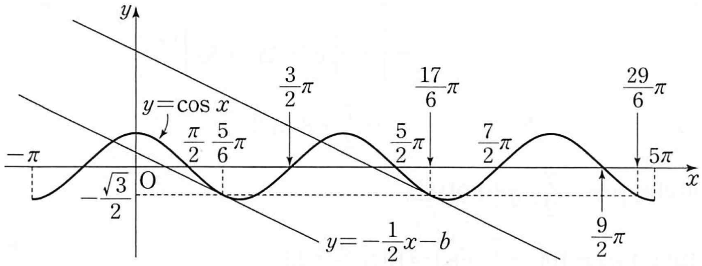
한편, $g'(\beta)=g''(\beta)=0$이므로

곡선 $y=\cos x$와 직선 $y=-2ax-b$는 $x=\beta$에서 접한다.

$y'=-\sin x$이고 $\sin\frac{5}{6}\pi=\sin\frac{17}{6}\pi=\sin\frac{29}{6}\pi=\frac{1}{2}$에서

$-\sin\beta=-\frac{1}{2}$이므로

$-\frac{1}{2}=-2a$, 즉 $a=\frac{1}{4}$



방정식 $g'(x)=0$이 음의 실근 α를 갖기 위해서는 직선 $y=-\frac{1}{2}x-b$의 y절편, 즉 $-b$가 1보다 작아야 한다.

(i) $\beta=\frac{5}{6}\pi$인 경우

직선 $y=-\frac{1}{2}x-b$는 점 $\left(\frac{5}{6}\pi,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$을 지나므로

$$-b=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{12}\pi<-\frac{3}{4}+\frac{5}{3}<1$$

(ii) $\beta=\frac{17}{6}\pi$인 경우

직선 $y=-\frac{1}{2}x-b$는 점 $\left(\frac{17}{6}\pi,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$을 지나므로

$$-b=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{17}{12}\pi>-1+\frac{17}{4}>1$$

(iii) $\beta=\frac{29}{6}\pi$인 경우

$\beta+\frac{4}{3}\pi=\frac{37}{6}\pi>5\pi$이므로 함수 $g'(x)$는 $x=\beta+\frac{4}{3}\pi$에서 정의되지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $\beta=\frac{5}{6}\pi$이고 $b=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{12}\pi$이다.

그러므로 $g(x)=\frac{1}{4}x^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{12}\pi\right)x+c+\sin x$

이때 $g(0)=c$이므로 $c=-2\sqrt{3}\pi$

즉, $g(x)=\frac{1}{4}x^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{12}\pi\right)x-2\sqrt{3}\pi+\sin x$이므로

$$g(4\pi)=\frac{1}{4}\times(4\pi)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{12}\pi\right)\times 4\pi-2\sqrt{3}\pi+\sin 4\pi$$

$$=4\pi^2+2\sqrt{3}\pi-\frac{5}{3}\pi^2-2\sqrt{3}\pi=\frac{7}{3}\pi^2$$

따라서 $\frac{12}{\pi^2}g(4\pi)=\frac{12}{\pi^2}\times\frac{7}{3}\pi^2=28$