24..27

2025년 3월/교육청 24

1. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(2n+3)a_n}{n^2} = 3$일 때, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{na_n}{3n^2+1}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

2024년 3월/교육청 24

2. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 1,\ \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 3$$

을 만족시킬 때, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 a_n + b_n}{1+2b_n}$ a_1의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$

④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

2023년 3월/교육청 24

3. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$3^n - 2^n < a_n < 3^n + 2^n$$

을 만족시킬 때, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{3^{n+1} + 2^n}$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

2022년 3월/교육청 24

4. 수열 $\{a_n\}$이 $\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n - 5n) = 2$를 만족시킬 때,

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)a_n}{4n^2}$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

2021년 3월/교육청 24

5. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$$a_n = \left(\frac{x^2-4x}{5}\right)^n$$

일 때, 수열 $\{a_n\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 개수는?

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

2021년 10월/교육청 24

6. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-4n}{n}=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{5n+a_n}{3n-1}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

2024년 5월/교육청 24

7. 첫째항이 1이고 공차가 d $(d>0)$인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{a_n}-\frac{n+1}{a_{n+1}}\right)=\frac{2}{3}$일 때, d의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

2022년 4월/교육청 24

8. $\sec\theta=\frac{\sqrt{10}}{3}$일 때, $\sin^2\theta$의 값은?

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{3}{20}$ ③ $\frac{1}{5}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{3}{10}$

2022학년도 9월/평가원 24

9. $2\cos\alpha=3\sin\alpha$이고 $\tan(\alpha+\beta)=1$일 때, $\tan\beta$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

2022년 10월/교육청 24

10. 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{\ln(1+3x)}=2$$

일 때, $f'(0)$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

2021년 4월/교육청 24

11. 함수 $f(x)=\log_3 6x$ 에 대하여 $f'(9)$ 의 값은?

① $\frac{1}{9\ln 3}$ ② $\frac{1}{6\ln 3}$ ③ $\frac{2}{9\ln 3}$
④ $\frac{5}{18\ln 3}$ ⑤ $\frac{1}{3\ln 3}$

2023년 4월/교육청 24

12. 함수 $f(x)=e^x(2\sin x+\cos x)$에 대하여 $f'(0)$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

2022학년도 수능/평가원 24

13. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x^3+x)=e^x$$

을 만족시킬 때, $f'(2)$의 값은?

① e ② $\frac{e}{2}$ ③ $\frac{e}{3}$
④ $\frac{e}{4}$ ⑤ $\frac{e}{5}$

2025년 5월/교육청 24

14. 매개변수 t $(t>0)$으로 나타내어진 곡선

$$x=e^{2t-2},\ y=\frac{\ln t}{t}$$

에서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

2023년 11월/수능 24

15. 매개변수 $t(t>0)$으로 나타내어진 곡선

$$x=\ln(t^3+1),\ y=\sin\pi t$$

에서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은?

① $-\frac{1}{3}\pi$ ② $-\frac{2}{3}\pi$ ③ $-\pi$
④ $-\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $-\frac{5}{3}\pi$

2024년 7월/교육청 24

16. 매개변수 t $(t>0)$으로 나타내어진 함수

$$x=3t-\frac{1}{t},\ y=te^{t-1}$$

에서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{5}{6}$
④ 1 ⑤ $\frac{7}{6}$

2024년 6월/평가원 24

17. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=\frac{5t}{t^2+1},\ y=3\ln\left(t^2+1\right)$$

에서 $t=2$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

2023년 6월/평가원 24

18. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=\frac{5t}{t^2+1},\ y=3\ln\left(t^2+1\right)$$

에서 $t=2$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

2023년 9월/평가원 24

19. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=t+\cos 2t,\ y=\sin^2 t$$

에서 $t=\frac{\pi}{4}$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

2022학년도 6월/평가원 24

20. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=e^t+\cos t,\ y=\sin t$$

에서 $t=0$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

2023년 7월/교육청 24

21. 함수 $f(x)=\ln\left(x^2-x+2\right)$와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 있다. 실수 전체의 집합에서 정의된 합성함수 $h(x)$를 $h(x)=f(g(x))$라 하자. $\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-4}{x-2}=12$일 때, $h'(2)$의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

2025년 6월/평가원 24

22. 곡선 $3x+y+\cos(xy)=2$ 위의 점 $(0,\ 1)$에서의 접선의 x절편은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

2022년 6월/평가원 24

23. 곡선 $x^2 - y\ln x + x = e$ 위의 점 $(e,\ e^2)$에서의 접선의 기울기는?

① $e+1$ ② $e+2$ ③ $e+3$
④ $2e+1$ ⑤ $2e+2$

2023년 10월/교육청 24

24. $\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi k}{3n}$의 값은?

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$
④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

2022년 11월/수능 24

25. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{3k}{n}}$ 의 값은?

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{13}{9}$ ③ $\frac{14}{9}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{16}{9}$

2024년 9월/평가원 24

26. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. 양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{t}+4e^{2t}$이다. $f(1)=2e^2+1$일 때, $f(e)$의 값은?

① $2e^{2e}-1$ ② $2e^{2e}$ ③ $2e^{2e}+1$
④ $2e^{2e}+2$ ⑤ $2e^{2e}+3$

2024년 10월/교육청 24

27. $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)dx$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$
④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2022년 9월/평가원 24

28. $\int_0^{\pi}x\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$의 값은?

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3\pi}{2}$
④ 2π ⑤ $\frac{5\pi}{2}$

2022년 7월/교육청 24

29. $\int_1^e \left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\ln x\,dx-\int_1^e \frac{2}{x^2}\ln x\,dx$의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$
④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

2021년 7월/교육청 24

30. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2x \sin^2 2x\,dx$의 값은?

① $\frac{1}{9}$　② $\frac{1}{6}$　③ $\frac{2}{9}$
④ $\frac{5}{18}$　⑤ $\frac{1}{3}$

2024년 3월/교육청 25

31. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$2n+3 < a_n < 2n+4$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+1)^2+6n^2}{na_n}$ 의 값은?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

2025년 5월/교육청 25

32. 두 양수 a, b에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+bn}-bn\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(bn-1)^2}{(b+6)n^2+1}$$

일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 6　② 12　③ 18
④ 24　⑤ 30

2022년 3월/교육청 25

33. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+n}-\sqrt{an^2-an}\right)=\frac{5}{4}$를 만족시키는 모든 양수 a의 값의 합은?

① $\frac{7}{2}$　② $\frac{15}{4}$　③ 4
④ $\frac{17}{4}$　⑤ $\frac{9}{2}$

2021년 3월/교육청 25

34. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=a_1a_n$$

을 만족시킨다. $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_{n+3}-5}{2a_n+1}=12$ 일 때, a_1의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$
④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

2024년 7월/교육청 25

35. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\left\{a_n \times \left(\sqrt{n^2+4}-n\right)\right\}=6$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+6n^2}{na_n+5}$ 의 값은?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

2024년 10월/교육청 25

36. 수열 $a_n=\left(\frac{k}{2}\right)^n$이 수렴하도록 하는 모든 자연수 k에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a\times a_n+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{a_n+b\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\frac{k}{2}$$

일 때, $a+b$의 값은? (단, a와 b는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

2023년 3월/교육청 25

37. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}-6n}{a_n+5}=4$$

일 때, a_2-a_1의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

2022년 11월/수능 25

38. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{3^n+2^{2n-1}}=3$일 때, a_2의 값은?

① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

2024년 9월/평가원 25

39. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\times a_n-1}{3\times 2^{n+1}}=1$$

일 때, a_1+a_2의 값은?

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{7}{2}$
④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{11}{2}$

2021년 7월/교육청 25

40. 자연수 r에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+r^{n+1}}{3^n+7\times r^n}=1$이 성립하도록 하는 모든 r의 값의 합은?

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

2022년 9월/평가원 25

41. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2}{2}=6$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+1}{a_n+2n}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

2021년 4월/교육청 25

42. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-2\right)=5$ 일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3na_n}{n^2+4}$ 의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

2023년 4월/교육청 25

43. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{2^{n+1}}{2^n+1}\right)$이 수렴할 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\times a_n+5\times 2^{n+1}}{2^n+3}$ 의 값은?

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

2022학년도 수능/평가원 25

44. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=3,\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=6$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

2025년 3월/교육청 25

45. 자연수 k에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항을

$$a_n=\frac{(k^2+9)^n+30^n}{(10k)^n}$$

이라 하자. 수열 $\{a_n\}$이 수렴하도록 하는 모든 자연수 k의 개수는? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

2025년 6월/평가원 25

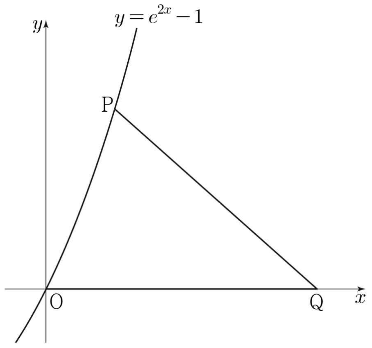
46. 양수 a에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a-3n}{n}+\frac{an+6}{n+a}\right)$이 실수 S에 수렴할 때, $a+S$의 값은? [3점]

① 7 ② $\frac{15}{2}$ ③ 8
④ $\frac{17}{2}$ ⑤ 9

2024년 5월/교육청 25

47. 곡선 $y=e^{2x}-1$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ e^{2t}-1)$ $(t>0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{OQ}}$를 만족시키는 x축 위의 점 Q의 x좌표를 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t}$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3



2024년 6월/평가원 25

48. $\lim_{x\to 0}\frac{2^{ax+b}-8}{2^{bx}-1}=16$일 때, $a+b$의 값은? (단, a와 b는 0이 아닌 상수이다.)

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

2023년 6월/평가원 25

49. $\lim_{x\to 0}\frac{2^{ax+b}-8}{2^{bx}-1}=16$일 때, $a+b$의 값은? (단, a와 b는 0이 아닌 상수이다.)

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

2022년 4월/교육청 25

50. $\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(2x^2+3x)-\ln 3x}{x}$ 의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

2022년 6월/평가원 25

51. 함수 $f(x)=x^3+2x+3$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(3)$의 값은?

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

2022년 7월/교육청 25

52. 매개변수 t $(t>0)$으로 나타내어진 곡선

$$x=t^2\ln t+3t,\ y=6te^{t-1}$$

에서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

2022학년도 9월/평가원 25

53. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=e^t-4e^{-t},\ y=t+1$$

에서 $t=\ln 2$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은?

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

2021년 10월/교육청 25

54. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t>2)$에서의 위치 $(x,\ y)$가

$$x=t\ln t,\ y=\frac{4t}{\ln t}$$

이다. 시각 $t=e^2$에서 점 P의 속력은?

① $\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ 3
④ $\sqrt{10}$ ⑤ $\sqrt{11}$

2022년 10월/교육청 25

55. 매개변수 $t(0<t<\pi)$로 나타내어진 곡선

$$x=\sin t-\cos t,\ y=3\cos t+\sin t$$

위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 기울기가 3일 때, $a+b$의 값은?

① 0 ② $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ ③ $-\frac{\sqrt{10}}{5}$
④ $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $-\frac{2\sqrt{10}}{5}$

2022학년도 6월/평가원 25

56. 원점에서 곡선 $y=e^{|x|}$에 그은 두 접선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값은?

① $\frac{e}{e^2+1}$ ② $\frac{e}{e^2-1}$ ③ $\frac{2e}{e^2+1}$
④ $\frac{2e}{e^2-1}$ ⑤ 1

2023년 7월/교육청 25

57. 곡선 $2e^{x+y-1}=3e^x+x-y$ 위의 점 $(0,\ 1)$에서의 접선의 기울기는?

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

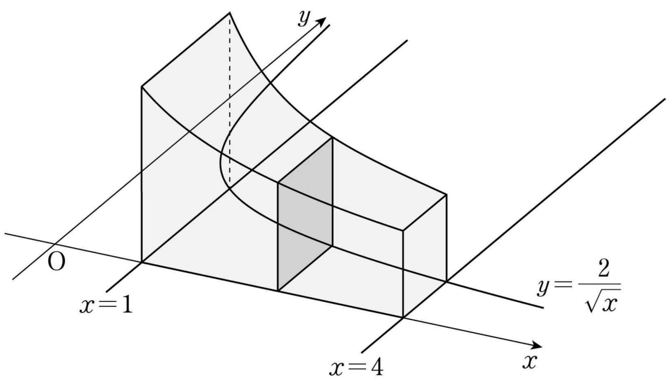
2023년 9월/평가원 25

58. 함수 $f(x)=x+\ln x$에 대하여 $\int_1^e \left(1+\frac{1}{x}\right)f(x)dx$의 값은?

① $\frac{e^2}{2}+\frac{e}{2}$ ② $\frac{e^2}{2}+e$ ③ $\frac{e^2}{2}+2e$
④ e^2+e ⑤ e^2+2e

2023년 10월/교육청 25

59. 그림과 같이 곡선 $y=\frac{2}{\sqrt{x}}$와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=4$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피는?



① $6\ln 2$ ② $7\ln 2$ ③ $8\ln 2$
④ $9\ln 2$ ⑤ $10\ln 2$

2023년 11월/수능 25

60. 양의 실수 전체의 집합에서 정의되고 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 있다. $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이고, $g'(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.
모든 양수 a에 대하여

$$\int_1^a \frac{1}{g'(f(x))f(x)}dx = 2\ln a+\ln(a+1)-\ln 2$$

이고 $f(1)=8$일 때, $f(2)$의 값은?

① 36 ② 40 ③ 44
④ 48 ⑤ 52

2024년 3월/교육청 26

61. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}-a_n=a_1+2$$

를 만족시킨다. $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+n}{a_n-n+1}=3$일 때, a_{10}의 값은? (단, $a_1>0$이다.)

① 35 ② 36 ③ 37
④ 38 ⑤ 39

2023년 3월/교육청 26

62. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}(n^2+1)a_n=3, \quad \lim_{n\to\infty}(4n^2+1)(a_n+b_n)=1$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}(2n^2+1)(a_n+2b_n)$의 값은?

① -3 ② $-\frac{7}{2}$ ③ -4
④ $-\frac{9}{2}$ ⑤ -5

2024년 5월/교육청 26

63. 열린구간 $(0,\ \infty)$에서 정의된 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+\left(\frac{4}{x}\right)^{n}}{x^{n}+\left(\frac{4}{x}\right)^{n+1}}$$

이 있다. $x>0$일 때, 방정식 $f(x)=2x-3$의 모든 실근의 합은?

① $\frac{41}{7}$ ② $\frac{43}{7}$ ③ $\frac{45}{7}$
④ $\frac{47}{7}$ ⑤ 7

2025년 3월/교육청 26

64. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k-k^2}{k+1}=2n^2-n$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2+1}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

2022년 4월/교육청 26

65. 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}+1}$$

에 대하여 $f(k)=k$를 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은?

① -6 ② -5 ③ -4
④ -3 ⑤ -2

2023년 9월/평가원 26

66. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여
$a_1=b_1=1,\ a_2b_2=1$이고

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_na_{n+1}}+b_n\right)=2$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$의 값은?

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{5}{4}$
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

2022년 3월/교육청 26

67. 첫째항이 1인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}-a_n=3,\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}=n^2$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n$의 값은?

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

2021년 3월/교육청 26

68. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

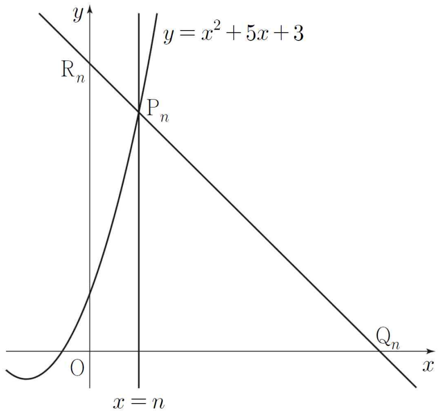
$$2n^2-3<a_n<2n^2+4$$

를 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^3}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{5}{6}$
④ 1 ⑤ $\frac{7}{6}$

2025년 5월/교육청 26

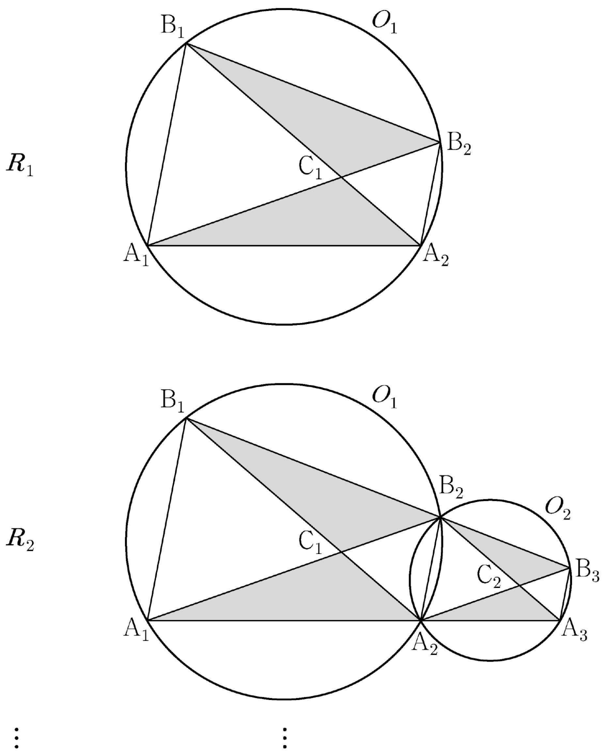
69. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2+5x+3$과 직선 $x=n$이 만나는 점을 P_n이라 하고, 점 P_n을 지나고 기울기가 -1인 직선이 x축과 만나는 점을 Q_n, y축과 만나는 점을 R_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\sqrt{2}}{\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}-\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n}}$의 값은? [3점]



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

2022년 6월/평가원 26

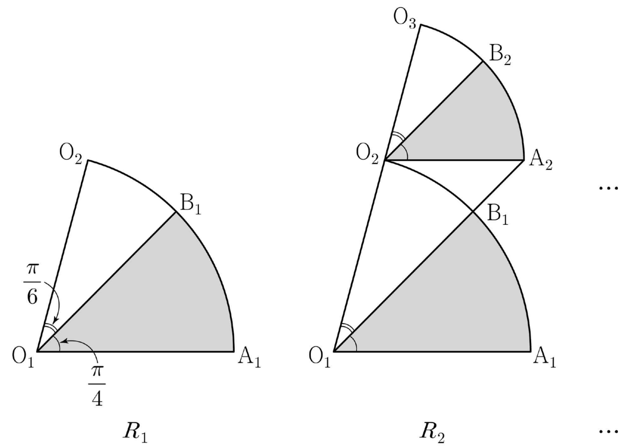
70. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{A_1B_1}}=2$, $\overline{\mathrm{B_1A_2}}=3$이고 $\angle \mathrm{A_1B_1A_2}=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 $\mathrm{A_1A_2B_1}$과 이 삼각형의 외접원 O_1이 있다.
점 $\mathrm{A_2}$를 지나고 직선 $\mathrm{A_1B_1}$에 평행한 직선이 원 O_1과 만나는 점 중 $\mathrm{A_2}$가 아닌 점을 $\mathrm{B_2}$라 하자. 두 선분 $\mathrm{A_1B_2}$, $\mathrm{B_1A_2}$가 만나는 점을 $\mathrm{C_1}$이라 할 때, 두 삼각형 $\mathrm{A_1A_2C_1}$, $\mathrm{B_1C_1B_2}$로 만들어진 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 점 $\mathrm{B_2}$를 지나고 직선 $\mathrm{B_1A_2}$에 평행한 직선이 직선 $\mathrm{A_1A_2}$와 만나는 점을 $\mathrm{A_3}$이라 할 때, 삼각형 $\mathrm{A_2A_3B_2}$의 외접원을 O_2라 하자. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 두 점 $\mathrm{B_3}$, $\mathrm{C_2}$를 잡아 원 O_2에 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?



① $\frac{11\sqrt{3}}{9}$ ② $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{13\sqrt{3}}{9}$
④ $\frac{14\sqrt{3}}{9}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

2022학년도 6월/평가원 26

71. 그림과 같이 중심이 $\mathrm{O_1}$, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 부채꼴 $\mathrm{O_1A_1O_2}$가 있다. 호 $\mathrm{A_1O_2}$ 위에 점 $\mathrm{B_1}$을 $\angle \mathrm{A_1O_1B_1}=\frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $\mathrm{O_1A_1B_1}$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 점 $\mathrm{O_2}$를 지나고 선분 $\mathrm{O_1A_1}$에 평행한 직선이 직선 $\mathrm{O_1B_1}$과 만나는 점을 $\mathrm{A_2}$라 하자. 중심이 $\mathrm{O_2}$이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 부채꼴 $\mathrm{O_2A_2O_3}$을 부채꼴 $\mathrm{O_1A_1B_1}$과 겹치지 않도록 그린다. 호 $\mathrm{A_2O_3}$ 위에 점 $\mathrm{B_2}$를 $\angle \mathrm{A_2O_2B_2}=\frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $\mathrm{O_2A_2B_2}$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?

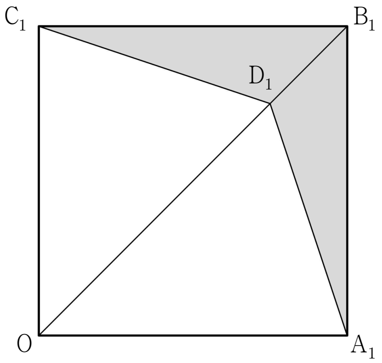


① $\frac{3\pi}{16}$ ② $\frac{7\pi}{32}$ ③ $\frac{\pi}{4}$
④ $\frac{9\pi}{32}$ ⑤ $\frac{5\pi}{16}$

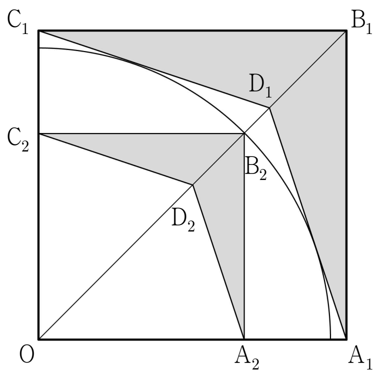
2021년 7월/교육청 26

72. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 $\mathrm{OA_1B_1C_1}$의 대각선 $\mathrm{OB_1}$을 $3:1$로 내분하는 점을 $\mathrm{D_1}$이라 하고, 네 선분 $\mathrm{A_1B_1}$, $\mathrm{B_1C_1}$, $\mathrm{C_1D_1}$, $\mathrm{D_1A_1}$로 둘러싸인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 중심이 O이고 두 직선 $\mathrm{A_1D_1}$, $\mathrm{C_1D_1}$에 동시에 접하는 원과 선분 $\mathrm{OB_1}$이 만나는 점을 $\mathrm{B_2}$라 하자. 선분 $\mathrm{OB_2}$를 대각선으로 하는 정사각형 $\mathrm{OA_2B_2C_2}$를 그리고 정사각형 $\mathrm{OA_2B_2C_2}$에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로  모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

R_1



R_2

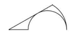


⋮ ⋮

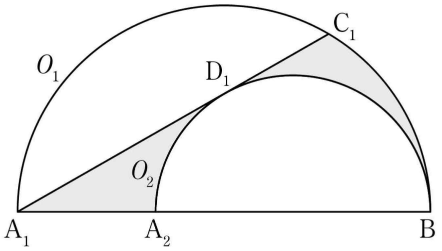
① $\frac{70}{11}$ ② $\frac{75}{11}$ ③ $\frac{80}{11}$
④ $\frac{80}{9}$ ⑤ $\frac{85}{9}$

2021년 10월/교육청 26

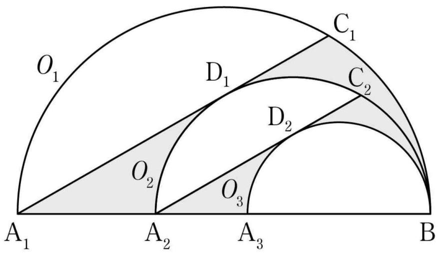
73. 그림과 같이 길이가 2인 선분 $\mathrm{A_1B}$를 지름으로 하는 반원 O_1이 있다. 호 $\mathrm{BA_1}$ 위에 점 $\mathrm{C_1}$을 $\angle \mathrm{BA_1C_1} = \frac{\pi}{6}$가 되도록 잡고, 선분 $\mathrm{A_2B}$를 지름으로 하는 반원 O_2가 선분 $\mathrm{A_1C_1}$과 접하도록 선분 $\mathrm{A_1B}$ 위에 점 $\mathrm{A_2}$를 잡는다. 반원 O_2와 선분 $\mathrm{A_1C_1}$의 접점을 $\mathrm{D_1}$이라 할 때, 두 선분 $\mathrm{A_1A_2}$, $\mathrm{A_1D_1}$과 호 $\mathrm{D_1A_2}$로 둘러싸인 부분과 선분 $\mathrm{C_1D_1}$과 두 호 $\mathrm{BC_1}$, $\mathrm{BD_1}$로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 호 $\mathrm{BA_2}$ 위에 점 $\mathrm{C_2}$를 $\angle \mathrm{BA_2C_2} = \frac{\pi}{6}$가 되도록 잡고, 선분 $\mathrm{A_3B}$를 지름으로 하는 반원 O_3이 선분 $\mathrm{A_2C_2}$와 접하도록 선분 $\mathrm{A_2B}$ 위에 점 $\mathrm{A_3}$을 잡는다. 반원 O_3와 선분 $\mathrm{A_2C_2}$의 접점을 $\mathrm{D_2}$라 할 때, 두 선분 $\mathrm{A_2A_3}$, $\mathrm{A_2D_2}$와 호 $\mathrm{D_2A_3}$으로 둘러싸인 부분과 선분 $\mathrm{C_2D_2}$와 두 호 $\mathrm{BC_2}$, $\mathrm{BD_2}$로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\frac{4\sqrt{3}-\pi}{10}$ ② $\frac{9\sqrt{3}-2\pi}{20}$ ③ $\frac{8\sqrt{3}-\pi}{20}$
④ $\frac{5\sqrt{3}-\pi}{10}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{3}-\pi}{20}$

2024년 7월/교육청 26

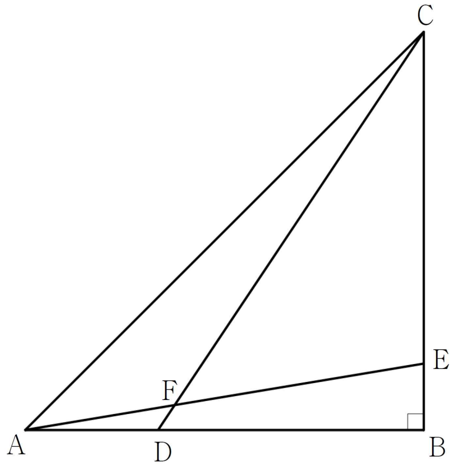
74. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{BC}=1$이고 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AB 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E가

$$\overline{AD}=2\overline{BE}\ \ (0<\overline{AD}<1)$$

을 만족시킬 때, 두 선분 AE, CD가 만나는 접을 F라 하자.

$\tan(\angle CFE)=\frac{16}{15}$일 때, $\tan(\angle CDB)$의 값은?

$\left(\text{단, } \frac{\pi}{4}<\angle CDB<\frac{\pi}{2}\right)$



① $\frac{9}{7}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{7}{5}$

④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

2023년 4월/교육청 26

75. 두 함수 $f(x)=a^x$, $g(x)=2\log_b x$에 대하여

$$\lim_{x\to e}\frac{f(x)-g(x)}{x-e}=0$$

일 때, $a\times b$의 값은? (단, a와 b는 1보다 큰 상수이다.)

① $e^{\frac{1}{e}}$ ② $e^{\frac{2}{e}}$ ③ $e^{\frac{3}{e}}$

④ $e^{\frac{4}{e}}$ ⑤ $e^{\frac{5}{e}}$

2025년 6월/평가원 26

76. 함수 $f(x)=e^{3x}-3e^{2x}+4e^x$의 역함수를 $g(x)$라 하자.

$g'(a)=\frac{1}{8}$이 되도록 하는 실수 a에 대하여 $a+f'(g(a))$의 값은? [3점]

① 11 ② 12 ③ 13

④ 14 ⑤ 15

2023년 10월/교육청 26

77. 함수 $f(x)=e^{2x}+e^x-1$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 함수 $g(5f(x))$의 $x=0$에서의 미분계수는?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1

④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

2022년 7월/교육청 26

78. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$가 함수 $g(x)$의 역함수이고, $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-2}{x-2}=\frac{1}{3}$이다. 함수 $h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$라 할 때, $h'(2)$의 값은?

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

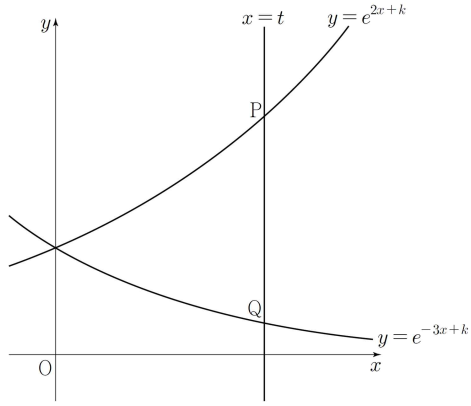
2024년 6월/평가원 26

79. x에 대한 방정식 $x^2-5x+2\ln x=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 t의 값의 합은?

① $-\frac{17}{2}$ ② $-\frac{33}{4}$ ③ -8
④ $-\frac{31}{4}$ ⑤ $-\frac{15}{2}$

2021년 4월/교육청 26

80. 좌표평면에서 양의 실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 두 곡선 $y=e^{2x+k}$, $y=e^{-3x+k}$과 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}=t$를 만족시키는 실수 k의 값을 $f(t)$라 하자. 함수 $f(t)$에 대하여 $\lim_{t\to 0+}e^{f(t)}$의 값은?



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

2022년 10월/교육청 26

81. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(2n-k)^2}$의 값은?

① $\frac{3}{2}-2\ln 2$ ② $1-\ln 2$ ③ $\frac{3}{2}-\ln 3$
④ $\ln 2$ ⑤ $2-\ln 3$

2022학년도 수능/평가원 26

82. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+2kn}{k^3+3k^2n+n^3}$ 의 값은?

① $\ln 5$ ② $\frac{\ln 5}{2}$ ③ $\frac{\ln 5}{3}$

④ $\frac{\ln 5}{4}$ ⑤ $\frac{\ln 5}{5}$

2023년 7월/교육청 26

83. 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속이고

$$\int_1^2 (x-1)f'\left(\frac{x}{2}\right)dx=2$$

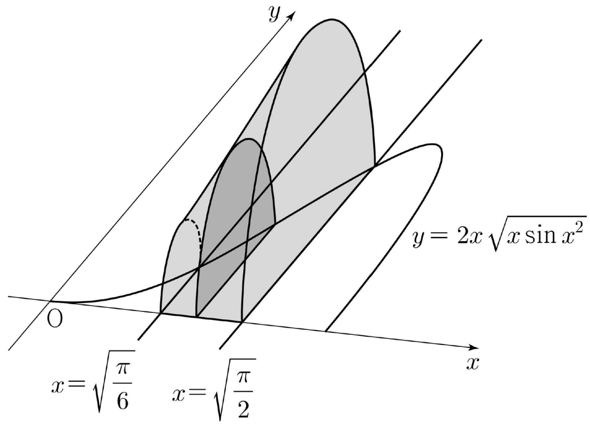
를 만족시킨다. $f(1)=4$일 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx$의 값은?

① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$

④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

2024년 9월/평가원 26

84. 그림과 같이 곡선 $y=2x\sqrt{x\sin x^2}\ (0\le x\le\sqrt{\pi})$와 x축 및 두 직선 $x=\sqrt{\frac{\pi}{6}}$, $x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 반원일 때, 이 입체도형의 부피는?

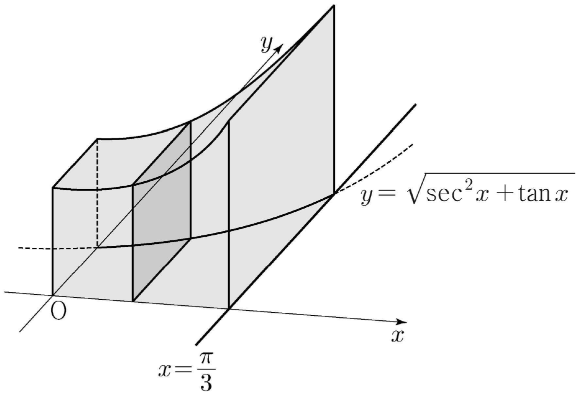


① $\frac{\pi^2+6\pi}{48}$ ② $\frac{\sqrt{2}\pi^2+6\pi}{48}$ ③ $\frac{\sqrt{3}\pi^2+6\pi}{48}$

④ $\frac{\sqrt{2}\pi^2+12\pi}{48}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}\pi^2+12\pi}{48}$

2022년 11월/수능 26

85. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\sec^2 x+\tan x}\left(0\le x\le \dfrac{\pi}{3}\right)$와 x축, y축 및 직선 $x=\dfrac{\pi}{3}$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는?



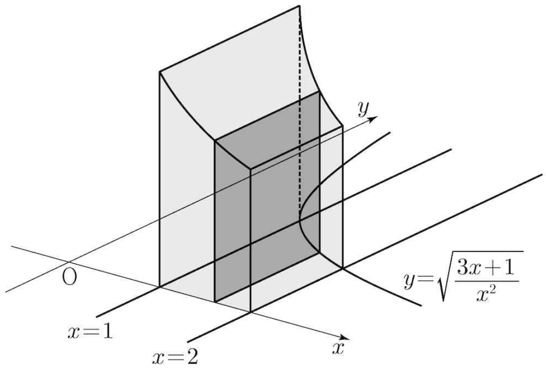
① $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\ln 2}{2}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\ln 2$

③ $\sqrt{3}+\dfrac{\ln 2}{2}$ ④ $\sqrt{3}+\ln 2$

⑤ $\sqrt{3}+2\ln 2$

2022학년도 9월/평가원 26

86. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\dfrac{3x+1}{x^2}}\ (x>0)$과 x축 및 두 직선 $x=1,\ x=2$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피는?

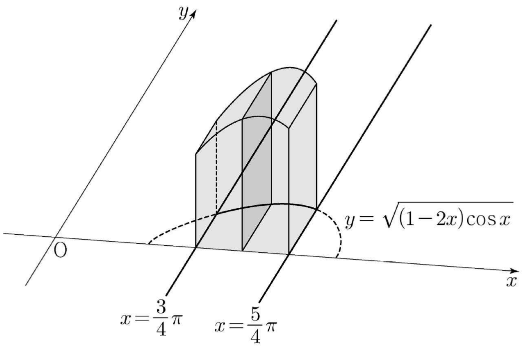


① $3\ln 2$ ② $\dfrac{1}{2}+3\ln 2$ ③ $1+3\ln 2$

④ $\dfrac{1}{2}+4\ln 2$ ⑤ $1+4\ln 2$

2023년 11월/수능 26

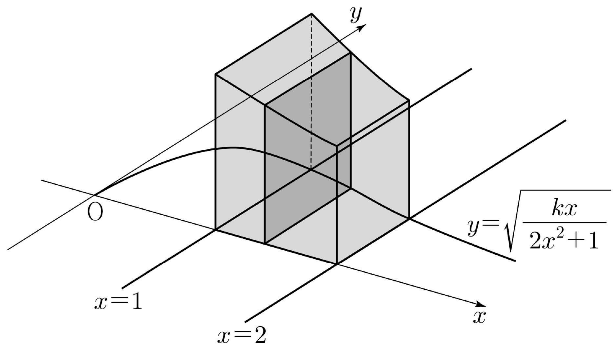
87. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{(1-2x)\cos x}$ $\left(\frac{3}{4}\pi \le x \le \frac{5}{4}\pi\right)$와 x축 및 두 직선 $x=\frac{3}{4}\pi$, $x=\frac{5}{4}\pi$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는?



① $\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}$ ② $\sqrt{2}\pi-1$
③ $2\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{2}\pi-1$
⑤ $2\sqrt{2}\pi$

2022년 9월/평가원 26

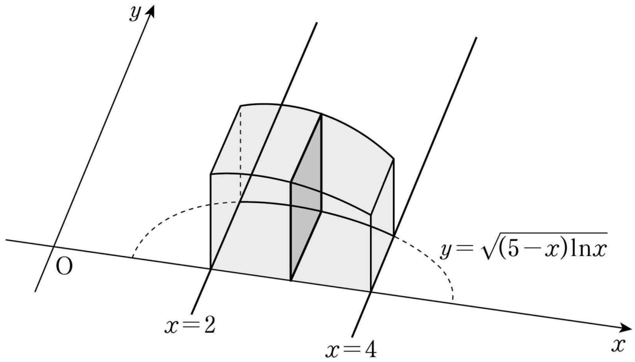
88. 그림과 같이 양수 k에 대하여 곡선 $y=\sqrt{\frac{kx}{2x^2+1}}$와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피가 $2\ln 3$일 때, k의 값은?



① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

2024년 10월/교육청 26

89. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{(5-x)\ln x}$ $(2 \le x \le 4)$와 x축 및 두 직선 $x=2$, $x=4$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는?



① $14\ln 2-7$ ② $14\ln 2-6$ ③ $16\ln 2-7$
④ $16\ln 2-6$ ⑤ $16\ln 2-5$

2021년 3월/교육청 27

90. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k-1)!}=\frac{3}{(n+2)!}$$

을 만족시킨다. $\lim_{n\to\infty}(a_1+n^2a_n)$의 값은?

① $-\frac{7}{2}$ ② -3 ③ $-\frac{5}{2}$
④ -2 ⑤ $-\frac{3}{2}$

2024년 3월/교육청 27

91. $a_1=3$, $a_2=6$인 등차수열 $\{a_n\}$과 모든 항이 양수인 수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}a_k(b_k)^2=n^3-n+3$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_nb_{2n}}$의 값은?

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ③ 3
④ $3\sqrt{2}$ ⑤ 6

2023년 3월/교육청 27

92. $a_1=3$, $a_2=-4$인 수열 $\{a_n\}$과 등차수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}=\frac{6}{n+1}$$

을 만족시킬 때, $\lim a_nb_n$의 값은?

① -54 ② $-\frac{75}{2}$ ③ -24
④ $-\frac{27}{2}$ ⑤ -6

2023년 10월/교육청 27

93. 모든 항이 자연수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}=4$$

이고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{2n}}$이 실수 S 에 수렴할 때, S 의 값은?

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{5}$　③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{1}{2}$

2022년 3월/교육청 27

94. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n{}^2<4na_n+n-4n^2$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3n}{2n+4}$의 값은?

① $\frac{5}{2}$　② 3　③ $\frac{7}{2}$

④ 4　⑤ $\frac{9}{2}$

2022년 4월/교육청 27

95. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2-2nx-2n$이 직선 $y=x+1$과 만나는 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$을 대각선으로 하는 정사각형의 넓이를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$의 값은?

① $\frac{1}{10}$　② $\frac{2}{15}$　③ $\frac{1}{6}$

④ $\frac{1}{5}$　⑤ $\frac{7}{30}$

2022년 6월/평가원 27

96. 첫째항이 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$

이 실수 S에 수렴할 때, S의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$

④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

2025년 3월/교육청 27

97. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> $0 < x < 3$일 때, x에 대한 방정식 $\sin\left(\dfrac{\pi}{a_n}x\right)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 $2n$이다.

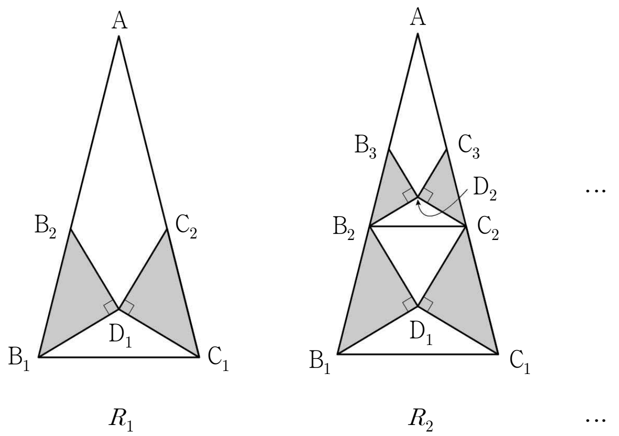
$\lim\limits_{n\to\infty} na_n$의 값은? [3점]

① $\dfrac{2}{3}$ ② $\dfrac{3}{4}$ ③ 1

④ $\dfrac{4}{3}$ ⑤ $\dfrac{3}{2}$

2023년 7월/교육청 27

98. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=\overline{AC_1}=\sqrt{17}$, $\overline{B_1C_1}=2$인 삼각형 AB_1C_1이 있다. 선분 AB_1 위의 점 B_2, 선분 AC_1 위의 점 C_2, 삼각형 AB_1C_1의 내부의 점 D_1을 $\overline{B_1D_1}=\overline{B_2D_1}=\overline{C_1D_1}=\overline{C_2D_1}$, $\angle B_1D_1B_2=\angle C_1D_1C_2=\dfrac{\pi}{2}$가 되도록 잡고, 두 삼각형 $B_1D_1B_2$, $C_1D_1C_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 AB_2 위의 점 B_3, 선분 AC_2 위의 점 C_3, 삼각형 AB_2C_2의 내부의 점 D_2를 $\overline{B_2D_2}=\overline{B_3D_2}=\overline{C_2D_2}=\overline{C_3D_2}$, $\angle B_2D_2B_3=\angle C_2D_2C_3=\dfrac{\pi}{2}$가 되도록 잡고, 두 삼각형 $B_2D_2B_3$, $C_2D_2C_3$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값은?

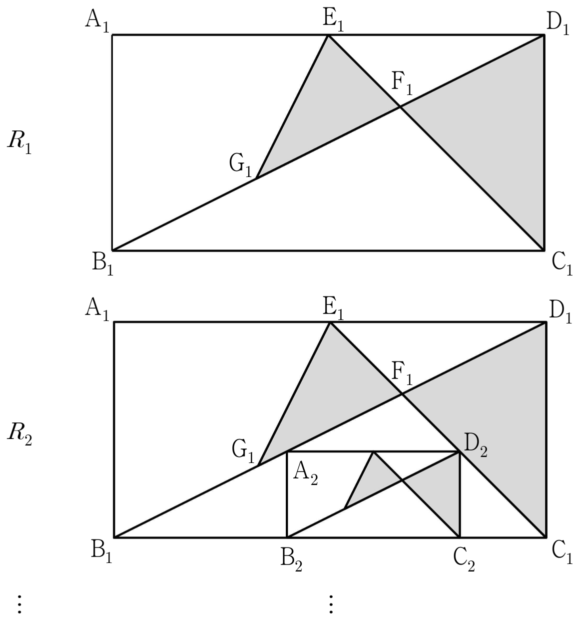


① 2 ② $\dfrac{33}{16}$ ③ $\dfrac{17}{8}$

④ $\dfrac{35}{16}$ ⑤ $\dfrac{9}{4}$

2022년 7월/교육청 27

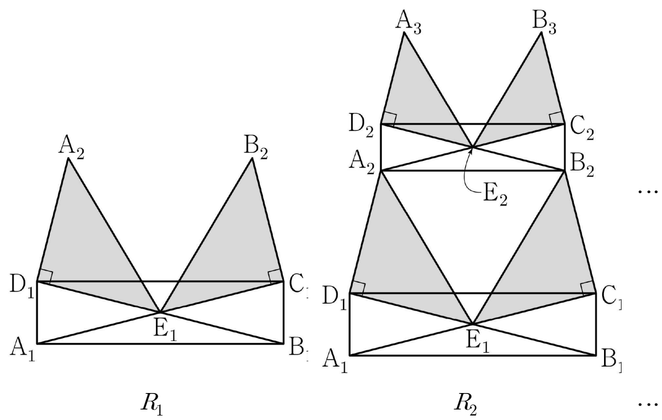
99. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=2$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 A_1D_1의 중점 E_1에 대하여 두 선분 B_1D_1, C_1E_1이 만나는 점을 F_1이라 하자. $\overline{G_1E_1}=\overline{G_1F_1}$이 되도록 선분 B_1D_1 위에 점 G_1을 잡아 삼각형 $G_1F_1E_1$을 그린다. 두 삼각형 $C_1D_1F_1$, $G_1F_1E_1$로 만들어진 ⋈ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 B_1F_1 위의 점 A_2, 선분 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2, 선분 C_1F_1 위의 점 D_2를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}:\overline{B_2C_2}=1:2$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다. 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 ⋈ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?



① $\frac{23}{42}$ ② $\frac{25}{42}$ ③ $\frac{9}{14}$
④ $\frac{29}{42}$ ⑤ $\frac{31}{42}$

2022년 9월/평가원 27

100. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=4$, $\overline{A_1D_1}=1$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 두 대각선의 교점을 E_1이라 하자. $\overline{A_2D_1}=\overline{D_1E_1}$, $\angle A_2D_1E_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 D_1C_1과 선분 A_2E_1이 만나도록 점 A_2를 잡고, $\overline{B_2C_1}=\overline{C_1E_1}$, $\angle B_2C_1E_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 D_1C_1과 선분 B_2E_1이 만나도록 점 B_2를 잡는다. 두 삼각형 $A_2D_1E_1$, $B_2C_1E_1$을 그린 후 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=4:1$이고 선분 D_2C_2가 두 선분 A_2E_1, B_2E_1과 만나지 않도록 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 세 점 E_2, A_3, B_3을 잡고 두 삼각형 $A_3D_2E_2$, $B_3C_2E_2$를 그린 후 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?



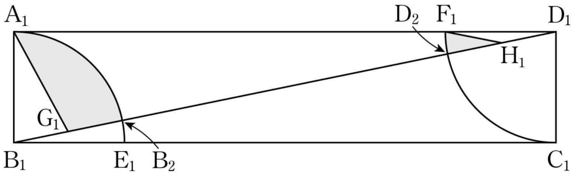
① $\frac{68}{5}$ ② $\frac{34}{3}$ ③ $\frac{68}{7}$
④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{68}{9}$

2022년 10월/교육청 27

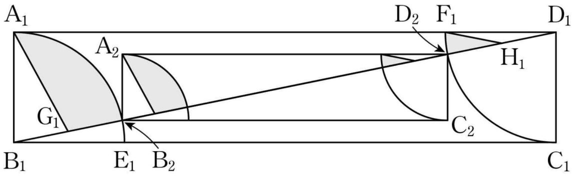
101. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=2\sqrt{6}$ 인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 중심이 B_1이고 반지름의 길이가 1인 원이 선분 B_1C_1과 만나는 점을 E_1이라 하고, 중심이 D_1이고 반지금의 길이가 1인 원이 선분 A_1D_1과 만나는 점을 F_1이라 하자. 선분 B_1D_1이 호 A_1E_1, 호 C_1F_1과 만나는 점을 각각 B_2, D_2라 하고, 두 선분 B_1B_2, D_1D_2의 중점을 각각 G_1, H_1이라 하자.

두 선분 A_1G_1, G_1B_1와 호 B_2A_1로 둘러싸인 부분인 모양의 도형과 두 선분 D_2H_1, H_1F_1과 호 F_1D_2로 둘러싸인 부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 B_2D_2가 대각선이고 모든 변이 선분 A_1B_1또는 선분 B_1C_1에 평행한 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다. 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 모양의 도형과 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이과 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\dfrac{25\pi-12\sqrt{6}-5}{64}$ ② $\dfrac{25\pi-12\sqrt{6}-4}{64}$

③ $\dfrac{25\pi-10\sqrt{6}-6}{64}$ ④ $\dfrac{25\pi-10\sqrt{6}-5}{64}$

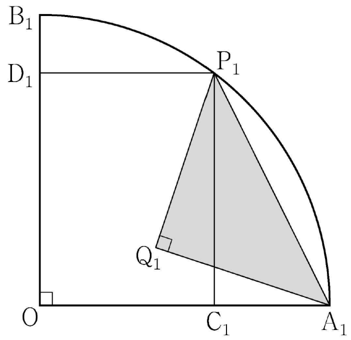
⑤ $\dfrac{25\pi-10\sqrt{6}-4}{64}$

2022년 11월/수능 27

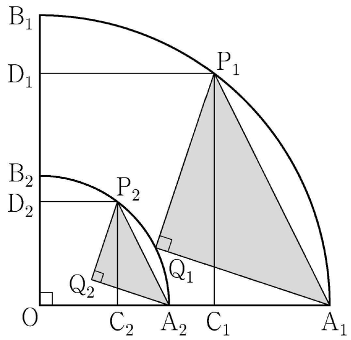
102. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\dfrac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_1B_1이 있다. 호 A_1B_1 위에 점 P_1, 선분 OA_1 위에 점 C_1, 선분 OB_1 위에 점 D_1을 사각형 $OC_1P_1D_1$이 $\overline{OC_1}:\overline{OD_1}=3:4$인 직사각형이 되도록 잡는다.

부채꼴 OA_1B_1의 내부에 점 Q_1을 $\overline{P_1Q_1}=\overline{A_1Q_1}$, $\angle P_1Q_1A_1=\dfrac{\pi}{2}$가 되도록 잡고, 이등변삼각형 $P_1Q_1A_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 OA_1 위의 점 A_2, 와 선분 OB_1 위의 점 B_2를 $\overline{OQ_1}=\overline{OA_2}=\overline{OB_2}$가 되도록 잡고, 중심이 O, 반지름의 길이가 $\overline{OQ_1}$, 중심각의 크기가 $\dfrac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_2B_2를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 네 점 P_2, C_2, D_2, Q_2를 잡고, 이등변삼각형 $P_2Q_2A_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?

R_1



R_2



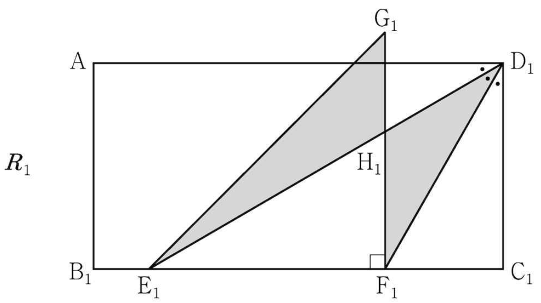
⋮ ⋮

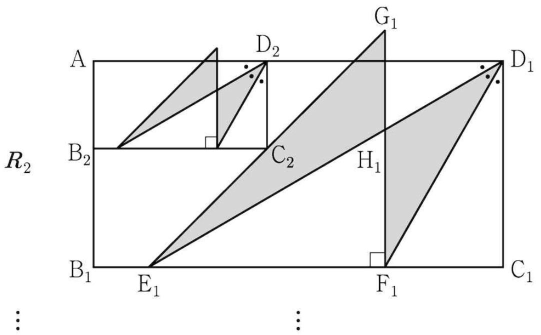
① $\dfrac{9}{40}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{11}{40}$

④ $\dfrac{3}{10}$ ⑤ $\dfrac{13}{40}$

2022학년도 9월/평가원 27

103. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=2$인 직사각형 $AB_1C_1D_1$이 있다. $\angle AD_1C_1$을 삼등분하는 두 직선이 선분 B_1C_1과 만나는 점 중 점 B_1에 가까운 점을 E_1, 점 C_1에 가까운 점을 F_1이라 하자. $\overline{E_1F_1}=\overline{F_1G_1}$, $\angle E_1F_1G_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 AD_1과 선분 F_1G_1이 만나도록 점 G_1을 잡아 삼각형 $E_1F_1G_1$을 그린다.
선분 E_1D_1과 선분 F_1G_1이 만나는 점을 H_1이라 할 때, 두 삼각형 $G_1E_1H_1$, $H_1F_1D_1$로 만들어진 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 AB_1 위의 점 B_2, 선분 E_1G_1 위의 점 C_2, 선분 AD_1 위의 점 D_2와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB_2}:\overline{B_2C_2}=1:2$인 직사각형 $AB_2C_2D_2$를 그린다. 직사각형 $AB_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?





① $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ ② $\frac{5\sqrt{3}}{18}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$
④ $\frac{7\sqrt{3}}{18}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

2024년 6월/평가원 27

104. 실수 $t(0<t<\pi)$에 대하여 곡선 $y=\sin x$위의 점 $P(t,\ \sin t)$에서의 접선과 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\lim_{t\to\pi-}\frac{\tan\theta}{(\pi-t)^2}$의 값은?

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

2024년 10월/교육청 27

105. 함수 $f(x)=e^{3x}-ax$ (a는 상수)와 상수 k에 대하여 함수

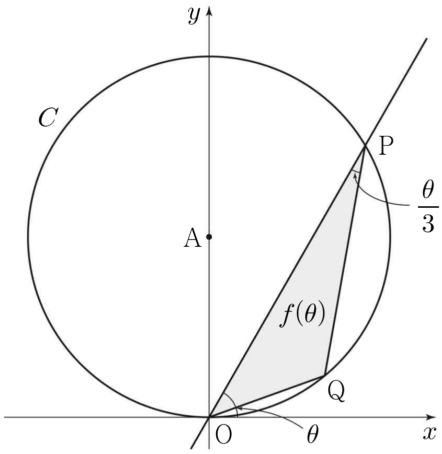
$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\geq k) \\ -f(x) & (x<k) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이고 역함수를 가질 때, $a\times k$의 값은?

① e ② $e^{\frac{3}{2}}$ ③ e^2
④ $e^{\frac{5}{2}}$ ⑤ e^3

2023년 4월/교육청 27

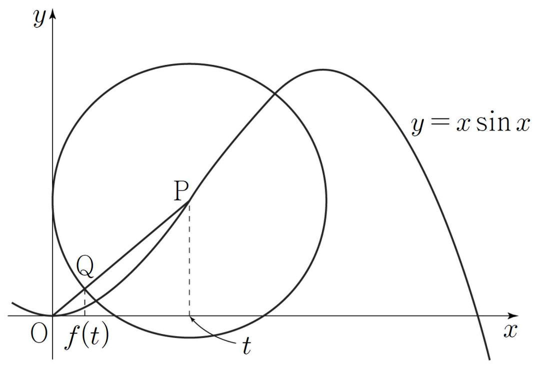
106. 그림과 같이 좌표평면 위에 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다. 원점 O를 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ인 직선이 원 C와 만나는 점 중 O가 아닌 점을 P라 하고, 호 OP 위에 점 Q를 $\angle \mathrm{OPQ} = \frac{\theta}{3}$가 되도록 잡는다. 삼각형 POQ의 넓이를 $f(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)}{\theta^3}$의 값은? (단, 점 Q는 제1사분면 위의 점이고, $0 < \theta < \pi$이다.)



① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$
④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

2021년 4월/교육청 27

107. 그림과 같이 곡선 $y = x\sin x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t\sin t)$ $(0 < t < \pi)$를 중심으로 하고 y축에 접하는 원이 선분 OP와 만나는 점을 Q라 하자. 점 Q의 x좌표를 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t \to 0+} \frac{f(t)}{t^3}$의 값은? (단, O는 원점이다.)



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ 1

2024년 5월/교육청 27

108. 함수 $f(x) = x^3 + x + 1$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x = g(t) + t,\ y = g(t) - t$$

에서 $t = 3$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은?

① $-\frac{1}{5}$ ② $-\frac{3}{10}$ ③ $-\frac{2}{5}$
④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{3}{5}$

2024년 9월/평가원 27

109. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)+f\left(\frac{1}{2}\sin x\right)=\sin x$$

를 만족시킬 때, $f'(\pi)$의 값은?

① $-\frac{5}{6}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$
④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

2025년 5월/교육청 27

110. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 역함수 $g(x)$를 갖고, 모든 실수 x에 대하여

$$e^{2f(x)}-e^{f(2x)}-2e^{3x}=0$$

을 만족시킨다. $g'(f(0))$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

2023년 6월/평가원 27

111. 실수 $t(0<t<\pi)$에 대하여 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$에서의 접선과 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\lim_{t\to\pi-}\frac{\tan\theta}{(\pi-t)^2}$의 값은?

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

2023년 11월/수능 27

112. 실수 t에 대하여 원점을 지나고 곡선 $y=\frac{1}{e^x}+e^t$에 접하는 직선의 기울기를 $f(t)$라 하자. $f(a)=-e\sqrt{e}$를 만족시키는 상수 a에 대하여 $f'(a)$의 값은?

① $-\frac{1}{3}e\sqrt{e}$ ② $-\frac{1}{2}e\sqrt{e}$
③ $-\frac{2}{3}e\sqrt{e}$ ④ $-\frac{5}{6}e\sqrt{e}$
⑤ $-e\sqrt{e}$

2022학년도 6월/평가원 27

113. 두 함수

$$f(x)=e^x,\ g(x)=k\sin x$$

에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3일 때, 양수 k의 값은?

① $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{2}}$ ② $\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}}$ ③ $\sqrt{2}e^{2\pi}$
④ $\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}}$ ⑤ $\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{2}}$

2021년 7월/교육청 27

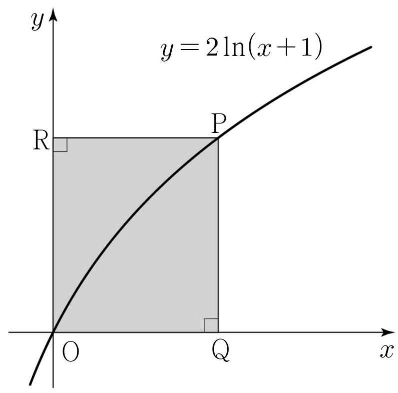
114. 곡선 $y=xe^{-2x}$의 변곡점을 A라 하자. 곡선 $y=xe^{-2x}$ 위의 점 A에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이는? (단, O는 원점이다.)

① e^{-2} ② $3e^{-2}$ ③ 1
④ e^2 ⑤ $3e^2$

2024년 7월/교육청 27

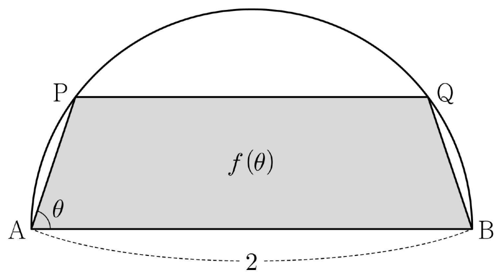
115. 양수 t에 대하여 곡선 $y=2\ln(x+1)$ 위의 점 P(t, $2\ln(t+1)$)에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 할 때, 직사각형 OQPR의 넓이를 $f(t)$라 하자. $\int_1^3 f(t)dt$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $-2+12\ln2$ ② $-1+12\ln2$ ③ $-2+16\ln2$
④ $-1+16\ln2$ ⑤ $-2+20\ln2$



2025년 6월/평가원 27

116. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{BAP}=\theta\ \left(\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하고, 점 P를 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 사각형 ABQP의 넓이를 $f(\theta)$라 하고, $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=1:3$이 되도록 하는 θ의 값을 a라 할 때, $f'(a)$의 값은? [3점]



① $-\frac{64}{25}$ ② $-\frac{59}{25}$ ③ $-\frac{54}{25}$
④ $-\frac{49}{25}$ ⑤ $-\frac{44}{25}$

2023년 9월/평가원 27

117. $x=-\ln 4$에서 $x=1$까지의 곡선 $y=\frac{1}{2}\left(|e^x-1|-e^{|x|}+1\right)$의 길이는?

① $\frac{23}{8}$ ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{29}{8}$
④ 4 ⑤ $\frac{35}{8}$

2021년 10월/교육청 27

118. 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)>f(x_2)$이다.
> (나) 닫힌구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 1이고 최솟값은 -2이다.

$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx=3$일 때, $\int_{-2}^{1} f^{-1}(x)\,dx$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

2022학년도 수능/평가원 27

119. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 위치가 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=t^2x-\frac{\ln t}{8}$가 만나는 서로 다른 두 점의 중점일 때, 시각 $t=1$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는?

① $\frac{e^4}{2}-\frac{3}{8}$ ② $\frac{e^4}{2}-\frac{5}{16}$ ③ $\frac{e^4}{2}-\frac{1}{4}$
④ $\frac{e^4}{2}-\frac{3}{16}$ ⑤ $\frac{e^4}{2}-\frac{1}{8}$

28..29

2023년 3월/교육청 28

120. $a>0$, $a \neq 1$인 실수 a와 자연수 n에 대하여 직선 $y=n$이 y축과 만나는 점을 A_n, 직선 $y=n$이 곡선 $y=\log_a(x-1)$과 만나는 점을 B_n이라 하자. 사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}$의 넓이를 S_n이라 할 때,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}}}{S_n} = \frac{3}{2a+2}$$

을 만족시키는 모든 a의 값의 합은?

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

2022년 3월/교육청 28

121. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 A_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) A_1은 원점이다.
(나) n이 홀수이면 A_{n+1}은 점 A_n을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 점이다.
(다) n이 짝수이면 A_{n+1}은 점 A_n을 y축의 방향으로 $a+1$만큼 평행이동한 점이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_{2n}}}{n} = \frac{\sqrt{34}}{2}$ 일 때, 양수 a의 값은?

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 2 ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

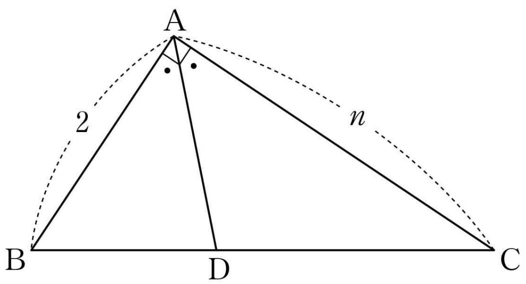
2024년 3월/교육청 28

122. 자연수 n에 대하여 직선 $y=2nx$과 곡선 $y=x^2+n^2-1$과 만나는 두 점을 각각 A_n, B_n이라 하자. 원 $(x-2)^2+y^2=1$ 위의 점 P에 대하여 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{P}$의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P를 P_n이라 할 때, $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{P}_n$의 넓이를 S_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

2021년 3월/교육청 28

123. 자연수 n에 대하여 $\angle\mathrm{A}=90°$, $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{CA}}=n$인 삼각형 ABC에서 $\angle\mathrm{A}$의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 D라 하자. 선분 CD의 길이를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}(n-a_n)$의 값은?



① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

2025년 3월/교육청 28

124. 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx\ (a>0)$이 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 실수 x에 대하여 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+2}+x^n+f(x)}{x^{2n}+x^n+1}$의 값이 존재한다.

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

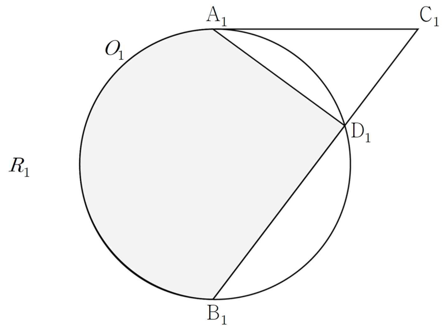
$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+2}+x^n+f(x)}{x^{2n}+x^n+1}$$

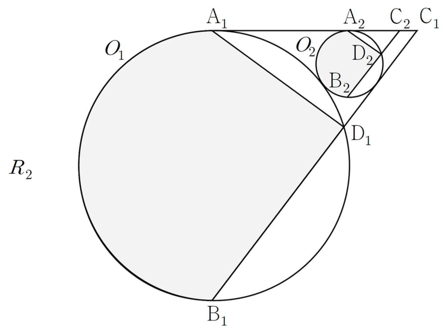
라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수가 1이 되도록 하는 자연수 k가 존재할 때, $g\left(-\frac{1}{2}\right)\times g(2)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $6\sqrt{3}$ ② $7\sqrt{3}$ ③ $8\sqrt{3}$
④ $9\sqrt{3}$ ⑤ $10\sqrt{3}$

2021년 4월/교육청 28

125. 그림과 같이 길이가 4인 선분 $\mathrm{A_1B_1}$을 지름으로 하는 원 O_1이 있다. 원 O_1의 외부에 $\angle\mathrm{B_1A_1C_1}=\frac{\pi}{2}$, $\overline{\mathrm{A_1B_1}}:\overline{\mathrm{A_1C_1}}=4:3$이 되도록 점 $\mathrm{C_1}$을 잡고 두 선분 $\mathrm{A_1C_1}$, $\mathrm{B_1C_1}$을 그린다. 원 O_1과 선분 $\mathrm{B_1C_1}$의 교점 중 $\mathrm{B_1}$이 아닌 점을 $\mathrm{D_1}$이라 하고, 점 $\mathrm{D_1}$을 포함하지 않는 호 $\mathrm{A_1B_1}$과 두 선분 $\mathrm{A_1D_1}$, $\mathrm{B_1D_1}$로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 호 $\mathrm{A_1D_1}$과 두 선분 $\mathrm{A_1C_1}$, $\mathrm{C_1D_1}$에 동시에 접하는 원 O_2를 그리고 선분 $\mathrm{A_1C_1}$과 원 O_2의 교점을 $\mathrm{A_2}$, 점 $\mathrm{A_2}$를 지나고 직선 $\mathrm{A_1B_1}$과 평행한 직선이 원 O_2와 만나는 점 중 $\mathrm{A_2}$가 아닌 점을 $\mathrm{B_2}$라 하자. 그림 R_1에서 얻은 것과 같은 방법으로 두 점 $\mathrm{C_2}$, $\mathrm{D_2}$를 잡고, 점 $\mathrm{D_2}$를 포함하지 않는 호 $\mathrm{A_2B_2}$와 두 선분 $\mathrm{A_2D_2}$, $\mathrm{B_2D_2}$로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?





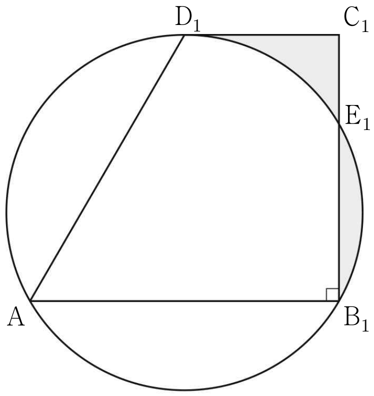
⋮ ⋮

① $\frac{32}{15}\pi+\frac{256}{125}$ ② $\frac{9}{4}\pi+\frac{54}{25}$ ③ $\frac{32}{15}\pi+\frac{512}{125}$
④ $\frac{9}{4}\pi+\frac{108}{25}$ ⑤ $\frac{8}{3}\pi+\frac{128}{25}$

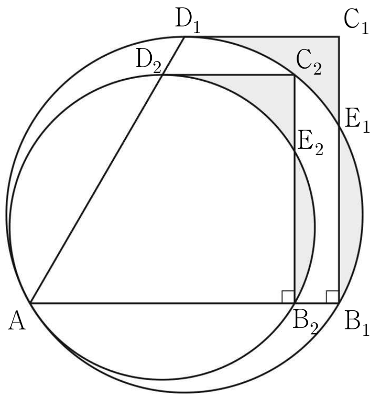
2023년 4월/교육청 28

126. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=2$, $\overline{B_1C_1}=\sqrt{3}$, $\overline{C_1D_1}=1$이고 $\angle C_1B_1A=\frac{\pi}{2}$인 사다리꼴 $AB_1C_1D_1$이 있다. 세 점 A, B_1, D_1을 지나는 원이 선분 B_1C_1과 만나는 점 중 B_1이 아닌 점을 E_1이라 할 때, 두 선분 C_1D_1, C_1E_1과 호 E_1D_1로 둘러싸인 부분과 선분 B_1E_1과 호 B_1E_1로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 AB_1 위의 점 B_2, 호 E_1D_1 위의 점 C_2, 선분 AD_1위의 점 D_2와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{B_2C_2}:\overline{C_2D_2}=\sqrt{3}:1$이고 $\angle C_2B_2A=\frac{\pi}{2}$인 사다리꼴 $AB_2C_2D_2$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 점 E_2를 잡고, 사다리꼴 $AB_2C_2D_2$에  모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?

R_1



R_2



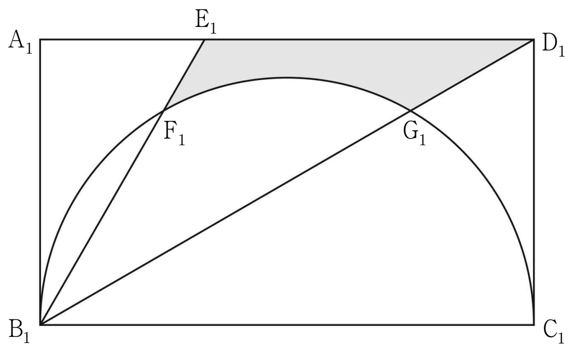
⋮ ⋮

① $\frac{49}{144}\sqrt{3}$ ② $\frac{49}{122}\sqrt{3}$ ③ $\frac{49}{100}\sqrt{3}$
④ $\frac{49}{78}\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{7}{8}\sqrt{3}$

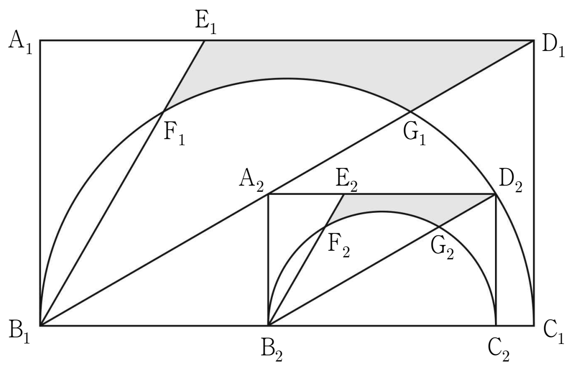
2022년 4월/교육청 28

127. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=2$, $\overline{B_1C_1}=2\sqrt{3}$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 A_1D_1을 $1:2$로 내분하는 점을 E_1이라 하고 선분 B_1C_1을 지름으로 하는 반원의 호 B_1C_1이 두 선분 B_1E_1, B_1D_1과 만나는 점 중 B_1이 아닌 점을 각각 F_1, G_1이라 하자.
세 선분 F_1E_1, E_1D_1, D_1G_1과 호 F_1G_1로 둘러싸인  모양의 도형이 색칠하는 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 B_1G_1 위의 점 A_2, 호 G_1C_1 위의 점 D_2와 선분 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}:\overline{B_2C_2}=1:\sqrt{3}$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다.
직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로  모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\frac{169}{864}(8\sqrt{3}-3\pi)$ ② $\frac{169}{798}(8\sqrt{3}-3\pi)$
③ $\frac{169}{720}(8\sqrt{3}-3\pi)$ ④ $\frac{169}{864}(16\sqrt{3}-3\pi)$
⑤ $\frac{169}{798}(16\sqrt{3}-3\pi)$

2024년 5월/교육청 28

128. 두 상수 a $(a>0)$, b에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$$f(x)=a\sin x-\cos x,\ g(x)=e^{2x-b}-1$$

이라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\tan b$의 값은?

(가) $f(k)=g(k)=0$을 만족시키는 실수 k가 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$에 존재한다.

(나) 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 방정식 $\{f(x)g(x)\}'=2f(x)$의 모든 해의 합은 $\frac{\pi}{4}$이다.

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

2024년 6월/평가원 28

129. 두 상수 $a(a>0)$, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a\times b$의 값은?

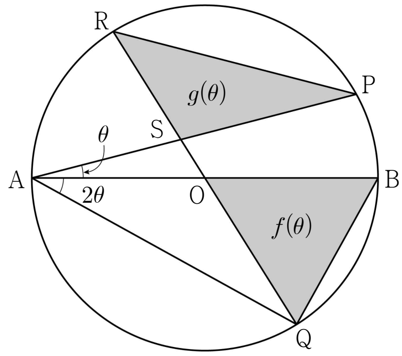
(가) 모든 실수 x에 대하여
$\{f(x)\}^2+2f(x)=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b$
이다.

(나) $f(0)=f(2)+1$

① $-\frac{1}{16}$ ② $-\frac{7}{64}$ ③ $-\frac{5}{32}$ ④ $-\frac{13}{64}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

2023년 7월/교육청 28

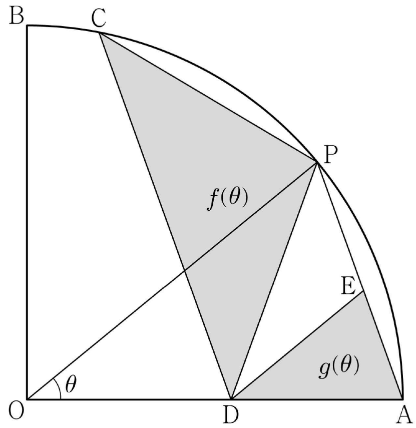
130. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원이 있다. 원 위에 점 P를 $\angle\mathrm{PAB}=\theta$가 되도록 잡고, 점 P를 포함하지 않는 호 AB 위에 점 Q를 $\angle\mathrm{QAB}=2\theta$가 되도록 잡는다. 직선 OQ가 원과 만나는 점 중 Q가 아닌 점을 R, 두 선분 PA와 QR가 만나는 점을 S라 하자. 삼각형 BOQ의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PRS의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{f(\theta)}$의 값은? $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{6}\right)$



① $\frac{11}{10}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{13}{10}$ ④ $\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

2022년 9월/평가원 28

131. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PC}}=\overline{\mathrm{PD}}$가 되도록 호 PB 위에 점 C와 선분 OA 위에 점 D를 잡는다. 점 D를 지나고 선분 OP와 평행한 직선이 선분 PA와 만나는 점을 E라 하자. $\angle\mathrm{POA}=\theta$일 때, 삼각형 CDP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 EDA의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}$의 값은? $\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$

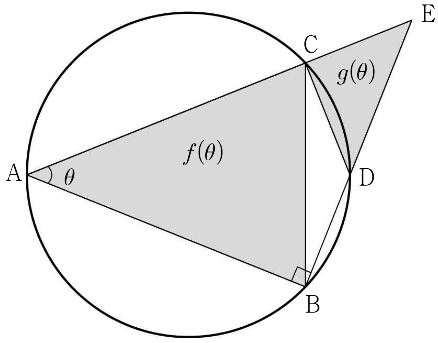


① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

2021년 7월/교육청 28

132. 그림과 같이 반지름의 길이가 5인 원에 내접하고, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$인 삼각형 ABC가 있다. $\angle\mathrm{BAC}=\theta$라 하고, 점 B를 지나고 직선 AB에 수직인 직선이 원과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D, 직선 BD와 직선 AC가 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 CDE의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}$의 값은? $\left(단, 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$



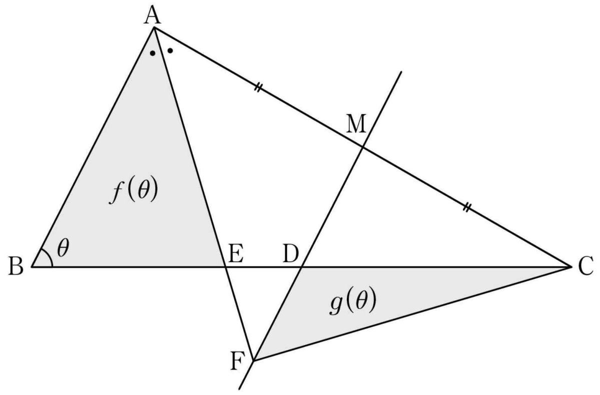
① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

2021년 10월/교육청 28

133. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$인 삼각형 ABC에 대하여 선분 AC의 중점을 M이라 하고, 점 M을 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 선분 BC와 만나는 점을 D라 하자. $\angle BAC$의 이등분선이 두 직선 BC, DM과 만나는 점을 각각 E, F라 하자. $\angle CBA=\theta$일 때, 삼각형 ABE의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 DFC의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

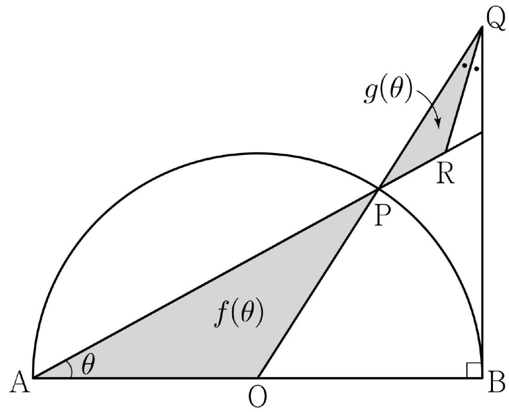
$\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta^2 \times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\pi$)



① $\frac{1}{8}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{2}$
④ 1　⑤ 2

2022학년도 6월/평가원 28

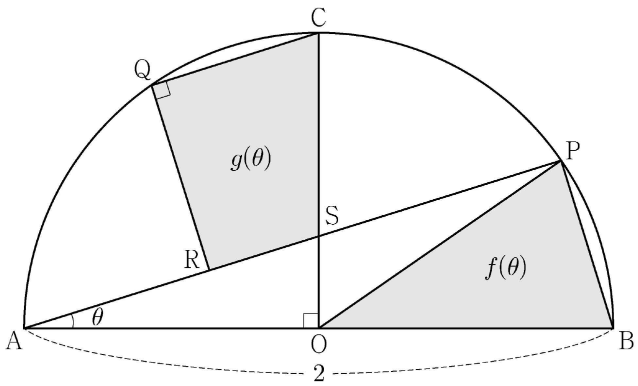
134. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 OP와 만나는 점을 Q라 하고, $\angle OQB$의 이등분선이 직선 AP와 만나는 점을 R라 하자. $\angle OAP=\theta$일 때, 삼각형 OAP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PQR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta^4 \times f(\theta)}$의 값은? $\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$



① 2　② $\frac{5}{2}$　③ 3
④ $\frac{7}{2}$　⑤ 4

2022년 11월/수능 28

135. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 $\angle\mathrm{AOC}=\frac{\pi}{2}$인 점 C가 있다. 호 BC 위에 점 P와 호 CA 위에 점 Q를 $\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{QC}}$가 되도록 잡고, 선분 AP 위에 점 R를 $\angle\mathrm{CQR}=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡는다. 선분 AP와 선분 CO의 교점을 S라 하자. $\angle\mathrm{PAB}=\theta$일 때, 삼각형 POB의 넓이를 $f(\theta)$, 사각형 CQRS의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0+}\frac{3f(\theta)-2g(\theta)}{\theta^2}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2024년 7월/교육청 28

136. 최고차항의 계수가 1이고 역함수가 존재하는 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자.
실수 k $(k>0)$에 대하여 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases}\frac{g(x)-k}{x-k} & (x\neq k)\\ \frac{1}{3} & (x=k)\end{cases}$$

이다. 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(0)$의 값이 최대일 때, k의 값을 α라 하자.

(가) $h(0)=1$
(나) 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$k=\alpha$일 때, $\alpha\times h(9)\times g'(9)$의 값은?

① $\frac{1}{84}$ ② $\frac{1}{42}$ ③ $\frac{1}{28}$ ④ $\frac{1}{21}$ ⑤ $\frac{5}{84}$

2023년 6월/평가원 28

137. 두 상수 $a(a>0)$, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a\times b$의 값은?

(가) 모든 실수 x에 대하여
$$\{f(x)\}^2+2f(x)=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b$$
이다.
(나) $f(0)=f(2)+1$

① $-\frac{1}{16}$ ② $-\frac{7}{64}$ ③ $-\frac{5}{32}$
④ $-\frac{13}{64}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

2022년 6월/평가원 28

138. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases}\ln|f(x)| & (f(x)\neq 0)\\ 1 & (f(x)=0)\end{cases}$$

이고 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $g(x)$의 극솟값은?

(가) 함수 $g(x)$는 $x\neq 1$인 모든 실수 x에서 연속이다.
(나) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극대이고,
함수 $|g(x)|$는 $x=2$에서 극소이다.
(다) 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① $\ln\frac{13}{27}$ ② $\ln\frac{16}{27}$ ③ $\ln\frac{19}{27}$
④ $\ln\frac{22}{27}$ ⑤ $\ln\frac{25}{27}$

2025년 6월/평가원 28

139. 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$와 두 상수 a, b가 다음 조건을 만족시킬 때, $a\times e^b$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여
$$(f(x))^5+(f(x))^3+ax+b=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$$
이다.
(나) $f(-3)f(3)<0$, $f'(2)>0$

① $-3e^{-\frac{4}{3}}$ ② $-\frac{5}{3}e^{-\frac{4}{3}}$ ③ $-\frac{1}{3}e^{-\frac{4}{3}}$
④ $e^{-\frac{4}{3}}$ ⑤ $\frac{7}{3}e^{-\frac{4}{3}}$

2025년 5월/교육청 28

140. 7π보다 작은 두 양수 a, b에 대하여 함수
$$f(x)=\sin(a+b\cos x)$$
가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [4점]

(가) 방정식 $f'(x)=b$의 해가 존재한다.
(나) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin\left(f(a)\left(\pi+\frac{x}{4}\right)\right)=\frac{b}{a}$

① 5π ② $\frac{25}{4}\pi$ ③ $\frac{15}{2}\pi$
④ $\frac{35}{4}\pi$ ⑤ 10π

2022학년도 수능/평가원 28

141. 함수 $f(x)=6\pi(x-1)^2$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=3f(x)+4\cos f(x)$$

라 하자. $0<x<2$에서 함수 $g(x)$가 극소가 되는 x의 개수는?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

2024년 10월/교육청 28

142. 함수 $y=\frac{2\pi}{x}$의 그래프와 함수 $y=\cos x$의 그래프가 만나는 점의 x좌표 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, m번째 수를 a_m이라 하자.

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{n\times cos^2\left(a_{n+k}\right)\right\}$의 값은?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

2023년 9월/평가원 28

143. 실수 $a(0<a<2)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}2|\sin 4x| & (x<0)\\ -\sin ax & (x\geq 0)\end{cases}$$

이라 하자. 함수

$$g(x)=\left|\int_{-a\pi}^{x}f(t)dt\right|$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, a의 최솟값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1
④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

2024년 9월/평가원 28

144. 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속인 이계도함수를 갖고, 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f'(2x)\sin\pi x+x$$

라 하자. 함수 $g(x)$는 역함수 $g^{-1}(x)$를 갖고,

$$\int_0^1 g^{-1}(x)dx=2\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x dx+\frac{1}{4}$$

을 만족시킬 때, $\int_0^1 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x dx$의 값은?

① $-\frac{1}{\pi}$ ② $-\frac{1}{2\pi}$ ③ $-\frac{1}{3\pi}$
④ $-\frac{1}{4\pi}$ ⑤ $-\frac{1}{5\pi}$

2023년 10월/교육청 28

145. 함수

$$f(x)=\sin x\cos x\times e^{a\sin x+b\cos x}$$

이 다음 조건을 만족시키도록 하는 서로 다른 두 실수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$에 대하여 $a-b$의 최솟값은?

(가) $ab=0$

(나) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=\frac{1}{a^2+b^2}-2e^{a+b}$

① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$

④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

2023년 11월/수능 28

146. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이고, $x<0$일 때 $f(x)=-4xe^{4x^2}$이다.
모든 양수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는 2이고, 이 방정식의 두 실근 중 작은 값을 $g(t)$, 큰 값을 $h(t)$라 하자.
두 함수 $g(t)$, $h(t)$는 모든 양수 t에 대하여

$$2g(t)+h(t)=k\ \ (k\text{는 상수})$$

를 만족시킨다. $\int_0^7 f(x)dx=e^4-1$일 때, $\frac{f(9)}{f(8)}$의 값은?

① $\frac{3}{2}e^5$ ② $\frac{4}{3}e^7$ ③ $\frac{5}{4}e^9$

④ $\frac{6}{5}e^{11}$ ⑤ $\frac{7}{6}e^{13}$

2022년 7월/교육청 28

147. 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-x)=f(x)$

(나) $f(x+2)=f(x)$

$\int_{-1}^{5} f(x)(x+\cos 2\pi x)\,dx=\frac{47}{2}$, $\int_0^1 f(x)\,dx=2$일 때,

$\int_0^1 f'(x)\sin 2\pi x\,dx$의 값은?

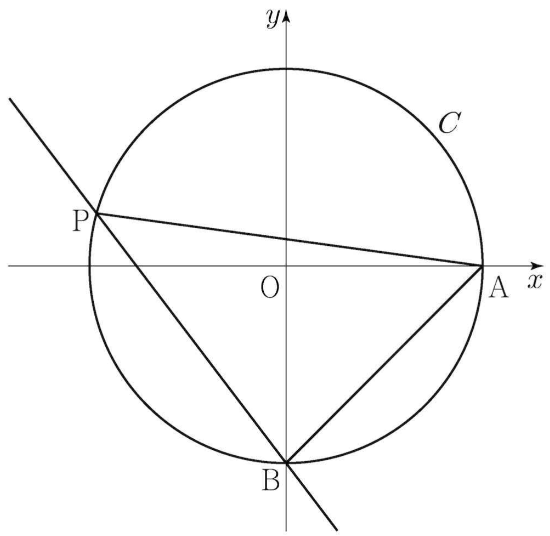
① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$

④ $\frac{5}{12}\pi$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

2022학년도 9월/평가원 28

148. 좌표평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 C와 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ -2)$가 있다. 원 C 위에 있고 x좌표가 음수인 점 P에 대하여 $\angle\mathrm{PAB}=\theta$라 하자.
점 $\mathrm{Q}(0,\ 2\cos\theta)$에서 직선 BP에 내린 수선의 발을 R라 하고, 두 점 P와 R 사이의 거리를 $f(\theta)$라 할 때, $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)d\theta$의 값은?

① $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{2}$ ② $\sqrt{3}-1$ ③ $\dfrac{3\sqrt{3}-3}{2}$
④ $\dfrac{2\sqrt{3}-1}{2}$ ⑤ $\dfrac{4\sqrt{3}-3}{2}$



2022년 10월/교육청 28

149. 닫힌구간 $[0,\ 4\pi]$에서 연속이고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $\int_0^{4\pi}|f(x)|dx$의 최솟값은?

(가) $0 \le x \le \pi$일 때, $f(x)=1-\cos x$이다.
(나) $1 \le n \le 3$인 각각의 자연수 n에 대하여
$f(n\pi+t)=f(n\pi)+f(t)\ \ (0<t\le\pi)$
또는
$f(n\pi+t)=f(n\pi)-f(t)\ \ (0<t\le\pi)$
이다.
(다) $0<x<4\pi$에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수는 6이다.

① 4π ② 6π ③ 8π
④ 10π ⑤ 12π

2023년 3월/교육청 29

150. 자연수 n에 대하여 x에 대한 부등식 $x^2-4nx-n<0$을 만족시키는 정수 x의 개수를 a_n이라 하자. 두 상수 p, q에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{na_n}-pn\right)=q$$

일 때, $100pq$의 값을 구하시오.

2022년 3월/교육청 29

151. 실수 t에 대하여 직선 $t=tx-2$가 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+1}-1}{x^{2n}+1}$$

의 그래프와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 모든 a의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m$(m은 자연수)라 할 때, $m\times a_m$의 값을 구하시오.

2023년 9월/평가원 29

152. 두 실수 $a,\ b\ (a>1,\ b>1)$이

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=a,\ \lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=\frac{9}{a}$$

를 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오.

2025년 6월/평가원 29

153. 두 정수 $\alpha,\ \beta\ (\alpha>\beta)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_n=\alpha\times sin\frac{n}{2}\pi+\beta\times cos\frac{n}{2}\pi$$
> 이고, $a_1\times a_2\times a_3\times a_4=4$이다.

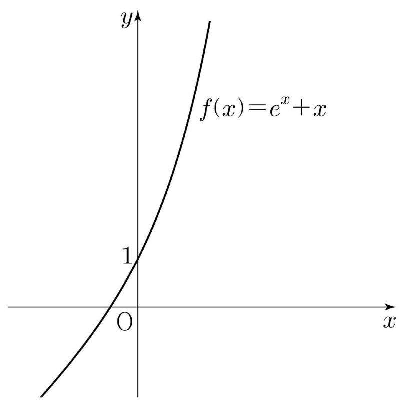
수열 $\{a_n\}$과 $b_1>0$인 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-2}b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-3}b_{2n})=6$$

일 때, $b_1\times b_3=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2022년 9월/평가원 29

154. 함수 $f(x)=e^x+x$가 있다. 양수 t에 대하여 점 $(t,\ 0)$과 점 $(x,\ f(x))$ 사이의 거리가 $x=s$에서 최소일 때, 실수 $f(s)$의 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$의 역함수를 $h(t)$라 할 때, $h'(1)$의 값을 구하시오.

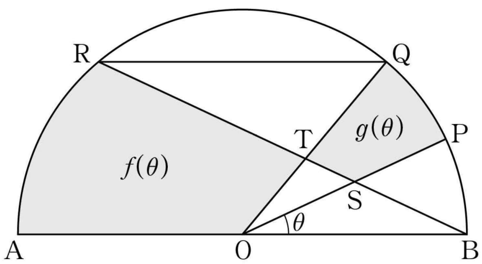


2022년 10월/교육청 29

155. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 하고 호 AB 위에 두 점 P, Q를

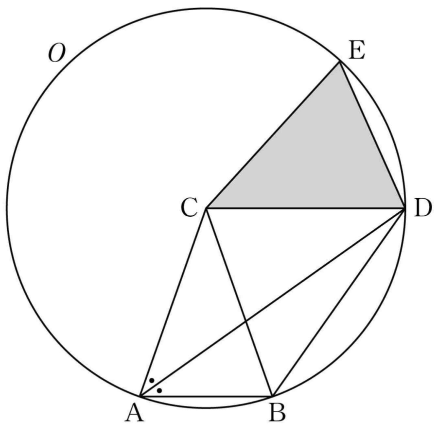
$$\angle \mathrm{BOP} = \theta,\ \ \angle \mathrm{BOQ} = 2\theta$$

가 되도록 잡는다. 점 Q를 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점 중 Q가 아닌 점을 R라 하고, 선분 BR가 두 선분 OP, OQ와 만나는 점을 각각 S, T라 하자. 세 선분 AO, OT, TR와 호 RA로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$라 하고, 세 선분 QT, TS, SP와 호 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{g(\theta)}{f(\theta)} = a$일 때, $80a$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$)



2025년 3월/교육청 29

156. 그림과 같이 자연수 n $(n \geq 2)$에 대하여 중심이 C이고 반지름의 길이가 n인 원 O와 $\overline{\mathrm{AB}} = 2$를 만족시키는 원 O 위의 두 점 A, B가 있다. $\angle \mathrm{BAC}$를 이등분하는 직선이 원 O와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하자. 점 B를 포함하지 않는 호 AD 위의 점 E에 대하여 $\overline{\mathrm{BD}} : \overline{\mathrm{DE}} = \sqrt{2} : 1$일 때, 삼각형 CDE의 넓이를 S_n이라 하면 $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{\sqrt{3}}{4} n - \dfrac{S_n}{n} \right) = \dfrac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

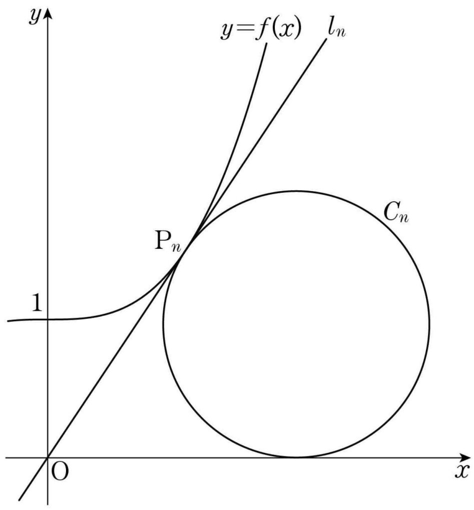


2024년 3월/교육청 29

157. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를

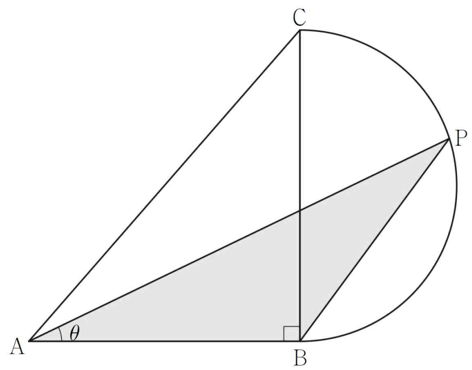
$$f(x)=\frac{4}{n^3}x^3+1$$

이라 하자. 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선을 l_n, 접선 l_n의 접점을 P_n이라 하자. x축과 직선 l_n에 동시에 접하고 점 P_n을 지나는 원 중 중심의 x좌표가 양수인 것을 C_n이라 하자. 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라 할 때, $40\times\lim_{n\to\infty}n^2(4r_n-3)$의 값을 구하시오.



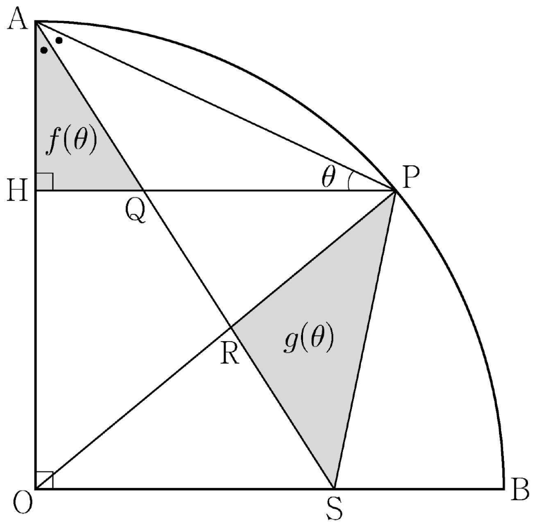
2025년 5월/교육청 29

158. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{BC}}=2$이고 $\angle\mathrm{CBA}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC와 선분 BC를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 BC 위의 점 P에 대하여 $\angle\mathrm{BAP}=\theta$일 때, 삼각형 ABP의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. $20f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$의 값을 구하시오. (단, 점 P는 점 B가 아니다.) [4점]



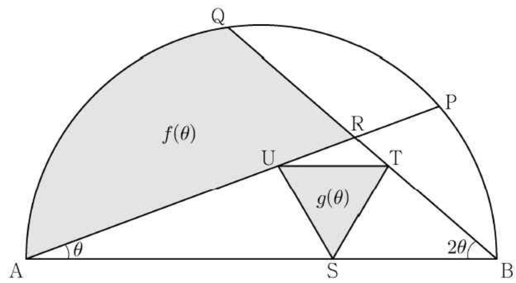
2022년 6월/평가원 29

159. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\angle$OAP를 이등분하는 직선과 세 선분 HP, OP, OB의 교점을 각각 Q, R, S라 하자. $\angle \mathrm{APH} = \theta$일 때, 삼각형 AQH의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PSR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\theta^3 \times g(\theta)}{f(\theta)} = k$일 때, $100k$의 값을 구하시오. $\left(단,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right)$



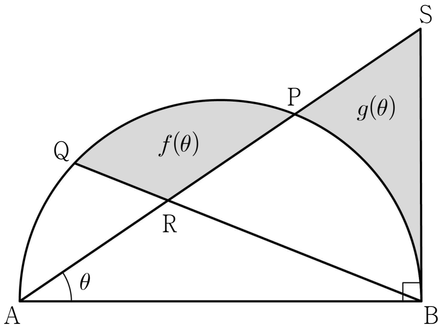
2022학년도 수능/평가원 29

160. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB위에 두점 P, Q를 $\angle \mathrm{PAB} = \theta$, $\angle \mathrm{QBA} = 2\theta$가 되도록 잡고, 두 선분 AP, BQ의 교점을 R라 하자.
선분 AB위의 점 S, 선분 BR위의 점 T, 선분 AR위의 점 U를 선분 UT가 선분 AB에 평행하고 삼각형 STU가 정삼각형이 되도록 잡는다.
두 선분 AR, QR와 호 AQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 STU의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때,
$\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta \times f(\theta)} = \frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



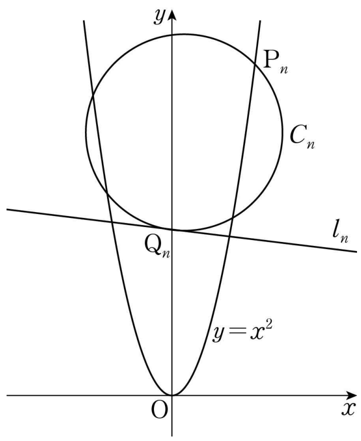
2022년 7월/교육청 29

161. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 호 AP 위에 점 Q를 호 PB와 호 PQ의 길이가 같도록 잡을 때, 두 선분 AP, BQ가 만나는 점을 R라 하고 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 AP와 만나는 점을 S라 하자. $\angle\mathrm{BAP}=\theta$라 할 때, 두 선분 PR, QR와 호 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 두 선분 PS, BS와 호 BP로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)}{\theta^3}$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$



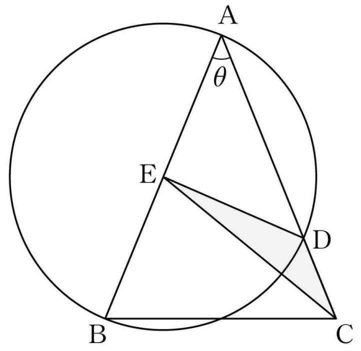
2021년 3월/교육청 29

162. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}_n(2n,\ 4n^2)$에서의 접선과 수직이고 점 $\mathrm{Q}_n(0,\ 2n^2)$을 지나는 직선을 l_n이라 하자. 점 P_n을 지나고 점 Q_n에서 직선 l_n과 접하는 원을 C_n이라 할 때, 원점을 지나고 원 C_n의 넓이를 이등분하는 직선의 기울기를 a_n이라 하자. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값을 구하시오.



2023년 10월/교육청 29

163. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{BC}}=2$인 삼각형 ABC에 대하여 선분 AB를 지름으로 하는 원이 선분 AC와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하고, 선분 AB의 중점을 E라 하자. $\angle\mathrm{BAC}=\theta$일 때, 삼각형 CDE의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $60\times\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)

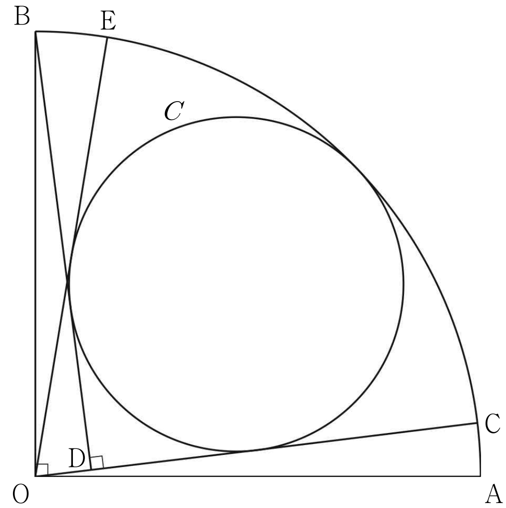


2023년 4월/교육청 29

164. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 8이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 C에 대하여 점 B에서 선분 OC에 내린 수선의 발을 D라 하고, 두 선분 BD, CD와 호 BC에 동시에 접하는 원을 C 라 하자. 점 O에서 원 C 에 그은 접선 중 점 C를 지나지 않는 직선이 호 AB와 만나는 점을 E라 할 때,

$\cos(\angle\mathrm{COE})=\frac{7}{25}$ 이다.

$\sin(\angle\mathrm{AOE})=p+q\sqrt{7}$ 일 때, $200\times(p+q)$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 유리수이고, 점 C는 점 B가 아니다.)



2023년 6월/평가원 29

165. 세 실수 a, b, k에 대하여 두 점 $\mathrm{A}(a,\ a+k)$, $\mathrm{B}(b,\ b+k)$가 곡선 $C: x^2-2xy+2y^2=15$ 위에 있다. 곡선 C 위의 점 A에서의 접선과 곡선 C 위의 점 B에서의 접선이 서로 수직일 때, k^2의 값을 구하시오. (단, $a+2k \neq 0$, $b+2k \neq 0$)

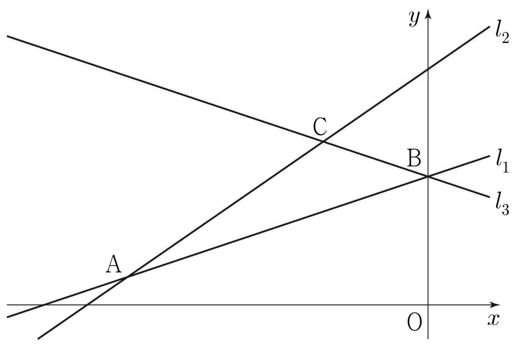
2022년 4월/교육청 29

166. 그림과 같이 좌표평면 위의 제2사분면에 있는 점 A를 지나고 기울기가 각각 m_1, m_2 $(0<m_1<m_2<1)$인 두 직선을 l_1, l_2라 하고, 직선 l_1을 y축에 대하여 대칭이동한 직선을 l_3이라 하자.
직선 l_3이 두 직선 l_1, l_2와 만나는 점을 각각 B, C라 하면 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{AB}}=12$, $\overline{\mathrm{AC}}=9$

(나) 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 $\dfrac{15}{2}$이다.

$78 \times m_1 \times m_2$의 값을 구하시오.



2024년 7월/교육청 29

167. 첫째항이 1이고 공비가 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(20a_{2n}+21\left|a_{3n-1}\right|\right)=0$$

이다. 첫째항이 0이 아닌 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{3\left|a_n\right|+b_n}{a_n}$이 수렴할 때, $b_1 \times \sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 값을 구하시오.

2024년 9월/평가원 29

168. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제m항까지의 합을 S_m이라 하자. 모든 자연수 m에 대하여

$$S_m=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m+1}{n(n+m+1)}$$

일 때, $a_1+a_{10}=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

2023년 11월/수능 29

169. 첫째항과 공비가 각각 0이 아닌 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 각각 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right),$$

$$3 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}| = 7 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n}|$$

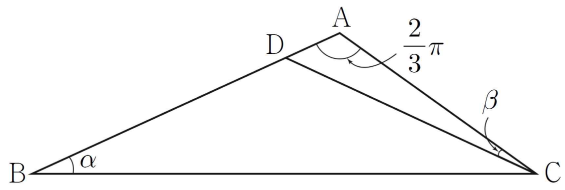
이 성립한다. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{b_{2n-1} + b_{3n+1}}{b_n} = S$일 때, $120S$의 값을 구하시오.

2024년 10월/교육청 29

170. 점 $(0,\ 1)$을 지나고 기울기가 양수인 직선 l과 곡선 $y = e^{\frac{x}{a}} - 1\,(a > 0)$이 있다. 직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ일 때, 직선 l이 곡선 $y = e^{\frac{x}{a}} - 1\,(a > 0)$과 제1사분면에서 만나는 점의 x좌표를 $f(\theta)$라 하자.
$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = a$일 때, $\sqrt{f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)} = pe + q$이다. $p^2 + q^2$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이고 p, q는 정수이다.)

2021년 4월/교육청 29

171. 그림과 같이 $\angle \mathrm{BAC}=\frac{2}{3}\pi$이고 $\overline{\mathrm{AB}}>\overline{\mathrm{AC}}$인 삼각형 ABC가 있다. $\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{CD}}$인 선분 AB 위의 점 D에 대하여 $\angle \mathrm{CBD}=\alpha$, $\angle \mathrm{ACD}=\beta$라 하자. $\cos^2\alpha=\frac{7+\sqrt{21}}{14}$일 때, $54\sqrt{3}\times\tan\beta$의 값을 구하시오.



2022학년도 6월/평가원 29

172. $t>2e$인 실수 t에 대하여 함수 $f(x)=t(\ln x)^2-x^2$이 $x=k$에서 극대일 때, 실수 k의 값을 $g(t)$라 하면 $g(t)$는 미분가능한 함수이다. $g(\alpha)=e^2$인 실수 α에 대하여 $\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

2024년 6월/평가원 29

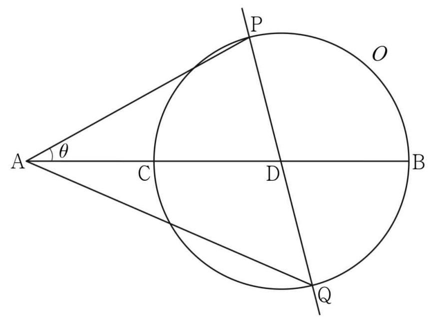
173. 세 실수 a, b, k에 대하여 두 점 $\mathrm{A}(a,\ a+k)$, $\mathrm{B}(b,\ b+k)$가 곡선 $C: x^2-2xy+2y^2=15$ 위에 있다. 곡선 C 위의 점 A에서의 접선과 곡선 C 위의 점 B에서의 접선이 서로 수직일 때, k^2의 값을 구하시오. (단, $a+2k\neq0$, $b+2k\neq0$)

2024년 5월/교육청 29

174. 그림과 같이 길이가 3인 선분 AB를 삼등분하는 점 중 A와 가까운 점을 C, B와 가까운 점을 D라 하고, 선분 BC를 지름으로 하는 원을 O라 하자. 원 O 위의 점 P를

$$\angle \mathrm{BAP}=\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{6}\right)$$

가 되도록 잡고, 두 점 P, D를 지나는 직선이 원 O와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 선분 AQ의 길이를 $f(\theta)$라 할 때, $\cos\theta_0=\frac{7}{8}$인 θ_0에 대하여 $f'(\theta_0)=k$이다. k^2의 값을 구하시오.
$\left(\text{단, } \angle \mathrm{APD}<\frac{\pi}{2}\text{이고 } 0<\theta_0<\frac{\pi}{6}\text{이다.}\right)$



2021년 7월/교육청 29

175. 함수 $f(x)=x^3-x$와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 역함수가 존재하는 삼차함수 $g(x)=ax^3+x^2+bx+1$이 있다. 함수 $g(x)$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases}(f\circ g^{-1})(x) & (x<0 \text{ 또는 } x>1)\\ \dfrac{1}{\pi}\sin\pi x & (0\le x\le 1)\end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $g(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

2022학년도 9월/평가원 29

176. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\{f(x)+2\}e^{f(x)}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(a)=6$인 a에 대하여 $g(x)$는 $x=a$에서 최댓값을 갖는다.
(나) $g(x)$는 $x=b$, $x=b+6$에서 최솟값을 갖는다.

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 할 때, $(\alpha-\beta)^2$의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수이다.)

2023년 7월/교육청 29

177. 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x<1$일 때, $f'(x)=-2x+4$이다.
(나) $x\ge 0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x^2+1)=ae^{2x}+bx$이다. (단, a, b는 상수이다.)

$\int_0^5 f(x)dx=pe^4-q$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 유리수이다.)

2022년 11월/수능 29

178. 세 상수 a, b, c에 대하여 함수 $f(x)=ae^{2x}+be^x+c$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)+6}{e^x}=1$
(나) $f(\ln 2)=0$

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,

$\int_0^{14} g(x)dx=p+q\ln 2$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이고, $\ln 2$는 무리수이다.)

2021년 10월/교육청 29

179. 함수 $f(x)=\sin(ax)(a\neq 0)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오.

(가) $\int_0^{\frac{\pi}{a}} f(x)dx \geq \frac{1}{2}$
(나) $0<t<1$인 모든 실수 t에 대하여
$$\int_0^{3\pi}|f(x)+t|dx=\int_0^{3\pi}|f(x)-t|dx$$
이다.

30

2025년 3월/교육청 30

180. 함수 $f(x)$는 $0\leq x<2$일 때 $f(x)=x(2-x)$이고 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이다. 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$이 수렴하고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) r는 유리수이다.
(나) 함수 $f(x)$가 $x=a_k$에서 극값을 갖고 $0<a_k<10$인 자연수 k의 개수는 3이다.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1a_{n+1}+a_{2n}}{a_{n+1}+a_n}=\frac{81}{10}$일 때, $a_7=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2024년 3월/교육청 30

181. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 자연수 m에 대하여 구간 $(0,\ \infty)$에서 정의된 함수 $g(x)$를
$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)\left(\frac{x}{m}\right)^n+x}{\left(\frac{x}{m}\right)^n+1}$$
라 하자. 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 구간 $(0,\ \infty)$에서 미분가능하고, $g'(m+1)\leq 0$이다.
(나) $g(k)g(k+1)=0$을 만족시키는 자연수 k의 개수는 3이다.
(다) $g(l)\geq g(l+1)$을 만족시키는 자연수 l의 개수는 3이다.

$g(12)$의 값을 구하시오.

2024년 5월/교육청 30

182. 수열 $\{a_n\}$은 공비가 0이 아닌 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n = \begin{cases} a_n & (|a_n| < \alpha) \\ -\dfrac{5}{a_n} & (|a_n| \geq \alpha) \end{cases}$$ (α는 양의 상수)

라 할 때, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$과 자연수 p가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4$

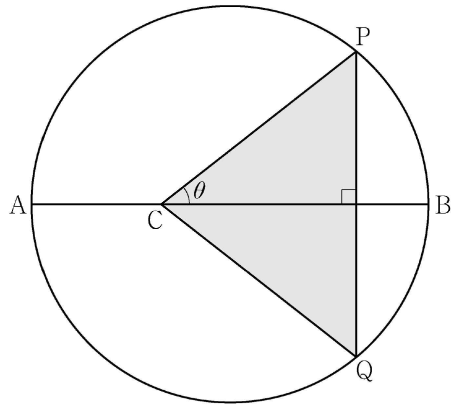
(나) $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{a_n}{b_n}$의 값이 최소가 되도록 하는 자연수 m은 p이고,

$\displaystyle\sum_{n=1}^{p} b_n = 51$, $\displaystyle\sum_{n=p+1}^{\infty} b_n = \frac{1}{64}$이다.

$32 \times (a_3 + p)$의 값을 구하시오.

2023년 9월/평가원 30

183. 길이가 10인 선분 AB를 지름으로 하는 원과 선분 AB 위에 $\overline{\mathrm{AB}} = 4$인 점 C가 있다. 이 원 위의 점 P를 $\angle \mathrm{PCB} = \theta$가 되도록 잡고, 점 P를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 이 원과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 삼각형 PCQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $-7 \times S'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$)



2024년 10월/교육청 30

184. 두 상수 $a(a>0)$, b에 대하여 함수 $f(x)=(ax^2+bx)e^{-x}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $60\times(a+b)$의 값을 구하시오.

(가) $\{x \mid f(x)=f'(t)\times x\}=\{0\}$을 만족시키는 실수 t의 개수는 1이다.
(나) $f(2)=2e^{-2}$

2023년 4월/교육청 30

185. $x \geq 0$에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=\begin{cases} 2^x-1 & (0 \leq x \leq 1) \\ 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^x-1 & (1<x \leq 2) \end{cases}$
(나) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x+2)=-\frac{1}{2}f(x)$이다.

$x>0$에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

라 할 때,

$$\lim_{t\to 0+}\{g(n+t)-g(n-t)\}+2g(n)=\frac{\ln 2}{2^{24}}$$

를 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

2023년 10월/교육청 30

186. 두 정수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=(x^2+ax+b)e^{-x}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 극값을 갖는다.
(나) 함수 $|f(x)|$가 $x=k$에서 극대 또는 극소인 모든 k의 값의 합은 3이다.

$f(10)=pe^{-10}$일 때, p의 값을 구하시오.

2023년 11월/수능 30

187. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=|\sin x|\cos x$$

이다. 양수 a에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자. 함수

$$h(x)=\int_0^x \{f(t)-g(t)\}dt$$

가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 양수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.

$\frac{100}{\pi}\times(a_6-a_2)$의 값을 구하시오.

2022년 6월/평가원 30

188. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\frac{x^2-ax}{e^x}$$

이다. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자.

$g(5)+\lim_{t\to5}g(t)=5$일 때, $\lim_{t\to k-}g(t)\neq\lim_{t\to k+}g(t)$를 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

2022년 4월/교육청 30

189. 함수 $f(x)=a\cos x+x\sin x+b$와 $-\pi<\alpha<0<\beta<\pi$인 두 실수 α, β가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$
> (나) $\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{\beta-\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=0$

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=c$일 때, $f\left(\frac{\beta-\alpha}{3}\right)+c=p+q\pi$이다.

두 유리수 p, q에 대하여 $120\times(p+q)$의 값을 구하시오.

(단, a, b, c는 상수이고, $a<1$이다.)

2023년 7월/교육청 30

190. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\sin|\pi f(x)|$$

라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. 함수 $g(x)$와 자연수 m이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 $x=a_4$와 $x=a_8$에서 극대이다.
> (나) $f(a_m)=f(0)$

$f(a_k)\le f(m)$을 만족시키는 자연수 k의 최댓값을 구하시오.

2022년 11월/수능 30

191. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=e^{\sin\pi x}-1$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 합성함수 $h(x)=g(f(x))$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0을 갖는다.
> (나) 열린구간 $(0,\ 3)$에서 방정식 $h(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 7이다.

$f(3)=\frac{1}{2}$, $f'(3)=0$일 때, $f(2)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

2021년 10월/교육청 30

192. 서로 다른 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = -\frac{ax^3 + bx}{x^2 + 1}$$

라 하자. 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \neq 0$이고, 두 함수 $g(x) = f(x) - f^{-1}(x)$, $h(x) = (g \circ f)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(2) = h(0)$
(나) $g'(2) = -5h'(2)$

$4(b-a)$의 값을 구하시오.

2022학년도 6월/평가원 30

193. $t > \frac{1}{2}\ln 2$인 실수 t에 대하여 곡선 $y = \ln(1 + e^{2x} - e^{-2t})$과 직선 $y = x + t$가 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, $f'(\ln 2) = \frac{q}{p}\sqrt{2}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

2022년 7월/교육청 30

194. 최고차항의 계수가 3보다 크고 실수 전체의 집합에서 최솟값이 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x) = e^x f(x)$$

이다. 양수 k에 대하여 집합 $\{x \mid g(x) = k,\ x\text{는 실수}\}$의 모든 원소의 합을 $h(k)$라 할 때, 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(k)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(k)$가 $k = t$에서 불연속인 t의 개수는 1이다.
(나) $\lim_{k \to 3e+} h(k) - \lim_{k \to 3e-} h(k) = 2$

$g(-6) \times g(2)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x \to -\infty} x^2 ex^2 = 0$)

2024년 7월/교육청 30

195. 상수 a $(0 < a < 1)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = \int_0^x \ln(e^{|t|} - a)\,dt$$

라 하자. 함수 $f(x)$와 상수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 $x = \ln\frac{3}{2}$에서 극값을 갖는다.
(나) $f\left(-\ln\frac{3}{2}\right) = \frac{f(k)}{6}$

$\int_0^k \frac{|f'(k)|}{f(x) - f(-k)}\,dx = p$일 때, $100 \times a \times e^p$의 값을 구하시오.

2022년 9월/평가원 30

196. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 구간 $(0, \infty)$에서 $g(x) \geq 0$인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $x \leq -3$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq f(-3)$이다.
> (나) $x > -3$인 모든 실수 x에 대하여
> $g(x+3)\{f(x)-f(0)\}^2 = f'(x)$이다.

$\displaystyle\int_4^5 g(x)dx = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

2022년 10월/교육청 30

197. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x) = \ln\{f(x) + f'(x) + 1\}$$

이 있다. 상수 a와 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $g(x) > 0$이고
> $$\int_{2a}^{3a+x} g(t)dt = \int_{3a-x}^{2a+2} g(t)dt$$
> 이다.
> (나) $g(4) = \ln 5$

$\displaystyle\int_3^5 \{f'(x)+2a\}g(x)dx = m + n\ln 2$일 때, $m+n$의 값을 구하시오.
(단, m, n은 정수이고, $\ln 2$는 무리수이다.)

2021년 7월/교육청 30

198. 두 자연수 a, b에 대하여 이차함수 $f(x) = ax^2 + b$가 있다. 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \ln f(x) - \frac{1}{10}\{f(x) - 1\}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 직선 $y = |g(t)|$와 함수 $y = |g(x)|$의 그래프가 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 하자. 두 함수 $g(x)$, $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 $x = 0$에서 극솟값을 갖는다.
> (나) 함수 $h(t)$가 $t = k$에서 불연속인 k의 값의 개수는 7이다.

$\displaystyle\int_0^a e^x f(x)\, dx = me^a - 19$일 때, 자연수 m의 값을 구하시오.

2022학년도 9월/평가원 30

199. 최고차항의 계수가 9인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi \times f(x))}{x} = 0$
> (나) $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 곱은 5이다.

함수 $g(x)$는 $0 \leq x < 1$일 때 $g(x) = f(x)$이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x+1) = g(x)$이다.
$g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $\displaystyle\int_0^5 x\,g(x)dx = \frac{q}{p}$이다.
$p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

2022학년도 수능/평가원 30

200. 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=1$, $\int_1^2 f(x)dx=\frac{5}{4}$
>
> (나) 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $x \ge 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(2x)=2f(x)$이다.

$\int_1^8 xf'(x)dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

2024년 6월/평가원 30

201. 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n=\begin{cases}-1 & (a_n \le -1)\\ a_n & (a_n > -1)\end{cases}$$

이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}$은 수렴하고 그 합은 -3이다.
>
> (나) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$은 수렴하고 그 합은 8이다.

$b_3=-1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$의 값을 구하시오.

2023년 3월/교육청 30

202. 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}$$

에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $2k-2 \le |x| < 2k$일 때,
>
> $$g(x)=(2k-1)\times f\left(\frac{x}{2k-1}\right)$$
>
> 이다. (단, k는 자연수이다.)

$0<t<10$인 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나지 않도록 하는 모든 t의 값의 합을 구하시오.

2023년 6월/평가원 30

203. 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n=\begin{cases}-1 & (a_n \le -1)\\ a_n & (a_n > -1)\end{cases}$$

이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}$은 수렴하고 그 합은 -3이다.
>
> (나) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$은 수렴하고 그 합은 8이다.

$b_3=-1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$의 값을 구하시오.

2022년 3월/교육청 30

204. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 곡선

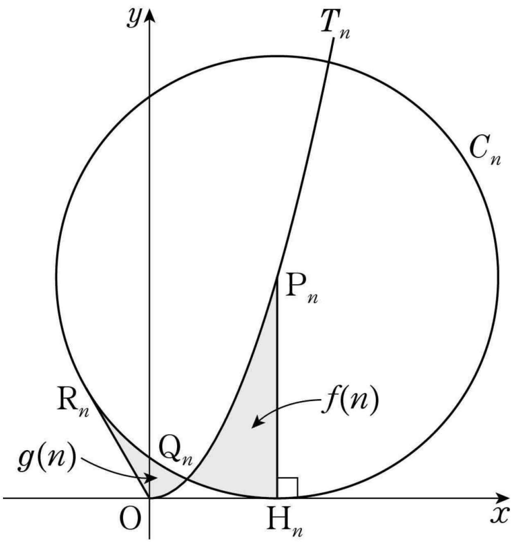
$$T_n : y=\frac{\sqrt{3}}{n+1}x^2 \ (x \geq 0)$$

위에 있고 원점 O와의 거리가 $2n+2$인 점을 P_n이라 하고, 점 P_n에서 x축에 내린 수선의 발을 H_n이라 하자.

중심이 P_n이고 점 H_n을 지나는 원을 C_n이라 할 때, 곡선 T_n과 원 C_n의 교점 중 원점에 가까운 점을 Q_n, 원점에서 원 C_n에 그은 두 접선의 접점 중 H_n이 아닌 점을 R_n이라 하자.

점 R_n을 포함하지 않는 호 $\mathrm{Q}_n\mathrm{H}_n$과 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n$, 곡선 T_n으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(n)$, 점 H_n을 포함하지 않는 호 $\mathrm{R}_n\mathrm{Q}_n$과 선분 OR_n, 곡선 T_n으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(n)$이라 할 때,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)-g(n)}{n^2}=\dfrac{\pi}{2}+k$이다. $60k^2$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)



2021년 3월/교육청 30

205. 자연수 n에 대하여 삼차함수 $f(x)=x(x-n)(x-3n^2)$이 극대가 되는 x를 a_n이라 하자. x에 대한 방정식 $f(x)=f(a_n)$의 근 중에서 a_n이 아닌 근을 b_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_nb_n}{n^3}=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

2024년 9월/평가원 30

206. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(k-|x|)e^{-x}$$

이라 하자. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 $F(x)$에 대하여 $F(0)$의 최솟값을 $g(k)$라 하자.

모든 실수 x에 대하여 $F'(x)=f(x)$이고 $F(x)\ge f(x)$이다.

$g\left(\frac{1}{4}\right)=g\left(\frac{3}{2}\right)=pe+q$일 때, $100(p+q)$의 값을 구하시오. $\Big($단, $\lim_{x\to\infty}xe^{-x}=0$이고, p와 q는 유리수이다.$\Big)$

2021년 4월/교육청 30

207. 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n}+bx^{2n-1}+x}{x^{2n}+2}\quad (a,\ b\text{는 양의 상수})$$

라 하자. 자연수 m에 대하여 방정식 $f(x)=2(x-1)+m$의 실근의 개수를 c_m이라 할 때, $c_k=5$인 자연수 k가 존재한다.

$k+\sum_{m=1}^{\infty}(c_m-1)$의 값을 구하시오.

2025년 5월/교육청 30

208. 수열 $\{a_n\}$은 모든 항이 양수인 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n=\begin{cases}(-1)^n & (a_n<1)\\ a_n & (a_n\ge 1)\end{cases}$$

이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(3b_{3n-2}-7b_{3n-1}+2b_{3n})$은 수렴한다. (나) $b_5{}^2=b_4b_6-\frac{9}{4}$

$90a_3$의 값을 구하시오. [4점]

2025년 6월/평가원 30

209. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\left|f\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)\right|$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극소이고, $g(0)>0$이다. (나) $g'(\ln 3)<0$, $\lvert g'(-\ln 3)\rvert=\frac{3}{8}g(-\ln 3)$

$g(0)$의 최솟값을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

한눈에 보는 정답

1. 정답 ③
2. 정답 ③
3. 정답 ②
4. 정답 ⑤
5. 정답 ①
6. 정답 ③
7. 정답 ③
8. 정답 ①
9. 정답 ②
10. 정답 ③
11. 정답 ①
12. 정답 ①
13. 정답 ④
14. 정답 ③
15. 정답 ②
16. 정답 ①
17. 정답 ④
18. 정답 ④
19. 정답 ②
20. 정답 ②
21. 정답 ②
22. 정답 ②
23. 정답 ①
24. 정답 ②
25. 정답 ③
26. 정답 ④
27. 정답 ⑤
28. 정답 ②
29. 정답 ③
30. 정답 ⑤
31. 정답 ⑤
32. 정답 ①
33. 정답 ④
34. 정답 ④
35. 정답 ②
36. 정답 ④
37. 정답 ③
38. 정답 ⑤
39. 정답 ④
40. 정답 ④
41. 정답 ⑤
42. 정답 ④
43. 정답 ④
44. 정답 ②
45. 정답 ④
46. 정답 ④
47. 정답 ④
48. 정답 ①
49. 정답 ①
50. 정답 ③
51. 정답 ②
52. 정답 ③
53. 정답 ④
54. 정답 ④
55. 정답 ⑤
56. 정답 ④
57. 정답 ①
58. 정답 ②
59. 정답 ③
60. 정답 ④
61. 정답 ④
62. 정답 ⑤
63. 정답 ④
64. 정답 ⑤
65. 정답 ④
66. 정답 ⑤
67. 정답 ③
68. 정답 ②
69. 정답 ⑤
70. 정답 ②
71. 정답 ③
72. 정답 ③
73. 정답 ②
74. 정답 ④
75. 정답 ③
76. 정답 ②
77. 정답 ⑤
78. 정답 ②
79. 정답 ②
80. 정답 ②
81. 정답 ②
82. 정답 ③
83. 정답 ④
84. 정답 ③
85. 정답 ④
86. 정답 ②
87. 정답 ③
88. 정답 ③
89. 정답 ③
90. 정답 ③
91. 정답 ②
92. 정답 ①
93. 정답 ①
94. 정답 ①
95. 정답 ②
96. 정답 ③
97. 정답 ②
98. 정답 ③
99. 정답 ②
100. 정답 ③
101. 정답 ④
102. 정답 ②
103. 정답 ③
104. 정답 ③
105. 정답 ①
106. 정답 ③
107. 정답 ③
108. 정답 ⑤
109. 정답 ②
110. 정답 ④
111. 정답 ③
112. 정답 ①
113. 정답 ④
114. 정답 ①
115. 정답 ③
116. 정답 ③
117. 정답 ①
118. 정답 ⑤
119. 정답 ①
120. 정답 ②
121. 정답 ①
122. 정답 ③
123. 정답 ③
124. 정답 ④
125. 정답 ③
126. 정답 ④
127. 정답 ②
128. 정답 ②
129. 정답 ②
130. 정답 ②
131. 정답 ④
132. 정답 ②
133. 정답 ③
134. 정답 ①
135. 정답 ②
136. 정답 ②
137. 정답 ②
138. 정답 ⑤
139. 정답 ①
140. 정답 ③
141. 정답 ②
142. 정답 ②
143. 정답 ②
144. 정답 ③
145. 정답 ④
146. 정답 ②
147. 정답 ①
148. 정답 ①
149. 정답 ②
150. 정답 50
151. 정답 28
152. 정답 18
153. 정답 109
154. 정답 3
155. 정답 20
156. 정답 13
157. 정답 270
158. 정답 45
159. 정답 50
160. 정답 11
161. 정답 4
162. 정답 12
163. 정답 30
164. 정답 79
165. 정답 5
166. 정답 18
167. 정답 12
168. 정답 57
169. 정답 162
170. 정답 5
171. 정답 18
172. 정답 17
173. 정답 5
174. 정답 40
175. 정답 15
176. 정답 24
177. 정답 12
178. 정답 26
179. 정답 14
180. 정답 25
181. 정답 84
182. 정답 138
183. 정답 32
184. 정답 40
185. 정답 107
186. 정답 91
187. 정답 125
188. 정답 16
189. 정답 135
190. 정답 208
191. 정답 31
192. 정답 10
193. 정답 11
194. 정답 129
195. 정답 144
196. 정답 283
197. 정답 12
198. 정답 586
199. 정답 115
200. 정답 143
201. 정답 24
202. 정답 25
203. 정답 24
204. 정답 80
205. 정답 5
206. 정답 25
207. 정답 13
208. 정답 15
209. 정답 25

정답과 풀이

1. 정답 ③

[출제의도] 수열의 극한에 대한 성질을 이해하여 극한값을 구한다.

$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(2n+3)a_n}{n^2} = 3$ 이므로

$$\lim_{n \to \infty} \frac{na_n}{3n^2+1} = \lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{(2n+3)a_n}{n^2} \times \frac{n^3}{(2n+3)(3n^2+1)} \right\}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{(2n+3)a_n}{n^2} \times \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\left(2+\frac{3}{n}\right)\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

2. 정답 ③

[출제 의도] 수열의 극한에 대한 성질을 이해하여 극한값을 구한다.

$\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{n} = 3$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2a_n + b_n}{1+2b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{na_n + \frac{b_n}{n}}{\frac{1}{n} + \frac{2b_n}{n}}$$

$$= \frac{1+3}{2\times 3}$$

$$= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

3. 정답 ②

[출제의도] 수열의 극한의 대소 관계를 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

$3^n - 2^n < a_n < 3^n + 2^n$ 에서

$$\frac{3^n - 2^n}{3^{n+1}+2^n} < \frac{a_n}{3^{n+1}+2^n} < \frac{3^2+2^n}{3^{n+1}+2^n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3^n - 2^n}{3^{n+1}+2^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{3+\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3^n + 2^n}{3^{n+1}+2^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{3+\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{1}{3}$$

따라서 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{3^{n+1}+2^n} = \frac{1}{3}$$

4. 정답 ⑤

[출제의도] 수열의 극한에 대한 성질을 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

$b_n = 3a_n - 5n$ 이라 하면

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 2$, $a_n = \dfrac{b_n + 5n}{3}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)a_n}{4n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{4n^2} \times \frac{b_n + 5n}{3} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(b_n \times \frac{1}{n} + 5\right)}{12}$$

$$= \frac{(2+0)(2\times 0+5)}{12} = \frac{5}{6}$$

5. 정답 ①

[출제의도] 등비수열의 수렴 조건을 이해한다.

수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하려면

$-1 < \dfrac{x^2-4x}{5} \le 1$ 에서

$$\begin{cases} x^2-4x+5 > 0 \\ x^2-4x-5 \le 0 \end{cases}$$

$x^2-4x+5>0$ 에서 $(x-2)^2+1>0$ 이므로 모든 정수 x 에 대하여 부등식이 성립한다.

$x^2-4x-5 \le 0$ 에서

$(x+1)(x-5) \le 0$, $-1 \le x \le 5$

따라서 모든 정수 x 의 개수는 7 이다.

6. 정답 ③

[출제의도] 수렴하는 급수의 성질을 이해하려 극한값을 구한다.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n - 4n}{n} = 1$ 이므로 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n-4n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{n} - 4\right) = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{a_n}{n}-4\right)+4\right\} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-4\right) + \lim_{n\to\infty} 4$$

$$0+4=4$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n+a_n}{3n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{5+\frac{a_n}{n}}{3-\frac{1}{n}} = \frac{5+4}{3-0} = 3$$

7. 정답 ③

[출제의도] 급수의 뜻 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = 1+(n-1)d$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{a_n} - \frac{n+1}{a_{n+1}}\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{a_k} - \frac{k+1}{a_{k+1}}\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left\{\left(\frac{1}{a_1} - \frac{2}{a_2}\right) + \left(\frac{2}{a_2} - \frac{3}{a_3}\right) + \cdots + \left(\frac{n}{a_n} - \frac{n+1}{a_{n+1}}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{n+1}{a_{n+1}}\right)$$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n+1}{dn+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1+\frac{1}{n}}{d+\frac{1}{n}}\right)$

$=1-\frac{1}{d}=\frac{2}{3}$

따라서 $d=3$

8. 정답 ①

[출제의도] 삼각함수 이해하기

$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$에서 $\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}$이므로

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{9}{10}=\frac{1}{10}$

9. 정답 ②

[출제의도]

삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 탄젠트의 값을 구할 수 있는가?

$2\cos\alpha=3\sin\alpha$에서 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2}{3}$이므로 $\tan\alpha=\frac{2}{3}$

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{\frac{2}{3}+\tan\beta}{1-\frac{2}{3}\tan\beta}$

$=\frac{2+3\tan\beta}{3-2\tan\beta}$이고,

$\tan(\alpha+\beta)=1$이므로

$\frac{2+3\tan\beta}{3-2\tan\beta}=1$

따라서 $\tan\beta=\frac{1}{5}$

10. 정답 ③

[출제의도] 로그함수의 극한값을 구한다.

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{\ln(1+3x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{f(x)-f(0)}{x}}{\frac{\ln(1+3x)}{3x}\times3}=\frac{f'(0)}{3}$

$\frac{f'(0)}{3}=2$에서 $f'(0)=6$

11. 정답 ①

[출제의도] 로그함수의 미분 이해하기

$f(x)=\log_3 6x=\log_3 6+\log_3 x$

$f'(x)=(\log_3 6+\log_3 x)'=\frac{1}{x\ln3}$

따라서 $f'(9)=\frac{1}{9\ln3}$

12. 정답 ①

[출제의도] 삼각함수의 미분 이해하기

$f'(x)=e^x(2\sin x+\cos x)+e^x(2\cos x-\sin x)$

$=e^x(\sin x+3\cos x)$

따라서 $f'(0)=1\times3=3$

13. 정답 ④

[출제의도] 합성함수의 미분법의 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

$f(x^3+x)=e^x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x^3+x)\times(3x^2+1)=e^x$ …… ㉠

이다.

$x^3+x=2$에서

$x^3+x-2=(x-1)(x^2+x+2)=0$이므로, $x=1$이다.

따라서, ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(1+1)\times(3+1)=e$ 이므로,

$f'(2)=\frac{e}{4}$

14. 정답 ③

[출제의도] 여러 가지 미분법 이해하기

$\frac{dx}{dt}=2e^{2t-2}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{1-\ln t}{t^2}$ 이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\ln t}{2t^2e^{2t-2}}$

따라서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은 $\frac{1}{2}$

15. 정답 ②

[출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

$x=\ln(t^3+1)$에서

$\frac{dx}{dt}=\frac{3t^2}{t^3+1}$

$y=\sin\pi t$에서

$\frac{dy}{dt}=\pi\cos\pi t$

따라서

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

$=\frac{\pi\cos\pi t}{\frac{3t^2}{t^3+1}}=\frac{\pi(t^3+1)\cos\pi t}{3t^2}$

따라서 $t=1$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{\pi(1^3+1)\cos\pi}{3\times1^2}=\frac{\pi\times2\times(-1)}{3}=-\frac{2}{3}\pi$$

16. **정답** ①

[출제 의도] 매개변수로 나타내어진 함수의 미분법 이해하기

$x=3t-\frac{1}{t}$, $y=te^{t-1}$

$\frac{dx}{dt}=3+\frac{1}{t^2}$, $\frac{dy}{dt}=e^{t-1}+te^{t-1}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^{t-1}+te^{t-1}}{3+\frac{1}{t^2}}=\frac{(t^2+t^3)e^{t-1}}{3t^2+1}$$

따라서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}$

17. **정답** ④

[출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

$$\frac{dx}{dt}=\frac{5(t^2+1)-5t\times2t}{(t^2+1)^2}=\frac{-5t^2+5}{(t^2+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{3}{t^2+1}\times2t=\frac{6t}{t^2+1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{6t}{t^2+1}}{\frac{-5t^2+5}{(t^2+1)^2}}=\frac{6t(t^2+1)}{-5t^2+5}$$

따라서 $t=2$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{6\times2\times(2^2+1)}{-5\times2^2+5}=\frac{60}{-15}=-4$$

18. **정답** ④

[출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

$$\frac{dx}{dt}=\frac{5(t^2+1)-5t\times2t}{(t^2+1)^2}=\frac{-5t^2+5}{(t^2+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{3}{t^2+1}\times2t=\frac{6t}{t^2+1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{6t}{t^2+1}}{\frac{-5t^2+5}{(t^2+1)^2}}=\frac{6t(t^2+1)}{-5t^2+5}$$

따라서 $t=2$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{6\times2\times(2^2+1)}{-5\times2^2+5}=\frac{60}{-15}=-4$$

19. **정답** ②

[출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수의 미분을 할 수 있는가?

$\frac{dx}{dt}=1-2\sin2t$, $\frac{dy}{dt}=2\sin t\cos t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2\sin t\cos t}{1-2\sin2t} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

(단, $1-2\sin2t\neq0$)

㉠ 의 우변에 $t=\frac{\pi}{4}$를 대입하면

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}}{1-2\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-2\times1}=\frac{1}{1-2}=-1$$

20. **정답** ②

[출제의도] 매개변수로 나타낸 함수의 도함수를 구할 수 있는가?

$\frac{dx}{dt}=e^t-\sin t$, $\frac{dy}{dt}=\cos t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\cos t}{e^t-\sin t}$$

따라서 $t=0$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{1}{1-0}=1$$

21. 정답 ②

[출제의도] 합성함수 미분법 이해하기

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{g(x)-4}{x-2} = 12$에서 $g(2)=4$, $g'(2)=12$

$f'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x+2}$

$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$

$h'(2) = f'(g(2))g'(2) = f'(4)g'(2)$

$f'(4) = \dfrac{8-1}{16-4+2} = \dfrac{1}{2}$

따라서 $h'(2) = \dfrac{1}{2} \times 12 = 6$

22. 정답 ②

[출제의도] 음함수로 나타내어진 함수에서 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

$3x+y+\cos(xy)=2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3+\dfrac{dy}{dx} - \left(y+x\dfrac{dy}{dy}\right)\sin(xy) = 0$

위 식에 $x=0$, $y=1$을 대입하면

$3+\dfrac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore \dfrac{dy}{dx} = -3$

즉, 곡선 $3x+y+\cos(xy)=2$ 위의 점 $(0,\,1)$에서의 접선의 기울기는 -3이므로 접선의 방정식은

$y=-3x+1$

$y=-3x+1$에 $y=0$을 대입하면

$0=-3x+1 \qquad \therefore x=\dfrac{1}{3}$

따라서 구하는 접선의 x절편은 $\dfrac{1}{3}$이다.

23. 정답 ①

[출제의도] 음함수의 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

$x^2 - y\ln x + x = e$

의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x - \dfrac{dy}{dx} \times \ln x - y \times \dfrac{1}{x} + 1 = 0$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x - \dfrac{y}{x} + 1}{\ln x}$

그러므로 점 $(e,\ e^2)$에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{2e - \dfrac{e^2}{e} + 1}{\ln e} = e+1$

24. 정답 ②

[출제의도] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.

$x_k = \dfrac{\pi k}{3n}$라 하면 $\Delta x = \dfrac{\pi}{3n}$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\pi}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\dfrac{\pi k}{3n} = 6 \times \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,dx$

$= 6 \times \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = 3$

25. 정답 ③

[출제의도] 급수와 정적분의 관계를 이용하여 급수의 합을 구할 수 있는가?

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{1+\dfrac{3k}{n}}$

$= \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+3x}\,dx$

$= \left[\dfrac{2}{9}(1+3x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$

$= \dfrac{2}{9}(8-1)$

$= \dfrac{14}{9}$

26. 정답 ④

[출제의도] 여러 가지 함수의 부정적분을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\,f(t))$에서의 접선의 기울기가

$\dfrac{1}{t} + 4e^{2t}$

이므로

$f'(t) = \dfrac{1}{t} + 4e^{2t}$

이다. 즉, 양수 x에 대하여

$f'(x) = \dfrac{1}{x} + 4e^{2x}$

이므로

$f(x) = \displaystyle\int \left(\dfrac{1}{x} + 4e^{2x}\right)dx$

$= \ln|x| + 2e^{2x} + C$ (C는 적분상수)

이때, $f(1) = 2e^2+1$이므로

$\ln 1 + 2e^2 + C = 2e^2 + 1$

$C=1$

따라서

$f(x) = \ln x + 2e^{2e} + 1$

이므로

$f(e) = \ln|e| + 2e^{2e} + 1$

$= 1 + 2e^{2e} + 1$

$= 2e^{2e} + 2$

27. 정답 ⑤

[출제의도] 적분법을 이해하여 적분값을 구한다.

$\frac{\pi}{3}-x=t$로 놓으면 $-\frac{dx}{dt}=1$이고

$x=0$일 때 $t=\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{3}$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)dx=-\int_{\frac{\pi}{3}}^{0}\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos t\,dt$$

$$=\left[\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

28. 정답 ②

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$이므로

$\int_0^{\pi}x\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$

$=\int_0^{\pi}x\sin x\,dx$

$=[-x\cos x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-\cos x)\,dx$

$=(\pi-0)+[\sin x]_0^{\pi}$

$=\pi$

29. 정답 ③

[출제의도] 치환적분법 이해하기

$\int_1^e\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\ln x\,dx-\int_1^e\frac{2}{x^2}\ln x\,dx$

$=\int_1^e\frac{3}{x}\ln x\,dx$

$\ln x=t$라 하면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$

$x=1$일 때 $t=0$, $x=e$일 때 $t=1$

따라서 $\int_1^e\frac{3}{x}\ln x\,dx=3\int_0^1 t\,dt$

$$=3\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1$$

$$=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

30. 정답 ⑤

[출제의도] 치환적분 이해하기

$\sin 2x=t$라 하면

$2\cos 2x=\frac{dt}{dx}$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=1$이다.

따라서

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\cos 2x\sin^2 2x\,dx=\int_0^1 t^2\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

31. 정답 ⑤

[출제 의도] 수열의 극한의 대소 관계를 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

$2n+3<a_n<2n+4$에서 $\frac{2n+3}{n}<\frac{a_n}{n}<\frac{2n+4}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{1}$$

$$=\frac{2}{1}=2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+4}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{4}{n}}{1}$$

$$=\frac{2}{1}=2$$

수열의 극한의 대소관계에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=2$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+1)^2+6n^2}{na_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a_n}{n}+\frac{1}{n}\right)^2+6}{\frac{a_n}{n}}$$

$$=\frac{2^2+6}{2}=5$$

32. 정답 ①

[출제의도] 수열의 극한 이해하가

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(bn-1)^2}{(b+6)n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(b-\frac{1}{n}\right)^2}{b+6+\frac{1}{n^2}}=\frac{b^2}{b+6}\text{이므로}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+bn}-bn\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-b^2)n^2+bn}{\sqrt{an^2+bn}+bn}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-b^2)n+b}{\sqrt{a+\frac{b}{n}}+b}=\frac{b^2}{b+6}$$

그러므로 $a-b^2=0$, $a=b^2$이고

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b}{\sqrt{b^2+\frac{b}{n}}+b}=\frac{1}{2}=\frac{b^2}{b+6}$$

$2b^2-b-6=(2b+3)(b-2)=0$

$b>0$이므로 $b=2$, $a=4$

따라서 $a+b=6$

33. 정답 ④

[출제의도] 수열의 극한에 대한 성질을 이해하여 미지수를 구한다.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+n}-\sqrt{an^2-an}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(an^2+n)-(an^2-an)}{\sqrt{an^2+n}+\sqrt{an^2-an}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a+1)n}{\sqrt{an^2+n}+\sqrt{an^2-an}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a+1}{\sqrt{a+\frac{1}{n}}+\sqrt{a-\frac{a}{n}}}=\frac{a+1}{2\sqrt{a}}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+n}-\sqrt{an^2-an}\right)=\frac{5}{4}$ 에서 $\frac{a+1}{2\sqrt{a}}=\frac{5}{4}$

양변을 제곱하여 정리하면

$4a^2-17a+4=0$, $(4a-1)(a-4)=0$,

$a=\frac{1}{4}$ 또는 $a=4$

따라서 모든 양수 a의 값의 합은 $\frac{1}{4}+4=\frac{17}{4}$

34. **정답** ④

[출제의도] 등비수열이 포함된 수열의 극한값을 구한다.

$a_{n+1}=a_1a_n$ 이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a_1, 공비가 a_1 인 등비수열이다.

그러므로 $a_n=a_1^{\,n}(a_1>0)$

(ⅰ) $0<a_1<1$ 인 경우

$\lim_{n\to\infty}a_n=0$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_{n+3}-5}{2a_n+1}=-5\neq 12$$

(ⅱ) $a_1=1$ 인 경우

$\lim_{n\to\infty}a_n=1$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_{n+3}-5}{2a_n+1}=-\frac{2}{3}\neq 12$$

(ⅲ) $a_1>1$ 인 경우

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_{n+3}-5}{2a_n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3a_1^{\,3}-\frac{5}{a_n}}{2+\frac{1}{a_n}}=\frac{3}{2}a_1^{\,3}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

$\frac{3}{2}a_1^{\,3}=12$, $a_1^{\,3}=8$

따라서 $a_1=2$

35. **정답** ②

[출제 의도] 수열의 극한 이해하기

$b_n=a_n\times\left(\sqrt{n^2+4}-n\right)$이라 하면

$\lim_{n\to\infty}b_n=6$이고

$a_n=\frac{b_n}{\sqrt{n^2+4}-n}=\frac{b_n}{4}\left(\sqrt{n^2+4}+n\right)$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+6n^2}{na_n+5}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{b_n}{2}\left(\sqrt{n^2+4}+n\right)+6n^2}{\frac{nb_n}{4}\left(\sqrt{n^2+4}+n\right)+5}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{b_n}{2}\times\frac{\sqrt{n^2+4}+n}{n^2}+6}{\frac{b_n}{4}\times\frac{\sqrt{n^2+4}+n}{n}+\frac{5}{n^2}}$$
$$=\frac{\frac{6}{2}\times 0+6}{\frac{6}{4}\times 2+0}=\frac{6}{3}=2$$

36. **정답** ④

[출제의도] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하여 미지수의 값을 구한다.

수열 a_n이 수렴하도록 하는 자연수 k의 값은 1 또는 2이다.

(ⅰ) $k=1$인 경우

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a+1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}{(1+b)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\frac{a+1}{1+b}=\frac{1}{2},\ 2a=b-1$$

(ⅱ) $k=2$인 경우

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+b\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}=a=1$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=1$, $b=3$

따라서 $a+b=4$

37. **정답** ③

[출제의도] 수열의 극한을 이해아여 등차수열의 공차를 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_n=a_1+(n-1)d$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}-6n}{a_n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+(2n-1)d-6n}{a_1+(n-1)a+5}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2d-6)n+a_1-d}{dn+a_1-d+5}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2d-6+\frac{a_1-d}{n}}{d+\frac{a_1-d+5}{n}}$$

$= \dfrac{2d-6}{d}$

$\dfrac{2d-6}{d} = 4$에서 $d = -3$

$a_2 - a_1 = d$이므로

$a_2 - a_1 = -3$

38. 정답 ⑤

[출제의도] 등비수열이 포함된 식의 극한값을 이용하여 수열의 항의 값을 구할 수 있는가?

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면 $a_n = ar^{n-1}$이다. 이때,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n + 1}{3^n + 2^{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a \times \frac{r^{n-1}}{4^n} + \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{2}}$$

이고 극한값이 존재하므로

$r = 4$

따라서,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n + 1}{3^n + 2^{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{a}{4} + 0}{0 + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{a}{2} = 3$$

에서 $a = 6$이므로

$a_2 = 6 \times 4 = 24$

39. 정답 ④

[출제의도] 등비수열의 극한값을 구할 수 있는가?

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a, 공비를 r 라 하면

$a_n = a \times r^{n-1}$

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{4^n \times a_n - 1}{3 \times 2^{n+1}} = 1$에서

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n \times a_n - 1}{3 \times 2^{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 \times r^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 \times r^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n} = 1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

(ⅰ) $|r| < \dfrac{1}{2}$ 일 때,

㉠에서

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 \times r^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2a_1 \times (2r)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{6}$$

이때,

$|2r| < 1$

이므로

$\lim_{n\to\infty} (2r)^{n-1} = 0$

이다. 즉,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2a_1 \times (2r)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{6} = 0$$

이므로 ㉠을 만족시키지 못한다.

(ⅱ) $|r| > \dfrac{1}{2}$ 일 때,

㉠에서

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 \times r^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2a_1 \times (2r)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{6}$$

이때,

$|2r| > 1$

이므로

$\lim_{n\to\infty} (2r)^{n-1}$의 값이 존재하지 않는다.

즉, ㉠을 만족시키지 못한다.

(ⅲ) $r = \dfrac{1}{2}$ 일 때

㉠에서

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 \times r^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2a_1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{6}$$

$$=\frac{a_1}{3}$$

이므로

$$\frac{a_1}{3}=1$$

$$a_1=3$$

(ⅳ) $r=-\frac{1}{2}$일 때

㉠에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1\times r^{n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2a_1\times(-1)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{6}$$

이때

$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}$의 값이 존재하지 않으므로

㉠을 만족시키지 못한다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서

$a_1=3,\ r=\frac{1}{2}$

따라서

$$a_2=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

이므로

$$a_1+a_2=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$$

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$$a_n=a_1r^{n-1}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\times a_n-1}{3\times 2^{n+1}}=1$에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\times a_n-1}{3\times 2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\times a_n-\frac{1}{2^n}}{6}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\times a_1r^{n-1}-\frac{1}{2^n}}{6}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\times(2r)^{n-1}-\frac{1}{2^n}}{6}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\times(2r)^{n-1}-\frac{1}{2^n}}{6}=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$이고 ㉠에서 0이 아닌 극한값이 존재하므로

$2r=1$, 즉 $r=\frac{1}{2}$

㉠에 $r=\frac{1}{2}$을 대입하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_1-\frac{1}{2^n}}{6}=\frac{a_1}{3}=1$$

$$a_1=3$$

따라서 $a_n=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$a_2=\frac{3}{2}$$

이고

$$a_1+a_2=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$$

40. **정답** ④

[출제의도] 수열의 극한 이해하기

(ⅰ) $1\le r<3$일 때

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{3}\right)^n=0$이고

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+r^{n+1}}{3^n+7\times r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\times r\times\left(\frac{r}{3}\right)^n}{1+7\times\left(\frac{r}{3}\right)^n}=1$$

이므로 r는 $1,\ 2$

(ⅱ) $r=3$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+3^{n+1}}{3^n+7\times 3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times 3^n}{8\times 3^n}=\frac{1}{2}$$ 이므로

주어진 식은 성립하지 않는다.

(ⅲ) $r>3$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{r}\right)^n=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+r^{n+1}}{3^n+7\times r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{r}\right)^n+r}{\left(\frac{3}{r}\right)^n+7}=\frac{r}{7}=1$$

이므로 r는 7

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

주어진 식이 성립하도록 하는 자연수 r는

$1,\ 2,\ 7$

따라서 모든 r의 값의 합은 $1+2+7=10$

41. 정답 ⑤

[출제의도] 수열의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2}{2}=6$에서

$\frac{a_n+2}{2}=b_n$이라 하면

$a_n=2b_n-2$이고 $\lim_{n\to\infty}b_n=6$

따라서,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+1}{a_n+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(2b_n-2)+1}{(2b_n-2)+2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2b_n-2+\frac{1}{n}}{\frac{2b_n}{n}-\frac{2}{n}+2}$$

$$=\frac{2\times6-2+0}{0-0+2}$$

$$=5$$

42. 정답 ④

[출제의도] 급수의 성질 이해하기

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-2\right)$가 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=2$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3na_n}{n^2+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+3\times\frac{a_n}{n}}{1+\frac{4}{n^2}}$

$$=\frac{2+3\times2}{1+0}=8$$

43. 정답 ④

[출제의도] 급수의 성질 이해하기

$b_n=a_n-\frac{2^{n+1}}{2^n+1}$이라 하면

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(b_n+\frac{2^{n+1}}{2^n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}b_n+\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n+1}$$

$$=0+\frac{2}{1+0}=2$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\times a_n+5\times2^{n+1}}{2^n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+5\times2}{1+\frac{3}{2^n}}$

$$=\frac{2+10}{1+0}=12$$

44. 정답 ②

[출제의도] 등비급수의 합을 구할 수 있는가?

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_n=ar^{n-1}$

이때, $a_{2n-1}-a_{2n}=ar^{2n-2}-ar^{2n-1}$

$$=ar^{2n-2}(1-r)$$

$$=a(1-r)(r^2)^{n-1}$$

이므로, 수열 $\{a_{2n-1}-a_{2n}\}$은 첫째항이 $a(1-r)$이고, 공비가 r^2인 등비수열이다.

따라서, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=3$에서

$-1<r<1$이고,

$\frac{a(1-r)}{1-r^2}=3$이고, $r\neq1$이므로,

$\frac{a}{1+r}=3$ …… ㉠

또, $\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2=\sum_{n=1}^{\infty}a^2r^{2n-2}=6$이므로,

$\frac{a^2}{1-r^2}=\frac{a}{1-r}\times\frac{a}{1+r}=6$

따라서, ㉠에서 $\frac{a}{1-r}\times3=6$이므로,

$\frac{a}{1-r}=2$

따라서, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}=2$

45. 정답 ④

[출제의도] 등비수열의 극한을 이해하여 자연수의 개수를 구한다.

$a_n=\left(\frac{k^2+9}{10k}\right)^n+\left(\frac{3}{k}\right)^n$에서 k가 자연수이므로

$\frac{k^2+9}{10k}>0$, $\frac{3}{k}>0$

두 등비수열 $\left\{\left(\frac{k^2+9}{10k}\right)^n\right\}$, $\left\{\left(\frac{3}{k}\right)^n\right\}$ 중 어느 한 수열이 발산하면 수열 $\{a_n\}$이 수렴하지 않으므로

두 등비수열 $\left\{\left(\frac{k^2+9}{10k}\right)^n\right\}$, $\left\{\left(\frac{3}{k}\right)^n\right\}$이 모두 수렴하여야 한다.

$\frac{k^2+9}{10k}\leq1$에서 $k^2-10k+9\leq0$, $1\leq k\leq9$

$\frac{3}{k}\leq1$에서 $k\geq3$이므로

$3\leq k\leq9$

따라서 구하는 자연수 k의 개수는 7

46. 정답 ④

[출제의도] 급수와 수열의 극한값 사이의 관계를 이용하여 미지수를 구한

후 급수의 합을 구할 수 있는가?

주어진 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a-3n}{n}+\frac{an+6}{n+a}\right)$이 수렴하려면

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a-3n}{n}+\frac{an+6}{n+a}\right)=0$

이어야 한다. 이때

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a-3n}{n}+\frac{an+6}{n+a}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{a}{n}-3}{1}+\frac{a+\frac{6}{n}}{1+\frac{a}{n}}\right)$$

$$=-3+a$$

이므로

$-3+a=0\qquad\therefore\ a=3$

즉

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3-3n}{n}+\frac{3n+6}{n+3}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{3}{n}-3+\frac{3(n+3)-3}{n+3}\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n}-\frac{3}{n+3}\right)$$

$$=3\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$=3\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\cdots\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$

$$=3\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$=3\times\frac{6+3+2}{6}$$

$$=\frac{11}{2}$$

따라서 $S=\frac{11}{2}$ 이므로

$a+S=3+\frac{11}{2}=\frac{17}{2}$

47. 정답 ④

[출제의도] 지수함수의 극한 이해하기

두 점 P, Q의 좌표는 각각 $\mathrm{P}(t,\ e^{2t}-1)$, $\mathrm{Q}(f(t),\ 0)$

$\overline{\mathrm{PQ}}^2=\overline{\mathrm{OQ}}^2$이므로

$\{f(t)-t\}^2+\left(e^{2t}-1\right)^2=\{f(t)\}^2$에서

$f(t)=\frac{t}{2}+\frac{\left(e^{2t}-1\right)^2}{2t}$

$$\lim_{t\to0+}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to0+}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2t}-1}{t}\right)^2\right\}$$

$$=\lim_{t\to0+}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2t}-1}{2t}\times2\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times(1\times2)^2=\frac{5}{2}$$

48. 정답 ①

[출제의도] 지수함수의 극한값을 구할 수 있는가?

$\lim_{x\to0}\frac{2^{ax+b}-8}{2^{bx}-1}=16$에서

$x\to0$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

이때 함수 $2^{ax+b}-8$은 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to0}(2^{ax+b}-8)=2^b-8=0$

$2^b=8$

$b=3$

$$\lim_{x\to0}\frac{2^{ax+3}-8}{2^{3x}-1}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{8(2^{ax}-1)}{2^{3x}-1}$$

$$=\frac{8a}{3}\times\lim_{x\to0}\frac{\frac{2^{ax}-1}{ax}}{\frac{2^{3x}-1}{3x}}$$

$$=\frac{8a}{3}\times\frac{\ln2}{\ln2}$$

$$=\frac{8a}{3}$$

이므로

$\frac{8a}{3}=16$에서

$a=6$

따라서

$a+b=6+3=9$

49. 정답 ①

[출제의도] 지수함수의 극한값을 구할 수 있는가?

$\lim_{x\to0}\frac{2^{ax+b}-8}{2^{bx}-1}=16$에서

$x\to0$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

이때 함수 $2^{ax+b}-8$은 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to0}(2^{ax+b}-8)=2^b-8=0$

$2^b=8$

$b=3$

$$\lim_{x\to0}\frac{2^{ax+3}-8}{2^{3x}-1}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{8(2^{ax}-1)}{2^{3x}-1}$$

$$= \frac{8a}{3} \times \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2^{ax}-1}{ax}}{\frac{2^{3x}-1}{3x}}$$

$$= \frac{8a}{3} \times \frac{\ln 2}{\ln 2}$$

$$= \frac{8a}{3}$$

이므로

$\frac{8a}{3} = 16$에서

$a = 6$

따라서

$a + b = 6 + 3 = 9$

50. 정답 ③

[출제의도] 로그함수의 극한 이해하기

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\ln(2x^2+3x) - \ln 3x}{x} = \frac{2}{3} \times \lim_{x \to 0+} \frac{\ln\left(\frac{2x}{3}+1\right)}{\frac{2x}{3}}$$

$$= \frac{2}{3} \times \lim_{x \to 0+} \ln\left(\frac{2x}{3}+1\right)^{\frac{3}{2x}}$$

$$= \frac{2}{3} \times \ln \lim_{x \to 0+} \left(\frac{2x}{3}+1\right)^{\frac{3}{2x}}$$

$$= \frac{2}{3} \ln e = \frac{2}{3}$$

51. 정답 ②

[출제의도] 역함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

함수 $g(x)$는 함수 $f(x) = x^3 + 2x + 3$의 역함수이므로

$x = y^3 + 2y + 3$ …… ㉠

$x = 3$일 때,

$3 = y^3 + 2y + 3$

$y(y^2+2) = 0$

$y = 0$

또, ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$1 = (3y^2+2)\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3y^2+2}$

따라서

$g'(3) = \frac{1}{3 \times 0^2 + 2} = \frac{1}{2}$

52. 정답 ③

[출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수의 미분법 이해하기

$\frac{dx}{dt} = 2t\ln t + t + 3$

$\frac{dy}{dt} = 6e^{t-1} + 6te^{t-1} = 6e^{t-1}(1+t)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{6e^{t-1}(1+t)}{2t\ln t + t + 3} \quad (2t\ln t + t + 3 \neq 0)$$

따라서 $t = 1$일 때, $\frac{dy}{dx} = \frac{6 \times 2}{1+3} = \frac{12}{4} = 3$

53. 정답 ④

[출제의도] 매개변수로 나타내어진 곡선에서 미분계수를 구할 수 있는가?

$x = e^t - 4e^{-t}$, $y = t + 1$에서

$\frac{dx}{dt} = e^t + 4e^{-t}$, $\frac{dy}{dt} = 1$이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{e^t + 4e^{-t}}$$ 이다.

따라서 $t = \ln 2$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{1}{e^{\ln 2} + 4e^{-\ln 2}} = \frac{1}{2 + 4 \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

54. 정답 ④

[출제의도] 미분법을 이용하여 평면 위를 움직이는 점의 속력을 구한다.

$\frac{dx}{dt} = \ln t + 1$, $\frac{dy}{dt} = \frac{4\ln t - 4}{(\ln t)^2}$이므로

시각 t에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(\ln t + 1)^2 + \left\{\frac{4\ln t - 4}{(\ln t)^2}\right\}^2}$$

따라서 시각 $t = e^2$에서 점 P의 속력은

$$\sqrt{(\ln e^2 + 1)^2 + \left\{\frac{4\ln e^2 - 4}{(\ln e^2)^2}\right\}} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

55. 정답 ⑤

[출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수의 미분법을 이용하여 점의 좌표를 구한다.

$\frac{dx}{dt} = \cos t + \sin t$, $\frac{dy}{dt} = -3\sin t + \cos t$이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3\sin t + \cos t}{\cos t + \sin t} \quad (\text{단, } \cos t + \sin t \neq 0)$$

$\frac{dy}{dx} = 3$인 t의 값을 $\alpha\,(0 < \alpha < \pi)$라 하면

$\cos\alpha = -3\sin\alpha$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$이므로 $\sin^2\alpha+9\sin^2\alpha=1$

$\sin\alpha>0$이므로 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

$a=\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{2\sqrt{10}}{5}$

$b=3\cos\alpha+\sin\alpha=-\frac{4\sqrt{10}}{5}$

따라서 $a+b=-\frac{2\sqrt{10}}{5}$

56. **정답** ④

[출제의도] 두 접선이 이루는 예각의 크기 θ에 대하여 $\tan\theta$의 값을 구할 수 있는가?

곡선 $y=e^{|x|}$는 y축에 대하여 대칭이다.

$x\ge 0$일 때 $y=e^x$이고 접점을 $(t,\ e^t)$이라 하면 $y'=e^x$이므로

접선의 방정식은

$y-e^t=e^t(x-t)$

이 접선이 원점을 지나므로

$-e^t=e^t(-t),\ t=1$

따라서 접선의 기울기는 e이고 이 접선과 y축에 대하여 대칭인 접선의 기울기는 $-e$이다.

$\tan\theta=\frac{-e-e}{1+(-e)\times e}=\frac{-2e}{1-e^2}=\frac{2e}{e^2-1}$

57. **정답** ①

[출제의도] 음함수의 미분법 이해하기

$2e^{x+y-1}=3e^x+x-y$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}\left(2e^{x+y-1}\right)=\frac{d}{dx}\left(3e^x+x-y\right)$

$2e^{x+y-1}\left(1+\frac{dy}{dx}\right)=3e^x+1-\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{3e^x+1-2e^{x+y-1}}{2e^{x+y-1}+1}$

따라서 점 $(0,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{dy}{dx}=\frac{3+1-2}{2+1}=\frac{2}{3}$

58. **정답** ②

[출제의도] 치환적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

$f'(x)=1+\frac{1}{x}$이므로

$\int_1^e\left(1+\frac{1}{x}\right)f(x)dx$

$=\int_1^e f'(x)f(x)dx$

$=\left[\frac{1}{2}\{f(x)\}^2\right]_1^e$

$=\frac{1}{2}\{f(e)\}^2-\frac{1}{2}\{f(1)\}^2$

$=\frac{1}{2}(e+1)^2-\frac{1}{2}(1+0)^2$

$=\frac{e^2}{2}+e$

59. **정답** ③

[출제의도] 정적분을 이용하여 입체도형의 부피를 구한다.

x좌표가 $t(1\le t\le 4)$인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\left(\frac{2}{\sqrt{t}}\right)^2=\frac{4}{t}$

따라서 구하는 부피는

$\int_1^4 S(t)dt=\int_1^4\frac{4}{t}dt$

$=\left[4\ln t\right]_1^4=8\ln 2$

60. **정답** ④

[출제의도] 역함수의 미분법과 치환적분법을 이용하여 함수를 구하고 함숫값을 구할 수 있는가?

함수 $g(x)$의 정의역이 양의 실수 전체의 집합이고 그 역함수 $f(x)$의 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.

즉, 모든 양수 x에 대하여

$f(x)>0$ …… ㉠

이다.

모든 양수 x에 대하여 $g(f(x))=x$이므로

양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(f(x))f'(x)=1$

따라서

$\int_1^a\frac{1}{g'(f(x))f(x)}dx=\int_1^a\frac{f'(x)}{f(x)}dx$

$=\left[\ln|f(x)|\right]_1^a$

$=\ln f(a)-\ln f(1)$ ($\because$ ㉠)

$=\ln f(a)-\ln 8$

$=\ln f(a)-3\ln 2$

이므로

$\ln f(a)-3\ln 2=2\ln a+\ln(a+1)-\ln 2$에서

$\ln f(a)=2\ln a+\ln(a+1)+2\ln 2$

$=\ln a^2+\ln(a+1)+\ln 2^2$

$=\ln 4a^2(a+1)$

즉, $f(a)=4a^2(a+1)$이므로

$f(2)=4\times 2^2\times(2+1)=48$

다른 풀이

함수 $g(x)$의 정의역이 양의 실수 전체의 집합이고 그 역함수 $f(x)$의 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.

즉, 모든 양수 x에 대하여

$f(x)>0$ ...... ㉠

이다.

$\int_1^a \frac{1}{g'(f(x))f(x)}dx$에서 $f(x)=y$라 하면

$x=1$일 때 $y=f(1)=8$,

$x=a$일 때 $y=f(a)$이고

$\frac{dy}{dx}=f'(x)$

이때 역함수의 미분법에 의하여

$f'(x)=\frac{1}{g'(y)}$

이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{g'(y)}$

이때 도함수 $g'(x)$가 양의 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$g'(y)\neq 0$

따라서

$$\begin{aligned}\int_1^a \frac{1}{g'(f(x))f(x)}dx &= \int_8^{f(a)}\left\{\frac{1}{g'(y)\times y}\times g'(y)\right\}dy\\ &= \int_8^{f(a)}\frac{1}{y}dy\\ &= \Big[\ln|y|\Big]_8^{f(a)}\\ &= \ln|f(a)|-\ln|8|\\ &= \ln|f(a)|-3\ln 2\end{aligned}$$

㉠에서 $f(a)>0$이므로 주어진 등식에서

$\ln f(a)-3\ln 2=2\ln a+\ln(a+1)-\ln 2$

$$\begin{aligned}\ln f(a) &= 2\ln a+\ln(a+1)+2\ln 2\\ &= \ln a^2+\ln(a+1)+\ln 2^2\\ &= \ln 4a^2(a+1)\end{aligned}$$

따라서

$f(a)=4a^2(a+1)$

이므로

$f(2)=4\times 2^2\times(2+1)=48$

61. 정답 ④

[출제 의도] 수열의 극한을 이해하여 등차수열의 일반항을 구한다.

$a_{n+1}-a_n=a_1+2$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 (a_1+2)인 등차수열이다.

$a_n=a_1+(n-1)\times(a_1+2)=(a_1+2)n-2$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+n}{a_n-n+1} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(2a_1+5)n-4}{(a_n+1)n-1}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2a_1+5-\frac{4}{n}}{a_1+1-\frac{1}{n}}\\ &= \frac{2a_1+5}{a_1+1}=3\end{aligned}$$

이므로 $a_1=2$

$a_{10}=(2+2)\times 10-2=38$

62. 정답 ⑤

[출제의도] 수열의 극한의 성질을 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

$\lim_{n\to\infty}(n^2+1)a_n=3$, $\lim_{n\to\infty}(4n^2+1)(a_{nn}+b_n)=1$에서

$c_n=(n^2+1)a_n$, $d_n=(4n^2+1)(a_n+b_n)$이리 하면

$\lim_{n\to\infty}c_n=3$, $\lim_{n\to\infty}d_n=1$이고

$a_n=\frac{c_n}{n^2+1}$, $b_n=\frac{d_n}{4n^2+1}-\frac{c_n}{n^2+1}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(2n^2+1)(a_n+2b_n) &= \lim_{n\to\infty}(2n^2+1)\left(\frac{2d_n}{4n^2+1}-\frac{c_r}{n^2+1}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2(2n^2+1)}{4n^2+1}\times d_n-\frac{2n^2+1}{n^2+1}\times c_n\right\}\\ &= 1\times 1-2\times 3=-5\end{aligned}$$

63. 정답 ④

[출제의도] 수열의 극한을 활용하여 문제해결하기

(ⅰ) $0<x<\frac{4}{x}$일 때,

$0<x<2$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^2}{4}\right)^n=0$

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x\times\left(\frac{x^2}{4}\right)^n+1}{\left(\frac{x^2}{4}\right)^n+\frac{4}{x}}=\frac{x}{4}$

$f(x)=2x-3$에서 $x=\frac{12}{7}$

(ⅱ) $x=\frac{4}{x}$일 때,

$x=2$이므로 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+2^n}{2^n+2^{n+1}}=1$

그러므로 $x=2$는 방정식 $f(x)=2x-3$의 실근이다.

(ⅲ) $0<\frac{4}{x}<x$일 때,

$x>2$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{x^2}\right)^n=0$

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\left(\frac{4}{x^2}\right)^n}{1+\frac{4}{x}\times\left(\frac{4}{x^2}\right)^n}=x$

$f(x)=2x-3$에서 $x=3$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 모든 실근의 합은

$\frac{12}{7}+2+3=\frac{47}{7}$

64. 정답 ⑤

[출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이해하여 수열와 극한값을 구한다.

모든 자연수 n에 대하여

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - k^2}{k+1} = 2n^2 - n$이라 하자.

$n \geq 2$일 때,

$$\frac{a_n - n^2}{n+1} = S_n - S_{n-1}$$
$$= (2n^2 - n) - \{2(n-1)^2 - (n-1)\}$$
$$= 4n - 3$$

$a_n = (4n-3)(n+1) + n^2 = 5n^2 + n - 3 \ (n \geq 2)$에서

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n^2+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{5n^2+n-3}{n^2+1} = 5$$

65. 정답 ④

[출제의도] 수열의 극한 이해하기

$|x > 2|$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{x}\right)^{2n} = 0$이므로

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{3\times\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} - 1}{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + 1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{2}x - \left(\frac{2}{x}\right)^{2n}}{1 + \left(\frac{2}{x}\right)^{2n}} = \frac{\frac{3}{2}x - 0}{1+0} = \frac{3}{2}x$$

$x = 2$일 때, $f(2) = \frac{3-1}{1+1} = 1$

$x = -2$일 때, $f(-2) = \frac{-3-1}{1+1} = -2$

$|x| < 2$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = 0$이므로

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{3\times\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} - 1}{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

그러므로

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x & (|x| > 2) \\ 1 & (x = 2) \\ -2 & (x = -2) \\ 1 & (|x| < 2) \end{cases}$$

$|k| > 2$이면 $f(k) = \frac{3}{2}k$이므로

$|k| > 2$에서 $f(k) = k$를 만족시키지 않는다.

$k = 2$이면 $f(2) = 1$이므로

$k = 2$에서 $f(k) = k$를 만족시키지 않는다.

$k = -2$이면 $f(-2) = -2$이므로

$k = -2$에서 $f(k) = k$를 만족시킨다.

$|k| < 2$이면 $f(k) = -1$이므로

$k = -1$에서 $f(k) = k$를 만족시킨다.

따라서 $f(k) = k$를 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은

$-2 + (-1) = -3$

66. 정답 ⑤

[출제의도] 급수의 합을 구할 수 있는가?

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d(d > 0)$이라 하면

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{a_{n+1} - a_n}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$= \frac{1}{d}\left\{\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) \quad \cdots\cdots \ ㉠$$

이때

$a_n = a_1 + (n-1)d = dn + 1 - d$

이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(dn + 1 - d) = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_{n+1}} = 0$$

㉠에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$= \frac{1}{d}\left(\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$= \frac{1}{d}(1 - 0) = \frac{1}{d}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n a_{n+1}} + b_n\right) = 2$에서

$\frac{1}{a_n a_{n+1}} + b_n = c_n$이라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 2$$

$b_n = c_n - \frac{1}{a_n a_{n+1}}$이므로 급수의 성질에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n - \frac{1}{a_n a_{n+1}}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}}$$

$= 2 - \dfrac{1}{d}$ ...... ㉡

따라서 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r라 하면 $-1 < r < 1$이고 $a_2 b_2 = (1+d)r = 1$에서

$$r = \frac{1}{1+d}$$

이때 $d > 0$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{b_1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{1+d}} = \frac{1+d}{d} \quad \cdots\cdots ㉢$$

이므로 ㉡, ㉢에서

$$2 - \frac{1}{d} = \frac{1+d}{d},$$

$$\frac{2d-1}{d} = \frac{1+d}{d}$$

$$d = 2$$

㉡ 또는 ㉢에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{3}{2}$$

67. 정답 ③

[출제의도] 수열의 합과 극한에 대한 성질을 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$이고 공차가 3인 등차수열이므로

$$a_n = 1 + (n-1) \times 3 = 3n - 2$$

수열 $\{b_n\}$은 $n \geq 2$일 때,

$$\frac{1}{b_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{b_k} = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$$

에서 $b_n = \dfrac{1}{2n-1}$이고 $b_1 = 1$이므로

모든 자연수 n에 대하여 $b_n = \dfrac{1}{2n-1}$

따라서 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n b_n = \lim_{n \to \infty} \frac{3n-2}{2n-1} = \lim_{n \to \infty} \frac{3 - \frac{2}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{3}{2}$

68. 정답 ②

[출제의도] 수열의 극한의 대소 관계를 이해한다.

$2n^2 - 3 < a_n < 2n^2 + 4$에서

$$\sum_{k=1}^{n} (2k^2 - 3) < S_n < \sum_{k=1}^{n} (2k^2 + 4)$$

이때

$$\sum_{k=1}^{n} (2k^2 - 3) = 2 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3n$$

$$= \frac{n(2n^2 + 3n - 8)}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k^2 + 4) = 2 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4n$$

$$= \frac{n(2n^2 + 3n + 13)}{3}$$

$$\frac{n(2n^2 + 3n - 8)}{3n^3} < \frac{S_n}{n^3} < \frac{n(2n^2 + 3n + 13)}{3n^3}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n(2n^2 + 3n - 8)}{3n^3} = \lim_{n \to \infty} \frac{n(2n^2 + 3n + 13)}{3n^3} = \frac{2}{3}$$

이므로 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n^3} = \frac{2}{3}$

69. 정답 ⑤

[출제의도] 급수의 뜻 이해하기

점 P_n에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 S_n, T_n이라 하면

$$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} = \sqrt{2} \times \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{S}_n} = \sqrt{2}(n^2 + 5n + 3),$$

$$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n} = \sqrt{2} \times \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{T}_n} = \sqrt{2}\,n$$

$$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} - \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n} = \sqrt{2}(n^2 + 5n + 3) - \sqrt{2}\,n$$

$$= \sqrt{2}(n^2 + 4n + 3)$$

$$= \sqrt{2}(n+1)(n+3)$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\sqrt{2}}{\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} - \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(n+1)(n+3)}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{2}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3}\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{3}{2}\left\{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$$

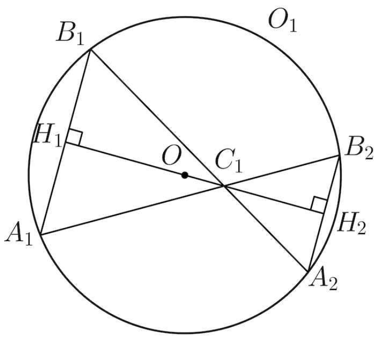
$$= \frac{3}{2} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{4}$$

70. 정답 ②

[출제의도] 도형에 활용된 등비급수의 합을 구할 수 있는가?

원 O_1의 중심을 O라 하고 점 O에서 두 선분 $\mathrm{A_1B_1}$, $\mathrm{A_2B_2}$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 하면 점 $\mathrm{H_1}$은 선분 $\mathrm{A_1B_1}$의 중점이고 점 $\mathrm{H_2}$는 선분 $\mathrm{A_2B_2}$의 중점이다.

또, $\overline{\mathrm{A_1B_1}} /\!/ \overline{\mathrm{A_2B_2}}$이므로 세 점 $\mathrm{H_1}$, O, $\mathrm{H_2}$는 한 직선 위에 있다.



이때, $\angle A_1B_1A_2 = \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\overline{B_1C_1} = \overline{B_1H_1} \times \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$= 1 \times \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

그러므로 삼각형 $A_1C_1B_1$은 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다.

또,

$$\angle A_1B_2A_2 = \angle A_1B_1A_2 = \frac{\pi}{3}$$

$$\angle A_2C_1B_2 = \angle A_1C_1B_1 = \frac{\pi}{3}$$

이므로 삼각형 $C_1A_2B_2$는 정삼각형이다.

이때,

$\overline{C_1A_2} = \overline{B_1A_2} - \overline{B_1C_1} = 3 - 2 = 1$

이므로 삼각형 $C_1A_2B_2$는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이다.

그러므로

$$S_1 = 2 \times (\triangle A_1A_2B_1 - \triangle A_1C_1B_1)$$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times sin\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \sqrt{3}$$

또, 두 삼각형 $A_1A_2B_1$, $A_2A_3B_2$에서

$\overline{A_1A_2} \mathbin{/\!/} \overline{A_2A_3}$, $\overline{A_1B_1} \mathbin{/\!/} \overline{A_2B_2}$, $\overline{A_2B_1} \mathbin{/\!/} \overline{A_3B_2}$

이고

$\overline{A_1B_1} = 2$, $\overline{A_2B_2} = 1$

이므로 두 삼각형 $A_1A_2B_1$, $A_2A_3B_2$의 닮음비는 $2:1$이다.

따라서, 넓이의 비는 $4:1$이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{S_1}{1-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

71. 정답 ③

[출제의도] 한없이 반복되는 도형에서 넓이의 합을 등비급수를 활용하여 극한값을 구할 수 있는가?

$$S_1 = \frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

$\angle O_1A_2O_2 = \frac{\pi}{4}$ 이므로 삼각형 $O_1A_2O_2$에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{O_2A_2}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{\overline{O_1O_2}}{\sin\frac{\pi}{4}},\quad \frac{\overline{O_2A_2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\overline{O_2A_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

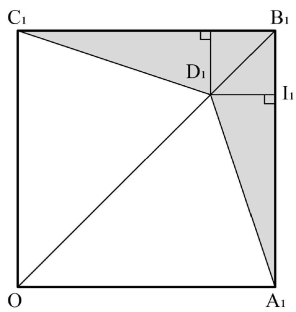
따라서 닮음비는 $1 : \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로 넓이의 비는 $1 : \frac{1}{2}$ 이다.

즉, 구하는 극한값은 첫째항이 $\frac{\pi}{8}$ 이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비급수의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{\pi}{8}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

72. 정답 ③

[출제의도] 등비급수를 활용하여 추론하기



$\overline{OB_1} = 4\sqrt{2}$ 이므로 $\overline{D_1B_1} = \sqrt{2}$

점 D_1에서 직선 A_1B_1에 내린 수선의 발을 I_1이라 하면 $\overline{D_1I_1} = 1$

두 삼각형 $A_1B_1D_1$, $B_1C_1D_1$의 넓이는 모두 2이므로 $S_1 = 4$

네 선분 A_nB_n, B_nC_n, C_nD_n, D_nA_n으로 둘러싸인 ⅂ 모양의 도형의 넓이를 T_n이라 하자.

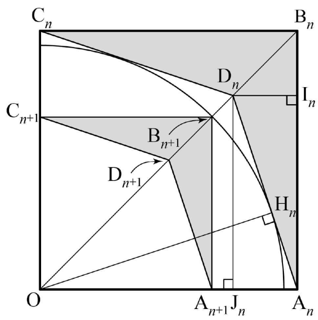


그림 R_n에서 중심이 O이고

두 직선 A_nB_n, C_nD_n에 동시에 접하는 원과 직선 A_nD_n이 접하는 점을 H_n이라 하고, 점 D_n에서 두 직선 A_nB_n, OA_n에 내린 수선의 발을 각각 I_n, J_n이라 하자.

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{I}_n}=\overline{\mathrm{D}_n\mathrm{J}_n}=\dfrac{3}{4}\overline{\mathrm{OA}_n}$, $\overline{\mathrm{D}_n\mathrm{I}_n}=\dfrac{1}{4}\overline{\mathrm{OA}_n}$ 이므로

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}\overline{\mathrm{OA}_n}$

삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{D}_n$에서

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n}\times\overline{\mathrm{OH}_n}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}_n}\times\overline{\mathrm{D}_nJ_n}$

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{10}}{4}\overline{\mathrm{OA}_n}\times\overline{\mathrm{OH}_n}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}_n}\times\dfrac{3}{4}\overline{\mathrm{OA}_n}$

$\overline{\mathrm{OH}_n}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\overline{\mathrm{OA}_n}$

$\overline{\mathrm{OA}_{n+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overline{\mathrm{OB}_{n+1}}$

$\quad=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overline{\mathrm{OH}_n}=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}\overline{\mathrm{OA}_n}$

두 정사각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$과 $\mathrm{OA}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}$의 닮음비는

$\overline{\mathrm{OA}_n}\ :\ \overline{\mathrm{OA}_{n+1}}=1\ :\ \dfrac{3\sqrt{5}}{10}$

$T_n\ :\ T_{n+1}=1\ :\ \dfrac{9}{20}$

$T_{n+1}=\dfrac{9}{20}T_n$

그러므로 수열 $\{T_n\}$은 첫째항이 $T_1=S_1=4$이고

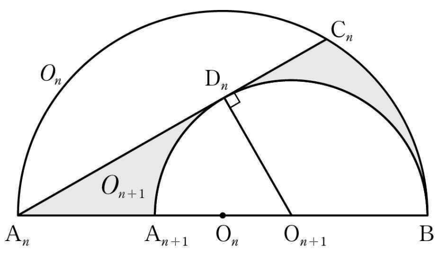
공비가 $\dfrac{9}{20}$인 등비수열이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n=\dfrac{4}{1-\dfrac{9}{20}}=\dfrac{80}{11}$

73. 정답 ②

[출제의도] 도형 사이의 관계를 추론하여 등비급수의 합을 구한다.

반원 O_n의 중심을 O_n, 반지름을 r_n이라 하자.



삼각형 $\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n$은 $\angle\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n=\dfrac{\pi}{6}$인 직각삼각형이므로

$\sin(\angle\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n)=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{\overline{\mathrm{D}_n\mathrm{O}_{n+1}}}{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{O}_{n+1}}}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{r_{n+1}}{2r_n-r_{n+1}}=\dfrac{1}{2}$

$r_{n+1}=\dfrac{2}{3}r_n \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$r_1=1$이므로 $r_2=\dfrac{2}{3}$

$\angle\mathrm{A}_1\mathrm{O}_1\mathrm{C}_1=\dfrac{2\pi}{3}$, $\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{O}_1}=\overline{\mathrm{C}_1\mathrm{O}_1}=1$이므로

삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{O}_1\mathrm{C}_1$의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{O}_1}\times\overline{\mathrm{C}_1\mathrm{O}_1}\times\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{1}{2}\times1\times1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$\angle\mathrm{BO}_1\mathrm{C}_1=\dfrac{\pi}{3}$, $\overline{\mathrm{C}_1\mathrm{O}_1}=\overline{\mathrm{BO}_1}=1$이므로

부채꼴 $\mathrm{O}_1\mathrm{BC}_1$의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times1^2\times\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$

반원 O_2의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times(r_2)^2\times\pi=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\pi=\dfrac{2\pi}{9}$

S_1=(삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{O}_1\mathrm{C}_1$의 넓이)+(부채꼴 $\mathrm{O}_1\mathrm{BC}_1$의 넓이)−(반원 O_2의 넓이)

$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{2\pi}{9}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\pi}{18} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\pi}{18}$이고 공비가 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$인 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\pi}{18}}{1-\dfrac{4}{9}}=\dfrac{9\sqrt{3}-2\pi}{20}$

74. 정답 ④

[출제 의도] 삼각함수의 덧셈정리 이해하기

$\angle\mathrm{EAB}=\alpha$, $\angle\mathrm{CDB}=\beta$,

$\overline{\mathrm{BE}}=x\left(0<x<\dfrac{1}{2}\right)$이라 하면

$\overline{\mathrm{AD}}=2x$, $\overline{\mathrm{DB}}=1-2x$

$\tan\alpha=x$, $\tan\beta=\dfrac{1}{1-2x}$

$\tan(\angle\mathrm{CFE})=\tan(\beta-\alpha)$

$=\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\times tan\alpha}$

$=\dfrac{\dfrac{1}{1-2x}-x}{1+\dfrac{1}{1-2x}\times x}$

$=\dfrac{1-x(1-2x)}{(1-2x)+x}$

$=\dfrac{2x^2-x+1}{1-x}=\dfrac{16}{15}$

$15(2x^2-x+1)=16(1-x)$

$30x^2+x-1=0$

$(5x+1)(6x-1)=0$

$0<x<\dfrac{1}{2}$이므로 $x=\dfrac{1}{6}$

따라서 $\tan(\angle \mathrm{CDB}) = \dfrac{1}{1-2x} = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}$

75. 정답 ③

[출제의도] 로그함수의 미분 이해하기

$\lim\limits_{x\to e}\dfrac{f(x)-g(x)}{x-e}=0$에서 $\lim\limits_{x\to e}(x-e)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to e}\{f(x)-g(x)\}=0$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=e$에서 연속이므로

$f(e)=g(e)$

$a^e = 2\log_b e = \dfrac{2}{\ln b}$ …… ㉠

$f'(x)=a^x \ln a$, $g'(x)=\dfrac{2}{x\ln b}$ 이므로

$$\lim_{x\to e}\frac{f(x)-g(x)}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\{f(x)-f(e)\}-\{g(x)-g(e)\}}{x-e}$$
$$=f'(e)-g'(e)$$
$$=a^e\ln a-\frac{2}{e\ln b}=0$$

㉠에 의하여 $a^e\ln a-\dfrac{a^e}{e}=0$에서 $\ln a=\dfrac{1}{e}$

$a=e^{\frac{1}{e}}$, $b=e^{\frac{2}{e}}$

따라서 $a\times b=e^{\frac{3}{e}}$

76. 정답 ②

[출제의도] 역함수의 미분법을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

$g(a)=b$ 라 하면 $f(b)=a$ 이므로

$e^{3b}-3e^{2b}+4e^b=a$ …… ㉠

$f(x)=e^{3x}-3e^{2x}+4e^x$ 에서

$f'(x)=3e^{3x}-6e^{2x}+4e^x$

이므로

$g'(a)=\dfrac{1}{f'(b)}=\dfrac{1}{3e^{3b}-6e^{2b}+4e^b}$

이때 $g'(a)=\dfrac{1}{8}$ 에서

$\dfrac{1}{3e^{3b}-6e^{2b}+4e^b}=\dfrac{1}{8}$

$e^b=t\ (t>0)$로 놓으면

$\dfrac{1}{3t^3-6t^2+4t}=\dfrac{1}{8}$, $\quad 3t^3-6t^2+4t=8$

$3t^3-6t^2+4t-8=0$, $\quad (t-2)(3t^2+4)=0$

$\therefore\ t=2\ (\because\ 3t^2+4>0)$

즉 $e^b=2$ 이므로 $\quad b=\ln 2$

㉠에 $b=\ln 2$ 를 대입하면

$a=e^{3\ln 2}-3e^{2\ln 2}+4e^{\ln 2}=8-12+8=4$

$$\therefore\ a+f'(g(a))=4+f'(b)$$
$$=4+\frac{1}{g'(a)}$$
$$=4+8$$
$$=12$$

77. 정답 ⑤

[출제의도] 역함수의 미분법을 이해하여 미분계수를 구한다.

$f'(x)=2e^{2x}+e^x$에서 $f'(0)=3$

$h(x)=g(5f(x))$라 하면 $f(0)=1$이므로

$$h'(0)=g'(5f(0))\times 5f'(0)$$
$$=15g'(5)$$

$g(5)=t$로 놓으면 $f(t)=5$에서

$e^{2t}+e^t-1=5$, $(e^t-2)(e^t+3)=0$

$e^t>0$이므로 $e^t=2$, 즉 $t=\ln 2$

$$f'(\ln 2)=2e^{2\ln 2}+e^{\ln 2}$$
$$=10$$

따라서

$$h'(0)=15g'(5)$$
$$=15\times\frac{1}{f'(\ln 2)}$$
$$=\frac{3}{2}$$

78. 정답 ②

[출제의도] 역함수의 미분법 이해하기

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-2}{x-2}=\dfrac{1}{3}$에서 $f(2)=2$, $f'(2)=\dfrac{1}{3}$

$f(x)$는 함수 $g(x)$의 역함수이므로 $g(2)=2$

$g'(2)=\dfrac{1}{f'(g(2))}=\dfrac{1}{f'(2)}=3$

$f(2)\neq 0$이고 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $h(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

$h'(x)=\dfrac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$

$$h'(2)=\frac{g'(2)f(2)-g(2)f'(2)}{\{f(2)\}^2}$$
$$=\frac{3\times 2-2\times\frac{1}{3}}{2^2}$$
$$=\frac{6-\frac{2}{3}}{4}=\frac{4}{3}$$

79. 정답 ②

[출제의도] 미분법을 이용하여 방정식이 서로 다른 실근의 개수가 2일 조건을 구할 수 있는가?

$x^2-5x+2\ln x=t$에서

$f(x)=x^2-5x+2\ln x$라 하면

$$f'(x)=2x-5+\frac{2}{x}$$
$$=\frac{2x^2-5x+2}{x}$$
$$=\frac{(2x-1)(x-2)}{x}$$

따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗

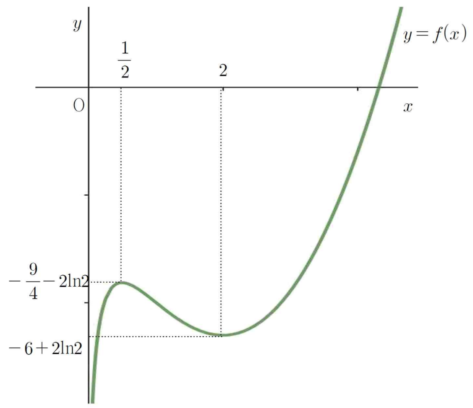
이때 함수 $f(x)$의 극댓값은

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-5\times\frac{1}{2}+2\ln\frac{1}{2}$$
$$=-\frac{9}{4}-2\ln 2$$

극솟값은

$$f(2)=2^2-5\times 2+2\ln 2$$
$$=-6+2\ln 2$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때 x에 대한 방정식 $x^2-5x+2\ln x=t$이 서로 다른 실근의 개수가 2가 되기 위해서는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 2가 되어야 하므로

$t=-\frac{9}{4}-2\ln 2$ 또는 $t=-6+2\ln 2$

따라서 모든 실수 t의 값의 합은

$$\left(-\frac{9}{4}-2\ln 2\right)+(-6+2\ln 2)=-\frac{33}{4}$$

80. 정답 ②

[출제의도] 지수함수의 극한 이해하기

$x=t$일 때 두 점 P, Q의 y좌표는 각각 e^{2t+k}, e^{-3t+k}이고

$\overline{\mathrm{PQ}}=t$를 만족시키는 k의 값이 $f(t)$이므로

$$e^{2t+f(t)}-e^{-3t+f(t)}=t$$
$$e^{f(t)}\left(e^{2t}-e^{-3t}\right)=t$$
$$e^{f(t)}=\frac{t}{e^{2t}-e^{-3t}}$$

$$\lim_{t\to 0+}e^{f(t)}=\lim_{t\to 0+}\frac{t}{e^{2t}-e^{-3t}}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\frac{1}{2\times\frac{e^{2t}-1}{2t}+3\times\frac{e^{-3t}-1}{-3t}}$$
$$=\frac{1}{2\times 1+3\times 1}=\frac{1}{5}$$

81. 정답 ②

[출제의도] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이용하여 급수의 합을 구한다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(2n-k)^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}-2\right)^2}\times\frac{1}{n}=\int_{-2}^{-1}\frac{x+2}{x^2}dx$$
$$=\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)dx=\left[\ln|x|-\frac{2}{x}\right]_{-2}^{-1}$$
$$=1-\ln 2$$

82. 정답 ③

[출제의도] 급수와 정적분의 관계를 이용하여 값을 구할 수 있는가?

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+2kn}{k^3+3k^2n+n^3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2+2\times\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^3+3\times\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}\times\frac{1}{n}\right\}$$
$$=\int_0^1\frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+1}dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}\ln\left(x^3+3x^2+1\right)\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}(\ln 5-\ln 1)$$
$$=\frac{\ln 5}{3}$$

83. 정답 ④

[출제의도] 부분적분법 이해하기

$$\int_1^2(x-1)f'\left(\frac{x}{2}\right)dx$$
$$=\left[2(x-1)f\left(\frac{x}{2}\right)\right]_1^2-\int_1^2 2f\left(\frac{x}{2}\right)dx$$
$$=2f(1)-2\int_1^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx=2$$

$f(1)=4$이므로 $\int_1^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx=3$

$\frac{x}{2}=t$라 하면 $\frac{1}{2}=\frac{dt}{dx}$

$x=1$일 때 $t=\frac{1}{2}$, $x=2$일 때 $t=1$

$\int_1^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx=2\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt=3$

따라서 $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx=\frac{3}{2}$

84. 정답 ③

[출제의도] 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

$\sqrt{\frac{\pi}{6}}\le t\le\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{\pi}{2}t^3\sin t^2$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} S(t)\,dt$

$=\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{\pi}{2}t^3\sin t^2\,dt$

$=\frac{\pi}{2}\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} t^3\sin t^2\,dt$

$t^2=u$라 하면

$t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 일 때 $u=\frac{\pi}{2}$, $t=\sqrt{\frac{\pi}{6}}$ 일 때 $u=\frac{\pi}{6}$ 이고

$2t=\frac{du}{dt}$ 이므로

$\frac{\pi}{2}\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} t^3\sin t^2\,dt$

$=\frac{\pi}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} u\sin u\,du$

$=\frac{\pi}{4}\times\left\{\left[-u\cos u\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} u\cos u\,du\right\}$

$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+[\sin u]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\right)$

$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{12}\pi+1-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{\sqrt{3}\pi^2+6\pi}{48}$

85. 정답 ④

[출제의도] 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

$0\le t\le\frac{\pi}{3}$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\left(\sqrt{\sec^2 t+\tan t}\right)^2=\sec^2 t+\tan t$

이므로 구하는 입체도형의 부피는

$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sec^2 t+\tan t)dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\sec^2 x+\frac{\sin x}{\cos x}\right)dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left\{\sec^2 x-\frac{(\cos x)'}{\cos x}\right\}dt$

$=\left[\tan x-\ln|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$=\tan\frac{\pi}{3}-\ln\cos\frac{\pi}{3}$

$=\sqrt{3}-\ln\frac{1}{2}=\sqrt{3}+\ln 2$

86. 정답 ②

[출제의도] 정적분을 이용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

x좌표가 $t(1\le t\le 2)$인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한변의 길이가 $\sqrt{\frac{3t+1}{t^2}}$ 인 정사각형이므로 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면 $S(t)=\frac{3t+1}{t^2}$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$V=\int_1^2 S(t)dt=\int_1^2\frac{3t+1}{t^2}dt=\int_1^2\left(\frac{3}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt$

$=\left[3\ln|t|-\frac{1}{t}\right]_1^2$

$=\left(3\ln 2-\frac{1}{2}\right)-\left(3\ln 1-\frac{1}{1}\right)$

$=\frac{1}{2}+3\ln 2$

87. 정답 ③

[출제의도] 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

직선 $x=t$ $\left(\frac{3}{4}\pi\le t\le\frac{5}{4}\pi\right)$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{5}{4}\pi(1-2t)\cos t$

따라서 입체도형의 부피를 V라 하면

$u(t)=1-2t$, $v'(t)=\cos t$

$u'(t)=-2$, $v(t)=\sin t$

라 하면

$$V=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}(1-2t)\cos t\,dt$$

$$=\Big[(1-2t)\sin t\Big]_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}+2\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\sin t\,dt$$

$$=\Big[(1-2t)\sin t\Big]_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}+2\Big[-\cos t\Big]_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}$$

$$=\left(1-\frac{5}{2}\pi\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(1-\frac{3}{2}\pi\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=2\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}$$

88. 정답 ③

정사각형의 한 변의 길이가 $\sqrt{\dfrac{kx}{2x^2+1}}$ 이므로

정사각형의 넓이는

$$\left(\sqrt{\frac{kx}{2x^2+1}}\right)^2=\frac{kx}{2x^2+1}$$

그러므로 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_1^2\frac{kx}{2x^2+1}dx \;\cdots\cdots\; ㉠$$

이때 $2x^2+1=t$로 놓으면

$$4x=\frac{dt}{dx}$$

또, $x=1$일 때 $t=3$, $x=2$일 때 $t=9$이므로 ㉠ 은

$$\int_3^9\frac{k}{4}\times\frac{1}{t}dt$$

$$=\frac{k}{4}\int_3^9\frac{1}{t}dt$$

$$=\frac{k}{4}\times[\ln t]_3^9$$

$$=\frac{k}{4}\times(\ln 9-\ln 3)$$

$$=\frac{k}{4}\ln 3$$

이 값이 $2\ln 3$이므로

$$\frac{k}{4}\ln 3=2\ln 3$$

$$k=8$$

89. 정답 ③

[출제의도] 정적분을 이해하여 입체도형의 부피를 구한다.

x좌표가 t $(2\le t\le 4)$인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\left(\sqrt{(5-t)\ln t}\right)^2=(5-t)\ln t$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_2^4 S(t)dt$$

$$=\int_2^4\ln t\times(5-t)dt$$

$$=\left[\ln t\times\left(5t-\frac{1}{2}t^2\right)\right]_2^4-\int_2^4\left(5-\frac{1}{2}t\right)dt$$

$$=(12\ln 4-8\ln 2)-\left[5t-\frac{1}{4}t^2\right]_2^4$$

$$16\ln 2-7$$

90. 정답 ③

[출제의도] 수열의 극한에 대한 성질을 이해한다.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k-1)!}=\frac{3}{(n+2)!}$ 이므로

$n=1$일 때, $\dfrac{a_1}{0!}=\dfrac{3}{3!}$ 에서 $a_1=\dfrac{1}{2}$

$n\ge 2$일 때,

$$\frac{a_n}{(n-1)!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k-1)!}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{(k-1)!}$$

$$=\frac{3}{(n+2)!}-\frac{3}{(n+1)!}$$

$$a_n=\frac{3(n-1)!}{(n+2)!}-\frac{3(n-1)!}{(n+1)!}$$

$$=\frac{3}{(n+2)(n+1)n}-\frac{3}{(n+1)n}$$

$$=\frac{-3n-3}{(n+2)(n+1)n}$$

$$=\frac{-3}{n(n+2)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_1+n^2a_n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{3n}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-3=-\frac{5}{2}$$

91. 정답 ②

[출제 의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차는 3이므로

$$a_n=3+(n-1)\times 3=3n$$

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k\left(b_k\right)^2=n^3-n+3$이라 하면 $n\ge 2$일 때,

$$a_n\left(b_n\right)^2=S_n-S_{n-1}$$

$$=\left(n^3-n+3\right)-\left\{(n-1)^3-(n-1)+3\right\}$$

$$=3n^2-3n=3n(n-1)$$

$$\left(b_n\right)^2=n-1$$

$n=1$일 때, $S_1=a_1\left(b_1\right)^2=3$에서 $\left(b_1\right)^2=1$

수열 $\{b_n\}$의 모든 항이 양수이므로

$b_n=\sqrt{n-1}$ $(n\ge 2)$, $b_1=1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_nb_{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n-1}\sqrt{2n-1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}\sqrt{2-\frac{1}{n}}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

92. 정답 ①

[출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 수열의 극한값을 구한다.

등차수열 $\{b_n\}$의 공차를 d라 하면

$b_n=b_1+(n-1)d$

$\frac{a_1}{b_1}=3$에서 $\frac{3}{b_1}=3$, $b_1=1$

$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}=2$에서 $\frac{a_2}{b_2}=-1$

$-\frac{4}{1+d}=-1$에서 $d=3$

$b_n=1+(n-1)\times 3=3n-2$

$n\geq 2$일 때

$$\frac{a_n}{b_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{b_k}$$
$$=\frac{6}{n+1}-\frac{6}{n}$$
$$=-\frac{6}{n(n+1)}$$

이므로 $a_n=-\frac{6(3n-2)}{n^2+n}\quad(n\geq 2)$

$a_nb_n=-\frac{6(3n-2)^2}{n^2+n}\quad(n\geq 2)$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{6(3n-2)^2}{n^2+n}\right\}=-54$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=-54$$

93. 정답 ①

[출제의도] 등비급수를 이해하여 급수의 합을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하자.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}$은 첫째항이 $\frac{a}{3}$, 공비가 $\frac{r}{3}$이 등비급수이고 수렴하므로

$-1<\frac{r}{3}<1$, $-3<r<3$ …… ㉠

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{2n}}$은 첫째항이 $\frac{1}{ar}$, 공비가 $\frac{1}{r^2}$인 등비급수이고 수렴하므로

$-1<\frac{1}{r^2}<1$, $r^2>1$ …… ㉡

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수이므로

㉠, ㉡에서 $r=2$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}=\frac{\frac{a}{3}}{1-\frac{2}{3}}=a=4$$

$a_n=4\times 2^{n-1}=2^{n+1}$이므로

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{2n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}}$$
$$=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{6}$$

94. 정답 ①

[출제의도] 수열의 극한의 대소 관계를 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

${a_n}^2<4na_n+n-4n^2$에서 ${a_n}^2-4na_n+4n^2<n$,

$(a_n-2n)^2<n$, $2n-\sqrt{n}<a_n<2n+\sqrt{n}$,

$2-\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{a_n}{n}<2+\frac{1}{\sqrt{n}}$

$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=2$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=2$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3n}{2n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{n}+3}{2+\frac{4}{n}}=\frac{2+3}{2+0}=\frac{5}{2}$

95. 정답 ②

[출제의도] 급수를 이용하여 추론하기

직선 $y=x+1$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$을 대각선으로 하는 정사각형의 한 변은 x축 또는 y축과 평행하다.

점 P_n의 x좌표를 α_n, 점 Q_n의 x좌표를 β_n이라 하면

정사각형의 한 변의 길이는 $|\alpha_n-\beta_n|$이므로

$a_n=(\alpha_n-\beta_n)^2$ …… ㉠

α_n, β_n은 이차방정식

$x^2-2nx-2x=x+1$

$x^2-(2n+1)x-(2n+1)=0$

의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=2n+1$, $\alpha_n\beta_n=-2n-1$

㉠에서

$$a_n=(\alpha_n-\beta_n)^2$$
$$=(\alpha_n+\beta_n)^2-4\alpha_n\beta_n$$
$$=(2n+1)^2-4(-2n-1)$$
$$=4n^2+12n+5$$
$$=(2n+1)(2n+5)$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(2k+1)(2k+5)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+5}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3}\right)+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+5}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{8}{15}=\frac{2}{15}$$

96. 정답 ③

[출제의도] 급수의 수렴조건을 이해하고 급수의 합을 구할 수 있는가?

수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 4이므로 공차를 d라 하면

$a_n=4+(n-1)d$

이때, 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$

이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4+(n-1)d}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{d+\frac{4-d}{n}}{1}-\frac{3+\frac{7}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)$$

$$=d-3=0$$

그러므로

$d=3$

이때, $a_n=3n+1$이므로 주어진 급수에 대입하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(3+\frac{1}{n}\right)-\left(3+\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{3}{2}$$

97. 정답 ②

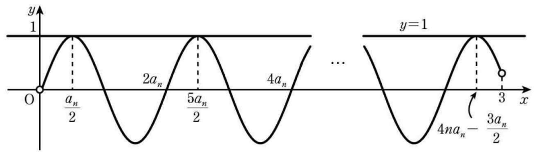
[출제의도] 수열의 극한의 대소 관계를 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

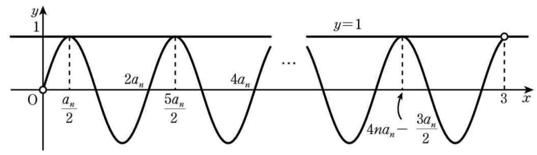
함수 $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{a_n}x\right)$의 주기는 $2a_n$이고

$0<x<3$일 때, 모든 자연수 n에 대하여 x에 대한 방정식

$\sin\left(\dfrac{\pi}{a_n}x\right)=1$의 서로 다른 실근의 개수가 $2n$이므로 $0<x<3$에서

함수 $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{a_n}x\right)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.





$$\left(4n-\frac{3}{2}\right)\times a_n<3\le\left(4n+\frac{1}{2}\right)\times a_n$$

$$\frac{3}{4n+\frac{1}{2}}\le a_n<\frac{3}{4n-\frac{3}{2}}$$

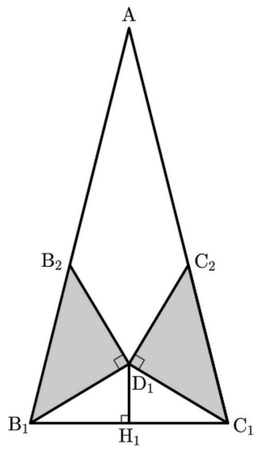
$$\frac{3n}{4n+\frac{1}{2}}\le na_n<\frac{3n}{4n-\frac{3}{2}}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{4n+\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{4n-\frac{3}{2}}=\frac{3}{4}$ 이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n=\frac{3}{4}$

98. 정답 ③

[출제의도] 등비급수를 활용하여 문제 해결하기



점 D_1에서 선분 B_1C_1에 내린 수선의 발을 H_1,

$\angle AB_1H_1=\alpha$, $\angle D_1B_1H_1=\beta$라 하자.

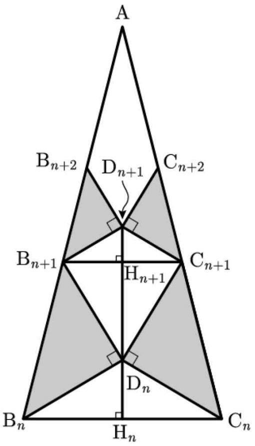
$\overline{AH_1}=\sqrt{17-1}=4$이므로 $\tan\alpha=4$

$\tan\beta = \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\alpha - 1}{1 + \tan\alpha} = \frac{3}{5}$

$\overline{\mathrm{B_1H_1}} = 1$, $\overline{\mathrm{D_1H_1}} = \frac{3}{5}$이므로

$\overline{\mathrm{B_1D_1}} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{34}}{5}$

$S_1 = 2 \times \left\{\frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{34}}{5}\right)^2\right\} = \frac{34}{25}$



점 D_n에서 선분 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$에 내린 수선의 발을 H_n, 점 D_{n+1}에서 선분 $\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}$에 내린 수선의 발을 H_{n+1}이라 하자.

두 삼각형 $\mathrm{D}_n\mathrm{B}_n\mathrm{H}_n$과 $\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{D}_n\mathrm{H}_{n+1}$은 서로 합동이므로

$\overline{\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{H}_{n+1}} = \overline{\mathrm{D}_n\mathrm{H}_n} = \overline{\mathrm{B}_n\mathrm{H}_n} \times \tan\beta = \frac{3}{5}\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{H}_n}$

두 삼각형 $\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n\mathrm{B}_{n+1}$, $\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n\mathrm{C}_{n+1}$로 만들어진

 모양의 도형의 넓이를 T_n이라 하자.

두 삼각형 $\mathrm{D}_n\mathrm{B}_n\mathrm{H}_n$, $\mathrm{D}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{H}_{n+1}$은 서로 닮음이고 닮음비가 $1 : \frac{3}{5}$이므로

넓이의 비는 $1^2 : \left(\frac{3}{5}\right)^2$이다.

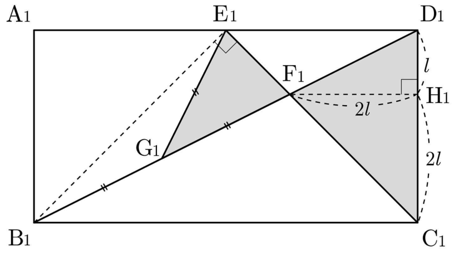
$T_{n+1} = \frac{9}{25}T_n$

수열 $\{T_n\}$은 첫째항이 $T_1 = S_1 = \frac{34}{25}$이고 공비가 $\frac{9}{25}$인 등비수열이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} T_n = \frac{\frac{34}{25}}{1 - \frac{9}{25}} = \frac{17}{8}$

99. **정답** ②

[출제의도] 등비급수를 활용하여 문제 해결하기



점 $\mathrm{F_1}$에서 선분 $\mathrm{C_1D_1}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_1}$이라 하자.

$\overline{\mathrm{D_1H_1}} = l$ $(l > 0)$이라 하면 $\overline{\mathrm{F_1H_1}} = \overline{\mathrm{C_1H_1}} = 2l$

$\overline{\mathrm{C_1D_1}} = 3l = 1$

$l = \frac{1}{3}$이므로 $\overline{\mathrm{D_1H_1}} = \frac{1}{3}$, $\overline{\mathrm{F_1H_1}} = \frac{2}{3}$

삼각형 $\mathrm{C_1D_1F_1}$의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$\angle \mathrm{B_1E_1F_1} = \frac{\pi}{2}$이고, $\overline{\mathrm{G_1E_1}} = \overline{\mathrm{G_1F_1}}$이므로

점 $\mathrm{G_1}$은 삼각형 $\mathrm{B_1F_1E_1}$의 외접원의 중심이다.

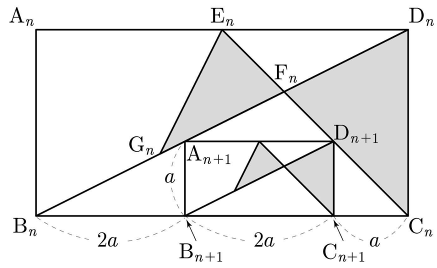
$\overline{\mathrm{B_1G_1}} = \overline{\mathrm{G_1F_1}}$이므로 삼각형 $\mathrm{G_1F_1E_1}$의 넓이는 삼각형 $\mathrm{B_1F_1E_1}$의 넓이의 $\frac{1}{2}$이다.

$\overline{\mathrm{B_1E_1}} = \sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{E_1F_1}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$이므로

삼각형 $\mathrm{G_1F_1E_1}$의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{B_1E_1}} \times \overline{\mathrm{E_1F_1}}\right) = \frac{1}{4} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{6}$

$S_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$



두 삼각형 $\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n\mathrm{F}_n$, $\mathrm{G}_n\mathrm{F}_n\mathrm{E}_n$으로 만들어진  모양의 도형의 넓이를 T_n이라 하자.

$\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}} = a$ $(a > 0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}} = 2a$, $\overline{\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}} = 2a$, $\overline{\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{C}_n} = a$

$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n} = 5a$

$\overline{\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}} = \frac{2}{5}\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}$

두 직사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$, $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}$의 닮음비는 $1 : \frac{2}{5}$이므로

넓이의 비는 $1^2 : \left(\frac{2}{5}\right)^2$이다.

$T_{n+1}=\frac{4}{25}T_n$

수열 $\{T_n\}$은 첫째항이 $T_1=S_1=\frac{1}{2}$이고 공비가 $\frac{4}{25}$인 등비수열이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}T_n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{4}{25}}=\frac{25}{42}$

100. 정답 ③

[출제의도] 등비급수를 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

직각삼각형 $A_1B_1D_1$에서

$$\overline{B_1D_1}=\sqrt{\overline{A_1B_1}^2+\overline{A_1D_1}^2}=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$$

이므로

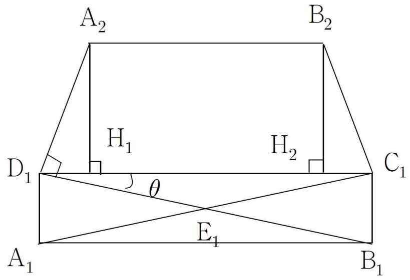
$\overline{D_1E_1}=\frac{1}{2}\times\overline{B_1D_1}=\frac{\sqrt{17}}{2}$

그러므로

$$S_1=2\times(\triangle A_2D_1E_1)=2\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{17}}{2}\times\frac{\sqrt{17}}{2}\right)=\frac{17}{4}$$

한편, 직각삼각형 $D_1B_1C_1$에서 $\angle C_1D_1B_1=\theta$라 하면

$\sin\theta=\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{D_1B_1}}=\frac{1}{\sqrt{17}}$



또, A_2에서 선분 D_1C_1에 내린 수선의 발을 H_1라 하면

$\angle A_2D_1H_1=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로

$$\overline{D_1H_1}=\overline{A_2D_1}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\overline{A_2D_1}\sin\theta=\frac{\sqrt{17}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{17}}=\frac{1}{2}$$

또, 점 B_2에서 선분 D_1C_1에 내린 수선의 발을 H_2라 하면

$$\overline{A_2B_2}=\overline{H_1H_2}=4-2\times\overline{D_1H_1}=4-2\times\frac{1}{2}=3$$

이때, $\overline{A_1B_1}=4$, $\overline{A_2B_2}=3$에서 길이의 비가 $\frac{3}{4}$이므로 넓이의 비는 $\frac{9}{16}$이다.

따라서

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{17}{4}}{1-\frac{9}{16}}=\frac{17\times4}{16-9}=\frac{68}{7}$$

101. 정답 ④

[출제의도] 도형 사이의 관계를 이용하여 등비급수의 합을 구한다.

그림 R_n에서 새로 색칠한 부분의 넓이를 a_n이라 하자.

$\angle A_nB_nD_n=\theta$라 하면

$\overline{B_1D_1}=\sqrt{1^2+(2\sqrt{6})^2}=5$이므로

$\sin\theta=\frac{\overline{A_nD_n}}{\overline{B_nD_n}}=\frac{\overline{A_1D_1}}{\overline{B_1D_1}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$, $\cos\theta=\frac{1}{5}$

두 선분 A_1G_1, G_1B_2와 호 B_2A_1로 둘러싸인 도형의 넓이는 부채꼴 $B_1B_2A_1$의 넓이에서 삼각형 $A_1B_1G_1$의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$\frac{1}{2}\times1^2\times\theta-\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}\times\sin\theta=\frac{\theta}{2}-\frac{\sqrt{6}}{10}$

두 선분 D_2H_1, H_1F_1과 호 F_1D_2로 둘러싸인 도형의 넓이는 부채꼴 $D_1F_1D_2$의 넓이에서 삼각형 $D_1F_1H_1$의 넓잉를 뺀 것과 같으므로

$$\frac{1}{2}\times1^2\times\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}-\frac{1}{20}$$

그러므로

$$a_1=\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\sqrt{6}}{10}\right)+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}-\frac{1}{20}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{6}}{10}-\frac{1}{20}$$

$$\frac{\overline{B_{n+1}D_{n+1}}}{\overline{B_nD_n}}=\frac{\overline{B_2D_2}}{\overline{B_1D_1}}=\frac{\overline{B_1D_1}-(\overline{B_1B_2}+\overline{D_1D_2})}{\overline{B_1D_1}}=\frac{3}{5}$$

두 직사각형 $A_nB_nC_nD_n$과 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 닮음비는 $5:3$이므로 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a_1이고 공비가 $\frac{9}{25}$인 등비수열이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a_1}{1-\frac{9}{25}}=\frac{25\pi-10\sqrt{6}-5}{64}$$

102. 정답 ②

[출제의도] 무한히 반복되는 도형에서 넓이의 극한값을 구할 수 있는가?

$\overline{OC_1}=3t$, $\overline{OD_1}=4t$ $(t>0)$라 하면

$\overline{OP_1}=5t$이므로

$5t=1$에서 $t=\frac{1}{5}$

따라서 $\overline{\mathrm{OC_1}}=\frac{3}{5}$에서 $\overline{\mathrm{A_1C_1}}=\frac{2}{5}$이고

$\overline{\mathrm{C_1P_1}}=\overline{\mathrm{OD_1}}=\frac{4}{5}$

이므로

$\overline{\mathrm{A_1P_1}}=\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

이때 삼각형 $\mathrm{P_1Q_1A_1}$은 직각이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{A_1Q_1}}=\overline{\mathrm{P_1Q_1}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

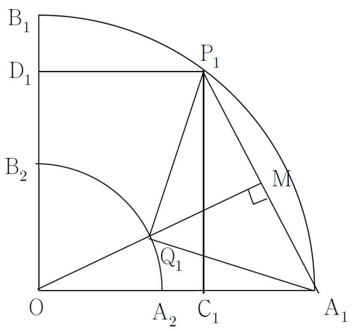
따라서

$S_1=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{1}{5}$

또한, 선분 $\mathrm{A_1P_1}$의 중점을 M이라 하면

$\overline{\mathrm{A_1P_1}}\perp\overline{\mathrm{Q_1M}}$, $\overline{\mathrm{A_1P_1}}\perp\overline{\mathrm{OM}}$

이므로 세 점 O, $\mathrm{Q_1}$, M은 한 직선 위에 있다.



이때,

$\overline{\mathrm{OM}}=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\overline{\mathrm{Q_1M}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

이므로

$\overline{\mathrm{OQ_1}}=\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

따라서 두 도형(부채꼴) $\mathrm{OA_1B_1}$, $\mathrm{OA_2B_2}$의 닮음비는 $1:\frac{1}{\sqrt{5}}$이므로

넓이의 비는 $1:\frac{1}{5}$이다.

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}$$

103. 정답 ③

[출제의도]

한없이 반복되는 도형에서 등비급수를 활용하여 넓이의 합에 대한 극한값을 구할 수 있는가?

직각삼각형 $\mathrm{C_1D_1F_1}$에서

$\angle\mathrm{C_1D_1F_1}=\frac{\pi}{6}$, $\overline{\mathrm{C_1D_1}}=1$이므로

$\overline{\mathrm{C_1F_1}}=\overline{\mathrm{C_1D_1}}\times\tan\frac{\pi}{6}=1\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

직각삼각형 $\mathrm{C_1D_1E_1}$에서

$\angle\mathrm{C_1D_1E_1}=\frac{\pi}{3}$이므로

$\overline{\mathrm{C_1E_1}}=\overline{\mathrm{C_1D_1}}\times\tan\frac{\pi}{3}=1\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$

이때,

$\overline{\mathrm{E_1F_1}}=\overline{\mathrm{C_1E_1}}-\overline{\mathrm{C_1F_1}}=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

직각삼각형 $\overline{\mathrm{E_1F_1H_1}}$에서 $\angle\mathrm{H_1E_1F_1}=\frac{\pi}{6}$이므로

$\overline{\mathrm{F_1H_1}}=\overline{\mathrm{E_1F_1}}\times\tan\frac{\pi}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{3}$

$\mathrm{S_1}$

$=\triangle\mathrm{E_1F_1G_1}+\triangle\mathrm{E_1F_1D_1}-2\times\triangle\mathrm{E_1F_1H_1}$

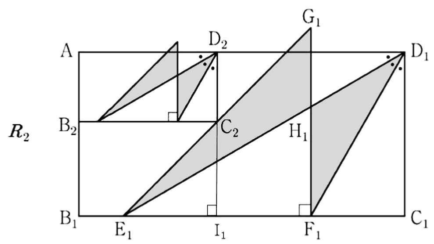
$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{E_1F_1}}\times\overline{\mathrm{F_1G_1}}+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{E_1F_1}}\times\overline{\mathrm{C_1D_1}}-2\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{E_1F_1}}\times\overline{\mathrm{F_1H_1}}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times1-2\left(\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{2}{3}\right)$

$=\frac{6-\sqrt{3}}{9}$

한편 $\overline{\mathrm{AB_2}}:\overline{\mathrm{B_2C_2}}=1:2$이므로

$\overline{\mathrm{AB_2}}=k$, $\overline{\mathrm{B_2C_2}}=2k$ $(k>0)$이라 하자.



점 $\mathrm{C_2}$에서 선분 $\mathrm{B_1C_1}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{I_1}$이라 하면

$\overline{\mathrm{E_1I_1}}=\overline{\mathrm{C_2I_1}}=1-k$, $\overline{\mathrm{I_1C_1}}=2-2k$이므로

$(1-k)+(2-2k)=\sqrt{3}$

$k=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$

그림 R_1에 색칠되어 있는 도형과 그림 R_2에 새로 색칠되어 있는 도형의 닮음비가 $1:\frac{3-\sqrt{3}}{3}$이므로 넓이의 비는 $1:\frac{4-2\sqrt{3}}{3}$이다.

따라서 구하는 극한값은 첫째항이 $\frac{6-\sqrt{3}}{9}$이고, 공비가 $\frac{4-2\sqrt{3}}{3}$인 등비급수의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{6-\sqrt{3}}{9}}{1-\frac{4-2\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

104. 정답 ③

[출제의도] 두 직선이 이루는 예각의 크기를 이용하여 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

$y=\sin x$에서 $y'=\cos x$이므로 곡선 $y=\sin x$위의 점 $P(t,\ \sin x)$에서의 접선의 기울기는 $\cos t$이다.

따라서 점 P에서의 접선과 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 이루는 예각의 크기가 θ이므로

$$\tan\theta=\left|\frac{\cos t-(-1)}{1+\cos t\times(-1)}\right|$$
$$=\left|\frac{\cos t+1}{1-\cos t}\right|$$

그런데 $0<t<\pi$이므로

$$\tan\theta=\frac{\cos t+1}{1-\cos t}$$

따라서

$$\lim_{t\to\pi-}\frac{\tan\theta}{(\pi-t)^2}$$
$$=\lim_{t\to\pi-}\frac{\frac{\cos t+1}{1-\cos t}}{(\pi-t)^2}$$
$$=\lim_{t\to\pi-}\frac{\cos t+1}{(\pi-t)^2(1-\cos t)}$$

이므로

$\pi-t=x$라 하면 $t\to\pi-$일 때 $x\to 0+$이고

$\cos t=\cos(\pi-x)=-\cos x$

이므로

$$\lim_{t\to\pi-}\frac{\tan\theta}{(\pi-t)^2}$$
$$=\lim_{t\to\pi-}\frac{\cos t+1}{(\pi-t)^2(1-\cos t)}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{1-\cos x}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)^2}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)^2}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{1}{(1+\cos x)^2}\right\}$$
$$=1^2\times\frac{1}{2^2}$$
$$=\frac{1}{4}$$

105. 정답 ①

[출제의도] 미분법을 활용하여 함수를 구하는 문제를 해결한다.

$g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고 역함수를 가지려면 $g(x)$는 일대일대응이어야 한다.

$f'(x)=3e^{3x}-a$, $g'(x)=\begin{cases} f'(x) & (x>k) \\ -f'(x) & (k<k) \end{cases}$에서

$a\le 0$이면 모든 실수 x에 대해 $f'(x)>0$이다.

$x>k$일 때 $g'(x)>0$이고 $x<k$일 때 $g'(x)<0$이므로 $g(x)$는 역함수를 갖지 않는다.

$a>0$이면 $f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{3}\ln\frac{a}{3}$이고

$x<\frac{1}{3}\ln\frac{a}{3}$이면 $f'(x)<0$,

$x>\frac{1}{3}\ln\frac{a}{3}$이면 $f'(x)>0$이므로 $k=\frac{1}{3}\ln\frac{a}{3}$

$g(x)$가 $x=k$에서 연속이므로

$f(k)=-f(k)$, $f(k)=0$

$f(k)=f\left(\frac{1}{3}\ln\frac{a}{3}\right)=\frac{a}{3}-\frac{a}{3}\ln\frac{a}{3}=0$, $a=3e$, $k=\frac{1}{3}$

따라서 $a\times k=e$

106. 정답 ③

[출제의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

원 C와 y축과의 교점 중 O가 아닌 점을 R라 하면

$$\angle\mathrm{ORP}=\frac{\pi}{2}-\angle\mathrm{POR}=\theta$$

직각삼각형 OPR에서 $\overline{\mathrm{OP}}=2\sin\theta$

$\angle\mathrm{ORQ}$, $\angle\mathrm{OPQ}$는 호 OQ에 대한 원주각이므로

$$\angle\mathrm{ORQ}=\angle\mathrm{OPQ}=\frac{\theta}{3}$$

직각삼각형 OQR에서 $\overline{\mathrm{OQ}}=2\sin\frac{\theta}{3}$

$\angle\mathrm{QOP}$, $\angle\mathrm{QRP}$는 호 PQ에 대한 원주각이므로

$$\angle\mathrm{QOP}=\angle\mathrm{QRP}=\theta-\frac{\theta}{3}=\frac{2}{3}\theta$$

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OP}}\times\overline{\mathrm{OQ}}\times\sin(\angle\mathrm{QOP})$$
$$=\frac{1}{2}\times 2\sin\theta\times 2\sin\frac{\theta}{3}\times\sin\frac{2}{3}\theta$$
$$=2\sin\theta\sin\frac{\theta}{3}\sin\frac{2}{3}\theta$$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{2\sin\theta\sin\frac{\theta}{3}\sin\frac{2}{3}\theta}{\theta^3}$$
$$=2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\sin\frac{\theta}{3}}{\frac{\theta}{3}}\times\frac{\sin\frac{2}{3}\theta}{\frac{2}{3}\theta}\right)$$
$$=2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times 1=\frac{4}{9}$$

107. 정답 ③

[출제의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

점 P와 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′이라 하면

$\overline{\mathrm{OP'}}=t$, $\overline{\mathrm{OQ'}}=f(t)$

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{t^2+t^2\sin^2 t}=t\sqrt{1+\sin^2 t}$,

$\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{PQ}}=t\left(\sqrt{1+\sin^2 t}-1\right)$

삼각형 OPP′과 삼각형 OQQ′은 서로 닮음이므로

$\overline{\mathrm{OP'}} : \overline{\mathrm{OQ'}} = \overline{\mathrm{OP}} : \overline{\mathrm{OQ}}$

$t : f(t) = t\sqrt{1+\sin^2 t} : t\left(\sqrt{1+\sin^2 t}-1\right)$에서

$$f(t) = \frac{t\left(\sqrt{1+\sin^2 t}-1\right)}{\sqrt{1+\sin^2 t}}$$

$$\lim_{t\to0+}\frac{f(t)}{t^3}$$

$$= \lim_{t\to0+}\frac{\sqrt{1+\sin^2 t}-1}{t^2\sqrt{1+\sin^2 t}}$$

$$= \lim_{t\to0+}\frac{\left(\sqrt{1+\sin^2 t}-1\right)\left(\sqrt{1+\sin^2 t}+1\right)}{t^2\sqrt{1+\sin^2 t}\left(\sqrt{1+\sin^2 t}+1\right)}$$

$$= \lim_{t\to0+}\frac{\sin^2 t}{t^2\sqrt{1+\sin^2 t}\left(\sqrt{1+\sin^2 t}+1\right)}$$

$$= \lim_{t\to0+}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\times\lim_{t\to0+}\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 t}\left(\sqrt{1+\sin^2 t}+1\right)}$$

$$= 1^2\times\frac{1}{\sqrt{1}\times\left(\sqrt{1}+1\right)} = \frac{1}{2}$$

108. 정답 ⑤

[출제의도] 여러 가지 미분법 이해하기

$g(3) = k$라 하면 $f(k) = k^3+k+1 = 3$에서 $k=1$

$f'(x) = 3x^2+1$이므로 $f'(1) = 4$

$$g'(3) = g'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$$

$\dfrac{dx}{dt} = g'(t)+1$, $\dfrac{dy}{dt} = g'(t)-1$이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)-1}{g'(t)+1}$$

따라서 $t=3$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{g'(3)-1}{g'(3)+1} = \frac{\frac{1}{4}-1}{\frac{1}{4}+1} = -\frac{3}{5}$$

109. 정답 ②

[출제의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)+\frac{1}{2}\cos x\times f'\left(\frac{1}{2}\sin x\right) = \cos x \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에 $x=\pi$를 대입하면

$$f'(\pi)-f'(0)\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$f'(\pi)-\frac{1}{2}f'(0) = -1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에 $x=0$을 대입하면

$$f'(0)+f'(0)\times\frac{1}{2} = 1,\quad f'(0) = \frac{2}{3}$$

따라서 $f'(0) = \dfrac{2}{3}$이므로 ㉡에 대입하면

$$f'(\pi)-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = -1$$

$$f'(\pi) = -1+\frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

110. 정답 ④

[출제의도] 여러 가지 미분법을 활용하여 문제해결하기

$e^{2f(x)}-e^{f(2x)}-2e^{3x}=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f'(x)e^{2f(x)}-2f'(2x)e^{f(2x)}-6e^{3x}=0$

$x=0$을 대입하면

$2f'(0)e^{2f(0)}-2f'(0)e^{f(0)}-6=0$

$f'(0)\left(e^{2f(0)}-e^{f(0)}\right)=3 \quad \cdots\cdots ㉠$

$e^{2f(x)}-e^{f(2x)}-2e^{3x}=0$에 $x=0$을 대입하면

$e^{2f(0)}-e^{f(0)}-2=0$

$e^{2f(0)}-e^{f(0)}=2$

이므로 ㉠에서 $f'(0) = \dfrac{3}{2}$

따라서 $g'(f(0)) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{2}{3}$

111. 정답 ③

[출제의도] 두 직선이 이루는 예각의 크기를 이용하여 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

$y=\sin x$에서 $y'=\cos x$이므로 곡선 $y=\sin x$위의 점 $P(t, \sin x)$에서의 접선의 기울기는 $\cos t$이다.

따라서 점 P에서의 접선과 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 이루는 예각의 크기가 θ이므로

$$\tan\theta = \left|\frac{\cos t-(-1)}{1+\cos t\times(-1)}\right|$$

$$= \left|\frac{\cos t+1}{1-\cos t}\right|$$

그런데 $0<t<\pi$이므로

$$\tan\theta = \frac{\cos t+1}{1-\cos t}$$

따라서

$$\lim_{t\to\pi-}\frac{\tan\theta}{(\pi-t)^2}$$

$$= \lim_{t\to\pi-}\frac{\frac{\cos t+1}{1-\cos t}}{(\pi-t)^2}$$

$$= \lim_{t\to\pi-}\frac{\cos t+1}{(\pi-t)^2(1-\cos t)}$$

이므로

$\pi-t=x$라 하면 $t\to\pi-$일 때 $x\to0+$이고

$\cos t = \cos(\pi-x) = -\cos x$

이므로

$$\lim_{t\to\pi-}\frac{\tan\theta}{(\pi-t)^2}$$
$$=\lim_{t\to\pi-}\frac{\cos t+1}{(\pi-t)^2(1-\cos t)}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{1-\cos x}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)^2}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)^2}$$
$$=\lim_{x\to0+}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{1}{(1+\cos x)^2}\right\}$$
$$=1^2\times\frac{1}{2^2}$$
$$=\frac{1}{4}$$

112. 정답 ①

[출제의도] 접선의 방정식을 구하고 함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

$y=e^{-x}+e^t$이므로

$y'=-e^{-x}$

접점의 좌표를 $(s,\ e^{-s}+e^t)$이라고 하면 접선의 방정식은

$y=-e^{-s}(x-s)+e^{-s}+e^t$

이 접선이 원점을 지나므로

$se^{-s}+e^{-s}+e^t=0$

$e^t=-(s+1)e^{-s}$ …… ㉠

양변을 s에 대하여 미분하면

$e^t\dfrac{dt}{ds}=-e^{-s}+(s+1)e^{-s}=se^{-s}$ …… ㉡

또한 $f(t)=-e^{-s}$이므로 양변을 s에 대하여 미분하면

$f'(t)\dfrac{dt}{ds}=e^{-s}$ …… ㉢

㉡, ㉢에서

$\dfrac{e^t}{f'(t)}=s$, 즉 $f'(t)=\dfrac{e^t}{s}$

또한 $f(a)=-e^{-s}=-e\sqrt{e}=-e^{\frac{3}{2}}$에서

$s=-\dfrac{3}{2}$

이고 ㉠에서 $e^a=\dfrac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}$이므로

$f'(t)=\dfrac{e^t}{s}$에서

$$f'(a)=\frac{\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{3}e\sqrt{e}$$

113. 정답 ④

[출제의도] 방정식의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3일 조건을 구할 수 있는가?

$e^x=k\sin x$에서 $\dfrac{1}{k}=\dfrac{\sin x}{e^x}$ … ㉠이므로

$h(x)=\dfrac{\sin x}{e^x}$라 하면

$$h'(x)=\frac{e^x\cos x-e^x\sin x}{e^{2x}}=\frac{\cos x-\sin x}{e^x}$$

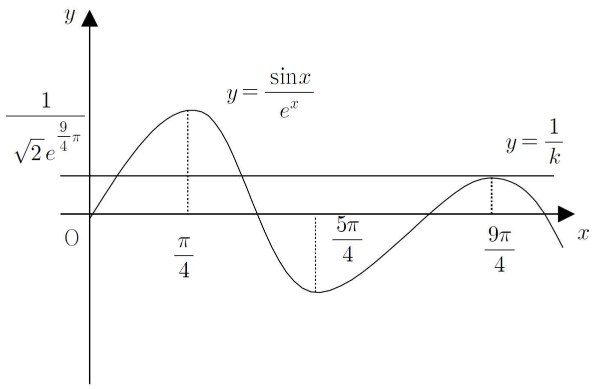
따라서 $x>0$에서 $h'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{9}{4}\pi,\ \cdots$

이므로 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$
$h'(x)$	1	+	0	−	0	+
$h(x)$	0	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}$	↘	$-\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi}}$	↗

x	$\cdots$	$\frac{9}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{13}{4}\pi$	$\cdots$
$h'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}}$	↘	$-\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{13}{4}\pi}}$	↗



이때 ㉠의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3이기 위해서는 그림과 같이 직선 $y=\dfrac{1}{k}$이 $x=\dfrac{9}{4}\pi$에서 곡선 $y=\dfrac{\sin x}{e^x}$와 접해야 하므로

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}}$$

따라서 $k=\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}$

114. 정답 ①

[출제의도] 접선의 방정식 이해하기

함수 $f(x)=xe^{-2x}$이라 하면

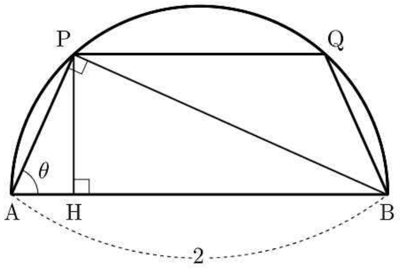
$f'(x)=(1-2x)e^{-2x}$

$f''(x)=(4x-4)e^{-2x}=0$에서 $x=1$

$x<1$에서 $f''(x)<0$이고,
$x>1$에서 $f''(x)>0$이다.
$x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로
변곡점 A의 좌표는 $(1,\ e^{-2})$
$f'(1)=-e^{-2}$이므로
함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 A에서의 접선의 방정식은
$y-e^{-2}=-e^{-2}(x-1)$
$y=-e^{-2}(x-2)$
그러므로 점 B의 좌표는 $(2,\ 0)$
따라서 삼각형 OAB의 넓이는
$\frac{1}{2}\times2\times e^{-2}=e^{-2}$

115. 정답 ③
[출제 의도] 부분적분법 이해하기
$Q(t,\ 0)$, $R(0,\ 2\ln(t+1))$이므로
직사각형 OQPR의 넓이는 $f(t)=2t\ln(t+1)$
따라서
$\int_1^3 f(t)dt$
$=\int_1^3\{2t\ln(t+1)\}dt$
$=\left[t^2\ln(t+1)\right]_1^3-\int_1^3\frac{t^2}{t+1}dt$
$=\left[t^2\ln(t+1)\right]_1^3-\int_1^3\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt$
$=\left[t^2\ln(t+1)\right]_1^3-\left[\frac{1}{2}t^2-t+\ln(t+1)\right]_1^3$
$=(9\ln4-\ln2)-\left(\frac{9}{2}-3+\ln4-\frac{1}{2}+1-\ln2\right)$
$=-2+16\ln2$

116. 정답 ③
[출제의도] 삼각함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?
다음 그림과 같이 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 할 때 직각삼각형 PAB에서
$\overline{AP}=2\cos\theta$
이므로 직각삼각형 PAH에서
$\overline{PH}=2\cos\theta sin\theta$, $\overline{AH}=2\cos^2\theta$



이때 사각형 ABQP는 등변사다리꼴이므로
$\overline{PQ}=\overline{AB}-2\times\overline{AH}=2-2\times2\cos^2\theta=2-4\cos^2\theta$
즉 사각형 ABQP의 넓이는
$f(\theta)=\frac{1}{2}\times(\overline{AB}+\overline{PQ})\times\overline{PH}$
$=\frac{1}{2}\times(2+2-4\cos^2\theta)\times2\cos\theta sin\theta$
$=4(1-\cos^2\theta)\cos\theta\sin\theta$
$=4\sin^3\theta\cos\theta$
이므로
$f'(\theta)=12\sin^2\theta\cos^2\theta-4\sin^4\theta$
한편 $\overline{AP}:\overline{BP}=1:3$일 때 $\theta=a$이고, $\angle APB=\frac{\pi}{2}$이므로
$\overline{AP}:\overline{BP}:\overline{AB}=1:3:\sqrt{10}$
$\therefore\ \sin a=\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos a=\frac{1}{\sqrt{10}}$
$\therefore\ f'(a)=12\sin^2a\cos^2a-4\sin^4a$
$=12\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}-4\times\frac{81}{100}$
$=-\frac{54}{25}$

117. 정답 ①
[출제의도] 정적분을 이용하여 곡선의 길이를 구할 수 있는가?
$y=\begin{cases}-\frac{e^x+e^{-x}}{2}+1 & (x<0)\\ 0 & (x\geq0)\end{cases}$
$\frac{dy}{dx}=\begin{cases}-\frac{e^x-e^{-x}}{2} & (x<0)\\ 0 & (x\geq0)\end{cases}$
이므로 $x<0$일 때
$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2$
에서
$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}$
$=\left|\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right|$
$=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$
이고, $x\geq0$일 때
$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+0=1$
따라서 $-\ln4\leq x\leq1$에서의 곡선의 길이는
$\int_{-\ln4}^{1}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$
$=\int_{-\ln4}^{0}\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx+\int_0^1 1dx$

$$=\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_{-\ln 4}^{0}+\left[\ x\ \right]_0^1$$

$$=\left(\frac{e^0-e^0}{2}-\frac{e^{-\ln 4}-e^{\ln 4}}{2}\right)+(1-0)$$

$$=\left(0-\frac{\frac{1}{4}-4}{2}\right)+1$$

$$=\frac{15}{8}+1=\frac{23}{8}$$

118. 정답 ⑤

[출제의도] 치환적분법과 부분적분법을 이용하여 문제를 해결한다.

조건 (가)에 의해 함수 $f(x)$는 감소한다.

그러므로 조건 (나)에 의해

$f(-1)=1,\ f(3)=-2$ 즉 $f^{-1}(1)=-1,\ f^{-1}(-2)=3$

$\int_{-2}^{1}f^{-1}(x)\,dx$에서 $f^{-1}(x)=t$로 놓으면

$x=-2$일 때 $t=3,\ x=1$일 때 $t=-1$이고,

$x=f(t)$에서 $\frac{dx}{dt}=f'(t)$이므로

$$\int_{-2}^{1}f^{-1}(x)\,dx=\int_{3}^{-1}tf'(t)\,dt$$

$$=\Big[tf(t)\Big]_3^{-1}-\int_3^{-1}f(t)\,dt$$

$$=-f(-1)-3f(3)+\int_{-1}^{3}f(t)\,dt$$

$$=-1+6+3=8$$

119. 정답 ①

[출제의도] 평면 위의 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=t^2x-\frac{\ln t}{8}$가 만나는 두 점 x좌표를 각각 α,β라 하면 두 점의 좌표는 (α,α^2), (β,β^2)이므로,

이 두 점의 중점의 좌표는 $\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$ …… ㉠

이 다. 두 식 $y=x^2$, $y=t^2x-\frac{\ln t}{8}$를 연립하면

$x^2=t^2x-\frac{\ln t}{8}$, $x^2-t^2x+\frac{\ln t}{8}=0$

이 방정식의 두 근이 α,β이므로, 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=t^2$, $\alpha\beta=\frac{\ln t}{8}$

따라서, $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$$=t^4-\frac{\ln t}{4}$$

이므로, ㉠에서 중점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}t^2,\ \frac{1}{2}t^4-\frac{\ln t}{8}\right)$이다.

그러므로, 점 P의 시각 t에서의 위치는 $x=\frac{1}{2}t^2$, $y=\frac{1}{2}t^4-\frac{\ln t}{8}$이다.

이 때, $\frac{dx}{dt}=t$, $\frac{dy}{dt}=-2t^3-\frac{1}{8t}$이므로,

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{t^2+\left(2t^3-\frac{1}{8t}\right)^2}$$

$$=\sqrt{t^2+4t^6-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{64t^2}}$$

$$=\sqrt{4t^6+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{64t^2}}$$

$$=\sqrt{\left(2t^3+\frac{1}{8t}\right)^2}$$

$$=2t^3+\frac{1}{8t}$$

따라서, 시각 $t=1$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^e\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_1^e\left(2t^3+\frac{1}{8t}\right)dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}t^4+\frac{1}{8}\ln|t|\right]_1^e$$

$$=\frac{1}{2}e^4+\frac{1}{8}-\left(\frac{1}{2}-0\right)$$

$$=\frac{e^4}{2}-\frac{3}{8}$$

120. 정답 ②

[출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 수열의 극한에 대한 문제를 해결한다.

점 A_n의 좌표는 $(0,\ n)$이다.

$\log_a(x-1)=n$에서 $x=a^n+1$이므로

점 B_n의 좌표는 $(a^n+1,\ n)$이다.

$$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}}=\sqrt{\{(a^{n+1}+1)-(a^n+1)\}^2+1}$$

$$=\sqrt{(a-1)^2a^{2n}+1}$$

사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}$은 사다리꼴이므로

$$S_n=\frac{1}{2}\times1\times\{(a^n+1)+(a^{n+1}+1)\}$$

$$=\frac{(a+1)a^n+2}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}}}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{(a-1)^2a^{2n}+1}}{(a+1)a^n+2}$$

(i) $0<a<1$일 때

$\lim_{n\to\infty}a^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}}}{S_n}=\frac{2\times1}{2}=1$$

$\frac{3}{2a+2}=1$에서 $a=\frac{1}{2}$

(ⅱ) $a>1$일 때

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{B_nB_{n+1}}}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{(a-1)^2+\frac{1}{a^{2n}}}}{(a+1)+\frac{2}{a^n}}$$
$$=\frac{2|a-1|}{a+1}$$
$$=\frac{2(a-1)}{a+1}$$

$\frac{2(a-1)}{a+1}=\frac{3}{2a+2}$에서 $a=\frac{7}{4}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 a의 값의 합은

$\frac{1}{2}+\frac{7}{4}=\frac{9}{4}$

121. 정답 ①

[출제의도] 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 추론하여 수열의 극한값을 구한다.

점 A_n의 좌표를 $(x_n,\ y_n)$이라 하면

규칙 (나)에서 $x_{2n}=x_{2n-1}+a,\ y_{2n}=y_{2n-1}$

규칙 (다)에서 $x_{2n+1}=x_{2n},\ y_{2n+1}=y_{2n}+(a+1)$

$x_{2n+2}=x_{2n+1}+a=x_{2n}+a$,

$y_{2n+2}=y_{2n+1}=y_{2n}+(a+1)$

즉 두 수열 $\{x_{2n}\}$, $\{y_{2n}\}$은 공차가 각각 a, $a+1$인 등차수열이고, 규칙 (가)에서

$x_2=x_1+a=a,\ y_2=y_1=0$이므로

$x_{2n}=a+(n-1)a=an$,

$y_{2n}=0+(n-1)(a+1)=(a+1)(n-1)$

그러므로

$$\overline{\mathrm{A_1A_{2n}}}^2=x_{2n}{}^2+y_{2n}{}^2$$
$$=a^2n^2+(a+1)^2(n-1)^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{A_1A_{2n}}}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a^2n^2+(a+1)^2(n-1)^2}}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{a^2+(a+1)^2\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}$$
$$=\sqrt{2a^2+2a+1}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{A_1A_{2n}}}}{n}=\frac{\sqrt{34}}{2}$ 에서 $\sqrt{2a^2+2a+1}=\frac{\sqrt{34}}{2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$4a^2+4a-15=0,\ (2a+5)(2a-3)=0$,

$a=-\frac{5}{2}$ 또는 $a=\frac{3}{2}$

따라서 양수 a의 값은 $\frac{3}{2}$ 이다.

122. 정답 ③

[출제 의도] 도형의 성질을 이용하여 수열의 극한값을 구하는 문제를 해결한다.

$x^2+n^2-1=2nx$에서

$x^2-2nx+(n+1)(n-1)=0$

$(x-n-1)(x-n+1)=0$이므로

$\mathrm{A}_n(n-1,\ 2n^2-2n)$, $\mathrm{B}_n(n+1,\ 2n^2+2n)$이라 하자.

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=\sqrt{2^2+(4n)^2}=\sqrt{16n^2+4}=2\sqrt{4n^2+1}$

원의 중심 $(2,\ 0)$과 직선 $2nx-y=0$ 사이의 거리는 $\frac{4n}{\sqrt{4n^2+1}}$ 이므로

점 P와 직선 $2nx-y=0$ 사이의 거리를 h라 하면

$$\frac{4n}{\sqrt{4n^2+1}}-1\le h\le\frac{4n}{\sqrt{4n^2+1}}+1$$

$$S_n=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}\times\left(\frac{4n}{\sqrt{4n^2+1}}+1\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{4n^2+1}\times\left(\frac{4n}{\sqrt{4n^2+1}}+1\right)$$
$$=4n+\sqrt{4n^2+1}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+\sqrt{4n^2+1}}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}}{1}$$
$$=4+\sqrt{4}=6$$

123. 정답 ③

[출제의도] 삼각형의 성질을 이용하여 수열의 극한에 대한 문제를 해결한다.

직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의해

$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2=4+n^2$

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{n^2+4}$

선분 AD가 $\angle\mathrm{A}$의 이등분선이므로

$\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}=2:n$

즉 $a_n=\overline{\mathrm{CD}}=\frac{n}{n+2}\times\overline{\mathrm{BC}}=\frac{n\sqrt{n^2+4}}{n+2}$

$$\lim_{n\to\infty}(n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\left(n-\frac{n\sqrt{n^2+4}}{n+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(n+2-\sqrt{n^2+4}\right)}{n+2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n}{n+2}\times\frac{(n+2)^2-(n^2+4)}{n+2+\sqrt{n^2+4}}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}\times\frac{4n}{n+2+\sqrt{n^2+4}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{2}{n}} \times \frac{4}{1+\frac{2}{n}+\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}}\right)$$

$$=2$$

124. 정답 ④

[출제의도] 수열의 극한으로 징의된 함수를 추론하여 함숫값을 구한다.

(i) $|x|<1$인 경우

$\lim_{n\to\infty} x^{2n+2} = \lim_{n\to\infty} x^{2n} = \lim_{n\to\infty} x^n = 0$이므로

$g(x)=f(x)$

(ii) $|x|>1$인 경우

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$이므로

$$g(x)=\lim_{n\to\infty} \frac{2x^2+\frac{1}{x^n}+\frac{f(x)}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^n}+\frac{1}{x^{2n}}} = 2x^2$$

(iii) $x=-1$인 경우

$$g(-1)=\lim_{n\to\infty} \frac{2+(-1)^n+f(-1)}{2+(-1)^n}$$

수열 $\left\{\frac{2+(-1)^n+f(-1)}{2+(-1)^n}\right\}$의 값은

교대로 $1+f(-1)$과 $1+\frac{f(-1)}{3}$ 이 된다.

$f(-1)\neq 0$이면 이 수열은 발산하므로 조건을 만족시키지 않고,

$f(-1)=0$이면 이 수열은 수렴하므로

$f(-1)=0,\ g(-1)=1$

(iv) $x=1$인 경우

$\lim_{n\to\infty} x^{2n+2} = \lim_{n\to\infty} x^{2n} = \lim_{n\to\infty} x^n = 1$

이므로 $g(1)=\frac{3+f(1)}{3}$ 이다.

$f(1)=a+b=-f(-1)=0$이므로 $b=-a,\ g(1)=1$

(i)~(iv)에 의하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (|x|<1) \\ 1 & (|x|=1) \\ 2x^2 & (|x|>1) \end{cases}$$

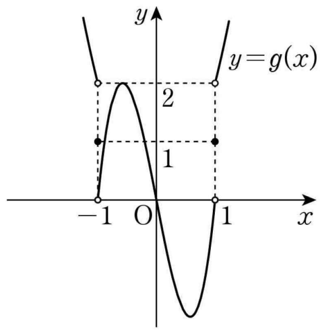
$f(x)=ax^3+bx\ (a>0)$에서 $b=-a$이므로

$f(x)=ax(x+1)(x-1)$

$f'(x)=3ax^2-a=0$에서 함수 $f(x)$는

$x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 에서 극대이고 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 에서 극소이다.

이때, 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수가 1이 되도록 하는 자연수 k가 존재하므로 조건을 만족시키는 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $f(x)$의 극댓값 $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$은 2이므로

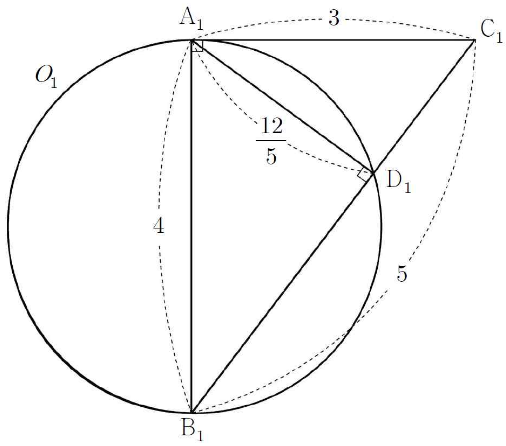
$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}a}{9}+\frac{\sqrt{3}a}{3} = \frac{2\sqrt{3}a}{9} = 2$에서 $a=3\sqrt{3}$

$f(x)=3\sqrt{3}x(x^2-1)$이므로

$g\left(-\frac{1}{2}\right)\times g(2) = f\left(-\frac{1}{2}\right)\times 8 = \frac{9\sqrt{3}}{8}\times 8 = 9\sqrt{3}$

125. 정답 ③

[출제의도] 등비급수를 활용하여 문제해결하기



원 O_1의 반지름의 길이가 2이므로

반원의 넓이는 2π

직각삼각형 $C_1A_1B_1$에서 $\overline{A_1C_1}=3,\ \overline{A_1B_1}=4$이므로

$\overline{B_1C_1}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

선분 A_1B_1은 원 O_1의 지름이므로 $\angle A_1D_1B_1=\frac{\pi}{2}$

삼각형 $C_1A_1B_1$에서

$\frac{1}{2}\times\overline{A_1B_1}\times\overline{A_1C_1} = \frac{1}{2}\times\overline{B_1C_1}\times\overline{A_1D_1}$이므로

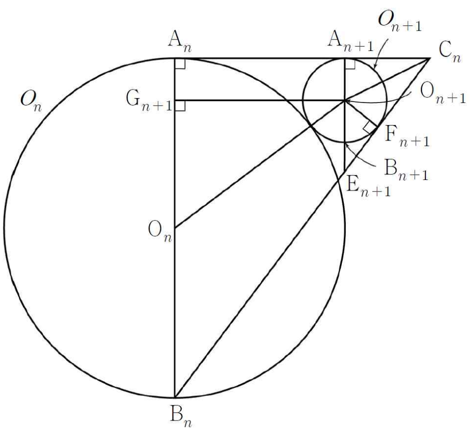
$\overline{A_1D_1}=\frac{12}{5}$

직각삼각형 $B_1D_1A_1$에서 $\overline{B_1D_1}=\sqrt{4^2-\left(\frac{12}{5}\right)^2}=\frac{16}{5}$

삼각형 $B_1D_1A_1$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{12}{5}\times\frac{16}{5}=\frac{96}{25}$

그러므로 $S_1=2\pi+\frac{96}{25}$이다.

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다.



두 원 O_n과 O_{n+1}의 중심을 각각 O_n과 O_{n+1}이라 하고 반지름의 길이를 각각 r_n과 r_{n+1}이라 하자.

직선 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}$이 선분 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$과 만나는 점을 E_{n+1}이라 하고, 원 O_{n+1}과 직선 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$이 접하는 점을 F_{n+1}이라 하자.

$\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_n}=a_n$이라 하면 $\overline{\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{C}_n}=a_n$이고

삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$과 삼각형 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{E}_{n+1}\mathrm{C}_n$은 서로 닮음이므로

$\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_n}:\overline{\mathrm{E}_{n+1}\mathrm{C}_n}=3:5$에서 $\overline{\mathrm{E}_{n+1}\mathrm{C}_n}=\dfrac{5}{3}a_n$이고

$\overline{\mathrm{E}_{n+1}\mathrm{F}_{n+1}}=\overline{\mathrm{E}_{n+1}\mathrm{C}_n}-\overline{\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{C}_n}=\dfrac{2}{3}a_n$이다.

삼각형 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{E}_{n+1}\mathrm{C}_n$과 삼각형 $\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{E}_{n+1}\mathrm{O}_{n+1}$은 서로 닮음이므로

$\overline{\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{F}_{n+1}}:\overline{\mathrm{E}_{n+1}\mathrm{F}_{n+1}}=3:4$에서 $a_n=2r_{n+1}$이다.

점 O_{n+1}에서 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{O}_n$에 내린 수선의 발을 G_{n+1}이라 하면

$\overline{\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{G}_{n+1}}=\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n}-\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_n}=\dfrac{3}{2}r_n-2r_{n+1}$

$\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{G}_{n+1}}=r_n-r_{n+1}$, $\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}}=r_n+r_{n+1}$이므로

직각삼각형 $\mathrm{O}_n\mathrm{G}_{n+1}\mathrm{O}_{n+1}$에서

$$(r_n+r_{n+1})^2=(r_n-r_{n+1})^2+\left(\frac{3}{2}r_n-2r_{n+1}\right)^2$$

$$16{r_{n+1}}^2-40r_{n+1}r_n+9{r_n}^2=0$$

$$(4r_{n+1}-r_n)(4r_{n+1}-9r_n)=0$$

$r_n>r_{n+1}$이므로 $r_{n+1}=\dfrac{1}{4}r_n$

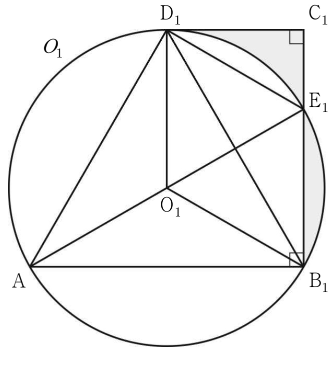
원 O_n과 원 O_{n+1}의 닮음비가 $4:1$이며 넓이의 비는 $16:1$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $2\pi+\dfrac{96}{25}$이고 공비가 $\dfrac{1}{16}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2\pi+\frac{96}{25}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{32}{15}\pi+\frac{512}{125}$$

126. **정답** ④

[출제의도] 등비급수를 활용하여 문제해결하기



$\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1}=1$, $\angle \mathrm{D}_1\mathrm{C}_1\mathrm{B}_1=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{D}_1}=2$, $\angle \mathrm{D}_1\mathrm{B}_1\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{3}$

삼각형 $\mathrm{AB}_1\mathrm{D}_1$은 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다.

삼각형 $\mathrm{AB}_1\mathrm{D}_1$의 외접원을 O_1이라 하면

$\angle \mathrm{E}_1\mathrm{B}_1\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{2}$이므로 선분 AE_1은 원 O_1의 지름이고 원 O_1의 반지름의 길이는 $\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$이다.

원 O_1의 중심을 O_1이라 하면

$\angle \mathrm{B}_1\mathrm{AE}_1=\dfrac{\pi}{6}$에서 $\angle \mathrm{B}_1\mathrm{O}_1\mathrm{E}_1=\dfrac{\pi}{3}$이고

$\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{B}_1}=\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{E}_1}$이므로

삼각형 $\mathrm{O}_1\mathrm{B}_1\mathrm{E}_1$은 정삼각형이다.

$\overline{\mathrm{C}_1\mathrm{E}_1}=\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1}-\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{E}_1}=\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1}-\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{B}_1}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

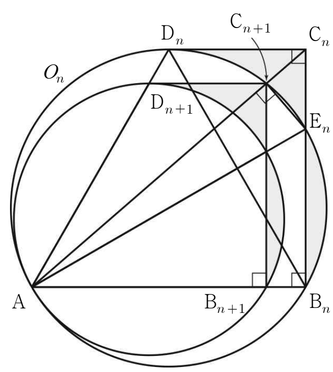
$\angle \mathrm{E}_1\mathrm{O}_1\mathrm{D}_1=\dfrac{\pi}{3}$이므로

두 부채꼴 $\mathrm{O}_1\mathrm{E}_1\mathrm{D}_1$, $\mathrm{O}_1\mathrm{B}_1\mathrm{E}_1$은 서로 합동이다.

S_1은 삼각형 $\mathrm{E}_1\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1$의 넓이와 같으므로

$S_1=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{C}_1\mathrm{E}_1}\times\overline{\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times1=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다.



$\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n}=a_n$이라 하면 $\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}=\sqrt{3}a_n$

직각삼각형 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$에서 $\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n}=2a_n$

$\angle \mathrm{D}_n\mathrm{B}_n\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{3}$, $\angle \mathrm{B}_n\mathrm{AD}_n=\angle \mathrm{B}_1\mathrm{AD}_1=\dfrac{\pi}{3}$이므로

삼각형 $\mathrm{AB}_n\mathrm{D}_n$은 한 변의 길이가 $2a_n$인 정삼각형이다.

그러므로 $\overline{\mathrm{AB}_n}=2a_n$

$\overline{\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}}=a_{n+1}$이라 하면

$\overline{\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}}=\sqrt{3}\,a_{n+1}$, $\overline{\mathrm{AB}_{n+1}}=2a_{n+1}$

$\dfrac{\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}}{\overline{\mathrm{AB}_n}}=\dfrac{\overline{\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}}}{\overline{\mathrm{AB}_{n+1}}}$ 이므로

점 C_{n+1}은 직선 AC_n 위의 점이다.

그러므로 사다리꼴 $\mathrm{AB}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$과 사다리꼴 $\mathrm{AB}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}$은 서로 닮음이다.

직각삼각형 $\mathrm{AB}_n\mathrm{C}_n$에서

$\overline{\mathrm{AC}_n}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}_n}^2+\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}^2}=\sqrt{7}\,\mathrm{a}_n$

직각삼각형 $\mathrm{AB}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}$에서 $\overline{\mathrm{AC}_{n+1}}=\sqrt{7}\,a_{n+1}$이므로

$\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{C}_{n+1}}=\overline{\mathrm{AC}_n}-\overline{\mathrm{AC}_{n+1}}=\sqrt{7}\,(\mathrm{a}_n-\mathrm{a}_{n+1})$

정삼각형 $\mathrm{AB}_n\mathrm{D}_n$의 외접원을 O_n이라 하면

$\angle\mathrm{E}_n\mathrm{B}_n\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{2}$이므로 선분 AE_n은 원 O_n의 지름이다.

$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{E}_n}=\overline{\mathrm{AB}_n}\times\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a_n$에서

$\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{E}_n}=\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}-\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{E}_n}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{a}_n$

선분 AE_n을 지름으로 하는 반원에 대한 원주각의 크기는 $\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\angle\mathrm{AC}_{n+1}\mathrm{E}_n=\dfrac{\pi}{2}$

$\angle\mathrm{E}_n\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{C}_n=\pi-\angle\mathrm{AC}_{n+1}\mathrm{E}_n=\dfrac{\pi}{2}$

두 삼각형 $\mathrm{C}_n\mathrm{AB}_n$, $\mathrm{C}_n\mathrm{E}_n\mathrm{C}_{n+1}$은 서로 닮음이므로

$\overline{\mathrm{AC}_n}:\overline{\mathrm{E}_n\mathrm{C}_n}=\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}:\overline{\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{C}_n}$

$\sqrt{7}\,a_n:\dfrac{\sqrt{3}}{3}a_n=\sqrt{3}\,a_n:\sqrt{7}\,(a_n-a_{n+1})$

$a_n{}^2=7a_n(a_n-a_{n+1})$

$7a_{n+1}=6a_n$

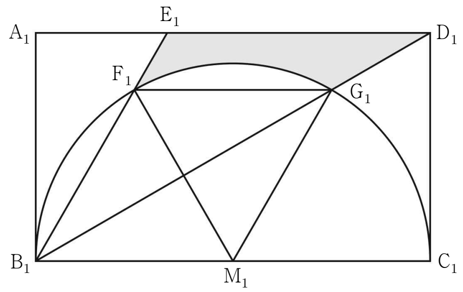
$a_{n+1}=\dfrac{6}{7}a_n$이므로 사다리꼴 $\mathrm{AB}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$과 사다리꼴 $\mathrm{AB}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}$의 닮음비가 $7:6$이고 넓이의 비는 $49:36$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$이고 공비가 $\dfrac{36}{49}$인 등비수열의 첫째항부터

제 n항까지의 합이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{6}}{1-\dfrac{36}{49}}=\dfrac{49}{78}\sqrt{3}$

127. 정답 ②

[출제의도] 등비급수를 활용하여 문제해결하기



선분 $\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$의 중점을 M_1이라 하자.

삼각형 $\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1$에서 $\tan(\angle\mathrm{C}_1\mathrm{B}_1\mathrm{D}_1)=\dfrac{\overline{\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1}}{\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$\angle\mathrm{C}_1\mathrm{B}_1\mathrm{G}_1=\dfrac{\pi}{6}$이고 $\angle\mathrm{C}_1\mathrm{M}_1\mathrm{G}_1=\dfrac{\pi}{3}$ …… ㉠

점 E_1은 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{D}_1$을 $1:2$로 내분하는 점이므로

$\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{E}_1}=2\sqrt{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{E}_1$에서 $\tan(\angle\mathrm{E}_1\mathrm{B}_1\mathrm{A}_1)=\dfrac{\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{E}_1}}{\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$\angle\mathrm{E}_1\mathrm{B}_1\mathrm{A}_1=\dfrac{\pi}{6}$

$\angle\mathrm{G}_1\mathrm{B}_1\mathrm{E}_1=\dfrac{\pi}{2}-\angle\mathrm{C}_1\mathrm{B}_1\mathrm{G}_1-\angle\mathrm{E}_1\mathrm{B}_1\mathrm{A}_1=\dfrac{\pi}{6}$에서

$\angle\mathrm{G}_1\mathrm{M}_1\mathrm{F}_1=\dfrac{\pi}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 두 삼각형 $\mathrm{B}_1\mathrm{M}_1\mathrm{F}_1$, $\mathrm{F}_1\mathrm{M}_1\mathrm{G}_1$은 모두 정삼각형이므로

$\angle\mathrm{F}_1\mathrm{M}_1\mathrm{B}_1=\angle\mathrm{M}_1\mathrm{F}_1\mathrm{G}_1$이 되어 두 선분 $\mathrm{F}_1\mathrm{G}_1$, $\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$은 서로 평행하다.

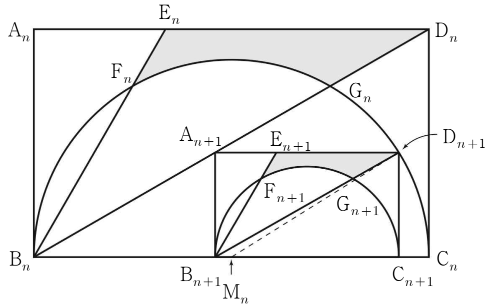
삼각형 $\mathrm{B}_1\mathrm{G}_1\mathrm{F}_1$의 넓이는 삼각형 $\mathrm{F}_1\mathrm{M}_1\mathrm{G}_1$의 넓이와 같고, 두 선분 $\mathrm{B}_1\mathrm{F}_1$, $\mathrm{B}_1\mathrm{G}_1$과 호 $\mathrm{F}_1\mathrm{G}_1$로 둘러싸인 부분의 넓이는

부채꼴 $\mathrm{F}_1\mathrm{M}_1\mathrm{G}_1$의 넓이와 같으므로

$S_1=\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\times2\right)-\left\{\dfrac{1}{2}\times(\sqrt{3})^2\times\dfrac{\pi}{3}\right\}$

$=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\pi}{2}$

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다.



선분 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$의 중점을 M_n이라 하자.

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=a_n$, $\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}}=a_{n+1}$이라 하면

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}:\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}=1:\sqrt{3}$에서 $\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}=\sqrt{3}\,a_n$이고

$\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}}:\overline{\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}}=1:\sqrt{3}$에서 $\overline{\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}}=\sqrt{3}\,a_{n+1}$이다.

직각삼각형 $\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}$에서

$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}}=\dfrac{\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}}}{\tan\frac{\pi}{6}}=\sqrt{3}a_{n+1}$이므로

$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_{n+1}}=\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}}+\overline{\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}}=2\sqrt{3}a_{n+1}$

직각삼각형 $\mathrm{M}_n\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}$에서

$\overline{\mathrm{M}_n\mathrm{C}_{n+1}}^2+\overline{\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}}^2=\overline{\mathrm{M}_n\mathrm{D}_{n+1}}^2$

이고 $\overline{\mathrm{M}_n\mathrm{D}_{n+1}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a_n$이므로

$\left(\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_{n+1}}-\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{M}_n}\right)^2+\overline{\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}}^2=\dfrac{3}{4}{a_n}^2$

$\left(2\sqrt{3}a_{n+1}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a_n\right)^2+{a_{n+1}}^2=\dfrac{3}{4}{a_n}^2$

$13{a_{n+1}}^2-6a_na_{n+1}=0$

$a_{n+1}=\dfrac{6}{13}a_n$이므로 두 사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$과 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}$의 닮음비가 13 : 6이고 넓이의 비는 169 : 36이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\pi}{2}$이고

공비가 $\dfrac{36}{169}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{2}}{1-\frac{36}{169}}=\frac{169}{798}(8\sqrt{3}-3\pi)$$

128. **정답** ②

[출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 추론하기

$f(x)=0$에서 $a\sin x-\cos x=0$, $\tan x=\dfrac{1}{a}\tan x=\dfrac{1}{a}$을 만족시키는

실수 x는 열린구간 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 오직 하나뿐이므로

$\tan k=\dfrac{1}{a}$ …… ㉠

$g(k)=0$이므로 $e^{2k-b}-1=0$에서 $2k=b$ …… ㉡

$\{f(x)g(x)\}'=2f(x)$에서

$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)-2f(x)=0$

$f'(x)g(x)+f(x)\{g'(x)-2\}=0$

$f'(x)=a\cos x+\sin x$, $g'(x)=2e^{2x-b}$이므로

$(a\cos x+\sin x)(e^{2x-b}-1)+(a\sin x-\cos x)(2e^{2x-b}-2)=0$

$(e^{2x-b}-1)\{(2a+1)\sin x+(a-2)\cos x\}=0$

$e^{2x-b}-1=0$ 또는 $(2a+1)\sin x+(a-2)\cos x=0$

$x=\dfrac{b}{2}$ 또는 $\tan x=\dfrac{2-a}{2a+1}$

㉠, ㉡에 의하여 $\tan\dfrac{b}{2}=\tan k=\dfrac{1}{a}$이고, $\tan x=\dfrac{2-a}{2a+1}$인 실수 x를

$\alpha\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면 $\dfrac{1}{a}\neq\dfrac{2-a}{2a+1}$이므로 $\dfrac{b}{2}\neq\alpha$이다.

그러므로 열린구간 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$에서

방정식 $\{f(x)g(x)\}'=2f(x)$의 모든 해는 $\dfrac{b}{2}$, α이다.

$\dfrac{b}{2}+\alpha=\dfrac{\pi}{4}$이므로

$$\tan\alpha=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{b}{2}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{b}{2}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\times\tan\frac{b}{2}}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{a}}{1+\frac{1}{a}}=\frac{a-1}{a+1}$$

$\tan\alpha=\dfrac{2-a}{2a+1}$이므로

$\dfrac{a-1}{a+1}=\dfrac{2-a}{2a+1}$에서 $3a^2-2a-3=0$

$2a=3(a^2-1)$, $a^2-1=\dfrac{2}{3}a$

$$\text{따라서 }\tan b=\tan\left(\frac{b}{2}+\frac{b}{2}\right)=\frac{2\tan\frac{b}{2}}{1-\tan^2\frac{b}{2}}$$

$$=\frac{2\times\frac{1}{a}}{1-\left(\frac{1}{a}\right)^2}$$

$$=\frac{2a}{a^2-1}=\frac{2a}{\frac{2}{3}a}=3$$

129. **정답** ②

[출제의도] 무리수 e를 포함하는 함수의 대칭성과 주기성을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

조건 (가)에서

양변에 $x=0$을 대입하면

$\{f(0)\}^2+2f(0)=a+b$ …… ㉠

양변에 $x=2$를 대입하면

$\{f(2)\}^2+2f(2)=a+b$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\{f(0)\}^2+2f(0)=\{f(2)\}^2+2f(2)$

$\{f(2)-f(0)\}\{f(2)+f(0)+2\}=0$

$f(2)=f(0)$ 또는 $f(2)+f(0)+2=0$

$f(2)=f(0)$이면

조건 (나)를 만족시키지 못하므로

$f(2)+f(0)+2=0$ …… ㉢

조건 (나)에서

$f(0)=f(2)+1$을 ㉢에 대입하면

$2f(2)+3=0$

$f(2)=-\dfrac{3}{2}$

조건 (나)에서

$f(0)=f(2)+1=-\frac{3}{2}+1=-\frac{1}{2}$

$f(0)=-\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=a+b$

$a+b=-\frac{3}{4}$ …… ㉣

한편, 조건 (가)에서

양변에 1을 더하면

$\{f(x)\}^2+2f(x)+1=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b+1$

$\{f(x)+1\}^2=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b+1$

이때 $g(x)=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b+1$이라 하면

$g(2-x)$

$=a\cos^3\pi(2-x)\times e^{\sin^2\pi(2-x)}+b+1$

$=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b+1$

이므로 모든 실수 x에 대하여

$g(x)=f(2-x)$

이다.

즉, 모든 실수 x에 대하여

$\{f(x)+1\}^2=\{f(2-x)+1\}^2$

이다. 이때

$\{f(x)-f(2-x)\}\{f(x)+f(2-x)+2\}=0$

에서

$f(x)=f(2-x)$ 또는 $f(x)+f(2-x)=-2$

조건 (나)에서

$f(0)=f(2)+1$

이므로

$f(x)\neq f(2-x)$

이다.

즉, $f(x)+f(2-x)=-2$이므로

$x=1$을 대입하면

$f(1)+f(1)=-2$

$f(1)=-1$

조건 (가)에서

양변에 $x=1$을 대입하면

$\{f(1)\}^2+2f(1)=-a+b$

$(-1)^2+2\times(-1)=-a+b$

$-a+b=-1$ …… ㉤

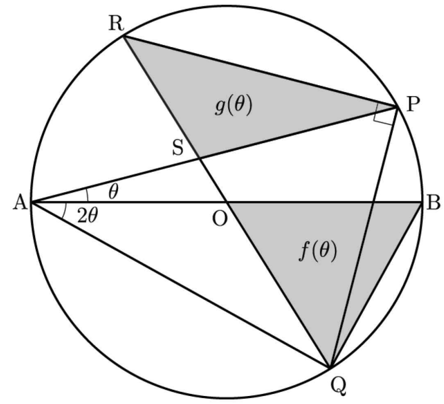
㉣, ㉤을 연립하면

$a=\frac{1}{8},\ b=-\frac{7}{8}$

따라서 $a\times b=\frac{1}{8}\times\left(-\frac{7}{8}\right)=-\frac{7}{64}$

130. **정답** ②

[출제의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 문제 해결하기



$\overline{OA}=\overline{OQ}=1$이므로

$\angle OQA=2\theta$, $\angle BOQ=4\theta$

삼각형 BOQ의 넓이는

$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{OQ}\times\sin(\angle BOQ)$

$=\frac{1}{2}\times1\times1\times sin4\theta=\frac{1}{2}\sin4\theta$

선분 RQ는 원의 지름이므로 $\angle RPQ=\frac{\pi}{2}$

원주각의 성질에 의하여 $\angle PRQ=\angle PAQ=3\theta$

$\overline{RP}=\overline{RQ}\cos3\theta=2\cos3\theta$

원주각의 성질에 의하여 $\angle RPA=\angle RQA=2\theta$

삼각형 PRS에서 $\angle PSR=\pi-5\theta$

사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{RS}}{\sin2\theta}=\frac{2\cos3\theta}{\sin(\pi-5\theta)}$이므로

$\overline{RS}=\frac{2\cos3\theta sin2\theta}{\sin(\pi-5\theta)}=\frac{2\cos3\theta sin2\theta}{\sin5\theta}$

삼각형 PRS의 넓이는

$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{RP}\times\overline{RS}\times\sin(\angle PRS)$

$=\frac{1}{2}\times2\cos3\theta\times\frac{2\cos3\theta sin2\theta}{\sin5\theta}\times\sin3\theta$

$=\frac{2\cos^2(3\theta)\times\sin2\theta\times sin3\theta}{\sin5\theta}$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{2\cos^2(3\theta)\times\sin2\theta\times sin3\theta}{\sin5\theta}}{\frac{1}{2}\sin4\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\cos^2(3\theta)\times sin2\theta\times sin3\theta}{sin4\theta\times sin5\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{24\times cos^2(3\theta)\times\frac{\sin2\theta}{2\theta}\times\frac{\sin3\theta}{3\theta}}{20\times\frac{\sin4\theta}{4\theta}\times\frac{\sin5\theta}{5\theta}}$$

$$=\frac{6}{5}$$

131. 정답 ④

$\overline{AP}=\overline{PC}$이므로 삼각형 OPC에서

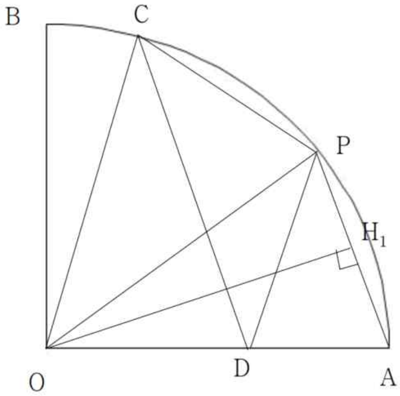
$\angle COP=\angle POA=\theta$

또 점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H_1이라 하면

$\angle H_1OA=\dfrac{\theta}{2}$

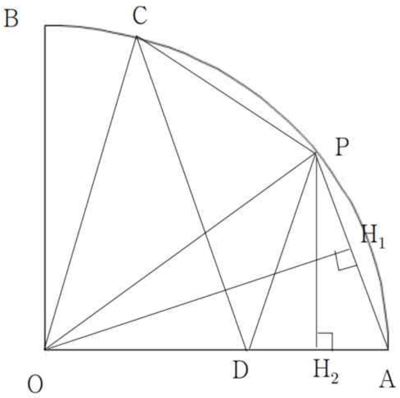
이므로

$$\begin{aligned}\overline{AP}&=2\overline{AH_1}\\&=2\times\overline{OA}\sin\frac{\theta}{2}\\&=2\sin\frac{\theta}{2}\quad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$



한편, 점 P에서 선분 DA에 내린 수선의 발을 H_2라 하면

$$\begin{aligned}\angle APD&=2\angle APH_2\\&=2\times\{\pi-(\angle PH_2A+\angle H_2AP)\}\\&=2\times\left[\pi-\left\{\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right\}\right]\\&=\theta\end{aligned}$$



또,

$\angle APO=\angle OPC=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}$

이므로

$$\begin{aligned}\angle DPC&=\angle APO+\angle OPC-\angle APD\\&=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)-\theta\\&=\pi-2\theta\quad\cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

그러므로 ㉠ 과 ㉡ 으로부터

$$\begin{aligned}f(\theta)&=\frac{1}{2}\times\overline{PD}\times\overline{PC}\times\sin(\pi-2\theta)\\&=\frac{1}{2}\times\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin2\theta\\&=2\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin2\theta\end{aligned}$$

또, ㉠ 으로부터 삼각형 APD에서

$$\begin{aligned}\overline{DA}&=2\overline{AP}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\\&=2\times2\sin\frac{\theta}{2}\times\sin\frac{\theta}{2}\\&=4\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\end{aligned}$$

이때, 두 삼각형 OAP, DAE는 닮음 삼각형이고

$\overline{OA}=1$, $\overline{DA}=4\left(\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^2$ 이므로

$$\begin{aligned}g(\theta)&=\Delta DAE\\&=4^2\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4\times\Delta OAP\\&=16\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4\times\frac{1}{2}\sin\theta\\&=8\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4\times\sin\theta\end{aligned}$$

따라서,

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{8\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4\times\sin\theta}{\theta^2\times2\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin2\theta}$$

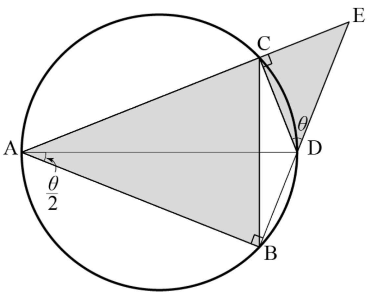
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin\theta}{\theta^2\times\sin2\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\times\left(\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\times\dfrac{\sin\theta}{\theta}\times\dfrac{1}{4}}{\dfrac{\sin2\theta}{2\theta}\times2}$$

$$=\frac{1}{2}$$

132. 정답 ②

[출제의도] 삼각함수의 극한 이해하기



$\angle \mathrm{ABD}=\frac{\pi}{2}$이므로 선분 AD는 원의 지름이다.

$\angle \mathrm{ECD}=\frac{\pi}{2}$, $\angle \mathrm{DAB}=\angle \mathrm{CAD}=\frac{\theta}{2}$

$\overline{\mathrm{AB}}=10\cos\frac{\theta}{2}$, $\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{BD}}=10\sin\frac{\theta}{2}$

$\angle \mathrm{AEB}=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로 $\angle \mathrm{CDE}=\theta$

$\overline{\mathrm{CE}}=10\sin\frac{\theta}{2}\tan\theta$

$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\left(10\cos\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin\theta$

$g(\theta)=\frac{1}{2}\times 10\sin\frac{\theta}{2}\times 10\sin\frac{\theta}{2}\tan\theta$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{50\sin^2\frac{\theta}{2}\tan\theta}{\theta^2\times 50\cos^2\frac{\theta}{2}\sin\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\times\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}\tan\theta}{\theta^2\times\sin\theta}\right\}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{1\times\frac{1}{4}\times\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}\times\frac{\tan\theta}{\theta}\times\frac{\theta}{\sin\theta}\right\}=\frac{1}{4}$$

133. 정답 ③

[출제의도] 삼각형의 성질을 이용하여 삼각함수의 극한에 대한 문제를 해결한다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}^2=1^2+2^2-2\times1\times2\times\cos\theta=5-4\cos\theta$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{5-4\cos\theta}$

직선 AE가 $\angle \mathrm{BAC}$의 이등분선이므로

$\overline{\mathrm{BE}}:\overline{\mathrm{CE}}=\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=1:\sqrt{5-4\cos\theta}$에서

$\overline{\mathrm{BE}}=\frac{1}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}\times\overline{\mathrm{BC}}=\frac{2}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}$

그러므로

$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BE}}\times\sin(\angle \mathrm{CBA})$

$=\frac{1}{2}\times1\times\frac{2}{1+}\sqrt{5-4\cos\theta}\times\sin\theta$

$=\frac{\sin\theta}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}$

두 직선 AB, DM이 서로 평행하므로

$\angle \mathrm{CDM}=\theta$, $\angle \mathrm{BAE}=\angle \mathrm{DFE}$

이다. 이때 $\angle \mathrm{BAE}=\angle \mathrm{FAC}$이므로 삼각형 AMF는 이등변삼각형이다.

점 M은 선분 AC의 중점이므로

$\overline{\mathrm{FM}}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}=\frac{\sqrt{5-4\cos\theta}}{2}$이고

$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{CD}}=1$, $\overline{\mathrm{DM}}=\frac{1}{2}$

그러므로 $\overline{\mathrm{DF}}=\overline{\mathrm{FM}}-\overline{\mathrm{DM}}=\frac{\sqrt{5-4\cos\theta}-1}{2}$

$\angle \mathrm{FDC}=\pi-\angle \mathrm{CDM}=\pi-\theta$이므로

$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\overline{\mathrm{DF}}\times\sin(\angle \mathrm{FDC})$

$=\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{5-4\cos\theta}-1}{2}\times\sin(\pi-\theta)$

$=\frac{\sqrt{5-4\cos\theta}-1}{4}\times\sin\theta$

따라서

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\frac{\sin\theta}{4}\left(\sqrt{5-4\cos\theta}-1\right)}{\theta^2\times\frac{\sin\theta}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\left(\sqrt{5-4\cos\theta}-1\right)\left(\sqrt{5-4\cos\theta}+1\right)}{4\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{(5-4\cos\theta)-1}{4\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}$$

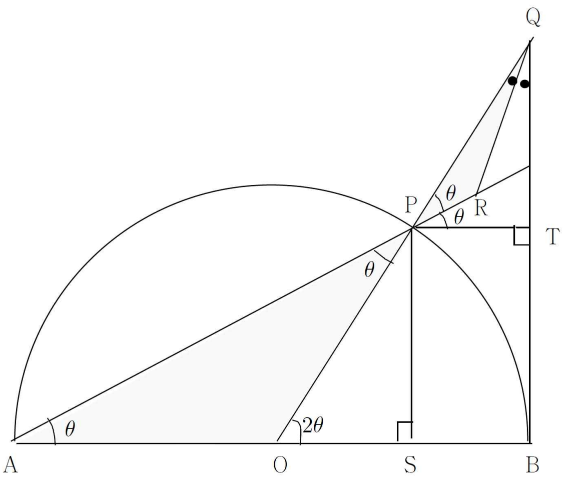
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta^2(1+\cos\theta)}$$

$$=\frac{1}{2}\times\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}$$

$$=\frac{1}{2}$$

134. 정답 ①

[출제의도] 도형에서 여러 가지 조건을 이용하여 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?



$f(\theta)=\frac{1}{2}\times1\times1\times sin(\pi-2\theta)=\frac{\sin2\theta}{2}$

또한, $\angle \mathrm{APO}=\angle \mathrm{QPR}=\theta$이므로

점 P에서 두 선분 AB, BQ에 내린 수선의 발을 각각 S, T라 하면

$\angle \mathrm{QPT}=2\theta$

즉, 점 R는 삼각형 PTQ의 내심이다.

이때, $\overline{\mathrm{OS}}=\cos2\theta$, $\overline{\mathrm{PS}}=\sin2\theta$, $\overline{\mathrm{BQ}}=\tan2\theta$ 이므로

$\overline{\mathrm{PT}}=1-\cos2\theta$

$\overline{\mathrm{QT}}=\tan2\theta-\sin2\theta=\tan2\theta(1-\cos2\theta)$이고

$\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{\cos2\theta}-1=\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}$

따라서 삼각형 PTQ의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\frac{1}{2}\times(1-\cos2\theta)\times tan2\theta(1-\cos2\theta)$

$=\frac{1}{2}\times r\times\left\{\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}+1-\cos2\theta+\tan2\theta(1-\cos2\theta)\right\}$

에서 $r=\frac{(1-\cos2\theta)\sin2\theta}{1+\sin2\theta+\cos2\theta}$ 이다.

그러므로

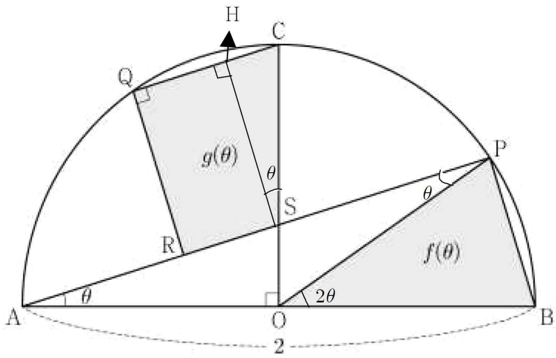
$$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}\times\frac{(1-\cos2\theta)\sin2\theta}{1+\sin2\theta+\cos2\theta}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{(1-\cos2\theta)^2\sin2\theta}{\cos2\theta(1+\sin2\theta+\cos2\theta)}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sin^4 2\theta\times sin2\theta}{\cos2\theta(1+\sin2\theta+\cos2\theta)(1+\cos2\theta)^2}$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^4\times f(\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\left(\frac{\sin2\theta}{2\theta}\right)^4\times16\times\frac{1}{\cos2\theta(1+\sin2\theta+\cos2\theta)(1+\cos2\theta)^2}\right\}$$
$$=1^4\times16\times\frac{1}{8}=2$$

135. 정답 ②

[출제의도] 도형과 관련된 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?



$\angle \mathrm{OAP}=\angle \mathrm{OPA}=\theta$이므로

$\angle \mathrm{BOP}=2\theta$

따라서

$f(\theta)=\frac{1}{2}\sin2\theta$

또한, $\overline{\mathrm{OA}}=1$에서 $\overline{\mathrm{OS}}=\tan\theta$이므로

$\overline{\mathrm{CS}}=1-\tan\theta$

이때, $\angle \mathrm{BOP}=\angle \mathrm{COQ}=2\theta$이고 삼각형 OCQ는 이등변삼각형이므로

$\angle \mathrm{SCQ}=\frac{\pi}{2}-\theta$

또한, $\angle \mathrm{CSR}=\theta+\frac{\pi}{2}$ 이므로

$\angle \mathrm{QRS}=\frac{\pi}{2}$

따라서 점 S에서 변 CQ에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle \mathrm{CSH}=\theta$

이므로

$\overline{\mathrm{SH}}=\overline{\mathrm{RQ}}=(1-\tan\theta)\cos\theta$

$\overline{\mathrm{CH}}=(1-\tan\theta)\sin\theta$

이고

$\overline{\mathrm{CQ}}=\overline{\mathrm{BP}}=2\sin\theta$

$$\overline{\mathrm{RS}}=\overline{\mathrm{QH}}=\overline{\mathrm{CQ}}-\overline{\mathrm{CH}}$$
$$=2\sin\theta-(\sin\theta-\sin\theta tan\theta)$$
$$=\sin\theta+\sin\theta tan\theta$$

따라서

$g(\theta)$

$=\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{CQ}}+\overline{\mathrm{RS}})\times\overline{\mathrm{QR}}$

$=\frac{1}{2}\times(2\sin\theta+\sin\theta+\sin\theta tan\theta)\times(1-\tan\theta)\cos\theta$

$=\frac{1}{2}\times(3\sin\theta+\sin\theta tan\theta)(1-\tan\theta)\cos\theta$

이므로

$3f(\theta)-2g(\theta)$

$=\frac{3}{2}\sin2\theta-(3\sin\theta+\sin\theta tan\theta)(1-\tan\theta)\cos\theta$

$=3\sin\theta cos\theta-\sin\theta cos\theta(3+\tan\theta)(1-\tan\theta)$

$=\sin\theta cos\theta tan\theta(\tan\theta+2)$

따라서

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{3f(\theta)-2g(\theta)}{\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin\theta cos\theta tan\theta(\tan\theta+2)}{\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\tan\theta}{\theta}\times\cos\theta\times(\tan\theta+2)\right\}$$
$$=1\times1\times1\times2=2$$

136. 정답 ②

[출제 의도] 역함수의 미분법을 활용하여 추론하기

조건 (가)에 의하여 $h(0)=\dfrac{g(0)-k}{0-k}=1$

$g(0)=0,\ f(0)=0$

조건 (나)에 의하여

함수 $h(x)$는 $x=k$에서 연속이므로

$h(k)=\lim\limits_{x\to k}h(x)=\lim\limits_{x\to k}\dfrac{g(x)-k}{x-k}$

$g(k)=k,\ f(k)=k$

$\lim\limits_{x\to k}\dfrac{g(x)-k}{x-k}=\lim\limits_{x\to k}\dfrac{g(x)-g(k)}{x-k}=\dfrac{1}{3}$

$g'(k)=\dfrac{1}{3}$

역함수의 미분법에 의하여

$g'(k)=\dfrac{1}{f'(g(k))}=\dfrac{1}{f'(k)}=\dfrac{1}{3}$

$f'(k)=3$

$f(0)=0,\ f(k)=k$이고 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$는

$f(x)-x=x(x-k)(x-t)$ (t는 상수)

$f(x)=x(x-k)(x-t)+x$

$f(x)=x^3-(k+t)x^2+(tk+1)x$

$f'(x)=3x^2-2(k+t)x+tk+1$

$f'(k)=3$이므로 $k^2-tk-2=0$

$t=k-\dfrac{2}{k}$ …… ㉠

역함수가 존재하는 삼차함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여

$f'(x)=3x^2-2(k+t)x+tk+1\geq 0$

x에 대한 이차방정식

$3x^2-2(k+t)x+tk+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=4(k+t)^2-12(tk+1)\leq 0$

㉠을 대입하여 정리하면 $k^2-5+\dfrac{4}{k^2}\leq 0$이고

$k>0$이므로 양변에 k^2을 곱하면

$k^4-5k^2+4\leq 0$

$(k^2-1)(k^2-4)\leq 0$

$(k-1)(k+1)(k-2)(k+2)\leq 0$

$k+1>0,\ k+2>0$이므로

$(k-1)(k-2)\leq 0$

$1\leq k\leq 2$

$f'(0)=tk+1=k^2-1$이므로

$k=2$일 때, $f'(0)$의 값이 최대이다.

그러므로 $\alpha=2$이고 이때 $t=1$이므로

$f(x)=x^3-3x^2+3x$

$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$ …… ㉡

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-2}{x-2} & (x\neq 2)\\ \dfrac{1}{3} & (x=2)\end{cases}$$

이다.

$h(9)=\dfrac{g(9)-2}{9-2}$ …… ㉢

$g(9)=p$라 할 때, $f(p)=9$이므로

$p^3-3p^2+3p=9$

$p^3-3p^2+3p-9=0$

$(p-3)(p^2+3)=0$

$p=3$이므로 $g(9)=3$

㉢에 대입하여 정리하면 $h(9)=\dfrac{1}{7}$

역함수의 미분법에 의하여

$g'(9)=\dfrac{1}{f'(g(9))}=\dfrac{1}{f'(3)}$

㉡에 의하여 $f'(3)=12$이므로

$g'(9)=\dfrac{1}{12}$

따라서

$\alpha\times h(9)\times g'(9)=2\times\dfrac{1}{7}\times\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{42}$

137. 정답 ②

[출제의도] 무리수 e를 포함하는 함수의 대칭성과 주기성을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

조건 (가)에서

양변에 $x=0$을 대입하면

$\{f(0)\}^2+2f(0)=a+b$ …… ㉠

양변에 $x=2$를 대입하면

$\{f(2)\}^2+2f(2)=a+b$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\{f(0)\}^2+2f(0)=\{f(2)\}^2+2f(2)$

$\{f(2)-f(0)\}\{f(2)+f(0)+2\}=0$

$f(2)=f(0)$ 또는 $f(2)+f(0)+2=0$

$f(2)=f(0)$이면

조건 (나)를 만족시키지 못하므로

$f(2)+f(0)+2=0$ …… ㉢

조건 (나)에서

$f(0)=f(2)+1$을 ㉢에 대입하면

$2f(2)+3=0$

$f(2)=-\dfrac{3}{2}$

조건 (나)에서

$f(0)=f(2)+1=-\dfrac{3}{2}+1=-\dfrac{1}{2}$

$f(0)=-\dfrac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=a+b$

$a+b=-\dfrac{3}{4}$ …… ㉣

한편, 조건 (가)에서

양변에 1을 더하면

$\{f(x)\}^2+2f(x)+1=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b+1$

$\{f(x)+1\}^2=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b+1$

이때 $g(x)=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b+1$이라 하면

$g(2-x)$

$=a\cos^3\pi(2-x)\times e^{\sin^2\pi(2-x)}+b+1$

$=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b+1$

이므로 모든 실수 x에 대하여

$g(x)=f(2-x)$

이다.

즉, 모든 실수 x에 대하여

$\{f(x)+1\}^2=\{f(2-x)+1\}^2$

이다. 이때

$\{f(x)-f(2-x)\}\{f(x)+f(2-x)+2\}=0$

에서

$f(x)=f(2-x)$ 또는 $f(x)+f(2-x)=-2$

조건 (나)에서

$f(0)=f(2)+1$

이므로

$f(x)\neq f(2-x)$

이다.

즉, $f(x)+f(2-x)=-2$이므로

$x=1$을 대입하면

$f(1)+f(1)=-2$

$f(1)=-1$

조건 (가)에서

양변에 $x=1$을 대입하면

$\{f(1)\}^2+2f(1)=-a+b$

$(-1)^2+2\times(-1)=-a+b$

$-a+b=-1$ …… ㉤

㉣, ㉤을 연립하면

$a=\dfrac{1}{8},\ b=-\dfrac{7}{8}$

따라서 $a\times b=\dfrac{1}{8}\times\left(-\dfrac{7}{8}\right)=-\dfrac{7}{64}$

138. 정답 ⑤

[출제의도] 미분과 주어진 조건을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$는 최고차항이 양수인 삼차함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축은 적어도 한 점에서 만난다.

조건 (가)에서 함수 $g(x)$가 $x\neq 1$인 모든 실수 x에서 연속이므로

$$\begin{cases} x=1\text{일 때, } f(1)=0 \\ x\neq 1\text{일 때, } f(x)\neq 0 \end{cases} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

한편,

$$g(x)=\begin{cases} \ln|f(x)| & (f(x)\neq 0) \\ 1 & (f(x)=0) \end{cases}$$

이므로

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}\ (f(x)\neq 0)$$

이때, 조건 (나)에서 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 극값을 가지고 ㉠을 만족해야 하므로

$f'(2)=0$ …… ㉡

한편, 조건 (다)에서 주어진 방정식

$g(x)=0$

은

$\ln|f(x)|=0$

$|f(x)|=1$

$f(x)=-1$ 또는 $f(x)=1$

이때, 이 방정식이 서로 다른 세 실근을 갖고 ㉠을 만족하려면 함수 $y=f(x)$는 극값을 가져야 한다.

한편, ㉡으로부터 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 가지므로

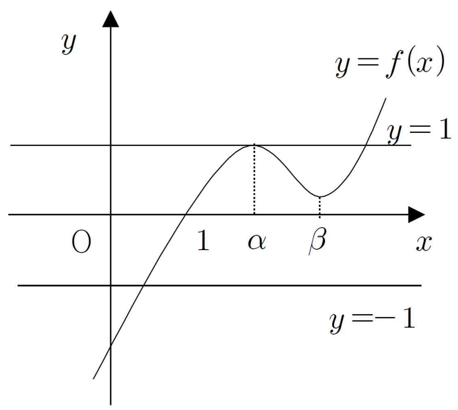
$f'(\alpha)=f'(\beta)=0\ (1<\alpha<\beta)$

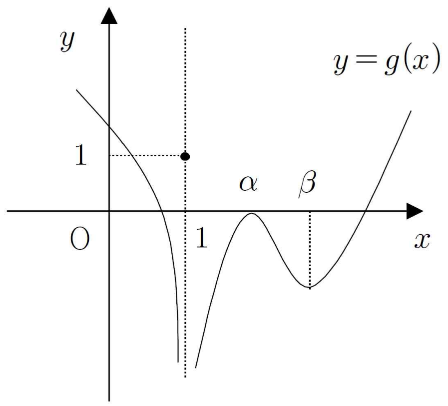
로 놓을 수 있다.

이때, $\alpha=2$이거나 $\beta=2$이다.

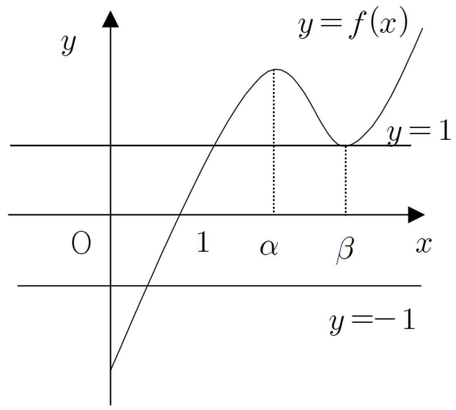
이때, 조건 (다)를 만족시키는 함수 $f(x)$의 그래프와 $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

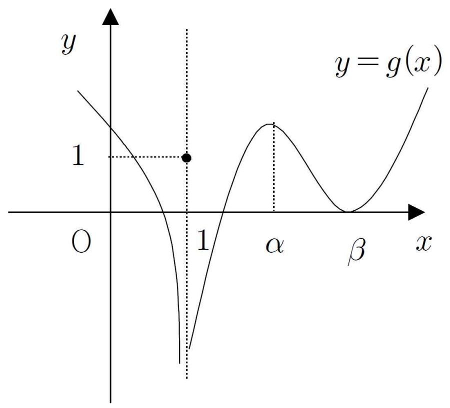
(ⅰ)





(ii)





이때, 조건 (나)로부터 $g(x)$가 $x=2$에서 극대이고 $|g(x)|$가 $x=2$에서 극소이기 위해서는 그림 (i)과 같아야 하고

$\alpha=2$

이때, 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이므로

$f(x)-1=\frac{1}{2}(x-2)^2(x-k)$ (k는 상수)

즉, $f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2(x-k)+1$이고 ㉠에서 $f(1)=0$이므로

$f(1)=\frac{1}{2}(1-k)+1=0$

$1-k=-2$

$k=3$

이때,

$f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2(x-3)+1$

이므로

$$f'(x)=(x-2)(x-3)+\frac{1}{2}(x-2)^2$$
$$=\frac{1}{2}(x-2)\{(2x-6)+(x-2)\}$$
$$=\frac{1}{2}(x-2)(3x-8)$$

이때, $f'(x)=0$에서

$x=2$ 또는 $x=\frac{8}{3}$

그러므로 $\beta=\frac{8}{3}$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=\frac{8}{3}$에서 극솟값을 갖고 그 값은

$$\ln\left|f\left(\frac{8}{3}\right)\right|=\ln\left|\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(-\frac{1}{3}\right)+1\right|$$
$$=\ln\frac{25}{27}$$

139. 정답 ①

[출제의도] 사잇값의 정리와 합성함수의 미분법 및 이계도함수를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구할 수 있는가?

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$에 대하여

$f(-3)f(3)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(\alpha)=0$을 만족시키는 실수 α가 열린구간 $(-3,3)$에 적어도 하나 존재한다.

조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여

$\{f(x)\}^5+\{f(x)\}^3+ax+b=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$$5\{f(x)\}^4f'(x)+3\{f(x)\}^2f'(x)+a=\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}} \quad \cdots\cdots ㉠$$

양변에 $x=\alpha$를 대입하면 $\frac{2\alpha+1}{\alpha^2+\alpha+\frac{5}{2}}=a$ $\cdots\cdots$ ㉡

$f'(2)>0$이므로 ㉠에서 $5\{f(2)\}^4f'(2)+3\{f(2)\}^2f'(2)>0$이고

$\frac{10}{17}-a>0,\quad a<\frac{10}{17}$

$\frac{2\alpha+1}{\alpha^2+\alpha+\frac{5}{2}}<\frac{10}{17}$이므로 $\alpha<\frac{2}{5}$ 또는 $\alpha>2$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$20\{f(x)\}^3\{f'(x)\}^2+5\{f(x)\}^4f''(x)+6f(x)\{f'(x)\}^2+3\{f(x)\}^2f''(x)$$
$$=-\frac{2(x^2+x-2)}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2}$$

양변에 $x=\alpha$를 대입하면 $-\frac{2(\alpha^2+\alpha-2)}{\left(\alpha^2+\alpha+\frac{5}{2}\right)^2}=0$

$\alpha^2+\alpha-2=0$ 이므로 $\quad \alpha=-2$ ($\because$ ㉢)

㉡에서 $a=-\frac{2}{3}$ 이고 $f(-2)=0$ 이므로 조건 (가)에서

$-2a+b=\ln\frac{9}{2}, \quad b=-\frac{4}{3}+\ln\frac{9}{2}$

$\therefore\ a\times e^b=\left(-\frac{2}{3}\right)\times\frac{9}{2}e^{-\frac{4}{3}}=-3e^{-\frac{4}{3}}$

140. 정답 ③

[출제의도] 삼각함수의 미분을 이용하여 추론하기

$f(x)=\sin(a+b\cos x)$ 에서

$f'(x)=\cos(a+b\cos x)\times(-b\sin x)$

$f'(x)=b$ 에서

$-b\sin x\cos(a+b\cos x)=b$

$\sin x\cos(a+b\cos x)=-1$

$-1\le \sin x\le 1$, $-1\le\cos(a+b\cos x)\le 1$ 이므로

$\sin x=1$, $\cos(a+b\cos x)=-1$ 이거나

$\sin x=-1$, $\cos(a+b\cos x)=1$ 이다.

이때 $\sin x=1$ 또는 $\sin x=-1$ 이면

$\cos x=0$ 이므로

$\cos a=-1$ 또는 $\cos a=1$

$a=(2n-1)\pi$ 또는 $a=2n\pi$ (n은 3 이하의 자연수)

조건 (나)에서

$\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(f(a)\left(\pi+\frac{x}{4}\right)\right)}{x}=\frac{b}{a}$ 이고 $\lim_{x\to0}x=0$ 이므로

$\lim_{x\to0}\sin\left(f(a)\left(\pi+\frac{x}{4}\right)\right)=\sin(f(a)\pi)=0$

$-1\le f(a)\le 1$ 이므로

$f(a)=-1$ 또는 $f(a)=0$ 또는 $f(a)=1$

(ⅰ) $f(a)=1$ 일 때

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\sin\left(f(a)\left(\pi+\frac{x}{4}\right)\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\pi+\frac{x}{4}\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin\frac{x}{4}}{x}=-\frac{1}{4}<0$$

이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $f(a)=0$ 일 때

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\sin\left(f(a)\left(\pi+\frac{x}{4}\right)\right)=0$$

이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $f(a)=-1$ 일 때

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\sin\left(f(a)\left(\pi+\frac{x}{4}\right)\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(-\pi-\frac{x}{4}\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{4}}{x}=\frac{1}{4}$$

이므로 조건 (나)에서 $\frac{b}{a}=\frac{1}{4}$, $a=4b$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $f(a)=-1$ 이고, $b=\frac{a}{4}$

$a=(2n-1)\pi$ (n은 3 이하의 자연수)이면

$f(a)=\sin(a+b\cos a)=\sin\left(a-\frac{a}{4}\right)=\sin\frac{6n-3}{4}\pi$

이므로 3 이하의 자연수 n에 대하여 $f(a)\ne-1$

$a=2n\pi$ (n은 3 이하의 자연수)이면

$f(a)=\sin(a+b\cos a)=\sin\left(a+\frac{a}{4}\right)=\sin\frac{5n}{2}\pi$

이므로 $n=3$ 일 때, $f(a)=-1$ 을 만족시킨다.

그러므로 $a=6\pi$, $b=\frac{3}{2}\pi$

따라서 $a+b=\frac{15}{2}\pi$

141. 정답 ②

[출제의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 극소가 되는 x 의 개수를 구할 수 있는가?

$g(x)=3f(x)+4\cos f(x)$ 이므로,

$g'(x)=3f'(x)-4f'(x)\sin f(x)$

$\quad=f'(x)\{3-4\sin f(x)\}$

$\quad=12\pi(x-1)\{3-4\sin(6\pi(x-1)^2)\}$

이므로, $g'(x)=0$ 에서

$x=1$ 또는 $\sin(6\pi(x-1)^2)=\frac{3}{4}$

(ⅰ) $x=1$ 일 때,

$x=1$ 일 때, $\sin(6\pi(x-1)^2)=0$ 이므로,

$x=1$ 부근에서 $3-4\sin(6\pi(x-1)^2)>0$ 이다.

이 때, $x-1$ 은 $x=1$ 의 좌우에서 음에서 양으로 변하므로,

$g'(x)=12\pi(x-1)\{3-4\sin(6\pi(x-1)^2)\}$ 도 $x=1$ 의 좌우에서 음에서 양으로 변한다.

따라서 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이다.

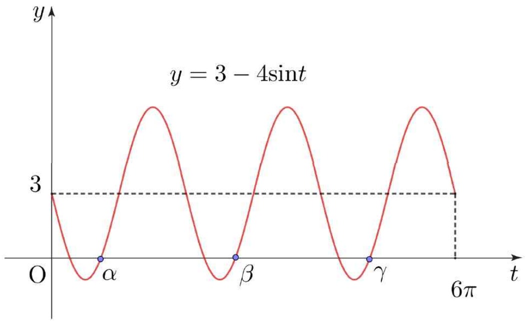
(ⅱ) $1<x<1$ 일 때,

$12\pi(x-1)>0$ 이고, 함수 $f(x)$ 는 구간 $[1,2]$ 에서 0 에서 6π 까지 증가한다.

즉, $f(x)=t$ 라 하면 x 의 값이 1 에서 2 까지 증가할 때, t 의 갓은 0 에서 6π 까지 증가한다.

이 때, 함수 $y=3-4\sin t$ 의 그래프는 다음과 같으므로,

$t=\alpha, \beta, \gamma$ 의 좌우에서 $y=3-4\sin t$ 의 값은 음에서 양으로 변한다.



따라서 $f(x) = \alpha,\ \beta,\ \gamma$ 인 x 의 좌우에서 $y = 3 - 4\sin f(x)$ 의 값은 음에서 양으로 변하고, 이러한 x 는 세 수 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 에 대하여 각각 하나씩 존재한다.

따라서 함수 $g(x)$ 는 $1 < x < 2$ 에서 극소가 되는 x 의 개수는 3 이다.

(iii) $0 < x < 1$ 일 때,

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $x = 1$ 에 대하여 대칭이다.

즉, 모든 실수 x 에 대하여

$f(1-x) = f(1+x)$ 가 성립한다.

이 때, $g(1-x) = 3f(1-x) + 4\cos f(1-x)$

$= 3f(1+x) + 4\cos f(1+x)$

$= g(1+x)$

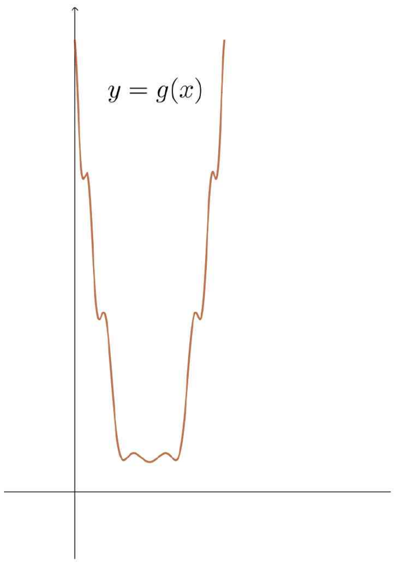
이므로, 함수 $y = g(x)$ 의 그래프도 직선 $x = 1$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 (ii)와 같이 $0 < x < 1$ 에서 함수 $g(x)$ 는 극소가 되는 x 의 개수도 3 이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 x 의 개수는 $1+3+3 = 7$ 이다.

[참고]

$0 < x < 2$ 에서 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



142. 정답 ②

[출제의도] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해하여 급수의 합을 구한다.

a_m은 두 곡선 $y = \frac{2\pi}{x}$와 $y = \cos x$의 교점의 x좌표이므로

$\frac{2\pi}{a_m} = \cos(a_m)$

$n \times cos^2(a_{n+k}) = n \times \frac{4\pi^2}{(a_{n+k})^2}$

$a_1 = 2\pi,\ m > 1$에서 $m\pi < a_m < (m+1)\pi$이므로

$\frac{4n}{(n+k+1)^2} < n \times cos^2(a_{n+k}) < \frac{4n}{(n+k)^2}$ 이다.

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4n}{(n+k)^2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}\times\frac{1}{n}$

$= \int_0^1 \frac{4}{(1+x)^2}dx = \left[-\frac{4}{1+x}\right]_0^1 = 2$이고

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{4n}{(n+k+1)^2} - \frac{4n}{(n+k)^2}\right\}$

$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{4n}{(2n+1)^2} - \frac{4n}{(n+1)^2}\right\} = 0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4n}{(n+k+1)^2} = 2$

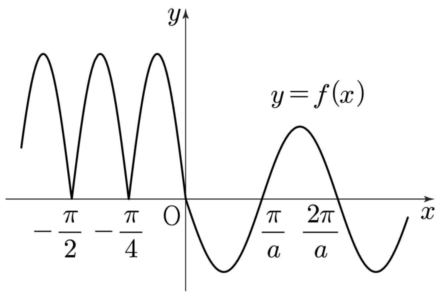
수열의 극한의 대소 관계의 성질에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\{n \times cos^2(a_{n+k})\} = 2$

143. 정답 ②

[출제의도] 정적분과 절댓값이 포함된 함수가 미분가능할 조건을 구할 수 있는가?

함수 $y = f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$F(x) = \int_{-a\pi}^{x} f(t)dt$라 하자.

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $F(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

이때 정적분의 성질에 의하여

$F'(x) = f(x)$이고,

$g(x) = \begin{cases} -F(x) & (F(x) < 0) \\ F(x) & (F(x) \geq 0) \end{cases}$이므로

$g'(x) = \begin{cases} -f(x) & (F(x) < 0) \\ f(x) & (F(x) > 0) \end{cases}$

따라서 함수 $g(x) = |F(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$F(k) = 0$인 실수 k가 존재하지 않거나

$F(k) = 0$인 모든 실수 k에 대하여

$F'(k)=f(k)=0$이어야 한다.

(ⅰ) 함수 $g(x)$가 구간 $(-\infty,\ 0)$에서 미분가능할 조건

$-a\pi<0$이고 모든 음의 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이므로

$F(k)=\int_{-a\pi}^{k}f(t)dt=0$인 음의 실수 k의 값은 $-a\pi$뿐이다.

이때

$f(k)=f(-a\pi)=2|\sin(-4a\pi)|=0$

이어야 하므로 $-4a\pi=-n\pi$, 즉

$a=\frac{\pi}{4}$ (n은 자연수) …… ㉠

(ⅱ) 함수 $g(x)$가 구간 $[0,\ \infty)$에서 미분가능할 조건

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}f(t)dt=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}(-2\sin 4t)dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}\cos 4t\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{0}$$
$$=\frac{1}{2}\cos 0-\frac{1}{2}\cos(-\pi)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

이고 모든 음의 실수 x에 대하여

$f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=f(x)$가 성립하므로 ㉠에서

$$\int_{-a\pi}^{0}f(t)dt=\int_{-\frac{n}{4}\pi}^{0}f(t)dt$$
$$=n\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}f(t)dt=n$$

따라서 양의 실수 x에 대하여

$$F(x)=\int_{-a\pi}^{x}f(t)dt$$
$$=\int_{-\frac{n}{4}\pi}^{0}f(t)dt+\int_{0}^{x}f(t)dt$$
$$=n+\int_{0}^{x}(-\sin at)dt$$
$$=n+\left[\frac{1}{a}\cos at\right]_{0}^{x}$$
$$=n\left(\frac{1}{a}\cos ax-\frac{1}{a}\cos 0\right)$$
$$=n+\frac{1}{a}\cos ax-\frac{1}{a}$$
$$=n+\frac{4}{n}\cos\frac{n}{4}x-\frac{4}{n}$$

이때 $F(k)=0$인 양수 k가 존재하면

$n=\frac{4}{n}\left(1-\cos\frac{n}{4}k\right)$에서

$\cos\frac{n}{4}k=1-\frac{n^2}{4}$ ……… ㉡

이때 $f(k)=-\sin ak=-\sin\frac{n}{4}k=0$이어야 하므로

$\frac{n}{4}k=m\pi$ (m은 자연수)에서

㉡에서

$\cos m\pi=1-\frac{n^2}{4}$

이때 $m,\ n$은 자연수이므로

$\cos m\pi=1-\frac{n^2}{4}=-1$, 즉 $n^2=8$을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

그러므로 함수 $g(x)$가 구간 $[0,\ \infty)$에서 미분가능하려면 모든 양의 실수 x에 대하여

$F(x)=n+\frac{4}{n}\cos\frac{4}{n}x-\frac{4}{n}>0$

즉,

$\cos\frac{n}{4}x>1-\frac{n^2}{4}$

이어야 한다.

따라서 $1-\frac{n^2}{4}<-1$이어야 하므로

$n^2>8$

따라서 자연수 n의 최솟값은 3이므로

㉠에서 a의 최솟값은 $\frac{3}{4}$이다.

144. 정답 ③

[출제의도] 치환적분과 부분적분을 이용하여 함수의 정적분 값을 구할 수 있는가?

$g(0)=f'(0)\sin 0+0=0$

$g(1)=f'(2)\sin\pi+1=1$이므로

$$\int_{0}^{1}g(x)dx+\int_{g(0)}^{g(1)}g^{-1}(x)dx$$
$$=\int_{0}^{1}g(x)dx+\int_{0}^{1}g^{-1}(x)dx$$
$$=1\times 1-0\times 0=1$$

따라서

$\int_{0}^{1}g(x)dx+\int_{0}^{1}g^{-1}(x)dx=1$ …… ㉠

㉠에

$g(x)=f'(2x)\sin\pi x+x$

$\int_{0}^{1}g^{-1}(x)\,dx=2\int_{0}^{1}f'(2x)\sin\pi x dx+\frac{1}{4}$

을 대입하면

$$\int_{0}^{1}\{f'(2x)\sin\pi x+x\}dx+2\int_{0}^{1}f'(2x)\sin\pi x dx+\frac{1}{4}=1$$
$$3\int_{0}^{1}f'(2x)\sin\pi x dx+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}+\frac{1}{4}=1$$
$$3\int_{0}^{1}f'(2x)\sin\pi x dx=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

따라서

$\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x dx = \frac{1}{12}$ …… ㉡

한편, $\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$에서

$x=2t$라 하면 $\frac{dx}{dt}=2$이고

$x=0$일 때, $t=0$, $x=2$일 때 $t=1$이므로

$\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx = 2\int_0^1 f(2t)\cos\pi t\,dt$

$u(t)=f(2t)$, $v(t)=\frac{1}{\pi}\sin\pi t$로 놓으면

$u'(t)=2f'(2t)$, $v'(t)=\cos\pi t$이므로

$2\int_0^1 f(2t)\cos\pi t\,dt$

$=2\left[\frac{1}{\pi}f(2t)\sin\pi t\right]_0^1 - \frac{4}{\pi}\int_0^1 f'(2t)\sin\pi t dt$

$=0-\frac{4}{\pi}\int_0^1 f'(2t)\sin\pi t dt$

$=-\frac{4}{\pi}\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x dx$

이므로 ㉡에서

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx &= \frac{4}{\pi}\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x dx\\ &=-\frac{4}{\pi}\times\frac{1}{12}\\ &=-\frac{1}{3\pi}\end{aligned}$$

145. **정답** ④

[출제의도] 적분법을 활용하여 함수를 구하는 문제를 해결한다.

$a\neq b$이므로 조건 (가)에서 $a\neq 0$, $b=0$ 또는 $a=0$, $b\neq 0$

(ⅰ) $a\neq 0$, $b=0$일 때,

$\sin x=t$로 놓으면 $x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때, $t=1$이고

$\frac{dt}{dx}=\cos x$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x\cos x\times e^{a\sin x})dx\\ &=\int_0^1 te^{at}dt = \left[\frac{t}{a}e^{at}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{a}e^{at}dt\\ &=\frac{e^a}{a}-\left[\frac{1}{a^2}e^{at}\right]_0^1\\ &=\frac{(a-1)e^a+1}{a^2}\end{aligned}$$

조건 (나)에서 $\frac{(a-1)e^a+1}{a^2}=\frac{1}{a^2}-2e^a$

$a-1=-2a^2$, $(a+1)(2a-1)=0$

$a=-1$ 또는 $a=\frac{1}{2}$

(ⅱ) $a=0$ 또는 $b\neq 0$일 때

$\cos x=t$로 놓으면 $x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때, $t=0$이고

$\frac{dt}{dx}=-\sin x$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x\cos x\times e^{b\cos x})dx\\ &=-\int_1^0 te^{bt}dt = \int_0^1 te^{bt}dt\\ &=\left[\frac{t}{b}e^{bt}\right]_0^1 - \int_0^1 te^{be}dt\\ &=\frac{e^b}{b}-\left[\frac{1}{b^2}e^{bt}\right]_0^1\\ &=\frac{(b-1)e^b+1}{b^2}\end{aligned}$$

조건 (나)에서 $\frac{(b-1)e^b+1}{b^2}=\frac{1}{b^2}-2e^b$

$b-1=-2b^2$, $(b+1)(2b-1)=0$

$b=-1$ 또는 $b=\frac{1}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 두 실수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(-1,\ 0)$, $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$, $(0,\ -1)$, $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$

따라서 $a-b$의 최솟값은

$-1-0=-1$

146. **정답** ②

[출제의도] 정적분을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

$x<0$일 때 $f(x)=-4xe^{4x^2}$이므로

$f'(x)=-4e^{4x^2}-4xe^{4x^2}\times 8x$

$\quad =-4e^{4x^2}-32x^2e^{4x^2}<0$

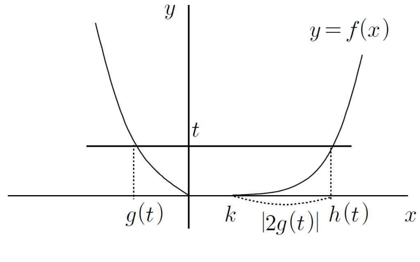
즉, $x<0$에서 함수 $f(x)$는 감소한다.

또한 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이고 양수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로 $x\geq 0$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

또한, 모든 양수 t에 대하여

$2g(t)+h(t)=k$

가 성립하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때 $\int_0^7 f(x)\,dx = e^4 - 1$에서 $h(t_1) = 7$이라 하면

$$\int_{g(t_1)}^0 \left(-4xe^{4x^2}\right)dx = \frac{1}{2}\left(e^4-1\right)$$

$$\left[-\frac{1}{2}e^{4x^2}\right]_{g(t_1)}^0 = \frac{1}{2}\left(e^4-1\right)$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{4\{g(t_1)\}^2} = \frac{1}{2}\left(e^4-1\right)$$

$g(t_1) = -1$

즉 $k + |2\times(-1)| = 7$에서 $k=5$이므로

$f(8) = f\left(-\frac{3}{2}\right)$, $f(9) = f(-2)$

$$\frac{f(9)}{f(8)} = \frac{f(-2)}{f\left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{-4\times(-2)\,e^{4(-2)^2}}{-4\times\left(-\frac{3}{2}\right)e^{4\left(-\frac{3}{2}\right)^2}}$$

$$= \frac{4}{3}e^{16-9}$$

$$= \frac{4}{3}e^{7}$$

147. 정답 ①

[출제의도] 부분적분법 이해하기

$$\int_{-1}^5 f(x)(x+\cos 2\pi x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^5 x f(x)dx + \int_{-1}^5 f(x)\cos 2\pi x\,dx \ \cdots \ ㉠$$

조건 (가)에 의하여

$$\int_{-1}^1 x f(x)\,dx = 0,\ \int_{-1}^1 f(x)\,dx = 2\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$\int_{-1}^5 x f(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^1 x f(x)\,dx + \int_1^3 x f(x)dx + \int_3^5 x f(x)dx$$

$$= \int_{-1}^1 x f(x)dx + \int_{-1}^1 (x+2)f(x+2)\,dx + \int_{-1}^1 (x+4)f(x+4)\,dx$$

$$= \int_{-1}^1 x f(x)\,dx + \int_{-1}^1 (x+2)f(x)\,dx + \int_{-1}^1 (x+4)f(x)\,dx$$

$$= 3\int_{-1}^1 x f(x)dx + 6\int_{-1}^1 f(x)dx$$

$$= 12\int_0^1 f(x)dx = 24 \ \cdots \ ㉡$$

조건 (가), (나)에 의하여 모든 실수 x에 대하여

$f(-x)\cos 2\pi(-x) = f(x)\cos 2\pi x$

$f(x+2)\cos 2\pi(x+2) = f(x)\cos 2\pi x$

$$\int_{-1}^5 f(x)\cos 2\pi x\,dx$$

$$= \int_{-1}^1 f(x)\cos 2\pi x\,dx + \int_1^3 f(x)\cos 2\pi x\,dx + \int_3^5 f(x)\cos 2\pi x\,dx$$

$$= \int_{-1}^1 f(x)\cos 2\pi x\,dx + \int_{-1}^1 f(x+2)\cos 2\pi(x+2)dx + \int_{-1}^1 f(x+4)\cos 2\pi(x+4)dx$$

$$= \int_{-1}^1 f(x)\cos 2\pi x\,dx + \int_{-1}^1 f(x)\cos 2\pi x\,dx + \int_{-1}^1 f(x)\cos 2\pi x\,dx$$

$$= 3\int_{-1}^1 f(x)\cos 2\pi x\,dx$$

$$= 6\int_0^1 f(x)\cos 2\pi x\,dx$$

㉠, ㉡에 의하여

$$\int_0^1 f(x)\cos 2\pi x\,dx = \frac{1}{6}\left(\frac{47}{2}-24\right) = -\frac{1}{12}$$

따라서

$$\int_0^1 f'(x)\sin 2\pi x\,dx$$

$$= \Big[\ f(x)\sin 2\pi x\ \Big]_0^1 - 2\pi\int_0^1 f(x)\cos 2\pi x\,dx$$

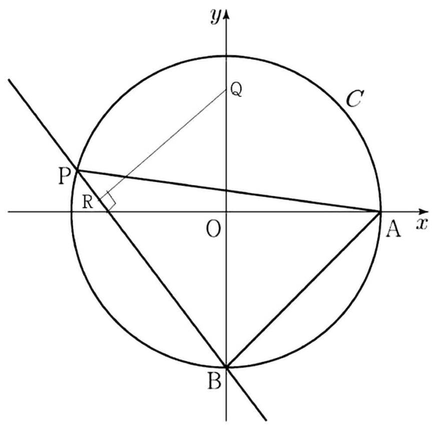
$$= -2\pi\int_0^1 f(x)\cos 2\pi x\,dx$$

$$= \frac{\pi}{6}$$

148. 정답 ①

[출제의도]

삼각함수의 적분법과 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?



$\overline{QB} = 2+2\cos\theta = 2(1+\cos\theta)$이고 직각삼각형 QRB에서

$\angle \mathrm{QBR} = \frac{\pi}{2} - \theta$이므로

$\overline{\mathrm{BR}} = \overline{\mathrm{QB}} \times \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = 2(1+\cos\theta)\sin\theta$

삼각형 APB의 외접원의 반지름의 길이가 2이므로 사인법칙에 의해

$\frac{\overline{\mathrm{BP}}}{\sin\theta} = 2\times 2$이므로 $\overline{\mathrm{BP}} = 4\sin\theta$

따라서 $f(\theta) = \overline{\mathrm{BP}} - \overline{\mathrm{BR}}$

$= 4\sin\theta - 2(1+\cos\theta)\sin\theta$

$= 2\sin\theta - 2\cos\theta\sin\theta$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (2-2\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$= \left[-2\cos\theta - \sin^2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left(-2\cos\frac{\pi}{3} - \sin^2\frac{\pi}{3}\right) - \left(-2\cos\frac{\pi}{6} - \sin^2\frac{\pi}{6}\right)$$

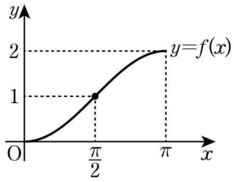
$$= \left(-1-\frac{3}{4}\right) - \left(-\sqrt{3}-\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{3}-3}{2}$$

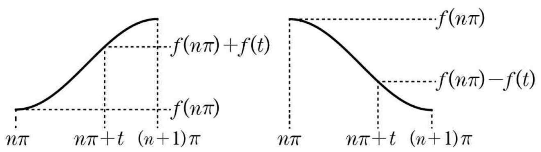
149. **정답** ②

[출제의도] 곡선의 오목과 볼록을 이용하여 정적분의 값을 구하는 문제를 해결한다.

조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 아래로 볼록이고, 구간 $\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$에서 위로 볼록이므로 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

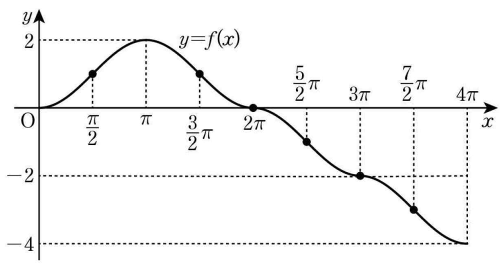


조건 (나)에 의하여 $n\pi < x \le (n+1)\pi$에서 곡선의 모양은 다음 두 가지 중 하나이다.



$0 < x < 4\pi$에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수가 6인 경우는 다음과 같다.

(i) 함수 $y=f(x)$가 $x=\pi$에서 극대일 때



위 그림에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은

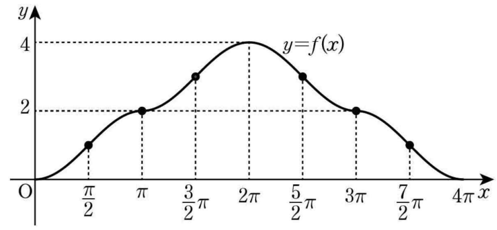
x 좌표가 $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$, 2π, $\frac{5}{2}\pi$, 3π, $\frac{7}{2}\pi$인 점이다.

$$\int_0^{4\pi} |f(x)|\,dx = 4\int_0^{\pi} f(x)dx + \pi\times 2$$

$$= 4\int_0^{\pi}(1-\cos x)dx + 2\pi$$

$$= \left[x-\sin x\right]_0^{\pi} + 2\pi = 6\pi$$

(ii) 함수 $y=f(x)$가 $x=2\pi$에서 극대일 때

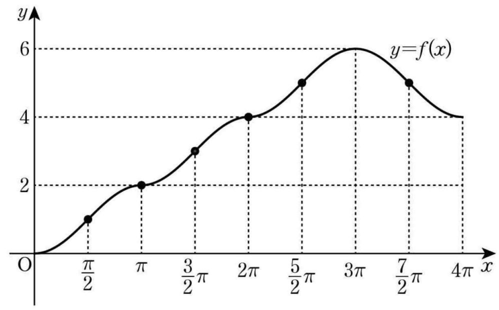


위 그림에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은

x 좌표가 $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$, 3π, $\frac{7}{2}\pi$인 점이다.

$$\int_0^{4\pi} |f(x)|\,dx = 4\int_0^{\pi} f(x)dx + 2\pi\times 2 = 8\pi$$

(iii) 함수 $y=f(x)$가 $x=3\pi$에서 극대일 때



위 그림에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은

x 좌표가 $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π, $\frac{5}{2}\pi$, $\frac{7}{2}\pi$인 점이다.

$$\int_0^{4\pi} |f(x)|\,dx = 4\int_0^{\pi} f(x)dx + 2\pi\times 5 = 14\pi$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 최솟값은 6π이다.

150. **정답** 50

[출제의도] 이차부등식의 해를 이용하여 수열의 극한값을 구하는 문제를 해결한다.

x에 대한 부등식 $x^2-4nx-n<0$의 해는

$2n-\sqrt{4n^2+n} < x < 2n+\sqrt{4n^2+n}$

$2n < \sqrt{4n^2+n} < 2n+1$에서

$-1 < 2n-\sqrt{4n^2+n} < 0$

$4n < 2n+\sqrt{4n^2+n} < 4n+1$

부등식 $x^2-4nx-n<0$을 만족시키는 정수 x는

$0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 4n$이므로 그 개수는 $4n+1$이다.

$a_n = 4n+1$에서 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{na_n}=\infty$이다.

$p \le 0$이면 $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{na_n}-pn\right)=\infty$이므로 $p>0$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{na_n}-pn\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+n}-pn\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(4-p^2)n^2+n}{\sqrt{4n^2+n}+pn}$$

$\lim_{n \to \infty} \frac{(4-p^2)n^2+n}{\sqrt{4n^2+n}+pn} = q$이려면

$4-p^2=0$에서 $p>0$이므로

$p=2$

$$q = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{\sqrt{4n^2+n}+2n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$$

따라서 $100pq = 100 \times 2 \times \frac{1}{4} = 50$

151. 정답 28

[출제의도] 수열의 극한으로 정의된 함수를 구하여 문제를 해결한다.

함수 $f(x)$를 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) $|x|<1$이면 $\lim_{n \to \infty} x^n = 0$이므로 $f(x) = -1$

(ⅱ) $x=1$이면 $\lim_{n \to \infty} x^n = 1$이므로 $f(x) = \frac{1}{2}$

(ⅲ) $x=-1$이면 $\lim_{n \to \infty} x^{2n+1} = -1$이고 $\lim_{n \to \infty} x^{2n} = 1$이므로

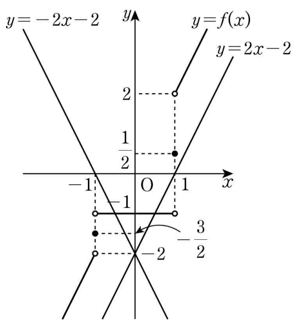
$$f(x) = -\frac{3}{2}$$

(ⅳ) $|x|>1$이면 $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n = 0$이므로

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{2x - \left(\frac{1}{x}\right)^{2n}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}} = 2x$$

그러므로 $f(x) = \begin{cases} -1 & (-1<x<1) \\ \frac{1}{2} & (x=1) \\ -\frac{3}{2} & (x=-1) \\ 2x & (x<-1 \text{ 또는 } x>1) \end{cases}$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



직선 $y=tx-2$는 점 $(0,\ -2)$를 지나므로 기울기 t의 값에 따른 교점의 개수 $g(t)$를 구해 보면

$-1 \le t < -\frac{1}{2}$ 또는 $-\frac{1}{2} < t \le 0$일 때 $g(t)=0$

$t<-1$ 또는 $t=-\frac{1}{2}$ 또는 $0<t \le 1$ 또는 $t=2$ 또는 $t \ge 4$일 때 $g(t)=1$

$1<t<2$ 또는 $2<t<\frac{5}{2}$ 또는 $\frac{5}{2}<t<4$일 때 $g(t)=2$

$t=\frac{5}{2}$일 때 $g(t)=3$

즉 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값은

$-1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ 1,\ 2,\ \frac{5}{2},\ 4$

이므로 $m=7,\ a_m=4$

따라서 $m \times a_m = 7 \times 4 = 28$

152. 정답 18

[출제의도] 등비수열의 극한을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는가?

(ⅰ) $1<a<3$인 경우

$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a}{3}\right)^n = 0$이므로

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3^n + a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1+a\left(\frac{a}{3}\right)^n}{3+\left(\frac{a}{3}\right)^n}$$

$$= \frac{1+a \times 0}{3+0} = \frac{1}{3} = a$$

$a = \frac{1}{3} < 1$이므로 모순이다.

(ⅱ) $a=3$인 경우

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3^n + a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{3^n+3^{n+1}}{3^{n+1}+3^n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} 1 = 1 = a$$

이므로 모순이다.

(ⅲ) $a>3$인 경우

$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{3}{a}\right)^n = 0$이므로

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3^n + a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\left(\frac{3}{a}\right)^n + a}{3\left(\frac{3}{a}\right)^n + 1}$$

$$= \frac{0+a}{3 \times 0 + 1} = a$$

이므로 등식을 만족시킨다.

(1) $3<a<b$일 때

같은 방법으로

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a^n + b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}$$

$$= b > 3 = \frac{9}{3} > \frac{9}{a}$$

이므로 등식을 만족시키지 않는다.

(2) $3<b<a$일 때

같은 방법으로

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a^n + b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}$$

$= \frac{1}{a} \neq \frac{9}{a}$

이므로 등식을 만족시키지 않는다.

(3) $3 < a = b$일 때

$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n + b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{a^n + a^{n+1}}{a^{n+1}+a^n} = 1 = \frac{9}{a}$

에서

$a = 9,\ b = 9$

이상에서 $a = 9,\ b = 9$이므로

$a + b = 18$

153. 정답 109

[출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 수열을 구한 후 등비급수의 합이 존재하는 수열을 구할 수 있는가?

$a_n = \alpha \times sin\frac{n}{2}\pi + \beta \times cos\frac{n}{2}\pi$ 에서

$a_1 = \alpha \times sin\frac{1}{2}\pi + \beta \times cos\frac{1}{2}\pi = \alpha$

$a_2 = \alpha \times sin\pi + \beta \times cos\pi = -\beta$

$a_3 = \alpha \times sin\frac{3}{2}\pi + \beta \times cos\frac{3}{2}\pi = -\alpha$

$a_4 = \alpha \times sin2\pi + \beta \times cos2\pi = \beta$

이므로

$a_{4n-2} = a_2 = -\beta,\ a_{4n-3} = a_1 = \alpha$

이때

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-2}b_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-3}b_{2n}) = 6$

에서 급수가 수렴하므로 등비수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 $b\ (b>0)$, 공비를 $r\ (-1<r<1)$이라 하면 수열 $\{b_{2n}\}$은 첫째항이 br이고 공비가 r^2인 등비수열이다.

즉

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-2}b_n) = -\beta\sum_{n=1}^{\infty}b_n = -\beta \times \frac{b}{1-r}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-3}b_{2n}) = \alpha\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n} = \alpha \times \frac{br}{1-r^2}$

이므로

$-\frac{b\beta}{1-r} = \frac{br\alpha}{1-r^2} = 6$ …… ㉠

한편 $a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 = 4$ 에서

$\alpha^2\beta^2 = 4 \quad \therefore\ \alpha\beta = 2$ 또는 $\alpha\beta = -2$

(i) $\alpha\beta = 2$일 때

$\beta = \frac{2}{\alpha}$ 이고 $\alpha,\ \beta\ (\alpha > \beta)$는 정수이므로

$\alpha = 2,\ \beta = 1$ 또는 $\alpha = -1,\ \beta = -2$

(a) $\alpha = 2,\ \beta = 1$일 때

㉠에서

$-\frac{b}{1-r} = \frac{2br}{1-r^2} = 6$

이때 $-\frac{b}{1-r} = 6$ 에서 $\frac{b}{1-r} = -6$ 이므로 $\frac{2br}{1-r^2} = 6$ 에서

$\frac{2br}{1-r^2} = \frac{2r}{1+r} \times \frac{b}{1-r} = \frac{2r}{1+r} \times (-6)$

즉 $\frac{2r}{1+r} \times (-6) = 6$ 이므로

$\frac{r}{1+r} = -\frac{1}{2}, \quad 2r = -1-r$

$3r = -1 \quad \therefore\ r = -\frac{1}{3}$

$\frac{b}{1-r} = -6$ 에 $r = -\frac{1}{3}$ 을 대입하면

$\frac{b}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = -6 \quad \therefore\ b = -6 \times \frac{4}{3} = -8$

그런데 $b > 0$ 이므로 모순이다.

(b) $\alpha = -1,\ \beta = -2$ 일 때

㉠에서

$\frac{2b}{1-r} = \frac{-br}{1-r^2} = 6$

이때 $\frac{2b}{1-r} = 6$ 에서 $\frac{b}{1-r} = 3$ 이므로 $\frac{-br}{1-r^2} = 6$ 에서

$\frac{-br}{1-r^2} = \frac{-r}{1+r} \times \frac{b}{1-r} = \frac{-r}{1+r} \times 3$

즉 $\frac{-r}{1+r} \times 3 = 6$ 이므로

$\frac{-r}{1+r} = 2, \quad -r = 2+2r$

$3r = -2 \quad \therefore\ r = -\frac{2}{3}$

$\frac{b}{1-r} = 3$ 에 $r = -\frac{2}{3}$ 를 대입하면

$\frac{b}{1+\frac{2}{3}} = 3 \quad \therefore\ b = 3 \times \frac{5}{3} = 5$

$\therefore\ b_1 \times b_3 = b \times br^2 = 25 \times \frac{4}{9} = \frac{100}{9}$

(ii) $\alpha\beta = -2$ 일 때

$\beta = -\frac{2}{\alpha}$ 이고 $\alpha,\ \beta\ (\alpha > \beta)$는 정수이므로

$\alpha = 1,\ \beta = -2$ 또는 $\alpha = 2,\ \beta = -1$

(a) $\alpha = 1,\ \beta = -2$ 일 때

㉠에서

$\frac{2b}{1-r} = \frac{br}{1-r^2} = 6$

이때 $\frac{2b}{1-r} = 6$ 에서 $\frac{b}{1-r} = 3$ 이므로 $\frac{br}{1-r^2} = 6$ 에서

$\frac{br}{1-r^2} = \frac{r}{1+r} \times \frac{b}{1-r} = \frac{r}{1+r} \times 3$

즉 $\frac{r}{1+r}\times 3=6$ 이므로

$\frac{r}{1+r}=2,\quad r=2+2r\quad \therefore\ r=-2$

그런데 $-1<r<1$ 이므로 모순이다.

(b) $\alpha=2,\ \beta=-1$일 때

㉠에서

$\frac{b}{1-r}=\frac{2br}{1-r^2}=6$

이때 $\frac{b}{1-r}=6$ 이므로 $\frac{2br}{1-r^2}=6$ 에서

$\frac{2br}{1-r^2}=\frac{2r}{1+r}\times\frac{b}{1-r}=\frac{2r}{1+r}\times 6$

즉 $\frac{2r}{1+r}\times 6=6$ 이므로

$\frac{2r}{1+r}=1,\quad 2r=1+r\quad \therefore\ r=1$

그런데 $-1<r<1$ 이므로 모순이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $b_1\times b_3=\frac{100}{9}$

따라서 $p=9,\ q=100$ 이므로 $p+q=109$

154. 정답 3

[출제의도] 합성함수의 미분법과 역함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(s,\ f(s))$와 점 $\mathrm{Q}(t,\ 0)$에 대하여 점 P에서의 접선과 직선 PQ는 수직이어야 한다.

이때, $f(x)=e^x+x$에서

$f'(x)=e^x+1$이므로 $f'(s)=e^s+1$ …… ㉠

또, 직선 PQ의 기울기는

$\frac{f(s)-0}{s-t}=\frac{e^s+s}{s-t}$ …… ㉡

㉠, ㉡으로부터

$(e^s+1)\times\frac{e^s+s}{s-t}=-1$

$(e^s+1)(e^s+s)=t-s$

$t=(e^s+1)(e^s+s)+s$ …… ㉢

한편, $f(s)$의 값이 $g(t)$이므로

$g(t)=e^s+s$ …… ㉣

또, 함수 $g(t)$의 역함수가 $h(t)$이므로

$h(1)=k$라 하면 $g(k)=1$

㉣에서 $e^s+s=1,\ s=0$

이 값을 ㉢에 대입하면

$k=2\times1+0=2$

$g(h(t))=t$에서 양변을 t에 대하여 미분하면

$g'(h(t))\times h'(t)=1$

$h'(t)=\frac{1}{g'(h(t))}$

이때, $t=1$을 대입하면

$h'(1)=\frac{1}{g'(2)}$

한편, ㉣의 양변을 t에 대하여 미분하면

$g'(t)=(e^s+1)\frac{ds}{dt}$

이때, ㉢의 양변을 t에 대하여 미분하면

$1=\left\{e^s(e^s+s)+(e^s+1)^2+1\right\}\frac{ds}{dt}$

$\frac{ds}{dt}=\frac{1}{e^s(e^s+s)+(e^s+1)^2+1}$ 이므로

$g'(t)=\frac{e^s+1}{e^s(e^s+s)+(e^s+1)^2+1}$

이때, $s=0$일 때, $t=2$이므로

$$\begin{aligned}g'(2)&=\frac{2}{1+2^2+1}\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

따라서

$h'(1)=\frac{1}{g'(2)}=3$

155. 정답 20

[출제의도] 원의 성질을 이용하여 삼각함수의 극한에 대한 문제를 해결한다.

$\angle\mathrm{RBO}=\angle\mathrm{BRQ}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{BOQ}=\theta$이므로

$\angle\mathrm{OST}=2\theta,\ \angle\mathrm{OTS}=\pi-3\theta$

삼각형 OBS에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{OS}}}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin(\pi-2\theta)},\ \overline{\mathrm{OS}}=\frac{\sin\theta}{\sin2\theta}$

삼각형 OBT에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{OT}}}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin(\pi-3\theta)},\ \overline{\mathrm{OT}}=\frac{\sin\theta}{\sin3\theta}$

$\angle\mathrm{ROA}=2\times\angle\mathrm{RBA}=2\theta,\ \angle\mathrm{TOR}=\pi-4\theta$

$f(\theta)=$(부채꼴 ORA의 넓이)$+$(삼각형 OTR의 넓이)

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\times1^2\times2\theta+\frac{1}{2}\times1\times\overline{\mathrm{OT}}\times\sin(\pi-4\theta)\\&=\theta+\frac{\sin\theta sin4\theta}{2\sin3\theta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta}&=\lim_{\theta\to0+}\left(1+\frac{4\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\sin4\theta}{4\theta}}{6\times\frac{\sin3\theta}{3\theta}}\right)\\&=1+\frac{4\times1\times1}{6\times1}=\frac{5}{3}\end{aligned}$$

$g(\theta)=$(부채꼴 OPQ의 넓이)$-$(삼각형 OST의 넓이)

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\times1^2\times\theta+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OS}}\times\overline{\mathrm{OT}}\times\sin\theta\\&=\frac{\theta}{2}-\frac{\sin^3\theta}{2\sin2\theta\times sin3\theta}\end{aligned}$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{1}{2}-\frac{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3}{12\times\frac{\sin2\theta}{2\theta}\times\frac{\sin3\theta}{3\theta}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1^3}{12\times1\times1}=\frac{5}{12}$$

따라서 $a=\frac{1}{4}$ 이므로 $80a=80\times\frac{1}{4}=20$

156. 정답 13

[출제의도] 도형의 성질을 이용하여 수열의 극한에 대한 문제를 해결한다.

점 C에서 선분 AB'에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_1}$이라 할 때,

삼각형 ABC는 이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AH_1}}$ 이고

$\angle\mathrm{CH_1A}=\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{\overline{\mathrm{AH_1}}}{\overline{\mathrm{CA}}}=\frac{1}{n}$

각 BAD는 호 BD의 원주각이고 각 BCD는 부채꼴 CBD의 중심각이므로 $\angle\mathrm{BCD}=2\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{BAC}$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의해

$\overline{\mathrm{BD}}^2=\overline{\mathrm{CB}}^2+\overline{\mathrm{CD}}^2-2\times\overline{\mathrm{CB}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\cos\angle\mathrm{BCD}=2n^2-2n$

$\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{2n^2-2n}$

$\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{DE}}=\sqrt{2}:1$ 이므로 $\overline{\mathrm{DE}}=\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sqrt{2}}=\sqrt{n^2-n}$

점 C에서 선분 $\overline{\mathrm{DE}}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_2}$라 하면

삼각형 CDE는 이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{DE}}=2\overline{\mathrm{DH_2}}$ 이고

$\angle\mathrm{CH_2D}=\frac{\pi}{2}$ 이다.

$\overline{\mathrm{CH_2}}^2=\overline{\mathrm{CD}}^2-\overline{\mathrm{DH_2}}^2=\frac{3n^2+n}{4}$ 이므로 $\overline{\mathrm{CH_2}}=\frac{\sqrt{3n^2+n}}{2}$

$S_n=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{DE}}\times\overline{\mathrm{CH_2}}=\frac{n\sqrt{3n^2-2n-1}}{4}$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}n-\frac{S_n}{n}=\frac{\sqrt{3}n-\sqrt{3n^2-2n-1}}{4}$$

$$=\frac{2n+1}{4\left(\sqrt{3}n+\sqrt{3n^2-2n-1}\right)}$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}n-\frac{S_n}{n}\right)=\frac{1}{4\sqrt{3}}=\frac{1}{12}\sqrt{3}$

따라서 $p=12,\ q=1$ 이므로 $p+q=13$

157. 정답 270

[출제 의도] 도형의 성질을 활용하여 수열의 극한에 대한 문제를 해결한다.

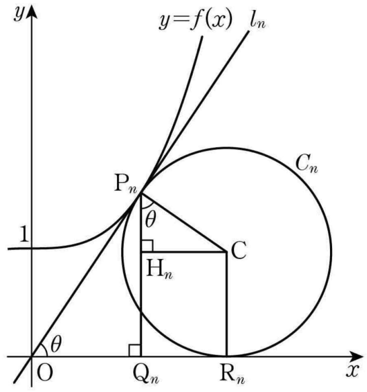
양의 실수 t에 대하여 점 $\mathrm{P}_n(t,\ f(t))$라 하면

$f'(t)=\frac{f(t)}{t},\ \frac{12t^3}{n^3}=\frac{4t^3}{n^3}+1,\ t^3=\frac{n^3}{8},\ t=\frac{n}{2}$

$\mathrm{P}_n\left(\frac{n}{2},\ \frac{3}{2}\right)$이므로 직선 l_n의 방정식은 $y=\frac{3}{n}x$

원 C_n의 중심을 C라 하고 두 점 P_n, C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 Q_n, R_n이라 하자. 점 C에서 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$에 내린 수선의 발을 H_n이라 하자.

$\angle\mathrm{CP}_n\mathrm{O}=\angle\mathrm{OQ}_n\mathrm{P}_n=\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle\mathrm{P}_n\mathrm{OQ}_n=\angle\mathrm{CP}_n\mathrm{H}_n$



$\overline{\mathrm{OP}_n}=\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{n^2+9}}{2}$ 이고,

$\angle\mathrm{P}_n\mathrm{OQ}_n=\theta$라 하면 $\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{OQ}_n}}{\overline{\mathrm{OP}_n}}=\frac{n}{\sqrt{n^2+9}}$

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{C}}=\overline{\mathrm{CR}_n}=\overline{\mathrm{H}_n\mathrm{Q}_n}=r_n,\ \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\frac{3}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n}+\overline{\mathrm{H}_n\mathrm{Q}_n}=r_n\times\cos\theta+r_n=\frac{3}{2}$

$r_n=\frac{3}{2(1+\cos\theta)}=\frac{3\sqrt{n^2+9}}{2\left(\sqrt{n^2+9}+n\right)}$

$$\lim_{n\to\infty}n^2(4r_n-3)=\lim_{n\to\infty}n^2\times\left(\frac{6\sqrt{n^2+9}}{\sqrt{n^2+9}+n}-3\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{3\sqrt{n^2+9}-3n}{\sqrt{n^2+9}+n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}3n^2\left\{\frac{9}{\left(\sqrt{n^2+9}+n\right)^2}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{27}{\left(\sqrt{1+\frac{9}{n^2}}+1\right)^2}=\frac{27}{4}$$

이므로 $40\times\lim_{n\to\infty}n^2(4r_n-3)=270$

158. 정답 45

[출제의도] 음함수 미분을 활용하여 문제해결하기

$\overline{\mathrm{AP}}=t$라 하면 삼각형 ABP의 넓이 $f(\theta)$는

$f(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}t\sin\theta$ …… ㉠

선분 BC의 중점을 M이라 하면 점 M은 반원의 중심이고, 직각삼각형 ABM에서

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3},\ \overline{\mathrm{BM}}=1$이므로 $\angle\mathrm{BAM}=\frac{\pi}{6}$

$\theta\neq\frac{\pi}{6}$ 일 때, $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$이므로

삼각형 APM에서 코사인법칙에 의하여

$$1^2=2^2+t^2-2\times 2\times t\times cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)$$

$$t^2-4t\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)+3=0 \qquad \cdots\cdots \text{ ㉡}$$

$\theta=\frac{\pi}{6}$ 일 때, $t=\overline{\mathrm{AM}}+\overline{\mathrm{MP}}=2+1=3$이므로

$\theta=\frac{\pi}{6}$ 일 때도 ㉡이 성립한다.

㉡의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$$2t\frac{dt}{d\theta}-4\frac{dt}{d\theta}\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)-4t\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)=0$$

$\theta=\frac{\pi}{6}$ 를 대입하면 $\frac{dt}{d\theta}=0$

㉠의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$f'(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{dt}{d\theta}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}t\cos\theta$이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 0\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9}{4}$$

따라서 $20f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=20\times\frac{9}{4}=45$

159. 정답 50

[출제의도] 도형에 활용된 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

직각삼각형 AHP에서 $\angle\mathrm{APH}=\theta$이므로

$$\angle\mathrm{HAP}=\frac{\pi}{2}-\theta$$

한편, 삼각형 OPA는

$\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OA}}=1$

인 이등변삼각형이므로

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{AOP}&=\pi-2\times\angle\mathrm{HAP}\\&=\pi-2\times\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\&=2\theta\end{aligned}$$

그러므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AH}}&=1-\overline{\mathrm{OH}}\\&=1-\overline{\mathrm{OP}}\cos2\theta\\&=1-\cos2\theta \qquad \cdots\cdots \text{ ㉠}\end{aligned}$$

또,

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{HAQ}&=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AH}}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\times(1-\cos2\theta)^2\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{\sin^4 2\theta}{(1+\cos2\theta)^2}\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

그러므로

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to0-}\frac{f(\theta)}{\theta^4}&=\frac{1}{2}\times16\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin2\theta}{2\theta}\right)^4\times\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{(1+\cos2\theta)^2}\\&\quad\times\lim_{\theta\to0+}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\times16\times1^2\times\frac{1}{4}\times1\\&=2 \qquad \cdots\cdots \text{ ㉢}\end{aligned}$$

한편, 이등변삼각형 OPA에서 점 O에서 선분 PA에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H'}$이라 하면 ㉠에서 $\angle\mathrm{H'OP}=\theta$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}&=2\overline{\mathrm{PH'}}\\&=2\times\overline{\mathrm{OP}}\times\sin\theta\\&=2\sin\theta\end{aligned}$$

삼각형 AOP에서 각의 이등분선이 선분 OP와 만나는 점이 R이므로

$\overline{\mathrm{AO}}:\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{OR}}:\overline{\mathrm{RP}}$

$1:2\sin\theta=\overline{\mathrm{OR}}:1-\overline{\mathrm{OR}}$

$2\sin\theta\times\overline{\mathrm{OR}}=1-\overline{\mathrm{OR}}$

$$\overline{\mathrm{OR}}=\frac{1}{1+2\sin\theta} \qquad \cdots\cdots \text{ ㉣}$$

또,

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{OS}}&=\overline{\mathrm{OA}}\tan(\angle\mathrm{SAO})\\&=1\times tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\\&=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) \qquad \cdots\cdots \text{ ㉤}\end{aligned}$$

㉣과 ㉤에서

$$\begin{aligned}g(\theta)&=\triangle\mathrm{OSP}-\triangle\mathrm{OSR}\\&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OS}}\times\overline{\mathrm{OP}}\sin(\angle\mathrm{POS})\\&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OS}}\times\overline{\mathrm{OR}}\times\sin(\angle\mathrm{POS})\\&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OS}}\times\sin(\angle\mathrm{POS})\times(\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{OR}})\\&=\frac{1}{2}\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\times\left(1-\frac{1}{2\sin\theta+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\times\frac{2\sin\theta}{2\sin\theta+1}\end{aligned}$$

그러므로

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta}&=\frac{1}{2}\times\lim_{\theta\to0+}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\times\lim_{\theta\to0+}\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\\&\quad\times2\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2\sin\theta+1}\\&=\frac{1}{2}\times1\times1\times2\times1\times1=1 \qquad \cdots\cdots \text{ ㉥}\end{aligned}$$

따라서, ㉢과 ㉥을 이용하면

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^3\times g(\theta)}{f(\theta)}&=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{g(\theta)}{\theta}}{\frac{f(\theta)}{\theta^4}}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

이므로

$$100k=100\times\frac{1}{2}=50$$

160. 정답 11

[출제의도] 도형의 성질을 이용하여 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

선분 AB의 중점을 M이라 하면

$\angle AMQ = 2 \times \angle ABQ = 2 \times 2\theta = 4\theta$ 이므로,

(부채꼴 AMQ의 넓이)$= \dfrac{1}{2} \times 1^2 \times 4\theta = 2\theta$

(삼각형 MBQ의 넓이)$= \dfrac{1}{2} \times 1^2 \times \sin(\pi - 4\theta) = \dfrac{1}{2}\sin 4\theta$

삼각형 RAB에서 $\angle ARB = \pi - 3\theta$ 이므로,

사인법칙에 의하여

$$\frac{2}{\sin(\pi - 3\theta)} = \frac{\overline{BR}}{\sin\theta}$$

즉, $\overline{BR} = \dfrac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}$ 이므로,

(삼각형 RAB의 넓이)

$$= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BR} \times \sin 2\theta$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta} \times \sin 2\theta$$

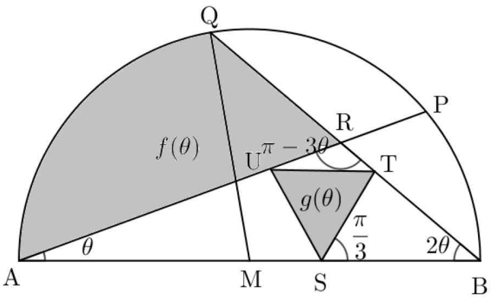
$$= \frac{2\sin\theta\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$$

그러므로, $f(\theta) = 2\theta + \dfrac{1}{2}\sin 4\theta - \dfrac{2\sin\theta\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$ 이므로,

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)}{\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \left\{ 2 + 2 \times \frac{\sin 4\theta}{4\theta} - \frac{4 \times \dfrac{\sin\theta}{\theta} \times \dfrac{\sin 2\theta}{2\theta}}{3 \times \dfrac{\sin 3\theta}{3\theta}} \right\}$$

$$= 2 + 2 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \qquad \cdots\cdots ㉠$$



정삼각형 STU의 한 변의 길이를 a라 하면 삼각형 TSB에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{a}{\sin 2\theta} = \dfrac{\overline{BT}}{\sin \dfrac{\pi}{3}}$ 즉, $\overline{BT} = \dfrac{\sqrt{3}\,a}{2\sin 2\theta}$

두 삼각형 RUT, RAB가 서로 닮음이므로,

$\overline{RT} : \overline{RB} = \overline{UT} : \overline{AB}$

$$\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta} - \frac{\sqrt{3}\,a}{2\sin 2\theta} : \frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta} = a : 2$$

$$\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}a = \frac{4\sin\theta}{3\sin 3\theta} - \frac{\sqrt{3}}{\sin 2\theta}a$$

$$\left(\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta} + \frac{\sqrt{3}}{\sin 2\theta}\right)a = \frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta}$$

$$\frac{2\sin\theta\sin 2\theta + \sqrt{3}\sin 3\theta}{\sin 3\theta\sin 2\theta}a = \frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta}$$

$$a = \frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta} \times \frac{\sin 3\theta\sin 2\theta}{2\sin\theta\sin 2\theta + \sqrt{3}\sin 3\theta}$$

이 때, $g(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 이고,

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{a}{\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \left(\frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta} \times \frac{\sin 3\theta\sin 2\theta}{2\sin\theta\sin 2\theta + \sqrt{3}\sin 3\theta} \times \frac{1}{\theta} \right)$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \left(\frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta} \times \frac{\dfrac{\sin 3\theta\sin 2\theta}{\theta^2}}{\dfrac{2\sin\theta\sin 2\theta + \sqrt{3}\sin 3\theta}{\theta}} \right)$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{2 \times 3}{0 + 3\sqrt{3}} \qquad = \frac{8}{3\sqrt{3}}$$

이므로, $\displaystyle\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \lim_{\theta \to 0+} \left(\frac{a}{\theta}\right)^2$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= \frac{16\sqrt{3}}{27} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

따라서, ㉠, ㉡에서

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta \times f(\theta)} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{\dfrac{g(\theta)}{\theta^2}}{\dfrac{f(\theta)}{\theta}}$$

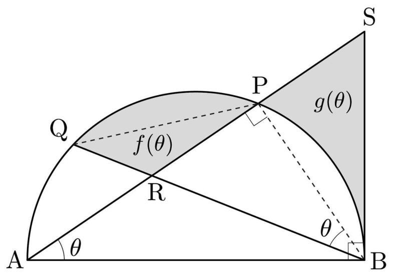
$$= \frac{\dfrac{16\sqrt{3}}{27}}{\dfrac{8}{3}}$$

$$= \frac{2}{9}\sqrt{3}$$

이므로, $p + q = 9 + 2 = 11$

161. 정답 4

[출제의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 문제 해결하기



호 PB와 호 PQ의 길이가 서로 같으므로 원주각의 성질에 의하여

$\angle PAB = \angle QBP = \theta$

$\angle\mathrm{ABS}=\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{2}$ 이고

$\angle\mathrm{PBA}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$이므로 $\angle\mathrm{SBP}=\theta$

두 삼각형 SPB, RPB는 서로 합동이므로 두 삼각형 SPB, RPB의 넓이가 서로 같다.

선분 PQ와 호 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이와 선분 PB와 호 PB로 둘러싸인 부분의 넓이가 서로 같다.

그러므로 $f(\theta)+g(\theta)$는 삼각형 QBP의 넓이와 같다.

$\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PQ}}=2\sin\theta$

$$f(\theta)+g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PB}}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\sin(\pi-2\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\times(2\sin\theta)^2\times\sin2\theta$$

$$=2\sin^2\theta\sin2\theta$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)}{\theta^3}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin^2\theta\sin2\theta}{\theta^3}$$

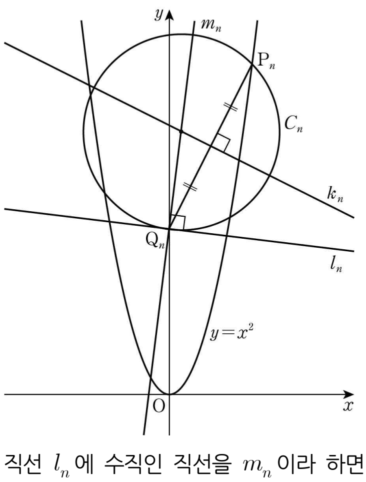
$$=\lim_{\theta\to0+}\left(2\times\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\times\frac{\sin2\theta}{\theta}\right)$$

$$=2\times\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin2\theta}{2\theta}\times2\right)$$

$$=2\times1^2\times2=4$$

162. **정답** 12

[출제의도] 접선의 성질을 이용하여 수열의 극한에 대한 문제를 해결한다.



점 Q_n 을 지나고 직선 l_n 에 수직인 직선을 m_n 이라 하면 원 C_n 의 중심은 직선 m_n 위에 존재한다. 직선 m_n 은 곡선 $y=x^2$ 위의 점 P_n 에서의 접선과 평행하고 $y'=2x$ 이므로 직선 m_n 의 기울기는 $4n$ 이다. 직선 m_n 이 점 Q_n 을 지나므로 직선 m_n 의 방정식은

$y=4nx+2n^2$

선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 수직이등분선을 k_n 이라 하면 원 C_n 의 중심은 직선 k_n 위에 존재한다.

직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ 의 기울기는 n, 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 중점의 좌표는 $(n,\ 3n^2)$ 이므로 직선 k_n의 방정식은

$$y=-\frac{1}{n}(x-n)+3n^2$$

$$y=-\frac{1}{n}x+3n^2+1$$

원 C_n 의 중심은 두 직선 m_n, k_n 의 교점이므로 원 C_n 의 중심의 좌표를 $(x_n,\ y_n)$ 이라 하면

$4nx_n+2n^2=-\dfrac{1}{n}x_n+3n^2+1$ 에서

$$\left(4n+\frac{1}{n}\right)x_n=n^2+1$$

$$x_n=\frac{n^3+n}{4n^2+1}$$

$$y_n=4n\times\frac{n^3+n}{4n^2+1}+2n^2=\frac{12n^4+6n^2}{4n^2+1}$$

원점을 지나고 원 C_n 의 넓이를 이등분하는 직선은 이 원의 중심을 지나야 하므로

$$a_n=\frac{y_n}{x_n}=\frac{12n^4+6n^2}{n^3+n}=\frac{12n^3+6n}{n^2+1}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{12n^2+6}{n^2+1}=12$$

163. **정답** 30

[출제의도] 삼각함수의 극한을 이해하여 도형의 넓이의 극한값을 구하는 문제를 해결한다.

삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$이고 $\angle\mathrm{BAC}=\theta$이므로 $\angle\mathrm{BCA}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}$

점 D는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위에 있으므로 $\angle\mathrm{BDA}=\dfrac{\pi}{2}$

$$\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{BC}}\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=2\sin\frac{\theta}{2}$$

점 E에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 두 삼각형 AEH와 ABD는 서로 닮음이고 닮음비는 1 : 2이다.

$$\overline{\mathrm{EH}}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BD}}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=\cos\frac{\theta}{2}$$

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\overline{\mathrm{EH}}=\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{1}{2}\times\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\times\cos\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

따라서 $60\times\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=30$

164. **정답** 79

[출제 의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 추론하기

원 C의 중심을 F라 하고 $\angle\mathrm{COF}=\alpha$ 라 하자.

$\angle\mathrm{COF}=\angle\mathrm{FOE}$ 이므로

$\cos(\angle\mathrm{COE})=\cos(\alpha+\alpha)$

$= \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha$

$= 2\cos^2\alpha - 1 = \dfrac{7}{25}$

에서 $\cos^2\alpha = \dfrac{16}{25}$

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$이므로 $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$, $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$

두 직선 BD, CD가 원 C 와 접하는 점을

각각 G, H라 하자.

원 C 의 반지름의 길이를 r이라 하면

$\overline{\mathrm{OF}} = 8 - r$, $\overline{\mathrm{FH}} = r$이므로

직각삼각형 OHF에서 $\sin\alpha = \dfrac{r}{8-r} = \dfrac{3}{5}$, $r = 3$

$\overline{\mathrm{OH}} = \overline{\mathrm{OF}} \times \cos\alpha = 5 \times \dfrac{4}{5} = 4$

사각형 DHFG는 한 변의 길이가 3인 정사각형이므로

$\overline{\mathrm{OD}} = \overline{\mathrm{OH}} - \overline{\mathrm{DH}} = 4 - 3 = 1$

$\angle\mathrm{AOC} = \beta$라 하면

$\angle\mathrm{OBD} = \dfrac{\pi}{2} - \angle\mathrm{DOB} = \angle\mathrm{AOC}$이므로

삼각형 BOD에서 $\sin\beta = \dfrac{1}{8}$, $\cos\beta = \dfrac{3}{8}\sqrt{7}$

또한 $\sin 2\alpha = \sqrt{1 - \cos^2 2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{7}{25}\right)^2} = \dfrac{24}{25}$

$\sin(\angle\mathrm{AOE}) = \sin(2\alpha + \beta)$

$= \sin 2\alpha\cos\beta + \cos 2\alpha\sin\beta$

$= \dfrac{24}{25} \times \dfrac{3}{8}\sqrt{7} + \dfrac{7}{25} \times \dfrac{1}{8}$

$= \dfrac{7}{200} + \dfrac{9}{25}\sqrt{7}$

에서 $p = \dfrac{7}{200}$, $q = \dfrac{9}{25}$

따라서 $200 \times (p+q) = 200 \times \left(\dfrac{7}{200} + \dfrac{9}{25}\right) = 79$

165. **정답** 5

[출제의도] 음함수의 미분법을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

곡선 $x^2 - 2xy + 2y^2 = 15$에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x - 2y - 2x\dfrac{dy}{dx} + 4y\dfrac{dy}{dx} = 0$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-y}{x-2y}$ (단, $x \neq 2y$)

점 $\mathrm{A}(a,\ a+k)$에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{a-(a+k)}{a-2(a+k)} = \dfrac{k}{a+2k}$

점 $\mathrm{B}(b,\ b+k)$에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{b-(b+k)}{b-2(b+k)} = \dfrac{k}{b+2k}$

두 점 A, B에서의 접선이 서로 수직이므로

$\dfrac{k}{a+2k} \times \dfrac{k}{b+2k} = -1$

$ab + 2(a+b)k + 5k^2 = 0$ …… ㉠

점 A가 곡선 $x^2 - 2xy + 2y^2 = 15$

즉, $(x-y)^2 + y^2 = 15$ 위의 점이므로

$k^2 + (a+k)^2 = 15$ …… ㉡

점 B가 곡선 $x^2 - 2xy + 2y^2 = 15$

즉, $(x-y)^2 + y^2 = 15$ 위의 점이므로

$k^2 + (b+k)^2 = 15$ …… ㉢

㉡, ㉢에서

$(a+k)^2 = (b+k)^2$

$(a-b)(a+b+2k) = 0$

$a \neq b$이므로

$a + b = -2k$ …… ㉣

㉣을 ㉠에 대입하면

$ab - 4k^2 + 5k^2 = 0$

$k^2 = -ab$ …… ㉤

㉡에서

$2k^2 + 2ak + a^2 = 15$

㉣, ㉤을 위 식에 대입하면

$-2ab + a(-a-b) + a^2 = 15$

$ab = -5$

따라서

$k^2 = -ab = -(-5) = 5$

166. **정답** 18

[출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 추론하기

두 직선 l_1, l_2가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α, β라 하면

$m_1 = \tan\alpha$, $m_2 = \tan\beta$이고

$0 < m_1 < m_2 < 1$에서 $0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{4}$이다.

직선 l_3은 직선 l_1을 y축에 대하여 대칭이동한 직선이므로

$\angle\mathrm{CBA} = 2\alpha$, $\angle\mathrm{BAC} = \beta - \alpha$

$\angle\mathrm{ACB} = \pi - 2\alpha - (\beta - \alpha) = \pi - (\alpha + \beta)$

삼각형 ABC의 사인법칙에 의하여

$\dfrac{9}{\sin 2\alpha} = \dfrac{12}{\sin\{\pi - (\alpha+\beta)\}} = 15$ …… ㉠

$\sin 2\alpha = \dfrac{3}{5}$이고 $0 < 2\alpha < \dfrac{\pi}{2}$이므로

$\cos 2\alpha = \sqrt{1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^2} = \dfrac{4}{5}$, $\tan 2\alpha = \dfrac{3}{4}$

$\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \dfrac{\tan 2\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \dfrac{3}{4}$

$3\tan^2\alpha + 8\tan\alpha - 3 = 0$

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$이므로 $m_1 = \tan\alpha = \dfrac{1}{3}$

㉠에서 $\sin\{\pi - (\alpha+\beta)\} = \sin(\alpha+\beta) = \dfrac{4}{5}$이고

$0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$ 이므로

$\cos(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$, $\tan(\alpha+\beta)=\frac{4}{3}$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{3}+\tan\beta}{1-\frac{1}{3}\tan\beta}=\frac{4}{3}$$

$1+3\tan\beta=4-\frac{4}{3}\tan\beta$

$\frac{13}{3}\tan\beta=3$에서 $m_2=\tan\beta=\frac{9}{13}$

따라서 $78\times m_1\times m_2=78\times\frac{1}{3}\times\frac{9}{13}=18$

167. 정답 12

[출제 의도] 등비급수를 활용하여 문제 해결하기

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면 $a_1=1$이므로

$a_n=r^{n-1}$ (단, n은 자연수)

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $-1<r<0$ 또는 $0<r<1$

$\sum_{n=1}^{\infty}(20a_{2n}+21|a_{3n-1}|)=0$에서 $0<r<1$이면

$\sum_{n=1}^{\infty}(20a_{2n}+21|a_{3n-1}|)>0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $-1<r<0$

$\{a_{2n}\}$은 공비가 r^2인 등비수열이고 $\{|a_{3n-1}|\}$은 공비가 $-r^3$인 등비수열이다.

$0<r^2<1$, $-1<-r^3<0$이므로 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_{3n-1}|$은 수렴한다.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(20a_{2n}+21|a_{3n-1}|)&=\frac{20r}{1-r^2}+\frac{21|a_2|}{1-(-r^3)}\\&=\frac{20r}{1-r^2}+\frac{21\times(-r)}{1+r^3}\\&=0\end{aligned}$$

$20(1-r+r^2)-21(1-r)=0$

$20r^2+r-1=0$

$(5r-1)(4r+1)=0$

$-1<r<0$이므로 $r=-\frac{1}{4}$

$a_n=\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}=0$

등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 s라 하면 $\frac{b_n}{a_n}=b_1\times(-4s)^{n-1}$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}&=\lim_{n\to\infty}\{3\times(-1)^{n-1}+b_1\times(-4s)^{n-1}\}\\&=\lim_{n\to\infty}[(-1)^{n-1}\{3+b_1\times(4s)^{n-1}\}]\end{aligned}$$

(ⅰ) $-1<4s<1$인 경우

$\lim_{n\to\infty}(4s)^{n-1}=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}\{3+b_1\times(4s)^{n-1}\}=3$

그러므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}$이 발산한다.

(ⅱ) $4s<-1$ 또는 $4s>1$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\{3+b_1\times(4s)^{n-1}\}$은 발산하므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}$이 발산한다.

(ⅲ) $4s=-1$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\{3\times(-1)^{n-1}+b_1\}$

$\lim_{n\to\infty}\{3\times(-1)^{n-1}\}$은 발산하므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}$이 발산한다.

$\lim_{n\to\infty}\{3\times(-1)^{n-1}\}$은 발산하므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}$이 발산한다.

(ⅳ) $4s=1$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\{(-1)^{n-1}\times(3+b_1)\}$

$b_1=-3$일 때, 모든 자연수 n에 대하여 $\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}=0$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}=0$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여

$b_1=-3$, $s=\frac{1}{4}$

$b_n=(-3)\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{-3}{1-\frac{1}{4}}=-4$

따라서 $b_1\times\sum_{n=1}b_n=12$

168. 정답 57

[출제의도] 급수의 합을 이용하여 일반항을 구할 수 있는가?

$$\begin{aligned}S_m&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m+1}{n(n+m+1)}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+m+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{m+2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{m+3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m+n+1}\right)\right\}\end{aligned}$$

따라서

$$S_1=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

이므로

$$a_1=S_1=\frac{3}{2}$$

또한

$$S_9=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{13}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+10}\right)\right\}$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10}$$
$$S_{10}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{14}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+11}\right)\right\}$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}$$
$$=S_9+\frac{1}{11}$$

이므로

$$a_{10}=S_{10}-S_9$$
$$=\left(S_9+\frac{1}{11}\right)-S_9$$
$$=\frac{1}{11}$$

따라서

$$a_1+a_{10}=\frac{3}{2}+\frac{1}{11}$$
$$=\frac{35}{22}$$

이므로 $p=22,\ q=35$

$p+q=57$

169. 정답 162

[출제의도] 조건을 만족시키는 등비급수를 구하여 등비급수의 합을 구할 수 있는가?

$a_n=ar_1^{n-1},\ b_n=bs^{n-1}\ (a\neq 0,\ b\neq 0,\ r\neq 0,\ s\neq 0)$이라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\ \sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 각각 수렴하므로 $-1<r<1,\ -1<s<1$이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\frac{ab}{1-rs}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a}{1-r},\ \sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{b}{1-s}$$

이므로

$$\frac{ab}{1-rs}=\frac{a}{1-r}\times\frac{b}{1-s}$$
$$1-rs=(1-r)(1-s)$$
$$r+s=2rs \quad \cdots\cdots ㉠$$

(i) $r>0$인 경우

$a_1>0$이면 $a_2>0,\ a_3>0$이므로

$$3\times\sum_{n=1}^{\infty}|a_{2n}|=3\times\frac{a_2}{1-r^2}$$
$$7\times\sum_{n=1}^{\infty}|a_{3n}|=7\times\frac{a_3}{1-r^3}$$
$$\frac{3a_2}{1-r^2}=\frac{7a_3}{1-r^3}$$
$$\frac{3}{1-r^2}=\frac{7r}{1-r^3}$$
$$4r^3-7r+3=0$$
$$(r-1)(2r-1)(2r+3)=0$$

따라서 $r=\frac{1}{2}$인데 ㉠을 만족시키는 s의 값이 존재하지 않으므로 모순이다.

같은 방법으로 $a_1<0$인 경우도 존재하지 않는다.

(ii) $r<0$인 경우

$a_1>0$이면 $a_2<0,\ a_3>0$이고 수열 $\{|a_{2n}|\}$의 공비는 r^2, 수열 $\{|a_{3n}|\}$의 공비는 $-r^3$이므로

$$3\times\sum_{n=1}^{\infty}|a_{2n}|=3\times\frac{-a_2}{1-r^2}$$
$$7\times\sum_{n=1}^{\infty}|a_{3n}|=7\times\frac{a_3}{1+r^3}$$
$$\frac{-3a_2}{1-r^2}=\frac{7a_3}{1+r^3},\ \frac{-3}{1-r^2}=\frac{7r}{1+r^3}$$
$$4r^3-7r-3=0$$
$$(r+1)(2r-3)(2r+1)=0$$

따라서 $r=-\frac{1}{2}$이므로 ㉠에 대입하면

$S=\frac{1}{4}$이다.

$a_1<0$인 경우도 같은 방법으로 생각하면 같은 결론을 얻을 수 있다.

$b_n=b\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{2n-1}+b_{3n+1}}{b_n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{b\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}+b\left(\frac{1}{64}\right)^{n}}{b\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}\right\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+1}\right\}$$
$$=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{1}{64}}{1-\frac{1}{16}}$$
$$=\frac{4}{3}+\frac{1}{60}$$
$$=\frac{27}{20}$$

따라서 $S=\frac{27}{20}$이므로

$120S=120\times\frac{27}{20}=162$

170. 정답 5
[출제의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구하는 문제를 해결한다.

직선 l의 기울기는 $\tan\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$이므로

직선 l의 방정식은 $y=(\tan\theta)x+1$

직선 $y=(\tan\theta)x+1$이 곡선 $y=e^{\frac{x}{a}}-1$과 만나는 점의 x좌표가 $f(\theta)$이므로

$\tan\theta\times f(\theta)+1=e^{\frac{f(\theta)}{a}}-1$ …… ㉠

$\theta=\frac{\pi}{4}$일 때, $a+1=e-1$, $a=e-2$

㉠의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$\sec^2\theta\times f(\theta)+\tan\theta\times f'(\theta)=\frac{f'(\theta)}{a}e^{\frac{f(\theta)}{a}}$ 에서

$\theta=\frac{\pi}{4}$일 때, $2(e-2)+f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{e-2}\times e$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=(e-2)^2$이므로 $\sqrt{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=e-2$

따라서 $p=1$, $q=-2$이므로 $p^2+q^2=5$

171. 정답 18
[출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 추론하기
삼각형 BCD는 이등변삼각형이므로
$\angle\mathrm{CBD}=\angle\mathrm{DCB}=\alpha$이고 $\angle\mathrm{CDA}=2\alpha$

삼각형 ADC에서 $\beta=\frac{\pi}{3}-2\alpha$

$\cos2\alpha=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha$
$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
$=2\cos^2\alpha-1=\frac{\sqrt{21}}{7}$

$\sin^2 2\alpha=1-\cos^2 2\alpha=\frac{28}{49}$이고

$0<2\alpha<\pi$이므로 $\sin2\alpha=\frac{2\sqrt{7}}{7}$

$\tan2\alpha=\frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\tan\beta=\tan\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)$

$=\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan2\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{3}\times\tan2\alpha}$

$=\frac{\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1+\sqrt{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{9}$

따라서 $54\sqrt{3}\times\tan\beta=18$

172. 정답 17
[출제의도] 여러 가지 함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

$f'(x)=\frac{2t\ln x}{x}-2x=\frac{2t\ln x-2x^2}{x}$

이고 $f(x)$는 $x=k$에서 극대이므로

$2t\ln k-2k^2=0$

$t\ln k=k^2$

이때 실수 k의 값을 $g(t)$라 했으므로

$t\ln g(t)=\{g(t)\}^2$ …… ㉠

그런데 $g(\alpha)=e^2$이므로

㉠에 $t=\alpha$를 대입하면

$\alpha\ln g(\alpha)=\{g(\alpha)\}^2$

$2\alpha=e^4$, $\alpha=\frac{e^4}{2}$

또한, ㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면

$\ln g(t)+t\times\frac{g'(t)}{g(t)}=2g(t)\times g'(t)$

이 식에 $t=\alpha$를 대입하면

$\ln g(\alpha)+\alpha\times\frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}=2g(\alpha)\times g'(\alpha)$

$2+\frac{e^4}{2}\times\frac{g'(\alpha)}{e^2}=2e^2\times g'(\alpha)$

$\frac{3}{2}e^2\times g'(\alpha)=2$

$g'(\alpha)=\frac{4}{3e^2}$

$\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\frac{e^4}{2}\times\frac{16}{9e^4}=\frac{8}{9}$

따라서 $p=9$, $q=8$이므로

$p+q=17$

173. 정답 5
[출제의도] 음함수의 미분법을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

곡선 $x^2-2xy+2y^2=15$에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x-2y-2x\frac{dy}{dx}+4y\frac{dy}{dx}=0$

$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x-2y}$ (단, $x\neq2y$)

점 $\mathrm{A}(\mathrm{a},\ \mathrm{a}+\mathrm{k})$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{a-(a+k)}{a-2(a+k)}=\frac{k}{a+2k}$$

점 B(b, b+k)에서의 접선의 기울기는

$$\frac{b-(b+k)}{b-2(b+k)}=\frac{k}{b+2k}$$

두 점 A, B에서의 접선이 서로 수직이므로

$$\frac{k}{a+2k}\times\frac{k}{b+2k}=-1$$

$ab+2(a+b)k+5k^2=0$ …… ㉠

점 A가 곡선 $x^2-2xy+2y^2=15$

즉, $(x-y)^2+y^2=15$ 위의 점이므로

$k^2+(a+k)^2=15$ …… ㉡

점 B가 곡선 $x^2-2xy+2y^2=15$

즉, $(x-y)^2+y^2=15$ 위의 점이므로

$k^2+(b+k)^2=15$ …… ㉢

㉡, ㉢에서

$(a+k)^2=(b+k)^2$

$(a-b)(a+b+2k)=0$

$a\neq b$이므로

$a+b=-2k$ …… ㉣

㉣을 ㉠에 대입하면

$ab-4k^2+5k^2=0$

$k^2=-ab$ …… ㉤

㉡에서

$2k^2+2ak+a^2=15$

㉣, ㉤을 위 식에 대입하면

$-2ab+a(-a-b)+a^2=15$

$ab=-5$

따라서

$k^2=-ab=-(-5)=5$

174. 정답 40

[출제의도] 음함수 미분을 활용하여 문제해결하기

$\angle\mathrm{APD}=\alpha\ \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면 $\angle\mathrm{ADQ}=\theta+\alpha$

삼각형 AQD에서 코사인법칙에 의하여

$\{f(\theta)\}^2=2^2+1^2-2\times2\times1\times cos(\theta+\alpha)$

$\{f(\theta)\}^2=5-4\cos(\theta+\alpha)$ …… ㉠

삼각형 ADP에서 사인법칙에 의하여

$\frac{1}{\sin\theta}=\frac{2}{\sin\alpha}$에서 $\sin\alpha=2\sin\theta$

이 식의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$\cos\alpha\frac{d\alpha}{d\theta}=2\cos\theta$에서 $\frac{d\alpha}{d\theta}=\frac{2\cos\theta}{\cos\alpha}$

㉠의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$$2f(\theta)f'(\theta)=4\sin(\theta+\alpha)\left(1+\frac{d\alpha}{d\theta}\right)$$

$$f(\theta)f'(\theta)=2\sin(\theta+\alpha)\left(1+\frac{2\cos\theta}{\cos\alpha}\right)$$

$\theta=\theta_0$일 때 α의 값을 α_0이라 하면 $\cos\theta_0=\frac{7}{8}$이므로

$\sin\theta_0=\frac{\sqrt{15}}{8}$이고,

$\sin\alpha_0=2\sin\theta_0=\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\cos\alpha_0=\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}\cos(\theta_0+\alpha_0)&=\cos\theta_0\cos\alpha_0-\sin\theta_0\sin\alpha_0\\&=\frac{7}{8}\times\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{15}}{8}\times\frac{\sqrt{15}}{4}=-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

이므로 $\sin(\theta_0+\alpha_0)=\frac{\sqrt{15}}{4}$

㉠에 의하여 $\{f(\theta_0)\}^2=5-4\times\left(-\frac{1}{4}\right)=6$

에서 $f(\theta_0)=\sqrt{6}$

$$\sqrt{6}f'(\theta_0)=2\times\frac{\sqrt{15}}{4}\times(1+7)$$

그러므로 $k=f'(\theta_0)=2\sqrt{10}$

따라서 $k^2=40$

175. 정답 15

[출제의도] 역함수의 미분법을 활용하여 문제해결하기

함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 연속함수이다.

함수 $h(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$h(0)=\lim_{x\to0-}h(x)=\lim_{x\to0+}h(x)$에서

$h(0)=0$이고 $f(g^{-1}(0))=0$

$g^{-1}(0)=\alpha$라 하면 $f(\alpha)=0$, $g(\alpha)=0$

$f(\alpha)=0$에서

$\alpha=-1$ 또는 $\alpha=0$ 또는 $\alpha=1$ …… ㉠

함수 $h(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$h(1)=\lim_{x\to1-}h(x)=\lim_{x\to1+}h(x)$에서

$h(1)=0$이고 $f(g^{-1}(1))=0$

$g(0)=1$이므로 $g^{-1}(1)=0$이고 $f(0)=0$이므로

$f(g^{-1}(1))=0$은 성립한다.

함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to0-}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}$ 에서

$$\lim_{x\to0-}\frac{f(g^{-1}(x))}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{\frac{1}{\pi}\sin\pi x}{x}=1$$

$f'(g^{-1}(0))(g^{-1})'(0)=1$

$g^{-1}(0)=\alpha$이고 $(g^{-1})'(0)=\frac{1}{g'(\alpha)}$ 이므로

$$f'(\alpha)\times\frac{1}{g'(\alpha)}=1$$

$f'(\alpha)=g'(\alpha)$

$3\alpha^2-1=3a\alpha^2+2\alpha+b$ …… ㉡

함수 $h(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to1-}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}$ 에서

$$\lim_{x\to1-}\frac{\frac{1}{\pi}\sin\pi x}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{f(g^{-1}(x))}{x-1}$$

$\lim_{x\to1-}\frac{\frac{1}{\pi}\sin\pi x}{x-1}$ 에서 $x-1=t$라 하면

$$\lim_{x\to1-}\frac{\frac{1}{\pi}\sin\pi x}{x-1}=\lim_{t\to0-}\frac{-\sin\pi t}{\pi t}=-1$$

$\lim_{x\to1+}\frac{f(g^{-1}(x))}{x-1}=-1$에서

$f'(g^{-1}(1))(g^{-1})'(1)=-1$

$g^{-1}(1)=0$이고 $(g^{-1})'(1)=\frac{1}{g'(0)}$ 이므로

$f'(0)\times\frac{1}{g'(0)}=-1$

$f'(0)=-1$이므로

$g'(0)=b=1$

삼차함수 $g(x)$는 역함수 $g^{-1}(x)$를 가지고

$g'(0)=1>0$이므로 증가함수이다.

$g(\alpha)=0$, $g(0)=1$이므로 $\alpha<0$

㉠에 의하여 $\alpha=-1$

㉡에 의하여 $a=1$

$g(x)=x^3+x^2+x+1$

따라서 $g(a+b)=g(2)=15$

176. 정답 24

[출제의도]

함수의 극대, 극소 및 함수의 그래프의 개형을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

$g(x)=\{f(x)+2\}e^{f(x)}$ 이므로 $g'(x)=f'(x)\{f(x)+3\}e^{f(x)}$

$g'(x)=0$에서 $f'(x)=0$ 또는 $f(x)+3=0$

$f(x)$가 이차함수이므로 조건 (가), (나)에서 의해

$f'(a)=0$, $f(a)=6$

$f(b)+3=0$, $f(b+6)+3=0$이어야 한다.

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 p라 하면

$f(b)+3=0$, $f(b+6)+3=0$이므로

$f(x)+3=p(x-b)(x-b-6)$

즉, $f(x)=p(x-b)(x-b-6)-3$ …… ㉠

이 때, $f'(a)=0$이므로 $\frac{b+(b+6)}{2}=a$

$b=a-3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$f(x)=p(x-a+3)(x-a-3)-3$

이므로

$f(a)=-9p-3=6$에서 $p=-1$

방정식 $f(x)=0$에서

$-(x-a+3)(x-a-3)-3=0$

$(x-a)^2-6=0$, $x=\pm\sqrt{6}$

따라서

$(\alpha-\beta)^2=\{(a+\sqrt{6})-(a-\sqrt{6})\}^2=24$

177. 정답 12

[출제의도] 치환적분법 이해하기

조건 (가)에 의하여

$x<1$일 때

$f(x)=-x^2+4x+C$ (단, C는 적분상수)

조건 (나)에 의하여

$x>0$일 때

$2xf'(x^2+1)=2ae^{2x}+b$

$$f'(x^2+1)=\frac{2ae^{2x}+b}{2x}$$

$$f'(1)=\lim_{x\to0+}f'(x^2+1)=\lim_{x\to0+}\frac{2ae^{2x}+b}{2x}$$

$\lim_{x\to0+}2x=0$이므로 $\lim_{x\to0+}(2ae^{2x}+b)=0$

$2a+b=0$, $b=-2a$

$$f'(x^2+1)=\frac{2ae^{2x}+b}{2x}=\frac{2ae^{2x}-2a}{2x}$$

함수 $f'(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-}f'(x)=\lim_{x\to1+}f'(x)=f'(1)$

$\lim_{x\to1-}f'(x)=-2+4=2$

$$\lim_{x\to1+}f'(x)=\lim_{s\to0+}f'(s^2+1)=\lim_{s\to0+}\frac{2a(e^{2s}-1)}{2s}=2a$$

$f'(1)=2$

$2=2a$, $a=1$, $b=-2$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)=-1^2+4\times1+C=C+3$

$$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{s\to0+}f(s^2+1)=\lim_{s\to0+}(e^{2s}-2s)=1$$

$f(1)=1$

$C+3=1$이므로 $C=-2$

그러므로

$x<1$일 때, $f(x)=-x^2+4x-2$

$x\geq0$일 때, $f(x^2+1)=e^{2x}-2x$

$$\int_0^5f(x)dx=\int_0^1f(x)dx+\int_1^5f(x)dx$$

$$\int_0^1f(x)dx=\int_0^1(-x^2+4x-2)dx=-\frac{1}{3}$$

$\int_1^5 f(x)dx$에서

$x=t^2+1\ (t\geq 0)$이라 하면 $\frac{dx}{dt}=2t$

$$\int_1^5 f(x)dx=\int_0^2 f(t^2+1)2tdt$$
$$=\int_0^2 2t(e^{2t}-2t)dt$$
$$=\int_0^2 (2te^{2t}-4t^2)dt$$
$$=\left[te^{2t}\right]_0^2-\int_0^2 e^{2t}dt-\int_0^2 4t^2dt$$
$$=\left[te^{2t}-\frac{1}{2}e^{2t}-\frac{4}{3}t^3\right]_0^2$$
$$=\frac{3}{2}e^4-\frac{61}{6}$$

$$\int_0^5 f(x)dx=\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{3}{2}e^4-\frac{61}{6}\right)=\frac{3}{2}e^4-\frac{21}{2}$$

에서 $p=\frac{3}{2},\ q=\frac{21}{2}$

따라서 $p+q=12$

178. 정답 26

[출제의도] 여러 가지 조건을 만족시키는 함수를 구한 후 정적분의 값을 구할 수 있는가?

조건 (가)에서

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)+6}{e^x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{ae^{2x}+be^x+c+6}{e^x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(ae^x+b+\frac{c+6}{e^x}\right)=1$$

따라서, $b=1,\ c=-6$이므로

$f(x)=ae^{2x}+e^x-6$

조건 (나)에서

$f(\ln 2)=ae^{2\ln 2}+e^{\ln 2}-6=4a+2-6=0$

$a=1$

즉, $f(x)=e^{2x}+e^x-6$

따라서

$f(\ln 4)=e^{2\ln 4}+e^{\ln 4}-6=16+4-6=14$

이므로

$g(0)=\ln 2,\ g(14)=\ln 4$

따라서, $\int_0^{14} g(x)dx$에서 $g(x)=t$로 놓으면

$g'(x)=\frac{dt}{dx}$ 이고

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}=\frac{1}{f'(t)}$$

이므로

$$\int_0^{14} g(x)dx$$
$$=\int_{\ln 2}^{\ln 4} tf'(t)dt$$
$$=\left[tf(t)\right]_{\ln 2}^{\ln 4}-\int_{\ln 2}^{\ln 4} f(t)dt$$
$$=14\ln 4-\int_{\ln 2}^{\ln 4}(e^{2t}+e^t-6)dt$$
$$=14\ln 4-\left[\frac{1}{2}e^{2t}+e^t-6t\right]_{\ln 2}^{\ln 4}$$
$$=28\ln 2-(8-6\ln 2)$$
$$=34\ln 2-8$$

따라서 $p=-8,\ q=34$이므로

$p+q=26$

179. 정답 14

[출제의도] 정적분의 성질과 삼각함수의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

조건 (가)에서

$$\int_0^{\frac{\pi}{a}} f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{a}}\sin(ax)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{a}\cos(ax)\right]_0^{\frac{\pi}{a}}=\frac{2}{a}$$

$\frac{2}{a}\geq\frac{1}{2}$ 이므로

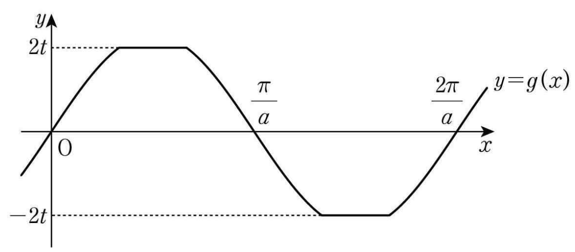
$0<a\leq 4$ $\cdots\cdots$ ㉠

조건 (나)에서

$$\int_0^{3\pi}\{|f(x)+t|-|f(x)-t|\}dx=0$$

$g(x)=|f(x)+t|-|f(x)-t|$라 하면

$$g(x)=\begin{cases}-2t & (-1\leq\sin(ax)<-t)\\ 2\sin(ax) & (-t\leq\sin(ax)<t)\\ 2t & (t\leq\sin(ax)\leq 1)\end{cases}$$



함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같으므로

$0<k<\frac{2\pi}{a}$ 인 모든 실수 k에 대하여

$\int_0^k g(x)\,dx>0$이고, $\int_0^{\frac{2\pi}{a}} g(x)\,dx=0$이다.

함수 $g(x)$는 주기가 $\frac{2\pi}{a}$이고 $\int_0^{3\pi} g(x)\,dx=0$이므로

$3\pi=\frac{2\pi}{a}\times n$ (n은 자연수), $a=\frac{2}{3n}$

㉠에서 $0 < \frac{2}{3}n \le 4$

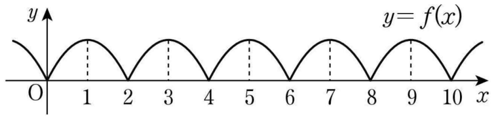
따라서 구하는 모든 실수 a의 값은

$\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, 2, $\frac{8}{3}$, $\frac{10}{3}$, 4이므로 그 합은 14이다.

180. 정답 25

[출제의도] 등비수열의 극한을 이용하여 등비수열의 항의 값을 구하는 문제를 해결한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같고, 함수 $f(x)$는 $x=t$ (t는 정수)에서 극값을 가진다.



등비수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $-1 < r \le 1$이다.

조건 (나)를 만족시키는 3개의 자연수를 i, j, l $(i<j<l)$이라 하면 $a_i \ne a_j$이므로 $r \ne 1$이고, $a_1 \ne 0$

서로소인 두 자연수 p $(p \ge 2)$, q에 대하여 $|r| = \frac{q}{p}$라 하자.

$a_l = a_i r^{l-i}$이고 a_i, a_l은 자연수, $l-i \ge 2$이므로 a_i는 p^2의 배수이다.

$0 < a_i < 10$에서 p는 2 또는 3이므로

r의 값은 $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{2}{3}$

이때, 조건 (나)를 만족시키는 등비수열 $\{a_n\}$의 공비와 순서쌍 $(a_i,\ a_j,\ a_l)$은

$r=\frac{1}{2}$일 때, $(4,\ 2,\ 1)$, $r=\frac{1}{3}$일 때, $(9,\ 3,\ 1)$,

$r=\frac{2}{3}$일 때 $(9,\ 6,\ 4)$뿐이다.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_1a_{n+1}+a_{2n}}{a_{n+1}+a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{{a_1}^2r^n+a_1r^{2n-1}}{a_1r^n+a_1r^{n-1}}\\ &= \frac{a_1r}{r+1}\\ &= \frac{81}{10} = \frac{3^4}{10}\end{aligned}$$

에서 $a_1 = \frac{3^4(r+1)}{10r}$이다.

(ⅰ) $r=\frac{1}{2}$인 경우

$(a_i,\ a_j,\ a_l) = (4,\ 2,\ 1)$이고 $a_1 = 4$이다.

이때 $a_1 = \frac{3^4(r+1)}{10r} = \frac{3^5}{10}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $r=\frac{1}{3}$일 때,

$(a_i,\ a_j,\ a_l) = (9,\ 3,\ 1)$이다.

$a_1 = \frac{3^4(r+1)}{10r} = \frac{2\times3^4}{5}$에서

$a_l = a_1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{l-1} = 1$인 자연수 l이 존재하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $r=\frac{2}{3}$일 때,

$(a_i,\ a_j,\ a_l) = (9,\ 6,\ 4)$이다.

$a_1 = \frac{3^4(r+1)}{10r} = \frac{3^4}{4}$에서 $i=3$, $j=4$, $l=5$이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $r=\frac{2}{3}$

$a_7 = a_1r^6 = \frac{3^4}{4}\times\left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{16}{9}$에서

$p=9$, $q=16$이므로 $p+q=25$

181. 정답 84

[출제 의도] 수열의 극한으로 정의된 함수를 추론하여 함숫값을 구한다.

$x>0$일 때, 함수 $g(x)$를 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) $0<x<m$이면 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{m}\right)^n = 0$이므로 $g(x)=x$

(ⅱ) $x=m$이면 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{m}\right)^n = 1$이므로

$g(m) = \frac{f(m)+m}{2}$

(ⅲ) $x>m$이면 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{x}\right)^n = 0$이므로

$$g(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{f(x)+x\times\left(\frac{m}{x}\right)^n}{1+\left(\frac{m}{x}\right)^n} = f(x)$$

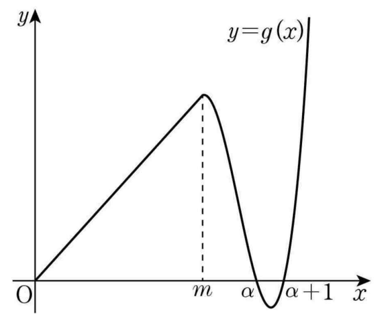
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

$$g(x) = \begin{cases} x & (0<x<m) \\ \frac{f(m)+m}{2} & (x=m) \\ f(x) & (x>m)\end{cases}$$

조건 (가)에서 함수 $g(x)$가 $x=m$에서 미분가능하고 연속이므로

$1 = f'(m)$, $m = f(m)$

조건 (나)에서 $g(k)g(k+1)=0$을 만족시키는 자연수 k의 개수가 3이므로 $g(x)=0$을 만족시키는 자연수 x는 연속된 2개의 자연수이다. 이 두 자연수를 α, $\alpha+1$이라 하면 함수 $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



방정식 $f(x)=0$의 세 근을 α, $\alpha+1$, β라 하자.

(ⅰ) $g(m) < g(m+1)$일 때,

$g'(m+1) \le 0$이므로 조건 (다)에서 $g(l) \ge g(l+1)$을 만족시키는 세 자연수 l은 $m+1,\ m+2,\ m+3$이므로 $\alpha = m+3$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-\alpha)(x-\alpha-1)(x-\beta) \\ &= (x-m-3)(x-m-4)(x-\beta) \\ &= \{x^2-(2m+7)x+m^2+7m+12\}(x-\beta) \end{aligned}$$

$$f'(x) = (2x-2m-7)(x-\beta) + \{x^2-(2m+7)x+m^2+7m+12\}$$

$f'(m) = -7(m-\beta)+12$

$f'(m)=1$이므로 $-7(m-\beta)+12=1,\ m-\beta = \dfrac{11}{7}$

$m = f(m) = 12(m-\beta) = \dfrac{132}{7}$이므로 모순이다.

(ⅱ) $g(m) \ge g(m+1)$일 때,

조건 (다)에서 $g(l) \ge g(l+1)$을 만족시키는 세 자연수 l은 m, $m+1,\ m+2$이므로 $\alpha = m+2$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-\alpha)(x-\alpha-1)(x-\beta) \\ &= (x-m-2)(x-m-3)(x-\beta) \\ &= \{x^2-(2m+5)x+m^2+5m+6\}(x-\beta) \end{aligned}$$

$$f'(x) = (2x-2m-5)(x-\beta) + \{x^2-(2m+5)x+m^2+5m+6\}$$

$f'(m) = -5(m-\beta)+6$

$f'(m)=1$이므로 $-5(m-\beta)+6=1,\ m-\beta=1$

$m = f(m) = 6(m-\beta) = 6$

$m=6$일 때, $f(x) = (x-5)(x-8)(x-9)$에서

$g'(m+1) = f'(m+1) = -4$이므로 조건 (가)를 만족시키고,

$g(m) = f(m) \ge f(m+1) = g(m+1)$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $f(x) = (x-5)(x-8)(x-9)$이므로

$g(12) = f(12) = 7\times 4\times 3 = 84$

182. 정답 138

[출제의도] 등비급수를 이용하여 추론하기

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면 조건 (가)에 의하여

$$\frac{a}{1-r} = 4 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

수열 $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 1 & (|a_n| < \alpha) \\ -\dfrac{a_n^2}{5} & (|a_n| \ge \alpha) \end{cases}$$

모든 자연수 n에 대하여 $|a_n| < \alpha$라 하면 $\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\frac{a_n}{b_n} = \sum_{n=1}^{m} 1 = m$의 값이 최소가 되도록 하는 자연수 m의 값은 1이므로 조건 (나)에 의하여

$$\sum_{n=1}^{1} b_n = \sum_{n=1}^{1} a_n = a = 51$$

㉠에 의하여 $r = -\dfrac{47}{4} < -1$이므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴한다는 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $|a_k| \ge \alpha,\ |a_{k+1}| < \alpha$인 자연수 k가 존재한다.

$1 \le n \le k$일 때, $\dfrac{a_n}{b_n} = -\dfrac{{a_n}^2}{5} < 0$

$n \ge k+1$일 때, $\dfrac{a_n}{b_n} = 1 > 0$

그러므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\frac{a_n}{b_n}$의 값이 최소가 되도록 하는 자연수 m은 k이고

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} b_n = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = \frac{ar^k}{1-r} = \frac{1}{64}$$

㉠에 의하여 $r^k = \dfrac{1}{256}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{k} b_n &= \sum_{n=1}^{k}\left(-\frac{5}{a_n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{k}\left\{-\frac{5}{a}\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}\right\} \\ &= \frac{-\dfrac{5}{a}\left\{1-\left(\dfrac{1}{r}\right)^k\right\}}{1-\dfrac{1}{r}} = 51 \end{aligned}$$

$r^k = \dfrac{1}{256}$이므로 $a(r-1) = 25r$

㉠에 의하여 $4(1-r)(r-1) = 25r,\ 4r^2+17r+4=0$

$-1 < r < 1$이므로 $r = -\dfrac{1}{4},\ a=5$

그러므로 $p = k = 4$

따라서 $32\times(a_3+p) = 32\times\left\{5\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2+4\right\} = 138$

183. 정답 32

[출제의도] 삼각함수의 미분법과 음함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

선분 AB의 중점을 O라 하면

$\overline{OP} = 5$

$\overline{OC} = \overline{AO} - \overline{AC} = 5-4 = 1$

삼각형 PCO에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{OP}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{OC}^2 - 2\times\overline{CP}\times\overline{OC}\times\cos\theta$

$\overline{CP} = x$라 하면

$5^2 = x^2+1^2-2\times x\times 1\times cos\theta$

$$x^2-2x\cos\theta-24=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\theta = \dfrac{\pi}{4}$를 ㉠에 대입하면

$x^2-\sqrt{2}\,x-24=0$

$x>0$이므로 $x = 4\sqrt{2}$

㉠을 θ에 대하여 미분하면

$$2x\frac{dx}{d\theta} - 2\cos\theta\frac{dx}{d\theta} + 2x\sin\theta = 0$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{x\sin\theta}{\cos\theta - x}$$

$\theta=\frac{\pi}{4}$일 때, $\frac{dx}{d\theta}$의 값은

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{4\sqrt{2}\times\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}-4\sqrt{2}}=-\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

선분 PQ의 중심을 M이라 하면

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{CM}}$$

$$=\frac{1}{2}\times 2x\sin\theta\times x\cos\theta$$

$$=x^2\sin\theta cos\theta$$

이 식의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$$\frac{dS(\theta)}{d\theta}=2x\frac{dx}{d\theta}\sin\theta cos\theta+x^2\cos^2\theta-x^2\sin^2\theta$$

이 식에 $\theta=\frac{\pi}{4}$를 대입하면

$$S'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\times 4\sqrt{2}\times\left(-\frac{4\sqrt{2}}{7}\right)\times\cos\frac{\pi}{4}\times\sin\frac{\pi}{4}$$

$$+(4\sqrt{2})^2\cos^2\frac{\pi}{4}-(4\sqrt{2})^2\sin^2\frac{\pi}{4}$$

$$=-\frac{32}{7}$$

따라서 $-7\times S'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-7\times\left(-\frac{32}{7}\right)=32$

184. 정답 40

[출제의도] 미분법을 활용하여 함수를 추론한다.

$f'(x)=\{-ax^2+(2a-b)x+b\}e^{-x}$

$f''(x)=\{ax^2-(4a-b)x+2a-2b\}e^{-x}$

점 $(0,\ 0)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프에 그은 접선 중 기울기가 $f'(0)$이 아닌 접선이 존재할 때 그 접선을 l이라 하자. 접선 l의 접점을 $(k,\ f(k))$라 하면 $k\neq 0$이다.

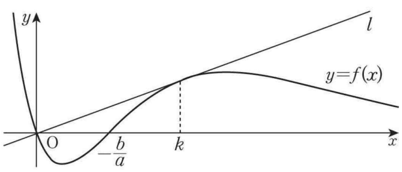
$\frac{f(k)}{k}=f'(k)$

$(ak+b)e^{-k}=\{-ak^2+(2a-b)k+b\}e^{-k}$

$k=-\frac{b}{a}+1$이고

$f'(k)=ae^{-k}$, $f''(k)=-ake^{-k}$

$\frac{b}{a}<0$일 때, 직선 l과 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같고 $f'(t)>f'(k)$인 t가 존재하면 방정식 $f(x)=f'(t)\times x$의 실근은 0뿐이다.



$f''(0)=2a-2b$에서 $f''(0)\times f''(k)<0$이므로

$0<\alpha<k$이고 $f''(\alpha)=0$인 α라 존재하고

$\alpha<t<k$인 임의의 t에 대하여 $f''(t)<0$이다.

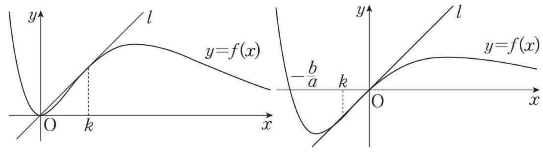
이때, $\alpha<t_1<k$, $\alpha<t_2<k$인 두 실수 t_1, $t_2(t_1<t_2)$가 존재하고

$f'(t_1)>f'(k)$, $f'(t_2)>f'(k)$이다.

t가 t_1 또는 t_2일 때, $\{x\,|\,f(x)=f'(t)\times x\}=\{0\}$

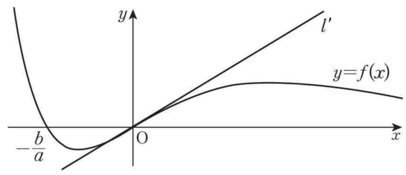
이므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

$\frac{b}{a}\geq 0$, $\frac{b}{a}\neq 1$일 때, 직선 l과 함수 $f=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같고 $f'(t)>f'(k)$인 t가 존재하면 방정식 $f(x)=f'(t)\times x$의 실근은 0뿐이다.



$f''(0)\times f''(k)<0$이므로 $\frac{b}{a}<0$일 때와 마찬가지로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

$\frac{b}{a}=1$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선을 l'이라 하면 직선 l'과 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$t=0$일 때, 방정식 $f(x)=f'(t)\times x$에서

$a=b$이므로 $a(x^2+x)e^{-x}=f'(0)x$

$f'(0)=a$이므로 $ax(x+1)e^{-x}=ax$

$ax\{(x+1)e^{-x}-1\}=0$

$x=0$ 또는 $(x+1)e^{-x}-1=0$이므로

방정식 $f(x)=f'(t)\times x$의 실근은 0뿐이다.

$f''(0)=0$이고 0이 아닌 모든 실수 t에 대하여 $f'(t)<f'(0)$이다.

따라서 0이 아닌 모든 실수 t에 대하여

$\{x\,|\,f(x)=f'(t)\times x\}\neq\{0\}$이므로 조건 (가)를 만족시킨다.

조건 (나)에서 $f(2)=(4a+2b)e^{-2}=2e^{-2}$

$2a+b=1$이다. $a=b$이므로 $a=b=\frac{1}{3}$

따라서 $60\times(a+b)=60\times\frac{2}{3}=40$

185. 정답 107

[출제 의도] 지수함수의 미분을 이용하여 추론하기

조건 (나)에 의하여

$$f(x+2k)=-\frac{1}{2}f(x+2(k-1))$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^2 f(x+2(k-2))$$

$$\vdots$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}f(x)\quad (k\text{는 자연수})$$

자연수 m에 대하여

$2m-2 \le x \le 2m-1$일 때

$$f(x)=f(x-2(m-1)+2(m-1))$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times f(x-2(m-1))$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times\{2^{x-2(m-1)}-1\}$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times\{2^{-2(m-1)}\times 2^{x}-1\}$$

$2m-1 < x \le 2m$일 때

$$f(x)=f(x-2(m-1)+2(m-1))$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times f(x-2(m-1))$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times\left\{4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2(m-1)}-1\right\}$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times\left\{2^{2m}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-1\right\}$$

이므로

$2m-2 < x < 2m-1$에서

$$f'(x)=\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times 2^{-2(m-1)}\times 2^{x}\ln 2$$

$2m-1 < x < 2m$에서

$$f'(x)=-\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times 2^{2m}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\ln 2$$

자연수 l에 대하여

$2l-2 < x < 2l-1$ 또는 $2l-1 < x < 2l$일 때

$$g(x)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(x+h)-f(x)-\{f(x-h)-f(x)\}}{h}$$
$$=2f'(x)$$

$x=2l-1$일 때

$$g(x)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(2l-1+h)-f(2l-1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\left[\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{l-1}\left\{2^{2l}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2l-1+h}-1\right\}}{h}-\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{l-1}\{2^{-2(l-1)}\times 2^{2l-1-h}-1\}}{h}\right]$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{l-1}\times\lim_{h\to 0+}\frac{(2^{-h+1}-1)-(2^{-h+1}-1)}{h}$$
$$=0$$

$x=2l$일 때

$$g(x)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(2l+h)-f(2l-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\left[\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{l}\{2^{-2l}\times 2^{2l+h}-1\}}{h}-\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{l-1}\left\{2^{2l}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2l-h}-1\right\}}{h}\right]$$
$$=3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{l}\times\lim_{h\to 0+}\frac{2^{h}-1}{h}$$
$$=3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{l}\ln 2$$

이제 $\lim_{t\to 0+}\{g(n+t)-g(n-t)\}+2g(n)=\frac{\ln 2}{2^{24}}$를 만족시키는 자연수 n의 값을 n이 홀수일 때와 n이 짝수일 때로 나누어 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) $n=2s-1$ (s는 자연수) 일 때

$$\lim_{t\to 0+}g(n+t)$$
$$=\lim_{t\to 0+}g(2s-1+t)$$
$$=\lim_{t\to 0+}2f'(2s-1+t)$$
$$=2\times\left\{-\left(-\frac{1}{2}\right)^{s-1}\right\}\times 2^{2s}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2s-1}\ln 2$$
$$=8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{s}\ln 2$$

$$\lim_{t\to 0+}g(n-t)$$
$$=\lim_{t\to 0+}g(2s-1-t)$$
$$=\lim_{t\to 0+}2f'(2s-1-t)$$
$$=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{s-1}\times 2^{-2(s-1)}\times 2^{2s-1}\ln 2$$
$$=-8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{s}\ln 2$$

그러므로

$$\lim_{t\to 0+}\{g(n+t)-g(n-t)\}+2g(n)$$
$$=8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{s}\ln 2-\left\{-8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{s}\ln 2\right\}+0$$
$$=16\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{s}\ln 2$$
$$16\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{s}\ln 2=\frac{\ln 2}{2^{24}},\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{s}=\left(\frac{1}{2}\right)^{28}$$

$s=28$이므로 $n=2\times 28-1=55$

(ⅱ) $n=2s$ (s는 자연수) 일 때

$$\lim_{t\to 0+}g(n+t)=\lim_{t\to 0+}g(2s+t)$$
$$=\lim_{t\to 0+}2f'(2s+t)$$
$$=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{s}\times 2^{-2s}\times 2^{2s}\ln 2$$
$$=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{s}\ln 2$$

$$\lim_{t\to 0+}g(n-t)=\lim_{t\to 0+}g(2s-t)$$

$$= \lim_{t \to 0+} 2f'(2s-t)$$

$$= 2 \times \left\{-\left(-\frac{1}{2}\right)^{s-1}\right\} \times 2^{2s} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2s} \ln 2$$

$$= 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{s} \ln 2$$

그러므로

$$\lim_{t \to 0+} \{g(n+t) - g(n-t)\} + 2g(n)$$

$$= 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{s} \ln 2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{s} \ln 2 + 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{s} \ln 2$$

$$= 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{s} \ln 2$$

$$4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{s} \ln 2 = \frac{\ln 2}{2^{24}},\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{s} = \left(\frac{1}{2}\right)^{26}$$

$s = 26$이므로 $n = 2 \times 26 = 52$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n의 값의 합은

$55 + 52 = 107$

186. **정답** 91

[출제의도] 미분법을 활용하여 함수를 구하는 문제를 해결한다.

$$f'(x) = (2x+a)e^{-x} - (x^2+ax+b)e^{-x}$$

$$= -\{x^2 + (a-2)x + b - a\}e^{-x}$$

$f'(x) = 0$에서 모든 실수 x에 대하여 $e^{-x} > 0$이므로

$x^2 + (a-2)x + b - a = 0$ …… ㉠

조건 (가)에서 이차방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 이 두 실근을 α, β $(\alpha < \beta)$라 하자.

이차방정식 ㉠의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1 = (a-2)^2 - 4(b-a) = a^2 + 4 - 4b > 0$

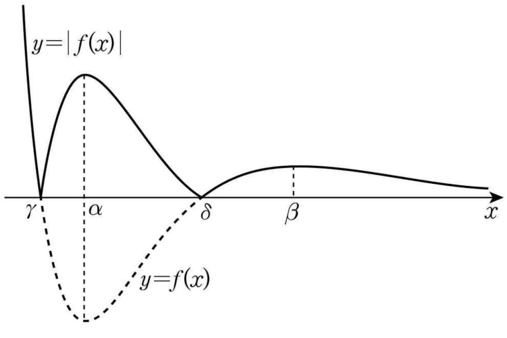
$f(x) = 0$에서 모든 실수 x에 대하여 $e^{-x} > 0$이므로

$x^2 + ax + b = 0$ …… ㉡

이차방정식 ㉡의 판별식을 D_2라 하면 $D_2 = a^2 - 4b$

(ⅰ) $D_2 > 0$인 경우

함수 $y = f(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나고, 이 두 점의 x좌표를 γ, δ $(\gamma < \delta)$라 하면 함수 $y = |f(x)|$의 그래프의 개형은 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

함수 $|f(x)|$는 $x = \alpha$, $x = \beta$에서 극대이고 $x = \gamma$, $x = \delta$에서 극소이므로 조건 (나)에서 모든 k의 값의 합은 이차방정식 ㉠의 서로 다른 두 실근 α, β와 이차방정식 ㉡의 서로 다른 두 실근 γ, δ의 합과 같다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

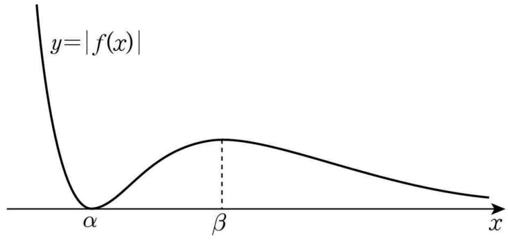
$(\alpha+\beta) + (\gamma+\delta) = (2-a) + (-a) = 3$

$a = -\frac{1}{2}$

이때 a는 정수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $D_2 = 0$인 경우

함수 $y = f(x)$의 그래프가 x축에 접하고, 이 접점의 x좌표는 α이므로 함수 $y = |f(x)|$의 그래프의 개형은 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

함수 $|f(x)|$는 $x = \beta$에서 극대이고 $x = \alpha$에서 극소이므로 조건 (나)에서 모든 k의 값의 합은 이차방정식 ㉠의 서로 다른 두 실근 α, β의 합과 같다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

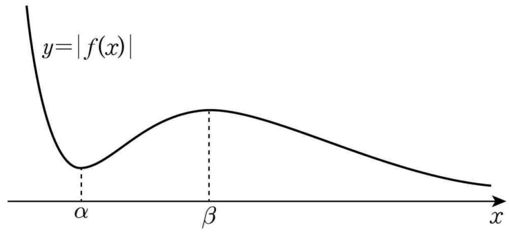
$\alpha + \beta = 2 - a = 3$, $a = -1$

$D_2 = (-1)^2 - 4b = 0$, $b = \frac{1}{4}$

이때 b는 정수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $D_2 < 0$인 경우

함수 $y = f(x)$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 함수 $y = |f(x)|$의 그래프의 개형은 [그림 3]과 같다.



[그림 3]

함수 $|f(x)|$는 $x = \beta$에서 극대이고 $x = \alpha$에서 극소이므로 조건 (나)에서 모든 k의 값의 합은 이차방정식 ㉠의 서로 다른 두 실근 α, β의 합과 같다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha + \beta = 2 - a = 3$, $a = -1$

$D_1 = (-1)^2 + 4 - 4b > 0$, $b < \frac{5}{4}$

$D_2 = (-1)^2 - 4b < 0$, $b > \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4} < b < \frac{5}{4}$이고 b는 정수이므로 $b = 1$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 조건을 만족시키는 정수 a, b의 값이 $a = -1$, $b = 1$이므로

$f(x)=\left(x^2-x+1\right)e^{-x}$

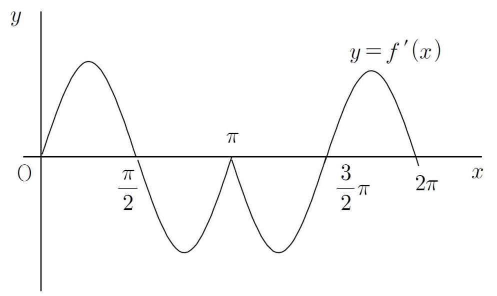
따라서 $f(10)=\left(10^2-10+1\right)e^{-10}=91e^{-10}$이므로 $p=91$

187. **정답** 125

[출제의도] 주어진 조건을 이용하여 극값을 갖는 x의 값을 구할 수 있는가?

$$f'(x)=|\sin x|\cos x$$
$$=\begin{cases}\sin x\cos x & (\sin x\ge 0)\\ -\sin x\cos x & (\sin x<0)\end{cases}$$
$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sin 2x & (\sin x\ge 0)\\ -\dfrac{1}{2}\sin 2x & (\sin x<0)\end{cases}$$

이때 함수 $y=\sin 2x$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$이므로 함수 $y=f'(x)$의 그래프의 개형을 $0\le x\le 2\pi$에서만 그러보면 다음과 같다.



또한

$$h(x)=\int_0^x \{f(t)-g(t)\}\,dt$$

에서

$h'(x)=f(x)-g(x)$

이므로 $h'(x)=0$ 즉 $f(x)=g(x)$를 만족시키면서 그 값의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 바뀌는 경우이다.

이때 $y=\sin 2x$의 대칭성을 이용하여 양수 a의 값을 작은 수부터 차례대로 구하면

$\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \pi,\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi,\ 2\pi$

이므로

$a_6=2\pi,\ a_2=\dfrac{3}{4}\pi$

따라서

$$\frac{100}{\pi}\times\left(a_6-a_2\right)=\frac{100}{\pi}\times\left(2\pi-\frac{3}{4}\pi\right)$$
$$=125$$

188. **정답** 16

[출제의도] 미분을 이용하여 함수의 그래프를 개형을 그릴 수 있으며 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

$$f(x)=\frac{x^2-ax}{e^x}=\left(x^2-ax\right)e^{-x}$$

이므로

$$f'(x)=(2x-a)e^{-x}+\left(x^2-ax\right)e^{-x}\times(-1)$$
$$=e^{-x}\left\{-x^2+(a+2)x-a\right\}$$
$$=-e^{-x}\left\{x^2-(a+2)x+a\right\}$$

이때, $f'(x)=0$에서

$x^2-(a+2)x+a=0$ …… ㉠

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(a+2)^2-4a$

$=a^2+4>0$

또, ㉠의 서로 다른 두 근은

$x=\dfrac{(a+2)\pm\sqrt{a^2+4}}{2}$ …… ㉡

이때, $a>0$이므로

$a+2=\sqrt{(a+2)^2}>\sqrt{a^2+4}$

그러므로 두 양의 실근을 갖는다.

㉡의 두 근을 $\alpha,\ \beta\ (0<\alpha<\beta)$라 하면 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

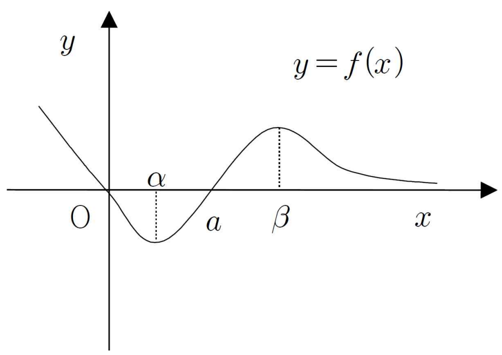
이때,

$f(0)=0,\ f(a)=0$

이고

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-ax}{e^x}=0$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



또,

$$f''(x)=e^{-x}\left\{x^2-(a+2)x+a\right\}-e^{-x}\{2x-(a+2)\}$$
$$=e^{-x}\left\{x^2-(a+4)x+2a+2\right\}$$

이때, $f''(x)=0$에서

$x^2-(a+4)x+2a+2=0$ …… ㉡

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(a+4)^2-4\times 1\times(2a+2)$

$=a^2+8>0$

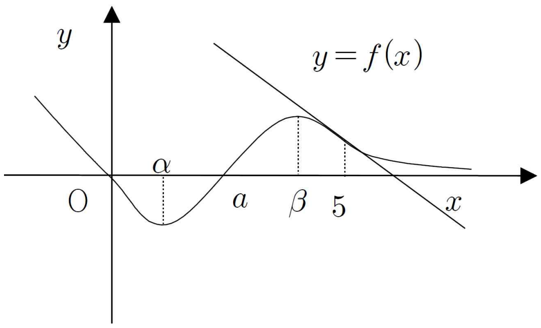
그러므로 함수 $f(x)$가 변곡점을 갖는 x의 값의 개수는 2이다.

한편, 방정식

$f(x)=f'(x)(x-t)+f(t)$

의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수

$y=f(x),\ y=f'(t)(x-t)+f(t)$
의 그래프의 교점의 개수이다. 이때, 직선 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선이다.
한편, 함수 $g(x)$가 $t=a$에서 연속이면
$g(a)=\lim_{t\to a}g(t)$
이므로
$g(a)+\lim_{t\to a}g(t)$
의 값은 짝수이어야 한다.
그런데
$g(5)+\lim_{t\to 5}g(t)=5$ …… ㉢
이므로 함수 $g(t)$는 $t=5$에서 불연속이다. 함수 $g(t)$가 불연속이 되는 t의 값은 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값이거나 변곡점을 갖는 x의 값이다.
한편, 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값을 m이라 하면 함수 $g(t)$는 $t=m$에서 극한값을 갖지 않는다.
또, 함수 $f(x)$가 변곡점을 갖는 x의 값을 n이라 하면 함수 $g(t)$는 $t=n$에서 극한값을 갖는다.
그러므로 ㉢을 만족시키는 t의 값은 함수 $f(x)$가 변곡점을 갖는 x의 값 중 큰 값이다.



즉, 함수 $f(x)$는 $X=5$에서 변곡점을 갖고 이때
$\lim_{t\to 5}g(t)=3,\ g(5)=2$
이므로 조건을 만족시킨다.
따라서, $x=5$가 방정식 ㉡의 근이므로 대입하면
$5^2-(a+4)\times 5+2a+2=0$
$-3a+7=0$
$a=\frac{7}{3}$ …… ㉢
한편,
$\lim_{t\to k-}g(t)\neq\lim_{t\to k+}g(t)$
를 만족시키는 k의 값은 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값이다. ㉠에 ㉢을 대입하면
$x^2-\left(\frac{7}{3}+2\right)x+\frac{7}{3}=0$
$x^2-\frac{13}{3}x+\frac{7}{3}=0$
따라서, 구하는 모든 실수 k의 값의 합은 근과 계수의 관계를 이용하면 $\frac{13}{3}$ 이므로
$p+q=3+13=16$

189. 정답 135
[출제의도] 삼각함수의 극한과 미분을 활용하여 문제해결하기
$f(x)=a\cos x+x\sin x+b$에서
$f'(x)=(1-a)\sin x+x\cos x$
$\cos x=0$이면 $\sin x\neq 0$이고 $a<1$이므로 $f'(x)\neq 0$
그러므로 $f'(x)=0$이면 $\cos x\neq 0$이고
$f'(x)=0$에서
$x\cos x=(a-1)\sin x$
$\tan x=\frac{x}{a-1}$ …… ㉠
함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{a-1}$는 모두 원점에 대하여 대칭이고
$a<1$에서 직선 $y=\frac{x}{a-1}$의 기울기가 음수이므로
$-\pi<x<\pi$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{a-1}$는 원점을 포함한 서로 다른 세 점에서 만난다.
조건 (가)에서 원점을 제외한 두 점의 x좌표는 $\alpha,\ \beta$이고 원점을 제외한 두 점은 원점에 대하여 대칭이므로 $\alpha=-\beta$이다.
조건 (나)에서
$\frac{1}{\beta}=-\frac{\tan\beta-\tan(-\beta)}{\beta-(-\beta)}=-\frac{\tan\beta}{\beta}$
$\tan\beta=-1$
$0<\beta<\pi$이므로 $\beta=\frac{3}{4}\pi,\ \alpha=-\frac{3}{4}\pi$
㉠에 $x=\frac{3}{4}\pi$를 대입하면
$\tan\frac{3}{4}\pi=\frac{3}{4(a-1)}\pi,\ -4(a-1)=3\pi$
$a=1-\frac{3}{4}\pi$ …… ㉡
$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=c$에서 $\lim_{x\to 0}x^2=0$이므로
$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}(a\cos x+x\sin x+b)=a+b=0$
$b=-a$이고
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{a(\cos x-1)+x\sin x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{a(\cos x-1)}{x^2}+\frac{\sin x}{x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{a(\cos x-1)(\cos x+1)}{x^2(\cos x+1)}+\frac{\sin x}{x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{a\sin^2 x}{x^2(\cos x+1)}+\frac{\sin x}{x}\right\}$$
$$=-\frac{a}{2}+1=c$$
㉡에서 $c=-\frac{a}{2}+1=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{3}{4}\pi\right)+1=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\pi$

따라서

$$f\left(\frac{\beta-\alpha}{3}\right)+c=f\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\pi$$
$$=\frac{\pi}{2}-\left(1-\frac{3}{4}\pi\right)+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\pi$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{13}{8}\pi=p+q\pi$$

에서 $p=-\frac{1}{2}$, $q=\frac{13}{8}$ 이므로 $120\times(p+q)=135$

190. **정답** 208

[출제의도] 여러 가지 미분법을 활용하여 추론하기

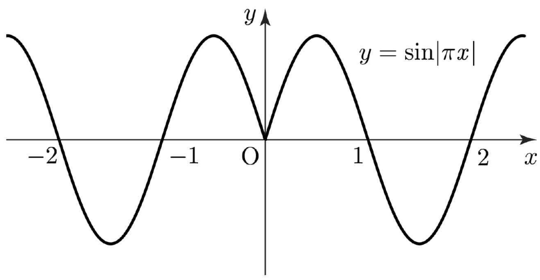
모든 자연수 n에 대하여

$g(a_n)=\sin|\pi f(a_n)|=0$이므로

$f(a_n)$의 값은 정수이다.

$\cos\{\pi f(a_n)\}=\begin{cases}1 & (f(a_n)=2p)\\ -1 & (f(a_n)=2p-1)\end{cases}$(단, p는 정수) …… ㉠

함수 $y=\sin|\pi x|$의 그래프는 그림과 같다.



$-1<x<0$ 또는 $0<x<1$일 때

$\sin|\pi x|>0$

$f(a_4)=0$이면 $g(a_4)=\sin|\pi f(a_4)|=0$이고,

$f(a_3)$과 $f(a_5)$의 값은 각각 -1 또는 0 또는 $1 a_3<x<a_4$ 또는

$a_4<x<a_5$일 때

$0<|f(x)|<1$이므로 $g(x)=\sin|\pi f(x)|>0$

함수 $g(x)$는 $x=a_4$에서 극대가 아니므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $f(a_4)\neq 0$

함수 $g(x)$가 $x=a_4$에서 미분가능하고

조건 (가)에 의하여 $g'(a_4)=0$

$$g(x)=\begin{cases}\sin\{\pi f(x)\} & (f(x)\geq 0)\\ -\sin\{\pi f(x)\} & (f(x)<0)\end{cases}$$

$$g'(x)=\begin{cases}\pi f'(x)\cos\{\pi f(x)\} & (f(x)>0)\\ -\pi f'(x)\cos\{\pi f(x)\} & (f(x)<0)\end{cases}$$

$$g''(x)=\begin{cases}\pi f''(x)\cos\{\pi f(x)\} \\ \quad -\pi^2\{f'(x)\}^2\sin\{\pi f(x)\} & (f(x)>0)\\ -\pi f''(x)\cos\{\pi f(x)\} \\ \quad +\pi^2\{f'(x)\}^2\sin\{\pi f(x)\} & (f(x)<0)\end{cases}$$

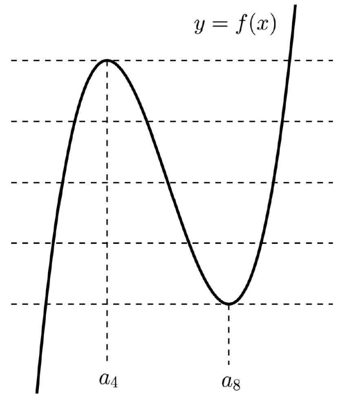
에서 $f'(a_4)=0$

위와 같은 방법으로 $f(a_8)\neq 0$이고 $f'(a_8)=0$

그러므로 $f'(x)=3(x-a_4)(x-a_8)$

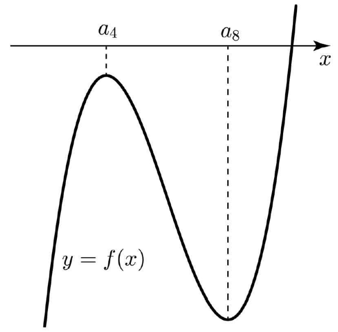
$f''(a_4)<0$, $f''(a_8)>0$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



그러므로 $f(a_8)=f(a_4)-4$이다.

(i) $f(a_4)<0$인 경우



함수 $g(x)$가 $x=a_4$에서 극대이므로

$g''(a_4)=-\pi f''(a_4)\cos\{\pi f(a_4)\}<0$

$f''(a_4)<0$이므로 $\cos\{\pi f(a_4)\}<0$

㉠에 의하여 $\cos\{\pi f(a_4)\}=-1$

$f(a_4)=2q+1$ (단, q는 음의 정수)

$f(a_8)=f(a_4)-4=2q-3$에서

$\cos\{\pi f(a_8)\}=-1$이고

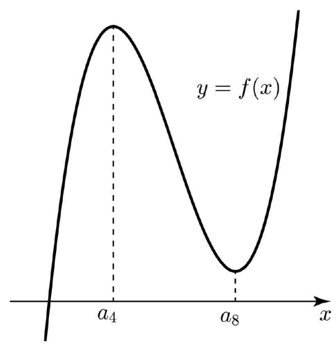
$f''(a_8)>0$이므로

$g''(a_8)=-\pi f''(a_8)\cos\{\pi f(a_8)\}>0$

함수 $g(x)$가 $x=a_8$에서 극소이므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $f(a_8)>0$인 경우



함수 $g(x)$가 $x=a_8$에서 극대이므로

$g''(a_8)=-\pi f''(a_8)\cos\{\pi f(a_8)\}<0$

$f''(a_8)>0$이므로 $\cos\{\pi f(a_8)\}>0$

㉠에 의하여 $\cos\{\pi f(a_8)\}=1$

$f(a_8)=2r$ (단, r는 자연수)

$f(a_4)=f(a_8)+4=2r+4$에서

$\cos\{\pi f(a_4)\}=1$이고

$f''(a_4)<0$이므로

$g''(a_4)=-\pi f''(a_4)\cos\{\pi f(a_4)\}>0$

함수 $g(x)$가 $x=a_4$에서 극소이므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(iii) $f(a_8)<0<f(a_4)$인 경우

$f(a_4)-4=f(a_8)<0<f(a_4)$이므로

$0<f(a_4)<4$

$f(a_4)=1$ 또는 $f(a_4)=2$ 또는 $f(a_4)=3$

함수 $g(x)$가 $x=a_4$에서 극대이므로

$g''(a_4)=-\pi f''(a_4)\cos\{\pi f(a_4)\}<0$

$f''(a_4)<0$이므로 $\cos\{\pi f(a_4)\}>0$

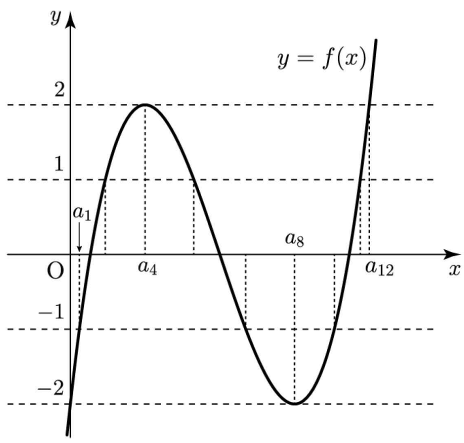
㉠에 의하여 $\cos\{\pi f(a_4)\}=1$

$f(a_4)=2s$ (단, s는 자연수)

그러므로 $f(a_4)=2$이고 $f(a_8)=-2$

조건 (나)에 의하여 $f(a_8)=f(0)=-2$

$m=8$



$f(x)=x(x-a_8)^2-2$

$f'(x)=(x-a_8)^2+2x(x-a_8)=3(x-a_8)\left(x-\frac{a_8}{3}\right)$

$f'(a_4)=0$에서 $a_4=\frac{a_8}{3}$

$f(a_4)=a_4(a_4-a_8)^2-2=2$이므로

$\frac{a_8}{3}\left(-\frac{2a_8}{3}\right)^2-2=2,\ a_8=3$

$f(x)=x(x-3)^2-2$

$f(m)=f(8)=8\times5^2-2=198$이고

$k\ge8$일 때 $f(a_k)=k-10$이므로

따라서 $f(a_k)\le f(8)$인 k의 최댓값은 208

191. 정답 31

[출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구한 후 함숫값을 구할 수 있는가?

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a>0$, b, c, d는 상수)

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

이므로

$f(3)=27a+9b+3c+d=\frac{1}{2}$ …… ㉠

$f'(3)=27a+6b+c=0$ …… ㉡

조건 (가)에서

$h(0)=g(f(0))=g(d)=e^{\sin\pi d}-1=0$

$e^{\sin\pi d}=1$, $\sin\pi d=0$

따라서, d는 정수이다.

또한,

$g'(x)=e^{\sin\pi x}\times\pi cos\pi x$

$h'(x)=g'(f(x))\times f'(x)$

이므로

$h'(0)=g'(f(0))\times f'(0)$

$=g'(d)\times c$

$=e^{\sin\pi d}\times\pi cos\pi d\times c$

$=\pi cos\pi d\times c=0$

그런데, $\cos\pi d\neq0$이므로 $c=0$

따라서, ㉠, ㉡에서

$27a+9b+d=\frac{1}{2}$ …… ㉢

$9a+2b=0$ …… ㉣

이고 $a>0$이므로 $b<0$이고 ㉠−㉡에서

$3b+d=\frac{1}{2}$ 이므로 $d>0$

즉, d는 자연수이다.

따라서 $f'(0)=c=0$ 이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 $f(0)=d$, $x=3$에서 극솟값이 $\frac{1}{2}$이다.

즉, $0<x<3$에서 $f(3)<f(x)<f(0)$

이므로

$\frac{1}{2}<f(x)<d$

그런데 조건 (나)에 의해서 열린구간

$(0,\ 3)$에서 방정식

$h(x)=g(f(x))=e^{\sin\pi f(x)}-1=1$

즉, $e^{\sin\pi f(x)}=2$, $\sin\pi f(x)=\ln2$가

서로 다른 실근 개수가 7이고 함수 $y=\sin\pi t$의 주기는 2이므로

$d=8$

㉢, ㉣에서

$a=\frac{5}{9}$, $b=-\frac{5}{2}$

이므로

$f(x)=\frac{5}{9}x^3-\frac{5}{2}x^2+8$

따라서

$f(2)=\frac{40}{9}-10+8=\frac{22}{9}$

즉, $p=9,\ q=22$이므로

$p+q=31$

192. 정답 10

[출제의도] 합성함수의 미분법과 역함수의 미분법을 이용하여 문제를 해결한다.

$f(x)=-\frac{ax^3+bx}{x^2+1}$에서

$f'(x)=-\frac{(3ax^2+b)(x^2+1)-(ax^3+bx)(2x)}{(x^2+1)^2}$ 이므로

$f'(x)=-\frac{ax^4+(3a-b)x^2+b}{(x^2+1)^2}$ …… ㉠

모든 실수 x에 대하여 $x^2+1\neq 0$이므로 함수 $f'(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\neq 0$이고 $f'(0)=-b<0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)<0$이다.

$h(x)=g(f(x))=f(f(x))-x$이므로

$h(0)=f(f(0))-0=f(0)=0$이다.

조건 (가)에서 $g(2)=f(2)-f^{-1}(2)=h(0)=0$이므로

$f(2)=f^{-1}(2)=t$ (t는 상수)라 하면 $f(t)=2$이다.

모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로

$f(-2)=-f(2)=-t$이다.

즉 두 점 $(t,\ 2),\ (-2,\ -t)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프 위에 있다.

$t\neq -2$일 때, 두 점 $(t,\ 2),\ (-2,\ -t)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{2-(-t)}{t-(-2)}=1$이므로 평균값 정리에 의하여 $f'(c)=1$인 상수 c가 존재한다. 그러나 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)<0$이므로 모순이다. 즉 $t=-2$

$f(2)=-2$에서 $-\frac{8a+2b}{5}=-2$

그러므로 $4a+b=5$ …… ㉡

$f^{-1}(2)=-2$이므로 역함수의 미분법에 의하여

$g'(2)=f'(2)-(f^{-1})'(2)=f'(2)-\frac{1}{f'(-2)}$

㉠에서 모든 실수 x에 대하여 $f'(-x)=f'(x)$이므로

$f'(-2)=f'(2)$이다.

즉 $g'(2)=f'(2)-\frac{1}{f'(2)}$

$h(x)=f(f(x))-x$에서 $h'(x)=f'(f(x))f'(x)-1$이므로

$h'(2)=f'(f(2))f'(2)-1=f'(-2)f'(2)-1=\{f'(2)\}^2-1$

조건 (나)에서 $g'(2)=-5h'(2)$이므로

$f'(2)-\frac{1}{f'(2)}=-5\{f'(2)\}^2+5$

$5\{f'(2)\}^3+\{f'(2)\}^2-5f'(2)-1=0$

$\{5f'(2)+1\}\{f'(2)+1\}\{f'(2)-1\}=0$

$f'(x)<0$이므로 $f'(2)=-\frac{1}{5}$ 또는 $f'(2)=-1$이다.

㉠에서 $f'(2)=-\frac{16a+4(3a-b)+b}{(4+1)^2}=-\frac{28a-3b}{25}$

(ⅰ) $f'(2)=-\frac{1}{5}$일 때, $-\frac{28a-3b}{25}=-\frac{1}{5}$이므로

$28a-3b=5$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하면 $a=\frac{1}{2},\ b=3$이다.

(ⅱ) $f'(2)=-1$일 때, $-\frac{28a-3b}{25}=-1$이므로

$28a-3b=25$ …… ㉣

㉡, ㉣을 연립하면 $a=1,\ b=1$이므로 모순이다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $4(b-a)=4\times\left(3-\frac{1}{2}\right)=10$

193. 정답 11

[출제의도] 여러 가지 함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

곡선 $y=\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})$과 직선 $y=x+t$가 만나는 두 점을

$\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha+t),\ \mathrm{Q}(\beta,\ \beta+t)\ (\alpha<\beta)$

로 놓으면

$f(t)=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2}$

$\quad=\sqrt{2}(\beta-\alpha)$

이때, $\alpha,\ \beta$는 방정식

$\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})=x+t$

의 서로 다른 두 실근이므로

$1+e^{2x}-e^{-2t}=e^{x+t}$

$e^{2x}-e^t\times e^x+1-e^{2t}=0$

$e^x=k\ (k>0)$로 놓으면

$k^2-e^tk+1-e^{-2t}=0$

따라서,

$k=\frac{e^t\pm\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{2}$

이므로

$e^\alpha=\frac{e^t-\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{2}$

$e^\beta=\frac{e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{2}$

즉

$\alpha=\ln\frac{e^t-\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{2}$

$\beta=\ln\frac{e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{2}$

이므로

$\beta-\alpha=\ln\frac{e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{e^t-\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}$

$\quad=\ln\frac{\left(e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}\right)^2}{4(1-e^{-2t})}$

$\quad=2\ln\left(e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}\right)-\ln 4-\ln(1-e^{-2t})$

따라서

$g(t)=2\ln\left(e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}\right)-\ln 4-\ln\left(1-e^{-2t}\right)$

라 하면

$$g'(t)=2\times\frac{e^t+\dfrac{2e^{2t}-8e^{-2t}}{2\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}}{e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}-\frac{2e^{-2t}}{1-e^{-2t}}$$

이므로

$$g'(\ln 2)=2\times\frac{2+\dfrac{8-2}{2}}{2+1}-\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$$

즉, $f(t)=\sqrt{2}\,g(t)$에서

$f'(\ln 2)=\sqrt{2}\,g'(\ln 2)=\dfrac{8}{3}\sqrt{2}$

이므로 $p=3,\ q=8$

따라서 $p+q=11$

194. 정답 129

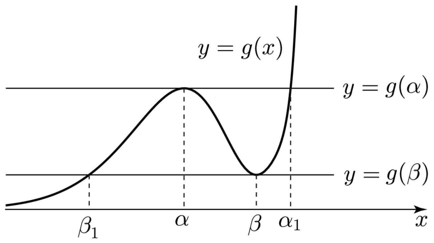
[출제의도] 미분법을 활용하여 추론하기

$f(x)=ax^2+bx+c$ ($a,\ b,\ c$는 상수)라 하면

$g'(x)=e^x\{f(x)+f'(x)\}$

$\quad\ =e^x\{ax^2+(2a+b)x+b+c\}$

함수 $g(x)$가 극값을 갖지 않으면 조건 (가)를 만족시키지 않으므로 함수 $g(x)$는 극값을 갖는다.



함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 극댓값, $x=\beta$에서 극솟값을 갖는다고 하면

$g'(x)=e^x\{a(x-\alpha)(x-\beta)\}$

함수 $h(k)$는 $k=t$ $(t\neq g(\alpha),\ t\neq g(\beta))$에서

$\lim\limits_{k\to t-}h(k)=\lim\limits_{k\to t+}h(k)=h(t)$

그러므로 함수 $h(k)$는

$k=t$ $(t\neq g(\alpha),\ t\neq g(\beta))$에서 연속이다.

조건 (가)에 의하여 함수 $h(k)$가 $k=t$에서 불연속인 t의 개수가 1이므로

함수 $h(k)$는

$k=g(\alpha)$에서 연속이고 $k=g(\beta)$에서 불연속

또는

$k=g(\alpha)$에서 불연속이고 $k=g(\beta)$에서 연속이다.

(ⅰ) 함수 $h(k)$가 $k=g(\alpha)$에서 연속이고 $k=g(\beta)$에서 불연속인 경우

$\lim\limits_{k\to g(\alpha)-}h(k)=2\alpha+\alpha_1$

$\lim\limits_{k\to g(\alpha)+}h(k)=\alpha_1$

$h(g(\alpha))=\alpha+\alpha_1$이므로

$\lim\limits_{k\to g(\alpha)-}h(k)=\lim\limits_{k\to g(\alpha)+}h(k)=h(g(\alpha))$에서

$2\alpha+\alpha_1=\alpha_1=\alpha+\alpha_1$

그러므로 $\alpha=0$

함수 $h(k)$는 $k=g(\beta)$에서 불연속이므로

$\lim\limits_{k\to g(\beta)+}h(k)-\lim\limits_{k\to g(\beta)-}h(k)=2\beta\neq 0$

조건 (나)에 의하여 $\beta=1,\ g(\beta)=3e$

$g'(0)=0,\ g'(1)=0$이므로

$g'(x)=e^x\{ax(x-1)\}$

$g(x)=e^x\{a(x^2-3x+3)\}$

$g(1)=3e$이므로 $a=3$

최고차항의 계수가 3이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) 함수 $h(k)$가 $k=g(\alpha)$에서 불연속이고 $k=g(\beta)$에서 연속인 경우

$\lim\limits_{k\to g(\beta)-}h(k)=\beta_1$

$\lim\limits_{k\to g(\beta)+}h(k)=2\beta+\beta_1$

$h(g(\beta))=\beta+\beta_1$이므로

$\lim\limits_{k\to g(\beta)-}h(k)=\lim\limits_{k\to g(\beta)+}h(k)=h(g(\beta))$에서

$\beta_1=2\beta+\beta_1=\beta+\beta_1$

그러므로 $\beta=0$

함수 $h(k)$는 $k=g(\alpha)$에서 불연속이므로

$\lim\limits_{k\to g(\alpha)+}h(k)-\lim\limits_{k\to g(\alpha)-}h(k)=-2\alpha\neq 0$

조건 (나)에 의하여 $\alpha=-1,\ g(\alpha)=3e$

$g'(0)=0,\ g'(-1)=0$이므로

$g'(x)=e^x\{ax(x+1)\}$

$g(x)=e^x\{a(x^2-x+1)\}$

$g(-1)=3e$이므로 $a=e^2$

$g(x)=e^{x+2}(x^2-x+1)$

따라서 $g(-6)\times g(2)=43e^{-4}\times 3e^4=129$

195. 정답 144

[출제 의도] 치환적분법을 활용하여 문제 해결하기

$f'(x)=\ln\left(e^{|x|}-a\right)$

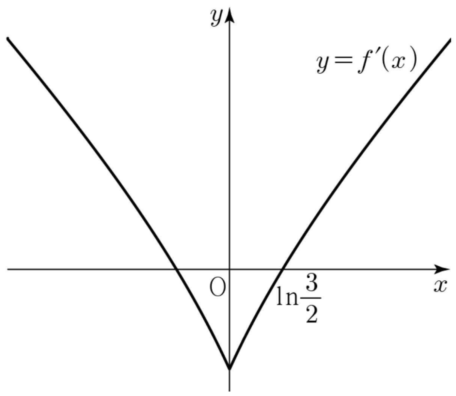
조건 (가)에 의하여 $f'\left(\ln\dfrac{3}{2}\right)=\ln\left(\dfrac{3}{2}-a\right)=0$이므로 $a=\dfrac{1}{2}$

$f'(x)=\ln\left(e^{|x|}-\dfrac{1}{2}\right)$

모든 실수 x에 대하여 $f'(-x)=f'(x)$이므로 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, $f'(0)=\ln\dfrac{1}{2}<0$

$x>0$일 때, $f''(x)=\dfrac{e^x}{e^x-\dfrac{1}{2}}>0$

함수 $y=f'(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



모든 실수 x에 대하여 $f'(-x)=f'(x)$이므로 $f(x)=-f(-x)+C$ (단, C는 적분상수) $f(0)=0$이므로 $C=0$

그러므로 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$

$x \geq 0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\ln\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$\ln\frac{1}{2}$	$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	↘	극소	↗

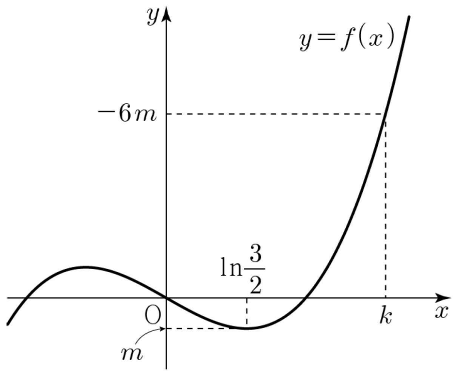
함수 $f(x)$의 극솟값을 m $(m<0)$이라 하면, $f\left(\ln\frac{3}{2}\right)=m$

조건 (나)에 의하여

$f\left(-\ln\frac{3}{2}\right)=-f\left(\ln\frac{3}{2}\right)=-m$

$f(k)=-6m$ $\left(k>\ln\frac{3}{2}\right)$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$$\int_0^k \frac{|f'(x)|}{f(x)-f(-k)}dx=\int_0^k \frac{|f'(x)|}{f(x)+f(k)}dx$$

$$=\int_0^{\ln\frac{3}{2}} \frac{-f'(x)}{f(x)+f(k)}dx+\int_{\ln\frac{3}{2}}^k \frac{f'(x)}{f(x)+f(k)}dx$$

$$=\int_0^{\ln\frac{3}{2}} \frac{-\{f(x)+f(k)\}'}{f(x)+f(k)}dx$$

$$+\int_{\ln\frac{3}{2}}^k \frac{\{f(x)+f(k)\}'}{f(x)+f(k)}dx$$

$$=-\Big[\ln|f(x)+f(k)|\Big]_0^{\ln\frac{3}{2}}$$

$$+\Big[\ln|f(x)+f(k)|\Big]_{\ln\frac{3}{2}}^k$$

$$=-\Big[\ln\{f(x)+f(k)\}\Big]_0^{\ln\frac{3}{2}}$$

$$+\Big[\ln\{f(x)+f(k)\}\Big]_{\ln\frac{3}{2}}^k$$

$$=-\ln(m-6m)+\ln(0-6m)$$

$$+\ln(-6m-6m)-\ln(m-6m)$$

$$=\ln\frac{-6m}{-5m}+\ln\frac{-12m}{-5m}$$

$$=\ln\frac{6}{5}+\ln\frac{12}{5}$$

$$=\ln\frac{72}{25}$$

이므로 $p=\ln\frac{72}{25}$

따라서 $100\times a\times e^p=100\times\frac{1}{2}\times\frac{72}{25}=144$

196. 정답 283

조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -3)$에서 감소하는 함수이다.

또, 조건 (나)에서 $x>-3$인 모든 실수 x에 대하여

$g(x+3)\{f(x)-f(0)\}^2=f'(x)$ …… ㉠

이고 함수 $g(x)$는 구간 $(0,\ \infty)$에서 $g(x)\geq 0$이므로 ㉠의 좌변은 0이상인 실수이다.

그러므로 구간 $(-3,\ \infty)$에서

$f'(x)\geq 0$

또, ㉠에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)=0$

이때 함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 4차함수이므로

$f'(x)=4x^2(x+3)$

즉,

$f'(x)=4x^3+12x^2$

이때,

$f(x)=x^4+4x^3+C$ (C는 상수)

이 식을 ㉠에 대입하면

$g(x+3)\times(x^4+4x^3)^2=4x^3+12x^2$ …… ㉡

한편,

$\int_4^5 g(x)\,dx$ …… ㉢

에서 구간 $[4,\ 5]$에서의 $g(x)$가 가지는 값은 구간 $[1,\ 2]$에서의 $g(x+3)$가 가지는 값과 같다.

한편, ㉡의 좌변의 식 x^4+4x^3은 구간 $[1,\ 2]$에서

$x^4+4x^3\neq 0$

이므로

$g(x+3)=\dfrac{4x^3+12x^2}{(x^4+4x^3)^2}$

또, ㉢에서

$x-3=t$

로 놓으면 $\dfrac{dx}{dt}=1$이고 $x=4$일 때 $t=1$,

$x=5$일 때 $t=2$이므로

$\int_4^5 g(x)dx$

$=\int_1^2 g(x+3)dx$

$=\int_1^2 \dfrac{4x^3+12x^2}{(x^4+4x^3)^2}dx$ …… ㉣

이때 $x^4+4x^3=s$로 놓으면

$4x^3+12x^2=\dfrac{ds}{dx}$

이고 $x=1$일 때 $s=5$, $x=2$일 때 $s=48$이므로 ㉣은

$\int_1^2 \dfrac{4x^3+12x^2}{(x^4+4x^3)^2}dx$

$=\int_6^{48}\dfrac{1}{s^2}ds$

$=\left[-\dfrac{1}{s}\right]_6^{48}$

$=\left(-\dfrac{1}{48}\right)+\dfrac{1}{6}$

$=\dfrac{43}{240}$

따라서

$p=240$, $q=43$이므로

$p+q=240+43=283$

197. **정답** 12

[출제의도] 정적분의 성질과 부분적분법을 이용하여 문제를 해결한다.

함수 $g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 하자.

조건 (가)에서

$\int_{2a}^{3a+x} g(t)dt=\int_{3a-x}^{2a+2} g(t)dt$

$G(3a+x)-G(2a)=G(2a+2)-G(3a-x)$

위 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g(3a+x)=g(3a-x)$ …… ㉠

모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립하므로

함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=3a$에 대하여 대칭이다.

$\int_{2a}^{3a+x} g(t)dt=\int_{3a-x}^{2a+2} g(t)dt$

$=\int_{3a-x}^{4a} g(t)dt+\int_{4a}^{2a+2} g(t)dt$

$\int_{2a}^{3a+x} g(t)dt=\int_{3a-x}^{4a} g(t)dt$ 에서 $\int_{4a}^{2a+2} g(t)dt=0$

조건 (가)에서 $g(x)>0$이므로 $2a+2=4a$, $a=1$

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$h(x)=f(x)+f'(x)+1=x^2+px+q$ (p, q는 상수)라 하자.

함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로

$g(4)=g(2)$, 즉 $h(4)=h(2)$

$16+4p+q=4+2p+q$에서 $p=-6$

조건 (나)에서 $h(4)=5$이므로

$16-24+q=5$에서 $q=13$

$h(x)=x^2-6x+13$에서

$h'(x)=f'(x)+f''(x)=f'(x)+2$

$\int_3^5 \{f'(x)+2a\}g(x)dx$

$=\int_3^5 \{f'(x)+2\}g(x)dx=\int_3^5 h'(x)\ln h(x)dx$

$=\Big[h(x)\ln h(x)\Big]_3^5-\int_3^5\left\{h(x)\times\dfrac{h'(x)}{h(x)}\right\}dx$

$=h(5)\ln h(5)-h(3)\ln h(3)-\{h(5)-h(3)\}$

$=8\ln 8-4\ln 4-(8-4)=-4+16\ln 2$

따라서 $m=-4$, $n=16$이므로

$m+n=12$

198. **정답** 586

[출제의도] 적분법을 활용하여 문제해결하기

$g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}-\dfrac{1}{10}f'(x)$

$\quad=\dfrac{f'(x)}{10f(x)}\{10-f(x)\}$

$g'(x)=0$이 되려면 $f'(x)=0$ 또는 $f(x)=10$

$f'(x)=2ax$이므로 $x=0$일 때에만 $f'(x)=0$

(i) 방정식 $f(x)-10=0$이 실근을 갖지 않을 때,

$f'(0)=0$, $f(x)>10$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	극대	↘

(ii) 방정식 $f(x)-10=0$이 중근을 가질 때,

$f'(0)=0$, $f(0)=10$, $f(x)\geq 10$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	극대	↘

(i), (ii)의 경우에는 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

그러므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(iii) 방정식 $f(x)-10=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때,

방정식 $f(x)-10=0$의 서로 다른 두 실근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면

$\alpha=-\beta$

$f(-x)=f(x)$이므로 $g(-x)=g(x)$

함수 $y=g(x)$의 그래프는 y축 대칭이므로

$g(\alpha)=g(\beta)$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	0	$\cdots$	β	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

(iii)의 경우에는 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극솟값을 가지므로 조건 (가)를 만족시킨다.

$f(0)=b<f(\alpha)=10$이므로

$1 \le b < 10$

$$g(0)=\ln f(0)-\frac{1}{10}(f(0)-1)$$

$$=\ln b-\frac{1}{10}(b-1)$$

$p(x)=\ln x-\dfrac{1}{10}(x-1)$이라 하면

$$p'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{10}=\frac{10-x}{10x}$$

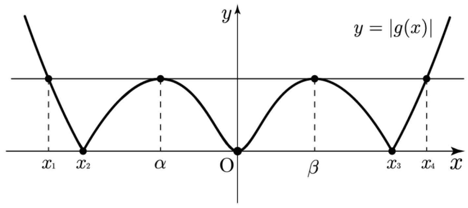
$1 \le x < 10$일 때 $p'(x)>0$이므로

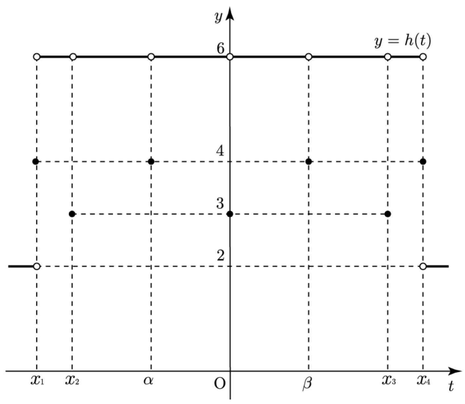
$p(x)$는 증가함수이다.

$g(0) \ge p(1)=0$

함수 $|g(x)|$의 그래프의 개형은 다음 2가지 경우와 같다.

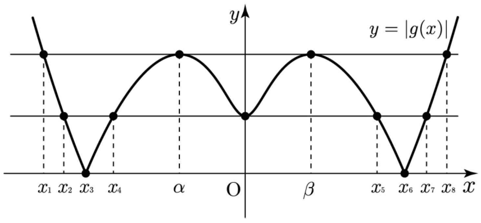
(1) $g(0)=0$일 때

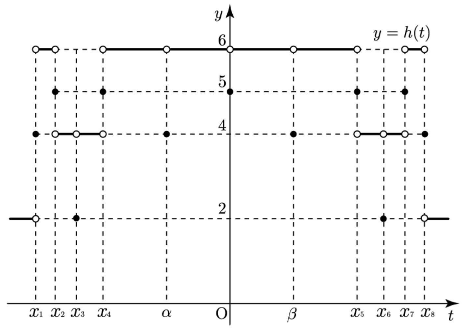




함수 $h(t)$가 $t=k$에서 불연속인 k의 값의 개수는 7이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(2) $g(0)>0$일 때





함수 $h(t)$가 $t=k$에서 불연속인 k의 값의 개수는 11이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $g(0)=0$

$0=g(0)=p(b) \ge p(1)=0$이므로

$p(b)=p(1)$

함수 $p(x)$는 $1 \le x < 10$에서

증가함수이므로 $b=1$, $f(x)=ax^2+1$

$$\int_0^a e^x f(x)\,dx$$

$$=\int_0^a (ax^2+1)e^x\,dx$$

$$=\Big[(ax^2+1)e^x\Big]_0^a-\int_0^a 2axe^x\,dx$$

$$=(a^3+1)e^a-1-\Big[2axe^x\Big]_0^a+\int_0^a 2ae^x\,dx$$

$$=(a^3+1)e^a-1-2a^2e^a+\Big[2ae^x\Big]_0^a$$

$$=(a^3-2a^2+2a+1)e^a-2a-1$$

$$me^a-19=(a^3-2a^2+2a+1)e^a-2a-1$$

따라서 $a=9$이므로

$m=a^3-2a^2+2a+1=586$

199. **정답** 115

[출제의도]

삼각함수의 극한 및 함수의 극값을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구한 후 치환적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

조건 (가)에서 $x \to 0$일 때, (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to0}\sin(\pi \times f(x))=\sin(\pi \times f(0))=0$에서

$f(0)=n$ (n은 정수)이다.

한편, 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 9이므로

$f(x)=9x^3+ax^2+bx+n$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

이 때, $h(x)=\sin(\pi \times f(x))$라 하면 $h(0)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\pi \times f(x))}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{h(x)-h(0)}{x}=h'(0)$이다. 즉, $h'(0)=0$이다.

이 때, $h'(x)=\pi f'(x) \times \cos(\pi \times f(x))$이므로

$h'(0)=\pi \times f'(0) \times \cos(n\pi)=0$에서

$f'(0)=0$

$f'(x)=27x^2+2ax+b$에서

$f'(0)=b=0$ …… ㉠

한편, 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1+}g(x)$이어야 한다.

이때, 함수 $g(x)$는 $0\le x<1$일 때 $g(x)=f(x)$이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x+1)=g(x)$이므로 $\lim_{x\to1+}g(x)=\lim_{x\to0+}g(x)$이다.

$\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=9+a+n$, $\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0+}f(x)=n$이므로

$9+a+n=n$

$a=-9$ …… ㉡

$f'(x)=27x^2-18x=9x(3x-2)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$에서 극대이고 $x=\frac{2}{3}$에서 극소이다.

조건 (나)에 의해 $f(0)\times f\left(\frac{2}{3}\right)=5$이므로

$n\times\left(n-\frac{4}{3}\right)=5$

$(3n+5)(n-3)=0$

n이 정수이므로 $n=3$ …… ㉢

㉠~㉢에 의해 $f(x)=9x^3-9x^2+3$

따라서

$$\int_0^5 xg(x)dx$$

$$=\int_0^1 xg(x)dx+\int_1^2 xg(x)dx+\int_2^3 xg(x)dx+\int_3^4 xg(x)dx+\int_4^5 xg(x)dx$$

$$=\int_0^1 xf(x)dx+\int_0^1(x+1)g(x+1)dx+\int_0^1(x+2)g(x+2)dx$$

$$+\int_0^1(x+3)g(x+3)dx+\int_0^1(x+4)g(x+4)dx$$

$$=\int_0^1 xf(x)dx+\int_0^1(x+1)f(x+1)dx+\int_0^1(x+2)f(x)dx$$

$$+\int_0^1(x+3)f(x)dx+\int_0^1(x+4)f(x)dx$$

$$=5\int_0^1 xf(x)dx+10\int_0^1 f(x)dx$$

$$=5\int_0^1(9x^4-9x^3+3x)dx+10\int_0^1(9x^3-9x^2+3)dx$$

$$=5\left[\frac{9}{5}x^5-\frac{9}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1+10\left[\frac{9}{4}x^4-3x^3+3x\right]_0^1$$

$$=\frac{21}{4}+\frac{45}{2}=\frac{111}{4}$$

따라서 $p=4$, $q=111$이므로 $p+q=4+111=115$이다.

200. **정답** 143

[출제의도] 치환적분법과 부분적분법을 활용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

조건 (가)에서 $f(1)=1$ 이므로, 조건 (나)에 의하여

$g(2)=2f(1)=2$

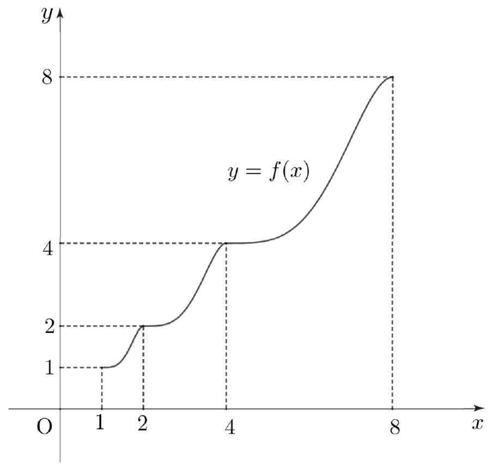
따라서, $f(2)=2$ 이므로,

$g(4)=2f(2)=4$

따라서, $f(4)=4$ 이므로,

$g(8)=2f(4)=8$

따라서, $f(8)=8$ 이다.



부분적분법에 의하여

$$\int_1^8 xf'(x)dx=\Big[\;xf(x)\Big]_1^8-\int_1^8 f(x)dx$$

$$=8f(8)-f(1)-\int_1^8 f(x)dx$$

$$=8\times8-1-\int_1^8 f(x)dx$$

$$=63-\int_1^8 f(x)dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

이 때,

$$\int_1^8 f(x)dx$$

$$=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx+\int_4^8 f(x)dx \quad \cdots\cdots ㉡$$

이고, $\int_1^2 f(x)dx=\frac{5}{4}$ …… ㉢

이다. 이 때, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 대칭성에 대하여

$$\int_2^4 f(x)dx=4\times4-2\times2-\int_2^4 g(y)dy$$

$$=12-\int_2^4 g(y)dy \quad \cdots\cdots ㉣$$

이 때, $y=2t$ 로 놓으면 치환적분법에 의하여

$\int_2^4 g(y)dy=2\int_1^2 g(2t)dt$ 이므로,

조건 (나)에서

$$\int_2^4 g(y)dy=2\int_1^2 g(2t)dt$$

$$=2\int_1^2 2f(t)dt$$

$$=4\int_1^2 f(x)dx$$

$=4\times\frac{5}{4}$

$=5$

㉣에서

$\int_2^4 f(x)\,dx=12-\int_2^4 g(y)\,dy$

$=12-5$

$=7$ …… ㉤

또, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 대칭성에 의하여

$\int_4^8 f(x)dx=8\times8-4\times4-\int_{4_8} g(y)\,dy$

$=48-\int_4^8 g(y)\,dy$ …… ㉥

이 때, $y=2t$ 로 놓으면 치환적분법에 의하여

$\int_4^8 g(y)\,dy=2\int_2^4 g(2t)\,dt$ 이므로,

조건 (나)에서

$\int_{4_8} g(y)\,dy=2\int_2^4 g(2t)\,dt$

$=2\int_2^4 2f(t)\,dt$

$=4\int_2^4 f(x)\,dx$

$=4\times7$

$=28$

㉥에서

$\int_4^8 f(x)\,dx=48-\int_4^8 g(y)\,dy$

$=48-28$

$=20$ …… ㉦

㉡, ㉢, ㉤, ㉦에서

$\int_1^8 f(x)\,dx=\int_1^2 f(x)\,dx+\int_2^4 f(x)\,dx+\int_4^8 f(x)\,dx$

$=\frac{5}{4}+7+20$

$=\frac{113}{4}$

이므로, ㉠에서

$\int_1^8 xf'(x)\,dx=63-\int_1^8 f(x)\,dx$

$=63-\frac{113}{4}$

$=\frac{139}{4}$

따라서 $p+q=4+139=143$

다른 풀이

$\int_1^8 xf'(x)\,dx$ 에서 $x=g(y)$라 하면

$x=1$일 때, $y=1$, $x=8$일 때, $y=8$이고,

$\frac{dx}{dy}=g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$ 이므로,

$\int_1^8 xf'(x)\,dx=\int_1^8 g(y)\,dy$

$=\int_1^2 g(y)\,dy+\int_2^4 g(y)\,dy+\int_4^8 g(y)\,dy$

이 때,

$\int_1^2 g(y)\,dy=2\times2-1\times-\int_1^2 f(x)\,dx$

$=3-\frac{5}{4}$

$=\frac{7}{4}$

한 편, $\int_2^4 g(y)\,dy=\int_2^4 2f\left(\frac{y}{2}\right)dy$ 에서

$\frac{y}{2}=t$ 라 하면 $y=2$일 때, $t=1$, $y=4$일 때, $t=2$이고,

$\frac{1}{2}=\frac{dt}{dy}$ 이므로,

$\int_2^4 g(y)\,dy=\int_2^4 2f\left(\frac{y}{2}\right)dy$

$=\int_1^2 4f(t)\,dt$

$=4\int_1^2 f(t)\,dt$

$=4\times\frac{5}{4}$

$=5$

또, $\int_4^8 g(y)\,dy=\int_4^8 2f\left(\frac{y}{2}\right)dy$ 에서

$\frac{y}{2}=t$ 라 하면 $y=4$일 때, $t=2$, $y=8$일 때, $t=4$이고,

$\frac{1}{2}=\frac{dt}{dy}$ 이므로,

$\int_4^8 g(y)\,dy=\int_4^8 2f\left(\frac{y}{2}\right)dy$

$=\int_2^4 4f(t)\,dt$

$=4\int_2^4 f(t)\,dt$

$=4\times\left\{4\times4-2\times2-\int_2^4 g(y)dy\right\}$

$=4(12-5)$

$=28$

따라서 $\int_1^8 xf'(x)\,dx=\int_1^8 g(y)\,dy$

$=\int_1^2 g(y)\,dy+\int_2^4 g(y)\,dy+\int_4^8 g(y)\,dy$

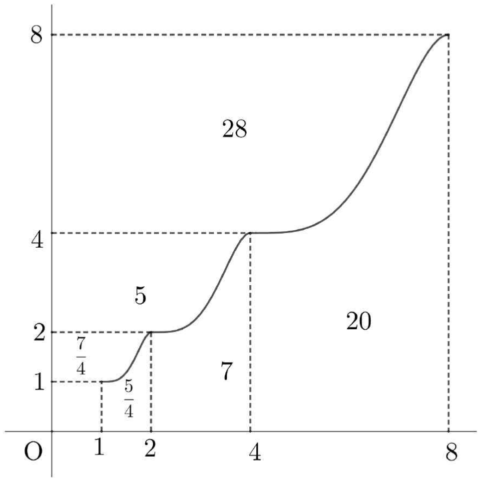
$=\frac{7}{4}+5+28$

$=\frac{139}{4}$

이므로, $p+q=4+139=143$

[참고]

조건 (나)의 성질 $g(2x)=2f(x)$에서 다음 그림과 같이 각 부분의 넓이가 대각선 방향으로 4배씩 증가함을 알 수 있다.



201. 정답 24

[출제의도] 조건을 만족시키는 급수의 합을 구할 수 있는가?

등비수열 $\{a_n\}$의 일반항을

$a_n=a_1r^{n-1}$

이라 하자. 이때 주어진 조건을 만족시키기 위해서는 $a_1\neq 0$이다.

(i) $r>1$인 경우

a_n의 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(ii) $r=1$인 경우

a_n의 값이 일정한 값을 가지므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(iii) $r=-1$인 경우

a_n의 값이 $a_1,\ -a_1,\ a_1,\ -a_1,\ a_1,\ \cdots$이 반복되므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(iv) $r<-1$인 경우

a_n의 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(v) $r=0$인 경우

a_n의 값이 첫째항을 제외하고 모두 0이므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

따라서 $-1<r<0$ 또는 $0<r<1$이다.

그런데 $b_3=-1$ 이므로 $a_3\le -1$이다.

즉 $a_1r^2\le -1$이다.

그런데 $0<r^2<1$이므로

$a_1\le -1$

따라서 $b_1=-1$이다.

또한 $a_1\le -1$ 이므로 $0<r<1$ 이면 a_n의 모든 항은 음수이므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

따라서 $-1<r<0$이다.

① $a_2=a_1r\le -1$일 때

$r\ge -\frac{1}{a_1}>0$ 이므로 모순이다.

따라서 $a_2=a_1r>-1$이므로 $b_2=a_2=a_1r$

② $b_3=-1$ 이므로 $a_3=a_1r^2\le -1$

③ $a_4=a_1r^3\le -1$일 때

$a_4=a_1r^3=a_1r^2\times r\ge -r>0$

이므로 모순이다.

즉 $a_4>-1$이므로 $b_4=a_4=a_1r^3$

④ $a_5=a_1r^4\le -1$일 때

$b_5=-1$

인데

$b_1+b_3+b_5=-3$

이므로 조건 (가)에 의하여 모순이다.

$b_5=a_5=a_1r^4$

⑤ $a_6=a_4r^2$ 이고 $a_4>-1$이므로

$a_6>-r^2>-1$

따라서

$b_6=a_6=a_1r^5$

같은 방법으로 생각하면

$b_7=a_7,\ b_8=a_8,\ b_9=a_9,\ \cdots$

이므로

$$b_n=\begin{cases}-1 & (n=1,\ n=3)\\ a_1r^{n-1} & (n=2,\ n\ge 4)\end{cases}$$

이다.

조건 (가)에서

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n-1}=-1+(-1)+a_1r^4+a_1r^6+a_1r^8+\cdots$$

$$=-2+\frac{a_1r^4}{1-r^2}$$

$$=-3$$

$\frac{a_1r^4}{1-r^2}=-1$

$a_1r^4=r^2-1$ ……㉠

조건 (나)에서

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}=a_1r+a_1r^3+a_1r^5+\cdots$$

$$=\frac{a_1r}{1-r^2}=8$$

$a_1r=8-8r^2=8(1-r^2)$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$a_1r=-8a_1r^4$

이므로

$r^3=-\frac{1}{8}$

즉 $r=-\frac{1}{2}$이므로 ㉡에 대입하면

$-\frac{1}{2}a_1=6,\ a_1=-12$

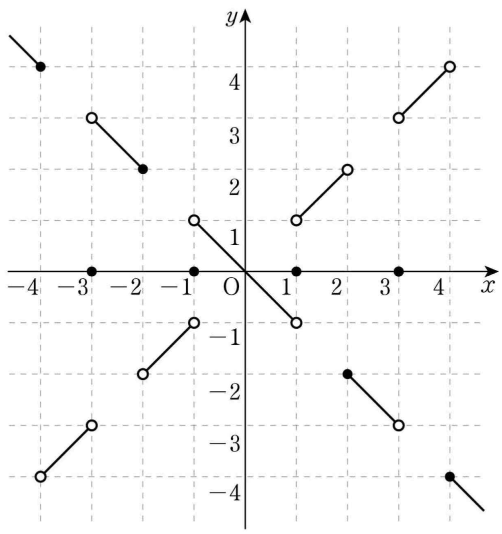
따라서 $a_n=-12\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|-12\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right|$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}12\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$=\frac{12}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=24$$

[다른 풀이]
$b_2,\ b_3,\ \cdots$의 값을 조사하면 다음과 같다.
(1) b_2의 값
$a_1\le -1$이고 $-1<r<0$이므로 $a_2>0$
(2) b_3의 값
주어진 조건으로부터 $b_3=-1$
(3) b_4의 값
$a_3\le -1$이고 $-1<r<0$이므로 $a_4>0$
그러므로
$b_4=a_4$
그러므로 $a_{2n}>0$이므로 $b_{2n}=a_{2n}$
조건 (나)에서
$$\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}=8$$
이므로
$ar+ar^3+ar^5+\cdots=8$
한편, 조건 (가)에서
$$\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n-1}=-3 \qquad \cdots\cdots ㉡$$
이고 $b_1=b_3=-1$이고 $b_5=ar^4,\ b_7=ar^6,\ \cdots$라 하면 ㉡은
$$(-1)+(-1)+r^3\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}=-3$$
$r^3\times 8=-1$
$r=-\frac{1}{2}$

202. **정답** 25
[출제의도] 수열의 극한으로 정의된 함수의 그래프에 대한 문제를 해결한다.

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}$에서
$|x|<1$이면 $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로
$f(x)=-x$
$|x|=1$이면 $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$이므로
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x(x^{2n}-1)}{x^{2n}+1}=0$$
$|x|>1$이면 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}=0$이므로
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x-x\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}}=x$$
그러므로
$$f(x)=\begin{cases}-x & (|x|<1)\\ 0 & (|x|=1)\\ x & (|x|>1)\end{cases}$$
자연수 k에 대하여
(ⅰ) $2k-2\le|x|<2k-1$일 때
$\left|\frac{x}{2k-1}\right|<1$이므로
$g(x)=(2k-1)\times\left(-\frac{x}{2k-1}\right)=-x$
(ⅱ) $|x|=2k-1$일 때
$\left|\frac{x}{2k-1}\right|=1$이므로
$g(x)=(2k-1)\times 0=0$
(ⅲ) $2k-1<|x|<2k$일 때
$\left|\frac{x}{2k-1}\right|>1$이므로
$g(x)=(2k-1)\times\left(\frac{x}{2k-1}\right)=x$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$t=2m-1$(m은 정수)일 때 직선 $y=t$는 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나지 않는다.
따라서 $0<t<10$인 모든 t의 값의 합은
$1+3+5+7+9=25$

203. 정답 24

[출제의도] 조건을 만족시키는 급수의 합을 구할 수 있는가?

등비수열 $\{a_n\}$의 일반항을

$a_n = a_1 r^{n-1}$

이라 하자. 이때 주어진 조건을 만족시키기 위해서는 $a_1 \neq 0$이다.

(ⅰ) $r > 1$인 경우

a_n의 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(ⅱ) $r = 1$인 경우

a_n의 값이 일정한 값을 가지므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(ⅲ) $r = -1$인 경우

a_n의 값이 $a_1, -a_1, a_1, -a_1, a_1, \cdots$이 반복되므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(ⅳ) $r < -1$인 경우

a_n의 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(ⅴ) $r = 0$인 경우

a_n의 값이 첫째항을 제외하고 모두 0이므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

따라서 $-1 < r < 0$ 또는 $0 < r < 1$이다.

그런데 $b_3 = -1$ 이므로 $a_3 \leq -1$이다.

즉 $a_1 r^2 \leq -1$이다.

그런데 $0 < r^2 < 1$이므로

$a_1 \leq -1$

따라서 $b_1 = -1$이다.

또한 $a_1 \leq -1$ 이므로 $0 < r < 1$ 이면 a_n의 모든 항은 음수이므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

따라서 $-1 < r < 0$이다.

① $a_2 = a_1 r \leq -1$일 때

$r \geq -\dfrac{1}{a_1} > 0$ 이므로 모순이다.

따라서 $a_2 = a_1 r > -1$이므로 $b_2 = a_2 = a_1 r$

② $b_3 = -1$ 이므로 $a_3 = a_1 r^2 \leq -1$

③ $a_4 = a_1 r^3 \leq -1$일 때

$a_4 = a_1 r^3 = a_1 r^2 \times r \geq -r > 0$

이므로 모순이다.

즉 $a_4 > -1$이므로 $b_4 = a_4 = a_1 r^3$

④ $a_5 = a_1 r^4 \leq -1$일 때

$b_5 = -1$

인데

$b_1 + b_3 + b_5 = -3$

이므로 조건 (가)에 의하여 모순이다.

$b_5 = a_5 = a_1 r^4$

조건 (가)에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} = -1 + (-1) + a_1 r^4 + a_1 r^6 + a_1 r^8 + \cdots$$

$$= -2 + \frac{a_1 r^4}{1-r^2}$$

$$= -3$$

$$\frac{a_1 r^4}{1-r^2} = -1$$

$$a_1 r^4 = r^2 - 1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (나)에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = a_1 r + a_1 r^3 + a_1 r^5 + \cdots$$

$$= \frac{a_1 r}{1-r^2} = 8$$

$$a_1 r = 8 - 8r^2 = 8(1-r^2) \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$a_1 r = -8 a_1 r^4$

이므로

$r^3 = -\dfrac{1}{8}$

즉 $r = -\dfrac{1}{2}$이므로 ㉡에 대입하면

$-\dfrac{1}{2} a_1 = 6$, $a_1 = -12$

따라서 $a_n = -12\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| -12\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 12\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{12}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 24$$

[다른 풀이]

$b_2, b_3, \cdots$의 값을 조사하면 다음과 같다.

(1) b_2의 값

$a_1 \leq -1$이고 $-1 < r < 0$이므로 $a_2 > 0$

(2) b_3의 값

주어진 조건으로부터 $b_3 = -1$

(3) b_4의 값

$a_3 \leq -1$이고 $-1 < r < 0$이므로 $a_4 > 0$

그러므로

$b_4 = a_4$

그러므로 $a_{2n} > 0$이므로 $b_{2n} = a_{2n}$

조건 (나)에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = 8$$

이므로

$ar + ar^3 + ar^5 + \cdots = 8$

한편, 조건 (가)에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} = -3 \quad \cdots\cdots ㉡$$

이고 $b_1 = b_3 = -1$이고 $b_5 = ar^4$, $b_7 = ar^6$, $\cdots$라 하면 ㉡은

$$(-1)+(-1)+r^3\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = -3$$

$$r^3 \times 8 = -1$$

$$r = -\frac{1}{2}$$

204. 정답 80

[출제의도] 도형의 성질을 이용하여 수열의 극한값을 구하는 문제를 해결한다.

점 P_n의 x좌표를 t라 하면 y좌표는 $\frac{\sqrt{3}}{n+1}t^2$

$\overline{OP_n} = 2n+2$이므로 $\sqrt{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{n+1}t^2\right)^2} = 2n+2$에서

$t = n+1$

직각삼각형 P_nOH_n에서 $\overline{OH_n} : \overline{P_nH_n} = 1 : \sqrt{3}$이므로

$\tan(\angle P_nOH_n) = \sqrt{3}$ 즉 $\angle P_nOH_n = \frac{\pi}{3}$

$\angle R_nP_nH_n = 2\times\angle OP_nH_n = 2\times\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

점 R_n을 포함하지 않는 호 Q_nH_n과 선분 OH_n, 곡선 T_n으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $h(n)$이라 하자.

(i) 곡선 T_n과 x축 및 선분 P_nH_n으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $f(n)+h(n)$이므로

$$f(n)+h(n) = \int_0^{n+1}\frac{\sqrt{3}}{n+1}x^2\,dx$$

$$= \left[\frac{\sqrt{3}}{3(n+1)}x^3\right]_0^{n+1}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}(n+1)^2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

(ii) 점 Q_n을 포함하는 호 R_nH_n과 두 선분 OR_n, OH_n으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $g(n)+h(n)$이고, 이 값은 사각형 $OH_nP_nR_n$의 넓이에서 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴 $P_nR_nH_n$의 넓이를 뺀 값과 같으므로

$$g(n)+h(n) = 2\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{OH_n}\times\overline{P_nH_n}\right)-\frac{1}{2}\times\overline{P_nH_n}^2\times\frac{\pi}{3}$$

$$= \sqrt{3}(n+1)^2 - \frac{\pi(n+1)^2}{2}$$

$$= \left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)(n+1)^2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$f(n)-g(n) = \left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)(n+1)^2$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)-g(n)}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)(n+1)^2}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

$$= \frac{\pi}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

그러므로 $k = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

따라서 $60k^2 = 60\times\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 80$

205. 정답 5

[출제의도] 수열의 극한의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

$$f(x) = x(x-n)(x-3n^2)$$

$$= x^3-(3n^2+n)x^2+3n^3x$$

$$f'(x) = 3x^2-2(3n^2+n)x+3n^3$$

$f'(x)=0$에서

$$x = \frac{3n^2+n-\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3}$$

또는 $x = \frac{3n^2+n+\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3}$

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$x = \frac{3n^2+n-\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3}$에서 극댓값을 갖는다.

즉 $a_n = \frac{3n^2+n-\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n-\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3n}$$

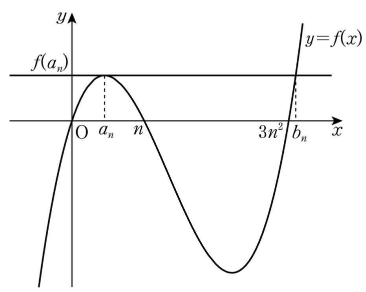
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3n+1-\sqrt{9n^2-3n+1}}{3}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)^2-(9n^2-3n+1)}{3\left(3n+1+\sqrt{9n^2-3n+1}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3n}{3n+1+\sqrt{9n^2-3n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{3+\frac{1}{n}+\sqrt{9-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}}$$

$$= \frac{1}{2}$$



방정식 $f(x)-f(a_n)=0$은 $x=a_n$을 중근으로 가지고, a_n이 아닌 근이 b_n이므로

$f(x)-f(a_n)=(x-a_n)^2(x-b_n)$

$x=0$을 대입하면 $f(0)=0$이므로 $f(a_n)=a_n^2b_n$에서

$a_n^2b_n=a_n^3-(3n^2+n)a_n^2+3n^3a_n$

양변을 n^3a_n으로 나누면

$$\frac{a_nb_n}{n^3}=\frac{a_n^2-(3n^2+n)a_n+3n^3}{n^3}$$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2-(3n^2+n)a_n+3n^3}{n^3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\times\left(\frac{a_n}{n}\right)^2-\frac{3n^2+n}{n^2}\times\frac{a_n}{n}+3\right\}$$
$$=0-3\times\frac{1}{2}+3=\frac{3}{2}$$

$p=2$, $q=3$이므로

$p+q=5$

206. 정답 25

[출제의도] 절댓값과 지수함수 e^x을 포함한 함수의 부정적분을 구하여 k의 값에 따른 함수의 그래프를 추론하고 그 함수의 최솟값을 구할 수 있는가?

x의 범위에 따라 함수

$$f(x)=\begin{cases}(k-x)e^{-x} & (x\ge 0)\\(k+x)e^{-x} & (x<0)\end{cases}$$

의 한 부정적분을 구하면

$$F(x)=\begin{cases}(x-k+1)e^{-x}+C_1 & (x\ge 0)\\(-x-k-1)e^{-x}+C_2 & (x<0)\end{cases}$$

(단, C_1, C_2는 적분상수)

이때, 함수 $F(x)$가 모든 실수 x에 대하여 미분가능하므로 $x=0$에서 $F(x)$는 연속이다. 즉, $\lim_{x\to0+}F(x)=\lim_{x\to0-}F(x)$에서

$C_2=C_1+2$

$g(k)$를 $F(0)$의 최솟값으로 정의하였으므로

$F(0)=-k+1+C_1$ …… ㉠

의 최솟값이 $g(k)$이다.

함수 $h(x)=F(x)-f(x)$라 하면

$$h(x)=\begin{cases}(2x-2k+1)e^{-x}+C_1 & (x\ge 0)\\(-2x-2k-1)e^{-x}+C_1+2 & (x<0)\end{cases}$$

이고

$$h'(x)=\begin{cases}(-2x+2k+1)e^{-x} & (x>0)\\(2x+2k-1)e^{-x} & (x<0)\end{cases}$$

이므로 $h'(x)=0$에서

$x\ge 0$일 때 $x=\frac{2k+1}{2}$

이고

$x<0$일 때 $x=\frac{1-2k}{2}$

이때 $\frac{1-2k}{2}\ge 0$이면 $x<0$에서 $h'(x)<0$이므로 $x=0$과 $x=\frac{2k+1}{2}$의 좌우에서 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2k+1}{2}$	$\cdots$
$h'(x)$	$-$		$+$		$-$
$h(x)$	↘		↗		↘

또한, $\frac{1-2k}{2}<0$일 때, $x=\frac{2k+1}{2}$과 $x=\frac{1-2k}{2}$의 좌우에서 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	$\frac{1-2k}{2}$	$\cdots$	$\frac{2k+1}{2}$	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	↘		↗		↘

또, $h(0)=-2k+1+C_1$이고

$\lim_{x\to\infty}h(x)=C_1$, $\lim_{x\to-\infty}h(x)=\infty$

이므로 $\frac{1-2k}{2}$의 부호에 따라 C_1의 범위를 정하여 $F(0)$의 최솟값을 구하면

(ⅰ) $\frac{1-2k}{2}\ge 0$일 때, $x=0$에서 극솟값을 $h(0)$을 갖고

$1-2k\ge 0$이므로

$h(0)=-2k+1+C_1\ge C_1=\lim_{x\to\infty}h(x)$

그런데 모든 실수 x에 대하여 $F(x)\ge f(x)$이므로 $h(x)\ge 0$에서 $C_1\ge 0$이다.

즉, ㉠에서 $F(0)=-k+1+C_1\ge -k+1$

(ⅱ) $\frac{1-2k}{2}<0$일 때,

$x=\frac{1-2k}{2}$일 때 $h(x)$의 극솟값은

$h\left(\frac{1-2k}{2}\right)=-2e^{\frac{2k-1}{2}}+C_1+2$이다.

$\frac{1-2k}{2}<0$에서 $(e^{-1})^{\frac{1-2k}{2}}>(e^{-1})^0=1$이므로

$-2e^{\frac{2k-1}{2}}+C_1+2\le C_1$

그러므로 $-2e^{\frac{2k-1}{2}}+C_1+2$은 $h(x)$의 최솟값이다.

그런데 $F(x)\ge f(x)$에서 $h\left(\frac{1-2k}{2}\right)\ge 0$이므로

$-2e^{\frac{2k-1}{2}}+C_1+2\ge 0$

즉, $F(0)=-k+1+C_1\ge -k+2e^{\frac{2k-1}{2}}-1$

그런데 $g(k)$는 $F(0)$의 최솟값이므로

$$g(k)=\begin{cases} -k+1 & \left(0<k\le \dfrac{1}{2}\right) \\ -k+2e^{\frac{2k-1}{2}}-1 & \left(k>\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

이므로

$$g\left(\frac{1}{4}\right)+g\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{4}+\left(-\frac{3}{2}\right)+2e-1=pe+q$$

$2e-\dfrac{7}{4}=pe+q$에서 $p=2,\ q=-\dfrac{7}{4}$

따라서 $100(p+q)=25$

207. **정답** 13

[출제의도] 수열의 극한을 이용하여 추론하기

$|x|>1$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{1}{x^{2n-1}}}{1+\dfrac{2}{x^{2n}}}=a+\frac{b}{x}$$

$x=1$일 때, $f(1)=\dfrac{a+b+1}{3}$

$x=-1$일 때, $f(-1)=\dfrac{a-b-1}{3}$

$|x|<1$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n}+bx^{2n-1}+x}{x^{2n}+2}=\frac{0+0+x}{0+2}=\frac{x}{2}$$

따라서

$$f(x)=\begin{cases} a+\dfrac{b}{x} & (|x|>1) \\ \dfrac{a+b+1}{3} & (x=1) \\ \dfrac{a-b-1}{3} & (x=-1) \\ \dfrac{x}{2} & (|x|<1) \end{cases}$$

함수 $g(x)=2(x-1)+m$이라 하면

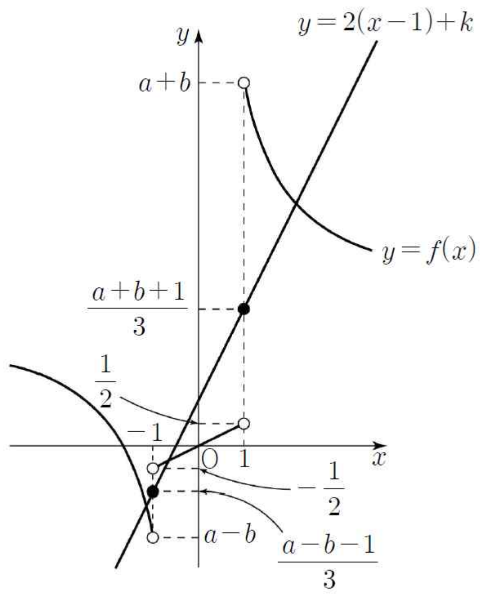
방정식 $f(x)=2(x-1)+m$의 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수와 같다.

$x<-1$에서 $f(x)$는 감소하고 $x>1$에서 $f(x)$는 감소하므로 $|x|>1$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수의 최댓값은 2이고, $|x|<1$에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 $\dfrac{1}{2}$인 일차함수이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수의 최댓값은 1이다.

그러므로 $c_k=5$인 자연수 k가 존재하려면

$f(1)=g(1),\ f(-1)=g(-1)$이어야 하고,

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같아야 한다.



즉, 직선 $y=2(x-1)+k$는

두 점 $\left(1,\ \dfrac{a+b+1}{3}\right)$, $\left(-1,\ \dfrac{a-b-1}{3}\right)$을 지나므로 $\dfrac{a+b+1}{3}=k$, $\dfrac{a-b-1}{3}=k-4$에서 $b=5$

$k=\dfrac{a}{3}+2$가 자연수이므로 a는 3의 배수이다. ⋯ ㉠

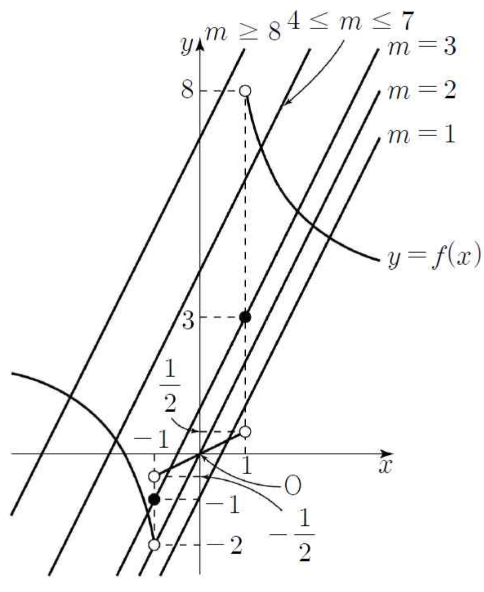
$\displaystyle\lim_{x\to-1-}f(x)<f(-1)<\lim_{x\to-1+}f(x)$이어야 하므로

$a-5<\dfrac{a}{3}-2<-\dfrac{1}{2}$에서 $a<\dfrac{9}{2}$ ⋯ ㉡

$a>0$이므로 $\dfrac{1}{2}<\dfrac{a}{3}+2<a+5$가 성립하며

$\displaystyle\lim_{x\to1-}f(x)<f(1)<\lim_{x\to1+}f(x)$를 만족시킨다.

㉠, ㉡에 의해 $0<a<\dfrac{9}{2}$이므로 $a=3,\ k=3$



(ⅰ) $m=1$일 때

$g(-1)=-3$, $g(1)=1$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 $-1<x<1$, $x>1$에서 각각 1개씩 교점을 갖는다.
그러므로 $c_1=2$

(ii) $m=2$일 때
$g(-1)=-2$, $g(1)=2$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 $x=0$, $x>1$에서 각각 1개씩 교점을 갖는다.
그러므로 $c_2=2$

(iii) $m=3$일 때
$m=k=3$이므로 $c_3=5$

(iv) $4 \le m \le 7$일 때
$g(-1) > \lim_{x\to -1+} f(x) = -\frac{1}{2}$,
$g(1) < \lim_{x\to 1+} f(x) = 8$이므로
$y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 $x<-1$, $x>1$에서 각각 1개씩 교점을 갖는다.
그러므로 $c_m=2$

(v) $m \ge 8$일 때
$g(-1) > \lim_{x\to -1+} f(x) = -\frac{1}{2}$,
$g(1) \ge \lim_{x\to 1+} f(x) = 8$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 $x<-1$에서 1개의 교점을 갖는다.
그러므로 $c_m=1$

(i)~(v)에 의해
$$k+\sum_{m=1}^{\infty}(c_m-1)=3+1+1+4+1\times 4=13$$

208. 정답 15
[출제의도] 등비급수를 이용하여 추론하기
등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하자. 수열 $\{a_n\}$은 모든 항이 양수인 수열이므로 $a_1>0$, $r>0$

(i) $0<r<1$일 때
모든 자연수 n에 대하여 $a_n > a_{n+1}$이고 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다.
$a_{3n-2}<1$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 k라 하면 $n \ge 3k-2$일 때 $b_n=(-1)^n$이므로 n이 k 이상의 짝수이면
$3b_{3n-2}-7b_{3n-1}+2b_{3n}=3+7+2=12$,
n이 k 이상의 홀수이면
$3b_{3n-2}-7b_{3n-1}+2b_{3n}=-3-7-2=-12$
수열 $\{3b_{3n-2}-7b_{3n-1}+2b_{3n}\}$이 발산하므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $r=1$일 때
(a) $0<a_1<1$일 때
모든 자연수 n에 대하여 $b_n=(-1)^n$이므로 n이 짝수이면
$3b_{3n-2}-7b_{3n-1}+2b_{3n}=3+7+2=12$,
n이 홀수이면
$3b_{3n-2}-7b_{3n-1}+2b_{3n}=-3-7-2=-12$
수열 $\{3b_{3n-2}-7b_{3n-1}+2b_{3n}\}$이 발산하므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.
(b) $a_1 \ge 1$일 때
모든 자연수 n에 대하여 $b_n=a_n=a_1$이므로
$$\lim_{n\to\infty}(3b_{3n-2}-7b_{3n-1}+2b_{3n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}(3a_1-7a_1+2a_1)=-2a_1\ne 0$$
그러므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(iii) $r>1$일 때
모든 자연수 n에 대하여 $a_n<a_{n+1}$이고 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이다.
$a_{3n}\ge 1$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 k라 하면 $n\ge k$일 때 $b_n=a_n$이므로
$$\sum_{n=1}^{\infty}(3b_{3n-2}-7b_{3n-1}+2b_{3n})$$
$$=\sum_{n=1}^{k}(3b_{3n-2}-7b_{3n-1}+2b_{3n})+\sum_{n=k+1}^{\infty}(3a_{3n-2}-7a_{3n-1}+2a_{3n})$$
$$=\sum_{n=1}^{k}(3b_{3n-2}-7b_{3n-1}+2b_{3n})+\sum_{n=k+1}^{\infty}\{a_{3n-2}\times(3-7r+2r^2)\}$$
급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(3b_{3n-2}-7b_{3n-1}+2b_{3n})$이 수렴하므로
급수 $\sum_{n=k+1}^{\infty}\{a_{3n-2}\times(3-7r+2r^2)\}$이 수렴한다.
그러므로 $\lim_{n\to\infty}\{a_{3n-2}\times(3-7r+2r^2)\}=0$
$\lim_{n\to\infty}a_{3n-2}=\infty$이므로 $3-7r+2r^2=0$
$2r^2-7r+3=(2r-1)(r-3)=0$
$r>1$이므로 $r=3$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $r=3$
조건 (나)에서 ${b_5}^2\ne b_4b_6$이므로 세 수 b_4, b_5, b_6은 이 순서대로 등비수열을 이루지 않는다.
이때 두 수열 $\{(-1)^n\}$, $\{a_n\}$은 등비수열이므로
$b_n=\begin{cases}(-1)^n & (n\le 4)\\ a_n & (n\ge 5)\end{cases}$ 또는 $b_n=\begin{cases}(-1)^n & (n\le 5)\\ a_n & (n\ge 6)\end{cases}$
이다.
$b_n=\begin{cases}(-1)^n & (n\le 5)\\ a_n & (n\ge 6)\end{cases}$일 때,
$a_5<1$, $a_6=3a_5\ge 1$이므로 $\frac{1}{3}\le a_5<1$ …… ㉠
${b_5}^2=b_4b_6-\frac{9}{4}$에서 $(-1)^2=1\times a_6-\frac{9}{4}$, $a_6=\frac{13}{4}$
$a_5=\frac{13}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{13}{12}$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.
$b_n=\begin{cases}(-1)^n & (n\le 4)\\ a_n & (n\ge 5)\end{cases}$일 때,
$a_4<1$, $a_5=3a_4\ge 1$이므로 $\frac{1}{3}\le a_4<1$ …… ㉡
${b_5}^2=b_4b_6-\frac{9}{4}$에서 ${a_5}^2=1\times a_6-\frac{9}{4}$

$4a_5{}^2-12a_5+9=(2a_5-3)^2=0$ 이므로 $a_5=\dfrac{3}{2}$

$a_4=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2}$ 이므로 ㉡을 만족시킨다.

따라서 $90a_3=90\times\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\right)=15$

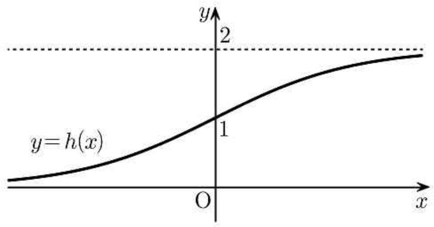
209. 정답 25

[출제의도] 도함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

$h(x)=\dfrac{2}{1+e^{-x}}$ 라 하면

$h'(x)=\dfrac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}>0$

이고 $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=2$ 이므로 함수 $h(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



함수 $h(x)$ 의 치역이 구간 $(0,\ 2)$ 이므로 함수 $g(x)=|f(h(x))|$ 의 치역은 구간 $(0,\ 2)$ 에서 정의된 함수 $|f(x)|$ 의 치역과 같다.

$$g(x)=\begin{cases} f(h(x)) & (f(h(x))\geq 0) \\ -f(h(x)) & (f(h(x))<0) \end{cases}$$

조건 (가)에서 $g(0)>0$ 이므로 $f(h(0))=f(1)\neq 0$ 이고 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 극소이므로 함수 $f(h(x))$ 가 $x=0$ 에서 극소이고 $f(h(0))=f(1)>0$ 이거나 함수 $f(h(x))$ 가 $x=0$ 에서 극대이고 $f(h(0))=f(1)<0$ 이다.

(ⅰ) 함수 $f(h(x))$ 가 $x=0$ 에서 극소이고 $f(h(0))=f(1)>0$ 일 때

함수 $f(h(x))$ 가 $x=0$ 에서 극소이므로

$f'(h(0))\times h'(0)=0,\quad f'(1)=0$

$f''(h(0))\times\{h'(0)\}^2+f'(h(0))h''(0)>0,\quad f''(1)>0$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이다.

최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극소이면

$f(h(\ln 3))=f\left(\dfrac{3}{2}\right)>f(1)>0$ 이고

$g'(\ln 3)=f'(h(\ln 3))\times h'(\ln 3)=f'\left(\dfrac{3}{2}\right)\times\dfrac{3}{8}>0$ 이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) 함수 $f(h(x))$ 가 $x=0$ 에서 극대이고 $f(h(0))=f(1)<0$ 일 때

함수 $f(h(x))$ 가 $x=0$ 에서 극대이므로

$f'(h(0))\times h'(0)=0,\quad f'(1)=0$

$f''(h(0))\times\{h'(0)\}^2+f'(h(0))h''(0)<0,\quad f''(1)<0$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대이다.

최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극대이면

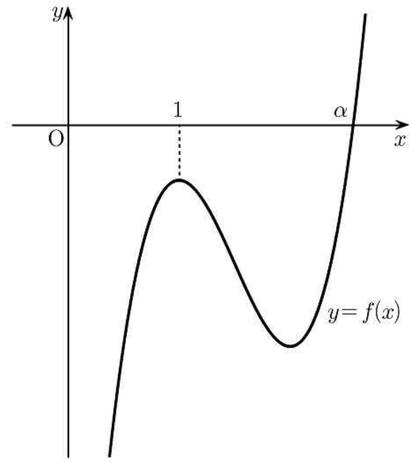
$f(h(-\ln 3))=f\left(\dfrac{1}{2}\right)<f(1)<0$ 이고

$g'(-\ln 3)=-f'(h(-\ln 3))\times h'(-\ln 3)=-f'\left(\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{3}{8}<0$ 이므로 조건 (나)에서

$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{3}{8}\left|f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right|,\qquad f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=-f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

(ⅰ), (ⅱ)에서 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극댓값을 가지고 $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=-f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 이다.

함수 $f(x)$ 의 극댓값이 음수이므로 함수 $y=f(x)$ 의 x 절편을 α 라 하면 $f'(\alpha)>0$ 이다. 또한, $f(x)>0$ 이면 $x>\alpha$ 이고 $f'(x)>0$ 이다.



만약 $\alpha<2$ 이면 $h(\beta)=\alpha$ 를 만족시키는 실수 β 가 존재한다. 이때 $f(h(\beta))=f(\alpha)=0$, $f'(h(\beta))\times h'(\beta)=f'(\alpha)\times h'(\beta)>0$ 이므로 함수 $g(x)=|f(h(x))|$ 는 $x=\beta$ 에서 미분가능하지 않다.

따라서 $\alpha\geq 2$ 이고 $f(2)\leq 0$ 이다.

$f(x)=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^3+a\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+b\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+c$ 라 하면

$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=-f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 이므로 $\qquad c=-b$

$f'(1)=0$ 이므로 $\qquad \dfrac{3}{4}+a+b=0,\qquad a=-b-\dfrac{3}{4}$

$f(2)\leq 0$ 이므로 $\qquad \dfrac{27}{8}+\dfrac{9}{4}a+\dfrac{3}{2}b+c\leq 0$

$c=-b,\ a=-b-\dfrac{3}{4}$ 이므로

$-\dfrac{7}{4}b+\dfrac{27}{16}\leq 0,\qquad b\geq\dfrac{27}{28}$

$g(0)=|f(h(0))|=|f(1)|=-f(1)$ 이고

$-f(1)=-\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{4}a-\dfrac{1}{2}b-c=\dfrac{3}{4}b+\dfrac{1}{16}\geq\dfrac{11}{14}$ 이므로 구하는 $g(0)$ 의 최솟값은 $\dfrac{11}{14}$

$p=14,\ q=11$ 이므로 $\qquad p+q=25$

[참고]

$b=\dfrac{27}{28}$ 이면

$f(x)=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^3-\dfrac{12}{7}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{27}{28}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{27}{28}$

이때 $f(h(\ln 3))=f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{5}{7}<0$ 이므로

$g'(\ln 3)=-f'(h(\ln 3))\times h'(\ln 3)=-\frac{15}{28}\times\frac{3}{8}<0$