[목 채]

[확 인]

일차	출 처	학습일	확인
01일차	27학년도 EBS 파이널 1회		
02일차	27학년도 EBS 파이널 2회		
03일차	27학년도 EBS 파이널 3회		
04일차	27학년도 EBS 파이널 4회		
05일차	27학년도 EBS 파이널 5회		
06일차	26학년도 EBS 파이널 1회		
07일차	26학년도 EBS 파이널 2회		
08일차	26학년도 EBS 파이널 3회		
09일차	26학년도 EBS 파이널 4회		
10일차	26학년도 EBS 파이널 5회		
11일차	26학년도 EBS 파이널 6회		
12일차	26학년도 EBS 파이널 7회		
13일차	26학년도 EBS 수능완성 실전편 1회		
14일차	26학년도 EBS 수능완성 실전편 2회		
15일차	26학년도 EBS 수능완성 실전편 3회		
16일차	26학년도 EBS 수능완성 실전편 4회		
17일차	26학년도 EBS 수능완성 실전편 5회		
18일차	26학년도 EBS 버티컬 시즌1		
19일차	26학년도 EBS 버티컬 시즌2		
20일차	26학년도 EBS 버티컬 시즌3		
21일차	26학년도 EBS 버티컬 시즌4		
22일차	26학년도 EBS 만점마무리 시즌1 1회		
23일차	26학년도 EBS 만점마무리 시즌1 2회		
24일차	26학년도 EBS 만점마무리 시즌1 3회		
25일차	26학년도 EBS 만점마무리 시즌2 1회		
26일차	26학년도 EBS 만점마무리 시즌2 2회		
27일차	26학년도 EBS 만점마무리 시즌2 3회		
28일차	26학년도 EBS 만점마무리 고난도 1회		
29일차	26학년도 EBS 만점마무리 고난도 2회		
30일차	26학년도 EBS 직전 클리어 1회		
31일차	25학년도 EBS 만점마무리 시즌1 1회		
32일차	25학년도 EBS 만점마무리 시즌1 2회		
33일차	25학년도 EBS 만점마무리 시즌1 3회		
34일차	25학년도 EBS 만점마무리 시즌2 1회		
35일차	25학년도 EBS 만점마무리 시즌2 2회		
36일차	25학년도 EBS 만점마무리 시즌2 3회		

일일학습

27학년도 EBS 파이널 1회

01 일차 : 26년 월 일

1. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도가 각각

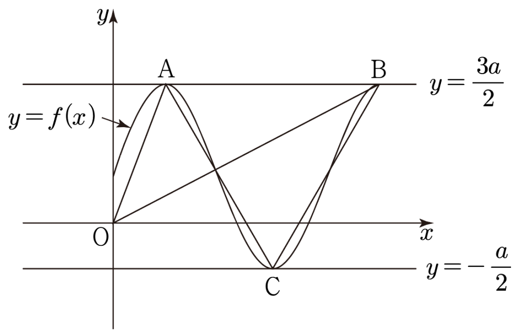
$$v_1(t)=3t^2-6t,\ v_2(t)=24t$$

이다. 두 점 P, Q의 시각 $t=t_1\ (t_1>0)$에서의 가속도가 같을 때, 시각 $t=0$에서 $t=t_1$까지 점 P가 움직인 거리는? [4점]

① 58 ② 59 ③ 60 ④ 61 ⑤ 62

2. 두 양수 a, b에 대하여 닫힌구간 $\left[0,\ \dfrac{5b}{2}\right]$에서 정의된 함수 $f(x)=a\sin\dfrac{\pi x}{b}+\dfrac{a}{2}$가 있다. 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\dfrac{3a}{2}$가 만나는 두 점을 x좌표가 작은 순서대로 A, B라 하고, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-\dfrac{a}{2}$가 만나는 점을 C라 하자. 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 정삼각형이고, 세 점 A, O, B를 꼭짓점으로 하는 삼각형 AOB의 넓이가 $12\sqrt{3}$일 때, a^2+b^2의 값은? (단, O은 원점이다.) [4점]

① 20 ② 24 ③ 28 ④ 32 ⑤ 36



3. 모든 항이 0이 아닌 정수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_5+a_6의 값은? [4점]

(가) $a_5 \times a_6 = -|a_5 \times a_6| - 3|a_6|$

(나) $\sum_{k=1}^{11}(|a_k|+a_k)=222$

① -4　② -5　③ -6　④ -7　⑤ -8

4. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)=f(4-x)$이다.

(나) $4\int_{-2}^{1} f(x)dx=5\int_{0}^{2} f(x)dx=30$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

| 보기 |

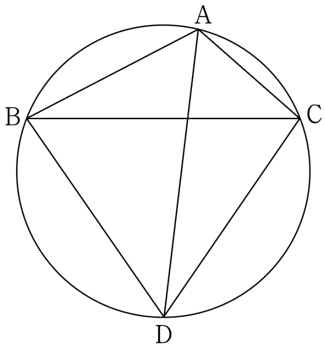
ㄱ. $f(2)=f(10)$

ㄴ. $\int_{1}^{2} f(x)dx=\frac{9}{2}$

ㄷ. $\int_{-11}^{11}(x+2)f(x)dx=138$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5. 그림과 같이 반지름의 길이가 $\frac{8\sqrt{7}}{7}$인 원에 내접하고 $\cos(\angle\mathrm{ABC})<0$, $\overline{\mathrm{AB}}>\overline{\mathrm{AC}}$인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{CD}}$이고 $\sin(\angle\mathrm{BDA})=\frac{\sqrt{7}}{4}$이다. 삼각형 ABD의 넓이가 $\frac{15\sqrt{7}}{4}$일 때, 삼각형 ADC의 넓이는? [4점]



① $\frac{155\sqrt{7}}{64}$ ② $\frac{165\sqrt{7}}{64}$ ③ $\frac{175\sqrt{7}}{64}$ ④ $\frac{185\sqrt{7}}{64}$ ⑤ $\frac{195\sqrt{7}}{64}$

6. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{a_n}{3} & (a_n\text{이 } 3\text{의 배수인 경우})\\ 4a_n-2 & (a_n\text{이 } 3\text{의 배수가 아닌 경우})\end{cases}$$
> 이다.

$a_4=2$일 때, $a_1>a_9+a_{10}$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 54 ② 57 ③ 60 ④ 63 ⑤ 66

7. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f'(x)-4x & (f(x)\geq 0) \\ \dfrac{x(f(4-x))^2}{f(x)} & (f(x)<0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f(2)<0$일 때, $g(3)+g(6)$의 값은? [4점]

① 25 ② 27 ③ 29 ④ 31 ⑤ 33

8. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_n>0$
>
> (나) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{8}(a_n)^2+\frac{1}{2}a_n-\frac{45}{8}$

다음은 부등식

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{36}{a_k a_{k+1}}>\frac{14}{17}$$

를 만족시키는 자연수 m의 최솟값을 구하는 과정이다.

> 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$\sum_{k=1}^{n+1}a_k-\sum_{k=1}^{n}=a_{n+1}$$
>
> 이므로 조건 (나)에서
>
> $$a_{n+1}-a_n=\boxed{\text{(가)}}$$
>
> 이다. 이때,
>
> $$a_n=\boxed{\text{(나)}}$$
>
> 이다. 따라서 부등식
>
> $$\sum_{k=1}^{m}\frac{36}{a_k a_{k+1}}>\frac{14}{17}$$
>
> 를 만족시키는 자연수 m의 최솟값은
>
> $$\boxed{\text{(다)}}$$
>
> 이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q라 하고, (나)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $\dfrac{f(55)}{p+q}$의 값을 구하시오. [4점]

9. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=3x$는 서로 다른 두 점 A, B에서 접하고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{10}$

(나) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$의 값이 존재한다.

(다) $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>3$이다.

$f(1)=6$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

10. 함수 $f(x)=x(x+1)(x+2)$가 있다. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $(f(x)-g(x))(f(x)+g(x))=0$이다.

(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\le M$을 만족시키는 상수 M이 존재한다.

(다) $\lim_{x\to -a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\times\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}<0$ 을 만족시키는 실수 a의 개수는 1이다.

함수 $h(x)=\int_0^x g(t)dt$는 $x=b$, $x=c$ $(b<c)$에서만 극값을 가질 때, $a+h(b)+h(c)$의 최댓값은 k이다. $12\times k$의 값을 구하시오. (단, b, c는 상수이다.) [4점]

일일학습

27학년도 EBS 파이널 2회

02 일차 : 26년 월 일

11. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$S_4 = 3(a_2 + a_4),\ S_6 = S_4 + 3$$

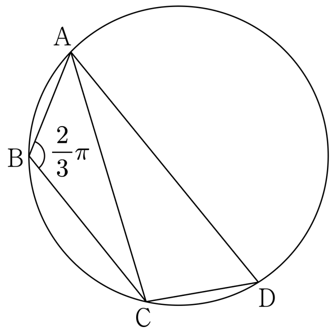
일 때, 부등식 $a_m > \frac{1}{10}$을 만족시키는 자연수 m의 최댓값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

12. 그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고

$$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{CD}} = 3,\ \overline{\mathrm{BC}} = 5,\ \angle \mathrm{ABC} = \frac{2}{3}\pi$$

일 때, 삼각형 ACD에 내접하는 원의 넓이는? [4점]



① π ② $\frac{4}{3}\pi$ ③ $\frac{5}{3}\pi$ ④ 2π ⑤ $\frac{7}{3}\pi$

13. 함수 $f(x)=a\sin\frac{x-\pi}{b}+c$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 세 정수 a, b, c에 대하여 $\frac{ac}{b}$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M-m$의 값은? (단, $b \neq 0$) [4점]

> (가) 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값은 각각 5, 1이다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4\pi)=f(x)$이다.

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

14. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 시각이 t $(t \geq 0)$일 때 두 점 P, Q의 속도가 각각

$$v_1(t)=2-t,\ v_2(t)=3t(t-2)$$

일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

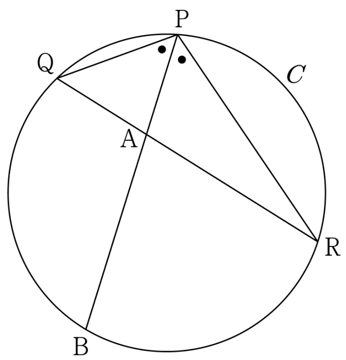
> | 보기 |
> ㄱ. 시각 $t=1$일 때 두 점 P, Q가 움직이는 방향은 서로 반대이다.
> ㄴ. $0 \leq t \leq 2$일 때 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값은 6이다.
> ㄷ. 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 q가 움직인 거리는 8이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)=2^{x-n}-1$이 있다. 곡선 $y=f(x)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 $y=g(x)$라 하자. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 내부 또는 그 경계에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수가 짝수가 되도록 하는 자연수 n의 값을 작은 수부터 크기 순으로 나열할 때, k번째 수를 a_k라 하자. $a_1+a_2+a_3$의 값은? [4점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

16. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{PQ}}=3$, $\overline{\mathrm{PR}}=6$인 삼각형 PQR이 원 C에 내접한다. 삼각형 PQR의 내각 $\angle\mathrm{QPR}$의 이등분선이 선분 QR과 만나는 점을 A, 원 C와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 B라 하자. $\overline{\mathrm{PB}}=3\overline{\mathrm{PA}}$일 때, 원 C의 넓이는? [4점]



① $\frac{71}{5}\pi$ ② $\frac{72}{5}\pi$ ③ $\frac{73}{5}\pi$ ④ $\frac{74}{5}\pi$ ⑤ 15π

17. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 최댓값은? [4점]

> (가) $f(0)=f(2)=0$
>
> (나) 함수 $g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)}{|f(x)|}f'(x) & (f(x)\neq 0) \\ 0 & (f(x)=0) \end{cases}$이 $x=\alpha$에서 불연속인 α의 값은 한 개이다.

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

18. 첫째항이 3인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\frac{n+2}{n}a_n+3(n+1)(n+2) \quad \cdots\cdots ㉠$$

를 만족시킨다. 다음은 $\sum_{k=1}^{5} a_k$의 값을 구하는 과정이다.

> ㉠의 양변을 $(n+1)(n+2)$로 나누면
>
> $$\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)}=\frac{a_n}{n(n+1)}+\boxed{(가)}$$
>
> $b_n=\dfrac{a_n}{n(n+1)}$이라 하면 $b_1=\dfrac{3}{2}$이고 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$b_{n+1}=b_n+\boxed{(가)}$$
>
> $\cdots$
>
> 따라서
>
> $$a_n=\boxed{(나)}$$
>
> 이므로
>
> $$\sum_{k=1}^{5} a_k=\boxed{(다)}$$

위의 (가), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q라 하고, (나)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $\dfrac{q}{p}+f(2)$의 값을 구하시오. [4점]

19. 모든 항이 정수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> $a_1 > 0$이고 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 3 & (a_n \geq 0) \\ a_n + k & (a_n < 0) \end{cases}$$
> 이다.

$a_7 = 2$가 되도록 하는 3보다 큰 자연수 k가 존재할 때, 가능한 a_1의 서로 다른 값들의 합을 구하시오. [4점]

20. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 양수 k의 값을 $\frac{q}{p}$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

> (가) $f(0)=4$, $f'(0)=f'(2)=0$
> (나) 방정식 $|f(x)|=4$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.
> (다) 방정식 $|f(x)|=k$의 서로 다른 실근의 개수가 5가 되도록 하는 k의 값이 존재한다.

일일학습
27학년도 EBS 파이널 3회

03 일차 : 26년 월 일

21. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \le |a|) \\ (a^2-4|a|+8)x-4 & (x > |a|) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱은? [4점]

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

22. 상수 a $(a>0)$에 대하여 두 곡선 $y=2^x+a$, $y=2^x$이 y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 $x=k$ $(k>0)$와 만나는 점을 C라 하고, 직선 $x=k$가 두 곡선 $y=2^x+a$, $y=2^x$과 만나는 점을 각각 D, E라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{EC}}=8$이고 삼각형 ABD의 넓이가 삼각형 BCE의 넓이의 2배일 때, a^k의 값은? [4점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

23. 실수 k에 대하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 위치가 각각

$$x_1 = t^3 - 6t^2 + 9t,\ x_2 = t^2 - kt$$

이다. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

| 보기 |

ㄱ. $k=0$이면, 시각 $t=2$일 때, 두 점 P, Q 사이의 거리는 2이다.

ㄴ. $k=4$이면, 점 Q가 운동 방향을 바꾸는 순간 점 P의 가속도는 0이다.

ㄷ. $k=2$이면, 출발 후 두 점 P, Q가 처음으로 다시 만날 때까지 두 점 사이의 거리가 최대가 되는 시각은 $t=1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

24. $0 < x \leq 2\pi$에서 방정식

$$3\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$$

의 서로 다른 세 실근을 작은 수부터 크기순으로 α, β, γ라 할 때, $\sin(\alpha + 2\beta + 3\gamma)$의 값은? [4점]

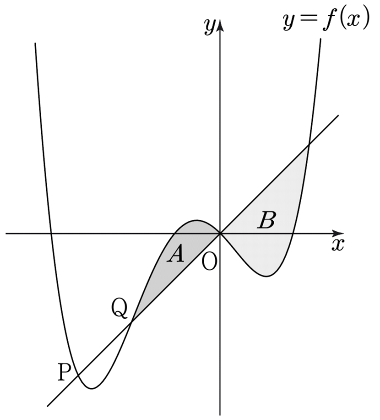
① $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

25. 상수 a $(0<a<2)$에 대하여 함수 $f(x)$는

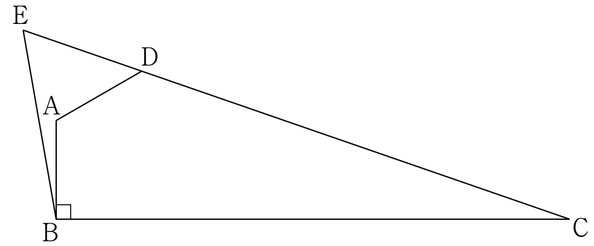
$$f(x)=ax^4+2x^3-ax^2-x$$

이다. 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 O에서의 접선에 수직이며 점 O를 지나는 직선을 l이라 하면 곡선 $y=f(x)$와 직선 l은 O를 포함한 네 점에서 만난다. 이때 O를 제외한 세 교점을 x좌표가 작은 것부터 차례로 P, Q, R이라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 선분 QO로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$와 선분 OR로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $B-A=\frac{1}{3}$일 때, a의 값은? (단, 점 O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{3}{4}$　② 1　③ $\frac{5}{4}$　④ $\frac{3}{2}$　⑤ $\frac{7}{4}$



26. 그림과 같이 $\angle \mathrm{ABC}=\frac{\pi}{2}$, $\angle \mathrm{BAD}=\frac{2}{3}\pi$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AD}}$인 사각형 ABCD가 있다. 선분 CD의 연장선 위에 점 E를 $\angle \mathrm{BED}=\frac{\pi}{3}$가 되도록 잡는다. $\overline{\mathrm{EB}}=3$, $\overline{\mathrm{ED}}=2$일 때, 삼각형 EBC의 외접원의 넓이는? [4점]



① 20π　② $\frac{41}{2}\pi$　③ 21π　④ $\frac{43}{2}\pi$　⑤ 22π

27. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수

$$g(x)=\begin{cases} -4x^2-6x & (x \le 0) \\ f(x) & (x>0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $\int_0^x g(t)dt$는 $x=1$에서 극값을 갖는다.

(나) 모든 실수 x에 대하여 $\int_a^x g(t)dt \ge 0$, $\int_b^x g(t)dt \ge 0$을 만족시키는 서로 다른 두 실수 a, b $(b>1)$이 존재한다.

$f(4)$의 값은? [4점]

① 9 ② $\frac{21}{2}$ ③ 12 ④ $\frac{27}{2}$ ⑤ 15

28. 첫째항이 $\frac{2}{5}$인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$S_n=\frac{n(2n+1)}{3}a_n$$

이 성립할 때, $6(a_k+a_{k+1}+a_{k+2})=S_6$을 만족시키는 자연수 k의 값을 구하는 과정이다.

2 이상의 자연수 n에 대하여 $a_n=S_n-S_{n-1}$이므로

$$a_n=\frac{n(2n+1)}{3}a_n-\frac{(n-1)(2n-1)}{3}a_{n-1}$$

이고, 이 식을 정리하면

$$a_n=\boxed{(가)}\times a_{n-1}\ (n\ge 2)$$

이때

$$a_n=a_1\times\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\frac{a_4}{a_3}\times\cdots\times\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$=\boxed{(나)}$$

한편,

$$S_n=\frac{n(2n+1)}{3}\times\boxed{(나)}$$

따라서

$$6(a_k+a_{k+1}+a_{k+2})=S_6$$

을 만족시키는 k의 값은 $\boxed{(다)}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 m이라 하자. $12\times\frac{f(m)}{g(m)}$의 값을 구하시오. [4점]

29. 함수 $f(x)=x^2(x-3)$과 양의 실수 a에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ f(x)+4 & (x \geq a) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$와 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 t에 대하여 $\lim_{x \to t} \dfrac{h(x)}{g(x)}$의 값이 존재한다.
>
> (나) 방정식 $h(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k는 오직 하나 존재한다.

$h(4)=36$일 때, $h(6)$의 값을 구하시오. [4점]

30. 곡선 $y=\log_2 x$ 위에 서로 다른 두 점 A, B가 있다. 두 점 A, B를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 각각 C, D라 할 때, 네 점 A, B, C, D가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 직선 AB의 기울기는 $\dfrac{1}{3}$이다.
>
> (나) 선분 CD의 중점을 M이라 하고, 점 M을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$, x축과 만나는 점을 각각 P, H라 하면 점 P는 선분 MH를 $1:4$로 내분한다.

사각형 ABDC의 넓이를 구하시오. (단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.) [4점]

일일학습

27학년도 EBS 파이널 4회

04 일차 : 26년 월 일

31. 두 상수 p, q에 대하여 함수 $f(x)=x^4+4px^3+2qx^2$은 $x=-2$와 $x=2$에서 극값을 갖는다. 함수 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $y=f(2)$에 대하여 대칭이동한 그래프의 식을 $y=g(x)$라 할 때, $g(p+q)$의 값은? [4점]

① -160 ② -165 ③ -170 ④ -175 ⑤ -180

32. $a_1=\frac{1}{3}$인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=k(1-S_n)$$

이 성립할 때, $a_1+a_3+a_5$의 값은? (단, k는 $0<k<1$인 상수이다.) [4점]

① $\frac{131}{243}$ ② $\frac{133}{243}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $\frac{137}{243}$ ⑤ $\frac{139}{243}$

33. 1보다 큰 상수 a에 대하여 곡선 $y=\log_a(x-1)$ 위의 제1사분면에 있는 점 P를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_a(x-1)$의 점근선과 만나는 점을 Q, y축과 만나는 점을 R이라 하고, 곡선 $y=\log_a(x-1)$과 x축이 만나는 점을 S라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=3\overline{\mathrm{QR}}$이고 삼각형 PRS의 넓이가 4일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

34. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 가속도가 각각

$$a_1(t)=2t-2,\ a_2(t)=2$$

이다.

| 보기 |

ㄱ. 출발한 후 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 시각 t가 존재한다.
ㄴ. $t=3$일 때, 점 P의 위치는 원점이다.
ㄷ. $0<t\leq 5$일 때, 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값은 $\frac{25}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

35. 두 함수 $f(x)=x$, $g(x)=1-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ 과 음이 아닌 정수 n에 대하여

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)g(x)}{(f(x))^n}$$

의 값이 존재하도록 하는 n의 개수를 k_1, 0이 아닌 극한값을 갖도록 하는 n의 값을 k_2라 하자. $k_1\times k_2$의 값은? [4점]

① 6　② 8　③ 10　④ 12　⑤ 14

36. 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}-x^2-2x+2 & (x<0)\\ x^2-2x+2 & (x\geq 0)\end{cases}$$

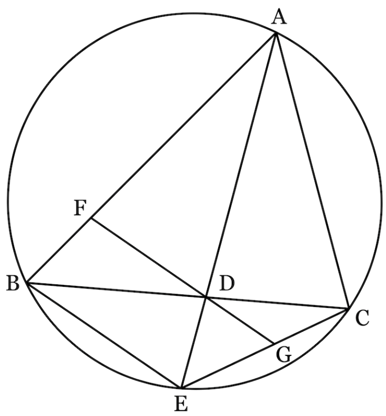
이고, 두 양수 a, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases}-2x^2-7x+a-6 & (x<-b)\\ 1 & (-b\leq x<b)\\ ax-1 & (x\geq b)\end{cases}$$

이다. 함수 $h(x)=\displaystyle\int_0^x (f(t)-g(t))\,dt$가 극값을 갖지 않을 때, $\displaystyle\int_0^3 |f(t)-g(t)|\,dt$의 값은? [4점]

① $\dfrac{3}{2}$　② $\dfrac{7}{4}$　③ 2　④ $\dfrac{9}{4}$　⑤ $\dfrac{5}{2}$

37. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$, $\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{2}$이고 $\angle\mathrm{CAB}=60°$인 예각삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 1이다. $\angle\mathrm{CAB}$의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 D, 외접원과 만나는 점을 E라 하자. 점 D를 지나고 직선 BE와 평행한 직선이 선분 AB와 만나는 점을 F, 선분 CE와 만나는 점을 G라 할 때, 사각형 BEGF의 넓이는? [4점]



① $\dfrac{1+2\sqrt{3}}{12}$ ② $\dfrac{1+\sqrt{3}}{6}$ ③ $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{12}$

④ $\dfrac{2+\sqrt{3}}{6}$ ⑤ $\dfrac{5+2\sqrt{3}}{12}$

38. 세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$에 대하여

$$a_n=\cos\frac{n\pi}{3}-\cos\frac{2n\pi}{3},\ b_n=(a_n)^2,\ c_n=-2^{b_n}\cos n\pi$$

일 때, 다음은 $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}c_n=2025$를 만족시키는 자연수 N의 값을 구하는 과정이다.

> 모든 자연수 n에 대하여
>
> $a_{n+k}=a_n$
>
> 을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 $\boxed{(가)}$이고 a_n이 가질 수 있는 값은 -2, 0, 1이다.
>
> 또한 모든 자연수 n에 대하여
>
> $b_{n+l}=b_n$
>
> 을 만족시키는 자연수 l의 최솟값은 $\boxed{(가)}$이고 b_n이 가질 수 있는 값은 0, 1, 4이다.
>
> 같은 방법으로 모든 자연수 n에 대하여
>
> $c_{n+m}=c_n$
>
> 을 만족시키는 자연수 m의 최솟값은 $\boxed{(가)}$이고
>
> $c_n=-2^{b_n}\cos n\pi=\boxed{(나)}\times 2^{b_n}$
>
> 이므로 c_n이 가질 수 있는 값은 -1, 2, 16이다.
>
> 따라서 $2025=\boxed{(다)}\times 119+2$이므로
>
> $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}c_n=2025$
>
> 를 만족시키는 자연수 N의 값은 $N=\boxed{(라)}$이다.

위의 (나)에 알맞은 식을 $f(n)$, (가), (다), (라)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $f(q)+p+r$의 값을 구하시오. [4점]

39. 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1이고 모든 계수들이 정수인 삼차함수 $g(x)$에 대하여

$$f(x)=\begin{cases} -x-2 & (x \le -1) \\ g(x) & (x > -1) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)-f(2)$의 최솟값을 구하시오. [4점]

> (가) $\displaystyle\lim_{x \to -1+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$ 의 값이 존재하지 않는다.
> (나) 함수 $f(x)$의 극댓값은 존재하지 않고 극솟값만 존재한다.
> (다) 함수 $|f(x)|$가 미분가능하지 않은 x의 값은 1개뿐이다.

40. 1보다 큰 상수 a에 대하여 곡선 $y=\log_a(x-5)-3$이 x축과 만나는 점을 A, 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=a^{x-1}+1$ 및 y축과 만나는 점을 각각 B, C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{BC}}=3:2$일 때, $a^3 \times \overline{\mathrm{OB}}^2$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

일일학습

27학년도 EBS 파이널 5회

05 일차 : 26년 월 일

41. 점 $(-1,\ 0)$에서 곡선 $y=-x^2+x+1$에 그은 두 접선을 각각 $l,\ m$이라 할 때, 곡선 $y=-x^2+x+1$과 두 직선 $l,\ m$으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

42. 원 $x^2+y^2=1$위의 두 점 $\mathrm{P},\ \mathrm{Q}$에 대하여 점 P를 x축의 방향으로 $\sqrt{2}$만큼, y축의 방향으로 $\sqrt{2}$만큼 평행이동한 다음, 원점에 대하여 대칭이동한 점이 Q이다. 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 할 때, $\sin\theta$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① -1 ② $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ 1

43. 두 점 P와 Q는 시각 $t=0$일 때 동시에 각각 점 $\mathrm{A}(-3)$과 점 $\mathrm{B}(1)$에서 출발하여 수직선 위를 움직인다. 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도가 각각 $v_1(t)=3t^2-10t+7, v_2(t)=2t-2$이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

| 보기 |

ㄱ. 출발한 후 점 P는 운동 방향을 두 번 바꾼다.

ㄴ. 출발한 후 두 점 P, Q는 두 번 만난다.

ㄷ. 출발한 후, 시각 $t=k$ $(k>0)$에서 두 점 P, Q사이의 거리가 4가 되도록 하는 실수 k의 개수는 1이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

44. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을

$$b_n=\log_4 a_n$$

이라 하자. 수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{21}의 값은? [4점]

(가) $b_3+b_{11}=3(b_5+b_9)$

(나) $\sum_{k=1}^{14} b_k=3$

① 2^{11} ② 2^{12} ③ 2^{13} ④ 2^{14} ⑤ 2^{15}

45. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

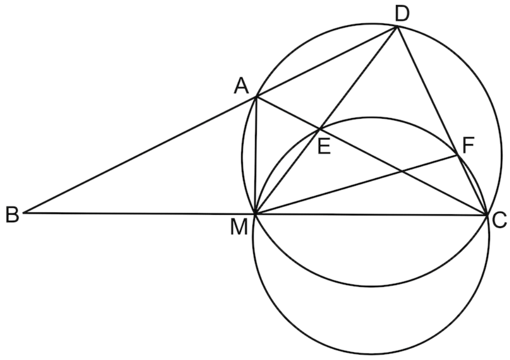
(가) 일차항의 계수가 0인 모든 이차함수 $g(x)$에 대하여
$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = 0$$이다.

(나) 일차항의 계수가 2인 모든 일차함수 $h(x)$에 대하여
$$\int_{-1}^{1} f(x)h(x)dx = 1$$이다.

$f(1)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{21}{20}$ ② $\dfrac{11}{10}$ ③ $\dfrac{23}{20}$ ④ $\dfrac{6}{5}$ ⑤ $\dfrac{5}{4}$

46. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AC}} = 4\sqrt{5}$이고 $\overline{\mathrm{BC}} = 16$인 이등변삼각형 ABC에 대하여 선분 BC의 중점을 M이라 하자. 세 점 A, C, M을 지나는 원과 직선 AB가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하고, 직선 DM과 직선 AC의 교점을 E라 하자. 세 점 C, E, M을 지나는 원과 선분 CD의 교점 중 C가 아닌 점을 F라 할 때, 선분 MF의 길이는? [4점]



① $\dfrac{80}{11}$ ② $\dfrac{82}{11}$ ③ $\dfrac{84}{11}$ ④ $\dfrac{86}{11}$ ⑤ 8

47. 양수 a와 $f(2)>0$, $f'(2)\geq 2$이고 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x)-a & (x<0) \\ f(x) & (x\geq 0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.
> (나) $x>2$에서 방정식 $g(x)=6(x-2)$의 실근은 3뿐이다.

$x<0$에서 함수 $\frac{g(x)}{x-2}$의 최솟값이 6일 때, a의 값은? [4점]

① $\frac{121}{6}$ ② $\frac{61}{3}$ ③ $\frac{41}{2}$ ④ $\frac{62}{3}$ ⑤ $\frac{125}{6}$

48. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> • $a_1=0$
> • 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1}=3a_n+\sum_{k=1}^{n}2^k$$
> 이다.

다음은 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정이다.

> 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1}=3a_n+\sum_{k=1}^{n}2^k$$
> 에서
> $$a_{n+1}+\boxed{(가)}\times 2^{n+1}-1=3\left(a_n+\boxed{(가)}\times 2^n-1\right)$$
> 이고
> $$b_n=a_n+\boxed{(가)}\times 2^n-1 \quad \cdots\cdots ㉠$$
> 이라 하면
> $$b_{n+1}=3b_n$$
> 이므로
> $$b_n=\boxed{(나)} \quad \cdots\cdots ㉡$$
> 이다. ㉠, ㉡에서 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_n=\boxed{(다)}$$
> 이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $\frac{f(1)\times g(4)}{p}$의 값을 구하시오. [4점]

49. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x < 1$일 때, $f(x) = -4x^2 + 5x$이고, $x < 0$ 또는 $x \ge 3$일 때, $f(x) = x$이다. (나) $n \in \{1,\ 2\}$에 대하여 $n \le x < n+1$일 때, $\lvert f(x) - x \rvert = \lvert 4(x-n)(x-n-1) \rvert$ 이다. (다) 함수 $f(x)$가 $x = k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수가 3이다.

실수 t에 대하여 기울기가 t이고 점 $(-1,\ 0)$을 지나는 직선이 함수 $y = f(x)$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 불연속인 모든 실수 t를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것이 t_1, t_2, t_3, t_4일 때, $(t_1 + 19)^2 \times \left(\lim_{t \to t_4-} g(t) - 1 \right)$의 값을 구하시오. [4점]

50. 실수 $a(a > 1)$에 대하여 두 곡선 $y = a^{x+1}$과 $y = \log_a x$가 기울기가 $-\frac{3}{4}$인 한 직선과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때 $\overline{\mathrm{AB}} = 5$이고, 두 곡선 $y = a^{x+\frac{1}{2}} + 1$과 $y = \log_a x$가 기울기가 $-\frac{4}{3}$인 한 직선과 만나는 점을 각각 C, D라 할 때, $\overline{\mathrm{CD}} = \frac{5}{2}$이다. 점 A의 x좌표가 점 C의 x좌표보다 $\frac{1}{2}$만큼 크고 곡선 $y = a^{x+1}$이 점 C를 지날 때, a의 값을 구하시오. (단, 두 점 A, C의 x좌표는 각각 두 점 B, D의 x좌표보다 작다.) [4점]

일일학습

26학년도 EBS 파이널 1회

06 일차 : 26년 월 일

51. 두 상수 a, b $\left(a>0,\ 0<b<\dfrac{\pi}{3}\right)$에 대하여 함수 $f(x)=a\cos bx+1$이라 하자. 닫힌구간 $\left[0,\ \dfrac{2\pi}{b}\right]$에서 함수 $f(x)$가 $x=6$에서 최솟값 -1을 가질 때, $0\le x\le\dfrac{2\pi}{b}$에서 부등식

$$f(3+x)f(3-x)\le -2$$

를 만족시키는 모든 자연수 x의 개수는? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

52. 양수 a에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t\ge 0)$에서의 속도 $v(t)$는

$$v(t)=(t-1)(t-2)(t-a)$$

이다. 점 P가 시각 $t=0$일 때 출발한 후 운동 방향을 한 번만 바꾸도록 하는 a에 대하여 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리의 최댓값은? [4점]

① $\dfrac{7}{6}$ ② $\dfrac{4}{3}$ ③ $\dfrac{3}{2}$ ④ $\dfrac{5}{3}$ ⑤ $\dfrac{11}{6}$

53. 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

(가) $a_4 \times a_6 < 0$이고 $\lvert a_4 \rvert = \lvert a_6 \rvert + 4$이다.
(나) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} (\lvert a_k \rvert + a_k) = 70$

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

54. 최고차항의 계수가 1이고 $f(1) = -5$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x} \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & (x \neq 0) \\ f(0) & (x = 0) \end{cases}$$

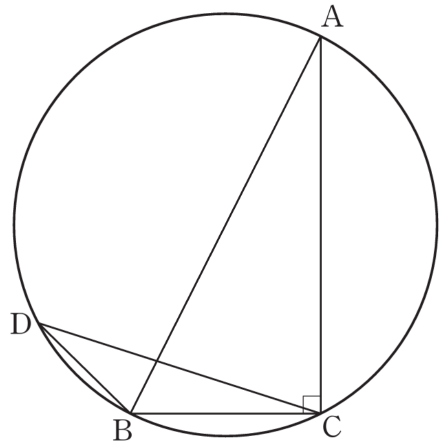
이라 하자. $g(-2) + g(2) = 64$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

55. 그림과 같이 원에 내접하고 $\overline{AC}=4$, $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC가 있다. 점 C를 포함하지 않는 호 AB 위의 점 D에 대하여

$$\overline{BD}=\sqrt{2},\ \cos(\angle ACD)=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

일 때, 선분 CD의 길이는? [4점]



① $2\sqrt{2}$　② 3　③ $\sqrt{10}$　④ $\sqrt{11}$　⑤ $2\sqrt{3}$

56. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(1)=-6$인 삼차함수 $f(x)$와 상수 k에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} k & (f'(x)=0) \\ \dfrac{f(x)}{\{f'(x)\}^2} & (f'(x)\neq 0) \end{cases}$$

이라 할 때, 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 불연속이고, $x\neq 3$인 모든 실수 x에서 연속이다.

$k+g(5)$의 값은? [4점]

① $-\frac{1}{24}$　② $-\frac{1}{12}$　③ $-\frac{1}{8}$　④ $-\frac{1}{6}$　⑤ $-\frac{5}{24}$

57. 모든 항이 정수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 \times a_{51} < 0$을 만족시키는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 3 & (|a_n|\text{이 홀수인 경우}) \\ -\dfrac{1}{2}a_n & (|a_n|\text{이 0 또는 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이다.

(나) $a_5 = 4$이고 $|a_4| < |a_8|$이다.

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

58. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

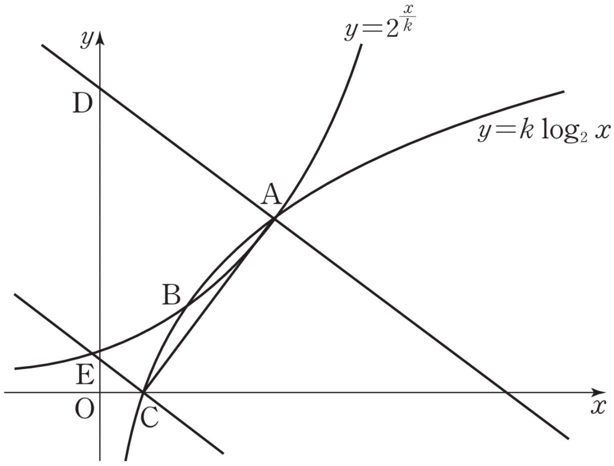
$$x f(x) \geq 0$$

을 만족시키고,

$$\{x \mid f(x) = f(0)\} = \{0,\ 6\}$$

일 때, 부등식 $f'(m) \times f'(m+2) < 0$을 만족시키는 모든 정수 m의 값의 합을 구하시오. [4점]

59. 양수 k에 대하여 그림과 같이 두 곡선 $y=k\log_2 x$, $y=2^{\frac{x}{k}}$이 두 점 A, B에서 만난다. 곡선 $y=k\log_2 x$와 x축이 만나는 점을 C, 점 A를 지나고 직선 AC에 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 D, 점 C를 지나고 직선 AD와 평행한 직선이 y축과 만나는 점을 E라 하자. $\overline{\mathrm{OD}}=\frac{28}{3}\overline{\mathrm{OE}}$일 때, $k\times\overline{\mathrm{OA}}^2$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표 보다 크다.) [4점]



60. 상수 a와 사차함수 $f(x)=x^4+\frac{4}{3}ax^3-4a^2x^2$이 있다. 실수 t에 대하여 구간 $(-\infty,\ t]$에서 $f(x)$의 최솟값을 $g(t)$라 하고, 집합 A를

$$A=\left\{b \,\middle|\, \lim_{h\to 0-}\frac{g(b+h)-g(b)}{h}\neq\lim_{h\to 0+}\frac{g(b+h)-g(b)}{h},\ b\text{는 실수}\right\}$$

라 하자. 집합 A의 원소의 개수가 1이고, 함수 $g(t)$의 최솟값이 -54일 때, $|f(a)|=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

일일학습

26학년도 EBS 파이널 2회

07 일차 : 26년 월 일

61. 함수 $f(x)=3x^2-12x+12$에 대하여

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)-5\}dx=\int_{0}^{2}f(x)dx-\int_{a}^{2}f(x)dx$$

일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

62. $0\le x\le 64$일 때, 방정식 $2\sin\frac{\pi}{4}x+1=0$의 모든 실근의 합은? [4점]

① 540 ② 544 ③ 548 ④ 552 ⑤ 556

63. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 위치가 각각 $x_1(t)=t^3-2t^2+4t$, $x_2(t)=t^2+t$이다. 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 시각에서의 두 점 P, Q 사이의 거리는? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

64. 첫째항이 4인 수열 $\{a_n\}$과 첫째항이 8인 등비수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{b_{k+1}}{a_k} = n^2$$

을 만족시킬 때, $\dfrac{a_2}{a_5}$의 값은? [4점]

① 8 ② 12 ③ 16 ④ 20 ⑤ 24

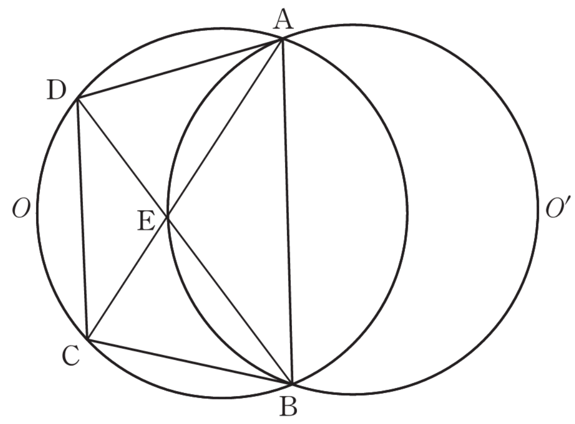
65. 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$4\int_0^x |f(t)|dt = |x-3|f(x)+108$$

을 만족시킬 때, $f(6)$의 값은? [4점]

① 12 ② 18 ③ 24 ④ 30 ⑤ 36

66. 그림과 같이 반지름의 길이가 서로 같은 두 원 O, O'이 두 점 A, B에서 만난다. 원 O위의 두 점 C, D에 대하여 현 BD와 현 AC의 교점을 E라 하면 점 E는 원 O' 위에 있다. 삼각형 DCE와 삼각형 AEB의 넓이가 각각 2, $\frac{5}{2}$이고 현 CD의 길이가 $\sqrt{13}$일 때, 삼각형 ADE의 넓이는? (단, $\overline{DE} < \overline{CE}$이고 점 A, B, C, D는 모두 서로 다른 점이다.) [4점]



① $\frac{17}{10}$ ② $\frac{9}{5}$ ③ $\frac{19}{10}$ ④ 2 ⑤ $\frac{21}{10}$

67. 함수 $f(x)=x^4+ax^3$ $(a>0)$와 최고차항의 계수의 절댓값이 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 함수

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x \leq 0) \\ g(x) & (x>0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $|h(x)|$가 $x=b$에서 미분가능하지 않은 실수 b의 개수는 1이다.
> (나) 두 방정식 $f'(x)=0$, $g'(x)=0$의 해의 집합을 각각 A, B라 하면 $A=B$이다.

$\int_{-2}^{2} h(x)dx=0$을 만족시키는 모든 양수 a의 값의 합은? [4점]

① $\frac{48}{5}$ ② $\frac{346}{35}$ ③ $\frac{356}{35}$ ④ $\frac{366}{35}$ ⑤ $\frac{376}{35}$

68. 1보다 큰 실수 a에 대하여 곡선 $y=a^x-2$와 직선 $y=2\sqrt{3}x$의 두 교점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB의 중점이 원점이다. $a=p+q\sqrt{3}$일 때, pq의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [4점]

69. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)f'(x)$라 할 때, 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g'(1)=g(1)=0,\ g(0)=-3$
(나) 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수를 $h(t)$라 하면 $h(t)\geq 2$인 실수 t가 존재한다.

$g(2)$의 값을 구하시오. [4점]

70. 모든 항이 음이 아닌 정수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{{a_n}^2-a_n}{2} & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{1}{2}a_n & (a_n=0\text{ 또는 }a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

(나) 집합 $A=\{a_n \mid n\text{은 자연수}\}$ 에 대하여 $n(A)=3$이다.

일일학습

26학년도 EBS 파이널 3회

08 일차 : 26년 월 일

71. $a<b$인 모든 실수 a, b에 대하여

$$\int_a^b (x^4-6x^2-8x+k)dx>0$$

이 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값은? [4점]

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

72. 부등식 $(2n)^3 \le x \le (2n+1)^3$을 만족시키는 자연수 n이 존재하는 3000 이하의 모든 자연수 x의 개수는? [4점]

① 1485 ② 1487 ③ 1489 ④ 1491 ⑤ 1493

73. 양수 a에 대하여 닫힌구간 $[0,\ 8]$에서 정의된 함수

$f(x)=a\sin\frac{\pi}{4}x$가 있다. 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 중 y좌표가 최대인 점과 최소인 점을 각각 A, B라 하자. 선분 AB를 지름으로 하는 원이 원점을 지날 때, a의 값은? [4점]

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

74. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-5x^2+16x+1$에 대하여 함수

$$g(x)=3+\int_4^x \{f(t)\}^2\{f(x)-f(t)\}dt$$

의 극댓값을 k라 할 때, $f(k)$의 값은? [4점]

① 7 ② 10 ③ 13 ④ 16 ⑤ 19

75. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=f'(4)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

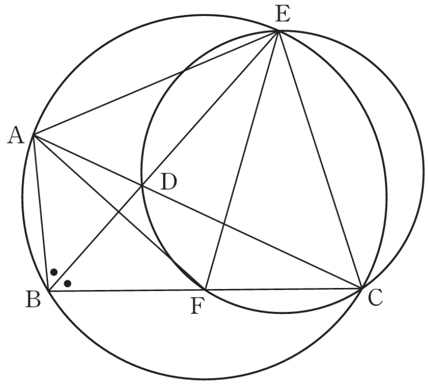
$$g(x)=\begin{cases} f(x)-f(0) & (x \le 0) \\ f(x-2)-f(-2) & (x > 0) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① 104 ② 108 ③ 112 ④ 116 ⑤ 120

76. $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{BC}}=6$, $\overline{\mathrm{CA}}=7$인 삼각형 ABC에서 $\angle \mathrm{ABC}$의 이등분선이 선분 AC와 만나는 점을 D라 하고 직선 BD가 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 E라 하자. 삼각형 DCE의 외접원이 선분 BC와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 F라 할 때, 선분 AF의 길이는? [4점]

① $2\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{7}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 6



77. 0이 아닌 실수 k에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$$f(x)=x^3-2x+2k,\ g(x)=x^2+kx-2$$

라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

| 보기 |

ㄱ. 함수 $g(x)$는 음수인 극솟값을 갖는다.
ㄴ. 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 $f(\alpha)f(\beta)>0$이다.
ㄷ. 모든 실수 k에 대하여 방정식 $f(x)=0$은 방정식 $g(x)=0$의 두 실근 사이에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

78. 함수

$$f(x)=\begin{cases}2^{|x+1|}-1 & (x\le 1)\\ \log_4(x-1) & (x>1)\end{cases}$$

이 있다. 실수 k에 대하여 직선 $y=k$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 세 점에서 만날 때, 만나는 세 점의 x좌표의 합을 $g(k)$라 하자. $g(k)$의 값이 될 수 있는 자연수의 개수를 구하시오. [4점]

79. 최고차항의 계수가 양수이고 $f(0)=f'(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x)+3 & (x \geq 0) \\ f(x)-3 & (x < 0) \end{cases}$$

이라 할 때, 방정식 $g(x)=-3$의 실근은 4 하나뿐이다. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $16S$의 값을 구하시오. [4점]

80. 모든 항이 100 이하의 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+3 & (a_n\text{이 } 4\text{의 배수가 아닌 경우}) \\ \dfrac{1}{4}a_n & (a_n\text{이 } 4\text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. 집합 $A=\{a_n \mid n\text{은 자연수}\}$의 원소의 개수가 6이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합을 구하시오. [4점]

일일학습

26학년도 EBS 파이널 4회

09 일차 : 26년 월 일

81. 이차함수 $f(x)$와 상수 a가

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(-1)}{x-3}=4a,\ \lim_{x\to2}\frac{f(x+2)}{f(x-4)}=3a$$

를 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 최솟값이 2일 때, $f(4)$의 값은? [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

82. 양의 실수 k에 대하여 두 함수

$$f(x)=5^x-k,\ g(x)=\left|\log_5(x+k)\right|$$

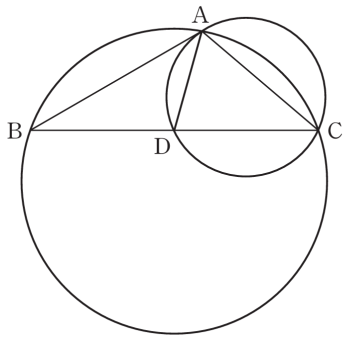
가 있다. $x>-k$인 모든 실수에서 정의된 함수 $f(g(x))$에 대하여 함수 $y=f(g(x))$의 그래프가 직선 $y=k+1$과 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이를 $h(k)$라 하자. $h(k)=2$를 만족시키는 k의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{2}$

83. 그림과 같이 $\overline{AC}=2\sqrt{6}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC 위의 점 D에 대하여

$$\overline{CD}=5,\ \sin(\angle ADC)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

이다. 삼각형 ABC의 외접원의 넓이를 S_1, 삼각형 ADC의 외접원의 넓이를 S_2라 하자. $S_1 : S_2 = 11 : 3$일 때 삼각형 ABC의 넓이는? $\left(\text{단, } \overline{AD}>1,\ 0<\angle ADC<\frac{\pi}{2}\right)$ [4점]



① $6\sqrt{2}$ ② $7\sqrt{2}$ ③ $8\sqrt{2}$ ④ $9\sqrt{2}$ ⑤ $10\sqrt{2}$

84. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 1+\log_2(a_n+1) & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_5=1$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 205 ② 215 ③ 225 ④ 235 ⑤ 245

85. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t \geq 0)$에서의 위치 $x(t)$가

$$x(t)=t^3+at^2+bt \ (a,\ b\text{는 상수})$$

이다. 시각 $t=t_1$, $t=t_2$에서 점 P가 운동 방향을 바꾸고, $t_2-t_1=4$이다. 시각 $t=1$에서 점 P의 위치가 25일 때, 시각 $t=t_1$에서 $t=t_2$까지 점 P가 움직인 거리는? (단, $0<t_1<t_2$) [4점]

① 28 ② 29 ③ 30 ④ 31 ⑤ 32

86. 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 수열 $\{S_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_5의 값은? [4점]

(가) $\{S_k,\ S_{k+1},\ S_{k+2}\}=\{-7,\ -6,\ -5\}$인 자연수 k가 존재한다.
(나) 수열 $\{S_n\}$은 최솟값을 갖는다.

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

87. 두 함수

$$f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2},\ g(x)=\cos x+\frac{1}{2}$$

에 대하여 $0\le x<2\pi$에서 정의된 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\ge g(x)) \\ g(x) & (f(x)<g(x)) \end{cases}$$

라 하자. 방정식 $4|h(x)|^2-8|h(x)|+3=0$의 서로 다른 모든 실근의 합은? [4점]

① 3π ② $\frac{7}{2}\pi$ ③ 4π ④ $\frac{9}{2}\pi$ ⑤ 5π

88. $0\le x<2\pi$일 때, 자연수 n에 대하여 x에 대한 방정식

$$\left|\sin\left(x+\frac{5}{6}\pi\right)-\frac{1}{2}\right|=\frac{n}{6}$$

을 만족시키는 모든 x의 값의 합을 $f(n)$이라 할 때,

$f(1)+f(2)+\cdots+f(10)=\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

89. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}-b_k)=3n^2-2n,\ \sum_{k=1}^{n}(a_{2k}-b_k)=-2n^2+9n$$

을 만족시킨다. 수열 $\{b_n\}$이 $|b_{16}|=|b_{25}|$인 등차수열이고 공차가 0이 아닐 때, $a_{31}+a_{32}+\cdots+a_{50}$의 값을 구하시오. [4점]

90. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$$f'(0)+f'(1)=1,\ f(0)=0$$

을 만족시킨다. 실수 k에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<k) \\ f(x)+|f(x)| & (x \geq k) \end{cases}$$

이다. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $g(4k)$의 값을 구하시오. [4점]

일일학습 | 26학년도 EBS 파이널 5회

10 일차 : 26년 월 일

91. 1보다 큰 실수 a에 대하여 두 함수

$$f(x)=(x^2-1)(x^2+x+a),\ \ g(x)=x^4+x^3-x-1$$

이 있다. 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 곡선 $y=g(x)$가 이등분할 때, a의 값은? [4점]

① $\frac{21}{10}$　② $\frac{11}{5}$　③ $\frac{23}{10}$　④ $\frac{12}{5}$　⑤ $\frac{5}{2}$

92. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_7=0$일 때, $|S_k|=|S_{k+5}|$를 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은? [4점]

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

93. 곡선

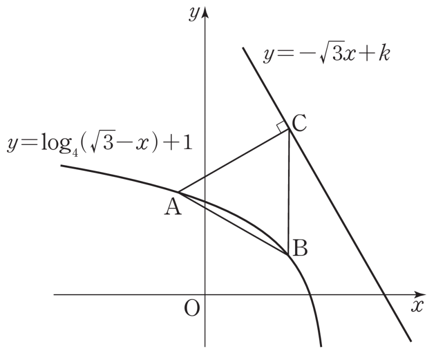
$$y=ax^4+x^2-ax-1$$

위의 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 1)$, $\mathrm{B}(0,\ -1)$에서의 접선이 제4사분면에 있는 점 C에서 만난다. 네 점 O, A, B, C가 모두 한 원 위에 있을 때, 상수 a의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

94. 곡선 $y=\log_4(\sqrt{3}-x)+1$ 위의 두 점 A, B에 대하여 점 A에서 직선 $y=-\sqrt{3}x+k$에 내린 수선의 발을 C라 하자. 삼각형 ABC가 넓이가 $\sqrt{3}$인 정삼각형일 때, 상수 k의 값은? (단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.) [4점]

① $\frac{16-\log_2 3}{4}$ ② $\frac{9-\log_2 3}{2}$ ③ $\frac{18-\log_2 3}{4}$
④ $\frac{10-\log_2 3}{2}$ ⑤ $\frac{20-\log_2 3}{4}$



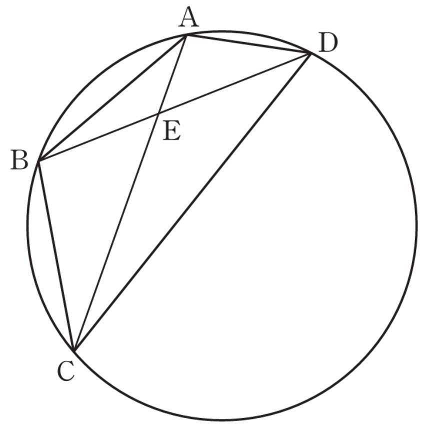
95. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2-7t+k$$

이다. 점 P는 가속도가 5인 시각에 운동 방향을 바꾼다. 시각 $t=k-1$에서 $t=k+1$까지 점 P가 움직인 거리는? (단, k는 상수이다.) [4점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

96. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$인 사각형 ABCD가 한 원에 내접한다. 두 선분 AC, BD의 교점을 E라 하자. $\angle\mathrm{EDC}=30°$이고 두 삼각형 AED, BCE의 외접원의 넓이가 각각 3π, 7π일 때, $\cos(\angle\mathrm{CAD})$의 값은? [4점]



① $-\frac{\sqrt{7}}{14}$ ② $-\frac{\sqrt{14}}{14}$ ③ $-\frac{\sqrt{7}}{7}$ ④ $-\frac{\sqrt{14}}{7}$ ⑤ $-\frac{2\sqrt{7}}{7}$

97. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{a_n+1}{2} & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ a_n-1 & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_4a_6=126$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 407 ② 419 ③ 431 ④ 443 ⑤ 455

98. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-x^4}{1-x^2}=3$	(나) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=4$

99. 함수 $f(x)=\sqrt{3}\tan\frac{\pi x}{2}+1$의 주기를 p라 하고, 직선 $y=p(p-x)$가 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선과 제1사분면에서 만나는 점의 y좌표를 k라 하자. 두 상수 a, b $(-p<a<b<p)$와 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 직선 $y=t$가 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 만나는 서로 다른 점의 개수가 $0<t<k$일 때 2, $t>k$일 때, 4이다. $b-a$의 값을 구하시오. [4점]

100. 닫힌구간 $[2,\ 3]$에서 연속이고, $f(2)=1$, $f(3)=2$인 함수 $f(x)$가 있다. 두 상수 a, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{2}^{3}f(x)\,dx$의 값을 구하시오.

[4점]

(가) $g(x)=\begin{cases} f(x) & (2\le x\le 3) \\ a\times f(x-1)+b & (3<x<4) \end{cases}$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)-1$이다.

(다) $\int_{a}^{b}g(x)\,dx=3$

일일학습

26학년도 EBS 파이널 6회

11 일차 : 26년 월 일

101. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=9$, $a_2=8$이고 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_n-3 & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ a_{n+1}+a_n-2 & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. k 이상의 모든 자연수 t에 대하여 $a_t<0$이 되도록 하는 자연수 k의 최솟값은? [4점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

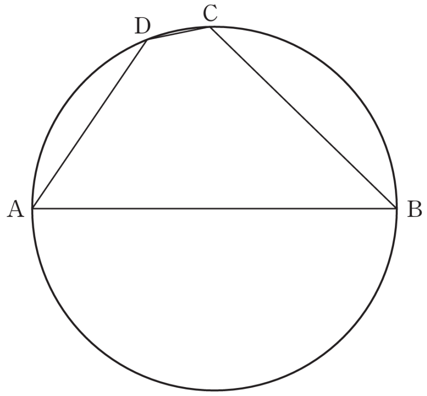
102. $0\le x\le 4\pi$일 때, 방정식

$$\left|2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)-1\right|=1$$

의 모든 실근의 합은? [4점]

① 5π ② $\frac{11}{2}\pi$ ③ 6π ④ $\frac{13}{2}\pi$ ⑤ 7π

103. 그림과 같이 길이가 10인 선분 AB를 지름으로 하는 원에 사각형 ABCD가 내접한다. $\angle \mathrm{ABC}=\frac{\pi}{4}$이고, $\overline{\mathrm{AD}}=6$일 때, 선분 CD의 길이는? [4점]



① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

104. 좌표평면에서 함수 $f(x)=3^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 다음 y축의 방향으로 $\frac{10}{3}$만큼 평행이동한 그래프의 식을 $y=g(x)$라 하자. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, 직선 AB가 y축과 만나는 점의 y좌표는? [4점]

① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ 2 ⑤ $\frac{7}{3}$

105. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2^{x+1}+4 & (x<1) \\ -\dfrac{4}{3}log_2 x & (x \geq 1) \end{cases}$$

에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=|f(k)|$가 실근을 갖도록 하는 자연수 k의 최댓값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

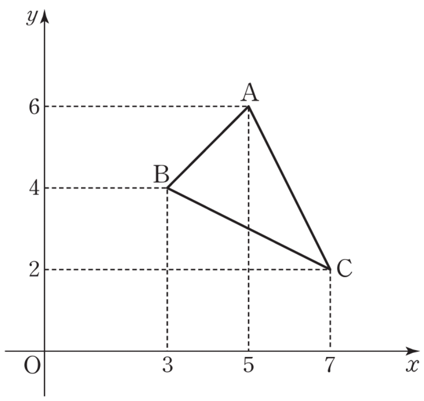
106. 역함수가 존재하는 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{f(x)+1}{x}=3$을 만족시킨다. 실수 a의 값이 최소일 때, $\displaystyle\int_{-1}^{5} f(x)dx$의 값은? (단, b와 c는 상수이다.) [4점]

① 51 ② 54 ③ 57 ④ 60 ⑤ 63

107. 그림과 같이 좌표평면에 세 점 $\mathrm{A}(5,\ 6)$, $\mathrm{B}(3,\ 4)$, $\mathrm{C}(7,\ 2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 함수

$$y=k\log_2(x-t)$$

의 그래프가 삼각형 ABC와 만나도록 하는 두 자연수 $t,\ k$의 모든 순서쌍 $(t,\ k)$의 개수는? (단, $k\le 5$) [4점]



① 18　② 20　③ 22　④ 24　⑤ 26

108. x에 대한 연립부등식

$$\begin{cases}\log_a(x-4)^2\ge\log_a(x-4)+\log_a5\\ a^{2x-2}-1<a^{x+1}-a^{x-3}\end{cases}$$

의 해가 존재하도록 하는 1이 아닌 양수 a의 값의 범위를 $\alpha<a<\beta$라 하고, 이때 연립부등식의 해를 $\gamma<x\le\delta$라 하자. $\alpha+\beta+\gamma+\delta$의 값을 구하시오. (단, $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$는 상수이다.) [4점]

109. 두 삼차함수

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c,\ g(x)=cx^3+bx^2+ax+1$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}$의 값이 존재한다.
(나) 4가 아닌 모든 실수 t에 대하여 $\lim_{x\to t}\frac{g(x)}{f(x)}$의 값이 존재한다.
(다) $\lim_{x\to4}\frac{g(x)}{f(x)}$의 값은 존재하지 않는다.

$\lim_{x\to3}\frac{g(x)}{f(x)}$의 값을 구하시오. (단, a, b, c, d는 상수이다.) [4점]

110. 모든 항이 정수인 등차수열 $\{a_n\}$, 모든 항이 정수이고 공비가 r인 등비수열 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다. (단, $b_1\neq0$, $|r|>1$)

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $c_n=\begin{cases}a_n & (\lvert a_n\rvert<\lvert b_n\rvert)\\ b_n & (\lvert a_n\rvert\geq\lvert b_n\rvert)\end{cases}$ 이다.
(나) $a_3=-b_3$, $c_8=0$, $\sum_{n=1}^{3}c_n=-35$

모든 c_4의 값의 합을 구하시오. [4점]

일일학습

26학년도 EBS 파이널 7회

12 일차 : 26년 월 일

111. $(a-1)(a-2) \neq 0$인 양수 a에 대하여

$$\log_a \frac{4}{a} = \log_{\frac{2}{a}} a$$

일 때, $\log_a \frac{2}{a}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

112. $a > 2$인 실수 a에 대하여 닫힌구간 $[0,\ 12]$에서 정의된 함수 $f(x) = a\sin\frac{\pi x}{6}$가 있다. 곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = 2$가 만나는 두 점 각각 A, B라 하자. 곡선 $y = f(x)$ 위의 제4사분면에 있는 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 사각형 APQB가 넓이가 12인 평행사변형일 때, a의 값은? [4점]

① $\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{14}$

113. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 속도가 각각

$$v_1(t) = 3t^2 - 6t + k,\ v_2(t) = 2t - 7$$

이다. 두 점 P, Q는 시각 $t = 1$일 때 만나고, 시각 $t = 2$일 때 원점에서 만난다. 상수 k의 값은? [4점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

114. 다음 조건을 만족시키는 모든 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_7의 최댓값은? [4점]

(가) $|a_6| = |a_4| + a_8$

(나) $\sum_{n=1}^{10} |a_n| = 25$

① $-\frac{5}{3}$ ② $-\frac{4}{3}$ ③ -1 ④ $-\frac{2}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{3}$

115. 함수 $f(x)=x^3-2x^2+8$과 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)-xf'(t)=0$$

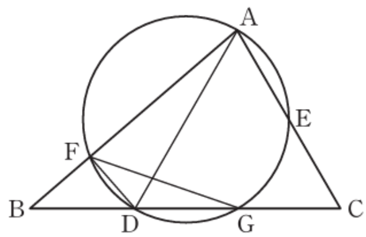
의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $x=k$에서 불연속인 모든 실수 k의 값의 합은? [4점]

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{2}{3}$　③ 1　④ $\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{5}{3}$

116. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 BC를 $1:2$로 내분하는 점을 D, 선분 AC의 중점을 E라 하고, 세 점 A, D, E를 지나는 원이 선분 AB와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 F, 선분 BC와 만나는 점 중 D가 아닌 점을 G라 하자.

$$\overline{\mathrm{DF}}=\sqrt{3},\ \overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{BD}},\ \angle\mathrm{CAD}=\angle\mathrm{DCA}$$

일 때, 선분 FG의 길이는? (단, 점 B는 원 외부에 있다.) [4점]



① $2\sqrt{3}$　② $\sqrt{14}$　③ 4　④ $3\sqrt{2}$　⑤ $2\sqrt{5}$

117. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 어떤 양수 a에 대하여 점 $(a,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수는 방정식
> $$\{f(x)-x\}^2+\{f'(x)-3\}^2=0$$
> 의 서로 다른 실근의 개수보다 작다.

$f'(0)=3$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

118. $a>1$인 실수 a에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} a^{x-1} & (x\le 1) \\ 1-\left(\dfrac{1}{a}\right)^{x-2} & (x>1) \end{cases}$$

이 있다. x에 대한 방정식 $|f(x)|=|f(t)|$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 t의 값은 t_1, t_2 $(t_1<t_2)$이고 $t_1+t_2=\dfrac{7}{3}$일 때, a^2의 값을 구하시오. [4점]

119. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수

$$g(x)=\begin{cases} x^2+3x & (x \le 0) \\ f(x) & (x>0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $g(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.
> (나) 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 두 부분의 넓이는 서로 같다.

$f(\sqrt{2})=\dfrac{q}{p}\sqrt{2}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

120. 수열 $\{a_n\}$은 자연수 k에 대하여 $a_2>a_1=-k$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}<a_n) \\ a_{n+1}-a_n & (a_{n+1} \ge a_n) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_4+a_7=12$가 되도록 하는 모든 k의 값의 합을 구하시오. [4점]

일일학습

26학년도 EBS 수능완성 실전 1회

13 일차 : 26년 월 일

121. 함수 $f(x)=\sin x\,(0 \le x \le 4\pi)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점 A, B, C, D에서만 만나고 이 네 점의 x좌표를 각각 x_1, x_2, x_3, x_4 $(x_1 < x_2 < x_3 < x_4)$라 할 때,

$$x_1+x_2+x_3+x_4=6\pi,\ \sin(x_4-x_1)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

을 만족시키는 모든 x_1의 값의 합은? (단, k는 상수이다.) [4점]

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{5}{12}\pi$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

122. 양수 a와 실수 b에 대하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t \ge 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=t^2-4t+a,\ v_2(t)=2t-b$$

이다. 시각 $t=a$에서 두 점 P, Q의 속도가 같고, 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 두 점 P, Q의 위치의 변화량이 같을 때, $a+b$의 값은? [4점]

① $\frac{13}{2}$ ② $\frac{27}{4}$ ③ 7 ④ $\frac{29}{4}$ ⑤ $\frac{15}{2}$

123. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_{2n-1}=n^2+2n$
> (나) $a_n<a_{n+1}$이고 $a_{2n+1}-a_{2n}$의 값이 일정하다.

$\sum_{n=1}^{16} a_n$의 최솟값은? [4점]

① 568 ② 580 ③ 590 ④ 604 ⑤ 616

124. 함수 $f(x)=x(x-2)(x-3)$과 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<t) \\ -f(x) & (x \geq t) \end{cases}$$

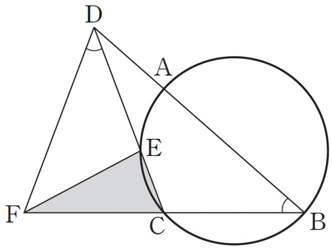
일 때, 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
> (나) $0<a<2$인 모든 실수 a에 대하여 $\int_a^3 g(x)dx>0$이다.

$\int_1^3 g(x)dx$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

125. 그림과 같이 길이가 8인 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 C에 대하여 $\cos(\angle\mathrm{CBA})=\frac{3}{4}$이다. 선분 AB를 1 : 3으로 외분하는 점을 D, 선분 CD와 원이 만나는 점 중 C가 아닌 점을 E라 하자. 직선 BC 위의 점 F가 $\angle\mathrm{CDF}=\angle\mathrm{CBA}$를 만족시킬 때, 삼각형 CEF의 넓이는? (단, $\overline{\mathrm{BF}}>\overline{\mathrm{CF}}$) [4점]



① $2\sqrt{7}$ ② $3\sqrt{7}$ ③ $4\sqrt{7}$
④ $5\sqrt{7}$ ⑤ $6\sqrt{7}$

126. 실수 t에 대하여 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선이 y축과 만나는 점을 $(0,\ g(t))$라 할 때, 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(t)$의 극댓값은 $\frac{35}{27}$이다.
(나) 함수 $|g(t)-g(0)|$은 $t=1$에서만 미분가능하지 않다.

$g(-2)$의 값은? [4점]

① 23 ② 24 ③ 25
④ 26 ⑤ 27

127. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) a_1은 자연수이다.
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{24}{a_n}+2 & (a_n\text{이 24의 약수인 경우}) \\ a_n+5 & (a_n\text{이 24의 약수가 아닌 경우}) \end{cases}$$
> 이다.

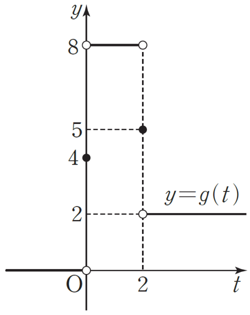
$a_{k+1}-a_k=5$이고 $a_{k+2}-a_{k+1}\neq 5$를 만족시키는 자연수 k가 존재할 때, k의 최댓값은? [4점]

① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

128. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 사차함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x}=0$$

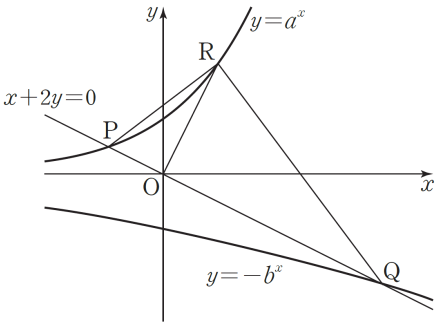
이 성립한다. 실수 t에 대하여 방정식 $|f(x)|=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.



$f(2)=p-q\sqrt{2}$일 때, 두 자연수 p, q에 대하여 $p\times q$의 값을 구하시오. [4점]

129. 그림과 같이 1보다 큰 두 상수 a, b에 대하여 직선 $x+2y=0$이 곡선 $y=a^x$과 만나는 점을 P, 곡선 $y=-b^x$과 만나는 두 점 중 x좌표가 작은 점을 Q라 하자. 곡선 $y=a^x$ 위에 있는 제1사분면 위의 점 R에 대하여 세 점 P, Q, R이 다음 조건을 만족시킬 때, $a^3\times b^4$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

(가) $\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{OR}}=\overline{\mathrm{OR}}:\overline{\mathrm{OQ}}=1:2$
(나) $\angle\mathrm{RPO}=\angle\mathrm{QRO}$



130. 실수 t에 대하여 $x\le t$에서 다항함수 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(x)=3(x-1)(x-k)$ (단, k는 $k>1$인 상수이다.)
(나) 실수 a에 대하여 집합

$$A=\left\{a\,\middle|\,\lim_{t\to a-}\frac{g(t)-g(a)}{t-a}\times\lim_{t\to a+}\frac{g(t)-g(a)}{t-a}=0\right\}$$

의 원소 중 정수인 것의 개수가 4이다.

$f(0)=0$일 때, $f(6)$의 최댓값을 구하시오. [4점]

일일학습 | 26학년도 EBS 수능완성 실전 2회

14 일차 : 26년 월 일

131. 1보다 큰 두 실수 a, b가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\dfrac{\log ab}{5} = \dfrac{\log a - \log b}{3}$
>
> (나) $a^{-1+\log b} = 1000$

$\log a + 2\log b$의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

132. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t) = 3t^2 + 4at + 10, \quad v_2(t) = 4t + a$$

이고, 시각 t에서의 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$라 하자.
$t \geq 0$에서 함수 $f(t)$가 증가할 때, $f(2)$의 최댓값과 최솟값의 합은? (단, a는 실수이다.) [4점]

① 80 ② 82 ③ 84
④ 86 ⑤ 88

133. 모든 항이 양수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_2=2a_1$이고 $\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{S_k}=5$일 때, $\sum_{k=1}^{14}\frac{a_{k+1}}{S_kS_{k+1}}$의 값은? [4점]

① $\frac{115}{40}$ ② $\frac{29}{10}$ ③ $\frac{117}{40}$
④ $\frac{59}{20}$ ⑤ $\frac{119}{40}$

134. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f'(0)=f'(2)=0$
> (나) 방정식 $f(f'(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

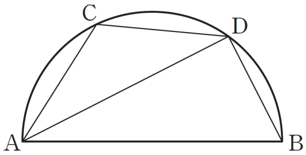
$f(5)$의 값은? [4점]

① 18 ② 21 ③ 24
④ 27 ⑤ 30

135. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 위에 두 점 C, D 있다.

$$\overline{\mathrm{AC}}=3,\ \overline{\mathrm{AD}}=5,\ \tan(\angle\mathrm{CAD})=\frac{3}{4}$$

일 때, 사각형 ABDC의 넓이는? [4점]



① $\frac{49}{6}$ ② $\frac{25}{3}$ ③ $\frac{17}{2}$
④ $\frac{26}{3}$ ⑤ $\frac{53}{6}$

136. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\int_{x}^{x+3} f(|t|)dt$$

이다. 함수 $g(x)$가 $x=\frac{1}{2}$에서 극소이고 $g(1)=0$일 때, 함수 $g(x)$의 극댓값은? [4점]

① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{7}{4}$
④ 2 ⑤ $\frac{9}{4}$

137. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{3} & (a_n\text{이 3의 배수인 경우})\\ a_n+2 & (a_n\text{이 3의 배수가 아닌 경우})\end{cases}$$

를 만족시킬 때, a_1은 3의 배수가 아니고 $a_5+a_6=16$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 1011 ② 1013 ③ 1015 ④ 1017 ⑤ 1019

138. 상수 k와 함수 $f(x)=a(x^3-4x)$ $(a>0)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & (x\le k)\\ -f(x) & (x>k)\end{cases}$$

이다. 열린구간 $(-2,\ 2)$에서 정의된 함수

$$h(x)=\int_{-2}^{x} g(t)dt-\int_{x}^{2} g(t)dt$$

가 $x=0$에서 최댓값 2를 가질 때, $\left|\int_{0}^{4} g(x)dx\right|$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [4점]

139. 자연수 k에 대하여 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} -\log_2(k+1)x & (0<x<1) \\ \log_2\dfrac{x}{k+1} & (x\geq 1) \end{cases}$$

의 그래프와 직선 $y=\log_2(k+2)$가 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리를 $g(k)$라 하자. $\dfrac{18}{7}\times\displaystyle\sum_{k=1}^{7}g(k)$의 값을 구하시오. [4점]

140. 최고차항의 계수가 음수인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} (x+2)^2 & (x<1) \\ f(x) & (x\geq 1) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

$$\left\{a \,\middle|\, \lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\times\lim_{x\to(a+4)+}\frac{g(x)-g(a+4)}{x-(a+4)}\leq 0\right\}$$
$$=\{a\,|\,-6\leq a\leq 2\}\cup\{5\}$$

$g(5)=0$이고 방정식 $g(x)=9$의 서로 다른 실근의 개수가 2일 때, $g(3)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

일일학습

26학년도 EBS 수능완성 실전 3회

15 일차 : 26년 월 일

141. $0 \le x < 2\pi$에서 부등식

$$2\sin^2\frac{x-\pi}{3} - 3\cos\frac{2x+\pi}{6} \le 2$$

의 해가 $\alpha \le x \le \beta$일 때, $\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$의 값은? [4점]

① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　② $-\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$　⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

142. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)-f(-1)$의 최댓값은? [4점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \ge f'(-1)$이다.
> (나) 열린구간 $(-2,\ 2)$에서 함수 $f(x)$는 감소이다.

① -50　② -48　③ -46
④ -44　⑤ -42

143. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하면 $x_1(0)=1$, $x_2(0)=5$이고, 두 점 P, Q의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도는 각각

$$v_1(t)=4t^2-9t+3,\ v_2(t)=t^2-3t+12$$

이다. $x_1(t) \leq x_2(t)$인 시각 t에 대하여 두 점 P, Q 사이의 거리는 시각 $t=a$ $(a \geq 0)$일 때 최댓값 M을 갖는다. $a+M$의 값은? [4점]

① 30 ② 32 ③ 34
④ 36 ⑤ 38

144. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+3 & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{a_n}{2}+5 & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

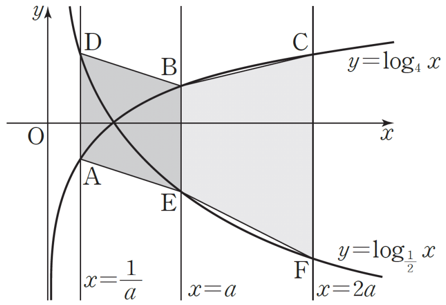
를 만족시킬 때, $a_{30}=10$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 21 ② 22 ③ 23
④ 24 ⑤ 25

145. 실수 a에 대하여 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $f(x)=x^3+3x^2-6ax+2$의 최솟값을 $g(a)$라 할 때, $g(-1)+g(1)$의 값은? [4점]

① $6-6\sqrt{3}$　② $8-6\sqrt{3}$　③ $8-4\sqrt{3}$　④ $10-4\sqrt{3}$　⑤ $10-2\sqrt{3}$

146. 그림과 같이 1보다 큰 상수 a에 대하여 곡선 $y=\log_4 x$가 세 직선 $x=\frac{1}{a}$, $x=a$, $x=2a$와 만나는 점을 각각 A, B, C라 하고, 곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$가 세 직선 $x=\frac{1}{a}$, $x=a$, $x=2a$와 만나는 점을 각각 D, E, F라 하자. 사각형 BEFC의 넓이가 $3a$일 때, 사각형 AEBD의 넓이는 $p\times\left(a-\frac{1}{a}\right)$이다. 상수 p의 값은? [4점]



① $\frac{3}{4}$　② $\frac{3}{2}$　③ $\frac{9}{4}$　④ 3　⑤ $\frac{15}{4}$

147. 두 함수

$$f(x)=x^3-x^2+3x-k,\ g(x)=\frac{2}{3}x^3+x^2-x+4|x-1|$$

에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 정수 k의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값은? [4점]

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

148. 두 자연수 a, b에 대하여 열린구간 $(0,\ 2\pi)$에서 정의된 함수 $f(x)=a\sin 2x+b$가 있다. 자연수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=n$이 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(n)$이라 하자.

$$g(1)+g(2)+g(3)+g(4)+g(5)=17$$

이 되도록 하는 두 수 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$에 대하여 a^2+b^2의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오. [4점]

149. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 > 0$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} \neq a_n$이고

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_n^{\ 2} + n a_n - 4$$

이다.

$\sum_{k=1}^{49} (-a_k)$의 값을 구하시오. [4점]

150. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고 $g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 하자. 네 함수 $f(x)$, $g(x)$, $F(x)$, $G(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_{1}^{x} f(t)\,dt = x\,g(x) + ax + 2$
(나) $g(x) = x\int_{0}^{1} f(t)\,dt + b$
(다) $f(x)\,G(x) + F(x)\,g(x) = 8x^3 + 3x^2 + 4$

두 상수 a, b에 대하여 $120 \times \int_{b}^{a} f(x)\,g(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

일일학습

26학년도 EBS 수능완성 실전 4회

16 일차 : 26년 월 일

151. 다음 조건을 만족시키는 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 4π일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]

> (가) $\sin A = \sin C$
>
> (나) $\sin A = \sin B = \cos C \cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right)$

① $2\sqrt{2}$　② $\sqrt{10}$　③ $2\sqrt{3}$
④ $\sqrt{14}$　⑤ 4

152. 함수 $f(x) = x^2 - 8x + k$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은? [4점]

> $1 \le t \le 10$인 실수 t에 대하여 $2^{f(t)}$의 세제곱근 중 실수인 값 전체의 집합을 A라 할 때, $8 \in A$이다.

① 225　② 250　③ 275
④ 300　⑤ 325

153. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [4점]

> (가) 모든 실수 t에 대하여 $\lim_{x \to t} \frac{f(x)-f(-x)}{x-t}$의 값이 존재한다.
>
> (나) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 7)$에서의 접선의 y절편이 -1이다

① 28 ② 30 ③ 32 ④ 34 ⑤ 36

154. $a_1=-9$이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_p=S_q$를 만족시키는 서로 다른 두 자연수 $p,\ q\ (p<q)$의 모든 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수가 4가 되도록 하는 모든 실수 d의 값의 합은? [4점]

① $\frac{15}{4}$ ② 4 ③ $\frac{17}{4}$ ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{19}{4}$

155. 두 자연수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} |3^{x+2}-5| & (x \le 0) \\ 2^{-x+a}-b & (x > 0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

> 두 집합 $A=\{f(x)\,|\,x \le k\}$, $B=\{\alpha\,|\,\alpha \in A$는 α는 정수$\}$에 대하여 $n(B)=5$가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위는 $\log_3 \dfrac{5}{9} \le k < 1$이다.

$a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M \times m$의 값은? [4점]

① 21 ② 24 ③ 27 ④ 30 ⑤ 33

156. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 양수인 a에 대하여 $0 \le x < 2$일 때

$$f(x)=\begin{cases} ax^2 & (0 \le x < 1) \\ -a(x-2)^2+2a & (1 \le x < 2) \end{cases}$$

이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)+b$를 만족시킨다.
함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=7$로 둘러싸인 부분의 넓이가 73일 때, $a+b$의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

157. 최고차항의 계수가 1이고 $f(-1)=0$인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1이고 $g(\alpha)=0$ $(\alpha<-1)$인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $|f(x)|$는 $x=\alpha$에서만 미분가능하지 않다.
>
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $\displaystyle\int_{\alpha}^{x} f(t)g(t)dt \ge 0$이다.
>
> (다) 다항함수 $h(x)$가 모든 실수 x에 대하여
> $$(x+1)h(x)=f(x)g(x)$$
> 일 때, 함수 $h(x)$의 극솟값은 -27이다.

방정식 $h'(x)=0$을 만족시키는 서로 다른 모든 실수 x의 값의 합은? [4점]

① -9　② -8　③ -7　④ -6　⑤ -5

158. 양수 a와 $0\le t\le 1$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$\left(\sin\frac{2x}{a}-t\right)\left(\cos\frac{2x}{a}-t\right)=0$$

의 실근 중에서 집합 $\{x\,|\,0\le x\le 2a\pi\}$에 속하는 모든 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \cdots,\ \alpha_n$ (n은 자연수)라 할 때, α_n이 다음 조건을 만족시킨다.

> $d\neq 3$인 자연수 d에 대하여
> $\alpha_3-\alpha_1=d\pi,\ \alpha_4-\alpha_2=6\pi-d\pi$이다.

$t\times(10a+d)$의 값을 구하시오. [4점]

159. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
(나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

$f(x)=\frac{4}{9}$, $f'(0)=0$일 때, $f(4)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

160. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+3 & (|a_n|<8) \\ -\frac{1}{3}a_n & (|a_n|\geq 8) \end{cases}$$

을 만족시킨다. 모든 자연수 k에 대하여

$$a_{3+5k}=a_3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^k$$

이고, 부등식 $|a_m|\geq 8$을 만족시키는 100 이하의 자연수 m의 개수가 20 이상이 되도록 하는 모든 정수 a_1의 값의 합을 구하시오. [4점]

일일학습

26학년도 EBS 수능완성 실전 5회

17 일차 : 26년 월 일

161. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3t^2-2t,\ v_2(t)=2t$$

이다. 시각 $t=a$에서의 두 점 P, Q의 위치가 서로 같을 때, 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 움직인 거리는? (단, a는 양수이다.) [4점]

① $\frac{104}{27}$ ② $\frac{107}{27}$ ③ $\frac{110}{27}$ ④ $\frac{113}{27}$ ⑤ $\frac{116}{27}$

162. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 0)$에서의 접선의 기울기가 1이고, 곡선 $y=(x-2)f(x)$ 위의 점 $(2,\ 0)$에서의 접선의 기울기가 4일 때, $f(-1)$의 값은? [4점]

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

163. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$$

이다. 상수 k에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x(x+1)}{f(x)} & (f(x)\neq0)\\ k & (f(x)=0)\end{cases}$$

이고 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $f(1)$의 값은? [4점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

164. 모든 항이 정수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}a_n-8 & (a_n\geq0)\\ {a_n}^2 & (a_n<0)\end{cases}$$

을 만족시킬 때, $a_6+a_8=0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 74 ② 78 ③ 82 ④ 86 ⑤ 90

165. 함수 $f(x)=3\sin\pi x+2$가 있다. $0\le x\le 3$일 때, 양수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $\{f(x)-t\}\{2f(x)+t\}=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$, 서로 다른 모든 실근의 합을 $h(t)$라 하자. $h(t)-g(t)$의 최댓값은?
(단, $g(t)=0$이면 $h(t)=0$으로 한다.) [4점]

① $\frac{3}{2}$　② 2　③ $\frac{5}{2}$
④ 3　⑤ $\frac{7}{2}$

166. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$에서만 미분가능하지 않다.
(나) 방정식 $|f(x)|=f(-1)$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 이 두 실근의 합은 1보다 크다.
(다) 방정식 $|f(x)|=f(2)$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

0이 아닌 두 상수 m, n에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} f(x-m)+n & (x<2) \\ f(x) & (x\ge 2) \end{cases}$$

이다. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 m, n에 대하여 $m+n$의 값은? [4점]

① 84　② 90　③ 96
④ 102　⑤ 108

167. 자연수 a $(a>1)$과 정수 b에 대하여 두 함수

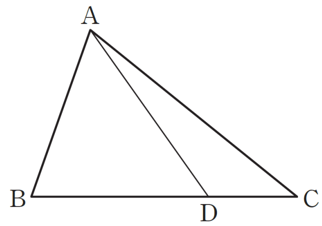
$f(x)=\log_2(x+a)$, $g(x)=4^x+\frac{b}{8}$가 다음 조건을 만족시킨다

(가) 곡선 $y=f(x)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 곡선 $y=h(x)$에 대하여 두 곡선 $y=g(x)$, $y=h(x)$는 서로 다른 두 점에서 만난다.
(나) 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수가 8이다.

$a+b$의 값은? [4점]

① -28 ② -27 ③ -26
④ -25 ⑤ -24

168. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=x$, $\overline{CA}=3-x$인 삼각형 ABC의 변 BC 위에 $\overline{AB}=\overline{BD}$인 점 D를 잡는다. $\cos(\angle ABC)=\frac{1}{3}$일 때, $\sin^2(\angle BAD)+\sin^2(\angle CAD)=k$이다. $81k$의 값을 구하시오. (단, $1<x<2$) [4점]



169. 모든 항이 정수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $|a_1|$의 최댓값을 구하시오. [4점]

> (가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_6a_8 < a_na_{n+1}$이다.
>
> (나) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(|a_k|+a_k)=30$

170. 상수함수가 아닌 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 할 때, 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $G(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $\{f(x)g(x)\}'=18\{G(x)+2f'(x)+22\}$이다.
>
> (나) 모든 실수 x에 대하여
> $f(x)=\displaystyle\int_1^x g(t)dt+6(3x-2)$이다.
>
> (다) $g(1)<0$이고 $G(0)=1$이다.

닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $h(x)$가

$$h(x)=\begin{cases}-f(x)+12 & (0\le x<1)\\ f(x) & (1\le x\le 2)\end{cases}$$

이고, 모든 실수 x에 대하여 $h(x)=h(x-2)+6$을 만족시킬 때, $\displaystyle\int_{g(4)}^{g(6)}h(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]

일일학습

26학년도 EBS 버티컬 시즌1 1회

18 일차 : 26년 월 일

171. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$(1-x)f(x)=x^3-6x^2+9x-\int_{-1}^{x} f(t)dt$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

172. 직선 $x+ny-n=0$과 함수 $y=\tan\frac{\pi}{4}x$의 그래프가 제1사분면에서 만나는 점의 개수가 3이 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합은? [4점]

① 42 ② 46 ③ 50 ④ 54 ⑤ 58

173. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 위치 $x(t)$가

$$x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + a$$

이다. 시각 $t = b(b > 0)$에서 점 P의 위치는 1이고 $t \geq 0$인 모든 실수 t에 대하여 $x(t) \geq x(b)$이다. 시각 $t = a + b$에서 점 P의 속도는? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

174. $a_2 = 21$인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $b_n = S_n + 4$라 할 때, 수열 $\{b_n\}$은 공비가 4인 등비수열이다. $a_1 + a_3$의 값은? [4점]

① 87　② 90　③ 93　④ 96　⑤ 99

175. 두 함수 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+18$, $g(x)=2x+3$에 대하여 함수

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\ge g(x)) \\ g(x) & (f(x)<g(x)) \end{cases}$$

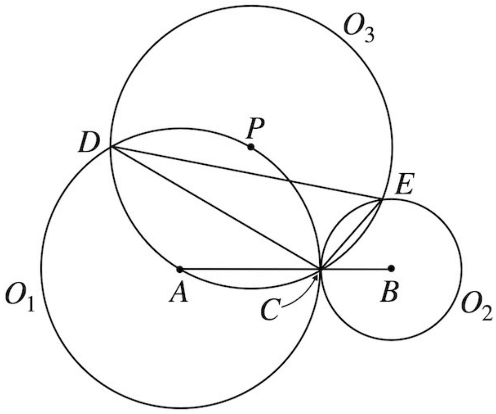
가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수는 3이다.
> (나) 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극대, $x=3$에서 극소이다.

함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① 31 ② 32 ③ 33 ④ 34 ⑤ 35

176. 그림과 같이 길이가 3인 선분 AB에 대하여 중심이 A이고 반지름의 길이가 2인 원 O_1과 중심이 B이고 반지름의 길이가 1인 원 O_2가 만나는 점을 C라 하자. 원 O_1 위의 점 P를 중심으로 하고 두 점 A, C를 지나는 원 O_3이 원 O_1과 만나는 점 중 C가 아닌 점을 D라 하고, 원 O_3이 원 O_2와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 E라 할 때, 삼각형 EDC에서 $\sin(\angle\mathrm{EDC})$의 값은? [4점]



① $\frac{\sqrt{17}}{14}$ ② $\frac{\sqrt{19}}{14}$ ③ $\frac{\sqrt{21}}{14}$ ④ $\frac{\sqrt{23}}{14}$ ⑤ $\frac{5}{14}$

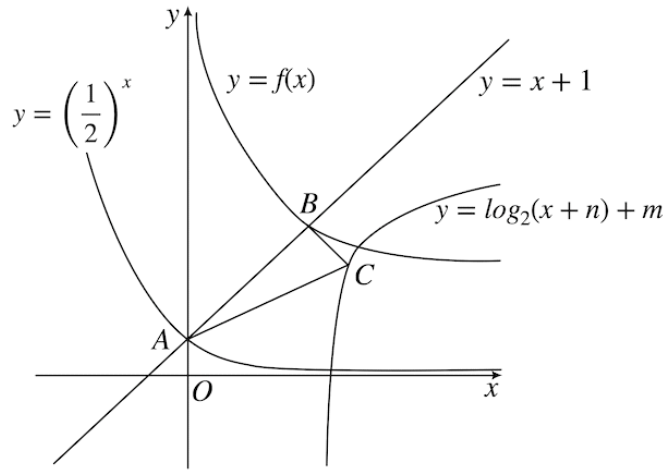
177. 함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x+16$과 실수 t에 대하여 집합

$$A=\{x \mid f(x)f'(t)(x-t)+f(x)f(t)=0\}$$

일 때, 집합 A의 원소의 개수가 1이 되도록 하는 모든 t의 값의 합은? [4점]

① $\frac{11}{2}$　② $\frac{13}{2}$　③ $\frac{15}{2}$　④ $\frac{17}{2}$　⑤ $\frac{19}{2}$

178. 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 일치한다. 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프가 y축과 만나는 점 A는 이 평행이동에 의하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x+1$이 만나는 점 B로 이동된다. 또 점 B를 지나고 기울기가 -1인 직선이 함수 $y=\log_2(x-n)+m$의 그래프와 만나는 점을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 6일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [4점]
(단, m, n은 양의 실수이다.)



179. 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x^2}=\frac{1}{2}$
> (나) $0<x_1<x_2$임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여
> $f(x_2)-f(x_1)+{x_2}^2-{x_1}^2>0$이다.

$f(\sqrt{2})$의 최솟값을 m이라 할 때, $9m^2$의 값을 구하시오. [4점]

180. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 a_1의 값의 합을 구하시오. [4점]

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n+1}{2} & (a_n\text{이 홀수인 경우})\\ a_n+3 & (a_n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$
> 이다.
> (나) $a_2\neq a_4$이고 $a_4=a_6$이다.

일일학습

26학년도 EBS 버티컬 시즌2 1회

19 일차 : 26년 월 일

181. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이

$$S_n = n^2 + 2n - 1$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_{k+3} - a_k)$의 값은? [4점]

① 60 ② 61 ③ 62 ④ 63 ⑤ 64

182. 시각 $t = 0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = \frac{1}{3}t^3 - at^2 + 3a \, (a > 0)$$

이다. 점 P가 출발 후 운동 방향을 바꾸지 않도록 하는 모든 양수 a에 대하여 시각 $t = 2$에서 점 P의 위치의 최댓값은? [4점]

① $\frac{17}{3}$ ② 6 ③ $\frac{19}{3}$ ④ $\frac{20}{3}$ ⑤ 7

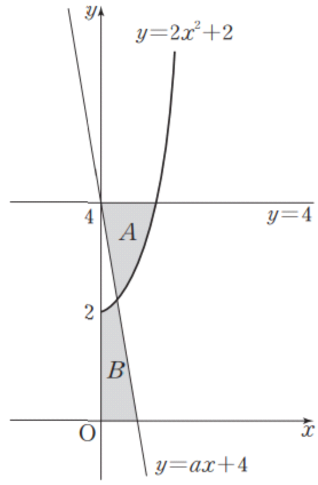
183. 1이 아닌 두 양수 a, b에 대하여 이차방정식

$$x^2-\left(\log_a \frac{a^3}{4}\right)x-2=0$$

의 서로 다른 두 근이 $\log_2 a$, $\log_a b$일 때, ab의 값은? [4점]

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

184. 그림과 같이 $a<0$인 상수 a에 대하여 곡선 $y=2x^2+2(x\geq 0)$과 두 직선 $y=ax+4$, $y=4$로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=2x^2+2(x\geq 0)$과 x축, y축 및 직선 $y=ax+4$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A=B$일 때, a의 값은? [4점]

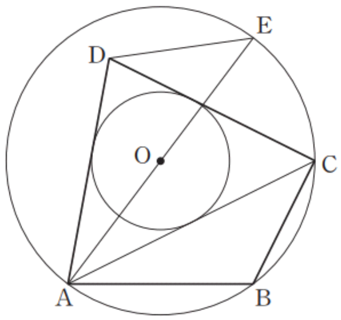


① -6　② $-\frac{11}{2}$　③ -5　④ $-\frac{9}{2}$　⑤ -4

185. 그림과 같이

$$\overline{\mathrm{AB}}=3,\ \overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{5},\ \cos(\angle\mathrm{ABC})=-\frac{\sqrt{5}}{5}$$

인 사각형 ABCD 에 대하여 삼각형 ABC 의 외접원의 중심을 O 라 하고, 직선 AO 와 이 외접원이 만나는 점 중 점 A 가 아닌 점을 E 라 하자. 삼각형 ACD 의 내접원의 중심이 점 O 와 일치할 때, 선분 DE 의 길이는? [4점]



① $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{4\sqrt{5}}{3}$ ④ $\frac{5\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

186. 1이 아닌 실수 α와 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $|f(x)-f(1)|$은 $x=\alpha$에서만 미분가능하지 않다.
>
> (나) 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{2}$에서 극솟값 0을 갖는다.

실수 t에 대하여 방정식 $f(f(x))=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 $t=\beta$에서만 불연속이다. $\alpha+\beta$의 값은? (단, β는 실수이다.) [4점]

① $-\frac{9}{16}$ ② $-\frac{7}{16}$ ③ $-\frac{5}{16}$ ④ $-\frac{3}{16}$ ⑤ $-\frac{1}{16}$

187. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 값의 합은? [4점]

(가) $a_8=2$이고, 모든 항이 30 이하의 자연수이다.
(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+4 & (a_n\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ \frac{1}{3}a_n & (a_n\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$$

이다.

① 68　② 70　③ 72　④ 74　⑤ 76

188. 이차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} \frac{1}{2} & (x<1) \\ \frac{1}{f(x)} & (1\le x\le 3) \\ \frac{1}{6} & (x>3) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축과 만나는 점의 좌표를 $(0,\ k)$라 할 때, 자연수 k의 최댓값을 구하시오. [4점]

189. 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}\log_3(9x-9) & (1<x<4)\\ (\sqrt{3})^{6-x} & (x\geq 4)\end{cases}$$

라 하자. $t\leq x\leq t+2$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 3이 되도록 하는 모든 자연수 t의 개수를 a, $s\leq x\leq s+1$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 1이 되도록 하는 모든 실수 s의 값의 곱을 b라 할 때, $a+3b$의 값을 구하시오. (단, $t>1$, $s>1$) [4점]

190. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}f(x)\times f'(x) & (x<1)\\ -f(x)\times f'(x) & (x\geq 1)\end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 할 때, 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (나) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (다) $h(k)=2$이고 $\lim\limits_{t\to k}h(t)>\lim\limits_{t\to k+}h(t)$를 만족시키는 실수 k가 존재한다.

$g(-1)=20$일 때, $g(0)\times g(3)$의 값을 구하시오. [4점]

일일학습

26학년도 EBS 버티컬 시즌3 1회

20 일차 : 26년 월 일

191. 상수 a와 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x f(t)dt = 2x^3 - ax^2 + x\int_0^1 f(t)dt$$

를 만족시킨다. $\int_0^a f(x)dx = 0$일 때, $f(a)$의 값은? [4점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

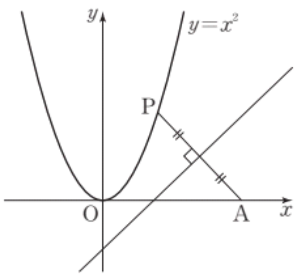
192. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$$a_n = \frac{n}{2n-1}$$

이고 $\sum_{k=1}^{6} k^2(a_k - a_{k+1}) = pa_7$일 때, 상수 p의 값은? [4점]

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

193. 그림과 같이 $t \neq 4$인 양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=x^2$위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$과 x축 위의 점 $\mathrm{A}(4,0)$이 있다. 선분 PA의 수직이등분선의 x절편을 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t \to \infty} \frac{f(t)}{t^3}$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

194. 함수 $y=-|x|+k(k>1)$의 그래프가 함수 $y=2^x$의 그래프와 제1 사분면에서 만나는 점을 A라 하고, 두 함수

$$y=\log_2 x,\ y=\log_2(-x)$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $\left(\frac{2}{3},\ a\right)$일 때, $k+a$의 값은? (단, k와 a는 상수이다.) [4점]

① $\frac{23}{3}$ ② 8 ③ $\frac{25}{3}$ ④ $\frac{26}{3}$ ⑤ 9

195. 자연수 k에 대하여 두 점 P와 Q는 시각 $t=0$일 때 각각 점 $\mathrm{A}(k)$와 점 $\mathrm{B}(2k)$에서 출발하여 수직선 위를 움직인다. 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t) = 3t^2 - 12t + k,\ \ v_2(t) = -2t - 4$$

이다. 두 점 P, Q가 출발한 후 한 번만 만나도록 하는 k의 최솟값은? [4점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

196. 다음 조건을 만족시키는 0이 아닌 두 실수 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$는 모두 2개이다. 이 두 순서쌍을 각각 $(a_1,\ b_1),\ (a_2,\ b_2)(a_1 < a_2)$라 할 때, $(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2$의 값은? [4점]

> $0 < x < \pi$에서 정의된 두 함수
> $$y = a\sin x,\ \ y = b|\cos x| + k$$
> 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위는 $-3 < k < 4$이다.

① 94 ② 95 ③ 96 ④ 97 ⑤ 98

197. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}-f(-x)+x & (x<0)\\ f(x)+x & (x\ge 0)\end{cases}$$

이라 하자. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $|g(x)|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.
> (나) 함수 $g(x)$는 $x=b$ $(-1<b<0)$에서 극댓값 1을 갖고, 함수 $|g(x)|$는 $x=-1$에서 극솟값을 갖는다.

$f(1)=-1$일 때, $b\times f(4)$의 값은? [4점]

① -251 ② -252 ③ -253 ④ -254 ⑤ -255

198. 2 이상의 두 자연수 m, n에 대하여 m^m의 n제곱근이 자연수가 되도록 하는 n의 개수를 $f(m)$이라 하자. $\sum_{m=2}^{8} f(m)$의 값을 구하시오. [4점]

199. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$f(x)g(x)=x^4+x^3-4x^2-4x$$

이고,

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+1}{x-1}=\frac{g(1)}{12}$$

일 때, 곡선 $y=g(x)$위의 점 $(1,\ g(1))$에서의 접선의 방정식은 $y=ax+b$이다. $a-b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 상수이다.) [4점]

200. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 10 이하의 모든 자연수 p의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} n+a_n & (a_n<n) \\ a_n-p & (a_n\geq n)\end{cases}$$

이다.

(나) $a_m=a_{m+4}=0$인 자연수 m이 존재한다.

일일학습 26학년도 EBS 버티컬 시즌4 1회

21 일차 : 26년 월 일

201. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 위치 x가

$$x = t^3 - at^2 + bt \ (a,\ b\text{는 양의 상수})$$

일 때, 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 점 P는 운동 방향을 바꾸지 않는다.
>
> (나) 점 P의 속력은 $t = \frac{2}{3}$일 때 최소이다.

점 P의 시각 $t = 3$에서의 위치의 최솟값은? [4점]

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

202. 양수 k에 대하여 세 함수

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+2),\ g(x) = \log_4(x+2),$$
$$h(x) = \log_2(x-k)$$

가 있다. 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$의 그래프의 교점을 A, 두 함수 $y = f(x)$, $y = h(x)$의 그래프의 교점을 B, 두 함수 $y = g(x)$, $y = h(x)$의 그래프의 교점을 C라 하고, 함수 $y = h(x)$의 그래프의 점근선이 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$의 그래프와 만나는 점을 각각 D, E라 하자. $\overline{\text{DE}} = \frac{3}{2}\log_2\frac{15}{4}$일 때, 삼각형 ABC의 무게중심의 x좌표는? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 2 ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

203. 세 정수 a, b, c와 두 함수

$$f(x)=3x^2+ax+b,\ g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x+1} & (x\neq -1)\\ c & (x=-1)\end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(b-c)$의 값은? [4점]

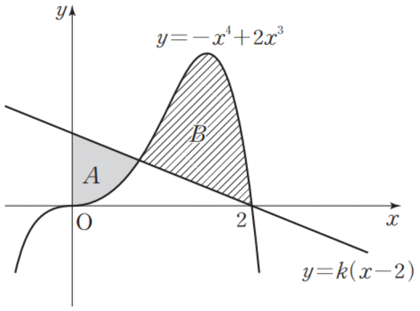
(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (나) $\int_{-a}^{a} g(x)dx+f(a)=\int_{-a}^{a} f(x)dx$

① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

204. $x\geq 0$에서 정의된 함수 $f(x)=|p\cos x+q|\,(p>0)$에 대하여 $f(0)<f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$이다. 직선 $y=t$가 곡선 $y=f(x)$와 만나도록 하는 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 모든 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열한 수열이 등차수열이 되도록 하는 t의 값은 α, $\beta(\alpha<\beta)$뿐이다. $t=\alpha$, $t=\beta$일 때의 이 등차수열을 각각 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이라 하자. $\alpha+\beta=7$이고 $\dfrac{f(b_2)}{a_3}=\dfrac{2}{\pi}$일 때, $p+q$의 값은? (단, p와 q는 상수이다.) [4점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

205. 그림과 같이 $-8<k<0$인 상수 k에 대하여 곡선 $y=-x^4+2x^3$과 직선 $y=k(x-2)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=-x^4+2x^3$과 직선 $y=k(x-2)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $B-A=1$일 때, k의 값은? [4점]



① $-\frac{3}{5}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{2}{5}$ ④ $-\frac{3}{10}$ ⑤ $-\frac{1}{5}$

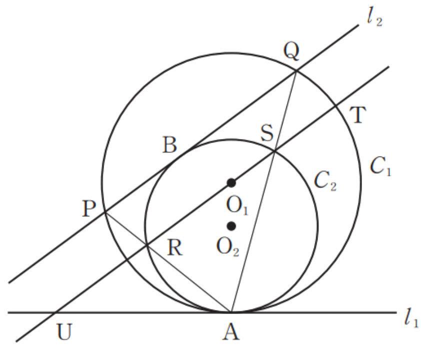
206. 그림과 같이 중심이 각각 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$이고 반지름의 길이가 각각 3, 2인 두 원 C_1, C_2가 직선 l_1과 점 A에서 동시에 접하고 있다. 원 C_2 위에 있고 직선 $\mathrm{O_1O_2}$ 위에 있지 않은 점 B에서 원 C_2에 접하는 직선 l_2와 원 C_1이 만나는 두 점 중 점 B에 가까운 점을 P, 다른 한 점을 Q라 하고, 두 선분 AP, AQ가 원 C_2와 만나는 점을 각각 R, S라 하자. 직선 RS가 원 C_1과 만나는 점 중 점 S에 가까운 점을 T, 직선 l_1과 만나는 점을 U라 하자. 점 O_1이 선분 RS 위의 점일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 두 원 C_1, C_2는 한 평면 위에 있고, 원 C_2는 원 C_1의 내부에 있다.) [4점]

| 보기 |

ㄱ. $\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{3}{2}\overline{\mathrm{RS}}$

ㄴ. 삼각형 $\mathrm{O_1BO_2}$의 넓이는 $\frac{2}{\overline{\mathrm{O_1U}}}$와 같다.

ㄷ. $\left(\frac{\overline{\mathrm{O_1B}}^2-5}{4}\right)^2+\left(\frac{\overline{\mathrm{O_2T}}^2-10}{6}\right)^2=1$



① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

207. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합의 두 부분집합

$$A=\{x \mid f(x)=x\},\ \ B=\{x \mid |f(x)|=x\}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 양수 p에 대하여 $p \in A$이다.
> (나) $q \in A$이면 $0<k<1$인 상수 k에 대하여
> $A \cup \{kp+(1-k)q\}=B$이다.

$f'(p)=p$일 때, $f\left(-\dfrac{p}{3}\right)$의 값은? [4점]

① -15　② $-\dfrac{44}{3}$　③ $-\dfrac{43}{3}$　④ -14　⑤ $-\dfrac{41}{3}$

208. 첫째항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_6=60$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [4점]

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
> $(a_{n+1}-a_n+k)(a_{n+1}+2a_n-k)=0$
> 을 만족시킨다.
> (나) $a_1=a_3$이고 $a_1 \neq a_2$이다.

209. 함수 $f(x)=x^4-\frac{8}{3}x^3-2x^2+8x+2$와 상수 k에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=|f(x)-k|$$

이고 두 집합 A, B를

$$A=\left\{x \,\middle|\, \lim_{h\to 0-}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\lim_{h\to 0+}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=0\right\},$$

$$B=\{g(x)\,|\,x\in A\}$$

라 할 때, $n(A)=7$, $n(B)=3$이다. 집합 B의 모든 원소의 합이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

210. 양의 실수 $a\left(a\neq\frac{2}{3},\ a\neq 1\right)$과 상수 b에 대하여 세 집합 A, B, C를

$$A=\{x\,|\,a^{x^2+bx}\ge a^{x+2},\ x\text{는 실수}\},$$

$$B=\left\{x \,\middle|\, \left(a+\frac{1}{3}\right)^{x^2+bx}\ge\left(a+\frac{1}{3}\right)^{x+2},\ x\text{는 실수}\right\},$$

$$C=\{x\,|\,x\in A\text{이고 } x\in B,\ x\text{는 실수}\}$$

라 하자. 집합 C는 유한집합이고 $1\in C$가 되도록 하는 모든 a와 b에 대하여 $p<a$를 만족시키는 실수 p의 최댓값을 M, 집합 C의 모든 원소의 곱을 c라 할 때, $|3\times M\times b\times c|$의 값을 구하시오. [4점]

일일학습 26학년도 EBS 만점마무리 시즌1 1회

22 일차 : 26년 월 일

211. 함수 $f(x)=3x^2+4x$와 모든 실수 h에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)-g(x-h)=\int_{x-h}^{x} f(t)dt$$

를 만족시킨다. $g(0)=1$일 때, $g(2)$의 값은? [4점]

① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

212. 세 양수 a, b, c에 대하여 주기가 4π인 함수 $f(x)=|a\sin bx-c|$가 있다. 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합이 9이고, 차가 5일 때, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{11}{4}$ ③ 3 ④ $\frac{13}{4}$ ⑤ $\frac{7}{2}$

213. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t>0)$에서의 위치는

$$x=3t^4-8t^3-6t^2+24t$$

이다. 점 P가 운동 방향을 바꾸는 두 지점 사이의 거리는? [4점]

① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

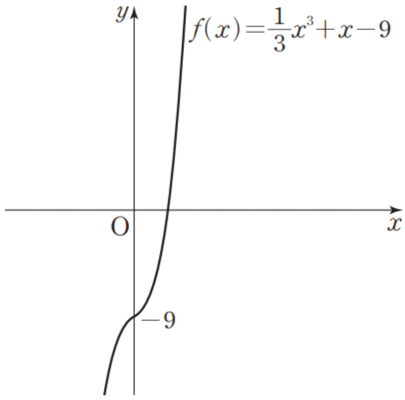
214. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

모든 자연수 n에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{a_{k+1}}=n^2-16n$이다.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{b_k}{a_k}$의 값이 최소가 되도록 하는 자연수 m의 값은? [4점]

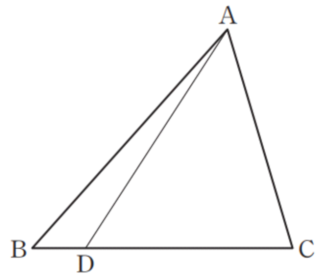
① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

215. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x-9$와 그 역함수 $g(x)$에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 직선 $y=-x-9$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]



① 77 ② 78 ③ 79 ④ 80 ⑤ 81

216. 그림과 같이 $\overline{AB}=9$, $\overline{BC}=8$, $\overline{CA}=7$인 삼각형 ABC가 있다. 변 BC 위의 점 D에 대하여 $\overline{BC}=\overline{AD}$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



| 보기 |

ㄱ. $\sin C=\frac{3\sqrt{5}}{7}$

ㄴ. $\sin(\angle \mathrm{ADC})=\frac{3\sqrt{5}}{8}$

ㄷ. $\overline{BD}=6-\sqrt{19}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

217. 양수 a와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\int_a^x f(t)dt$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $\lvert g(x)\rvert$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수는 1이다.
(나) $g'(a)=g(a)$, $g'(a+2)=g(a+2)$

$g(2a)=a^3$일 때, $g(9)$의 값은? [4점]

① $-\frac{7}{8}$　② $-\frac{3}{4}$　③ $-\frac{5}{8}$
④ $-\frac{1}{2}$　⑤ $-\frac{3}{8}$

218. 좌표평면 위의 세 곡선

$$y=\log_3(x+1),\ y=3+\log_3(x+1),\ y=\log_3(x-2)$$

가 직선 $y=-x+k$와 만나는 점을 각각 A, B, C라 하자. 점 A가 선분 BC를 $2:1$로 내분할 때, 상수 k의 값을 구하시오. [4점]

219. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 실수 x에 대하여
> $$\frac{2f'(x)-f'(1)}{2} \geq \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-10}{2h}$$
> 이다.

$f'(2)=0$일 때, 방정식 $\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt+\int_0^x\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt=n$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 자연수 n의 개수를 구하시오. [4점]

220. 모든 항이 실수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

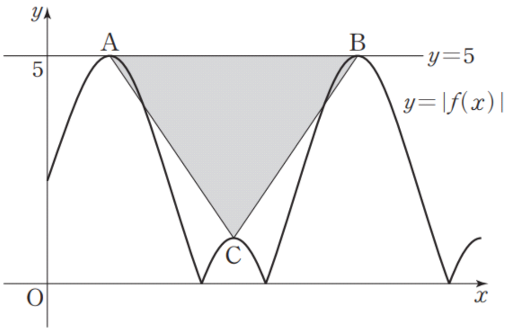
> (가) 모든 자연수 n에 대하여
> $$\begin{cases} a_{2n+1}=a_{n+1}+1 \\ a_{2n}=a_1\times a_n-1 \end{cases}$$
> 이다.
>
> (나) $\sum_{n=2}^{4}(-1)^n a_n=3a_5-8$

$a_4>0$일 때, $a_k=13$을 만족시키는 자연수 k의 값을 구하시오. [4점]

일일학습 | 26학년도 EBS 만점마무리 시즌1 2회

23 일차 : 26년 월 일

221. 최댓값이 5인 함수 $f(x)=a\sin(b\pi x)+c(x\ge 0)$가 있다.
그림과 같이 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=5$가 만나는 두 점 중 x좌표가 가장 작은 점을 A, 두 번째로 작은 점을 B라 하자. 함수 $y=|f(x)|$의 그래프 위의 점 C에 대하여 삼각형 ABC는 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{5}$인 이등변삼각형이고 두 점 B, C를 지나는 직선의 기울기가 2일 때, $f(3)$의 값은? (단, a, b, c는 양수이다.) [4점]



① $-\dfrac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\dfrac{3}{2}$
④ -1 ⑤ $-\dfrac{1}{2}$

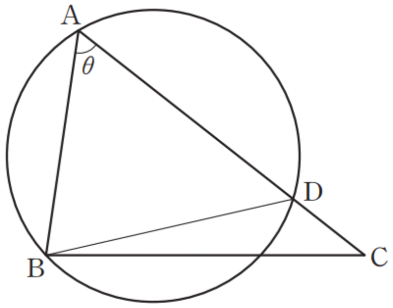
222. 모든 실수 x에 대하여 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f'(x)=4x(x-3)(x-\alpha)$ (단, α는 실수이다.)
> (나) $f(k-x)=f(k+x)$를 만족시키는 실수 k가 존재한다.

$f(0)=0$일 때, $f(k)$의 최댓값은? [4점]

① 72 ② 81 ③ 90
④ 99 ⑤ 108

223. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=5$, $\overline{\mathrm{BC}}=7$, $\overline{\mathrm{CA}}=8$이고, $\angle\mathrm{BAC}=\theta$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D를 $\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{DC}}=3:1$이 되도록 잡을 때, 삼각형 ABD의 외접원의 넓이는? $\left(\text{단, } 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ [4점]



① $\dfrac{29}{3}\pi$　② 10π　③ $\dfrac{31}{3}\pi$

④ $\dfrac{32}{3}\pi$　⑤ 11π

224. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=\dfrac{3}{2}x(x-a)$이다. (단, a는 양의 상수)
>
> (나) 열린구간 $(-\infty,\ k)$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 존재하도록 하는 실수 k의 최댓값은 3이다.

$f(2)=0$일 때, $\displaystyle\int_{f(-1)}^{f(0)} f(x)dx$의 값은? [4점]

① 1　② 2　③ 3

④ 4　⑤ 5

225. 집합 $A=\{n\,|\,(n-3)(n-6)\leq 0,\ n$은 자연수$\}$와 이차함수 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-3x+k$가 있다. 집합 A의 원소인 자연수 n에 대하여 $f(n)$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $g(n)$이라 할 때, 집합 $B=\{g(n)\,|\,n\in A\}$의 원소의 개수가 3이 되도록 하는 모든 자연수 k의 값의 합은? [4점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

226. 최고차항의 계수가 4인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-1) \\ \dfrac{1}{3}x^3-3x^2+5x+\dfrac{25}{3} & (x\geq -1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) 함수 $|g(x)-g(t)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 음의 실수 t의 개수는 1이다.

$\displaystyle\int_{-2}^{1} g(x)dx$의 값은? [4점]

① $\dfrac{32}{3}$ ② 11 ③ $\dfrac{34}{3}$ ④ $\dfrac{35}{3}$ ⑤ 12

227. $a_1=3$이고 모든 항이 유리수인 수열 $\{a_n\}$이 있다. $a_n=192$를 만족시키는 자연수 n의 값을 k라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} ra_n & (n<k) \\ \frac{1}{2}a_n & (n\geq k) \end{cases}$$

를 만족시킨다. 10이하의 두 자연수 $p,\ q(p<q)$에 대하여 $a_p=a_q$를 만족시키는 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수가 2일 때, $a_m=3$인 자연수 m에 대하여 $\sum_{n=1}^{m}a_n$의 값은? (단, r은 자연수이고, $m\neq 1$이다.) [4점]

① 405 ② 406 ③ 407
④ 408 ⑤ 409

228. 공차가 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 어떤 자연수 k에 대하여 $a_{2k}=0$이고 $S_7=42$이다. $\sum_{n=1}^{5}S_n$의 값을 구하시오. [4점]

229. 두 함수

$$f(x)=|3^{x+1}-n|,\ g(x)=-|x|+3\ (-3\le x\le 3)$$

에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$가 서로 다른 두 실근을 갖는다. 두 실근의 곱이 음수가 되도록 하는 자연수 n의 최댓값을 M_1이라 하고, 두 실근의 곱이 양수가 되도록 하는 자연수 n의 최댓값을 M_2라 할 때, M_1+M_2의 값을 구하시오. [4점]

230. 최고차항의 계수가 1이고 $x=-1$에서 극솟값을 갖는 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<1) \\ f(2-x) & (x\ge 1)\end{cases}$$

라 할 때, 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) 방정식 $g(x)=k$의 실근의 개수를 $h(k)$라 할 때, $\lim_{k\to a+}h(k)>\lim_{k\to a-}h(k)$를 만족시키는 서로 다른 실수 a의 개수가 2이다. (단, k는 실수)

$f(-1)<f(1)$이고, $f(-1)=h(g(-1))$, $f(0)=h(g(1))$일 때, $g(5)$의 값을 구하시오. [4점]

일일학습 26학년도 EBS 만점마무리 시즌1 3회

24 일차 : 26년 월 일

231. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 위치를 각각 x_1, x_2라 하면

$$x_1 = 3t^3 - 5t^2 - 6t,\ \ x_2 = t^3 + t^2 + 12t$$

이다. 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q의 가속도의 차는? [4점]

① 24 ② 29 ③ 34
④ 39 ⑤ 44

232. 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 정의된 함수 $f(x) = a\sin b\pi x + 2$가 x축과의 교점의 개수가 20이 되도록 하는 두 자연수 a, b에 대하여 $a+b$의 최솟값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

233. 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_{-x}^{x}\left\{f(t)-\frac{1}{2}t^2\right\}dt=0$$

을 만족시킨다. $3\int_{-1}^{3}f(t)dt=2\int_{-1}^{-3}f(t)dt+\frac{4}{3}$일 때, $\int_{1}^{3}f(t)dt$의 값은? [4점]

① -17 ② -15 ③ -13
④ -11 ⑤ -9

234. 모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 값의 최댓값과 최솟값의 합은? [4점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_{n+1} & (a_n\text{이 짝수인 경우})\\ a_n+1 & (a_n\text{이 홀수인 경우})\end{cases}$$

이다.

(나) $a_n=a_{n+2}$인 자연수 n의 최솟값은 6이고 a_4는 짝수이다.

① 81 ② 82 ③ 83
④ 84 ⑤ 85

235. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\{x \mid f(x)=0\}=\{0,\ 2\}$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $\int_{2}^{x} f(t)dt \geq 0$이다.

곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $S=\int_{2}^{a} f(x)dx$인 양수 a의 값은? [4점]

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3

④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

236. 양수 a와 두 함수 $f(x)=2^{x},\ g(x)=-2^{-x}$에 대하여 두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$와 직선 $x=a$가 만나는 점을 각각 $\mathrm{A},\ \mathrm{B}$라 하고, 원점 O에 대하여 직선 OA와 직선 OB가 수직일 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 OB가 만나는 점을 C라 하자. 이때 삼각형 ABC와 곡선 $y=\log_{2}(x+p)$가 만나도록 하는 모든 자연수 p의 값의 합은? [4점]

① 4 ② 5 ③ 6

④ 7 ⑤ 8

237. 함수 $f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+27x$와 $f'(p)=3$인 p에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le p) \\ f(x-a)+b & (x > p) \end{cases}$$

가 있다. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 두 실수 a, b에 대하여 $a-b$의 최댓값과 최솟값의 합은? (단, $a<0$) [4점]

① 25 ② 27 ③ 29
④ 31 ⑤ 33

238. 정수 k에 대하여 함수 $f(x)=-x^3+6x^2+kx$가 열린구간 $(2,\ 4)$에서 극댓값을 가진다. 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합의 최댓값을 구하시오. [4점]

239. 등차수열 $\{a_n\}$이 자연수 m에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, 모든 a_m의 값의 합을 구하시오. [4점]

> (가) 수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차가 자연수이다.
>
> (나) $a_m - a_1 = 20$이고 $\sum_{n=1}^{m} a_n = 108$이다.

240. 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 두 집합 A, B를

$$A = \left\{ \alpha \,\middle|\, \lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)+1}{x-\alpha} \text{의 값이 존재한다.} \right\},$$

$$B = \left\{ \alpha \,\middle|\, \lim_{x \to \beta} \frac{x-\beta}{f(x)+1} \text{의 값이 존재한다.} \right\},$$

라 하자. $A \cap B = \{-2,\ 2\}$이고 집합 A의 모든 원소의 합이 0일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오. [4점]

일일학습 | 26학년도 EBS 만점마무리 시즌2 1회

25 일차 : 26년 월 일

241. 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 이차함수 $f(x)$가 $f(x) \geq 0$을 만족시키고 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)\left(\int_0^1 f(t)dt\right) = x^2 + 8$$

일 때, $f(\sqrt{2})$의 값은? [4점]

① $\sqrt{3}$　② $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　③ $2\sqrt{3}$　④ $\frac{5\sqrt{3}}{2}$　⑤ $3\sqrt{3}$

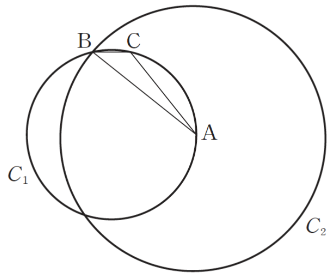
242. 시각 $t=0$일 때 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 위치 x가

$$x = t^4 - 8t^3 + 16t^2$$

이다. 출발한 후 점 P가 $t=1$일 때의 운동 방향과 반대 방향으로 움직인 거리는? [4점]

① 10　② 12　③ 14　④ 16　⑤ 18

243. 그림과 같이 반지름의 길이가 5인 원 C_1과 반지름의 길이가 r인 원 C_2가 서로 다른 두 점에서 만난다. 원 C_1 위의 점 A는 원 C_2의 중심이고 두 원 C_1, C_2가 만나는 두 점 중 한 점 B에 대하여 $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{2}$를 만족시키는 원 C_1 위의 점 C가 있다. 삼각형 ABC의 넓이가 4일 때, 선분 AB의 길이는? (단, r은 5보다 큰 자연수이고 점 C는 원 C_2의 내부의 점이다.) [4점]



① 6 ② $\frac{13}{2}$ ③ 7 ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 8

244. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여
$$(x+1)f(x)=(x-2)f(x+1)$$
이다.

(나) 어떤 실수 a에 대하여 $\lim\limits_{x \to a}\frac{1}{f(x)}$의 값은 존재하지 않고, $\lim\limits_{x \to a}\frac{f(x)}{f(x+a)}=0$이다.

$\lim\limits_{x \to f(3)}\frac{f(x)}{x}=220$일 때, $f(a^2)$의 값은? [4점]

① 48 ② 50 ③ 52 ④ 54 ⑤ 56

245. 함수 $f(x)=x^3-3x+18$의 그래프가 x축과 만나는 점을 $(a,\ 0)$, 함수 $f(x)$가 $x=b$에서 극댓값을 갖는다고 할 때, $a<t<b$인 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점을 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$라 하자. 점 P를 지나는 직선 l이 점 P가 아닌 곡선 $y=f(x)$ 위의 점에서 접할 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 l로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(t)$라 하자. $\lim_{t \to b-} S(t)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{8}{27}$ ③ $\frac{27}{64}$
④ $\frac{64}{125}$ ⑤ $\frac{125}{216}$

246. 등차수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 29, 공차가 -1이고 수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 14 이하의 모든 자연수 n에 대하여 $b_n=b_{15-n}$이다.
> (나) 모든 자연수 n에 대하여 $b_n=b_{n+14}$이다.

$\sum_{k=1}^{7} b_k=10$일 때, $\sum_{k=1}^{28} a_k b_{29-k}$의 값은? [4점]

① 580 ② 590 ③ 600
④ 610 ⑤ 620

247. 최고차항의 계수가 4인 이차함수 $f(x)$와 0이 아닌 상수 a에 대하여 함수

$$g(x) = ax^3 + |f(x)|$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 서로 다른 2개의 극솟값을 갖는다.
>
> (나) 방정식 $g(x) - x = 0$은 서로 다른 세 실근 -1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$만을 갖는다.

함수 $y = g(x)$의 그래프와 직선 $y = x + k$가 서로 다른 네 개의 교점을 가질 때, 상수 k의 값은? [4점]

① $\frac{-10+7\sqrt{7}}{27}$ ② $\frac{-10+6\sqrt{7}}{27}$

③ $\frac{-10+5\sqrt{7}}{27}$ ④ $\frac{-10+4\sqrt{7}}{27}$

⑤ $\frac{-10+3\sqrt{7}}{27}$

248. 자연수 n에 대하여 직선 $y = -x + n$과 곡선 $y = 2^x$이 만나는 점의 x좌표를 m이라 할 때, 부등식 $\frac{n}{32} < m < \frac{n}{2}$을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합을 구하시오. [4점]

249. 닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x)=\cos ax\ \ (a>0)$가 있다. 함수 $f(x)$가 $x=k$에서 최솟값을 가질 때, 서로 다른 k의 개수를 $g(a)$라 하자. $g(a)=8$을 만족시키는 양수 a의 값의 범위가 $\alpha \le a < \beta$일 때, $3\beta-\alpha$의 값을 구하시오. [4점]

250. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 값 중 가장 작은 값을 k라 할 때, $60k$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $a_6=1$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)a_n & (a_n\text{은 정수이다.})\\ \left(1+\dfrac{1}{n}\right)a_n & (a_n\text{은 정수가 아니다.})\end{cases}$$

이다.

일일학습 26학년도 EBS 만점마무리 시즌2 2회

26 일차 : 26년 월 일

251. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 곡선 $y=f(x)$는 $x=0$에서 x축과 접한다.
> (나) $\int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{3} f(x)dx$

함수 $\int_{3}^{x} f(t)dt$가 $x=a$에서 최솟값을 가질 때, a의 값은? [4점]

① 2 ② $\frac{27}{13}$ ③ $\frac{28}{13}$ ④ $\frac{29}{13}$ ⑤ $\frac{30}{13}$

252. $1<k<3$인 상수 k에 대하여 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> $0 \le a_1 \le 3$이고, 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} ka_n & (0 \le a_n \le 1) \\ -\frac{k}{2}a_n + \frac{3}{2}k & (1 < a_n \le 3) \end{cases}$$
> 이다.

$m \ge 3$인 모든 자연수 m에 대하여 $a_m = a_{m+1}$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합이 $\frac{53}{7}$일 때, k의 값은? [4점]

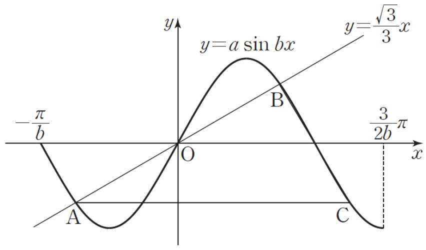
① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{7}{4}$ ④ 2 ⑤ $\frac{9}{4}$

253. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1이고 $f(2)=8$인 이차함수 $f(x)$와 실수 a의 순서쌍 $(f(x),\ a)$에 대하여 $f(5)+a$의 최댓값은? [4점]

> (가) $g(x)=\begin{cases} f(x)-a & (x\le 0) \\ a-f(2a-x) & (x>0) \end{cases}$ 라 할 때,
> 함수 $|g(x)|$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
> (나) $f(a)=a$

① 31　② 33　③ 35　④ 37　⑤ 39

254. $ab>\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi$인 두 양수 a, b에 대하여 집합 $\left\{x \,\middle|\, -\dfrac{\pi}{b}\le x\le \dfrac{3}{2b}\pi\right\}$에서 정의된 함수 $f(x)=a\sin bx$가 있다. 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$와 서로 다른 세 점 A, O, B에서 만난다. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점을 C라 하자. 직선 AB와 직선 BC가 서로 수직이고 삼각형 ABC의 넓이가 $2\sqrt{3}$일 때, $f\left(\dfrac{2b}{3\pi}\right)$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$　② $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$　③ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　④ $\dfrac{3}{4}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

255. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(k)=2$가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여
$$f(x)=f(2)+(x-2)f'(g(x))$$
이다.
(나) 함수 $g(x)$의 최댓값은 3이다.

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

256. 예각삼각형 ABC와 삼각형 ABC의 내부의 점 P가 다음 조건을 만족시킬 때, $\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{BC}}}$의 값은? [4점]

(가) 삼각형 APC의 외접원의 반지름의 길이를 R_1, 삼각형 BPC의 외접원의 반지름의 길이를 R_2라 할 때 $R_1 : R_2 = \overline{\mathrm{BP}} : \overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{3} : 1$이다.
(나) $\angle \mathrm{PAC} = 30^\circ$, $\angle \mathrm{APB} = 150^\circ$

① $\dfrac{\sqrt{17}}{4}$ ② $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ ③ $\dfrac{\sqrt{19}}{4}$
④ $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{21}}{4}$

257. 최고차항의 계수가 4인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수 $g(x)=\left|\int_t^x f(s)ds\right|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 $t=b$에서 불연속인 모든 실수 b의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을

b_1, b_2, b_3, $\cdots$, b_n (n은 3 이상의 자연수)

라 할 때, 상수 k와 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $\int_k^x f(s)ds$에서 x의 값이 b_2에서 b_{n-2}까지 변할 때의 평균변화율은 -16이다.

$b_{n-2}-b_2=4$일 때, $\int_{b_2}^{b_3} f(x)dx$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{5}{16}$ ③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{7}{16}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

258. 첫째항이 1보다 작은 양수이고 공비가 1보다 큰 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{\log_2 a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{S_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\log_2\left(56\sum_{k=1}^{6} a_k+1\right)$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
> $S_n=\log_2 a_{f(n)}$
> 인 자연수 $f(n)$이 존재한다.
> (나) $S_{f(5)}=42$

259. $t_1<0<t_2$인 두 실수 t_1, t_2와 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $t_1+t_2=-\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

> (가) 함수 $\displaystyle\int_0^x [\{f(x)-t\}\times f'(s)]ds$가 3개의 극솟값을 갖도록 하는 실수 t의 값의 집합은 $\{t\,|\,t_1<t\le 0$ 또는 $t\ge t_2\}$이다.
>
> (나) 함수 $|f(x)|$는 $x=0$에서 미분가능하고, $x=-5$에서 미분가능하지 않다.
>
> (다) $\displaystyle\int_{-5}^{0} f(x)dx=0$

260. 곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 위의 점 중 제4분면에 있는 점 P를 지나며 기울기가 $\dfrac{3}{4}$인 직선이 x축과 만나는 점을 Q, 곡선 $y=2^x$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 R을 지나며 기울기가 $-\dfrac{4}{3}$인 직선이 x축과 만나는 점을 S라 하자. 네 점 P, Q, R, S가 다음 조건을 만족시킬 때, R의 y좌표를 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

> (가) $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{RS}}+5=\overline{\mathrm{OS}}\times\dfrac{5}{3}$
>
> (나) (점 R의 y좌표)$-$(점 P의 x좌표)$=28$

일일학습 26학년도 EBS 만점마무리 시즌2 3회

27 일차 : 26년 월 일

261. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x & (x\neq 3) \\ 4 & (x=3)\end{cases},\ g(x)=\begin{cases} ax+b & (x\neq 3) \\ c & (x=3)\end{cases}$$

이 있다. 두 함수 $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$가 모두 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $g(3)=\lim_{x\to 3}g(x)$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

262. $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AC}}=9$인 삼각형 ABC에 대하여 선분 BC 위에 $\overline{\mathrm{BD}}=2\sqrt{7}$, $\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{7}$인 점 D가 있다. $\sin(\angle\mathrm{BAD})=\sin(\angle\mathrm{CAD})$일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는? [4점]

① 21π ② 23π ③ 25π
④ 27π ⑤ 29π

263. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\ (t \geq 0)$에서의 속도를 각각 $v_1(t)$, $v_2(t)$라 할 때,

$$v_1(t)+v_2(t)=3t^2+at+1$$

이다. 시각 $t=3$일 때 선분 PQ의 중점 M의 위치가 6이다. 시각 $t=5$일 때 점 M의 위치는? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 36 ② 38 ③ 40
④ 42 ⑤ 44

264. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x)=x^2+ax+3$이라 하자. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=n$, $x=n+2$가 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 R, S, 점 P에서 직선 QS에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 PQH의 넓이를 a_n, 사각형 PRSH의 넓이를 b_n이라 할 때, 수열 $\left\{\dfrac{b_n}{a_n}\right\}$이 등차수열이다. $\displaystyle\sum_{n=1}^{8}(b_n-a_n)$의 값은? [4점]

① 504 ② 506 ③ 508
④ 510 ⑤ 512

265. 두 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3+ax^2+bx-1$$

이라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $\mathrm{P}(0,\ f(0))$, $\mathrm{Q}(2,\ f(2))$에서의 접선을 각각 l_1, l_2라 할 때, 직선 l_1 위의 임의의 점 R에서 직선 l_2까지의 거리가 항상 $2\sqrt{2}$이다. 두 직선 l_1, l_2가 x축과 만나는 점을 각각 T, S라 할 때, 선분 TS의 길이는? [4점]

① $2\sqrt{2}$　② 4　③ $4\sqrt{2}$　④ 8　⑤ $8\sqrt{2}$

266. 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+4x+a & (x\le 3)\\ |2^{x-b}-8| & (x>3)\end{cases}$$

이라 하고, 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. 방정식 $g(t)=3$을 만족시키는 자연수 t의 개수가 8일 때, $a+b$의 최솟값은? [4점]

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

267. 최고차항 계수가 3인 이차함수 $f(x)$와 서로 다른 두 상수 p, q에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} f(x+p)+q & (x<0) \\ f(x) & (x \ge 0) \end{cases}$$

이다. 0이 아닌 실수 t에 대하여 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=t$, $x=0$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $S(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $S(t)=\left| \int_t^0 g(t)dx \right|$를 만족시키는 모든 t의 값의 범위는 $t \le 2$ $(t \ne 0)$이다.
(나) $S(2)=20$

$g(0)>0$이고 p가 음이 아닌 정수일 때, $q-p$의 최솟값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

268. 양수 a에 대하여 구간 $[0,\ 2a]$에서 정의된 함수 $f(x)=a\sin\frac{\pi}{a}x$가 있다. $-a<c<0<b<a$인 두 실수 b, c에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=b$가 만나는 두 점을 x좌표가 작은 순서대로 P, Q라 하고, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=c$가 만나는 두 점을 x좌표가 작은 순서대로 R, S라 하자. 사각형 PRSQ가 평행사변형이고

$$\overline{\mathrm{PQ}}=4,\ \overline{\mathrm{PR}}=\sqrt{2}a$$

일 때, 사각형 PRSQ의 넓이를 구하시오. [4점]

269. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)+1}{f(-x)}=1$, $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 f(x)}{\{f'(x)\}^2}=\infty$

(나) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{f'(x)}$의 값이 존재하고

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{1}{2}$이다.

$f(-2)>f(2)$일 때, $\lim_{x \to 3}\{f(-x)-f(x)\}$의 값을 구하시오. [4점]

270. 모든 항이 음이 아닌 정수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) $a_5=2$

(나) $a_2=a_1-2$이고 $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-2 & (a_n \geq n) \\ a_n+a_{n-1} & (a_n < n) \end{cases}$$

이다.

일일학습 | 26학년도 EBS 만점 고난도 1회

28 일차 : 26년 월 일

271. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{S_n}{4k^2-1} = n(n+1)$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{10} \log \frac{a_k}{4k+5}$의 값은? [4점]

① $\log \frac{2}{15}$ ② $\log \frac{1}{5}$ ③ $\log \frac{4}{15}$ ④ $\log \frac{1}{3}$ ⑤ $\log \frac{2}{5}$

272. $-\pi \le x < 2\pi$일 때, 방정식

$$\cos^2 x - \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = 1$$

의 서로 다른 실근의 개수는? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

273. 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x (t^2+1)f(t)dt=1$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(2x+1)=f(2x-1)+x$이다.

$\int_0^1 f(x)dx$의 값은? [4점]

① $\frac{5}{6}$ ② $\frac{11}{12}$ ③ 1 ④ $\frac{13}{12}$ ⑤ $\frac{7}{6}$

274. 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\frac{a_3b_1}{a_1b_2}$의 값은? [4점]

(가) $a_1b_1\neq0$이고, $\frac{a_2}{a_1}$와 $\frac{b_2}{b_1}$의 값은 모두 자연수이다.

(나) $(a_2-a_1)(b_2-b_1)=6a_1b_1$

(다) $\sum_{k=1}^{4}\frac{{b_1}^2a_k}{b_2-b_1}=\sum_{k=1}^{4}\frac{3{a_1}^2b_k}{a_2-a_1}+\frac{5}{2}a_1b_1$

① $\frac{13}{3}$ ② $\frac{14}{3}$ ③ 5 ④ $\frac{16}{3}$ ⑤ $\frac{17}{3}$

275. 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax-1}{\sqrt{5-x^2}-1} & (0<x<2) \\ \dfrac{x-2}{x^2+bx+12} & (2<x<6) \end{cases}$$

이 $x=2$에서 연속일 때, $f(1)+f(2)+f(ab+7)$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

① $-\frac{4}{3}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ $-\frac{7}{6}$ ④ $-\frac{13}{12}$ ⑤ -1

276. 넓이가 36π인 원에 내접하는 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sin \mathrm{B}=\sqrt{2}\sin \mathrm{C}$, $\cos \mathrm{C}=\dfrac{2\sin \mathrm{A}}{\sin \mathrm{B}}$

(나) 선분 AC의 중점을 M이라 할 때, 삼각형 BCM의 외접원의 반지름의 길이는 $\sqrt{6}$이다.

점 B를 지나고 직선 AB에 수직인 직선이 선분 AC와 만나는 점을 D라 할 때, 삼각형 ABD의 넓이는? [4점]

① $2\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ $6\sqrt{2}$ ④ $8\sqrt{2}$ ⑤ $10\sqrt{2}$

277. 모든 항이 정수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 a_1+a_8의 값의 합은? [4점]

> (가) $b_1=b_2=0$이고, 모든 자연수 n에 대하여
> $$|a_{n+1}-a_n|=3,$$
> $$b_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}-a_n & (a_{n+1}>a_n\text{인 경우}) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k & (a_{n+1}\le a_n\text{인 경우}) \end{cases}$$
> 이다.
> (나) $a_{m+1}=a_m+3$을 만족시키는 6 이하의 자연수 m의 개수는 2이다.
> (다) $|b_9|=15$

① -12 ② -9 ③ -6 ④ -3 ⑤ 0

278. 정수 a에 대하여 닫힌구간 $[a-2,\ a+2]$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2^{-x}-a & (a-2\le x<a) \\ \sin\dfrac{\pi}{2}x & (a\le x\le a+2) \end{cases}$$

가 있다. 다음 조건을 만족시키는 모든 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

> 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 k의 개수는 2이다.

279. 다음 조건을 만족시키는 모든 다항함수 $f(x)$와 다항함수 $g(x)$에 대하여 $f(2)$의 최댓값을 구하시오. [4점]

> (가) $f'(0)=0$, $g'(-1)=6$, $g'(0)=0$
>
> (나) $1<\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{x^5+1}<4$
>
> (다) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=\displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\{t+f(x)\}dt$이다.

280. 양수 a와 실수 t에 대하여 함수 $f(x)=t-2^x$과 함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$ 및 함수

$$g(x)=\begin{cases} f^{-1}(x) & (x<t) \\ a(x-2)(x-3) & (x\ge t)\end{cases}$$

가 있다. x에 대한 방정식 $g(x)=a(x+t)$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자.

$$\left\{h(b)-\lim_{h\to b-}h(t)\right\}\left\{h(b)-\lim_{t\to b+}h(t)\right\}=-1$$

을 만족시키는 실수 b에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}h(b+k)$의 값을 구하시오. [4점]

일일학습

26학년도 EBS 만점 고난도 2회

29 일차 : 26년 월 일

281. 삼차함수 $f(x)=2x^3-3ax^2+2a^2+a$ $(a>0)$과 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하면 함수 $g(t)$는 $g(1)<g(2)<g(3)$을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 극댓값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

282. $a_1=2$이고, 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_n a_{n+1}$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값은? [4점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

283. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+1}{x^2+x-2}=5,\ \lim_{x\to1}\frac{f(x)+g(x)}{x-1}=12$$

를 만족시킨다. $f'(1)\times g'(1)$의 값은? [4점]

① -50　② -45　③ -40　④ -35　⑤ -30

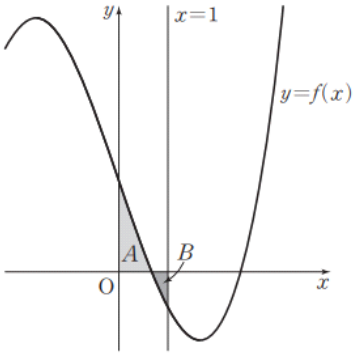
284. 두 함수 $f(x)=\sin 3x$, $g(x)=\pi\cos\pi x$에 대하여 $1<x<2$에서 방정식 $(f\circ g)(x)=0$의 모든 실근의 합은? [4점]

① $\frac{11}{2}$　② $\frac{13}{2}$　③ $\frac{15}{2}$　④ $\frac{17}{2}$　⑤ $\frac{19}{2}$

285. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

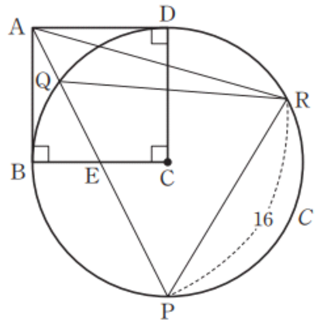
(가) 모든 실수 x에 대하여 $f'(-x)=f'(x)$이다. (나) $\int_{-1}^{1} f(x)dx=10$ (다) $f(1)=-2$

그림과 같이 $x \ge 0$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, $x \le 1$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 할 때, $A-B$의 값은? [4점]



① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{7}{4}$ ④ 2 ⑤ $\frac{9}{4}$

286. 그림과 같이 정사각형 ABCD와 원 C가 있다. 점 C가 원 C의 중심이고, 두 직선 AB, AD가 점 B와 점 D에서 각각 원 C에 접한다. 선분 BC의 중점을 E라 할 때, 직선 AE가 원 C와 만나는 두 점 중점 A에 먼 점을 P, 점 A에 가까운 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{QR}}$이 되도록 하는 원 C 위의 점 R에 대하여 $\overline{\mathrm{PR}}=16$일 때, $\overline{\mathrm{AR}}^2$의 값은? [4점]



① 432 ② 434 ③ 436 ④ 438 ⑤ 440

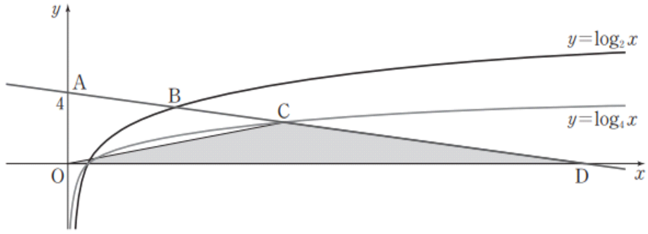
287. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 계수가 모두 정수인 이차함수 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$는 $h(x)=|f(x)-g(x)|$이고, 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극값을 갖는다. (나) 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$는 x좌표가 각각 $1, 3$인 점에서 만난다. (다) 함수 $h(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 모든 실수 a의 개수는 1이다.

방정식 $f(x)-g(1)=0$이 하나의 실근만을 갖도록 하는 모든 함수 $f(x)$, $g(x)$의 순서쌍 $(f(x),\ g(x))$에 대하여 $f(2)-g(1)$의 값의 합은? [4점]

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

288. 그림과 같이 점 $\mathrm{A}(0,\ 4)$를 지나고 기울기가 음수인 직선이 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_4 x$와 만나는 점을 각각 B, C라 하고, x축과 만나는 점을 D라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$일 때, 삼각형 COD의 넓이를 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]



289. 함수 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+2x$에 대하여 직선 l은 곡선 $y=f(x)$와 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ f(-1))$, $\mathrm{B}(1,\ f(1))$에서 접한다. 직선 l과 평행하고, 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선을 m이라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 직선 m으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $S=\dfrac{q\sqrt{2}}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

290. 모든 항이 0 이 아닌 정수이고, 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $|a_1|$의 값의 합을 구하시오. [4점]

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+4 & (|a_n|\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ \dfrac{1}{3}a_n & (|a_n|\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$$
> 이다.
> (나) $|a_m|=|a_{m+2}|$인 자연수 m의 최솟값은 3 이다.

일일학습

26학년도 EBS 직전 클리어 1회

30 일차 : 26년 월 일

291. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3t^2-6t,\ \ v_2(t)=2t-3$$

이다. 시각 $t=a$, $t=b$에서 두 점 P, Q가 만날 때, 점 P가 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 움직인 거리는? (단, $0<a<b$) [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

292. 함수 $f(x)=x^3+6x^2+a$가 있다. 정수 k에 대하여 점 $(0,\ k)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수가 3이 되도록 하는 모든 k의 값의 합이 42일 때, 정수 a의 값은? [4점]

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

293. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 최댓값과 최솟값의 합은? [4점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=a_n-8$이다.
(나) 자연수 m에 대하여 $\sum_{k=m}^{m+6} S_m$은 $m=3$에서 최댓값을 갖는다.

① 80 ② 82 ③ 84 ④ 86 ⑤ 88

294. 함수 $f(x)=a\sin bx$ $(b>0)$의 그래프와 직선 $y=6x$가 만나는 점의 개수는 3이다. 세 교점의 y좌표를 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ $(\alpha<\beta<\gamma)$라 할 때, γ는 함수 $f(x)$의 최댓값이고 $\gamma-\alpha=6$이다. $f\left(\dfrac{\alpha}{4}\right)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ ② $-\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

295. 함수 $f(x)=|x^2-3x-4|$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 자연수 k에 대하여 함수 $g(x)$가 $x=k$가 극대일 때, $g(k)$의 값은? [4점]

① 35 ② 36 ③ 37 ④ 38 ⑤ 39

296. 최고차항의 계수가 p인 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 실수 p의 개수는? [4점]

(가) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{x-a}=2$

(나) 모든 실수 t에 대하여 $\lim_{x \to t} \frac{f(x^2)}{f(x)}$의 값이 존재한다.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

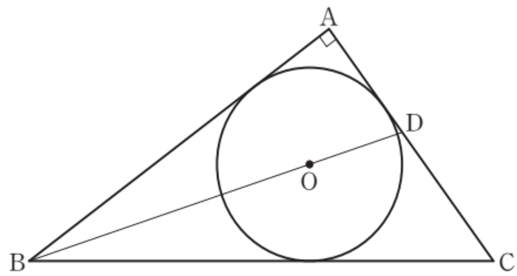
297. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 3a_n-1 & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{a_n}{2} & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

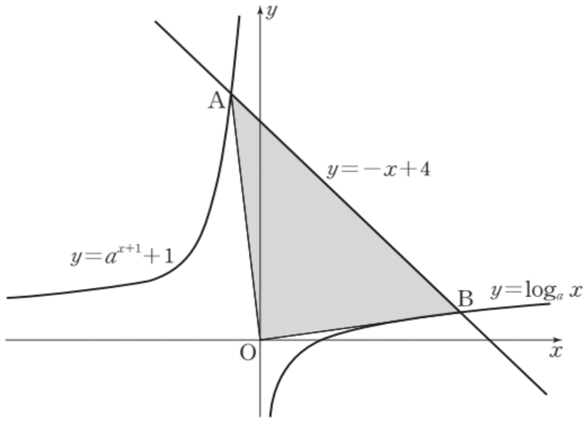
를 만족시킨다. $a_5=13$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 215 ② 247 ③ 279 ④ 311 ⑤ 343

298. 그림과 같이 $\angle A=90°$, $\overline{CA}=3$인 삼각ㄷ형 ABC에 내접하는 원의 중심을 O라 하고, 직선 BO가 선분 AC와 만나는 점을 D라 하자. $\overline{BO}:\overline{OD}=3:1$일 때, 삼각형 BCD의 외접원의 넓이는 $\dfrac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



299. $a>1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=-x+4$가 두 곡선 $y=a^{x+1}+1$, $y=\log_a x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 AOB의 넓이가 8일 때, $12a$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]



300. 최고차항의 계수가 4인 삼차함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하자. 두 집합 A, B가

$A=\{x \mid f(x)=0,\ x$는 음이 아닌 정수$\}$,

$B=\{x \mid F(x)=0,\ x$는 실수$\}$

이고 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. [4점]

(가) $0\in(A\cap B)$, $n(A\cup B)=3$
(나) 집합 B의 모든 원소는 음이 아닌 정수이고, 그 합은 4이다.

일일학습

25학년도 EBS 만점마무리 시즌1 1회

31 일차 : 26년 월 일

301. $0 \le x \le 2\pi$일 때, 부등식

$$|\cos x| \le \sin\frac{\pi}{5}$$

를 만족시키는 모든 x의 값의 범위는 $\alpha \le x \le \beta$ 또는 $\gamma \le x \le \delta$이다. $\gamma - \beta$의 값은? (단, $\alpha < \beta < \gamma < \delta$) [4점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{3}{5}\pi$ ③ $\frac{7}{10}\pi$ ④ $\frac{4}{5}\pi$ ⑤ $\frac{9}{10}\pi$

302. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(-1,\ -4)$에서의 접선과 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{Q}(3,\ 8)$에서의 접선이 서로 평행할 때, $f(5)$의 값은? [4점]

① 60 ② 62 ③ 64 ④ 66 ⑤ 68

303. 두 점 P와 Q는 시각 $t=0$일 때 각각 점 $\mathrm{A}(-12)$와 점 $\mathrm{B}(12)$에서 출발하여 수직선 위를 움직인다. 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도는 각각

$$v_1(t)=6t^2-4t-2,\ v_2(t)=-4t-6$$

이다. 출발한 후 두 점이 만날 때까지 점 P가 움직인 거리는? [4점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

304. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \\ a_n+3 & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \end{cases}$$

이다. $a_3+a_4+a_5=42$일 때, 가능한 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 250 ② 260 ③ 270 ④ 280 ⑤ 290

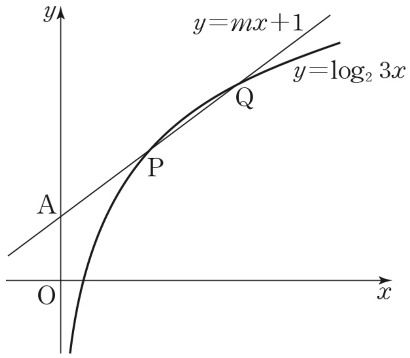
305. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 부등식

$$f'(x)f'(x-4) \le 9$$

의 해가 $-1 \le x \le 7$이다. 함수 $f(x)$의 극솟값이 13일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은? [4점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

306. 그림과 같이 함수 $y=\log_2 3x$의 그래프가 직선 $y=mx+1 (m>0)$과 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{PQ}}$일 때, 상수 m의 값은? (단, 점 P의 x좌표는 점 Q의 x좌표보다 작다.) [4점]



① $\frac{7}{12}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{11}{12}$

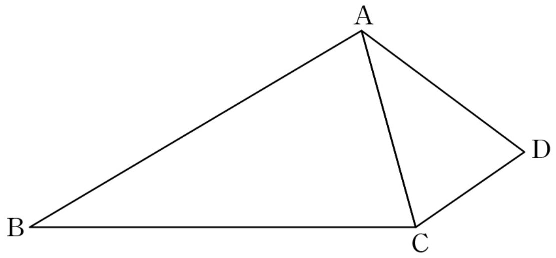
307. 일차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$에 대하여 함수

$$h(x)=\begin{cases} f(x)-g(x)+1 & (x<0) \\ f(x)g(x) & (0\le x<1) \\ f(x)+g(x)-1 & (x\ge 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. $g'(0)g'(1)\neq 0$일 때, $h'\left(\frac{1}{4}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{11}{8}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{13}{8}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{15}{8}$

308. 그림과 같이 사각형 ABCD에서 $\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BCA}=\angle\mathrm{ACD}=\angle\mathrm{ADC}$이고, $\overline{\mathrm{AC}}=3\sqrt{10}$, $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{CD}}=21$이다. 삼각형 ABC와 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 각각 R_1, R_2라 할 때, $2\left(R_1{}^2+R_2{}^2\right)$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\mathrm{AB}}>\overline{\mathrm{CD}}$) [4점]



309. 모든 항이 정수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $S_{10}+2S_{20}=0$
> (나) $S_1>S_2$
> (다) $|a_{18}|$은 100보다 작은 3의 배수이다.

S_{25}의 값을 구하시오. [4점]

310. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x (x-t)f(t)dt = ax^5+bx^4+5x-3$$

을 만족시킨다. 함수 $\int_0^x \{|f(t)|-kt\}dt$가 $x=\alpha$에서 극값을 갖도록 하는 α의 값이 4개 존재하도록 하는 자연수 k의 최댓값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점]

일일학습 | 25학년도 EBS 만점마무리 시즌1 2회

32 일차 : 26년 월 일

311. 1이 아닌 두 양수 a, b에 대하여

$$\log_3 a + \log_3 b = -2,\ \log_a 9 + \log_b 9 = 4$$

일 때, $(\log_a 3)^2 + (\log_b 3)^2$의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

312. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t \ge 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t) = t^2 - 2t,\ v_2(t) = 2t$$

이다. 두 점 P, Q가 출발 후 처음으로 만날 때까지 점 P가 움직인 거리는? [4점]

① $\frac{112}{3}$ ② 38 ③ $\frac{116}{3}$ ④ $\frac{118}{3}$ ⑤ 40

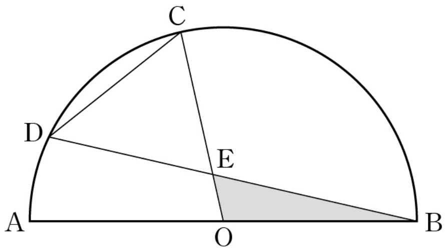
313. 첫째항이 8이고 각 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $\displaystyle\sum_{k=1}^{8}\frac{a_{k+1}}{S_kS_{k+1}}=\frac{1}{12}$일 때 S_9의 값은? [4점]

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

314. 함수 $f(x)=3(x+1)(x-1)$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}|f(t)|\,dt$라 하자. 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 최솟값을 가질 때, 실수 α의 값은? [4점]

① $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ ② $\dfrac{\sqrt{6}-2}{2}$ ③ $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{2}$ ④ $\dfrac{\sqrt{7}-2}{2}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

315. 그림과 같이 길이가 16인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 두 선분 BD, OC가 만나는 점을 E라 하면 $\overline{\mathrm{OE}}=2$이다. $\cos(\angle\mathrm{OCD})=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$일 때, 삼각형 OBE의 넓이는? (단, $\overline{\mathrm{AD}}<\overline{\mathrm{AC}}$) [4점]



① $\dfrac{15}{2}$ ② $\dfrac{5\sqrt{37}}{4}$ ③ $\dfrac{5\sqrt{38}}{4}$ ④ $\dfrac{5\sqrt{39}}{4}$ ⑤ $\dfrac{5\sqrt{10}}{2}$

316. $m\geq 0$인 실수 m에 대하여 곡선 $y=x^3-x^2+3$과 직선 $y=m(x+2)$가 만나는 점의 개수를 $f(m)$이라 하자. 실수 a, b에 대하여 함수 $g(x)=(x^2+ax+b)f(x)$가 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 연속일 때 $b-a$의 값은? [4점]

① $\dfrac{15}{4}$ ② $\dfrac{8}{2}$ ③ $\dfrac{17}{4}$ ④ $\dfrac{9}{2}$ ⑤ $\dfrac{19}{4}$

317. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $0 \le a_n \le 1$이고

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n & \left(0 \le a_n \le \frac{1}{2}\right) \\ 2a_n - 1 & \left(\frac{1}{2} \le a_n \le 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_6 = \frac{1}{2}$이 되도록 하는 모든 a_1의 값이 m개일 때 작은 것부터 차례로 $b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_m$이라 하자. $b_5 \times \sum_{k=1}^{m} b_k$의 값은? [4점]

① $\frac{7}{32}$ ② $\frac{9}{16}$ ③ $\frac{7}{8}$ ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{7}{2}$

318. 함수 $f(x) = \log_2 x + \log_4(3-x) + 5$의 최댓값을 구하시오. [4점]

319. $x \geq 0$에서 정의된 함수 $f(x)=\int_{-1}^{1}|t^2-x^2|dt$에 대하여 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 최솟값 m을 갖는다. $60\alpha m$의 값을 구하시오. [4점]

320. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

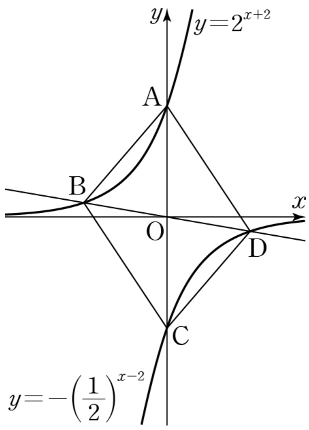
> (가) $\lim\limits_{x \to 0+}\dfrac{x^3 f\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x^2-x-1}=\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{(2-x)f(x)-f(1)}{1-x}=2$
>
> (나) $f(0)=1$, $f'(0)=12$

실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t-1,\ t+1]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. $\sum\limits_{k=1}^{4}g(k)$의 값을 구하시오. [4점]

일일학습 25학년도 EBS 만점마무리 시즌1 3회

33 일차 : 26년 월 일

321. 그림과 같이 두 함수 $y=2^{x+2}$, $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$에 대하여 함수 $y=2^{x+2}$의 그래프가 y축과 만나는 점을 A라 하고, 함수 $y=2^{x+2}$의 그래프 위의 점 B가 제2사분면에 있다. 함수 $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$의 그래프가 y축과 만나는 점을 C라 하고, 두 점 B, O를 지나는 직선이 함수 $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$의 그래프와 만나는 점을 D라 하자. 사각형 ABCD의 넓이가 24일 때, 직선 BD의 기울기는? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $-\frac{5}{12}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{6}$ ⑤ $-\frac{1}{12}$

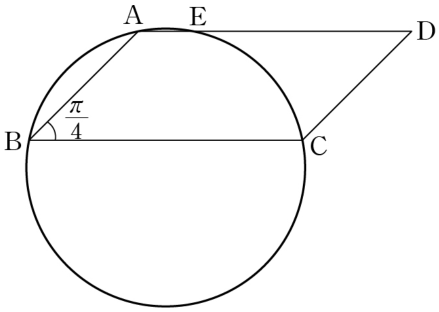
322. 모든 항이 양수이고 공비가 1이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2a_4=1,\ \sum_{k=1}^{4}(a_k-a_{k+1})=-7a_1$$

일 때, $\sum_{k=1}^{5}(a_{2k+1}+a_{2k+3})$의 값은? [4점]

① $145+161\sqrt{2}$ ② $145+162\sqrt{2}$
③ $145+163\sqrt{2}$ ④ $145+164\sqrt{2}$
⑤ $145+165\sqrt{2}$

323. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\angle\mathrm{ABC}=\frac{\pi}{4}$인 평행사변형 ABCD가 있다. 삼각형 ABC의 외접원이 선분 AD와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 E라 하자. $\overline{\mathrm{AE}}:\overline{\mathrm{ED}}=1:4$일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는? (단, $\overline{\mathrm{BC}}>4\sqrt{2}$이다.) [4점]



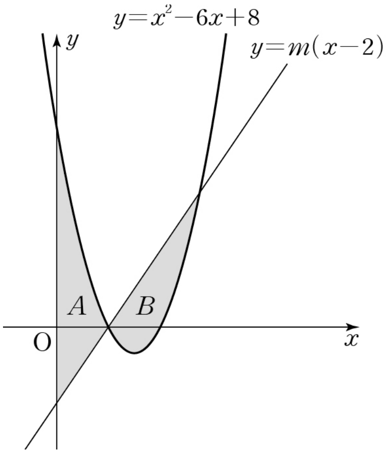
① $\sqrt{13}$ ② $\frac{3\sqrt{13}}{2}$ ③ $2\sqrt{13}$ ④ $\frac{5\sqrt{13}}{2}$ ⑤ $3\sqrt{13}$

324. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 1이 아닌 자연수 a에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선이 두 점 $(1,\ 0)$, $(4a,\ f(4a))$를 지난다.

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

325. 그림과 같이 곡선 $y=x^2-6x+8$과 직선 $y=m(x-2)$, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A라 하고, 곡선 $y=x^2-6x+8$과 직선 $y=m(x-2)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A=B$일 때, 상수 m의 값은? (단, $m>-2$) [4점]



① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

326. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\le 3) \\ \{f(x)\}^2 & (x>3) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수일 때, $g'(5)$의 최댓값은? [4점]

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

327. 모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2 < a_3 < a_4$일 때, $\sum_{n=1}^{15} a_n$의 값의 최댓값은? [4점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{3}a_n & (a_n\text{이 } 3\text{의 배수인 경우}) \\ a_n + 1 & (a_n\text{이 } 3\text{의 배수가 아닌 경우}) \end{cases}$$ 이다.

(나) $n \geq p$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+3} = a_n$이 성립하는 자연수 p의 최솟값은 6이다.

① 183 ② 184 ③ 185 ④ 186 ⑤ 187

328. 두 음의 정수 a, b에 대하여 두 함수 $f(x) = \log(ax+b)$, $g(x) = 2x + \frac{b^2-37}{a}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) 함수 $y = g(x)$의 그래프의 y절편은 정수이다.

(나) 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$의 그래프가 제2사분면에서 만난다.

329. 0이 아닌 상수 a에 대하여 $0<x<2\pi$에서 함수 $f(x)=|a\sin x+1|$의 그래프가 직선 $y=a+29$와 만나는 모든 교점의 x좌표의 합이 $\frac{7}{2}\pi$일 때, 함수 $f(x)$의 최댓값을 구하시오. [4점]

330. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극대이고 다음 조건을 만족시킨다.

닫힌구간 $[k-1,\ k+1]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 $f(a)$가 되도록 하는 실수 k의 최댓값과 최솟값의 합은 9이다.

$f(4)$의 값이 최대가 되도록 하는 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $f(x)$의 극솟값을 구하시오. [4점]

일일학습 25학년도 EBS 만점마무리 시즌2 1회

34 일차 : 26년 월 일

331. 자연수 n에 대하여 열린구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{n}\right)$에서 정의된 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\sin\left(nx+\frac{\pi}{2}\right)\tan\left(nx+\frac{\pi}{2}\right)$$

라 하자. 열린구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{n}\right)$에서 정의된 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\sin nx\times f(x)$$

일 때, 방정식 $g(x)=-\frac{3}{4}$의 실근 중 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m=\frac{\pi}{15}$일 때, n의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

332. 양수 a에 대하여 곡선 $y=x^3+2ax^2$ 위의 한 점에서의 접선이 곡선 $y=3ax^2-\frac{3}{a}$에 접할 때, a^4의 최솟값은? [4점]

① $\frac{81}{4}$ ② $\frac{41}{2}$ ③ $\frac{83}{4}$ ④ 21 ⑤ $\frac{85}{4}$

333. 함수 $f(x)=(x-k-4)^3$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 n이 존재할 때, $f(2n-k)$의 값은? (단, k는 음이 아닌 정수이다.) [4점]

> $(-2)^{f(n)}$의 세제곱근 중 실수인 것을 $g(n)$이라 할 때,
> $g(n)\times g(n+1)\times g(n+2)=1$이다.

① -8　② -1　③ 1　④ 8　⑤ 27

334. 모든 항이 음이 아닌 정수로 이루어진 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+n & (a_n \le n) \\ a_n-n & (a_n > n) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5=5$일 때 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 18　② 20　③ 22　④ 24　⑤ 26

335. 자연수 n에 대하여 구간 $[0, \infty)$에서 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+(9-n^2)x$가 $x=a_n$에서 최솟값을 가질 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은? [4점]

① 36 ② 49 ③ 64 ④ 81 ⑤ 100

336. 10 이하의 자연수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} |3^x-3^{a-1}| & (x \le 3) \\ \log_2(x-2) & (x > 3) \end{cases}$$

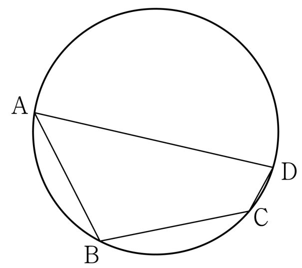
이라 하자. 자연수 b에 대하여 집합 $\{f(x) \mid x \le b\}$의 원소 중 자연수인 것의 개수가 8일 때, $a+b=k$라 하자. 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

337. 실수 t에 대하여 함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 실수 s에 대하여 함수 $y=g(t)$의 그래프와 일차함수 $h(t)=st-5s+2$의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $i(s)$라 하자. 함수 $i(s)$가 $s=m$에서 불연속일 때 m의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면 $a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots,a_n$이다. $n\times a_4$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

338. 그림과 같이 원 위의 네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD가 있다.



$\overline{AB}=\overline{BC}=\sqrt{2}$, $\overline{BD}=\sqrt{3}$, $\angle ABC=120^\circ$일 때, 사각형 ABCD의 넓이는 S이다. $16S^2$의 값을 구하시오. (단, $\overline{AD}>\overline{CD}$) [4점]

339. 다음 조건을 만족시키는 모든 등차수열 $\{a_n\}$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) 첫째항과 공차가 모두 자연수이다.
(나) $a_6 \leq 200$
(다) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 738$

340. 상수 $a\,(a \geq 3)$와 상수 b에 대하여 $x = 3$에서 함수 $f(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} -x & (0 \leq x < 3) \\ ax + b & (3 \leq x \leq 6) \end{cases}$$

이다. 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \left| \int_0^x f(t)dt \right| + \left| \int_x^6 f(t)dt \right|$$

라 할 때, $g(x) = \begin{cases} x^2 & (0 \leq x < 3) \\ h(x) & (3 \leq x \leq 6) \end{cases}$이다. $f(5) + h(5)$의 값을 구하시오. [4점]

일일학습

25학년도 EBS 만점마무리 시즌2 2회

35 일차 : 26년 월 일

341. $\lim_{x \to 1} \frac{ax^2+x-2a}{x^3-a^3}=1$을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

342. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여

$$(1+\sin\theta)\tan\theta+\frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}=-3$$

일 때, $\cos\theta$의 값은? [4점]

① $-\frac{\sqrt{2}}{7}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{2\sqrt{11}}{11}$

④ $-\frac{2\sqrt{13}}{13}$ ⑤ $-\frac{2\sqrt{15}}{15}$

343. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 실수 x에 대하여
> $$f(x+1)+f(-x+1)=x^2+6$$
> 이다.

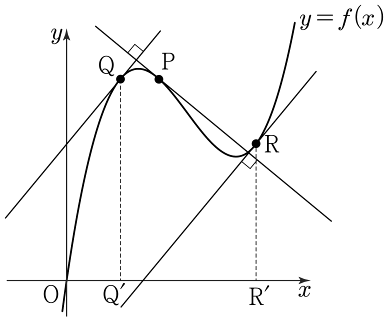
$\int_{-2}^{4} f(x)\,dx$의 값은? [4점]

① 23 ② 25 ③ 27 ④ 29 ⑤ 31

344. 함수 $y=3^{-2x+a}+a$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 후, x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동시킨 그래프는 점근선의 방정식이 $x=-2$이고 점 $(b,\ 0)$을 지난다. $a+b$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

345. 그림과 같이 함수 $f(x)=x^3-5x^2+7x$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))\ \left(1<a<\frac{7}{3}\right)$에서의 접선에 수직이고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 두 접선의 접점을 각각 Q, R이라 하자. 두 점 Q, R에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 Q$'$, R$'$이라 할 때, 선분 Q$'$R$'$의 길이의 최솟값은? (단, Q의 x좌표는 점 R의 x좌표보다 작다.) [4점]



① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

346. 삼차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)-|f(t)|\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\le g(-2)$이다.
> (다) $0<x<2$인 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\ge 0$이다.

$\int_0^4 f(x)\,dx=-12$일 때, $f(1)$의 값은? [4점]

① $-\frac{8}{3}$ ② 0 ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{9}{8}$

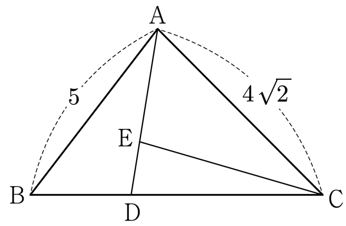
347. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n = \begin{cases} a_n + a_{n+1} - 2n & (a_n > 0) \\ a_n + n & (a_n \le 0) \end{cases}$$

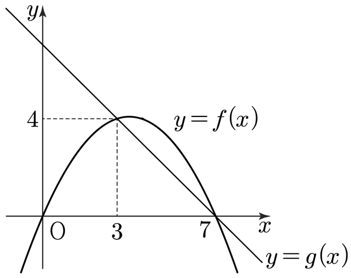
을 만족시킨다. $a_6 = 1$일 때, 모든 a_9의 값의 합은? [4점]

① $-\frac{98}{5}$ ② $-\frac{96}{5}$ ③ $-\frac{94}{5}$ ④ $-\frac{92}{5}$ ⑤ -18

348. 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=4\sqrt{2}$, $\cos(\angle CBA)=\frac{3}{5}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC 위의 점 D와 선분 AD위의 점 E에 대하여 두 삼각형 ABD, CAE가 서로 닮은 도형일 때, 선분 AE의 길이는 $\frac{q}{p}\sqrt{2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



349. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같다.



부등식

$$2^{f(x)g(x)}>1$$

$$\log_2\{f(x)g(x)+8\} \ge 1-\log_{\frac{1}{2}}\{2f(x)+g(x)\}$$

를 모두 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오. [4점]

350. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [4점]

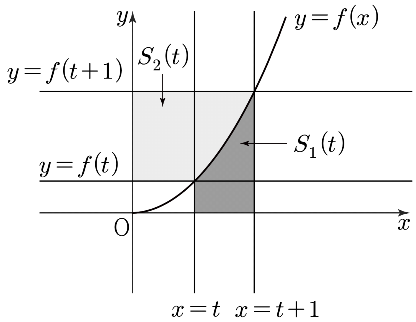
(가) $f(0)>0$, $f(2)=0$, $f'(2)=14$
(나) 방정식 $f'(x)=f'(1)$의 서로 다른 세 실근
α, β, $\gamma(\alpha<\beta<\gamma)$
는 등차수열을 이룬다.
(다) $f(x)-f'(t)x \le f(t)-tf'(t)$를 만족시키는 실수 z의 개수가 2이상이 되도록 하는 실수 t의 최댓값과 최솟값의 차는 2이다.

일일학습 | 25학년도 EBS 만점마무리 시즌2 3회

36 일차 : 26년 월 일

351. 그림과 같이 양수 k에 대하여 함수 $f(x)=kx^2\ (x\geq 0)$이 있다. 양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=t$, $x=t+1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S_1(t)$라 하고, 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 두 직선 $y=f(t)$, $y=f(t+1)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S_2(t)$라 하자.

$\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{kS_1(t)-S_2(t)}{t^2}=3$일 때, k의 값은? [4점]



① 2 ② $\dfrac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\dfrac{7}{2}$ ⑤ 4

352. 첫째항이 1인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n$의 값은 한 자리의 자연수이다.
> (나) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\frac{(a_2-1)^2}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}$의 값을 S라 하면 S는 자연수이다.

부등식 $a_m>S$를 만족시키는 자연수 m의 최솟값은? [4점]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤

353. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+2}{x-1}=3,\ \lim_{x\to1}\frac{4-2g(x)}{f(x)+2}=-1$$

이다. 함수 $y=\{f(x)+1\}\{g(x)+1\}$의 그래프 위의 점 $(1,\ a)$에서 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $a+S$의 값은? [4점]

① $\frac{43}{10}$ ② $\frac{87}{20}$ ③ $\frac{22}{5}$ ④ $\frac{89}{20}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

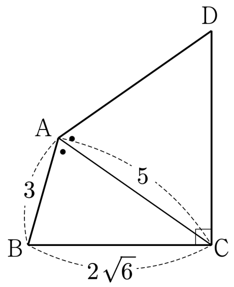
354. 시각 $t=1$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t\geq0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=-2|t-1|+2,\ v_2(t)=-|t-1|+1$$

이다. 시각 $t=\alpha(\alpha>0)$에서 두 점 P, Q의 위치가 같을 때, 시각 $t=0$에서 $t=\alpha$까지 점 P가 움직인 거리는 s이다. $\alpha+s$의 값은? [4점]

① $6-\sqrt{2}$ ② $6-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 6 ④ $6+\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $6+\sqrt{2}$

355. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2\sqrt{6}$, $\overline{CA}=5$이고 $\angle DCB=\frac{\pi}{2}$인 사각형 ABCD가 있다. $\angle BAC=\angle CAD$일 때, 사각형 ABCD의 넓이는? [4점]



① $13\sqrt{2}$ ② $\frac{40\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{41\sqrt{2}}{3}$ ④ $14\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{43\sqrt{2}}{3}$

356. 함수 $f(x)$가 모든 자연수 n에 대하여

$$f(x)=2^{1-n}\sin\frac{\pi}{2}x\,(2n-2\le x\le 2n)$$

이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $|f(x)|=|g(x)|$이다.
(나) $g(7)>0$이고, 방정식 $g(x)=g(7)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이며, 이 3개의 실근의 합은 5의 배수이다.

방정식 $g(x)=g(5)$의 서로 다른 실근의 개수는 m이고, 이 m개의 실근의 합이 S일 때, $m+S$의 값은? [4점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

357. 사차함수 $f(x)$와 그 도함수 $f'(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=0,\ f'(0)=0$
(나) 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 x축과 점 $(3,\ 0)$에서 접한다.

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

| 보기 |

ㄱ. 방정식 $f(x)=f(2)$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

ㄴ. $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} < 0$이면 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \le 0$이다.

ㄷ. $f(1)=\frac{11}{4}$일 때 방정식 $4f(x)=8x+k$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 정수 k의 최솟값은 -1이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

358. 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[-n,\ n]$에서 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2^{x+a}+2^a+1 & (x<0) \\ 2^x & (x \ge 0) \end{cases}$$

의 최댓값과 최솟값의 합을 c_n이라 하자. $c_1=6$일 때, $\sum_{k=1}^{5}(c_k-a)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [4점]

359. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 두 곡선 $y=f(-x)$, $y=f(x)$가 일치한다.
자연수 m에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le 0) \\ f(x-m)+n & (x>0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 자연수 n의 값을 $h(m)$이라 할 때, $\displaystyle\sum_{m=1}^{5}\frac{h(m)}{m}$의 값을 구하시오. [4점]

360. $a_1<0$이고 모든 항이 정수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항 까지의 합을 S_n이라 하자. $m+2<k$인 두 자연수 m, k에 대하여

$$|S_m|=|S_{m+2}|=|S_k|=24$$

일 때, a_{m+k}의 값을 구하시오. [4점]

[정답 및 해설]

1. 정답 ①

두 점 P, Q의 시각 t $(t>0)$에서의 가속도를 각각 $a_1(t)$, $a_2(t)$라 하면

$$a_1(t)=\frac{d}{dt}v_1(t)=6t-6$$

$$a_2(t)=\frac{d}{dt}v_2(t)=24$$

이므로

$a_1(t_1)=a_2(t_1)$에서

$6t_1-6=24$

$t_1=5$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^5|v_1(t)|dt$$

$$=\int_0^5|3t^2-6t|dt$$

$$=\int_0^2(-3t^2+6t)dt+\int_2^5(3t^2-6t)dt$$

$$=\left[-t^3+3t^2\right]_0^2+\left[t^3-3t^2\right]_2^5$$

$=4+54$

$=58$

2. 정답 ③

함수 $y=a\sin\frac{\pi x}{b}+\frac{a}{2}$의 주기가 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{b}}=2b$이므로

닫힌구간 $\left[0,\ \frac{5b}{2}\right]$에서 정의된 함수 $f(x)=a\sin\frac{\pi x}{b}+\frac{a}{2}$의

최댓값은 $a+\frac{a}{2}$, 즉 $\frac{3a}{2}$이고, 최솟값은 $-a+\frac{a}{2}$, 즉 $-\frac{a}{2}$이다.

이때 세 점 A, B, C의 좌표는

$\mathrm{A}\left(\frac{b}{2},\ \frac{3a}{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{5b}{2},\ \frac{3a}{2}\right)$, $\mathrm{C}\left(\frac{3b}{2},\ -\frac{a}{2}\right)$

이다.

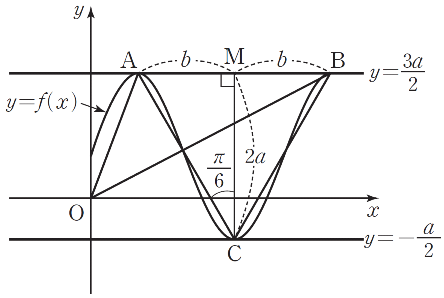
선분 AB의 중점을 M이라 하면 삼각형 ABC가 정삼각형이므로

$\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{CM}}$

이고, 직각삼각형 ACM에서

$\overline{\mathrm{AM}}=b$, $\overline{\mathrm{CM}}=2a$, $\angle\mathrm{ACM}=\frac{\pi}{6}$

이다.



$\tan(\angle\mathrm{ACM})=\frac{\overline{\mathrm{AM}}}{\overline{\mathrm{CM}}}$에서

$\tan\frac{\pi}{6}=\frac{b}{2a}$

$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{b}{2a}$

$a=\frac{\sqrt{3}b}{2}$ …… ㉠

삼각형 AOB의 넓이가 $12\sqrt{3}$이므로

$\frac{1}{2}\times2b\times\frac{3a}{2}=12\sqrt{3}$

$ab=8\sqrt{3}$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{\sqrt{3}b}{2}\times b=8\sqrt{3}$

$b^2=16$

$b>0$이므로

$b=4$

$b-4$를 ㉠에 대입하면

$a=\frac{\sqrt{3}}{2}\times4=2\sqrt{3}$

따라서

$a^2+b^2=(2\sqrt{3})^2+4^2=28$

3. 정답 ②

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d(d는 정수)라 하면

조건 (가)에서

$$a_5\times a_6=-\left|\frac{a_5\times a_6}{2}\right|-3|a_6|<0$$

이므로

$a_6<0<a_5$ 또는 $a_5<0<a_6$

이다.

(i) $a_6<0<a_5$일 때

조건 (나)에서

$$\sum_{k=1}^{11}(|a_k|+a_k)=2\sum_{k=1}^{5}a_k=10a_3=222$$

이므로

$a_3=\frac{111}{5}$

등차수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 0이 아닌 정수이어야 하므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $a_5<0<a_6$일 때

조건 (나)에서

$\sum_{k=1}^{11}(|a_k|+a_k)=2\sum_{k=6}^{11}a_k=6(a_6+a_{11})=222$

이므로

$a_6+a_{11}=37$

$(a_1+5d)+(a_1+10d)=37$

$2a_1+15d=37$ …… ㉠

한편, 조건 (가)에서

$a_5\times a_6=\frac{a_5\times a_6}{2}-3a_6$

이므로

$a_5\times a_6=-6a_6$

이때 $a_6>0$이므로

$a_5=-6$

즉, $a_1+4d=-6$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a_1=-34,\ d=7$

(i), (ii)에 의하여

$a_1=-34,\ d=7$

따라서

$a_5=-6$

$a_6=a_5+d=-6+7=1$

이므로

$a_5+a_6=-6+1=-5$

4. 정답 ⑤

ㄱ. 조건 (가)에서

$f(-x)=f(x)$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

또 $f(4-x)=f(-(4-x))=f(x-4)$

즉, $f(x-4)=f(x)$이므로

$f(2)=f(10)$ (참)

ㄴ. 조건 (나)에서

$\int_{-2}^{1}f(x)dx=5\int_{0}^{2}f(x)dx=30$

이므로

$\int_{-2}^{1}f(x)dx=\frac{15}{2}$

$\int_{0}^{2}f(x)dx=6$

이때 $\int_{0}^{2}f(x)dx=\int_{-2}^{0}f(x)dx$이므로

$\int_{-2}^{1}f(x)dx-\int_{0}^{2}f(x)dx=\frac{15}{2}-6$에서

$\int_{-2}^{1}f(x)dx-\int_{-2}^{0}f(x)dx=\frac{3}{2}$

즉, $\int_{0}^{1}f(x)dx=\frac{3}{2}$

$\int_{0}^{2}f(x)dx-\int_{0}^{1}f(x)dx=6-\frac{3}{2}$에서

$\int_{1}^{2}f(x)dx=\frac{9}{2}$ (참)

ㄷ. $g(x)=xf(x)$라 하면

$g(-x)=-xf(-x)=-xf(x)=-g(x)$

이므로 함수 $y=g(x)$, 즉 $y=xf(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

따라서 $\int_{-11}^{11}xf(x)dx=0$이므로

$$\begin{aligned}&\int_{-11}^{11}(x+2)f(x)dx\\&=\int_{-11}^{11}xf(x)dx+2\int_{-11}^{11}f(x)dx\\&=0+4\int_{0}^{11}f(x)dx\\&=4\left(5\int_{0}^{2}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx\right)\\&=4\left(5\times6+\frac{9}{2}\right)\\&=138\end{aligned}$$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

5. 정답 ②

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle BDA)}=2\times\frac{8\sqrt{7}}{7}$

이므로

$$\begin{aligned}\overline{AB}&=\frac{16\sqrt{7}}{7}\times\sin(\angle BDA)\\&=\frac{16\sqrt{7}}{7}\times\frac{\sqrt{7}}{4}\\&=4\end{aligned}$$

$\overline{BD}=x,\ \overline{AD}=y\ (0<x<y)$라 하자.

삼각형 ABD의 넓이가 $\frac{15\sqrt{7}}{4}$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{AD}\times\sin(\angle BDA)=\frac{15\sqrt{7}}{4}$

$\frac{1}{2}\times x\times y\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$

$xy=30$ …… ㉠

한편, $\cos(\angle \mathrm{BAC})<0$이므로

$\frac{\pi}{2}<\angle \mathrm{BAC}<\pi$

이때 $\angle \mathrm{BDC}=\pi-\angle \mathrm{BAC}$이므로

$0<\angle \mathrm{BDC}<\frac{\pi}{2}$이고,

$\angle \mathrm{BDA}<\angle \mathrm{BDC}$이므로

$0<\angle \mathrm{BDA}<\frac{\pi}{2}$

$\cos(\angle \mathrm{BDA})=\sqrt{1-\sin^2(\angle \mathrm{BDA})}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}=\frac{3}{4}$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{BD}}^2+\overline{\mathrm{AD}}^2-2\times\overline{\mathrm{BD}}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\cos(\angle \mathrm{BDA})$

이므로

$4^2=x^2+y^2-2\times x\times y\times\frac{3}{4}$

$16=x^2+y^2-\frac{3}{2}xy$

$(x+y)^2=\frac{7}{2}xy+16$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(x+y)^2=\frac{7}{2}xy+16$

$(x+y)^2=121$

$x+y>0$이므로

$x+y=11$

즉, $y=11-x$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$x(11-x)=30$

$(x-5)(x-6)=0$

$x=5,\ y=6$

(i) $x=5$일 때

㉢에서 $y=6$

(ii) $x=6$일 때

㉢에서 $y=5$

$x>y$이므로 조건을 만족시키지 못한다.

(i), (ii)에 의하여

$x=5,\ y=6$

즉, $\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{CD}}=5,\ \overline{\mathrm{AD}}=6$

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin(\angle \mathrm{CAD})}=2\times\frac{8\sqrt{7}}{7}$이므로

$\sin(\angle \mathrm{CAD})=\frac{5\sqrt{7}}{16}$

$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{CD}}$이므로

$\angle \mathrm{BAD}=\angle \mathrm{CAD}$, 즉 $0<\angle \mathrm{CAD}<\frac{\pi}{2}$

$\cos(\angle \mathrm{CAD})=\sqrt{1-\sin^2(\angle \mathrm{CAD})}=\sqrt{a-\left(\frac{5\sqrt{7}}{16}\right)^2}=\frac{9}{16}$

$\overline{\mathrm{AC}}=z\ (0<z<4)$라 하면

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{CD}}^2=\overline{\mathrm{AD}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\cos(\angle \mathrm{CAD})$

이므로

$5^2=6^2+z^2-2\times6\times z\times\frac{9}{16}$

$4z^2-27z+44=0$

$(4z-11)(z-4)=0$

$0<z<4$이므로

$z=\frac{11}{4}$

따라서 삼각형 ADC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\sin(\angle \mathrm{CAD})$

$=\frac{1}{2}\times\frac{11}{4}\times6\times\frac{5\sqrt{7}}{16}$

$=\frac{165\sqrt{7}}{64}$

6. 정답 ④

(i) a_3이 3의 배수일 때

$a_4=\frac{a_3}{3}$에서

$a_3=3a_4=3\times2=6$

(i-ⓐ) a_2가 3의 배수일 때

$a_3=\frac{a_2}{3}$에서

$a_2=3a_3=3\times6=18$

(i-ⓐ-①) a_1이 3의 배수일 때

$a_1=3a_2=3\times18=54$

(i-ⓐ-②) a_1이 3의 배수가 아닐 때

$a_2=4a_1-2$에서

$a_1=\frac{a_2+2}{4}=\frac{18+2}{4}=5$

(i-ⓑ) a_2가 3의 배수가 아닐 때

$a_3=4a_1-2$에서

$a_2=\frac{a_3+2}{4}=\frac{6+2}{2}=2$

(i-ⓑ-①) a_1이 3의 배수일 때

$a_2=\frac{a_1}{3}$에서

$a_1=3a_2=3\times2=6$

(i-ⓑ-②) a_1이 3의 배수가 아닐 때

$a_2=4a_1-2$에서

$a_3=\dfrac{a_4+2}{4}=\dfrac{2+2}{4}=1$

(ii) a_3이 3의 배수가 아닐 때

$a_4=4a_3-2$에서

$a_3=\dfrac{a_4+2}{4}=\dfrac{2+2}{4}=1$

(ii-ⓐ) a_2가 3의 배수일 때

$a_3=\dfrac{a_2}{3}$에서

$a_2=3a_3=3\times1=3$

(ii-ⓐ-①) a_1이 3의 배수일 때

$a_2=\dfrac{a_1}{3}$에서

$a_1=3a_2=3\times3=9$

(ii-ⓐ-②) a_1이 3의 배수가 아닐 때

$a_2=4a_1-2$에서

$a_1=\dfrac{a_2+2}{4}=\dfrac{3+2}{4}=\dfrac{5}{4}$

이때 a_1이 자연수가 아니므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ii-ⓑ) a_2가 3의 배수가 아닐 때

$a_3=4a_2-2$에서

$a_2=\dfrac{a_3+2}{4}=\dfrac{1+2}{4}=\dfrac{3}{4}$

이때 a_2가 자연수가 아니므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

한편, $a_4=2$이므로

$a_5=4a_4-2=4\times2-2=6$,

$a_6=\dfrac{a_5}{3}=\dfrac{6}{3}=2$

⋮

이므로

4이상의 자연수 n에 대하여

$$a_n=\begin{cases}2 & (n\text{이 4 이상의 짝수인 경우})\\ 6 & (n\text{이 4 이상의 홀수인 경우})\end{cases}$$

이때,

$a_9+a_{10}=6+2=8$

이므로

$a_1>a_9+a_{10}$, 즉 $a_1>8$

을 만족시키는 a_1의 값은

54 또는 9

따라서 모든 a_1의 값의 합은

$54+9=63$

7. 정답 ⑤

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f(2)<0$이므로 $f(k)=0$, $f'(k>0)$인 실수 $k(k>2)$가 존재한다.

함수 $g(x)$가 $x=k$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to k-}g(x)=\lim_{x\to k-}\frac{x(f(4-x))^2}{f(x)}$$

의 값이 존재한다.

이때 $\lim\limits_{x\to k-}f(x)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to k-}x(f(4-x))^2=k(f(4-k))^2=0$

즉, $f(4-k)=0$이다.

$k>2$, $4-k<2$이고, $f(2)<0$이므로

실수 p에 대하여

$f(x)=(x-p)(x-4+k)(x-k)$로 놓을 수 있다.

(i) $p\neq4-k$이고 $p\neq k$일 때

$f(2)<0$이므로 $p<4-k$또는 $4-k<p<2$이다.

(i-①) $p<4-k$일 때

$f(x)<0$, 즉 $x<p$또는 $4-k<x<k$일 때

$$g(x)=\frac{x(f(4-x))^2}{f(x)}$$
$$=\frac{x\{(4-x-p)(4-x-4+k)(4-x-k)\}^2}{(x-p)(x-4+k)(x-k)}$$
$$=\frac{x(x-4+p)^2(x-k)(x-4+k)}{x-p}$$

함수 $g(x)$는 $x=p$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to p-}g(x)=\lim_{x\to p-}\frac{x(x-4+p)^2(x-k)(x-4+k)}{x-p}$$

의 값이 존재한다.

$\lim\limits_{x\to p-}g(x)$에서 $x\to p-$일 때, (분모) $\to0$이므로

(분자) $\to0$이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to p-}x(x-4+p)^2(x-k)(x-4+k)=0$에서

$p(2p-4)^2(p-k)(p-4+k)=0$

$p\neq4-k$이고 $p\neq k$이므로 $p=0$또는 $p=2$이다.

$p=2$이면 $f(2)=-$이므로 $f(2)<0$에 모순이다.

$p=0$이면 $f(x)=x(x-4+k)(x-k)$

$\lim\limits_{x\to p-}g(x)=\lim\limits_{x\to p+}g(x)$에서

$$\lim_{x\to p-}g(x)=\lim_{x\to0-}\frac{x(x-4)^2(x-k)(x-4+k)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0-}(x-4)^2(x-k)(x-4+k)$$
$$=-16k(k-4),$$

$\lim\limits_{x\to p+}g(x)=\lim\limits_{x\to0+}(f'(x)-4x)=-k(k-4)$

이므로

$-16k(k-4)=-k(k-4)$

$k=0$또는 $k=4$

$k=0$또는 $k=4$는 $p\neq k$이고 $p\neq4-k$에 모순이다.

(ⅰ-②) $4-k<p<2$일 때

(ⅰ-①) 과 같은 방법으로 모순이다.

(ⅱ) $p=k$일 때

$f(x)=(x-4+k)(x-k)^2$

으로 놓을 수 있다.

이때 $f(2)=(k-2)(2-k)^2=(k-2)^3>0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ⅲ) $p=4-k$일 때

$f(x)=(x-4+k)^2(x-k)$

로 놓을 수 있다.

$$g(x)=\begin{cases} f'(x)-4x & (x=p \text{ 또는 } x\geq k) \\ \dfrac{x(f(4-x))^2}{f(x)} & (x<p \text{ 또는 } p<x<k) \end{cases}$$

함수 $g(x)$가 $x=k$에서 연속이므로

$\lim_{x\to k+} g(x)=\lim_{x\to k-} g(x)=g(k)$

이다.

$$\lim_{x\to k+} g(x)=\lim_{x\to k+}(f'(x)-4x)$$
$$=f'(k)-4k$$
$$=4k^2-20k+16$$

$$\lim_{x\to k-} g(x)=\lim_{x\to k-}\frac{x(f(4-x))^2}{f(x)}$$
$$=\lim_{x\to k-} x(x-k)^3$$
$$=0,$$

$g(k)=f'(k)-4k=4k^2-20k+16$

이므로

$4k^2-20k+16=0$

$4(k-1)(k-4)=0$

$k>2$이므로

$k=4$

이때 $p=4-k=4-4=0$이고

$f(x)=x^2(x-4)$이다.

한편,

$\lim_{x\to p} g(x)=\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0} x(x-4)^3=0,$

$g(p)=g(0)=f'(0)=0$

이므로

$\lim_{x\to p} g(x)=g(p)$

이다. 즉, 함수 $g(x)$는 $x=p$에서 연속이다.

(ⅰ)~(ⅲ) 에 의하여

$f(x)=x^2(x-4)$이고 $f'(x)=3x^2-8x$이므로

$$g(x)=\begin{cases} f'(x)-4x & (x=0 \text{ 또는 } x\geq 4) \\ \dfrac{x(f(4-x))^2}{f(x)} & (x<0 \text{ 또는 } 0<x<4) \end{cases}$$
$$=\begin{cases} 3x^2-12x & (x=0 \text{ 또는 } x\geqq 4) \\ x(x-4)^3 & (x<0 \text{ 또는 } 0<x<4) \end{cases}$$

따라서

$$g(3)+g(6)=3(3-4)^2+(3\times 6^2-12\times 6)$$
$$=-3+36$$
$$=33$$

8. 정답 15

모든 자연수 n에 대하여

$\sum_{k=1}^{n+1} a_k-\sum_{k=1}^{n} a_k=a_{n+1}$

이므로 조건 (나)에서

$\left\{\frac{1}{8}(a_{n+1})^2+\frac{1}{2}a_{n+1}-\frac{45}{8}\right\}-\left\{\frac{1}{8}(a_n)^2+\frac{1}{2}a_n-\frac{45}{8}\right\}=a_{n+1}$

$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n)=4(a_{n+1}+a_n)$ …… ㉠

조건 (가)에서 $a_n>0$이므로

$a_{n+1}+a_n>0$

이고, ㉠에서

$a_{n+1}-a_n=\boxed{4}$ …… ㉡

한편, 조건 (나)에서

$\sum_{k=1}^{1} a_k=\frac{1}{8}(a_1)^2+\frac{1}{2}a_1-\frac{45}{8}$

이므로

$a_1=\frac{1}{8}(a_1)^2+\frac{1}{2}a_1-\frac{45}{8}$

$(a_1+5)(a_1-9)=0$

조건 (가)에서 $a_1>0$이므로

$a_1=9$ …… ㉢

㉡, ㉢에서

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 9이고 공차가 4인 등차수열이므로

$a_n=9+4(n-1)$, 즉

$a_n=\boxed{4n+5}$

이다.

부등식

$\sum_{k=1}^{m}\frac{36}{a_k a_{k+1}}>\frac{14}{17}$ …… ㉣

에서

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{36}{a_k a_{k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{36}{(4k+5)(4k+9)}$$
$$=9\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{4k+5}-\frac{1}{4k+9}\right)$$
$$=9\left\{\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{17}\right)+\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{21}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4m+5}-\frac{1}{4m+9}\right)\right\}$$
$$=9\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{4m+9}\right)$$

이므로

$9\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{4m+9}\right)>\frac{14}{17}$

$m>\frac{21}{2}=10.5$

따라서 부등식 ㉣을 만족시키는 자연수 m의 최솟값은

$\boxed{11}$

이다.

이상에서 $p-4$, $q=11$이고 $f(n)=4n+5$이므로

$\frac{f(55)}{p+q}=\frac{225}{4+11}=15$

9. 정답 204

사차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=3x$는 서로 다른 두 점 A, B에서 접하므로 두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, b $(a<b)$라 하면

$f(x)-3x=p(x-a)^2(x-b)^2+3x$ …… ㉠

로 놓을 수 있다.

조건 (가)에서

$\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{10}$ 이므로

$\sqrt{(b-a)^2+(3b-3a)^2}=(b-a)\sqrt{10}=2\sqrt{10}$

$b=a+2$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=p(x-a)^2(x-a-2)^2+3x$

조건 (나)에서

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ 의 값이 존재하고

$x\to0$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$이므로

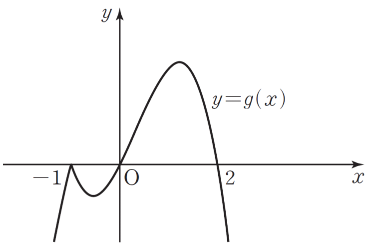
$f(0)=pa^2(a+2)^2=0$

$a=0$ 또는 $a=-2$

(i) $a=0$일 때

$g(x)=f(x)-3x=px^2(x-2)^2$이라 하면

함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$g'(x)=f'(x)-3$

함수 $g(x)$가 $x=\alpha$ $(0<a<2)$에서 극대라 하면

$\alpha<x<2$일 때,

$g'(x)<0$이므로

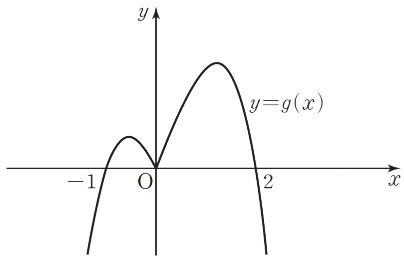
$f'(x)-3<0$, 즉 $f'(x)<3$

이다. 그러므로 조건 (다)를 만족시키지 못한다.

(ii) $a=-2$일 때

$h(x)=f(x)-3x=px^2(x+2)^2$이라 하면

함수 $y=h(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$h'(x)=f'(x)-3$

$x>0$일 때,

$h'(x)>0$이므로

$f'(x)-3>0$, $f'(x)>3$

이다. 그러므로 조건 (다)를 만족시킨다.

(i), (ii) 에 의하여

$f(x)=px^2(x+2)^2+3x$

$f(1)=9p+3=6$

$p=\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^2(x+2)^2+3x$이므로

$f(4)=\frac{1}{3}\times4^2\times(4+2)^2+3\times4$

$=204$

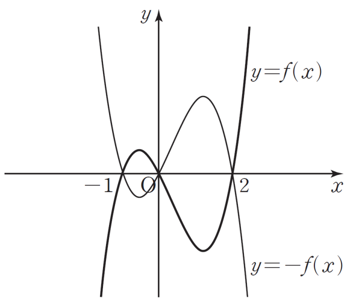
10. 정답 27

조건 (가)에서

$(f(x)-g(x))(f(x)+g(x))=0$

이므로

$g(x)=f(x)$ 또는 $g(x)=-f(x)$



한편, 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고

조건 (나)에서

모든 실수 x에 대하여 $g(x)\le M$을 만족시키는 상수 M이 존재하므로

$x\le-1$일 때, $g(x)=f(x)$이고

$x>2$일 때, $g(x)=-f(x)$이다.

조건 (다)에서

$\lim\limits_{x\to a-}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\times\lim\limits_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}<0$

을 만족시키는 실수 a의 개수가 1이므로

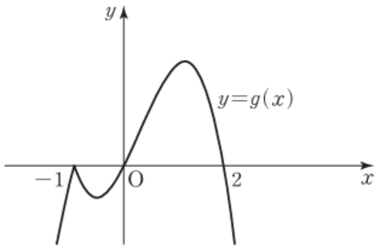
$a=-1$ 또는 $a=0$ 또는 $a=2$

(i) $a=-1$일 때

함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\le -1) \\ -f(x) & (x>-1) \end{cases}$$

이고, 그 그래프는 다음과 같다.



함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖고 $x=2$에서 극댓값을 갖는다.

즉, $b=0$, $c=2$

$$h(b)=h(0)=\int_0^0 g(t)dt=0$$

$$\begin{aligned} h(c)=h(2) &= \int_0^2 g(t)dt \\ &= \int_0^2 (-f(t))dt \\ &= \int_0^2 (-t^3+t^2+2t)dt \\ &= \left[-\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_0^2 \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

그러므로

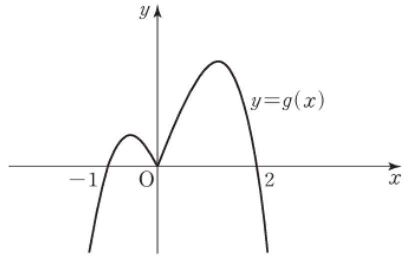
$$\begin{aligned} a+h(b)+h(c) &= -1+h(0)+h(2) \\ &= -1+0+\frac{8}{3} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

(ii) $a=0$일 때

함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\le 0) \\ -f(x) & (x>0) \end{cases}$$

이고, 그 그래프는 다음과 같다.



함수 $h(x)$는 $x=-1$에서 극솟값을 갖고 $x=2$에서 극댓값을 갖는다.

즉, $b=-1$, $c=2$

$$\begin{aligned} h(b)=h(-1) &= \int_0^{-1} g(t)dt \\ &= -\int_{-1}^0 g(t)dt \\ &= -\int_{-1}^0 f(t)dt \\ &= -\int_{-1}^0 (t^3-t^2-2t)dt \\ &= -\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_{-1}^0 \\ &= -\frac{5}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(c)=h(2) &= \int_0^2 g(t)dt \\ &= \int_0^2 (-f(t))dt \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

그러므로

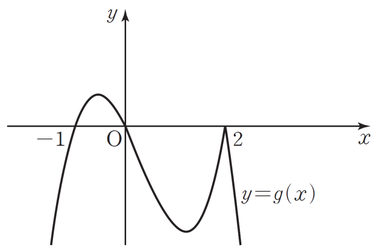
$$\begin{aligned} a+h(b)+h(c) &= 0+h(-1)+h(2) \\ &= 0-\frac{5}{12}+\frac{8}{3} \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

(iii) $a=2$일 때

함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\le 2) \\ -f(x) & (x>2) \end{cases}$$

이고, 그 그래프는 다음과 같다.



함수 $h(x)$는 $x=-1$에서 극솟값을 갖고 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.
즉, $b=-1$, $c=0$

$$h(b)=h(-1)=\int_0^{-1} g(t)dt=-\int_{-1}^0 g(t)dt=-\int_{-1}^0 f(t)dt=-\frac{5}{12}$$

$$h(c)=h(0)=\int_0^0 g(t)dt=0$$

그러므로

$$a+h(b)+h(c)=2+h(-1)+h(0)=2-\frac{5}{12}+0=\frac{19}{12}$$

(i)~(iii)에 의하여
$a+h(b)+h(c)$의 최댓값은

$$k=\frac{9}{4}$$

따라서

$$12\times k=12\times\frac{9}{4}=27$$

11. 정답 ④
등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r>0)$이라 하자.

$a_1+a_3=\frac{1}{r}(a_2+a_4)$이므로 $S_4=3(a_2+a_4)$에서

$$a_1+a_2+a_3+a_4=3(a_2+a_4)$$

$$(a_1+a_3)+(a_2+a_4)=3(a_2+a_4)$$

$$\frac{1}{r}(a_2+a_4)+(a_2+a_4)=3(a_2+a_4)$$

$$\left(\frac{1}{r}+1\right)(a_2+a_4)=3(a_2+a_4)$$

$a_2>0$, $a_4>0$이므로

$$\frac{1}{r}+1=3$$

$$\frac{1}{r}=2$$

$$r=\frac{1}{2}$$

$S_6=S_4+3$에서

$$S_6-S_4=3$$

$$a_5+a_6=3$$

$$a_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^4+a_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=3$$

$$\frac{3}{32}a_1=3$$

$$a_1=32$$

그러므로

$$a_n=32\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2^{5-(n-1)}=2^{6-n}$$

부등식 $a_m>\frac{1}{10}$에서

$$2^{6-m}>\frac{1}{10}$$

$$2^m<640$$

이때 $2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로 자연수 m의 최댓값은 9이다.

12. 정답 ②
삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\cos\frac{2}{3}\pi=3^2+5^2-2\times3\times5\times\left(-\frac{1}{2}\right)=49$$

$\overline{\mathrm{AC}}>0$이므로 $\overline{\mathrm{AC}}=7$
사각형 ABCD가 한 원에 내접하므로

$$\angle\mathrm{CDA}=\pi-\angle\mathrm{ABC}=\pi-\frac{2}{3}\pi=\frac{\pi}{3}$$

$\overline{\mathrm{AD}}=x$ $(x>0)$이라 하면 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{AD}}^2+\overline{\mathrm{CD}}^2-2\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\cos\frac{\pi}{3}$$

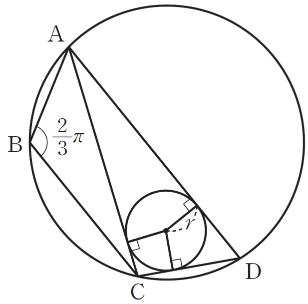
$$7^2=x^2+3^2-2\times x\times3\times\frac{1}{2}$$

$$x^2-3x-40=0$$

$$(x+5)(x-8)=0$$

$x>0$이므로 $x=8$, 즉 $\overline{\mathrm{AD}}=8$
삼각형 ACD의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\times8\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$$



삼각형 ACD에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r이라 하면

$$S=\frac{r}{2}(\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{AD}})=\frac{r}{2}(7+3+8)=9r$$

따라서

$S=9r=6\sqrt{3}$

이므로

$r=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$

이고 삼각형 ACD에 내접하는 원의 넓이는

$\pi\times\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2=\dfrac{4}{3}\pi$

13. 정답 ①

모든 실수 x에 대하여 $-1\le\sin\dfrac{x-\pi}{b}\le 1$이므로 함수

$f(x)=a\sin\dfrac{x-\pi}{b}+c$의 최댓값과 최솟값은 각각

$|a|+c,\ -|a|+c$이다.

이때 조건 (가)에 의하여

$|a|+c=5$ …… ㉠

$-|a|+c=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$|a|=2,\ c=3$

즉, $a=-2,\ c=3$ 또는 $a=2,\ c=3$

한편, 함수 $f(x)=a\sin\dfrac{x-\pi}{b}+c$의 주기는

$\dfrac{2\pi}{\left|\dfrac{1}{b}\right|}=2|b|\pi$

이고 조건 (나)에 의하여 $2|b|$는 4의 양의 약수이어야 하므로

$b=-2$ 또는 $b=-1$ 또는 $b=1,\ b=2$

$a,\ b,\ c$의 값에 따라 $\dfrac{ac}{b}$의 값은 다음과 같다.

a	b	c	$\dfrac{ac}{b}$
-2	-2	3	3
	-1		6
	1		-6
	2		-3
2	-2		-3
	-1		-6
	1		6
	2		3

따라서 $\dfrac{ac}{b}$의 최댓값과 최솟값은 각각 $M=6,\ m=-6$이므로

$M-m=6-(-6)=12$

14. 정답 ⑤

ㄱ. $v_1(1)=2-1=1>0$

$v_2(1)=3\times1\times(1-2)=-3<0$

시각 $t=1$일 때 두 점 P, Q의 속도의 부호가 다르므로 두 점 P, Q가 움직이는 방향은 서로 반대이다. (참)

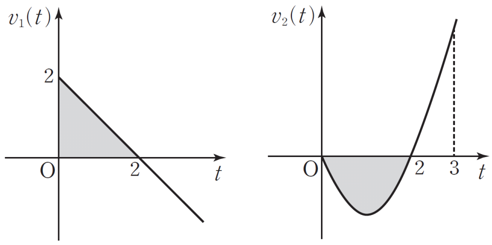
ㄴ. $v_1(t)=2-t=0$에서 $t=2$

$0<t<2$일 때 $v_1(t)>0$이므로 점 P는 양의 방향으로 움직이고, $t>2$일 때 $v_1(t)<0$이므로 점 P는 음의 방향으로 움직인다.

$v_2(t)=3t(t-2)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=2$

$0<t<2$일 때 $v_2(t)<0$이므로 점 Q는 음의 방향으로 움직이고, $t>2$일 때 $v_2(t)>0$이므로 점 Q는 양의 방향으로 움직인다.

따라서 $0\le t\le 2$일 때 두 점 P, Q 사이의 거리는 $t=2$일 때 최댓값을 갖는다.



이때 시각 $t=2$일 때 점 P의 위치는

$\dfrac{1}{2}\times2\times2=2$

시각 $t=2$일 때 점 Q의 위치는

$$\begin{aligned}\int_0^2 v_2(t)dt&=\int_0^2 3t(t-2)dt\\&=\int_0^2(3t^2-6t)dt\\&=\Big[t^3-3t^2\Big]_0^2\\&=(8-12)-0=-4\end{aligned}$$

따라서 $0\le t\le 2$일 때 두 점 P, Q 사이의 거리는 $t=2$일 때 최댓값 $2-(-4)=6$을 갖는다. (참)

ㄷ. ㄴ에서 $\displaystyle\int_0^2(3t^2-6t)dt=-4$이므로 $\displaystyle\int_0^2(-3t^2+6t)dt=4$

시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}&\int_0^3|v_2(t)|dt\\&=\int_0^3|3t^2-6t|dt\\&=\int_0^2(-3t^2+6t)dt+\int_2^3(3t^2-6t)dt\\&=4+\Big[t^3-3t^2\Big]_2^3\\&=4+\{(27-27)-(8-12)\}\\&=4+4=8\ \text{(참)}\end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

15. 정답 ①

곡선 $y=2^x-1$은 곡선 $y=2^x$을 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것으로 곡선 $y=2^x-1$은 원점 $(0,\ 0)$과 점 $(1,\ 1)$을 지난다.

곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=2^x-1$을 x축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이고, 이 곡선의 점근선의 방정식은 $y=-1$이다.

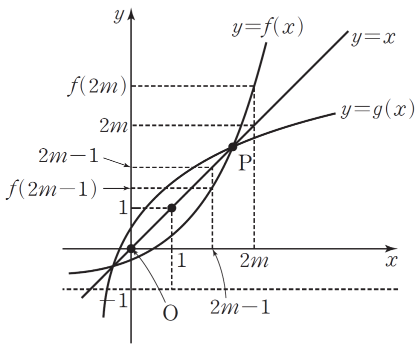
$$f(0)=2^{-n}-1=\frac{1}{2^n-1}$$

이고 모든 자연수 n에 대하여 $0<\frac{1}{2^n}<1$이므로

$$-1<f(0)=\frac{1}{2^n}-1<0$$

이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 원점 O와 점 $(1,\ 1)$은 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 내부에 있다.

한편, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점을 P라 하면 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점을 P라 하면 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 P는 직선 $y=x$ 위의 점이다.



이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형은 직선 OP에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 내부 또는 그 경계에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수가 짝수이려면 선분 OP 위의 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수가 짝수이어야 한다.

즉, 두 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $(1,\ 1)$은 선분 OP 위에 있고 점 $(2,\ 2)$는 선분 OP 위에 있지 않는 경우 또는 네 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 3)$은 선분 OP 위에 있고 점 $(4,\ 4)$는 선분 OP 위에 있지 않는 경우 또는 여섯 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $\cdots$, $(5,\ 5)$는 선분 OP 위에 있고 점 $(6,\ 6)$은 선분 OP 위에 있지 않은 경우 또는 여덟 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $\cdots$, $(7,\ 7)$은 선분 OP 위에 있고 점 $(8,\ 8)$은 선분 OP 위에 있지 않은 경우 등이다. 그러므로 자연수 m에 대하여 점 $(2m-1,\ 2m-1)$은 선분 OP 위에 있고, 점 $(2m,\ 2m)$은 선분 OP 윙 있지 않아야 한다.

그러므로 위 그림과 같이 $f(2m-1)\le 2m-1$, $f(2m)>2m$이어야 한다.

(ⅰ) $f(1)\le 1$, $f(2)>2$일 때

$f(1)\le 1$에서

$2^{1-n}-1\le 1$

$2^{1-n}\le 2$

$1-n\le 1$

$n\ge 0$

$f(2)>2$에서

$2^{2-n}-1>2$

$2^{2-n}>3$

$2-n>\log_2 3$

$n<2-\log_2 3$

그러므로 $0\le n<2-\log_2 3$ …… ㉠

이때 $1<\log_2 3<2$이므로 ㉠을 만족시키는 자연수 n의 값은 존재하지 않는다.

(ⅱ) $f(3)\le 3$, $f(4)>4$일 때

$f(3)\le 3$에서

$2^{3-n}-1\le 3$

$2^{3-n}\le 2^2$

$3-n\le 2$

$n\ge 1$

$f(4)>4$에서

$2^{4-n}-1>4$

$2^{4-n}>5$

$4-n>\log_2 5$

$n<4-\log_2 5$

그러므로 $1\le n<4-\log_2 5$ …… ㉡

이때 $2<\log_2 5<3$이므로 ㉡을 만족시키는 자연수 n의 값은 1뿐이다.

(ⅲ) $f(5)\le 5$, $f(6)>6$일 때

$f(5)\le 5$에서

$2^{5-n}-1\le 5$

$2^{5-n}\le 6$

$5-n\le\log_2 6$

$n\ge 5-\log_2 6$

$f(6)>6$에서

$2^{6-n}-1>6$

$2^{6-n}>7$

$6-n>\log_2 7$

$n<6-\log_2 7$

그러므로 $5-\log_2 6\le n<6-\log_2 7$ …… ㉢

이때 $2<\log_2 6<3$, $2<\log_2 7<3$이므로 ㉢을 만족시키는 자연수 n의 값은 3뿐이다.

(ⅳ) $f(7)\le 7$, $f(8)>8$일 때

$f(7)\le 7$에서

$2^{7-n}-1\le 7$

$2^{7-n}\le 2^3$

$7-n\le 3$

$n \geq 4$

$f(8) > 8$에서

$2^{8-n} - 1 > 8$

$2^{8-n} > 9$

$8 - n > \log_2 9$

$n < 8 - \log_2 9$

그러므로 $4 \leq n < 8 - \log_2 9$ ...... ㉣

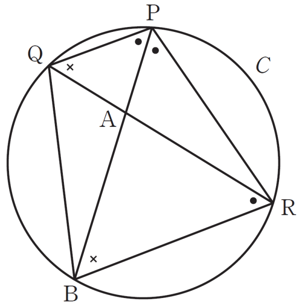
이때 $3 < \log_2 9 < 4$이므로 ㉣을 만족시키는 자연수 n의 값은 4뿐이다.

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$

따라서

$a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 3 + 4 = 8$

16. 정답 ②



원주각의 성질에 의하여 $\angle PQR = \angle PBR$

삼각형 PQR의 내각 $\angle QPR$의 이등분선이 선분 QR과 만나는 점이 A, 원 C와 만나는 점 중 P가 아닌 점이 B이므로 $\angle APQ = \angle RPB$

따라서 두 삼각형 PQA, PBR은 서로 닮음이므로

$\overline{PQ} : \overline{PB} = \overline{PA} : \overline{PR}$

이때 $\overline{PQ} = 3$, $\overline{PR} = 6$, $\overline{PB} = 3\overline{PA}$이므로

$3 : 3\overline{PA} = \overline{PA} : 6$

$3\overline{PA}^2 = 3 \times 6$

$\overline{PA}^2 = 6$

$\overline{PA} > 0$이므로 $\overline{PA} = \sqrt{6}$, $\overline{PB} = 3\overline{PA} = 3\sqrt{6}$

$\overline{AB} = \overline{PB} - \overline{PA} = 3\sqrt{6} - \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$

한편, 점 A가 삼각형 PQR의 내각 $\angle QPR$의 이등분선이 선분 QR과 만나는 점이므로

$\overline{AQ} : \overline{AR} = \overline{PQ} : \overline{PR} = 3 : 6 = 1 : 2$

$\overline{AQ} = \mathrm{k}$ $(k > 0)$이라 하면 $\overline{AR} = 2\mathrm{k}$이다.

원주각의 성질에 의하여 $\angle APQ = \angle ARB$이고

$\angle PQA = \angle RBA$이므로 두 삼각형 PQA, RBA는 서로 닮음이다.

그러므로

$\overline{PA} : \overline{RA} = \overline{AQ} : \overline{AB}$

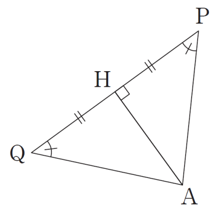
$\sqrt{6} : 2k = k : 2\sqrt{6}$

에서

$2k^2 = 12$, $k^2 = 6$

$k > 0$이므로 $k = \sqrt{6}$

그러므로 $\overline{AQ} = \sqrt{6}$, $\overline{AR} = 2\sqrt{6}$



삼각형 PQA가 $\overline{PA} = \overline{AQ} = \sqrt{6}$인 이등변삼각형이므로 점 A에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 PQ의 중점이다.

즉, $\overline{PH} = \overline{QH} = \frac{1}{2}\overline{PQ} = \frac{3}{2}$

직각삼각형 QAH에서

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{AQ}^2 - \overline{QH}^2} = \sqrt{(\sqrt{6})^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

이므로

$$\sin(\angle AQH) = \frac{\overline{AH}}{\overline{AQ}} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

따라서 원 C의 반지름의 길이를 R이라 하면 원 C에 내접하는 삼각형 PQR에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{PR}}{\sin(\angle AQH)} = 2\mathrm{R}$$

$$R = \frac{\overline{PR}}{2\sin(\angle AQH)} = \frac{6}{2 \times \frac{\sqrt{10}}{4}} = \frac{6}{5}\sqrt{10}$$

이고 원 C의 넓이는

$$\pi \times \left(\frac{6}{5}\sqrt{10}\right)^2 = \frac{72}{5}\pi$$

17. 정답 ⑤

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{|f(x)|}f'(x) & (f(x) \neq 0) \\ 0 & (f(x) = 0) \end{cases}$$ 에서

$$g(x) = \begin{cases} -f'(x) & (f(x) < 0) \\ 0 & (f(x) = 0) \\ f'(x) & (f(x) > 0) \end{cases}$$

이때 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $g(x)$는 $f(x) < 0$인 모든 실수 x에 대하여도 연속이다.

따라서 함수 $g(x)$가 $x = \alpha$에서 불연속이면 $f(\alpha) = 0$이다.

이때 $f'(\alpha) \neq 0$일 때와 $f'(\alpha) = 0$일 때에 따라 다음과 같다.

(ⅰ) $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) \neq 0$일 때

$f'(\alpha) \neq 0$이므로 함수 $f(x)$가

'$x \to \alpha-$일 때 $f(x) \to 0-$이고 $x \to \alpha+$일 때 $f(x) \to 0+$'

이라 하면

$\lim_{x\to\alpha-} g(x)=\lim_{x\to\alpha-}(-f'(x))=-f'(\alpha)$

$\lim_{x\to\alpha+} g(x)=\lim_{x\to\alpha+} f'(x)=f'(\alpha)$

이때 $f'(\alpha)\neq 0$이므로 $\lim_{x\to\alpha-} g(x)\neq\lim_{x\to\alpha+} g(x)$, 즉 함수 $g(x)$는 $x=\alpha$에서 불연속이다.

또한 함수 $f(x)$가

'$x\to\alpha-$일 때 $f(x)\to 0+$이고 $x\to\alpha+$일 때 $f(x)\to 0-$'

이라 하면

$\lim_{x\to\alpha-} g(x)=\lim_{x\to\alpha-} f'(x)=f'(\alpha)$

$\lim_{x\to\alpha+} g(x)=\lim_{x\to\alpha+}(-f'(x))=-f'(\alpha)$

이때 $f'(\alpha)\neq 0$이므로 $\lim_{x\to\alpha-} g(x)\neq\lim_{x\to\alpha+} g(x)$, 즉 함수 $g(x)$는 $x=\alpha$에서 불연속이다.

따라서 $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)\neq 0$일 때 함수 $g(x)$는 $x=\alpha$에서 불연속이다.

(ii) $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$일 때

함수 $f(x)$가

'$x\to\alpha-$일 때 $f(x)\to 0+$'이거나 '$x\to\alpha-$일 때 $f(x)\to 0-$'

인 경우 모두

$\lim_{x\to\alpha-} g(x)$의 값은 $f'(\alpha)=0$이므로

$\lim_{x\to\alpha-} g(x)=0$

마찬가지로 함수 $f(x)$가

'$x\to\alpha+$일 때 $f(x)\to 0+$'이거나 '$x\to\alpha+$일 때 $f(x)\to 0-$'

인 경우 모두

$\lim_{x\to\alpha-} g(x)$의 값은 $f'(\alpha)=0$이므로

$\lim_{x\to\alpha-} g(x)=0$

$f(\alpha)=0$이므로 $g(\alpha)=0$

즉, $\lim_{x\to\alpha-} g(x)=\lim_{x\to\alpha+} g(x)=g(\alpha)=0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=\alpha$에서 연속이다.

따라서 $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$일 때 함수 $g(x)$는 $x=\alpha$에서 연속이다.

(i), (ii)에 의하여 삼차함수 $f(x)$는 $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)\neq 0$을 만족시키는 α가 오직 하나만 존재하여야 한다.

이때 $f(0)=f(2)=0$이고 최고차항의 계수가 1이므로 가능한 함수 $f(x)$는

$f(x)=x^2(x-2)$ 또는 $f(x)=x(x-2)^2$

따라서

$f(4)=4^2\times 2=32$

또는

$f(4)=4\times 2^2=16$

이므로 $f(4)$의 최댓값은 32이다.

18. 정답 27

㉠의 양변을 $(n+1)(n+2)$로 나누면

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)}=\frac{a_n}{n(n+1)}+\boxed{3}$$

$b_n=\dfrac{a_n}{n(n+1)}$이라 하면 $b_1=\dfrac{3}{2}$이고 모든 자연수 n에 대하여

$b_{n+1}=b_n+\boxed{3}$

이므로 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{3}{2}$, 공차가 3인 등차수열이다.

즉,

$$b_n=\frac{3}{2}+(n-1)\times 3=3n-\frac{3}{2}$$

이므로

$$\frac{a_n}{n(n+1)}=3n-\frac{3}{2}$$

따라서

$$a_n=3n\left(n-\frac{1}{2}\right)(n+1)=\boxed{3n^3+\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n}$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{5}a_k$$
$$=\sum_{k=1}^{5}\left(3k^3+\frac{3}{2}k^2-\frac{3}{2}k\right)$$
$$=3\sum_{k=1}^{5}k^3+\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{5}k^2-\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{5}k$$
$$=3\times\left(\frac{5\times 6}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\times\frac{5\times 6\times 11}{6}-\frac{3}{2}\times\frac{5\times 6}{2}=\boxed{735}$$

이상에서 $p=3$, $q=735$이고, $f(n)=3n^2+\dfrac{3}{2}n^2-\dfrac{3}{2}n$이므로

$$f(2)=3\times 2^3+\frac{3}{2}\times 2^2-\frac{3}{2}\times 2=27$$

따라서

$$\frac{q}{p}+f(2)=\frac{735}{3}+27=272$$

19. 정답 111

$a_1>0$이므로 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_7은 주어진 조건에 의하여 a_n은 3씩 감소하다가 음수가 되면 k $(k>3)$만큼 증가하여 양수가 된다. 또한 양수인 항부터 다시 3씩 감소하다가 음수가 되면 k $(k>3)$만큼 증가하여 양수가 되는 과정을 반복한다.

따라서 7개의 항 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_7 중 음수인 항의 개수에 따라 가능한 a_1의 값은 다음과 같다.

(i) 7개의 항 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_7 중 음수인 항의 개수가 0일 때

모든 항이 양수이므로 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_7은 공차가 -3인 등차수열이다.

이때 $a_7=2$이므로

$a_7=a_1+6\times(-3)$

$a_1=a_7+18$

$=2+18=20$

따라서 이 경우 가능한 a_1의 값은 20뿐이다.

(ii) 7개의 항 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_7 중 음수인 항의 개수가 1일 때

a_7은 a_1에 -3을 5번, k를 1번 더한 것이므로

$a_7=a_1+5\times(-3)+k$

$a_1=a_7+15-k$

$=2+15-k=17-k$

이때 $a_1>0$이므로

$17-k>0$

$k<17$

$k>3$이므로 $3<k<17$

k는 자연수이므로 k의 값에 따라 a_1의 값은 다음과 같다.

$k=4$일 때 $a_1=13$

$k=5$일 때 $a_1=12$

$k=6$일 때 $a_1=11$

$\vdots$

$k=16$일 때 $a_1=1$

따라서 이 경우 가능한 a_1의 값은 1, 2, 3, $\cdots$, 13이다.

(iii) 7개의 항 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_7 중 음수인 항의 개수가 2일 때

a_7은 a_1에 -3을 4번, k를 2번 더한 것이므로

$a_7=a_1+4\times(-3)+2k$

$a_1=a_7+12-2k$

$=2+12-2k=14-2k$

이때 $a_1>0$이므로

$14-2k>0$

$k<7$

$k>3$이므로 $3<k<7$

k는 자연수이므로 k의 값에 따라 a_1의 값은 다음과 같다.

$k=4$일 때 $a_1=6$

$k=5$일 때 $a_1=4$

$k=6$일 때 $a_1=2$

따라서 이 경우 가능한 a_1의 값은 2, 4, 6,이다.

(iv) 7개의 항 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_7 중 음수인 항의 개수가 3 이상일 때

3 이상 6 이하의 자연수 m에 대하여 a_7은 a_1에 -3을

$(6-m)$번, k를 m번 더한 것이므로

$a_7=a_1+(6-m)\times(-3)+mk$

$a_1=a_7+18-3m-mk$

$=2+18-3m-mk=20-m(k+3)$

이때 m, k는 $3\le m\le 6$, $k>3$인 자연수이므로

$a_1=20-m(k+3)<0$

이 되어 $a_1>0$을 만족시키지 않는다.

따라서 이 경우 가능한 a_1의 값은 존재하지 않는다.

(i)~(iv)에 의하여 가능한 a_1의 값은

1, 2, 3, $\cdots$, 13, 20

이므로 모든 a_1의 값의 합은

$$\sum_{k=1}^{13}k+20=\frac{13\times 14}{2}+20=111$$

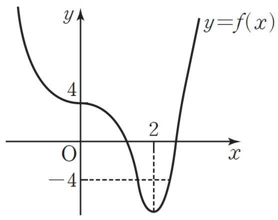
20. 정답 77

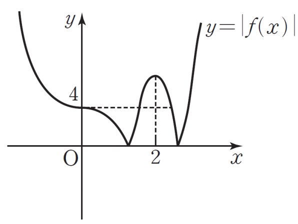
최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이다. 이때 $f'(0)=f'(2)=0$이므로

$f'(x)=4x(x-2)(x-\alpha)$ (α는 상수)라 하자.

$\alpha=0$이면 $f'(x)=4x^2(x-2)$

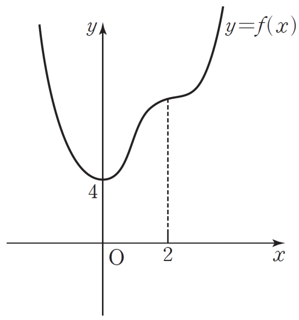
이때 조건 (나)에 의하여 곡선 $y=f(x)$가 두 직선 $y=4$, $y=-4$와 만나는 서로 다른 점의 개수가 4이어야 하므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=|f(x)|$의 개형은 그림과 같다.





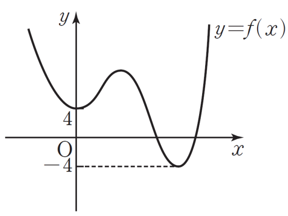
이때 곡선 $y=|f(x)|$와 직선 $y=k$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 5가 되도록 하는 양수 k가 존재하지 않으므로 $\alpha=0$이면 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

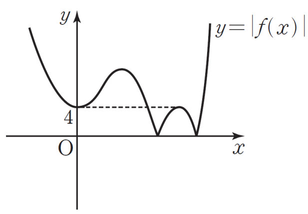
또한 $\alpha=2$이면 $f'(x)=4x(x-2)^2$이고 그림과 같이 함수 $f(x)$의 최솟값이 $f(0)=4$가 되어 방정식 $|f(x)|=4$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.



따라서 $\alpha=2$이면 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

한편, $0<\alpha<2$ 또는 $\alpha>2$이면 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다. 이때 곡선 $y=f(x)$가 두 직선 $y=4$, $y=-4$와 만나는 서로 다른 점의 개수가 4이어야 하므로 그림과 같이 함수 $f(x)$의 최솟값이 -4이어야 한다.





이때 곡선 $y=|f(x)|$와 직선 $y=k$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 5가 되도록 하는 양수 k가 존재하지 않으므로 $0<\alpha<2$ 또는 $\alpha>2$이면 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

따라서 $\alpha<0$이고 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖고, $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

$$f'(x)=4x(x-\alpha)(x-2)$$
$$=4x^3-4(\alpha+2)x^2+8\alpha x$$

이때 $f(0)=4$이므로

$$f(x)=x^4-\frac{4(\alpha+2)}{3}x^3+4\alpha x^2+4$$

조건 (나)에 의하여 곡선 $y=f(x)$가 두 직선 $y=4$, $y=-4$와 만나는 서로 다른 점의 개수가 4이어야 하므로

$f(\alpha)=-4$, $f(2)>-4$ 또는 $f(\alpha)>-4$, $f(2)=-4$이어야 한다.

(i) $f(\alpha)=-4$, $f(2)>-4$일 때

$$f(2)=16-\frac{32}{3}(\alpha+2)+16\alpha+4=\frac{16\alpha-4}{3}$$

$f(2)>-4$에서 $\dfrac{16\alpha-4}{3}>-4$, $\alpha>-\dfrac{1}{2}$

$\alpha<0$이므로 $-\dfrac{1}{2}<\alpha<0$

또한

$$f(\alpha)\alpha^4-\frac{4(\alpha+2)}{3}\alpha^3+4\alpha\times\alpha^2+4=-\frac{1}{3}\alpha^4+\frac{4}{3}\alpha^3+4$$

이때 $g(\alpha)=-\dfrac{4}{3}\alpha^3+4\alpha^2=-\dfrac{4}{3}\alpha^2(\alpha-3)$

$g'(\alpha)=0$에서 $\alpha=0$ 또는 $\alpha=3$

함수 $g(\alpha)$는 $-\dfrac{1}{2}<\alpha<0$에서 $g'(\alpha)>0$이므로 이 구간에서 증가한다.

이때

$$g\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^4+\frac{4}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3+4=4-\frac{3}{16}>3$$

이므로 $-\dfrac{1}{2}<\alpha<0$이면 $g(\alpha)>3$이다.

즉, $f(\alpha)>3$이므로 $f(\alpha)=-4$, $f(2)>-4$를 만족시키는 α는 존재하지 않는다.

(ii) $f(\alpha)>-4$, $f(2)=-4$일 때

$f(2)=\dfrac{16\alpha-4}{3}$이므로 $f(2)=-4$에서

$\dfrac{16\alpha-4}{3}=-4$, $\alpha=-\dfrac{1}{2}$

$\alpha=-\dfrac{1}{2}$이면

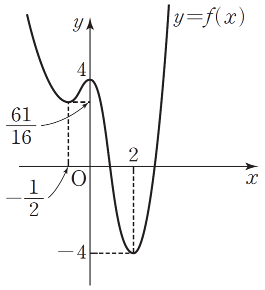
$$f(x)=x^4-\frac{4\left(-\frac{1}{2}+2\right)}{3}x^3+4\times\left(-\frac{1}{2}\right)x^2+4$$
$$=x^4-2x^3-2x^2+4$$

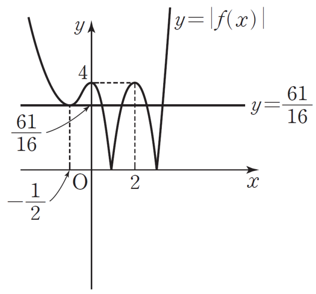
이고

$$f(\alpha)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^4-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+4=\frac{61}{16}$$

이므로 $f(\alpha)>-4$도 성립한다.

이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=|f(x)|$는 그림과 같고, 곡선 $y=|f(x)|$가 직선 $y=\dfrac{61}{16}$과 만나는 서로 다른 점의 개수가 5이다.





(i), (ii)에 의하여 $k=\dfrac{61}{16}$

따라서 $p=16$, $q=61$이므로

$p+q=16+61=77$

21. 정답 ①

$|a|=t$로 치환하면

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & (x\le t)\\(t^2-4t+8)x-4 & (x>t)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

함수 $f(x)$가 $x=t$에서 연속이고 미분가능하다.

함수 $f(x)$가 $x=t$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to t-}f(x)=\lim_{x\to t+}f(x)=f(t)$$

$t^2=(t^2-4t+8)t-4$에서 $t^3-5t^2+8t-4=0$

$(t-1)(t-2)^2=0$

$t=1$ 또는 $t=2$에서

$|a|=1$ 또는 $|a|=2$ …… ㉠

함수 $f(x)$가 $x=t$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to t-}\frac{f(x)-f(t)}{x-t}=\lim_{x\to t+}\frac{f(x)-f(t)}{x-t}$$

$$\lim_{x\to t-}\frac{f(x)-f(t)}{x-t}=\lim_{x\to t-}\frac{x^2-t^2}{x-t}$$
$$=\lim_{x\to t-}(x+t)$$
$$=2t$$

$$\lim_{x\to t+}\frac{f(x)-f(t)}{x-t}=\lim_{x\to t+}\frac{(t^2-4t+8)x-4-\{(t^2-4t+8)t-4\}}{x-t}$$
$$=\lim_{x\to t+}\frac{(t^2-4t+8)(x-t)}{x-t}$$
$$=\lim_{x\to t+}(t^2-4t+8)$$
$$=t^2-4t+8$$

$2t=t^2-4t+8$에서

$t^2-6t+8=0$

$(t-2)(t-4)=0$

$t=2$ 또는 $t=4$에서

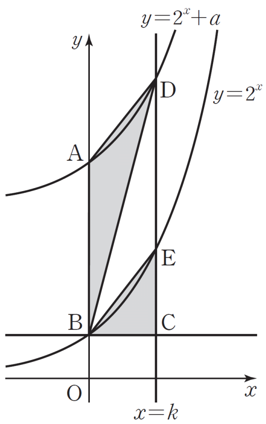
$|a|=2$ 또는 $|a|=4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $|a|=2$이므로 $a=-2$ 또는 $a=2$

따라서 구하는 모든 a의 값의 곱은

$-2\times2=-4$

22. 정답 ②



$a>0$이므로 두 함수 $y=2^x+a$, $y=2^x$의 그래프는 위의 그림과 같다.

점 A는 곡선 $y=2^x+a$와 y축이 만나는 점이므로 점 A의 좌표는 $(0,\ a+1)$이다.

점 B는 곡선 $y=2^x$과 y축이 만나는 점이므로 점 B의 좌표는 $(0,\ 1)$이다.

점 C는 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선과 직선 $x=k$가 만나는 점이므로 점 C의 좌표는 $(k,\ 1)$이다.

점 D는 곡선 $y=2^x+a$와 직선 $x=k$가 만나는 점이므로 점 D의 좌표는 $(k,\ 2^k+a)$이다.

점 E는 곡선 $y=2^x$과 직선 $x=k$가 만나는 점이므로 점 E의 좌표는 $(k,\ 2^k)$이다.

$\overline{AB}\times\overline{EC}=8$이므로

$a\times(2^k-1)=8$ …… ㉠

삼각형 ABD의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}ak$

삼각형 BCE의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{EC}=\frac{1}{2}k(2^k-1)$이고

삼각형 ABD의 넓이는 삼각형 BCE의 넓이의 2배이므로

$\frac{1}{2}ak=2\times\frac{1}{2}k(2^k-1)$

$a=2(2^k-1)$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $2(2^k-1)^2=8$, $(2^k-1)^2=4$

$2^k=3$이므로 $k=\log_2 3$이고 $a=4$

따라서

$a^k=4^{\log_2 3}=3^{\log_2 4}=3^2=9$

23. 정답 ⑤

ㄱ. $k=0$이면,

$x_1=t^3-6t^2+9t$, $x_2=t^2$이므로

$t=2$일 때

점 P의 위치는 $x_1=8-24+18=2$

점 Q의 위치는 $x_2=4$

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는 2이다. (참)

ㄴ. $k=4$이면,

$x_1=t^3-6t^2+9t$, $x_2=t^2-4t$

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_1, v_2라 하면

$v_1=\frac{dx_1}{dt}=3t^2-12t+9$, $v_2=\frac{dx_2}{dt}=2t-4$

점 Q가 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t_2=2t-4=0$에서 $t=2$이다.

점 P의 시각 t에서의 가속도를 a_1이라 하면

$a_1=\frac{dv_1}{dt}=6t-12$이므로

점 Q가 운동 방향을 바꾸는 시각 $t=2$에서

점 P의 가속도는

$a_1=12-12=0$ (참)

ㄷ. $k=2$이면,

$x_1=t^3-6t^2+9t$, $x_2=t^2-2t$

$f(t)=x_1-x_2$라 하면

$f(t)=t^3-7t^2+11t=t(t^2-7t+11)$이므로

$f(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=\frac{7\pm\sqrt{5}}{2}$

즉, 출발 후 두 점 P, Q가 처음으로 다시 만나는 순간은

$t=\frac{7-\sqrt{5}}{2}$

$f'(t)=3t^2-14t+11=(t-1)(3t-11)$이므로

$f'(t)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=\frac{11}{3}$

$0<t<\frac{7-\sqrt{5}}{2}$에서 $\frac{7-\sqrt{5}}{2}>1$이고, $t=1$의 좌우에서

$f'(t)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(t)$는 $t=1$에서

극대이면서 최대이다.

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리가 최대가 되는 시각은 $t=1$이다. (참)

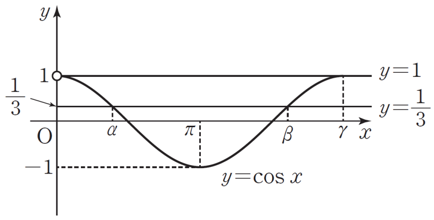
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

24. 정답 ①

$3\cos^2 x-4\cos x+1=0$에서

$(3\cos x-1)(\cos x-1)=0$이므로

$\cos x=\frac{1}{3}$ 또는 $\cos x=1$



$0<x\le 2\pi$에서
방정식 $\cos x=1$의 해는 $x=2\pi$ 또는 $r=2\pi$이고,
방정식 $\cos x=\frac{1}{3}$은
$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 한 개의 실근 α, $\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$에서 한 개의 실근 β를 갖는다.
이때, 함수 $y=\cos x$의 그래프는 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로
$\alpha+\beta=2\pi$
그러므로
$$\begin{aligned}\alpha+2\beta+3\gamma&=\alpha+\beta+\beta+3\gamma\\&=2\pi+\beta+3\times 2\pi\\&=8\pi+\beta\end{aligned}$$
한편, $\cos\beta=\frac{1}{3}$이므로
$\sin^2\beta=1-\cos^2\beta=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$
$\frac{3}{2}\pi<\beta<2\pi$에서 $\sin\beta<0$이므로
$\sin\beta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$
따라서
$\sin(\alpha+2\beta+3\gamma)=\sin(8\pi+\beta)=\sin\beta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

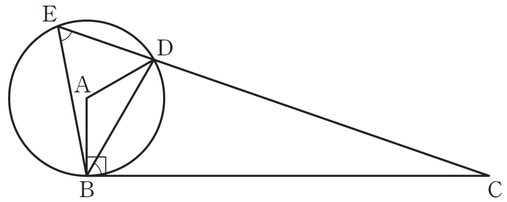
25. 정답 ③
$f(x)=ax^4+2x^3-ax^2-x$에서
$f'(x)=4ax^3+6x^2-2ax-1$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $O(0,\ 0)$에서의 접선의 기울기는
$f'(0)=-1$이므로
이 접선에 수직이며 점 $O(0,\ 0)$을 지나는 직선 l의 방정식은
$y=x$
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구하면
$ax^4+2x^3-ax^2-x=x$에서
$ax^4+2x^3-ax^2-2x=0$
$x(x-1)(x+1)(ax+2)=0$
이므로 $0,\ 1,\ -1,\ -\frac{2}{a}$이다.

이때 $0<a<2$이므로 $-\frac{2}{a}<-1$
즉, $P\left(-\frac{2}{a},\ -\frac{2}{a}\right)$, $Q(-1,\ -1)$, $O(0,\ 0)$, $R(1,\ 1)$이므로
$B-A$
$$=\int_0^1\{x-(ax^4+2x^3-ax^2-x)\}dx-\int_{-1}^0\{(ax^4+2x^3-ax^2-x)-x\}dx$$
$$=\int_0^1\{-(ax^4+2x^3-ax^2-2x)\}dx+\int_{-1}^0\{-(ax^4+2x^3-ax^2-2x)\}dx$$
$$=\int_{-1}^1\{-(ax^4+2x^3-ax^2-2x)\}dx$$
$$=\int_{-1}^1(-ax^4+ax^2)dx+\int_{-1}^1(-2x^3+2x)dx$$
$$=2\int_0^1(-ax^4+ax^2)dx+0$$
$$=2\left[-\frac{a}{5}x^5+\frac{a}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=2\times\left(-\frac{a}{5}+\frac{a}{3}\right)$$
$$=\frac{4a}{15}=\frac{1}{3}$$
따라서 $a=\frac{5}{4}$

26. 정답 ③
삼각형 EBD에서 코사인법칙에 의하여
$$\begin{aligned}\overline{BD}^2&=\overline{EB}^2+\overline{ED}^2-2\times\overline{EB}\times\overline{ED}\times\cos\frac{\pi}{3}\\&=3^2+2^2-2\times3\times2\times\frac{1}{2}\\&=7\end{aligned}$$
이므로
$\overline{BD}=\sqrt{7}$
점 A를 중심으로 하고 선분 AB를 반지름으로 하는 원을 그리면 이 원에서 호 BD에 대한 중심각의 크기는 $\angle BAD=\frac{2}{3}\pi$이므로
호 BD에 대한 원주각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$이다.
이때 $\angle BED=\frac{\pi}{3}$이므로 점 E는 이 원 위의 점이고, 점 A는 삼각형 EBD의 외접원의 중심이다.
한편, $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$이므로
직선 BC는 삼각형 EBD의 외접원의 접선이다.
이때 $\angle CBD=\angle CEB$이므로

삼각형 CBD와 삼각형 CEB는 서로 닮음이고 닮음비는

$\overline{BD} : \overline{EB} = \sqrt{7} : 3$이다.



$\dfrac{\overline{CD}}{\overline{CB}} = \dfrac{\overline{CB}}{\overline{CE}} = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$에서

$\overline{CD} = \dfrac{\sqrt{7}}{3}\overline{CB}$, $\overline{CE} = \dfrac{3}{\sqrt{7}}\overline{CB} = \dfrac{3\sqrt{7}}{7}\overline{CB}$ …… ㉠

또, $\overline{CE} - \overline{CD} = 2$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\dfrac{3\sqrt{7}}{7}\overline{CB} - \dfrac{\sqrt{7}}{3}\overline{CB} = \dfrac{2\sqrt{7}}{21}\overline{CB} = 2$이므로

$\overline{CB} = 3\sqrt{7}$

삼각형 EBC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면

사인법칙에 의하여

$2R = \dfrac{\overline{BC}}{\sin(\angle BEC)} = \dfrac{3\sqrt{7}}{\sin\dfrac{\pi}{3}} = 2\sqrt{21}$

따라서 $R = \sqrt{21}$이므로

삼각형 EBC의 외접원의 넓이는 21π이다.

27. 정답 ③

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 0-}(-4x^2-6x) = \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 0$이어야 한다.

$f(x)$는 삼차함수이므로 $f(0)=0$ …… ㉠

$h(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)dt$라 하면

$h'(x) = g(x)$이고 조건 (가)에 의하여 함수 $h(x)$가 $x=1$에서 극값을 가지므로

$h'(1) = g(1) = f(1) = 0$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$f(x) = x(x-1)(x-k)$ (단, k는 상수) …… ㉢

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에 의하여 모든 실수 x에 대하여

$\displaystyle\int_a^x g(t)dt \ge 0$, $\displaystyle\int_b^x g(t)dt \ge 0$이고

$\displaystyle\int_a^x g(t)dt = h(x) - h(a)$, $\displaystyle\int_b^x g(t)dt = h(x) - h(b)$

이므로

$h(x) \ge h(a)$, $h(x) \ge h(b)$

즉, 서로 다른 두 실수 a, b에 대하여 함수 $h(x)$는 $x=a$, $x=b$에서

최솟값을 갖고

$h(a) = h(b)$ …… ㉣

함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 최솟값을 가지려면 극솟값을 가져야 하므로 $x=a$, $x=b$의 좌우에서 $h'(x) = g(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀐다.

한편, $x \le 0$일 때, $g(x) = -4x^2 - 6x = -2x(2x+3) = 0$에서

$x = -\dfrac{3}{2}$ 또는 $x = 0$

$x < -\dfrac{3}{2}$에서 $g(x) < 0$, $-\dfrac{3}{2} < x < 0$에서 $g(x) > 0$이고

$b > 1$이므로 $a = -\dfrac{3}{2}$

㉢에서

$f(b) = b(b-1)(b-k) = g(b) = h'(b) = 0$

$b > 1$이므로 $k = b$이고

$f(x) = x(x-1)(x-b)$

㉣에서 $h(a) = h(b)$이므로

$h(b) - h(a) = 0$

$\displaystyle\int_0^b g(t)dt - \int_0^a g(t)dt = 0$

$\displaystyle\int_0^b g(t)dt + \int_a^0 g(t)dt = 0$

$\displaystyle\int_0^b x(x-1)(x-b)dx + \int_{-\frac{3}{2}}^0 (-4x^2-6x)dx$

$= \left[\dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{b+1}{3}x^3 + \dfrac{b}{2}x^2\right]_0^b + \left[-\dfrac{4}{3}x^3 - 3x^2\right]_{-\frac{3}{2}}^0$

$= \dfrac{-b^4 + 2b^3}{12} + \dfrac{9}{4} = 0$

$b^4 - 2b^3 - 27 = 0$에서

$(b-3)(b^3+b^2+3b+9) = 0$ …… ㉤

$i(b) = b^3 + b^2 + 3b + 9$라 하면

$i'(b) = 3b^2 + 2b + 3 = 3\left(b + \dfrac{1}{3}\right)^2 + \dfrac{8}{3} > 0$이고

$i(-2) = -1 < 0$, $i(-1) = 6 > 0$이므로

방정식 $i(b) = 0$, 즉 $b^3 + b^2 + 3b + 9 = 0$의 실근은 -2와 -1 사이에 존재한다.

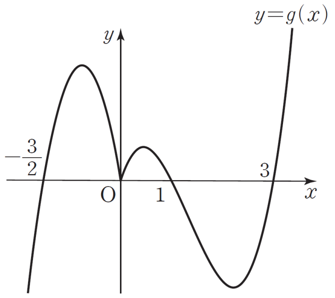
$b > 1$이므로 ㉤에서 $b = 3$

따라서 $f(x) = x(x-1)(x-3)$이므로

$f(4) = 4 \times 3 \times 1 = 12$

[참고]

함수 $y = g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



28. 정답 126

2 이상의 자연수 n에 대하여 $a_n=S_n-S_{n-1}$이므로

$a_n=\frac{n(2n+1)}{3}a_n-\frac{(n-1)(2n-1)}{3}a_{n-1}$에서

$$a_n\left(1-\frac{2n^2+n}{3}\right)=-\frac{(n-1)(2n-1)}{3}a_{n-1}$$

$$\frac{(2n+3)(n-1)}{3}a_n=\frac{(n-1)(2n-1)}{3}a_{n-1}$$

$$(2n+3)a_n=(2n-1)a_{n-1}$$

$$a_n=\boxed{\frac{2n-1}{2n+3}}\times a_{n-1}\ (n\ge 2)$$

이때

$$a_n=a_1\times\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\frac{a_4}{a_3}\times\cdots\times\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$=\frac{2}{5}\times\left(\frac{3}{7}\times\frac{5}{9}\times\frac{7}{11}\times\cdots\times\frac{2n-3}{2n+1}\times\frac{2n-1}{2n+3}\right)$$

$$=\boxed{\frac{6}{(2n+1)(2n+3)}}$$

$$=\frac{6}{(2n+3)-(2n+1)}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$$

$$=3\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\quad\cdots\cdots ㉠$$

한편,

$$S_n=\frac{n(2n+1)}{3}\times\boxed{\frac{6}{(2n+1)(2n+3)}}$$

$$=\frac{2n}{2n+3}\quad\cdots\cdots ㉡$$

㉠에 의하여

$a_k+a_{k+1}+a_{k+2}$

$$=3\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}+\frac{1}{2k+3}-\frac{1}{2k+5}+\frac{1}{2k+5}-\frac{1}{2k+7}\right)$$

$$=3\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+7}\right)$$

㉡에 의하여

$$S_6=\frac{2\times 6}{2\times 6+3}=\frac{4}{5}$$

따라서 $6(a_k+a_{k+1}+a_{k+2})=S_6$에서

$$18\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+7}\right)=\frac{4}{5}$$

$$\frac{6}{(2k+1)(2k+7)}=\frac{4}{5}\times\frac{1}{18}$$

$(2k+1)(2k+7)=135$

$4k^2+16k-128=0$

$k^2+4k-32=0$

$(k+8)(k-4)=0$

k는 자연수이므로 $k=\boxed{4}$

이상에서

$$f(n)=\frac{2n-1}{2n+3},\ g(n)=\frac{6}{(2n+1)(2n+3)},\ m=4$$

이때 $\frac{f(n)}{g(n)}=\frac{(2n-1)(2n+1)}{6}$이므로

$$12\times\frac{f(m)}{g(m)}=12\times\frac{f(4)}{g(4)}=12\times\frac{63}{6}=126$$

29. 정답 441

다항함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이지만

$\lim_{x\to a-}g(x)=f(a),\ \lim_{x\to a+}g(x)=f(a)+4$이므로

함수 $g(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.

그러므로 $\lim_{x\to a}\frac{h(x)}{g(x)}$의 값이 존재하려면

$\lim_{x\to a-}\frac{h(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{h(x)}{g(x)}$, 즉 $\frac{h(a)}{f(a)}=\frac{h(a)}{f(a)+4}$이어야 한다.

이때, $f(a)\ne f(a)+4$이므로 $h(a)=0$ $\quad\cdots\cdots ㉠$

한편, $a>0$이므로 $x\to 0$일 때는 $x<a$가 되어

$g(x)=f(x)=x^2(x-3)$이다.

이때 $\lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{x^2(x-3)}$이므로

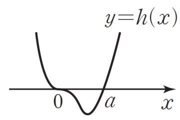
$\lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{g(x)}$의 값이 존재하려면 $h(0)=0,\ h'(0)=0$ $\quad\cdots\cdots ㉡$

㉠과 ㉡에 의하여 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $h(x)$는

$h(x)=x^2(x-a)(x-b)$ (b는 상수)로 놓을 수 있다.

(i) $b=0$일 때

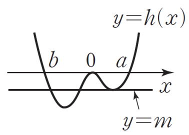
$h(x)=x^3(x-a)$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.



(ii) $b<0,\ a+b\ne 0$일 때

함수 $h(x)$는 두 구간 $(b,\ 0)$, $(0,\ a)$에서 각각 극솟값 $m_1,\ m_2$ $(m_1<0,\ m_2<0)$를 갖는다.

이때 m_1과 m_2중 큰 값을 m이라 하면 방정식 $h(x)=m$은 서로 다른 세 실근을 갖게 된다. 즉, 방정식 $h(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k는 0, m이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.



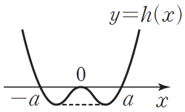
(iii) $b<0,\ a+b=0$일 때

$b=-a$이므로

$h(x)=x^2(x-a)(x+a)=x^2(x^2-a^2)$

이때 방정식 $h(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수

k는 0뿐이므로 조건 (나)를 만족시킨다.



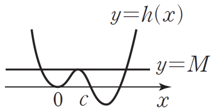
한편, $h(4)=16(16-a^2)=36$에서

$a^2=\dfrac{55}{4}$이므로 $a=\dfrac{\sqrt{55}}{2}>3$

이때 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{h(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2\left(x^2-\frac{55}{4}\right)}{x^2(x-3)}$이므로 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{h(x)}{g(x)}$의 값이 존재하지 않는다.

(iv) $b>0$, $b\neq a$일 때

a와 b 중 작은 값을 c라 하면 함수 $h(x)$는 구간 $(0,\ c)$에서 극댓값 $M\ (M>0)$을 갖는다.

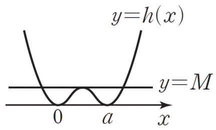


이때 방정식 $h(x)=M$은 서로 다른 세 실근을 갖게 된다.

즉, 방정식 $h(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k는 0, M이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(v) $b=a$일 때

$h(x)=x^2(x-a)^2$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(0,\ a)$에서 극댓값 $M\ (M>0)$을 갖는다.



이때 방정식 $h(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k는 M뿐이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

한편, $h(4)=16(4-a)^2=36$에서

$(4-a)^2=\dfrac{9}{4}$이므로

$4-a=\dfrac{3}{2}$ 또는 $4-a=-\dfrac{3}{2}$

$a=\dfrac{5}{2}$ 또는 $a=\dfrac{11}{2}$

$a=\dfrac{11}{2}$일 때,

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{h(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2\left(x-\frac{11}{2}\right)^2}{x^2(x-3)}$의 값이 존재하지 않으므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

$a=\dfrac{5}{2}$일 때,

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{h(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2}{x^2(x-3)+4}=\dfrac{9}{16}$이므로 조건 (가)를 만족시킨다.

따라서 $h(x)=x^2\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2$이므로

$h(6)=36\times\dfrac{49}{4}=441$

30. 정답 24

두 점 A, B가 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점이므로

$\mathrm{A}(a,\ \log_2 a)$, $\mathrm{B}(b,\ \log_2 b)$ $(0<a<b)$로 놓을 수 있다.

조건 (가)에서 직선 AB의 기울기는 $\dfrac{1}{3}$이므로

$\dfrac{\log_2 b-\log_2 a}{b-a}=\dfrac{1}{3}$

$\log_2 b-\log_2 a=\dfrac{b-a}{3}$

$\log_2\dfrac{b}{a}=\dfrac{b-a}{3}$ …… ㉠

점 C는 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이므로 점 C의 좌표는 $(\log_2 a,\ a)$이고

점 D는 점 B를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이므로 점 D의 좌표는 $(\log_2 b,\ b)$이다.

이때 선분 CD의 중점 M의 좌표는

$\left(\dfrac{\log_2 a+\log_2 b}{2},\ \dfrac{a+b}{2}\right)$, 즉 $\left(\log_2\sqrt{ab},\ \dfrac{a+b}{2}\right)$이다.

점 M을 지나고 y축에 평행한 직선의 방정식은 $x=\log_2\sqrt{ab}$

점 P는 직선 $x=\log_2\sqrt{ab}$와 곡선 $y=2^x$이 만나는 점이므로

점 P의 좌표는 $(\log_2\sqrt{ab},\ \sqrt{ab})$이고,

점 H는 직선 $x=\log_2\sqrt{ab}$와 x축이 만나는 점이므로

점 H의 좌표는 $(\log_2\sqrt{ab},\ 0)$이다.

조건 (나)에서 점 P는 선분 MH를 $1:4$로 내분하므로

$\overline{\mathrm{MH}}=\dfrac{5}{4}\times\overline{\mathrm{PH}}$

즉, $\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{5}{4}\sqrt{ab}$이므로

$\dfrac{a+b}{\sqrt{ab}}=\dfrac{5}{2}$

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\dfrac{5}{2}$ …… ㉡

㉡에서 $t=\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$라 하면

$t+\dfrac{1}{t}=\dfrac{5}{2}$

$2t^2-5t+2=0$

$(2t-1)(t-2)=0$

$0<a<b$에서 $t>1$이므로 $t=2$

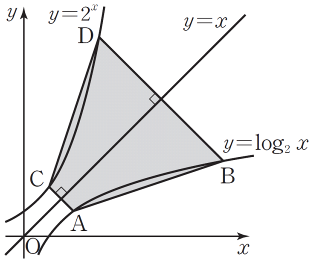
즉, $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=2$이므로 $b=4a$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$\log_2\dfrac{4a}{a}=\dfrac{4a-a}{3}$이므로 $a=2$

㉢에서 $b=4\times2=8$

그러므로 $\mathrm{A}(2,\ 1)$, $\mathrm{B}(8,\ 3)$, $\mathrm{C}(1,\ 2)$, $\mathrm{D}(3,\ 8)$이다.



두 직선 AC, BD는 각각 직선 $y=x$와 서로 수직이므로 두 직선 AC, BD는 서로 평행하다.
평행한 두 직선 AC와 BD 사이의 거리는
직선 AC 위의 한 점 A$(2,\ 1)$과 직선 BD, 즉 직선 $x+y-11=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|2+1-11|}{\sqrt{1^2+1^2}}=4\sqrt{2}$$

또한,

$$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(2-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{2}$$

$$\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{(8-3)^2+(3-8)^2}=5\sqrt{2}$$

따라서 사각형 ABDC의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BD}})\times4\sqrt{2}$$

$$=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2}+5\sqrt{2})\times4\sqrt{2}$$

$$=24$$

31. 정답 ①

$f(x)=x^4+4px^3+2qx^2$에서

$$f'(x)=4x^3+12px^2+4qx$$

$$=4x(x^2+3px+q)$$

이때 함수 $f(x)$는 $x=-2$와 $x=2$에서 극값을 가지므로
$f'(-2)=f'(2)=0$
즉, $x^2+3px+q=(x+2)(x-2)$에서
$x^2+3px+q=x^2-4$
따라서 $p=0,\ q=-4$이므로 $p+q=-4$
즉, $f'(x)=4x(x+2)(x-2)$이고 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-2$와 $x=2$에서 극소이고 극솟값이
$f(-2)=16-32=-16,\ f(2)=16-32=-16$
이고 $x=0$에서 극대이고 극댓값이
$f(0)=0$
함수 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $y=f(2)$에 대하여 대칭이동한 그래프는 함수 $y=f(x)+16$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 -16만큼 평행이동한 것이므로

$$g(x)=(-f(x)-16)-16$$

$$=-f(x)-32$$

$$=-(x^4-8x^2)-32$$

$$=-x^4+8x^2-32$$

따라서

$$g(p+q)=g(-4)=-256+128-32=-160$$

32. 정답 ②

$a_1=S_1=\dfrac{1}{3}$이고 $a_{n+1}=k(1-S_n)$ $\cdots\cdots$ ㉠

이므로
㉠에 $n=1$을 대입하면

$$a_2=k(1-S_1)=k\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}k$$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$$r=\frac{a_2}{a_1}=\frac{\frac{2}{3}k}{\frac{1}{3}}=2k$$

㉠에 $n=2$를 대입하면

$$a_3=k(1-S_2)$$

$$=k(1-a_1-a_2)$$

$$=k\left(1-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}k\right)$$

$$=k\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}k\right)$$

$$=\frac{2}{3}k(1-k)$$

따라서 $r=\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{\frac{2}{3}k(1-k)}{\frac{2}{3}k}=1-k$이므로

$$2k=1-k$$

$$k=\frac{1}{3}$$

즉, $r=2k=\dfrac{2}{3}$이므로

$$a_1+a_3+a_5=\frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^6\right\}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{64}{729}\right)}{1-\frac{4}{9}}$$

$$=\frac{3-\frac{64}{243}}{5}=\frac{665}{1215}=\frac{133}{243}$$

33. 정답 ②

곡선 $y=\log_a(x-1)$의 점근선의 방정식은

$x=1$

따라서 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(t,\ \log_a(t-1))(t>2)$라 하면

$\mathrm{Q}(1,\ \log_a(t-1)),\ \mathrm{R}(0,\ \log_a(t-1))$

그런데 $\overline{\mathrm{PQ}}=3\overline{\mathrm{QR}}$이므로

$t-1=3\times1,\ t=4$

또한 점 S의 좌표는 $\mathrm{S}(2,\ 0)$이고 삼각형 PRS의 넓이가 4이므로

$\frac{1}{2}\times4\times\log_a 3=2\log_a 3=4$

$\log_a 3=2,\ a^2=3$

따라서 $a=\sqrt{3}$

34. 정답 ③

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 $v_1(t),\ v_2(t)$, 위치를 각각 $x_1(t),\ x_2(t)$라 하자.

ㄱ. $v_1(t)=\int(2t-2)dt=t^2-2t+C_1$($C_1$은 적분상수)

$v_2(t)=\int 2dt=2t+C_2$(C_2는 적분상수)

그런데 두 점 P, Q는 $t=0$일 때의 속도가 모두 0이므로

$C_1=C_2=0$

따라서 $v_1(t)=t^2-2t,\ v_2(t)=2t$이므로

$t^2-2t=2t,\ t(t-4)=0$

따라서 $t=0$또는 $t=4$이므로 출발한 후 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 시각은 $t=4$이다. (참)

ㄴ. $x_1(3)=0+\int_0^3(t^2-2t)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_0^3$

$=9-9$

$=0$ (참)

ㄷ. $0<t\le5$일 때 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$라 하면

$f(t)=|x_1(t)-x_2(t)|$

$=\left|\int_0^t(s^2-2s)ds-\int_0^t 2sds\right|$

$=\left|\left[\frac{1}{3}s^3-s^2\right]_0^t-[s^2]_0^t\right|$

$=\left|\frac{1}{3}t^3-2t^2\right|$

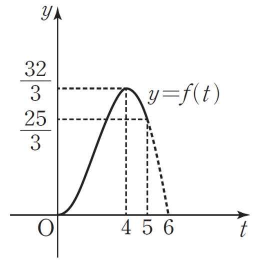
이때 $g(t)=\frac{1}{3}t^3-2t^2$이라 하면

$g'(t)=t^2-4t=t(t-4)$

이므로 $t=4$일 때 $g(t)$는 극소이고 극솟값은

$g(4)=\frac{64}{3}-32=-\frac{32}{3}$

또한 $g(5)=\frac{125}{3}-50=-\frac{25}{3}$이므로 함수 $f(t)=\left|\frac{1}{3}t^3-2t^2\right|$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $0<t\le5$일 때, 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값은 $t=4$일 때 $\frac{32}{3}$이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

35. 정답 ④

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)g(x)}{(f(x))^n}=\lim_{x\to0+}\frac{x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x^{2+1}}}\right)}{x^n}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{x\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^n}$$

$$=\lim_{x\to0+}\left\{\frac{1}{x^{n-1}}\times\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\times\frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{\sqrt{x^2+1}+1}\right\}$$

$$=\lim_{x\to0+}\left(\frac{1}{x^{n-1}}\times\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\times\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to0+}\left(\frac{1}{x^{x-3}}\times\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\times\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right)$$

이때 $\lim_{x\to0+}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\times\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right)=\frac{1}{2}$이므로 극한값이 존재하기 위해서는

$n-3\le0$

즉, $n\le3$이므로 $n=0,\ 1,\ 2,\ 3$

따라서 $k_1=4$

또한 0이 아닌 극한값을 가질 때는 $n=3$이므로 $k_2=3$

$k_1\times k_2=12$

36. 정답 ⑤

$h(x)=\int_0^x(f(t)-g(t))dt$에서

$h'(x)=f(x)-g(x)$

이므로 함수 $h(x)$가 극값을 갖지 않기 위해서는 모든 실수 x에 대하여

$h'(x)\ge0$또는 $h'(x)\le0$

이어야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여

$f(x)\ge g(x)$또는 $f(x)\le g(x)$

이어야 한다.

그런데 $f(0)=2$이고 $b>0$이므로 $g(0)=1$

따라서 $h'(0)=f(0)-g(0)=1>0$이므로 모든 실수 x에 대하여

$f(x) \geq g(x)$

이어야 한다.

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x \to -b-} g(x) = \lim_{x \to -b+} g(x) = g(-b)$$

$$\lim_{x \to b-} g(x) = \lim_{x \to b+} g(x) = g(b)$$

따라서

$-2b^2+7b+a-6=1,\ -2b^2+7b+a=7$ …… ㉠

$ab-1=1,\ ab=2$ …… ㉡

가 성립해야 하므로 ㉡에서 $a=\dfrac{2}{b}$를 ㉠에 대입하면

$$-2b^2+7b+\frac{2}{b}=7,\ 2b^3-7b^2+7b-2=0$$

$$(b-1)(b-2)(2b-1)=0$$

따라서 ㉡에서 $b=\dfrac{1}{2}$일 때 $a=4$, $b=1$일 때 $a=2$, $b=2$일 때 $a=1$이다.

그런데 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq g(x)$이어야 하므로

$a=1,\ b=2$

이다.

따라서 $g(x)=\begin{cases} -2x^2-7x-5 & (x<-2) \\ 1 & (-2 \leq x < 2) \\ x-1 & (x \geq 2) \end{cases}$이므로

$$\begin{aligned} \int_0^3 |f(t)-g(t)|dt &= \int_0^3 (f(t)-g(t))dt \\ &= \int_0^2 \{(t^2-2t+2)-1\}dt \\ &\quad + \int_2^3 \{(t^2-2t+2)-(t-1)\}dt \\ &= \int_0^2 (t^2-2t+1)dt + \int_2^3 (t^2-3t+3)dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3-t^2+t\right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+3t\right]_2^3 \\ &= \left(\frac{8}{3}-4+2\right)+\left\{\left(9-\frac{27}{2}+9\right)-\left(\frac{8}{3}-6+6\right)\right\} \\ &= \frac{2}{3}+\frac{9}{2}-\frac{8}{3}=\frac{5}{2} \end{aligned}$$

37. 정답 ③

예각삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CA}}{\sin(\angle ABC)}=2\times 1,\ \sin(\angle ABC)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 $\angle ABC=45^\circ$이므로

$$\begin{aligned} \angle BCA &= 180^\circ-(\angle ABC+\angle CAB) \\ &= 180^\circ-(45^\circ+60^\circ) \\ &= 75^\circ \end{aligned}$$

또한 $\angle BCA=\angle BEA=75^\circ$이고 선분 AD는 $\angle CAB$의 이등분선이므로

$\angle BAE=180^\circ-(\angle ABE+\angle BEA)$

$30^\circ=180^\circ-(\angle ABE+75^\circ)$

$\angle ABE=75^\circ$

즉, 삼각형 ABE는 $\overline{AB}=\overline{AE}$인 이등변삼각형이다.

이때 두 직선 BE, FG는 서로 평행하므로 삼각형 AFD도 $\overline{AF}=\overline{AD}$인 이등변삼각형이다.

그런데

$$\begin{aligned} \angle ADC &= 180^\circ-(\angle CAD+ACD) \\ &= 180^\circ-(30^\circ+75^\circ) \\ &= 75^\circ \end{aligned}$$

이므로 삼각형 ACD도 $\overline{AC}=\overline{AD}$인 이등변삼각형이다.

즉, $\overline{AF}=\overline{AD}=\overline{AC}=\sqrt{2}$이므로 사각형 BEDF의 넓이는

($\triangle$ABE의 넓이)$-$($\triangle$AFD의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2\times\sin 30^\circ-\frac{1}{2}\times(\sqrt{2})^2\times\sin 30^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

또한 $\angle DEG=\angle ABC=45^\circ$, $\angle ADF=\angle EDG=75^\circ$이므로 두 삼각형 ABC와 GED는 서로 닮은 삼각형이다.

따라서 $\overline{EG} : \overline{AB}=\overline{DE} : \overline{BC}$이고 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)}=2\times 1,\ \overline{BC}=2\times\sin 60^\circ=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

이므로

$$\overline{EG} : \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}=\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\right) : \sqrt{3}$$

$$\overline{EG} : \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} : \sqrt{3}$$

$$\overline{EG}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

따라서 삼각형 DEG의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\times\sin 45^\circ=\frac{3-\sqrt{3}}{12}$$

이므로 사각형 BEGF의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3-\sqrt{3}}{12}=\frac{3+2\sqrt{3}}{12}$$

38. 정답 722

자연수 n을 차례대로 대입하면

$$a_1=\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{2}{3}\pi=1,\ a_2=\cos\frac{2}{3}\pi-\cos\frac{4}{3}\pi=0,$$

$$a_3=\cos\pi-\cos 2\pi=-2,\ a_4=\cos\frac{4}{3}\pi-\cos\frac{8}{3}\pi=0,$$

$$a_5=\cos\frac{5}{3}\pi-\cos\frac{10}{3}\pi=1,\ a_6=\cos 2\pi-\cos 4\pi=0$$

$a_7=\cos\frac{7}{3}\pi-\cos\frac{14}{3}\pi=1$, $\cdots$

이므로 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+6}=a_n$

따라서 자연수 k의 최솟값은 $\boxed{6}$이고

$a_1=1$, $a_2=0$, $a_3=-2$, $a_4=0$, $a_5=1$, $a_6=0$, $\cdots$

이므로 a_n이 가질 수 있는 값은 -2, 0, 1이다.

또한

$b_1=1^2=1$, $b_2=0^2=0$, $b_3=(-2)^2=4$, $b_4=0^2=0$, $b_5=1^2=1$,

$b_6=0^2=0$, $\cdots$

이므로 모든 자연수 n에 대하여

$b_{n+6}=b_n$

따라서 자연수 l의 최솟값은 $\boxed{6}$이고 b_n이 가질 수 있는 값은 0, 1, 4이다.

$c_n=-2^b\cos n\pi=\boxed{(-1)^{n+1}}\times 2^{b_n}$

이므로

$c_1=2$, $c_2=-1$, $c_3=16$, $c_4=-1$, $c_5=2$, $c_6=-1$, $\cdots$

이므로 자연수 m의 최솟값은 $\boxed{6}$이고 c_n이 가질 수 있는 값은 -1, 2, 16이다.

이때 $2+(-1)+16+(-1)+2+(-1)=17$이고

$2025=\boxed{17}\times 119+2$

이므로 $\sum_{n=1}^{N}c_n=2025$를 만족시키는 자연수 N의 값은

$N=6\times 119+1=\boxed{715}$이다.

즉 $f(n)=(-1)^{n+1}$, $p=6$, $q=17$, $r=715$이므로

$f(q)+p+r=(-1)^{18}+6+715=722$

39. 정답 31

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이면 조건 (가)를 만족시키지 못하므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

그런데 $x\le -1$일 때 함수 $|f(x)|=|-x-2|$는 $x=-2$에서 미분가능하지 않으므로 조건 (다)에 의하여 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$에서 연속이면서 미분가능해야 한다.

즉, $g(-1)=1$, $g'(-1)=1$

따라서 $g(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 정수)라 하면

$g'(x)=3x^2+2ax+b$

이므로

$g(-1)=-1+a-b+c=1$, $a-b+c=2$

$g'(-1)=3-2a+b=1$, $2a-b=2$ $\cdots\cdots$ ㉠

이때 조건 (나)를 만족시키기 위해서는

(i) $g(x)$가 $x<-1$에서 극댓값과 극솟값이 존재한다.

(ii) $g(x)$의 극값이 존재하지 않는다.

(i) $g(x)$가 $x<-1$에서 극댓값과 극솟값이 존재하기 위해서는

이차방정식 $3x^2+2ax+b=0$에서 서로 다른 두 실근 α, β를 갖는다고 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3b>0$

$\alpha+\beta=-\frac{2a}{3}$, $\alpha\beta=\frac{b}{3}$

이때 ㉠에서 $b=2a-2$이므로

$a^2-3(2a-2)=a^2-6a+6>0$에서

$a<3-\sqrt{3}$ 또는 $a>3+\sqrt{3}$ $\cdots\cdots$ ㉡

$-\frac{2a}{3}<-2$에서 $a>3$ $\cdots\cdots$ ㉢

이때 a는 정수이므로 ㉡, ㉢에서 $a\ge 5$

따라서

$$\begin{aligned}f(3)-f(2)&=g(3)-g(2)\\&=(27+9a+3b+c)-(8+4a+2b+c)\\&=19+5a+b\\&=17+7a\ge 52\end{aligned}$$

(ii) $g(x)$가 극값이 존재하지 않을 때

$\frac{D}{4}=a^2-3b\le 0$이고 ㉠에서 $b=2a-2$이므로

$a^2-3(2a-2)=a^2-6a+6\le 0$에서 $3-\sqrt{3}\le a\le 3+\sqrt{3}$

이때 a는 정수이므로

$2\le a\le 4$

$$\begin{aligned}f(3)-f(2)&=g(3)-g(2)\\&=(27+9a+3b+c)-(8+4a+2b+c)\\&=19+5a+b\\&=17+7a\ge 31\end{aligned}$$

(i), (ii)에 의하여 $f(3)-f(2)$의 최솟값은 31이다.

40. 정답 260

$y=\log_a(x-5)-3$에서 $y+3=\log_a(x-5)$

$x-5=a^{y+3}$, $x=a^{y+3}+5$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=a^{x+3}+5$ $\cdots\cdots$ ㉠

이때 곡선 $y=a^{x-1}+1$을 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 ㉠과 일치하고, 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=a^{x-1}+1$ 및 y축과 만나는 점이 각각 B, C이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(-4)^2+4^2}=4\sqrt{2}$

이때 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=3:2$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\frac{3}{2}\overline{\mathrm{BC}}=\frac{3}{2}\times 4\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

따라서 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}=10\sqrt{2}$이므로

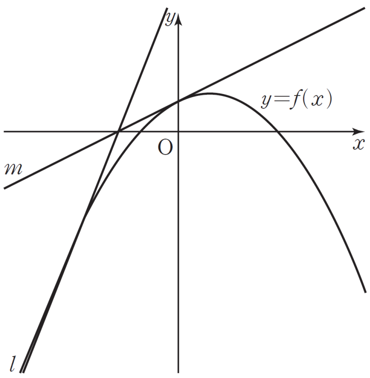
$\overline{\mathrm{OA}}=10$

즉 $\mathrm{A}(10,\ 0)$이므로

$\log_a(10-5)-3=\log_a 5-3=0$, $\log_a 5=3$

따라서 $a^3=5$
또한 $\mathrm{C}(0,\ 10)$이므로 $\mathrm{B}(0+4,\ 10-4)$, 즉 $\mathrm{B}(4,\ 6)$
따라서 $\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$ 이므로
$a^2\times\overline{\mathrm{OB}}^2=5\times52=260$

41. 정답 ④
$f(x)=-x^2+x+1$이라 하면 $f'(x)=-2x+1$
점 $(-1,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점을 $(t,\ f(t))$라 하면 이 접선의 방정식은
$y=f'(t)(x-t)+f(t)$
즉, $y=(-2t+1)(x-t)+(-t^2+t+1)$
이 접선이 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로
$0=(-2t+1)(-1-t)+(-t^2+t+1)$
$t^2+2t=0$에서 $t=-2$또는 $t=0$
$t=-2$인 경우, 즉 접점이 $(-2,\ -5)$인 접선을 l이라 할 때 직선 l의 방정식은 $y=5x+5$
$t=0$인 경우, 즉 접점이 $(0,\ 1)$인 접선을 m이라 할 때 직선 m의 방정식은 $y=x+1$



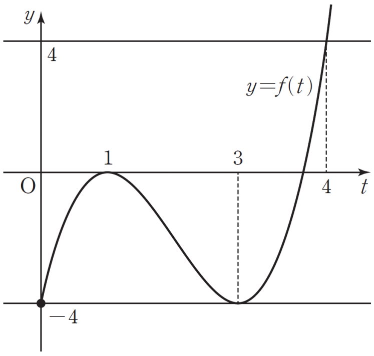
그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $l,\ m$으로 둘러싸인 부분의 넓이는
$$\int_{-2}^{-1}\{(5x+5)-f(x)\}dx+\int_{-1}^{0}\{(x+1)-f(x)\}dx$$
$$=\int_{-2}^{-1}(x^2+4x+4)dx+\int_{-1}^{0}x^2dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+2x^2+4x\right]_{-2}^{-1}+\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0}$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

42. 정답 ②
점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하자.
점 P를 x축의 방향으로 $\sqrt{2}$만큼, y축의 방향으로 $\sqrt{2}$만큼 평행이동한 점을 P'이라 하면 점 P'의 좌표는 $(a+\sqrt{2},\ b+\sqrt{2})$
점 P'을 원점에 대하여 대칭이동한 점이 Q이므로 점 Q의 좌표는 $(-a-\sqrt{2},\ -b-\sqrt{2})$
이때 점 Q가 원 $x^2+y^2=1$위의 점이므로 점 P'도 이 원 위의 점이다. 또 직선 PP'의 기울기가 1이고 선분 PP'의 길이가 이원의 지름의 길이인 2이므로 두 점 P, Q는 일치한다.
즉, $a=-(a+\sqrt{2}),\ b=-(b+\sqrt{2})$이므로
$a=b=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
이때 동경 OP가 나타내는 각의 크기 θ는
$\theta=2n\pi+\dfrac{5}{4}\pi$ (n은 정수)
이므로
$\sin\theta=\sin\left(2n\pi+\dfrac{5}{4}\pi\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

43. 정답 ②
ㄱ. $v_1(t)=3t^2-10t+7=(t-1)(3t-7)$
$v_1(t)=0$ 에서 $t=1$ 또는 $t=\dfrac{7}{3}$
$t<1$또는 $t>\dfrac{7}{3}$에서 $v_1(t)>0$이고 $1<t<\dfrac{7}{3}$에서
$v_1(t)<0$이므로 점 P는 $t=1,\ t=\dfrac{7}{3}$일 때 운동 방향을 바꾼다.
(참)
ㄴ. 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\ge0)$에서 위치를 각각 $x_1(t),\ x_2(t)$라 하면
$$x_1(t)=x_1(0)+\int_0^t(3s^2-10s+7)ds=-3+\int_0^t(3s^2-10s+7)ds$$
$$x_2(t)=x_2(0)+\int_0^t(2s-2)ds=1+\int_0^t(2s-2)ds$$
$$x_1(t)-x_2(t)=-4+\int_0^t(3s^2-12s+9)ds$$
$$=-4+\left[s^3-6s^2+9s\right]_0^t$$
$$=t^3-6t^2+9t-4=(t-1)^2(t-4)$$
$x_1(t)-x_2(t)=0$ 에서 $t=1$ 또는 $t=4$
따라서 출발한 후 두 점 P, Q는 두 번 만난다. (참)
ㄷ. $f(t)=x_1(t)-x_2(t)$라 하면
$f(t)=t^3-6t^2+9t-4$ 에서 $f'(t)=3t^2-12t+9=3(t-1)(t-3)$
$f'(t)=0$ 에서 $t=1$ 또는 $t=3$
함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−	0	+
$f(x)$	-4	↗	0	↘	-4	↗

출발한 후 시각 $t=k\,(k>0)$에서 두 점 P, Q사이의 거리가 4가 되기 위해서는 $f(k)=4$또는 $f(k)=-4$이어야 한다.



$f(k)=-4$가 되도록 하는 k의 값은 함수 $y=f(t)$의 그래프와 직선 $y=-4$의 교점의 t좌표이고, t좌표가 0보다 큰 교점의 개수가 1이므로 $f(k)=-4$를 만족시키는 양수 k의 값의 개수는 1이다.
같은 방법으로 $f(k)=4$가 되도록 하는 양수 k의 값의 개수는 1이다.
따라서 출발한 후 시각 $t=k\ (k>0)$에서 두 점 P, Q사이의 거리가 4가 되도록 하는 k의 개수는 2이다. (거짓)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

44. 정답 ②
등비수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 첫째항을 a, 공비를 r이라 할 때, $a>0$이고 $r>0$
$b_n=\log_4 a_n=\log_4 ar^{n-1}=\log_4 a+(n-1)\log_4 r$
즉, 수열 b_n은 첫째항이 $\log_4 a$이고 공차가 $\log_4 r$인 등차수열이다.
$b_3+b_{11}=(\log_4 a+2\log_4 r)+(\log_4 a+10\log_4 r)=2\log_4 a+12\log_4 r$
$b_5+b_9=(\log_4 a+4\log_4 r)+(\log_4 a+8\log_4 r)=2\log_4 a+12\log_4 r$
즉, $b_3+b_{11}=b_5+b_9$
조건 (가)에서 $b_3+b_{11}=2\log_4 a+12\log_4 r=0$ …… ㉠
따라서
$$\sum_{k=1}^{14} b_k=\sum_{k=1}^{13} b_k+b_{14}=\frac{13(2\log_4 a+12\log_4 r)}{2}+b_{14}=b_{14}$$
조건 (나)에서 $b_{14}=3$
즉, $\log_4 a+13\log_4 r=3$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$\log_4 a=-\dfrac{18}{7},\ \log_4 r=\dfrac{3}{7}$
따라서 $b_{21}=\log_4 a+20\log_4 r=-\dfrac{18}{7}+20\times\dfrac{3}{7}=6$
$b_{21}=\log_4 a_{21}$에서 $a_{21}=4^6=2^{12}$

다른 풀이

b_7은 두 수 b_3, b_{11}의 등차중항이므로 $b_7=\dfrac{b_3+b_{11}}{2}$
마찬가지로 b_7은 두 수 b_5, b_9의 등차중항이므로 $b_7=\dfrac{b_5+b_9}{2}$
조건 (가)에서 $b_7=0$
$1\le k\le 6$인 자연수 k에 대하여 $\dfrac{b_k+b_{14-k}}{2}=b_7=0$이므로
$$\sum_{k=1}^{14} b_k=\sum_{k=1}^{13} b_k+b_{14}=\sum_{k=1}^{6}\frac{b_k+b_{14-k}}{2}+b_{14}=b_{14}$$
조건 (나)에서 $b_{14}=3$
b_{14}는 두 수 b_7, b_{21}의 등차중항이므로 $b_{14}=\dfrac{b_7+b_{21}}{2}$에서
$b_{21}=6$
$b_{21}=\log_4 a_{21}$에서
$a_{21}=4^6=2^{12}$

45. 정답 ③
$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하자.
조건 (가)에서 임의의 두 실수 $p(p\neq 0)$, q에 대하여
$$\int_{-1}^{1} f(x)(px^2+q)dx=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$
이차함수 $y=px^2$도 일차항의 계수가 0이므로
$$\int_{-1}^{1} f(x)px^2dx=0 \quad \cdots\cdots ㉡$$
㉠에서 ㉡을 빼면 $\int_{-1}^{1} f(x)qdx=0$이므로
$$\int_{-1}^{1} f(x)qdx=q\left(\int_{-1}^{1} x^3dx+\int_{-1}^{1} ax^2dx+\int_{-1}^{1} bxdx+\int_{-1}^{1} cdx\right)$$
$$=q\left(2\int_0^1 ax^2dx+2\int_0^1 cdx\right)$$
$$=q\left(\frac{2a}{3}+2c\right)$$
즉, $q\left(\dfrac{2a}{3}+2c\right)=0$이고 이는 q에 대한 항등식이므로
$$\frac{2a}{3}+2c=0 \quad \cdots\cdots ㉢$$
㉡에서 $p=1$일 때,
$$\int_{-1}^{1} f(x)x^2dx=\int_{-1}^{1}(x^5+ax^4+bx^3+cx^2)dx$$
$$=2\int_0^1 ax^4dx+2\int_0^1 cx^2dx=\frac{2a}{5}+\frac{2c}{3}$$
조건 (가)에서 $\dfrac{2a}{5}+\dfrac{2c}{3}=0$ …… ㉣
㉢, ㉣을 연립하여 풀면
$a=c=0$
한편, 조건 (나)에서 임의의 실수 r에 대하여
$$\int_{-1}^{1} f(x)(2x+r)dx=1$$
이때 ㉠, ㉡에 의하여 $\int_{-1}^{1} f(x)rdx=0$이므로

$$\int_{-1}^{1} f(x)2x\,dx = \int_{-1}^{1}(2x^4+2bx^2)dx$$
$$=4\int_{0}^{1}x^4dx+4\int_{0}^{1}bx^2dx=\frac{4}{5}+\frac{4b}{3}$$

에서 $\frac{4}{5}+\frac{4b}{3}=1$, $b=\frac{3}{20}$

따라서 $f(x)=x^3+\frac{3}{20}x$이므로

$$f(1)=1+\frac{3}{20}=\frac{23}{20}$$

46. 정답 ①

삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이고 점 M은 선분 BC의 중점이므로 두 직선 AM과 BC는 서로 수직이다.

직각삼각형 ABM에서

$$\overline{AM}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BM}^2}=\sqrt{(4\sqrt{5})^2-8^2}=4$$

$\angle ABM=\theta$라 하면

$$\sin\theta=\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}=\frac{4}{4\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5} \quad \cdots\cdots ㉠$$

점 D는 선분 AC를 지름으로 하는 원 위의 점이므로 $\angle CDB=90^\circ$이다. 따라서 $\angle ABC$는 공통, $\angle AMB=\angle CDB$이므로 두 삼각형 ABM과 CBD는 닮음이다.

$\overline{AB} : \overline{BM}=\overline{CB} : \overline{BD}$에서 $\overline{BD}=\frac{\overline{CB}\times\overline{BM}}{\overline{AB}}=\frac{32\sqrt{5}}{5}$

즉, $\overline{AD}=\overline{BD}-\overline{AB}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$

직각삼각형 CBD에서 $\overline{CD}=\overline{BC}\sin\theta=\frac{16\sqrt{5}}{5}$

이므로 직각삼각형 ACD에서

$$\sin(\angle CAD)=\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}=\frac{4}{5} \quad \cdots\cdots ㉡$$

$\angle ACM$과 $\angle ADM$은 같은 호에 대한 원주각이므로 그 크기가 같고, 이등변삼각형 ABC에서 $\angle ABM=\angle ACM$이다. 즉, $\angle ABM=\angle ADM$이 되어 삼각형 BDM은 $\overline{BM}=\overline{DM}$인 이등변삼각형이므로

$$\overline{DM}=8 \quad \cdots\cdots ㉢$$

$\angle DAC$와 $\angle DMC$는 같은 호에 대한 원주각이므로 그 크기가 같고, $\angle ACM=\angle ADM$이므로 두 삼각형 DAE와 CME는 닮음이다.

$\overline{AD} : \overline{MC}=\frac{12\sqrt{5}}{5} : 8=3 : 2\sqrt{5}$

$\overline{AE} : \overline{ME}=3 : 2\sqrt{5}$, 즉 $\overline{AE}=\frac{3\sqrt{5}}{10}\overline{ME}$

삼각형 ADE에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{DE}}{\sin(\angle EAD)}=\frac{\overline{AE}}{\sin(\angle ADE)}$$

$$\frac{\overline{DE}}{\sin(\angle CAD)}=\frac{\overline{AE}}{\sin\theta}$$

㉠, ㉡에 의하여

$$\overline{DE}=\frac{4\sqrt{5}}{5}\overline{AE}=\frac{4\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{5}}{10}\times\overline{ME}=\frac{6}{5}\overline{ME}$$

㉢에 의하여

$$\overline{DM}=\overline{ME}+\overline{DE}=\overline{ME}+\frac{6}{5}\overline{ME}=\frac{11}{5}\overline{ME}=8,\ 즉\ \overline{ME}=\frac{40}{11}$$

삼각형 CEM의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{ME}}{\sin(\angle ECM)}=2R$$

삼각형 CEM의 외접원과 삼각형 CFM의 외접원이 서로 같으므로 사인법칙에 의하여

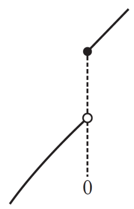
$$\frac{\overline{MF}}{\sin(\angle BCD)}=2R$$

㉠에 의하여 $\sin(\angle ECM)=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin(\angle BCD)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$이므로

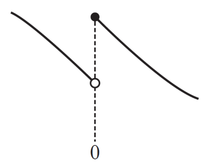
$$\overline{MF}=2\overline{ME}=\frac{80}{11}$$

47. 정답 ⑤

만약 삼차함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하면 [그림 1]과 같이 모든 양수 a에 대하여 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖지 않는다. 따라서 [그림 2]와 같이 삼차함수 $f(x)$가 감소하는 구간이 반드시 존재하고 0이 이 구간에 속해야 한다.



[그림 1]



[그림 2]

이때 $f'(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$ $(\alpha<\beta)$라 하면 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 가지므로

$\alpha\le 0<\beta$이고, 이때 $f'(0)\le 0$ $\cdots\cdots$ ㉠

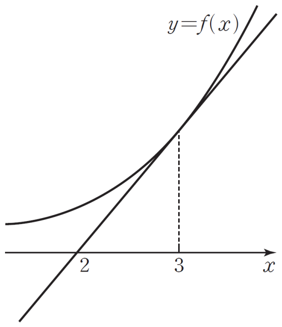
한편, 조건 (나)에서 $g(3)=6(3-2)=6$, 즉 $g(3)=f(3)=6$

$\frac{g(x)}{x-2}=\frac{g(x)-0}{x-2}$에서 $\frac{g(x)}{x-2}$의 값은 두 점 $(x,\ g(x))$, $(2,\ 0)$을 이은 직선의 기울기를 의미한다. 조건 (나)에서 $x>2$에서 방정식 $\frac{g(x)}{x-2}=6$의 실근은 3뿐이므로 두 점 $(x,\ g(x))$, $(2,\ 0)$을 이은 직선의 기울기가 6이 되도록 하는 함수 $y=f(x)$ $(x>2)$의 그래프 위의 점은 $(3,\ f(3))$뿐이다.

$f'(2)\ge 2$이므로 $2<\alpha$ 또는 $\beta<2$이고, $\alpha\le 0$에서 $\beta<2$

이때 $x>2$에서 $f'(x)\ge 2$이고 $f(2)>0$이므로 [그림 3]과 같이 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(3,\ f(3))$에서의 접선은 기울기가 6이고 점 $(2,\ 0)$을

지난다.



[그림 3]

따라서 이 직선의 방정식은 $y=6(x-2)$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=6x-12$의 교점 중 $(3,\ f(3))$이 아닌 점의 x좌표를 b라 하면 삼차방정식 $f(x)-(6x-12)=0$에서 $x=b$ 또는 $x=3$ (중근)

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{3}(x-3)^2(x-b)+6x-12$

$$f'(x)=\frac{1}{3}(x-3)^2+\frac{2}{3}(x-3)(x-b)+6$$
$$=\frac{(x-3)^2+2(x-3)(x-b)}{3}+6$$
$$=(x-3)\left(x-\frac{3+2b}{3}\right)+6$$

㉠에서 $f'(0)=3+2b+6\le 0,\ b\le -\dfrac{9}{2}$

$f'(2)=-\left(2-\dfrac{3+2b}{3}\right)+6\ge 2$에서 $b\ge -\dfrac{9}{2}$

따라서 $b=-\dfrac{9}{2}$이므로 $f(x)=\dfrac{1}{3}(x-3)^2\left(x+\dfrac{9}{2}\right)+6x-12$

한편, $x<0$에서 함수 $\dfrac{g(x)}{x-2}$의 최솟값이 6이므로 점 $(2,\ 0)$에서 함수 $y=f(x)-a\ (x<0)$의 그래프에 그은 접선의 기울기가 6임을 의미한다.

$f'(x)=6$에서 $x=3$ 또는 $x=-2$

따라서 점 $(2,\ 0)$에서 함수 $y=f(x)-a\ (x<0)$의 그래프에 그은 접선의 접점의 x좌표는 -2이므로 이 접선의 방정식은

$y=6(x+2)+f(-2)-a,\ y=6x+\dfrac{53}{6}-a$

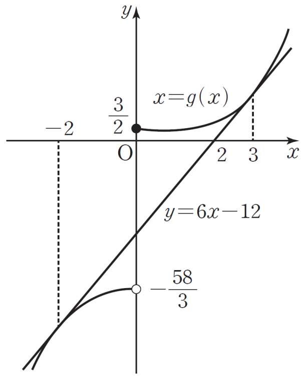
이 직선은 기울기가 6이고 점 $(2,\ 0)$을 지나므로 직선 $y=6x-12$와 같다.

따라서 $\dfrac{53}{6}-a=-12$이므로

$$a=\frac{53}{6}+12=\frac{125}{6}$$

[참고]

함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=6x-12$는 그림과 같다.



48. 정답 75

모든 자연수 n에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^k=\frac{2(2^n-1)}{2-1}=2^{n+1}-2$이므로

$$a_{n+1}=3a_n+\sum_{k=1}^{n}2^k$$

에서

$a_{n+1}=3a_n+2^{n+1}-2$

$a_{n+1}+\boxed{2}\times 2^{n+1}-1=3\left(a_n+\boxed{2}\times 2^n-1\right)$

이고

$b_n=a_n+\boxed{2}\times 2^n-1$ …… ㉠

이라 하면

$b_{n+1}=3b_n$

수열 $\{b_n\}$은 $b_1=a_1+2^2-1=3$이고 공비가 3인 등비수열이므로

$b_n=\boxed{3^n}$ …… ㉡

이다. ㉠, ㉡에서 모든 자연수 n에 대하여

$a_n=\boxed{3^n-2^{n+1}+1}$

이다.

이상에서 $p=2$이고 $f(n)=3^n,\ g(n)=3^n-2^{n+1}+1$이므로

$$\frac{f(1)\times g(4)}{p}=\frac{3^1\times(3^4-2^5+1)}{2}=75$$

49. 정답 736

조건 (가) 에서

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{-4h^2+5h}{h}=5,$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{h}{h}=1$$

즉, $\displaystyle\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}\ne\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

한편, 조건 (나) 에서 $n\in\{1,\ 2\}$에 대하여

$n\le x<n+1$ 일 때 $f(x)=4(x-n)(x-n-1)+x$

또는 $n\le x<n+1$ 일 때 $f(x)=-4(x-n)(x-n-1)+x$

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=n,\ x=n+1$에서 모두 연속이다.

즉, $f(n)=\lim\limits_{x\to n+}f(x)=n$ 이고 $f(n+1)=\lim\limits_{x\to(n+1)-}f(x)=n+1$

(i) $n\le x<n+1$일 때 $f(x)=4(x-n)(x-n-1)+x$인 경우

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(n+h)-f(n)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{\{4h(h-1)+(n+h)\}-n}{h}=-3,$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(n+1+h)-f(n+1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0-}\frac{\{4(h+1)h+(n+1+h)\}-(n+1)}{h}=5\quad\cdots\cdots ㉠$$

(ii) $n\le x<n+1$일 때 $f(x)=-4(x-n)(x-n-1)+x$인 경우

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(n+h)-f(n)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{\{-4h(h-1)+(n+h)\}-n}{h}=5,$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(n+1+h)-f(n+1)}{h}$$

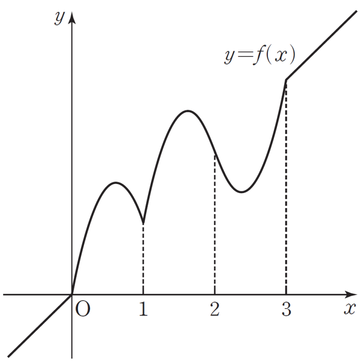
$$=\lim_{h\to0-}\frac{\{-4(h+1)h+(n+1+h)\}-(n+1)}{h}=-3\quad\cdots\cdots ㉡$$

조건 (가)에서 $\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{h}{h}=1$이므로 ㉠, ㉡에 의하여 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 미분가능하지 않다. 조건 (가), (나)에서 함수 $f(x)$는 $0,\ 1,\ 2,\ 3$이 아닌 모든 실수 x에서 미분가능하고 $x=0$, $x=3$에서 각각 미분가능하지 않으므로 조건 (다)에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않고 $x=2$에서 미분가능하거나 $x=1$에서 미분가능하고 $x=2$에서 미분가능하지 않아야 한다.

ⓐ 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하지 않고 $x=2$에서 미분가능한 경우

(i ,) (ii)에 의하여

$$f(x)=\begin{cases} x & (x<0)\\ -4x^2+5x & (0\le x<1)\\ -4(x-1)(x-2)+x & (1\le x<2)\\ 4(x-2)(x-3)+x & (2\le x<3)\\ x & (x\ge 3)\end{cases}$$



곡선 $y=-4x^2+5x$에서 $y'=-8x+5$이므로 점 $(-1,\ 0)$에서 곡선 $y=-4x^2+5x$에 그은 접선의 접점의 x좌표를 $a(0\le a<1)$이라 하면 이 접선의 방정식은

$y=(-8a+5)(x-a)+(-4a^2+5a)$

이고, 이 접선은 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$0=(-8a+5)(-1-a)+(-4a^2+5a)$

$(2a+5)(2a-1)=0$에서 $a=\dfrac{1}{2}$

점 $(-1,\ 0)$에서 곡선 $y=-4x^2+5x$에 그은 접선의 방정식은 $y=x+1$이고 $0\le a<1$이므로 $0\le x<1$ 또는 $x<0$ 또는 $x\ge 3$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x+1$은 한 점 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$에서만 만난다.

$-4x^2+5x=-4x(x-1)+x$이므로 곡선 $y=-4x^2+5x$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이 곡선 $y=-4(x-1)(x-2)+x$이다.

따라서 두 곡선 $y=-4x^2+5x$와 $y=-4(x-1)(x-2)+x$는 직선 $y=x+1$에 모두 접하므로 $g(1)=2$이다.

마찬가지로 곡선 $y=4(x-2)(x-3)+x$에서 $y'=8x-19$이므로 점 $(-1,\ 0)$에서 곡선 $y=4(x-2)(x-3)+x$에 그은 접선의 접점의 x좌표를 $b(2\le b<3)$이라 하면 이 접선의 방정식은

$y=(8b-19)(x-b)+\{4(b-2)(b-3)+b\}$

이고, 이 접선은 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$0=(8b-19)(-1-b)+\{4(b-2)(b-3)+b\}$

$b^2+2b-\dfrac{43}{4}=0$에서 $b=-1+\dfrac{\sqrt{47}}{2}$이므로 그 기울기는

$8b-19=-27+4\sqrt{47}$

한편, 두 점 $(-1,\ 0)$과 $(1,\ 1)$을 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{1}{2}$이므로

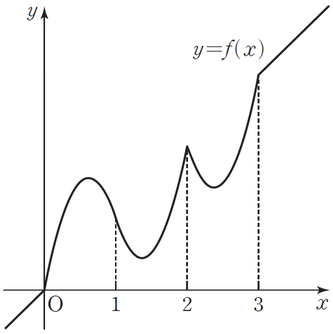
$$g(t)=\begin{cases} 1 & (t<-27+4\sqrt{47})\\ 2 & (t=-27+4\sqrt{47})\\ 3 & \left(-27+4\sqrt{47}<t<\dfrac{1}{2}\right)\\ 4 & \left(t=\dfrac{1}{2}\right)\\ 5 & \left(\dfrac{1}{2}<t<1\right)\\ 2 & (t=1)\\ 1 & (t>1)\end{cases}$$

이때 함수 $g(t)$는 불연속인 실수 t의 값이 $-27+4\sqrt{47},\ \dfrac{1}{2},\ 1$의 3개이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

ⓑ 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하고 $x=2$에서 미분가능하지 않은 경우

(i), (ii)에 의하여

$$f(x)=\begin{cases} x & (x<0)\\ -4x^2+5x & (0\le x<1)\\ 4(x-1)(x-2)+x & (1\le x<2)\\ 4(x-2)(x-3)+x & (2\le x<3)\\ x & (x\ge 3)\end{cases}$$



곡선 $y=4(x-1)(x-2)+x$에서 $y'=8x-11$이므로 점 $(-1,\ 0)$에서 곡선 $y=4(x-1)(x-2)+x$에 그은 접선의 접점의 x좌표를 $c\,(1\le c<2)$라 하면 이 접선의 방정식은

$y=(8c-11)(x-c)+\{4(c-1)(c-2)+c\}$

이고, 이 접선은 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$0=(8c-11)(-1-c)+\{4(c-1)(c-2)+c\}$

$c^2+2c-\dfrac{19}{4}=0$에서 $c=-1+\dfrac{\sqrt{23}}{2}$이고 그 기울기는

$8c-11=-19+4\sqrt{23}$

한편, 두 점 $(-1,\ 0)$과 $(2,\ 2)$를 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{2}{3}$이므로

$$g(t)=\begin{cases}1 & (t<-19+4\sqrt{23})\\ 2 & (t=-19+4\sqrt{23})\\ 3 & (-19+4\sqrt{23}<t<-27+4\sqrt{47})\\ 4 & (t=-27+4\sqrt{47})\\ 5 & \left(-27+4\sqrt{47}<t<\dfrac{2}{3}\right)\\ 4 & \left(t=\dfrac{2}{3}\right)\\ 3 & \left(\dfrac{2}{3}<t<1\right)\\ 1 & (t\ge 1)\end{cases}$$

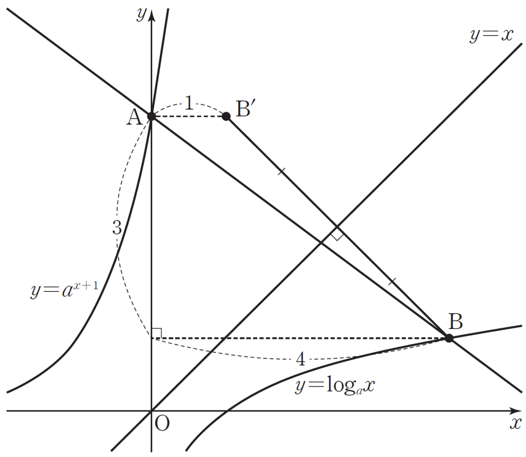
이때 함수 $g(t)$는 불연속인 실수 t의 값이

$-19+4\sqrt{23},\ -27+4\sqrt{47},\ \dfrac{2}{3},\ 1$의 4개이므로 주어진 조건을 만족시키고 $t_1=-19+4\sqrt{23},\ t_4=1$

따라서

$(t_1+19)^2\times\left(\lim\limits_{t\to t_4-}g(t)-1\right)=(4\sqrt{23})^2\times(3-1)=368\times2=736$

50. 정답 4



[그림 1]

[그림 1]과 같이 점 A의 좌표를 $(\alpha_1,\ \beta_1)$이라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=5$이고 직선 AB의 기울기가 $-\dfrac{3}{4}$이므로 점 B의 좌표는 $(\alpha_1+4,\ \beta_1-3)$이고,

곡선 $y=\log_a x$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 곡선은

$y=a^x$이므로 점 B를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점

$\mathrm{B}'(\beta_1-3,\ \alpha_1+4)$는 곡선 $y=a^x$ 위에 있다.

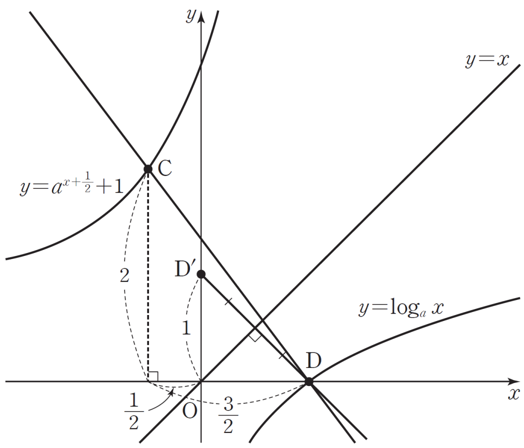
[그림 1]과 같이 점 A를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(\alpha_1+1,\ \beta_1)$이고 이 점과 점 B를 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{\beta_1-(\beta_1-3)}{(\alpha_1+1)-(\alpha_1+4)}=-1$이므로 이 점은 점 B′과 서로 같다.

즉, $\beta_1=\alpha_1+4$

점 A는 곡선 $y=a^{x+1}$ 위에 있으므로

$\beta_1=a^{\alpha_1+1}$, 즉 $\alpha_1+4=a^{\alpha_1+1}$ …… ㉠



[그림 2]

한편, [그림 2]와 같이 점 C의 좌표를 $(\alpha_2,\ \beta_2)$라 하면 $\overline{\mathrm{CD}}=\dfrac{5}{2}$이고

직선 CD의 기울기가 $-\dfrac{4}{3}$이므로 점 D의 좌표는

$\left(\alpha_2+\dfrac{3}{2},\ \beta_2-2\right)$이고, 곡선 $y=\log_a x$를 직선 $y=x$에 대하여

대칭이동한 곡선 $y=a^x$이므로 점 D를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 $\mathrm{D}'\left(\beta_2-2,\ \alpha_2+\frac{3}{2}\right)$은 곡선 $y=a^x$ 위에 있다.

[그림 2]와 같이 점 C를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점의 좌표는 $\left(\alpha_2+\frac{1}{2},\ \beta_2-1\right)$이고 이 점과 점 D를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{(\beta_2-1)-(\beta_2-2)}{\left(\alpha_2+\frac{1}{2}\right)-\left(\alpha_2+\frac{3}{2}\right)}=-1$이므로 이 점은 점 D'과 서로 같다.

즉, $\beta_2-2=\alpha_2+\frac{1}{2}$, $\beta_2=\alpha_2+\frac{5}{2}$

점 C는 곡선 $y=a^{x+\frac{1}{2}}+1$ 위에 있으므로

$\beta_2=a^{\alpha_2+\frac{1}{2}}+1$, 즉 $\alpha_2+\frac{3}{2}=a^{\alpha_2+\frac{1}{2}}$ …… ㉡

㉠에서 점 A의 x좌표가 점 C의 x좌표보다 $\frac{1}{2}$만큼 크므로

$\left(\alpha_2+\frac{1}{2}\right)+4=a^{\left(\alpha_2+\frac{1}{2}\right)+1}$, 즉 $\alpha_2+\frac{9}{2}=a^{\alpha_2+\frac{3}{2}}$ …… ㉢

점 C가 곡선 $y=a^{x+1}$ 위에 있으므로

$\beta_2=a^{\alpha_2+1}$, 즉 $\alpha_2+\frac{5}{2}=a^{\alpha_2+1}$ …… ㉣

㉡, ㉢, ㉣에서

$$\frac{\alpha_2+\frac{5}{2}}{\alpha_2+\frac{3}{2}}=\frac{\alpha_2+\frac{9}{2}}{\alpha_2+\frac{5}{2}}$$

$$\left(\alpha_2+\frac{5}{2}\right)^2=\left(\alpha_2+\frac{3}{2}\right)\left(\alpha_2+\frac{9}{2}\right)$$

$$\alpha_2=-\frac{1}{2}$$

㉢에 $\alpha_2=-\frac{1}{2}$을 대입하면

$$-\frac{1}{2}+\frac{9}{2}=a^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}$$

따라서 $a=4$

51. 정답 ②

함수 $f(x)=a\cos bx+1$의 주기는 $\frac{2\pi}{b}$이므로

닫힌구간 $\left[0,\ \frac{2\pi}{b}\right]$에서 함수 $f(x)=a\cos bx+1$은 $x=\frac{\pi}{b}$에서 최솟값 $-a+1$을 가진다.

$\frac{\pi}{b}=6$에서 $b=\frac{\pi}{6}$

$-a+1=-1$에서 $a=2$

이때, $f(x)=2\cos\frac{\pi x}{6}+1$이므로

부등식 $f(3+x)f(3-x)\le-2$에서

$$\left\{2\cos\frac{\pi(3+x)}{6}+1\right\}\left\{2\cos\frac{\pi(3-x)}{6}+1\right\}\le-2$$

$$\left\{2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi x}{6}\right)+1\right\}\left\{2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{6}\right)+1\right\}\le-2$$

$$\left(-2\sin\frac{\pi x}{6}+1\right)\left(2\sin\frac{\pi x}{6}+1\right)\le-2$$

$$-4\sin^2\frac{\pi x}{6}+1\le-2$$

$$\sin^2\frac{\pi x}{6}\ge\frac{3}{4}$$

$\sin\frac{\pi x}{6}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $\sin\frac{\pi x}{6}\le-\frac{\sqrt{3}}{2}$

이때, $0\le x\le\frac{2\pi}{b}$, 즉 $0\le x\le12$이므로

$\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi x}{6}\le\frac{2\pi}{3}$ 또는 $\frac{4\pi}{3}\le\frac{\pi x}{6}\le\frac{5\pi}{3}$

$2\le x\le4$ 또는 $8\le x\le10$

따라서 자연수 x는 $2,\ 3,\ 4,\ 8,\ 9,\ 10$이고, 그 개수는 6이다.

52. 정답 ③

$a\ne1$, $a\ne2$이면 점 P는 출발 후 운동 방향을 3번 바꾸고,
$a=1$이면 점 P는 출발 후 운동 방향을 $t=2$에서 한 번만 바꾸고,
$a=2$이면 점 P는 출발 후 운동 방향을 $t=1$에서 한 번만 바꾼다.

(ⅰ) $a=1$일 때

$v(t)=(t-2)(t-1)^2$

시각 $t=0$에서 $t=1$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_0^a|v(t)|dt&=\int_0^1|v(t)|dt\\&=\int_0^1\{-(t-2)(t-1)^2\}dt\\&=\int_0^1(-t^3+4t^2-5t+2)dt\\&=\left[-\frac{1}{4}t^4+\frac{4}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+2t\right]_0^1\\&=\frac{7}{12}\end{aligned}$$

(ⅱ) $a=2$일 때

$v(t)=(t-1)(t-2)^2$

시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_0^a|v(t)|dt&=\int_0^2|v(t)|dt\\&=\int_0^1\{-(t-1)(t-2)^2\}dt+\int_1^2(t-1)(t-2)^2dt\\&=\int_0^1\{-(t^3-5t^2+8t-4)\}dt+\int_1^2(t^3-5t^2+8t-4)dt\end{aligned}$$

$$= \left[-\frac{1}{4}t^4+\frac{5}{3}t^3-4t^2+4t\right]_0^1+\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{5}{3}t^3+4t^2-4t\right]_1^2$$

$$= \frac{17}{12}+\left\{-\frac{4}{3}-\left(\frac{17}{12}\right)\right\}$$

$$= \frac{3}{2}$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 점 P가 움직인 거리의 최댓값은 $\frac{3}{2}$이다.

53. 정답 ②

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

조건 (가)에서 $|a_4|=|a_6|+4$이므로

$d \neq 0$

(ⅰ) $d>0$일 때

$a_4<a_6$이고,

조건 (가)에서 $a_4 \times a_6<0$이므로

$a_4<0<a_6$

조건 (가)에서

$|a_4|=|a_6|+4$ 이므로

$-a_4=a_6+4$

$a_4+a_6=-4$

$2a_5=-4$

$a_5=-2$ …… ㉠

조건 (나)에서

$$\sum_{k=1}^{10}(|a_k|+a_k)=70$$

이고

$$\sum_{k=1}^{10}(|a_k|+a_k)=2\sum_{k=6}^{10}a_k$$
$$=2(a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10})$$
$$=10a_8$$

이므로

$10a_8=70$

$a_8=7$ …… ㉡

한편, $a_8-a_5=3d$이므로

㉠, ㉡에서

$7-(-2)=3d$

$d=3$

이때, $a_{10}=a_8+2d$

$=7+2\times3$

$=13$

(ⅱ) $d<0$일 때

$a_4>a_6$

이고, 조건 (가)에서

$a_4\times a_6<0$

이므로

$a_6<0<a_4$

조건 (가)에서

$|a_4|=|a_6|+4$

이므로

$a_4=-a_6+4$

$a_4+a_6=4$

$2a_5=4$

$a_5=2$ …… ㉢

조건 (나)에서

$$\sum_{k=1}^{10}(|a_k|+a_k)=70$$

이고

$$\sum_{k=1}^{10}(|a_k|+a_k)=2\sum_{k=1}^{5}a_k$$
$$=2(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)$$
$$=10a_3$$

이므로

$10a_3=70$

$a_3=7$ …… ㉣

한편 $a_5-a_3=2d$이므로

㉢, ㉣에서

$2-7=2d$

$d=-\frac{5}{2}$

이때, d가 정수라는 조건을 만족시키지 못한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a_{10}=13$

54. 정답 ③

$\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{4}{x}\int_0^x f(t)\,dt$에서

$\lim\limits_{x\to0}\frac{4}{x}\int_0^x f(t)\,dt=4f(0)$

이고, 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to0}g(x)=g(0)=f(0)$

즉, $f(0)=4f(0)$에서 $f(0)=0$

$f(x)=x^3+ax^2+bx$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

$x\neq0$일 때, $g(x)=\frac{4}{x}\int_0^x f(t)\,dt$이므로

$$g(-2)=-2\int_0^{-2}f(t)\,dt$$

$$g(2)=2\int_0^{2}f(t)\,dt$$

이때,

$$g(-2)+g(2)=-\int_0^{-2} f(t)\,dt+2\int_0^2 f(t)\,dt$$
$$=2\left(\int_{-2}^{0} f(t)\,dt+\int_0^2 f(t)\,dt\right)$$
$$=2\int_{-2}^{2} f(t)\,dt$$
$$=2\int_{-2}^{2} (t^3+at^2+bt)\,dt$$
$$=4\int_0^2 at^2\,dt$$
$$=4\left[\frac{a}{3}t^3\right]_0^3$$
$$=\frac{32a}{3}$$

이므로 $g(-2)+g(2)=64$에서

$\frac{32a}{3}=64$, 즉 $a=6$

$f(1)=1+6+b=-5$에서

$b=-12$

따라서 $f(x)=x^3+6x^2-12x$이므로

$f(2)=8+24-24=8$

55. 정답 ③

$\angle\mathrm{ACB}=\frac{\pi}{2}$이므로

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=2R$

$\angle\mathrm{BCD}=\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$$\sin\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\angle\mathrm{ACD}\right)$$
$$=\cos(\angle\mathrm{ACD})$$
$$=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin\theta}=2R$$
$$\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{10}}{10}}=2R$$

$R=\sqrt{5}$

직각삼각형 ABC에서

$$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{AC}}^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-4^2}=2$$

원주각의 성질에 의하여

$\angle\mathrm{BDC}=\angle\mathrm{BAC}$

이므로

$$\cos(\angle\mathrm{BDC})=\cos(\angle\mathrm{BAC})$$
$$=\frac{4}{2\sqrt{5}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

삼각형 BCD에서

$\overline{\mathrm{CD}}=x\ (x>0)$이라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{BD}}^2+\overline{\mathrm{CD}}^2-2\times\overline{\mathrm{BD}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\cos(\angle\mathrm{BDC})$$
$$2^2=(\sqrt{2})^2+x^2-2\times\sqrt{2}\times x\times\frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$x^2-\frac{4\sqrt{10}}{5}x-2=0$$
$$x=\frac{2\sqrt{10}}{5}\pm\sqrt{\left(-\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)^2-1\times(-2)}$$
$$=\frac{2\sqrt{10}}{5}\pm\frac{3\sqrt{10}}{5}$$

$x=\sqrt{10}$ 또는 $x=-\frac{\sqrt{10}}{5}$

$x>0$이므로

$x=\sqrt{10}$

56. 정답 ①

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

$f'(1)<0$

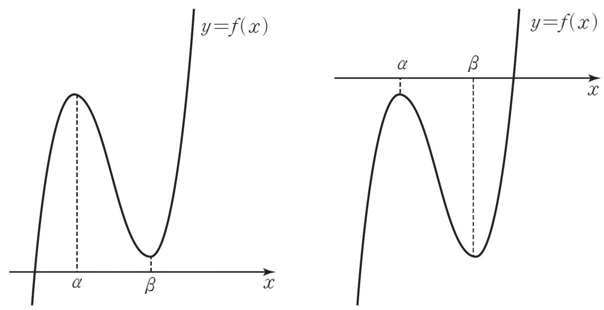
이므로 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프와 x축은 두 점에서 만난다.

이때, $f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)$ ($\alpha<\beta$이고, α, β는 상수)

로 놓을 수 있고, 삼차함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극대이고 $x=\beta$에서 극소이다.

(ⅰ) 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 한 점에서 만날 때

삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

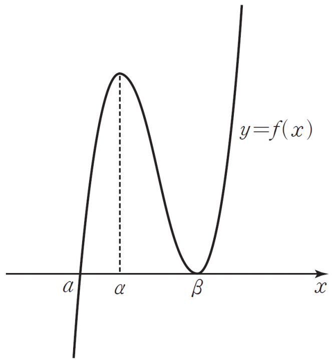


이때, $f(\alpha)\neq 0$, $f(\beta)\neq 0$이므로 극한값 $\lim_{x\to\alpha} g(x)$, $\lim_{x\to\beta} g(x)$가 존재하지 않는다.

즉, 함수 $g(x)$는 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 모두 불연속이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ⅱ) 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 두 점에서 만날 때

① $f(x)=(x-a)(x-\beta)^2$ ($a<\alpha$, a는 상수)일 때



$$g(x)=\begin{cases} k & (x=\alpha,\ x=\beta) \\ \dfrac{(x-a)(x-\beta)^2}{9(x-\alpha)^2(x-\beta)^2} & (x\neq\alpha,\ x\neq\beta)\end{cases}$$

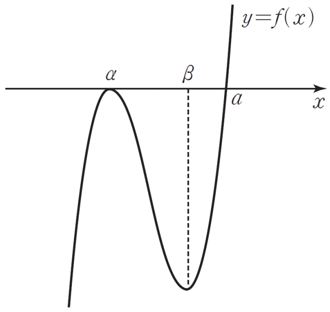
$$=\begin{cases} k & (x=\alpha,\ x=\beta) \\ \dfrac{x-a}{9(x-\alpha)^2} & (x\neq\alpha,\ x\neq\beta)\end{cases}$$

극한값 $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $g(x)$는 $x=\alpha$에서만 불연속이다.

즉, $\alpha=3$

이때, $f'(1)>0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

② $f(x)=(x-\alpha)^2(x-a)$ ($a>\beta$, a는 상수)일 때



$$g(x)=\begin{cases} k & (x=\alpha,\ x=\beta) \\ \dfrac{(x-\alpha)^2(x-a)}{9(x-\alpha)^2(x-\beta)^2} & (x\neq\alpha,\ x\neq\beta)\end{cases}$$

$$=\begin{cases} k & (x=\alpha,\ x=\beta) \\ \dfrac{x-a}{9(x-\beta)^2} & (x\neq\alpha,\ x\neq\beta)\end{cases}$$

극한값 $\lim\limits_{x\to\beta} g(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $g(x)$는 $x=\beta$에서만 불연속이다.

즉, $\beta=3$

이때, $f'(1)<0$이므로 $\alpha<1$이다.

$f'(x)=3(x-\alpha)(x-3)$이므로

$$g(x)=\begin{cases} k & (x=\alpha,\ x=3) \\ \dfrac{x-a}{9(x-3)^2} & (x\neq\alpha,\ x\neq 3)\end{cases}$$

$f'(1)=3(1-\alpha)\times(-2)=-6$에서

$\alpha=0$

한편 $f'(x)=3x(x-3)$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$=\int(3x^2-9x)\,dx$$
$$=x^3-\frac{9}{2}x^2+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이고 $\lim\limits_{x\to0} g(x)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$이다.

즉, $f(0)=C=0$

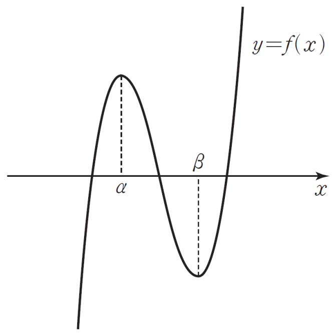
이때

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\{f'(x)\}^2}=\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{9}{2}}{9(x-3)^2}=-\frac{1}{18}$$

이므로

$k=-\dfrac{1}{18}$

(ⅲ) 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 세 점에서 만날 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



이때, $f(\alpha)\neq0$, $f(\beta)\neq0$이므로 극한값 $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$, $\lim\limits_{x\to\beta} g(x)$가 존재하지 않는다.

즉, 함수 $g(x)$는 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 모두 불연속이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

$$g(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{18} & (x=0,\ x=3) \\ \dfrac{x-\frac{9}{2}}{9(x-3)^2} & (x\neq0,\ x\neq3)\end{cases}$$

따라서

$$k+g(5)=-\frac{1}{18}+\frac{1}{72}=-\frac{1}{24}$$

57. 정답 ⑤

조건 (나)에서

$a_5=4$이고 $|a_5|=|4|=4$가 짝수이므로

조건 (가)에서

$$a_6=-\frac{1}{2}a_5=-\frac{1}{2}\times4=-2$$

$|a_6|=|-2|=2$가 짝수이므로

$a_7=-\frac{1}{2}a_6=-\frac{1}{2}\times(-2)=1$

$|a_7|=|1|=1$이 홀수이므로

$a_8=a_7+3=1+3=4$

한편, a_4의 값을 구해 보자.

$|a_4|$가 홀수일 때,

$a_5=a_4+3$에서 $4=a_4+3$, $a_4=1$

$|a_4|$가 짝수일 때,

$a_5=-\frac{1}{2}a_4$에서 $4=-\frac{1}{2}a_4$, $a_4=-8$

조건 (나)에서

$|a_4|<|a_8|$이므로 $a_4=1$

이와 같은 방법으로 a_1, a_2, a_3의 값을 구하면 다음 표와 같다.

<table>
<tr><th>a_1</th><th>a_2</th><th>a_3</th><th>a_4</th></tr>
<tr><td>10</td><td>-5</td><td rowspan="3">-2</td><td rowspan="3">1</td></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="2">4</td></tr>
<tr><td>-8</td></tr>
</table>

한편, $a_5=4$, $a_6=-2$, $a_7=1$, $a_8=4$, $\cdots$이므로

$n\geq 3$인 모든 자연수 n에 대하여

$a_n=a_{n+3}$

이때, $a_{51}=-2$이므로 $a_1\times a_{51}<0$을 만족시키는 a_1의 값은 10, 1이다.

따라서 모든 a_1의 값의 합은 $10+1=11$

58. 정답 6

$f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고 모든 실수 x에 대하여 $xf(x)\geq 0$을 만족시키므로

$f(x)=x(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

이때, $f(0)=0$이고 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4b\leq 0$ ...... ㉠

이어야 한다.

한편, $\{x \mid f(x)=0\}=\{0, 6\}$에서

곡선 $y=f(x)$와 x축은 서로 다른 두 점 $(0, 0)$, $(6, 0)$에서만 만나므로

$f(x)=x^2(x-6)$ 또는 $f(x)=x(x-6)^2$

이다.

(i) $f(x)=x^2(x-6)$일 때

$f(x)=x(x^2-6x)$

이므로 $a=-6$, $b=0$

이때, $D=(-6)^2-4\times 0=36>0$이므로 ㉠을 만족시키지 못한다.

(ii) $f(x)=x(x-6)^2$일 때

$f(x)=x(x^2-12x+36)$

이므로 $a=-12$, $b=36$

이때, $D=(-12)^2-4\times 36=0$

이므로 ㉠을 만족시킨다.

(i), (ii)에 의하여

$f(x)=x(x-6)^2=x^3-12x^2+36x$

$f'(x)=3x^2-24x+36=3(x-2)(x-6)$

$f'(x)=0$에서

$x=2$ 또는 $x=6$

따라서 부등식 $f'(m)\times f'(m+2)<0$을 만족시키는 모든 정수 m의 값은 1, 5

이고 그 합은

$1+5=6$

59. 정답 64

두 곡선 $y=k\log_2 x$, $y=2^{\frac{x}{k}}$은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 A의 좌표를 (a, a) $(a>0)$이라 하자.

곡선 $y=k\log_2 x$와 x축이 만나는 점 C의 좌표는 $(1, 0)$이므로 직선 AC의 기울기는

$\frac{a}{a-1}$

이므로 직선 AC에 수직인 직선의 기울기는

$\frac{1-a}{a}$

직선 AD의 방정식은 $y=\frac{1-a}{a}(x-a)+a$

이므로 점 D의 y좌표는 $2a-1$이다.

점 C를 지나고 직선 AD에 평행한 직선의 방정식은

$u=\frac{1-a}{a}(x-1)$

이므로 점 E의 y좌표는

$\frac{a-1}{a}$

이때, $\overline{OD}=2a-1$, $\overline{OE}=\frac{a-1}{a}$이고, $\overline{OD}=\frac{28}{3}\overline{OE}$이므로

$2a-1=\frac{28}{3}\times\frac{a-1}{a}$

$6a^2-31a+28=0$

$(a-4)(6a-7)=0$

$a=4$ 또는 $a=\frac{7}{6}$

이때 점 A의 x좌표가 점 B의 x좌표보다 크므로

$a=4$

점 A의 좌표가 $(4, 4)$이므로

$\overline{OA}=4\sqrt{2}$

또, $4=k\log_2 4$에서

$k=2$

따라서

$k\times\overline{\mathrm{OA}}^2=2\times(4\sqrt{2})^2=64$

60. 정답 151

$f'(x)=4x^3+4ax^2-8a^2x$

$\quad=4x(x+2a)(x-a)$

(i) $a=0$일 때

$f(x)=x^4$이고

$$g(t)=\begin{cases} f(t) & (t<0) \\ 0 & (t\ge 0)\end{cases}$$

이므로 모든 실수 b에 대하여

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(b+h)-g(b)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{g(b+h)-g(b)}{h}$$

이다. 즉, 집합 A의 원소의 개수가 1이라는 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $a>0$일 때

$f'(x)=0$에서

$x=-2a$ 또는 $x=0$ 또는 $x=a$

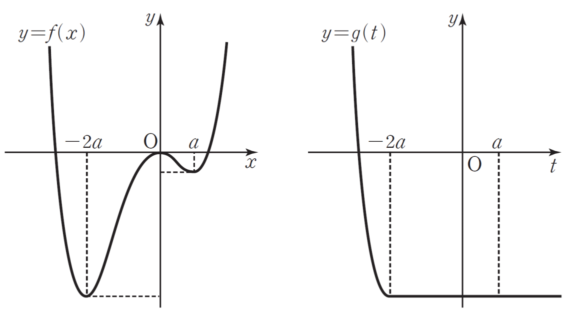
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-2a$	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{32}{3}a^4$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{5}{3}a^4$	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=-2a$, $x=a$에서 극소이고 $x=0$에서 극대이다.

이때, $f(-2a)<f(a)<0$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(t)$의 그래프는 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

이때,

$$g(t)=\begin{cases} f(t) & (t<-2a) \\ f(-2a) & (t\ge -2a)\end{cases}$$

이므로 모든 실수 b에 대하여

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(b+h)-g(b)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{g(b+h)-g(b)}{h}$$

이다. 즉, 집합 A의 원소의 개수가 1이라는 조건을 만족시키지 못한다.

(iii) $a<0$일 때,

$f'(x)=0$에서

$x=a$ 또는 $x=0$ 또는 $x=-2a$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	0	$\cdots$	$-2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{5}{3}a^4$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{32}{3}a^4$	$\nearrow$

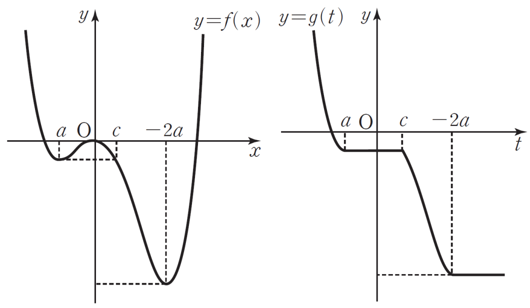
함수 $f(x)$는 $x=a$, $x=-2a$에서 극소이고 $x=0$에서 극대이다.

$f(-2a)<f(a)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여

$f(a)=f(c)\ \ (0<c<-2a)$

인 상수 c가 1개 존재한다.

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(t)$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

이때,

$$g(t)=\begin{cases} f(t) & (t<a \text{ 또는 } c<t<-2a) \\ f(a) & (a\le t\le c) \\ f(-2a) & (t\ge -2a)\end{cases}$$

이다.

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(c+h)-g(c)}{h}=0$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g(c+h)-g(c)}{h}<0$$

이므로

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(c+h)-g(c)}{h}\ne\lim_{h\to 0+}\frac{g(c+h)=g(c)}{h}$$

한편, $b\ne c$인 모든 실수 b에 대하여

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(b+h)-g(b)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{g(b+h)-g(b)}{h}$$

이다.

즉, $A=\{c\}$이므로 집합 A의 원소의 개수는 1이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여

$a<0$,

$$g(t)=\begin{cases} f(t) & (t<a \text{ 또는 } c<t<-2a) \\ f(a) & (a\le t\le c) \\ f(-2a) & (t\ge -2a)\end{cases}$$

함수 $g(t)$의 최솟값이 -54이므로

$f(-2a)=-54$

즉, $-\dfrac{32}{3}a^4=-54$에서

$a^4=\dfrac{81}{16}$

$a<0$이므로

$a=-\dfrac{3}{2}$

이때, $f(x)=x^4-2x^3-9x^2$이므로

$|f(a)|=\left|f\left(-\dfrac{3}{2}\right)\right|=\left|-\dfrac{135}{16}\right|=\dfrac{135}{16}$

따라서 $p=16$, $q=135$이므로

$p+q=16+135=151$

61. 정답 ①

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)-5\}dx=\int_{-1}^{1}(3x^2-12x+7)dx$$
$$=2\int_0^1(3x^2+7)dx$$
$$=2\Big[x^3+7x\Big]_0^1$$
$$=2\times8=16$$

$$\int_0^2 f(x)dx-\int_a^2 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^a f(x)dx$$
$$=\int_0^a f(x)dx$$
$$=\int_0^a(3x^2-12x+12)dx$$
$$=\Big[x^3-6x^2+12x\Big]_0^a$$
$$=a^3-6a^2+12a$$

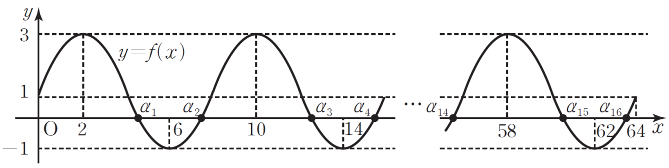
$\displaystyle\int_{-1}^{1}\{f(x)-5\}dx=\int_0^2 f(x)dx-\int_a^2 f(x)dx$에서

$a^3-6a^2+12a-16=0$, $(a-4)(a^2-2a+4)=0$

모든 실수 a에 대하여 $a^2-2a+4>0$이므로 구하는 상수 a의 값은 4이다.

62. 정답 ②

$f(x)=2\sin\dfrac{\pi}{4}x+1$이라 하면 함수 $f(x)$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8$이고 함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



방정식 $f(x)=0$의 근을 작은 것부터 차례로 α_1, α_2, $\cdots$, α_{16}이라 하면 삼각함수의 그래프의 대칭성에 의하여

$\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}=6$, $\dfrac{\alpha_3+\alpha_4}{2}=14$, $\cdots$, $\dfrac{\alpha_{15}+\alpha_{16}}{2}=62$이므로

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{16}=2(6+14+\cdots+62)$$
$$=2\sum_{k=1}^{8}(8k-2)$$
$$=2\left(8\times\frac{8\times9}{2}-2\times8\right)$$
$$=2(288-16)$$
$$=544$$

63. 정답 ①

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 $v_1(t)$, $v_2(t)$라고 하면

$v_1(t)=x_1{}'(t)=3t^2-4t+4$

$v_2(t)=x_2{}'(t)=2t+1$

$v_1(t)=v_2(t)$에서

$3t^2-4t+4=2t+1$

$3t^2-6t+3=0$

$3(t-1)^2=0$

따라서 $t=1$일 때 두 점 P, Q의 속도가 같아진다.

$t=1$일 때 두 점 P, Q의 위치는 각각

$x_1(1)=1-2+4=3$, $x_2(1)=1+1=2$

이므로 두 점 P, Q 사이의 거리는

$|3-2|=1$

64. 정답 ⑤

수열 $\{b_n\}$의 공비를 r $(r\neq0)$이라 하면 $b_n=8r^{n-1}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{b_{k+1}}{a_k}=n^2$에서 $n=1$일 때, $\dfrac{b_2}{a_1}=\dfrac{8r}{4}=1$이므로 $r=\dfrac{1}{2}$

$n=2$일 때, $1+\dfrac{b_3}{a_2}=1+\dfrac{2}{a_2}=4$이므로 $a_2=\dfrac{2}{3}$

$n=3$일 때, $4+\dfrac{b_4}{a_3}=4+\dfrac{1}{a_3}=9$이므로 $a_3=\dfrac{1}{5}$

$n=4$일 때, $9+\dfrac{b_5}{a_4}=9+\dfrac{1}{2a_4}=16$이므로 $a_4=\dfrac{1}{14}$

$n=5$일 때, $16+\dfrac{b_6}{a_5}=16+\dfrac{1}{4a_5}=25$이므로 $a_5=\dfrac{1}{36}$

따라서 $\dfrac{a_2}{a_5}=\dfrac{2}{3}\times36=24$

다른 풀이

수열 $\{b_n\}$의 공비를 r $(r\neq0)$이라 하면 $b_n=8r^{n-1}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{b_{k+1}}{a_k}=S_n$이라 하자.

$n=1$일 때, $\dfrac{b_2}{a_1}=\dfrac{8r}{4}=1$이므로 $r=\dfrac{1}{2}$

$S_n - S_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1\ (n \geq 2)$이고 $\dfrac{b_2}{a_2} = 1$이므로 모든

자연수 n에 대하여 $\dfrac{b_{n+1}}{a_n} = 2n-1$

따라서 $a_n = \dfrac{8\left(\frac{1}{2}\right)^n}{2n-1} = \dfrac{8}{2^n(2n-1)}$ 이므로

$$\frac{a_2}{a_5} = \frac{\dfrac{8}{2^2(4-1)}}{\dfrac{8}{2^5(10-1)}} = 2^3 \times 3 = 24$$

65. 정답 ⑤

$4\displaystyle\int_0^x |f(t)|dt = |x-3|f(x)+108$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0 = 3f(0)+108,\ f(0) = -36$ …… ㉠

한편 $g(x) = |x-3|f(x)+108$이라 놓으면

$g(3) = 108$

이고, 주어진 식의 좌변은 $x=3$에서 미분가능하므로 $y=g(x)$도 $x=3$에서 미분가능해야 한다.

즉 $\displaystyle\lim_{x\to 3+}\frac{g(x)-g(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3+}\frac{(x-3)f(x)}{x-3} = f(3)$,

$\displaystyle\lim_{x\to 3-}\frac{g(x)-g(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3-}\frac{-(x-3)f(x)}{x-3} = -f(3)$

이므로 $f(3) = -f(3),\ f(3) = 0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$f(x) = (x-3)(ax^2+bx+12)$

$\quad = ax^3+(b-3a)x^2+(12-3b)x-36$ (단, a, b는 상수)

로 놓으면

$f'(x) = 3ax^2+2(b-3a)x+(12-3b)$

에서 상수 a, b를 구하자.

주어진 식을 x에 대하여 미분하면

$4|f(x)| = \begin{cases} f(x)+(x-3)f'(x) & (x \geq 3) \\ -f(x)+(3-x)f'(x) & (x < 3) \end{cases}$ …… ㉢

$x=0$에서 $4|f(0)| = -f(0)+3f'(0)$이므로

$4|-36| = -(-36)+3f'(0)$,

$108 = 3f'(0)$

$f'(0) = 36$

이므로 $f'(0) = 12-3b = 36,\ -3b = 24,\ b = -8$

즉 $f(x) = ax^3-(3a+8)x^2+36x-36$

$f'(x) = 3ax^2-(6a+16)x+36$이다.

(ⅰ) ㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면

$4|f(1)| = -f(1)+2f'(1)$이고

$f(1) = -2a-8,\ f'(1) = -3a+20$이므로

$4|2a+8| = (2a+8)+2(-3a+20) = -4a+48$

$|2a+8| = -a+12$에서 $a \geq -4$이면

$2a+8 = -a+12,\ 3a = 4,\ a = \dfrac{4}{3},\ a < -4$이면

$-2a-8 = -a+12,\ a = -20$

(ⅱ) ㉢의 양변에 $x=2$를 대입하면

$4|f(2)| = -f(2)+f'(2)$이고

$f(2) = -4a+4,\ f'(2) = 4$이므로

$4|-4a+4| = (4a-4)+4 = 4a$

$|-4a+4| = a$에서 $a \geq 1$이면

$4a-4 = a,\ 3a = 4,\ a = \dfrac{4}{3}$

$a < 1$이면 $-4a+4 = a,\ 5a = 4,\ a = \dfrac{4}{5}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a = \dfrac{4}{3}$

따라서 $f(x) = \dfrac{4}{3}x^3-12x^2+36x-36 = \dfrac{4}{3}(x-3)^3$이므로 $f(6) = 36$

66. 정답 ④

원주각의 성질에 의하여

$\angle CDB = \angle CAB,\ \angle ACD = \angle ABD$

따라서 삼각형 DCE와 삼각형 ABE는 서로 닮은 도형이다.

삼각형 DCE와 삼각형 ABE의 넓이의 비가 $4:5$이므로

삼각형 DCE와 삼각형 ABE의 닮음비는 $2:\sqrt{5}$이다. …… ㉠

한편, 삼각형 ADB와 삼각형 AEB의 외접원의 반지름의 길이가 같으므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle ADB)} = \frac{\overline{AB}}{\sin(\angle AEB)}$$

따라서 $\sin(\angle ADB) = \sin(\angle AEB)$

그러므로 $\angle AEB = \theta\ (0 < \theta < \pi)$라 하면

$\angle ADB = \theta$ 또는 $\angle ADB = \pi - \theta$

이때, $\angle ADB + \angle DAE = \angle AEB = \theta$이므로 $\angle ADB \neq \theta$

따라서 $\angle ADB = \pi - \theta$,

또한 $\angle AED = \pi - \angle AEB$이므로 $\angle ADB = \angle AED$

따라서 삼각형 ADE는 $\overline{AD} = \overline{AE}$인 이등변삼각형이다.

$\overline{DE} = x,\ \overline{CE} = y$라 하자.

㉠에서 $\overline{AE} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}x$이므로

점 A에서 직선 DE에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\cos(\pi-\theta) = \cos(\angle AEH) = \frac{\overline{EH}}{\overline{AE}} = \frac{\frac{1}{2}x}{\frac{\sqrt{5}}{2}x} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$\cos\theta = -\cos(\pi-\theta) = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\angle \mathrm{DEC}=\angle \mathrm{AEB}=\theta$이므로 삼각형 DCE에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{CD}}^2=x^2+y^2-2xy\cos\theta$

$=x^2+y^2+\frac{2\sqrt{5}}{5}xy=13$ ...... ㉡

삼각형 DCE의 넓이가 2이므로

$\triangle\mathrm{DCE}=\frac{1}{2}xy\sin\theta=\frac{1}{2}xy\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=2$

$y=\frac{2\sqrt{5}}{x}$ ...... ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $x^2+\frac{20}{x^2}+4=13$

양변에 x^2을 곱하고 모든 항을 좌변으로 이항하면

$x^4-9x^2+20=0,\ (x^2-4)(x^2-5)=0$

x는 양수이므로 $\begin{cases}x=2\\y=\sqrt{5}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=\sqrt{5}\\y=2\end{cases}$

조건에 의하여 $x<y$이므로 $\begin{cases}x=2\\y=\sqrt{5}\end{cases}$

따라서 삼각형 ADE의 넓이는

$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{DE}}\times\overline{\mathrm{AE}}\times\sin(\angle\mathrm{AED})=\frac{1}{2}x\times\frac{\sqrt{5}}{2}x\times\sin(\pi-\theta)$

$=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$=2$

67. 정답 ⑤

$x\le0$에서 함수 $y=h(x)$의 그래프가 점 $(-a,\ 0)$을 지나며, $h'(-a)\neq0$이므로 함수 $|h(x)|$는 $x=-a$에서 미분가능하지 않다.

조건 (가)에 의하여 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

$f'(x)=4x^3+3ax^2=x^2(4x+3a)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{3}{4}a$ 또는 $x=0$

$\int_{-2}^{0}h(x)dx=\left[\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{4}ax^4\right]_{-2}^{0}=\frac{32}{5}-4a$

(ⅰ) $a>\frac{8}{5}$일 때

$\int_{-2}^{0}h(x)dx<0$이므로 조건 (가), (나)에서 $\int_{-2}^{2}h(x)dx=0$을 만족하려면 $g'(x)=3x\left(x+\frac{3}{4}a\right)$이고, 함수 $y=g(x)$의 그래프가 원점을 지나야 하므로 $g(x)=x^3+\frac{9}{8}ax^2$

$\int_{-2}^{2}h(x)dx=\int_{-2}^{0}h(x)dx+\int_{0}^{2}h(x)dx$

$=\int_{-2}^{0}(x^4+ax^3)dx+\int_{0}^{2}\left(x^3+\frac{9}{8}ax^2\right)dx$

$=\left[\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{4}ax^4\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{8}ax^3\right]_{0}^{2}$

$=\left(\frac{32}{5}-4a\right)+(4+3a)=-a+\frac{52}{5}=0$

따라서 $a=\frac{52}{5}$

(ⅱ) $a=\frac{8}{5}$일 때

$\int_{-2}^{0}h(x)dx=0$이므로 조건 (가), (나)에서 $\int_{-2}^{2}h(x)dx=0$을 만족시키는 함수 $g(x)$는 존재하지 않는다.

(ⅲ) $0<a<\frac{8}{5}$일 때

$\int_{-2}^{0}h(x)dx>0$이므로 조건 (가), (나)에서

$g'(x)=-3x\left(x+\frac{3}{4}a\right)$이고, $g(x)=-x^3-\frac{9}{8}ax^2$

$\int_{-2}^{2}h(x)dx=\int_{-2}^{0}h(x)dx+\int_{0}^{2}h(x)dx$

$=\int_{-2}^{0}(x^4+ax^3)dx+\int_{0}^{2}\left(-x^3-\frac{9}{8}ax^2\right)dx$

$=\left[\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{4}ax^4\right]_{-2}^{0}-\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{8}ax^3\right]_{0}^{2}$

$=\left(\frac{32}{5}-4a\right)-(4+3a)=-7a+\frac{12}{5}=0$

따라서 $a=\frac{12}{35}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 양수 a의 값의 합은

$\frac{52}{5}+\frac{12}{35}=\frac{364+12}{35}=\frac{376}{35}$

68. 정답 28

두 교점 중 제1사분면에 있는 점을 A, 제3사분면에 있는 점을 B라 하자. 선분 AB의 중점이 원점이므로 점 A와 점 B는 원점에 대하여 대칭이다. 점 A의 x좌표를 t $(t>0)$이라 하면 점 B의 x좌표는 $-t$이다. $\mathrm{A}(t,\ a^t-2)$, $\mathrm{B}(-t,\ a^{-t}-2)$에서 점 A와 점 B의 y좌표는 절댓값이 같고 부호가 서로 다르므로

$a^t-2=-(a^{-t}-2)$

따라서 $a^t-4+a^{-t}=0$,

양변에 a^t를 곱하면

$a^{2t}-4a^t+1=0$

$a^t=X$라 하면

$X^2-4X+1=0$,

$t>0$이므로 $X>1$이고 $X=2+\sqrt{3}$

즉, $a^t=2+\sqrt{3}$이므로

점 A의 좌표는 $(t,\ 2+\sqrt{3}-2)$ 즉, $(t,\ \sqrt{3})$

점 A는 직선 $y=2\sqrt{3}x$ 위의 점이므로

$t=\dfrac{1}{2}$

$a^t=2+\sqrt{3}$에서

$a^{\frac{1}{2}}=2+\sqrt{3}$

양변을 제곱하면

$a=(2+\sqrt{3})^2=4+4\sqrt{3}+3=7+4\sqrt{3}$

따라서 $p=7$, $q=4$이므로

$pq=28$

69. 정답 28

조건 (가)에서는 $g(x)$는 $(x-1)^2$을 인수로 가진다.

$g(x)=f(x)f'(x)$이므로 $f(x)$가 k의 값에 따라 $(x-1)^k$을 인수로 갖는 경우와 인수로 갖지 않는 경우를 함께 고려하여 구분해 보자. (단, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$)

(ⅰ) $f(x)$가 $x-1$을 인수로 갖지 않는 경우

$f(x)$는 $x-1$을 인수로 갖지 않으므로 $f'(x)$가 $(x-1)^k$을 인수로 가져야 한다.

따라서 $f'(x)=3(x-1)^2$이므로

$f(x)=(x-1)^3+C$ (단, C는 적분상수, $C\neq 0$)이고

$g(x)=f(x)f'(x)=3(x-1)^2\{(x-1)^3+C\}$에서

$g(0)=3(-1+C)=-3$, $C=0$이므로 가정에 모순이다.

(ⅱ) $f(x)$가 $x-1$을 인수로 갖고, $(x-1)^2$을 인수로 갖지 않는 경우

$f(x)$는 $x-1$을 인수로 가지므로 $f'(x)$가 $x-1$을 인수로 가져야 한다.

$f(x)=(x-1)h_1(x)$ (단, $h_1(1)\neq 0$)로 놓으면

$f'(x)=h_1(x)+(x-1)h_1'(x)$, 이때 $f'(1)\neq 0$이므로 모순이다.

(ⅲ) $f(x)$가 $(x-1)^2$을 인수로 갖고, $(x-1)^3$을 인수로 갖지 않는 경우

$f(x)$는 $(x-1)^2$을 인수로 가지므로 $f(x)$의 1이 아닌 다른 한 근을 a라 놓으면

$f(x)=(x-1)^2(x-a)$

$f'(x)=2(x-1)(x-a)+(x-1)^2=(x-1)(3x-2a-1)$

$g(0)=f(0)f'(0)=-a(-1)(-2a-1)=-3$

$2a^2+a-3=0$, $(2a+3)(a-1)=0$, $a=-\dfrac{3}{2}$

$f(x)=(x-1)^2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)$, $f'(x)=(x-1)(3x+2)$이므로

$g(x)=(x-1)^3\left(x+\dfrac{3}{2}\right)(3x+2)$

$g(x)=0$의 실근은

$x=1$ 또는 $x=-\dfrac{3}{2}$ 또는 $x=-\dfrac{2}{3}$

이므로 세 점 $(1,\ 0)$, $\left(-\dfrac{3}{2},\ 0\right)$, $\left(-\dfrac{2}{3},\ 0\right)$은 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=0$의 교점이다.

이때 $h(0)=3\geq 2$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(ⅳ) $f(x)$가 $(x-1)^3$을 인수로 갖는 경우

$f(x)=(x-1)^3$, $f'(x)=3(x-1)^2$, $g(x)=3(x-1)^5$

실수 t에 대하여 $3(x-1)^5=t$의 실근의 개수는 1이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 1이며 $h(t)\geq 2$인 t가 존재하지 않으므로 조건 (나)에 모순이다.

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여

$a=-\dfrac{3}{2}$이고 $g(x)=(x-1)^3\left(x+\dfrac{3}{2}\right)(3x+2)$이므로

$g(2)=\left(2+\dfrac{3}{2}\right)(3\times 2+2)=\dfrac{7}{2}\times 8=28$

70. 정답 97

집합 A의 원소가 유한개이므로 수열 $\{a_n\}$은 어떤 특정한 항부터 반복되고, 반복되는 수의 개수는 많아야 3이다.

(ⅰ) 1개의 수가 반복되는 경우

$n(A)=3$이므로 a_1, a_2, a_3은 모두 다른 수이고 셋째 항부터 같은 수가 반복된다.

즉, 반복되는 수를 α라고 하면

$a_1\to a_2\to\alpha\to\alpha\to\cdots$로 나타난다.

① α가 홀수이면 $\alpha=\dfrac{\alpha^2-\alpha}{2}$에서 $\alpha=3$

$a_2\neq 3$이고 $a_3=\alpha=3$이 되도록 하는 a_2의 값은 6

$a_2=6$이 되도록 하는 a_1의 값은 12이다.

② α가 0 또는 짝수이면 $\alpha=\dfrac{1}{2}\alpha$에서 $\alpha=0$

$a_2\neq 0$이고 $a_3=\alpha=0$이 되도록 하는 a_2의 값은 1

$a_2=1$이 되도록 하는 a_1의 값은 2이다.

(ⅱ) 서로 다른 2개의 수가 반복되는 경우

반복되는 두 수를 α, β라고 하자. 즉,

$\cdots\to\alpha\to\beta\to\alpha\to\beta\to\alpha\to\cdots$로

α와 β가 번갈아 나타난다고 하자.

① α, β가 모두 0 또는 짝수인 경우

$\alpha=\dfrac{1}{2}\beta$, $\beta=\dfrac{1}{2}\alpha$이므로 $\alpha=\beta=0$이 되어 모순이다.

② α, β 중 하나는 홀수, 다른 하나는 0 또는 짝수인 경우

α가 홀수, β가 0 또는 짝수라고 하자.

$\alpha\to\dfrac{\alpha^2-\alpha}{2}\to\dfrac{\alpha^2-\alpha}{4}\to\cdots$

에서 $\alpha=\dfrac{\alpha^2-\alpha}{4}$

따라서 $\alpha^2-5\alpha=0$이고 $\alpha=5$, $\beta=\dfrac{5^2-5}{2}=10$

$n(A)=3$이기 위해서는 $a_1\neq 5$, $a_1\neq 10$이고,

$a_1\to 5\to 10\to 5\to 10\to 5\to\cdots$

또는

$a_1 \to 10 \to 5 \to 10 \to 5 \to 10 \to \cdots$

과 같이 나타나야 한다.

5 또는 10이 아니고 $a_1 \to 5$인 a_1의 값은 존재하지 않는다. 5 또는 10이 아니고 $a_1 \to 10$인 a_1의 값은 20이다.

③ α, β가 모두 홀수인 경우

$$\alpha \to \frac{\alpha^2-\alpha}{2} \to \frac{\left(\frac{\alpha^2-\alpha}{2}\right)^2 - \frac{\alpha^2-\alpha}{2}}{2} \to \cdots$$

에서 $\dfrac{\left(\frac{\alpha^2-\alpha}{2}\right)^2 - \frac{\alpha^2-\alpha}{2}}{2} = \alpha$

$\alpha^4 - 2\alpha^3 - \alpha^2 - 6\alpha = 0$

$\alpha(\alpha-3)(\alpha^2+\alpha+2) = 0$

따라서 $\alpha = 3$

이 경우, $\beta + \dfrac{3^2-3}{2} = 3 = \alpha$이므로 모순이다.

(ⅲ) 서로 다른 3개의 수가 반복되는 경우

반복되는 세 수를 나타나는 순서대로 α, β, γ라 하자. 즉

$\cdots \to \alpha \to \beta \to \gamma \to \alpha \to \beta \to \gamma \to \alpha \to \cdots$

로 나타난다고 하자.

① 세 수가 모두 0 또는 짝수인 경우

$\alpha \to \dfrac{\alpha}{2} \to \dfrac{\alpha}{4} \to \dfrac{\alpha}{8} \to \cdots$에서 $\alpha = \dfrac{\alpha}{8}$

$\alpha = 0$, $\beta = \dfrac{\alpha}{2} = 0$, $\gamma = \dfrac{\beta}{2} = 0$이므로 $\alpha = \beta = \gamma$가 되어 모순이다.

② α, β, γ 중 하나는 홀수, 나머지 두 수는 0 또는 짝수인 경우

α가 홀수, β와 γ가 0 또는 짝수라고 하자.

$$\alpha \to \frac{\alpha^2-\alpha}{2} \to \frac{\alpha^2-\alpha}{4} \to \frac{\alpha^2-\alpha}{8} \to \cdots$$

에서 $\alpha = \dfrac{\alpha^2-\alpha}{8}$

따라서 $\alpha^2 - 9\alpha = 0$이고

$\alpha = 9$, $\beta = \dfrac{9^2-9}{2} = 36$, $\gamma = \dfrac{36}{2} = 18$

$n(A) = 3$이 되려면

$9 \to 36 \to 18 \to 9 \to \cdots$ 또는

$36 \to 18 \to 9 \to 36 \to \cdots$ 또는

$18 \to 9 \to 36 \to 18 \to \cdots$

과 같이 나타나야 하므로 $a_1 = 9$ 또는 $a_1 = 36$ 또는 $a_1 = 18$

③ α, β, γ 중 두 수는 홀수, 다른 하나는 0 또는 짝수인 경우

α, β가 홀수, γ가 0 또는 짝수라고 하자.

(ⅰ)에 의하여

α가 1인 경우: $1 \to 0 \to 0 \to \cdots$

α가 3인 경우: $3 \to 3 \to 3 \to \cdots$

이 되어 $\alpha \neq 1$, $\alpha \neq 3$이다. 그러므로

$\beta = \dfrac{\alpha^2-\alpha}{2} = \alpha\left(\dfrac{\alpha-1}{2}\right) \geq 2\alpha$이고, 같은 방법으로

$\gamma \geq 2\beta$이다.

또한, $\alpha = \dfrac{\gamma}{2}$이므로 $\alpha = \dfrac{\gamma}{2} \geq \beta \geq 2\alpha$에서 $\alpha = 0$이 되어 α가 홀수라는 조건을 만족시키지 않는다. 따라서 이 조건을 만족하는 α, β, γ는 존재하지 않는다.

④ α, β, γ가 모두 홀수인 경우

앞의 ③과 같은 이유로 α, β, γ는 모두 1 또는 3이 아니고 $2\alpha \leq \beta$, $2\beta \leq \gamma$, $2\gamma \leq \alpha$이다.

따라서 $\alpha \leq \dfrac{\beta}{2} \leq \dfrac{\gamma}{4} \leq \dfrac{\alpha}{8}$에서 $\alpha = 0$이 되어 α가 홀수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 가능한 a_1의 값의 합은

$12 + 2 + 20 + 9 + 36 + 18 = 97$

71. 정답 ④

$f(x) = x^4 - 6x^2 - 8x + k$라 하자.

주어진 조건을 만족시키려면 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 0$이어야 한다.

이때,

$f'(x) = 4x^3 - 12x - 8 = 4(x+1)^2(x-2)$

이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 조사하면 $f(x)$는 $x = 2$에서 극소이면서 최소이다.

즉, $f(2) \geq 0$이어야 하므로

$f(2) = 16 - 6 \times 4 - 8 \times 2 + k$

$\quad = k - 24 \geq 0$

따라서 $k \geq 24$이므로 구하는 실수 k의 최솟값은 24이다.

72. 정답 ②

$14^3 = 2744$, $15^3 = 3375$이므로

조건을 만족시키는 모든 자연수 x의 개수는

$$\sum_{k=1}^{6} \{(2k+1)^3 - (2k)^3 + 1\} + (3000 - 2744 + 1)$$

$$= \sum_{k=1}^{6} (12k^2 + 6k + 2) + 257$$

$$= 12 \times \frac{6 \times 7 \times 13}{6} + 6 \times \frac{6 \times 7}{2} + 2 \times 6 + 257$$

$$= 1092 + 126 + 12 + 257$$

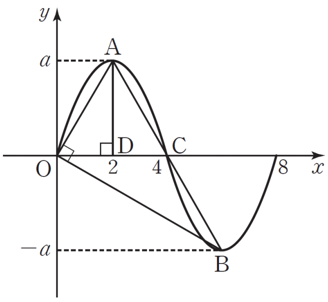
$$= 1487$$

73. 정답 ③

함수 $y = a\sin\dfrac{\pi}{4}x$는 주기가

$\dfrac{2\pi}{\dfrac{\pi}{4}}=8$

인 주기함수이므로 $0 \le x \le 8$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



원점 O가 선분 AB를 지름으로 하는 원 위에 있으므로

$\angle \mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$

이고, 위 그림과 같이 좌표가 $(4,\ 0)$인 점을 C라 하면

$\overline{\mathrm{AO}}=\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$

이므로

$\overline{\mathrm{AO}}:\overline{\mathrm{AB}}=1:2$

이다. 즉, 삼각형 AOB는 $\angle \mathrm{OAB}=\dfrac{\pi}{3}$인 직각삼각형이고, 삼각형 AOC는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이다.

따라서 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 D라 하면

$$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AO}}\sin\frac{\pi}{3}$$
$$=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=2\sqrt{3}$$

이므로

$a=2\sqrt{3}$

74. 정답 ③

$$g(x)=3+\int_4^x \{f(t)\}^2\{f(x)-f(t)\}dt$$
$$=3+f(x)\int_4^x \{f(t)\}^2 dt-\int_4^x \{f(t)\}^3 dt$$

이므로

$$g'(x)=f'(x)\int_4^x \{f(t)\}^2 dt+f(x)\{f(x)\}^2-\{f(x)\}^3$$
$$=f'(x)\int_4^x \{f(t)\}^2 dt$$

이때

$f'(x)=x^2-10x+16=(x-2)(x-8)$

이고, 모든 실수 t에 대하여 $\{f(t)\}^2 \ge 0$이므로 $g'(x)=0$에서

$x=2$ 또는 $x=4$ 또는 $x=8$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$	8	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서

$k=g(4)=3$

이므로

$$f(k)=f(3)$$
$$=\frac{1}{3}\times 3^3-5\times 3^2+16\times 3+1$$
$$=13$$

75. 정답 ②

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고

$f'(0)=f'(4)=0$

이므로

$f'(x)=3x(x-4)=3x^2-12x$

로 놓을 수 있다.

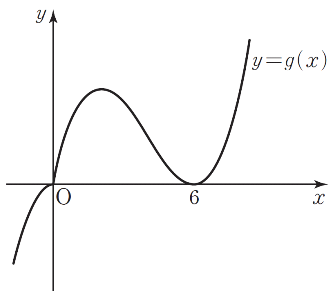
즉, $f(x)=x^3-6x^2+C$ (단, C는 적분상수)

이때, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 $x \le 0$일 때에는 점 $(0,\ f(0))$이 원점에 오도록 y축의 방향으로 $-f(0)$만큼 평행이동한 것이고, $x>0$일 때에는 점 $(-2,\ f(-2))$가 원점에 오도록 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 $-f(-2)$만큼 평행이동한 것이다.

그런데

$f(-2)=f(4)=-32+C$

이고, 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극소이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $x=6$에서 x축에 접한다. 즉, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\int_0^6 g(x)dx$의 값과 같고, 이것은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=f(-2)$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

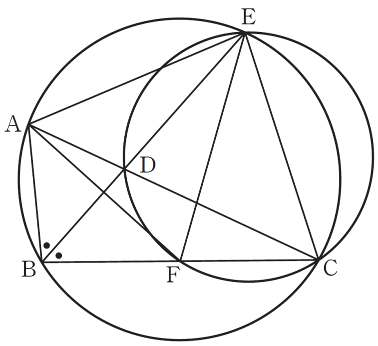
따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^6 g(x)dx=\int_{-2}^4 \{f(x)-f(-2)\}dx$$
$$=\int_{-2}^4 \{x^3-6x^2+C-(-32+C)\}dx$$
$$=\int_{-2}^4 (x^3-6x^2+32)dx$$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+32x\right]_{-2}^{4}$

$=108$

76. 정답 ①



삼각형 DCE의 외접원에서 호 DF에 대한 원주각의 크기가 같으므로

$\angle DEF=\angle DCF$ …… ㉠

또, 삼각형 ABC의 외접원에서 호 AB에 대한 원주각의 크기가 같으므로

$\angle AEB=\angle ACB$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\angle DCF=\angle ACB$이므로

$\angle DEF=\angle AEB$

이때 $\angle ABE=\angle FBE$이고 선분 BE는 공통이므로

$\triangle ABE\equiv\triangle FBE$

즉, $\overline{BF}=\overline{AB}=3$

한편, 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle ABC)=\frac{3^2+6^2-7^2}{2\times3\times6}=-\frac{1}{9}$

이므로 삼각형 ABF에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AF}^2=3^2+3^2-2\times3\times3\times\left(-\frac{1}{9}\right)$

$=20$

따라서 구하는 선분 AF의 길이는 $2\sqrt{5}$이다.

77. 정답 ④

ㄱ. $g(x)=x^2+kx-2$에서

$g'(x)=2x+k$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=-\frac{k}{2}$에서 극소이고 극솟값은

$g\left(-\frac{k}{2}\right)=\frac{k^2}{4}-\frac{k^2}{2}-2=-\frac{k^2}{4}-2<0$

이다.

그러므로 함수 $g(x)$는 음수인 극솟값을 갖는다. (참)

ㄴ. 방정식 $x^2+kx-2=0$의 두 실근이 α, β이면

$\alpha^2-2=-k\alpha$, $\beta^2-2=-k\beta$

이고, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=-2$

이때

$f(\alpha)=\alpha^3-2\alpha+2k$

$=\alpha(\alpha^2-2)+2k$

$=\alpha(-k\alpha)+2k$

$=k(2-\alpha^2)$

$=k\times k\alpha$

$=k^2\alpha$

이고, 마찬가지 방법으로

$f(\beta)=k^2\beta$

이므로

$f(\alpha)f(\beta)=k^4\alpha\beta=-2k^4<0$ (거짓)

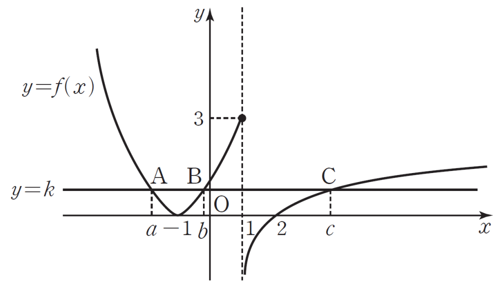
ㄷ. 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 두 실근이 α, β $(\alpha<\beta)$일 때, 구간 $[\alpha, \beta]$에서도 연속이다.

이때 ㄴ에서 $f(\alpha)f(\beta)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(x)=0$인 x가 구간 (α, β)에 적어도 하나 존재한다. 즉, 방정식 $f(x)=0$은 방정식 $g(x)=0$의 두 실근 사이에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

78. 정답 63

함수 $y=2^{|x+1|}-1$의 그래프는 함수 $y=2^{|x|}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이고, 함수 $y=\log_4(x-1)$의 그래프는 함수 $y=\log_4 x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$f(1)=3$이므로 직선 $y=k$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 세 점에서 만나려면 $0<k\le3$이어야 한다.

이때 직선 $y=k$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 서로 다른 세 점을 A, B, C라 하고, 세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 a, b, c $(a<b<c)$라 하면 두 점 A, B는 직선 $x=-1$에 대하여 서로 대칭이므로

$\frac{a+b}{2}=-1$, 즉 $a+b=-2$

또,

$\log_4(c-1)=k$

이므로

$c = 4^k + 1$

그러므로

$g(k) = a + b + c = 4^k - 1$

$0 < k \leq 3$이므로

$4^0 - 1 < g(k) \leq 4^3 - 1$

즉, $0 < g(k) \leq 63$

따라서 $g(k)$의 값이 될 수 있는 자연수의 개수는 63이다.

79. 정답 324

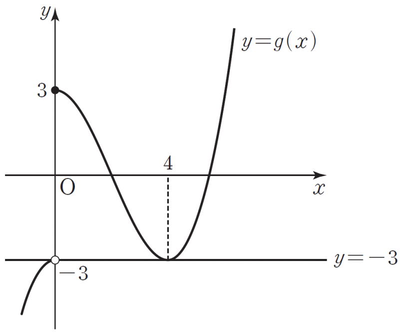
$f(0) = f'(0) = 0$이므로

$f(x) = ax^2(x - b)$ (단, a, b는 상수이고 $a > 0$)

으로 놓을 수 있다.

(i) $b > 0$일 때

방정식 $g(x) = -3$의 실근이 4 하나뿐이려면 함수 $y = g(x)$의 그래프가 다음과 같아야 한다.



즉, 함수 $f(x)$는 $x = 4$에서 극소이고 극솟값이 -6이어야 한다.

이때,

$f'(x) = 2ax(x - b) + ax^2$

이므로 $f'(4) = 0$에서

$8a(4 - b) + 16a = 0$

$a > 0$이므로

$4 - b + 2 = 0$

$b = 6$

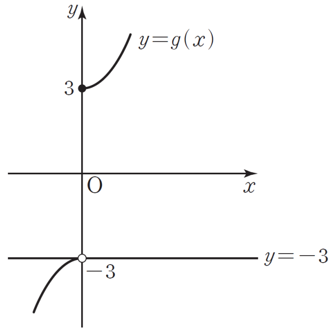
$f(4) = -6$에서

$16a(4 - 6) = -6$

$a = \dfrac{3}{16}$

(ii) $b = 0$일 때

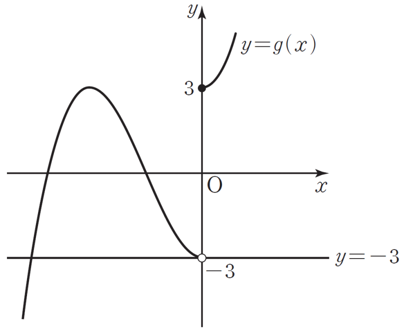
함수 $y = g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때 방정식 $g(x) = -3$이 실근을 갖지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $b < 0$

함수 $y = g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때 방정식 $g(x) = -3$이 4를 근으로 갖지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여

$a = \dfrac{3}{16}$, $b = 6$

이므로

$f(x) = \dfrac{3}{16}x^2(x - 6)$

따라서 함수 $y = f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 S일 때,

$$\begin{aligned} 16S &= 16\int_0^6 |f(x)|dx \\ &= \int_0^6 3(6x^2 - x^3)dx \\ &= 3\left[2x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^6 \\ &= 3(432 - 324) \\ &= 3 \times 108 \\ &= 324 \end{aligned}$$

80. 정답 534

집합 A의 원소의 개수가 6이 되려면 어떤 항 이후로 같은 값들이 반복되어야 한다.

(i) 값이 1 또는 4인 항이 있는 경우

$a_n = 1$이면 $a_{n-1} = 4$, $a_{n+1} = 4$이므로 1, 4가 반복된다.

이때 집합 A의 원소의 개수가 6이 되려면 a_1, a_2, a_3, a_4는 1,

4가 아닌 서로 다른 네 수이고, $a_5=4$, $a_6=1$이어야 한다.

$a_5=4$이고 $a_4 \neq 1$이므로 $a_4=16$이고,

$a_3=13$ 또는 $a_3=64$

$a_3=13$이면 $a_2=10$ 또는 $a_2=52$

$a_3=64$이면 $a_2=61$

$a_2=10$이면 $a_1=7$ 또는 $a_1=40$

$a_2=52$이면 $a_1=49$

$a_2=61$이면 $a_1=58$

그러므로 이 경우 조건을 만족시키는 a_1의 값은

7, 40, 49, 58

이므로 그 합은 154이다.

(ii) 값이 2인 항이 있는 경우

$a_n=2$이면 $a_{n-1}=8$, $a_{n+1}=5$, $a_{n+2}=8$이므로 2, 5, 8이 반복된다.

이때 집합 A의 원소의 개수가 6이 되려면 a_1, a_2, a_3은 2, 5, 8이 아닌 서로 다른 세 수이어야 한다.

㉠ $a_4=5$, $a_5=8$, $a_6=2$인 경우

$a_4=5$, $a_3 \neq 2$이므로 $a_3=20$이고

$a_2=17$ 또는 $a_2=80$

$a_2=17$이면 $a_1=14$ 또는 $a_1=68$

$a_2=80$이면 $a_1=77$

㉡ $a_4=8$, $a_5=2$, $a_6=5$인 경우

$a_4=8$, $a_3 \neq 5$이므로 $a_3=32$, $a_2=29 a_1=26$

그러므로 이 경우 조건을 만족시키는 a_1의 값은

14, 68, 7726

이므로 그 합은 185이다.

(iii) 값이 3인 항이 있는 경우

$a_n=3$이면 $a_{n-1}=12$, $a_{n+1}=6$, $a_{n+2}=9$, $a_{n+3}=12$이므로 3, 6, 9, 12가 반복된다.

이때 집합 A의 원소의 개수가 6이 되려면 a_1, a_2는 3, 6, 9, 12가 아닌 서로 다른 두 수이어야 한다.

㉠ $a_3=6$, $a_4=9$, $a_5=12$, $a_6=3$인 경우

$a_3=6$, $a_2 \neq 3$이므로 $a_2=24$이고

$a_1=21$ 또는 $a_1=96$

㉡ $a_3=9$, $a_4=12$, $a_5=6$, $a_6=6$인 경우

$a_3=9$, $a_2 \neq 6$이므로 $a_2=36$, $a_1=33$

㉢ $a_3=12$, $a_4=3$, $a_5=6$, $a_6=9$인 경우

$a_3=12$, $a_2 \neq 9$이므로 $a_2=48$, $a_1=45$

그러므로 이 경우 조건을 만족시키는 a_1의 값은

21, 96, 33, 45

이므로 그 합은 195이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 a_1의 값의 합은

$154+185+195=534$

81. 정답 ②

$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(-1)}{x-3}=4a$에서 $x \to 3$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

$\lim_{x\to 3}\{f(x)-f(-1)\}=f(3)-f(-1)=0$이므로

$f(3)=f(-1)$

이차함수 $f(x)$가 최솟값을 가지므로 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 k라 하면 $k>0$이다.

이때 $f(3)=f(-1)$이므로 이차함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 2를 가지므로

$f(x)=k(x-1)^2+2$

라 둘 수 있다.

이때, $f'(x)=2k(x-1)$이므로

$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(-1)}{x-3}=f'(3)=4k$

$4k=4a$

$k=a$이고 $k>0$이므로 $a>0$

즉, $f(x)=a(x-1)^2+2$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x+2)}{f(x-4)}=\lim_{x\to 2}\frac{a(x+1)^2+2}{a(x-5)^2+2}=\frac{9a+2}{9a+2}=1$$

이므로 $3a=1$에서 $a=\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}(x-1)^2+2$이므로

$f(4)=3+2=5$

82. 정답 ②

$x \geq -k+1$이면 $g(x)=\log_5(x+k)$이고

$f(g(x))=5^{\log_5(x+k)}-k=x$이다.

$-k<x<-k+1$이면 $g(x)=-\log_5(x+k)$이고

$f(g(x))=5^{-\log_5(x+k)}-k=\frac{1}{x+k}-k$이다.

그러므로 $f(g(x))=\begin{cases} x & (x \geq -k+1) \\ \frac{1}{x+k}-k & (-k<x<-k+1) \end{cases}$이다.

$\frac{1}{x+k}-k=k+1$이면 $x=\frac{1}{2k+1}-k$이므로

선분 AB의 길이 $h(k)$는

$$h(k)=k+1-\left(\frac{1}{2k+1}-k\right)=2k+1-\frac{1}{2k+1}=\frac{4k^2+4k}{2k+1}$$

따라서 $h(k)=2$이면

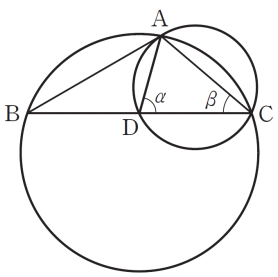
$\dfrac{4k^2+4k}{2k+1}=2$

$4k^2=2$

이때 k는 양의 실수이므로

$k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

83. 정답 ④



$\angle ADC=\alpha$라 하자.

$\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$이므로 $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$

$\overline{AD}=x\ \ (x>1)$라 하면 삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{6})^2=5^2+x^2-2\times5\times x\times\cos\alpha$

$x^2-\dfrac{10}{3}x+1=0$

$3x^2-10x+3=0$

$(3x-1)(x-3)=0$

$x=3\ \ (x>1)$

$\angle ACD=\beta$라 하면 삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\beta=\dfrac{\overline{CD}^2+\overline{CA}^2-\overline{AD}^2}{2\times\overline{CD}\times\overline{CA}}$

$=\dfrac{5^2+(2\sqrt{6})^2-3^2}{2\times5\times2\sqrt{6}}$

$=\dfrac{40}{20\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$\sin\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

삼각형 ADC의 외접원의 반지름의 길이를 r이라 하면

$2r=\dfrac{\overline{AC}}{\sin(\angle ADC)}=2\sqrt{6}\times\dfrac{3}{2\sqrt{2}}=3\sqrt{3}$

$r=\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면

$S_1 : S_2=11 : 3$

$R : r=\sqrt{11} : \sqrt{3}$

$R : \dfrac{3}{2}\sqrt{3}=\sqrt{11} : \sqrt{3}$

$R=\dfrac{3}{2}\sqrt{11}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AB}}{\sin\beta}=2R=3\sqrt{11}$

$\overline{AB}=3\sqrt{11}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{33}$

$\angle ACB=\angle ACD=\beta$이며 $\overline{BC}=y$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{33})^2=y^2+(2\sqrt{6})^2-2\times y\times2\sqrt{6}\times\cos\beta$

$y^2-8y-9=0$

$(y+1)(y-9)=0$

$y=9\ \ (y>0)$

따라서 삼각형 ABC의 넓이 S는

$S=\dfrac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BC}\times\sin\beta$

$=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times9\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$=9\sqrt{2}$

84. 정답 ③

a_4가 홀수라 하면 $a_5=1$에서 $a_4=0$이므로 조건에 맞지 않는다.

a_4가 짝수라 하면 $a_4=2$이다.

$a_4=2$이면 $a_3=1$ 또는 $a_3=4$이다.

(ⅰ) $a_3=1$일 때

$a_2=2$이고 $a_1=1$ 또는 $a_1=4$이다.

(ⅱ) $a_3=4$일 때

$a_2=7$ 또는 $a_2=8$이므로

① $a_2=7$일 때

$a_1=63$ 또는 $a_1=14$이다.

② $a_2=8$일 때

$a_1=127$ 또는 $a_1=16$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 a_1의 값의 합은

$1+4+63+14+127+16=225$

85. 정답 ⑤

점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$x(t)=t^3+at^2+bt$에서

$v(t)=x'(t)=3t^2+2at+b$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 시각 t_1, t_2는 $3t^2+2at+b=0$의 두 양의 실근이다.

이차방정식 $3t^2+2at+b=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$t_1+t_2=-\dfrac{2a}{3}$, $t_1t_2=\dfrac{b}{3}$

$t_2-t_1=4$이므로

$(t_2-t_1)^2=(t_1+t_2)^2-4t_1t_2$

$16=\frac{4}{9}a^2-\frac{4}{3}b$

$a^2=3b+36$ …… ㉠

한편, 시각 $t=1$일 때 점 P의 위치가 25이므로

$1+a+b=25$

즉, $a+b=24$, $b=24-a$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a^2=72-3a+36$

$a^2+3a-108=0$

$(a+12)(a-9)=0$

$t_1+t_2=-\frac{2a}{3}$이므로

$-\frac{2a}{3}>0$, 즉 $a<0$

그러므로 $a=-12$

$a=-12$일 때, $b=36$이므로

$v(t)=3t^2-24t+36=0$

$3(t-2)(t-6)=0$

$t=2$ 또는 $t=6$

따라서 시각 $t=2$에서 $t=6$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_2^6|v(t)|dt&=\int_2^6(-v(t))dt=\left[-t^3+12t^2-36t\right]_2^6\\&=-(6^3-2^3)+12(6^2-2^2)-36(6-2)\\&=-208+12\times32-36\times4\\&=-208+384-144\\&=32\end{aligned}$$

86. 정답 ①

수열 $\{S_n\}$이 최솟값을 가지므로 $d>0$이다.

조건 (가)에서 S_k, S_{k+1}, S_{k+2}가 이 순서대로 다음과 같은 값을 가질 수 있다.

(i) -7, -6, -5인 경우

n	⋯	k	$k+1$	$k+2$	⋯
a_n	⋯		1	1	⋯
S_n	⋯	-7	-6	-5	⋯

$S_{k+1}=S_k+a_{k+1}$에서 $a_{k+1}=1$

$S_{k+2}=S_{k+1}+a_{k+2}$에서 $a_{k+2}=1$

$d=a_{k+2}-a_{k+1}=1-1=0$

이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) -7, -5, -6인 경우

n	⋯	k	$k+1$	$k+2$	⋯
a_n	⋯		2	-1	⋯
S_n	⋯	-7	-5	-6	⋯

$S_{k+1}=S_k+a_{k+1}$에서 $a_{k+1}=2$

$S_{k+2}=S_{k+1}+a_{k+2}$에서 $a_{k+2}=-1$

$d=a_{k+2}-a_{k+1}=-1-2=-3<0$

이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iii) -6, -7, -5인 경우

n	⋯	k	$k+1$	$k+2$	⋯
a_n	⋯	-4	-1	2	⋯
S_n	⋯	-6	-7	-5	⋯

$S_{k+1}=S_k+a_{k+1}$에서 $a_{k+1}=-1$

$S_{k+2}=S_{k+1}+a_{k+2}$에서 $a_{k+2}=2$

$d=a_{k+2}-a_{k+1}=2-(-1)=3$

$a_k=a_1+3(k-1)=-4$에서

$a_1=-1-3k$

$S_k=\frac{k(a_1+a_k)}{2}=\frac{k(a_1-4)}{2}=\frac{k(-5-3k)}{2}=-6$에서

$3k^2+5k-12=0$

$(k+3)(3k-4)=0$

$k=-3$ 또는 $k=\frac{4}{3}$

그러므로 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$은 존재하지 않는다.

(iv) -6, -5, -7인 경우

n	⋯	k	$k+1$	$k+2$	⋯
a_n	⋯		1	-2	⋯
S_n	⋯	-6	-5	-7	⋯

$S_{k+1}=S_k+a_{k+1}$에서 $a_{k+1}=1$

$S_{k+2}=S_{k+1}+a_{k+2}$에서 $a_{k+2}=-2$

$d=a_{k+2}-a_{k+1}=-2-1=-3<0$

이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(v) -5, -6, -7인 경우

n	⋯	k	$k+1$	$k+2$	⋯
a_n	⋯		-1	-1	⋯
S_n	⋯	-5	-6	-7	⋯

$S_{k+1}=S_k+a_{k+1}$에서 $a_{k+1}=-1$

$S_{k+2}=S_{k+1}+a_{k+2}$에서 $a_{k+2}=-1$

$d=a_{k+2}-a_{k+1}=-1-1=0$

이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(vi) -5, -7, -6인 경우

n	$\cdots$	k	$k+1$	$k+2$	$\cdots$
a_n	$\cdots$	-5	-2	1	$\cdots$
S_n	$\cdots$	-5	-7	-6	$\cdots$

$S_{k+1}=S_k+a_{k+1}$에서 $a_{k+1}=-2$

$S_{k+2}=S_{k+1}+a_{k+2}$에서 $a_{k+2}=1$

$d=a_{k+2}-a_{k+1}=1-(-2)=3$

$a_k=a_1+3(k-1)=-5$에서 $a_1=-3k-2$

$S_k=\dfrac{k(a_1+a_k)}{2}=\dfrac{k(a_1-5)}{2}=\dfrac{k(-3k-7)}{2}=-5$에서

$3k^2+7k-10=0$

$(3k+10)(k-1)=0$

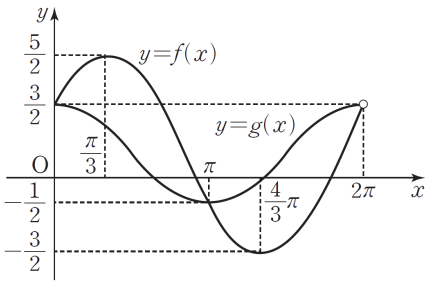
$k=-\dfrac{10}{3}$ 또는 $k=1$

$a_1=S_1=-5$이고 $d=3$이다.

(ⅰ)~(ⅵ)에 의하여 $a_n=3n-8$이므로

$a_5=3\times5-8=7$

87. 정답 ③



$0\le x<2\pi$에서 함수 $f(x)=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}$의 그래프는 함수 $y=2\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{\pi}{6}$만큼, y축의 방향으로 $\dfrac{1}{2}$만큼 평행이동한 그래프이고 함수 $g(x)=\cos x+\dfrac{1}{2}$의 그래프는 함수 $y=\cos x$의 그래프를 y축의 방향으로 $\dfrac{1}{2}$만큼 평행이동한 그래프이다.

$0\le x<2\pi$에서

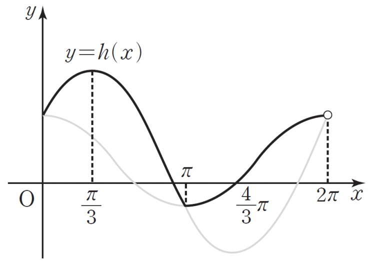
$f(x)\ge g(x)$의 해는 $0\le x\le\pi$

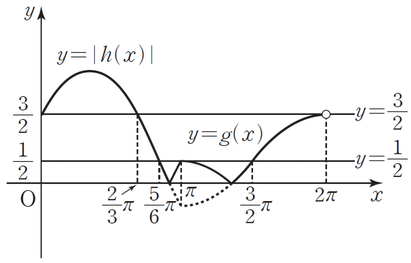
$f(x)<g(x)$의 해는 $\pi<x<2\pi$

따라서 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases}f(x) & (0\le x\le\pi)\\ g(x) & (\pi<x<2\pi)\end{cases}$$

이고 두 함수 $y=h(x)$의 그래프와 $y=|h(x)|$의 그래프는 그림과 같다.





$4|h(x)|^2-8|h(x)|+3=(2|h(x)|-1)(2|h(x)|-3)$

이므로 방정식

$4|h(x)|^2-8|h(x)|+3=0$

의 실근은 함수 $y=|h(x)|$의 그래프가 두 직선 $y=\dfrac{1}{2}$, $y=\dfrac{3}{2}$과 만나는 점의 x좌표와 같다.

$|h(x)|=\dfrac{1}{2}$일 때, $x=\dfrac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}\pi$

$|h(x)|=\dfrac{3}{2}$일 때, $x=0$ 또는 $x=\dfrac{2}{3}\pi$

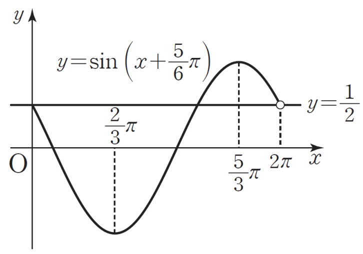
따라서 방정식 $4|h(x)|^2-8|h(x)|+3=0$의 서로 다른 모든 실근의 합은

$0+\dfrac{2}{3}\pi+\dfrac{5}{6}\pi+\pi+\dfrac{3}{2}\pi=4\pi$

88. 정답 62

$\left|\sin\left(x+\dfrac{5}{6}\pi\right)-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{n}{6}$에서

$\sin\left(x+\dfrac{5}{6}\pi\right)=\dfrac{n+3}{6}$ 또는 $\sin\left(x+\dfrac{5}{6}\pi\right)=\dfrac{-n+3}{6}$이다.



(ⅰ) $n=1$일 때

$\sin\left(x+\dfrac{5}{6}\pi\right)=\dfrac{2}{3}$ 또는 $\sin\left(x+\dfrac{5}{6}\pi\right)=\dfrac{1}{3}$이므로

$\sin\left(x+\dfrac{5}{6}\pi\right)=\dfrac{2}{3}$의 두 근을 x_1, x_2라 하면

$x_1+x_2=2\times\dfrac{5}{3}\pi=\dfrac{10}{3}\pi$

또한 $\sin\left(x+\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{1}{3}$의 두 근을 x_3, x_4라 하면

$x_3+x_4=2\times\frac{2}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi$

그러므로 $f(1)=\frac{14}{3}\pi$

(ii) $n=2$일 때

$\sin\left(x+\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{5}{6}$ 또는 $\sin\left(x+\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{1}{6}$이므로

$f(2)=f(1)=\frac{14}{3}\pi$이다.

(iii) $n=3$일 때

$\sin\left(x+\frac{5}{6}\pi\right)=1$ 또는 $\sin\left(x+\frac{5}{6}\pi\right)=0$이므로

$\sin\left(x+\frac{5}{6}\pi\right)=1$에서 $x=\frac{5}{3}\pi$

$\sin\left(x+\frac{5}{6}\pi\right)=0$의 두 근을 x_1, x_2라 하면

$x_1+x_2=2\times\frac{2}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi$

그러므로 $f(3)=\frac{5}{3}\pi+\frac{4}{3}\pi=3\pi$이다.

(iv) $n=4$일 때

$\sin\left(x+\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{7}{6}$ 또는 $\sin\left(x+\frac{5}{6}\pi\right)=-\frac{1}{6}$이므로

$\sin\left(x+\frac{5}{6}\pi\right)=-\frac{1}{6}$의 두 근을 x_1, x_2라 하면

$x_1+x_2=2\times\frac{2}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi$

그러므로 $f(4)=\frac{4}{3}\pi$이다.

같은 방법으로 $5\le n\le 8$인 자연수 n에 대하여 $f(n)=\frac{4}{3}\pi$이다.

(v) $n=9$일 때

$\sin\left(x+\frac{5}{6}\pi\right)=2$ 또는 $\sin\left(x+\frac{5}{6}\pi\right)=-1$이므로

$\sin\left(x+\frac{5}{6}\pi\right)=-1$에서 $x=\frac{2}{3}\pi$

그러므로 $f(9)=\frac{2}{3}\pi$

(vi) $n\ge 10$일 때

$\frac{n+3}{6}>2$, $\frac{-n+3}{6}<-1$이므로 방정식

$\left|\sin\left(x+\frac{5}{6}\pi\right)-\frac{1}{2}\right|=\frac{n}{6}$의 해는 존재하지 않는다.

(i)~(vi)에 의하여

$f(1)+f(2)+\cdots+f(10)=2\times\frac{14\pi}{3}+3\pi+5\times\frac{4\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=\frac{59}{3}\pi$

따라서 $p=3$, $q=59$이므로

$p+q=62$

89. 정답 470

$\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}-b_k)=(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})-\sum_{k=1}^{n}b_k$

$\sum_{k=1}^{n}(a_{2k}-b_k)=(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})-\sum_{k=1}^{n}b_k$

이고 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_{2n}-2\sum_{k=1}^{n}b_k=(3n^2-2n)+(-2n^2+9n)$

$=n^2+7n$

이고 $S_{2n}=n^2+7n+2\sum_{k=1}^{n}b_k$이다.

$S_{50}-S_{30}=a_{31}+a_{32}+\cdots+a_{50}$

$=\left\{(25^2+7\times25)+2\sum_{k=1}^{25}b_k\right\}-\left\{(15^2+7\times15)+2\sum_{k=1}^{15}b_k\right\}$

$=\left(800+2\sum_{k=1}^{25}b_k\right)-\left(330+2\sum_{k=1}^{15}b_k\right)$

$=470+2(b_{16}+b_{17}+\cdots+b_{25})$

수열 $\{b_n\}$은 $|b_{16}|=|b_{25}|$인 등차수열이고 공차가 0이 아니므로

$b_{16}=-b_{25}$

그러므로

$b_{16}+b_{17}+\cdots+b_{25}=\frac{10(b_{16}+b_{25})}{2}=0$

따라서

$a_{31}+a_{32}+\cdots+a_{50}=470$

90. 정답 72

$f(0)=0$이므로 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ (단, a, b는 상수)라 하자.

$f'(x)=3x^2+2ax+b$에서

$f'(0)=b$, $f'(1)=3+2a+b$

$f'(0)+f'(1)=1$이므로

$3+2a+2b=1$

$a=-1-b$

이고 $f(x)=x^3-(1+b)x^2+bx$이다.

즉, $f(x)=x(x-1)(x-b)$

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수 $g(x)$가 $x=k$에서 연속이므로

$g(k)=\lim_{x\to k-}g(x)=\lim_{x\to k+}g(x)$

이다.

$g(k)=\lim_{x\to k+}g(x)=\lim_{x\to k+}\{|f(x)|+f(x)\}$

$\lim_{x\to k-}g(x)=\lim_{x\to k-}f(x)=f(k)$

그러므로

$f(k)=\lim_{x\to k+}\{|f(x)|+f(x)\}$

$f(x)+|f(x)|=\begin{cases}2f(x) & (f(x)\geq 0)\\ 0 & (f(x)<0)\end{cases}$

이므로 $f(k)=2f(k)$ 또는 $f(k)=0$이다.

$f(k)=0$이므로 실수 k는 방정식 $f(x)=0$의 한 근이다.

즉, $k=0$ 또는 $k=1$ 또는 $k=b$

함수 $g(x)=\begin{cases}f(x) & (x<k)\\ 2f(x) & (x\geq k,\ f(x)\geq 0)\\ 0 & (x\geq k,\ f(x)<0)\end{cases}$

이고, 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$g'(x)=\begin{cases}f'(x) & (x<k)\\ 2f'(x) & (x>k,\ f(x)>0)\\ 0 & (x>k,\ f(x)<0)\end{cases}$

함수 $g(x)$가 $x=k$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to k-}g'(x)=\lim_{x\to k+}g'(x)$

이다.

$\lim_{x\to k-}g'(x)=f'(k)$

$\lim_{x\to k+}g'(x)=2f'(k)$ 또는 $\lim_{x\to k+}g'(x)=0$

$f'(k)=2f'(k)$ 또는 $f'(k)=0$

즉, $f'(k)=0$이므로 실수 k는 방정식 $f'(x)=0$의 한 근이다.

k가 두 방정식 $f(x)=0$과 $f'(x)=0$의 근이므로 함수 $f(x)$는 $(x-k)^2$을 인수로 갖는다.

$f(x)=x(x-1)(x-b)$이므로 $b=0$ 또는 $b=1$이다.

따라서 $b=k=0$ 또는 $b=k=1$

(i) $b=k=0$일 때

$f(x)=x^2(x-1)$이므로

$g(x)=\begin{cases}f(x) & (x<0)\\ 0 & (0\leq x<1)\\ 2f(x) & (x\geq 1)\end{cases}$이고

$g'(x)=\begin{cases}f'(x) & (x<0)\\ 0 & (0<x<1)\\ 2f'(x) & (x>1)\end{cases}$이다.

$f'(x)=2x(x-1)+x^2=x(3x-2)$이고

$\lim_{x\to 1-}g'(x)=\lim_{x\to 1-}0=0$

$\lim_{x\to 1+}g'(x)=\lim_{x\to 1+}2f'(x)=2$

이므로 $\lim_{x\to 1-}g'(x)\neq\lim_{x\to 1+}g'(x)$

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

(ii) $b=k=1$일 때

$f(x)=x(x-1)^2$이므로

$g(x)=\begin{cases}f(x) & (x<1)\\ 2f(x) & (x\geq 1)\end{cases}$이고

$g'(x)=\begin{cases}f'(x) & (x<1)\\ 2f'(x) & (x>1)\end{cases}$이다.

$f'(x)=(x-1)^2+2x(x-1)=(x-1)(3x-1)$

$\lim_{x\to 1-}g'(x)=f'(1)=0=2f'(1)=\lim_{x\to 1+}g'(x)$

이므로 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(i), (ii)에 의하여 $f(x)=x(x-1)^2$이고 $k=1$이다.

따라서

$$\begin{aligned}g(4k)&=g(4)\\&=2f(4)\\&=2\times4\times(4-1)^2\\&=72\end{aligned}$$

91. 정답 ②

$$\begin{aligned}f(x)&=(x^2-1)(x^2+x+a)\\&=x^4+x^3+(a-1)x^2-x-a\end{aligned}$$

이므로 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}|x^4+x^3+(a-1)x^2-x-a|\,dx\\&=2\int_0^1-\{x^4+(a-1)x^2-a\}\,dx\\&=2\left[-\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}(a-1)x^3+ax\right]_0^1\\&=2\left(-\frac{1}{5}-\frac{a-1}{3}+a\right)\\&=\frac{20a+4}{15}\end{aligned}$$

$g(x)=x^4+x^3-x-1=(x+1)(x-1)(x^2+x+1)$

이므로 곡선 $y=g(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}|x^4+x^3-x-1|\,dx&=2\int_0^1-(x^4-1)\,dx\\&=2\left[-\frac{1}{5}x^5+x\right]_0^1\\&=\frac{8}{5}\end{aligned}$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 모두 x축과 두 점 $(-1,\ 0)$, $(1,\ 0)$에서만 만나고 $-1<x<1$에서 $f(x)<g(x)<0$이다. 이때 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 곡선 $y=g(x)$가 이등분하므로 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y=g(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이다.

따라서 $\frac{20a+4}{15}=2\times\frac{8}{5}$이므로

$a=\frac{11}{5}$

92. 정답 ④

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

$a_7=0$이므로

$a+6d=0$, $a=-6d$

(i) $S_k=S_{k+5}$인 경우

$S_{k+5}-S_k=0$

$a_{k+5}+a_{k+4}+a_{k+3}+a_{k+2}+a_{k+1}=0$

$5a_{k+3}=0$

$a_{k+3}=0$

이때 공차가 양수이고 $a_7=0$이므로

$k+3=7$

$k=4$

(ii) $S_k=-S_{k+5}$인 경우

$\frac{k\{2a+(k-1)d\}}{2}=-\frac{(k+5)\{2a+(k+4)d\}}{2}$

$\frac{k\{-12d+(k-1)d\}}{2}=\frac{-(k+5)\{-12d+(k+4)d\}}{2}$

$d>0$이므로

$k(k-13)=-(k+5)(k-8)$

$2k^2-16k-40=0$

$k^2-8k-20=0$

$(k+2)(k-10)=0$

이때 k는 자연수이므로

$k=10$

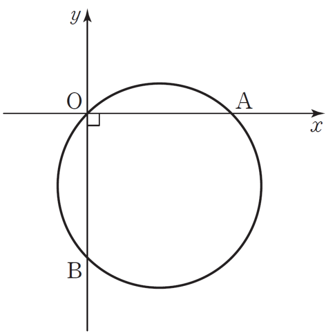
(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은

$4+10=14$

93. 정답 ③

두 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ -1)$이 각각 x축, y축 위의 점이므로

$\angle \mathrm{BOA}=90°$이다.



점 C가 제4사분면에 있고, 네 점 O, A, B, C가 모두 한 원 위에 있으므로 $\angle \mathrm{ACB}=180°-\angle \mathrm{BOA}=90°$

즉, 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$에서의 접선과 점 $\mathrm{B}(0,\ -1)$에서의 접선은 서로 수직이다.

$y=ax^4+x^2-ax-1$에서

$y'=4ax^3+2x-a$

점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$에서의 접선의 기울기는

$4a+2-a=3a+2$

이고, 점 $\mathrm{B}(0,\ -1)$에서의 접선의 기울기는 $-a$이므로

$(3a+2)\times(-a)=-1$

$3a^2+2a-1=0$

$(a+1)(3a-1)=0$

$a=-1$ 또는 $a=\frac{1}{3}$

이때 점 C가 제4사분면에 있으므로 직선 BC의 기울기 $-a$는 직선 BA의 기울기 1보다 작아야 한다.

따라서 $a=\frac{1}{3}$

94. 정답 ⑤

점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 $y=-\sqrt{3}x+k$와 만나는 점을 D라 하면 직선 $y=-\sqrt{3}x+k$의 기울기가 $-\sqrt{3}$이므로

$\angle \mathrm{CDB}=60°$

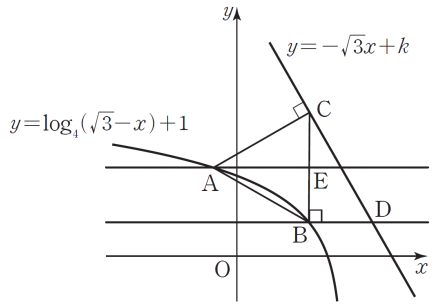
이때 $\angle \mathrm{DCA}=90°$이고, 삼각형 ABC가 정삼각형,

$\angle \mathrm{BCA}=60°$이므로

$\angle \mathrm{DCB}=\angle \mathrm{DCA}-\angle \mathrm{BCA}=30°$

삼각형 CBD에서

$\angle \mathrm{CBD}=90°$



직선 BC가 x축과 수직이므로 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 선분 BC와 만나는 점을 E라 하면 점 E는 선분 BC의 중점이다.

정삼각형 ABC의 넓이가 $\sqrt{3}$이므로 한 변의 길이는 2이고,

$\overline{\mathrm{AE}}=\sqrt{3}$이다.

점 A의 좌표를 $\left(a,\ \log_4(\sqrt{3}-a)+1\right)$이라 하면

점 E의 좌표는

$\left(a+3,\ \log_4(\sqrt{3}-a)+1\right)$

이고, $\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{CE}}.=1$이므로 두 점 B, C의 좌표는 각각

$\left(a+\sqrt{3},\ \log_4(\sqrt{3}-a)\right)$, $\left(a+\sqrt{3},\ \log_4(\sqrt{3}-a)+2\right)$

이다. 이때 점 B는 곡선 $y=\log_4(\sqrt{3}-x)+1$ 위의 점이므로

$\log_4(\sqrt{3}-a)=\log_4\{\sqrt{3}-(a+\sqrt{3})\}+1$

$\log_4(\sqrt{3}-a)=\log_4(-a)+1$

$\log_4(\sqrt{3}-a)=\log_4(-4a)$

$\sqrt{3}-a=-4a$

$a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

점 $\mathrm{C}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\ \log_4\frac{4\sqrt{3}}{3}+2\right)$가 직선 $y=-\sqrt{3}x+k$ 위의 점이므로

$\log_4\frac{4\sqrt{3}}{3}+2=-\sqrt{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}+k$

$k=\frac{20-\log_2 3}{4}$

95. 정답 ⑤

$v(t)=3t^2-7t+k$에서 가속도는

$a(t)=6t-7$

$6t-7=5$에서 $t=2$

즉, $t=2$일 때 운동 방향을 바꾸므로

$v(2)=12-14+k=0$

즉, $k=2$

시각 $t=k-1$부터 $t=k+1$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_1^3 |v(t)|\,dt &= \int_1^2 \{-v(t)\}\,dt+\int_2^3 v(t)\,dt\\ &= \int_1^2 (-3t^2+7t-2)\,dt+\int_2^3 (3t^2-7t+2)\,dt\\ &= \left[-t^3+\frac{7}{2}t^2-2t\right]_1^2+\left[t^3-\frac{7}{2}t^2-2t\right]_2^3\\ &= \left(2-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}+2\right)\\ &=5\end{aligned}$$

96. 정답 ①

$\overline{AB}=\overline{BC}$이므로

$\angle ADB=\angle BDC=\angle EDC=30°$

원주각의 성질에 의하여

$\angle ACB=\angle ADB=30°$, $\angle BAC=\angle BDC=30°$

삼각형 AED의 외접원의 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$이므로 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AE}}{\sin(\angle ADE)}=2\times\sqrt{3}$

$\dfrac{\overline{AE}}{\sin 30°}=2\sqrt{3}$

$\overline{AE}=\sqrt{3}$

삼각형 BCE의 외접원의 반지름의 길이가 $\sqrt{7}$이므로 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BE}}{\sin(\angle ECB)}=2\times\sqrt{7}$

$\dfrac{\overline{BE}}{\sin 30°}=2\sqrt{7}$

$\overline{BE}=\sqrt{7}$

삼각형 ABE에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BE}^2=\overline{AB}^2+\overline{AE}^2-2\times\overline{AB}\times\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{AB}^2-3\times\overline{AB}-4=0$

$(\overline{AB}+1)(\overline{AB}-4)=0$

$\overline{AB}=4$

이므로 $\overline{BC}=\overline{AB}=4$이고

$\overline{AC}=2\times\overline{AB}\cos(\angle BAE)=2\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

$\overline{CE}=\overline{AC}-\overline{AE}=3\sqrt{3}$

삼각형 BCE에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{CE}^2=\overline{BC}^2+\overline{BE}^2-2\times\overline{BC}\times\overline{BE}\times\cos(\angle CBE)$

$(3\sqrt{3})^2=4^2+(\sqrt{7})^2-2\times4\times\sqrt{7}\times\cos(\angle CBE)$

$\cos(\angle CBE)=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$

원주각의 성질에 의하여

$\angle CAD=\angle CBE$

이므로 $\cos(\angle CAD)=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$

97. 정답 ⑤

a_n이 홀수일 때, $a_{n+1}=\dfrac{a_n+1}{2}$은 자연수이고

a_n이 짝수일 때, $a_{n+1}=a_n-1$은 홀수인 자연수이다. 이때 a_1이 자연수이므로 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 자연수이다.

$a_4a_6=126$에서 126은 짝수이고 4의 배수는 아니므로 a_4가 짝수이면 a_6은 홀수이어야 하고 a_4가 홀수이면 a_6은 짝수이어야 한다.

(ⅰ) a_4가 짝수인 경우

$a_5=a_4-1$은 홀수이므로

$a_6=\dfrac{a_5+1}{2}=\dfrac{(a_4-1)+1}{2}=\dfrac{a_4}{2}$

이때 $a_4a_6=\dfrac{a_4{}^2}{2}=126$을 만족시키는 자연수 a_4가 존재하지 않는다.

(ⅱ) a_4가 홀수인 경우

$a_5=\dfrac{a_4+1}{2}$가 짝수이면 a_6이 홀수가 되므로 a_5는 홀수이어야 한다.

$a_6=\dfrac{a_5+1}{2}=\dfrac{\frac{a_4+1}{2}+1}{2}=\dfrac{a_4+3}{4}$

이때 $a_4a_6=126$이므로

$a_4\times\dfrac{a_4+3}{4}=126$

$a_4{}^2+3a_4-504=0$

$(a_4+24)(a_4-21)=0$

a_4는 자연수이므로

$a_4=21$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a_4=21$

a_3이 홀수이면 $a_4=\dfrac{a_3+1}{2}$이므로 $a_3=41$이고

a_3이 짝수이면 $a_4=a_3-1$이므로 $a_3=22$

$a_3=41$일 때

a_2가 홀수이면 $a_3=\dfrac{a_2+1}{2}$이므로 $a_2=81$이고

a_2가 짝수이면 $a_3=a_2-1$이므로 $a_2=42$이다.

또, $a_3=22$이면 a_2는 홀수이므로 $a_3=\dfrac{a_2+1}{2}$에서 $a_2=43$

$a_2=81$일 때

a_1이 홀수이면 $a_2=\dfrac{a_1+1}{2}$이므로 $a_1=161$이고

a_1이 짝수이면 $a_2=a_1-1$이므로 $a_1=82$이다.

$a_2=42$이면 a_1은 홀수이므로 $a_2=\dfrac{a_1+1}{2}$에서 $a_1=83$이다.

또, $a_2=43$일 때

a_1이 홀수이면 $a_2=\dfrac{a_1+1}{2}$이므로 $a_1=85$이고

a_1이 짝수이면 $a_2=a_1-1$이므로 $a_1=44$이다.

따라서 모든 a_1의 값의 합은

$161+82+83+85+44=455$

98. 정답 12

조건 (가)에서 $f(x)-x^4$은 최고차항의 계수가 -3인 이차함수이므로

$f(x)=x^4-3x^2+ax+b$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

$x\to 0$일 때, (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$

즉, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

이때 $f(x)$가 연속함수이므로

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$

$b=0$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=4$에서

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4-3x^2+ax}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x^3-3x+a)=4$

$a=4$

따라서 $f(x)=x^4-3x^2+4x$이므로

$f(2)=16-12+8=12$

99. 정답 3

함수 $f(x)=\sqrt{3}\tan\dfrac{\pi x}{2}+1$의 주기는

$p=\dfrac{\pi}{\dfrac{\pi}{2}}=2$

이므로 직선 $y=p(p-x)$는

$y=2(2-x)$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선은

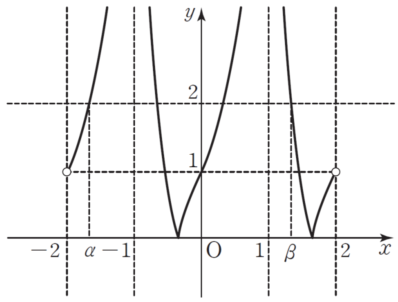
$x=2n+1$ (n은 정수)

이므로 직선 $x=p(p-x)$가 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선과 제1사분면에서 만나는 점의 좌표는

$(1,\ 2)$

즉, $k=2$

열린구간 $(-2,\ 2)$에서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



직선 $y=2$가 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 만나는 점의 x좌표 중 열린구간 $(-2,\ -1)$에 존재하는 값을 α, 열린구간 $(1,\ 2)$에 존재하는 값을 β라 하자.

닫힌구간 $[a,\ b]$ 에서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프가 직선 $y=t$와 만나는 서로 다른 점의 개수가 $t>2$일 때 4가 되려면

$a\le\alpha,\ b\ge\beta$

$|f(x)|=2$에서

$f(x)=2$ 또는 $f(x)=-2$

$f(x)=2$이면

$\sqrt{3}\tan\dfrac{\pi x}{2}+1=2,\ \tan\dfrac{\pi x}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

열린구간 $(-2,\ -1)$에서 $\alpha=-\dfrac{5}{3}$

$f(x)=-2$이면

$\sqrt{3}\tan\dfrac{\pi x}{2}+1=-2$

$\tan\dfrac{\pi x}{2}=-\sqrt{3}$

열린구간 $(1,\ 2)$에서 $\beta=\dfrac{4}{3}$

따라서 $a=-\dfrac{5}{3},\ b=\dfrac{4}{3}$이므로

$b-a=\dfrac{4}{3}-\left(-\dfrac{5}{3}\right)=3$

100. 정답 5

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=3$과 $x=4$에서 각각 연속이다.

$\lim\limits_{x\to 3-} g(x)=\lim\limits_{x\to 3+} g(x)=g(3)$

에서 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[2,\ 3]$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 2+} g(x)=\lim\limits_{x\to 2+} f(x)=f(2)=1$

$\lim\limits_{x\to 3-} g(x)=\lim\limits_{x\to 3-} f(x)=f(3)=2$

$\lim_{x\to 3+} g(x) = \lim_{x\to 3-}\{a\times f(x-1)+b\} = a\times f(2)+b = a+b$

$g(3)=f(3)=2$

즉, $a+b=2$ …… ㉠

$\lim_{x\to 4-} g(x) = \lim_{x\to 4+} g(x) = g(4)$

에서 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[2,\ 3]$에서 연속이므로 조건 (나)에서

$\lim_{x\to 4-} g(x) = \lim_{x\to 4-}\{a\times f(x-1)+b\}$

$= a\times f(3)+b$

$= 2a+b$

$\lim_{x\to 4+} g(x) = \lim_{t\to 2+}\{g(t)-1\}$

$= \lim_{t\to 2+}\{f(t)-1\}$

$= f(2)-1$

$= 0$

$g(4)=g(2)-1=f(2)-1=0$

즉, $2a+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a=-2,\ b=4$

$\int_2^3 f(x)\,dx = k$라 하자.

$\int_2^4 g(x)\,dx = \int_2^3 g(x)\,dx + \int_3^4 g(x)\,dx$

$= \int_2^3 f(x)\,dx + \int_3^4 \{-2f(x-1)+4\}\,dx$

$= \int_2^3 f(x)\,dx - \int_2^3 f(x)\,dx + \Big[4x\Big]_3^4$

$= k-2k+4$

$= -k+4$

$\int_0^2 g(x)\,dx = \int_2^4 g(x-2)\,dx$

$= \int_2^4 \{g(x)+1\}\,dx$

$= \int_2^4 g(x)\,dx + \Big[x\Big]_2^4$

$= (-k+4)+2$

$= -k+6$

$\int_{-2}^0 g(x)\,dx = \int_0^2 g(x-2)\,dx$

$= \int_0^2 \{g(x)+1\}\,dx$

$= \int_0^2 g(x)\,dx + \Big[x\Big]_2^4$

$= (-k+6)+2$

$= -k+8$

$\int_a^b g(x)\,dx = \int_{-2}^4 g(x)\,dx$

$= \int_{-2}^0 g(x)\,dx + \int_0^2 g(x)\,dx + \int_2^4 g(x)\,dx$

$= (-k+8)+(-k+6)+(-k+4)$

$= -3k+18$

조건 (다)에 의하여

$-3k+18=3$

$k=5$

따라서

$\int_2^3 f(x)\,dx = 5$

101. 정답 ①

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	9	8	6	12	3	13	0	11

n	9	10	11	12	13	14	$\cdots$
a_n	-3	6	-6	-2	-9	-13	$\cdots$

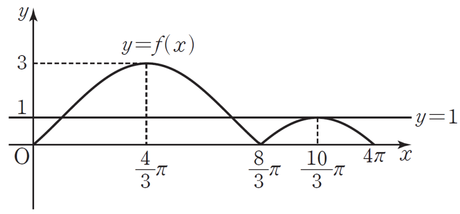
$a_n<0,\ a_{n+1}<0$이면 $a_{n+2}<0$이므로

11이상의 모든 자연수 t에 대하여 $a_t<0$

따라서 구하는 k의 최솟값은 11이다.

102. 정답 ③

$f(x) = \left|2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)-1\right|$ $(0\le x\le 4\pi)$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$은 다음과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프는 $0\le x\le \frac{8}{3}\pi$에서 직선 $x=\frac{4}{3}\pi$에 대하여 대칭이고, $\frac{8}{3}\pi\le x\le 4\pi$에서 직선 $x=\frac{10}{3}\pi$에 대하여 대칭이다.

$0\le x\le 4\pi$일 때, 방정식 $\left|2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)-1\right|=1$의 서로 다른 실근의 개수는 3이고, 이 실근을 각각 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ $(\alpha<\beta<\gamma)$라 하면

$\alpha+\beta+\gamma = \frac{4}{3}\pi\times 2+\frac{10}{3}\pi = 6\pi$

103. 정답 ②

$\angle BCA = \frac{\pi}{2}$이므로 $\overline{AC}=5\sqrt{2}$

$\overline{CD}=x$라 하면

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AD}^2 = x^2 + \overline{AC}^2 - 2x \times \overline{AC} \times \cos(\angle ACD)$

원주각의 성질에 의하여 $\angle ACD = \angle ABD$이고,

삼각형 ABD에서 $\angle ADB = \frac{\pi}{2}$이므로 $\overline{BD} = 8$

따라서 $\cos(\angle ABD) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$이므로

$\cos(\angle ACD) = \frac{4}{5}$

$6^2 = x^2 + (5\sqrt{2})^2 - 10\sqrt{2}x \times \frac{4}{5}$

$x^2 - 8\sqrt{2}x + 14 = 0$

따라서 $x = 4\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}$

즉, $x = 7\sqrt{2}$ 또는 $x = \sqrt{2}$

그런데 $\overline{CD} < \overline{BD}$이므로 $x < 8$

따라서 $x = \sqrt{2}$

104. 정답 ③

$g(x) = -3^{-x} + \frac{10}{3}$

$f(x) = g(x)$에서

$3^x = -3^{-x} + \frac{10}{3}$

$3^x = t\ (t > 0)$이라 하면

$t = -\frac{1}{t} + \frac{10}{3}$

$3t^2 - 10t + 3 = 0$

$(3t-1)(t-3) = 0$

$t = \frac{1}{3}$ 또는 $t = 3$

따라서 $3^x = \frac{1}{3}$ 또는 $3^x = 3$이므로

$x = -1$ 또는 $x = 1$

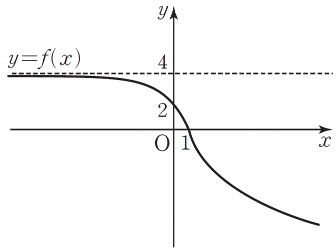
즉, 두 점 A, B의 좌표는 각각 $\left(-1,\ \frac{1}{3}\right)$, $(1,\ 3)$이다.

직선 AB가 y축과 만나는 점은 선분 AB의 중점이므로 구하는 y좌표는

$$\frac{\frac{1}{3}+3}{2} = \frac{\frac{10}{3}}{2} = \frac{5}{3}$$

105. 정답 ⑤

함수 $y = -2^{x+1} + 4$의 그래프의 점근선은 직선 $y = 4$이므로 함수 $y = f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



(i) $k \le 1$일 때

$f(k) \ge 0$이므로 방정식 $f(x) = |f(k)|$의 해는 방정식 $f(x) = f(k)$의 해와 같다.

즉, $x = k$이므로 실근을 갖는다.

(ii) $k > 1$일 때

$-4 < f(k) < 0$이면 방정식 $f(x) = |f(k)|$는 실근을 갖고,

$f(k) \le -4$이면 방정식 $f(x) = |f(k)|$는 실근을 갖지 않는다.

따라서 방정식 $f(x) = |f(k)|$가 실근을 갖도록 하는 모든 k의 값의 범위는

$-4 < -\frac{4}{3}log_2 k < 0$, 즉 $1 < k < 8$

(i), (ii)에 의하여 $k < 8$이므로 자연수 k의 최댓값은 7이다.

106. 정답 ④

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)+1}{x} = 3$에서 $x \to 0$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉 $\lim_{x\to0}\{f(x)+1\} = 0$에서 $f(0) = -1$

따라서 $c = -1$

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)+1}{x} = \lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 3$이므로

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$에서 $b = 3$

이때, 삼차함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 3$의 역함수가 존재하려면 극값을 갖지 않아야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \ge 0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x) = 0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = a^2 - 3b = a^2 - 9 \le 0$

따라서 $-3 \le a \le 3$이고 a의 최솟값은 -3이다.

그러므로 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$일 때,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{5} f(x)dx &= \int_{-1}^{5}(x-1)^3 dx \\ &= \int_{-2}^{4} x^3 dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^{4} \\ &= 64 - 4 \\ &= 60\end{aligned}$$

107. 정답 ③

함수 $y=k\log_2(x-t)$의 그래프는 항상 점 $(t+1,\ 0)$을 지난다.

$f(x)=k\log_2(x-t)$라 하자.

(ⅰ) $t+1<3$일 때, $t=1$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 삼각형 ABC와 만나는 경우는

㉠ $f(3)>4$이고 $f(5)\le 6$인 경우

$k\log_2(3-1)>4,\ k\log_2(5-1)\le 6$

그런데 $k>4$이고 $k\le 3$인 자연수 k는 존재하지 않는다.

따라서 조건을 만족시키는 순서쌍 $(t,\ k)$는 존재하지 않는다.

㉡ $f(3)=4$인 경우

함수 $y=f(x)$의 그래프는 삼각형 ABC와 점 B에서 만난다.

$k\log_2(3-1)=4$에서 $k=\dfrac{4}{\log_2(3-1)}$이므로

$k=4$

따라서 순서쌍 $(t,\ k)$는 $(1,\ 4)$이고 그 개수는 1이다.

㉢ $f(3)<4$이고 $f(7)\ge 2$인 경우

$k\log_2(3-1)<4,\ k\log_2(7-1)\ge 2$

즉, $\dfrac{2}{\log_2 6}\le k<4$일 때 만난다.

$2<\log_2 6<3$이므로 $\dfrac{2}{3}<\dfrac{2}{\log_2 6}<1$

따라서 $k=1,\ 2,\ 3$

그러므로 순서쌍 $(t,\ k)$는 $(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3)$이고 그 개수는 3이다.

(ⅱ) $3\le t+1<7$일 때, $t=2,\ 3,\ 4,\ 5$

$f(7)\ge 2$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프가 삼각형 ABC와 만나므로 $k\log_2(7-t)\ge 2$에서 $k\ge\dfrac{2}{\log_2(7-t)}$

$t=2$일 때, $k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

$t=3$일 때, $k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

$t=4$일 때, $k=2,\ 3,\ 4,\ 5$

$t=5$일 때, $k=2,\ 3,\ 4,\ 5$

따라서 순서쌍 $(t,\ k)$의 개수는 18이다.

(ⅲ) $t+1\ge 7$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 삼각형 ABC와 만나지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 모든 순서쌍 $(t,\ k)$의 개수는 22이다.

108. 정답 14

$\log_a(x-4)^2\ge\log_a(x-4)+\log_a 5$에서

$\log_a(x-4)\ge\log_a 5$

$a>1$일 때 $x\ge 9$이고, $0<a<1$일 때 $4<x\le 9$ …… ㉠

$a^{2x-2}-1<a^{x+1}-a^{x-3}$에서

$a^{2x+1}-a^3<a^{x+4}-a^x$

$a(a^x)^2-a^3<(a^4-1)a^x$

$(a^x-a^3)(a^{x+1}+1)<0$

$a^{x+1}+1>0$이므로

$a^x<a^3$

$a>1$일 때 $x<3$이고, $0<a<1$일 때 $x>3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a>1$일 때 연립부등식의 해는 존재하지 않고,

$0<a<1$일 때 연립부등식의 해는 $4<x\le 9$이다.

따라서 $\alpha=0,\ \beta=1,\ \gamma=4,\ \delta=9$이므로

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0+1+4+9=14$

109. 정답 11

두 함수 $f(x),\ g(x)$는 삼차함수이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$t\ne 0$일 때, $f(t)=0$이면

$t^3+at^2+bt+c=0$

양변을 t^3으로 나누면

$1+a\left(\dfrac{1}{t}\right)+b\left(\dfrac{1}{t}\right)^2+c\left(\dfrac{1}{t}\right)^3=0$이므로

$g\left(\dfrac{1}{t}\right)=0$

마찬가지로 $t\ne 0$일 때 $g(t)=0$이면 $f\left(\dfrac{1}{t}\right)=0$이다.

조건 (가)에서 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{x-3}$의 값이 존재하고, $x\to 3$일 때

(분모)→0이므로 (분자)→0이어야 한다.

따라서 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=0$이고 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 연속이므로

$f(3)=0$

따라서 $g\left(\dfrac{1}{3}\right)=0$

조건 (나)에서 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{g(x)}{f(x)}$의 값이 존재하고 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=f(3)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 3}g(x)=0$이어야 한다.

함수 $g(x)$는 $x=3$에서 연속이므로 $g(3)=0$

따라서 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=0$

조건 (다)에서 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{g(x)}{f(x)}$의 값이 존재하지 않으므로

$\lim\limits_{x\to 4}f(x)=f(4)=0$

즉, $g\left(\dfrac{1}{4}\right)=0$

따라서 $f(x)=(x-3)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)(x-4)$이고, $f(x)$의 상수항이 -4이므로

$g(x)=-4(x-3)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\left(x-\dfrac{1}{4}\right)$

따라서

$$\lim_{x\to3}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to3}\frac{-4(x-3)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)}{(x-3)\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-4)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{-4x+1}{x-4}$$
$$=\frac{-11}{-1}$$
$$=11$$

110. 정답 52

$b_1\neq0$, $|r|>1$이므로 모든 자연수 n에 대하여 $b_n\neq0$이고,

$c_8=0$이므로 $a_8=0$이다. 수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

(ⅰ) $d>0$일 때

$a_1<0$, $a_3<0$이므로 $b_3>0$이다.

㉠ $r>1$이고 $b_1<0$이면 $b_3<0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

㉡ $r>1$이고 $b_1>0$이면 $0<b_1<b_2<b_3$이므로

$|b_1|<|b_2|<|b_3|=|a_3|<|a_2|<|a_1|$이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{3}c_n=b_1+b_2+b_3>0$이 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

㉢ $r<-1$이고 $b_1<0$이면 $b_3<0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

㉣ $r<-1$이고 $b_1>0$이면 ㉡과 마찬가지로

$|b_1|<|b_2|<|b_3|=|a_3|<|a_2|<|a_1|$이고,

모든 실수 r에 대하여 $1+r+r^2>0$이므로

$\sum_{n=1}^{3}c_n=b_1+b_2+b_3>0$이 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $d<0$일 때

$a_1>0$, $a_3>0$이므로 $b_3<0$이다.

㉠ $r<-1$이고 $b_1>0$이면 $b_3>0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

㉡ $r<-1$이고 $b_1<0$이면

$$\sum_{n=1}^{3}c_n=b_1+b_2+b_3=b_1(1+r+r^2)=-35$$

가 될 수 있다.

$r=-2$이면

$1+r+r^2=1-2+4=3$이 되어 조건을 만족시키는 정수 b_1이 존재하지 않는다.

$r=-3$이면

$1+r+r^2=1-3+9=7$이므로 $b_1=-5$이다.

$r\leq-4$인 정수 r에 대하여 $1+r+r^2\neq35$이므로 주어진 조건을 만족시키는 정수 b_1이 존재하지 않는다.

따라서 $r=-3$, $b_1=-5$이다.

$b_3=-45$이므로 $a_3=45$이다.

$a_1+2d=45$와 $a_1+7d=0$을 연립하여 풀면

$a_1=63$, $d=-9$이다.

이때 $c_4=a_4=36$이다.

㉢ $r>1$이고 $b_1>0$이면 $b_3>0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

㉣ $r>1$이고 $b_1<0$이면

$$\sum_{n=1}^{3}c_n=b_1+b_2+b_3=b_1(1+r+r^2)=-35$$

가 될 수 있다.

$r=2$이면

$1+r+r^2=1+2+4=7$이므로 $b_1=-5$이다.

$r\geq3$인 정수 r에 대하여 $1+r+r^2\neq35$이므로 주어진 조건을 만족하는 정수 b_1이 존재하지 않는다.

따라서 $r=2$, $b_1=-5$이다.

$b_3=-20$이므로 $a_3=20$이다.

$a_1+2d=20$과 $a_1+7d=0$을 연립하여 풀면

$a_1=28$, $d=-4$이다.

이때 $c_4=a_4=16$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 c_4의 값의 합은

$36+16=52$

111. 정답 ③

$\log_a\frac{4}{a}=\log_{\frac{2}{a}}a=k$라 하면

$\log_a\frac{4}{a}=k$에서 $a^k=\frac{4}{a}$이므로

$$a^{k+1}=4 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\log_{\frac{2}{a}}a=k$에서 $\left(\frac{2}{a}\right)^k=a$이므로

$$a^{k+1}=2^k \quad \cdots\cdots ㉡$$

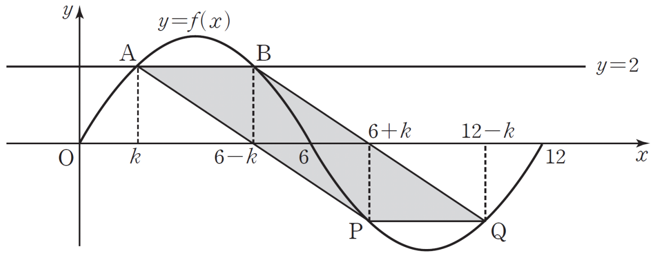
㉠, ㉡에서 $2^k=4$이므로 $k=2$

따라서

$$\log_a\frac{2}{a}=\frac{1}{\log_{\frac{2}{a}}a}$$
$$=\frac{1}{k}$$
$$=\frac{1}{2}$$

112. 정답 ②

함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}}=12$이므로 곡선 $y=f(x)$는 그림과 같다.



사각형 APQB가 평행사변형이므로 $\overline{AB}=\overline{PQ}$이고 $\overline{AB}\,/\!/\,\overline{PQ}$이다.
즉, 직선 PQ의 방정식은 $y=-2$이다.
점 A의 x좌표를 k라 하면 두 점 A, B는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로 점 B의 x좌표는 $6-k$이다.
$\overline{AB}=6-2k$이고 평행사변형 APQB의 넓이가 12이므로
$(6-2k)\times 4=12$, 즉 $k=\dfrac{3}{2}$
점 A$\left(\dfrac{3}{2},\ 2\right)$가 곡선 $y=f(x)$ 위에 있으므로
$a\sin\dfrac{\pi}{4}=2$
따라서 $a=2\sqrt{2}$

113. 정답 ①
두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하면
$x_1(t)=t^3-3t^2+kt+C$,
$x_2(t)=t^2-7t+D$ $(C=x_1(0),\ D=x_2(0))$
두 점 P, Q가 시각 $t=1$일 때 만나므로
$1-3+k+C=1-7+D$
즉, $D=k+4+C$ …… ㉠
두 점 P, Q가 시각 $t=2$일 때 원점에서 만나므로
$8-12+2k+C=0$, $4-14+D=0$
$C=-2k+4$, $D=10$
㉠에서 $10=k+4-2k+4$이므로
$k=-2$

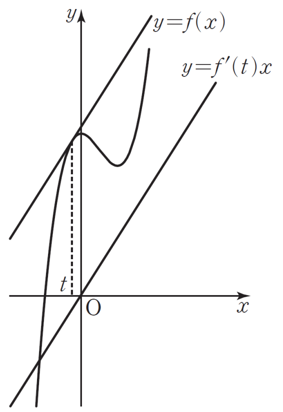
114. 정답 ③
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
(i) $a_4<0$일 때
$|a_6|=|a_4|+a_8$에서 $|a_6|=-a_4+a_8=4d$
$d\ge 0$이고 $a_6=-4d$ 또는 $a_6=4d$
㉠ $a_6=-4d$일 때
$a_{10}=a_6+4d=0$이므로
$\sum_{n=1}^{10}|a_n|=-\sum_{n=1}^{10}a_n$
$=-\dfrac{10(a_1+a_{10})}{2}$
$=-5a_1$
$=25$
즉, $a_1=-5$
$a_6=-5+5d=-4d$이므로
$d=\dfrac{5}{9}$
$a_7=a_6+d$
$=-3d$
$=-3\times\dfrac{5}{9}$
$=-\dfrac{5}{3}$
㉡ $a_6=4d$일 때
$a_2=a_6-4d=0$이고, $a_6=4d\ge 0$이므로 $a_4<0$을 만족시킬 수 없다.
(ii) $a_4\ge 0$일 때
$|a_6|=|a_4|+a_8$에서 $|a_6|=a_4+a_8$이므로
$|a_6|=2a_6$
즉, $a_6=0$, $d\le 0$
$\sum_{n=1}^{10}|a_n|=\sum_{n=1}^{6}a_n-\sum_{n=7}^{10}a_n$
$=\dfrac{6(a_1+a_6)}{2}-\dfrac{4(a_7+a_{10})}{2}$
$=3(2a_1+5d)-2(2a_1+15d)$
$=2a_1-15d$
$=25$
$a_6=a_1+5d=0$에서 $a_1=-5d$이므로
$2\times(-5d)-15d=25$
즉, $d=-1$
$a_7=a_6+d=d=-1$
(i), (ii)에 의하여 a_7의 최댓값은 -1이다.

115. 정답 ④
$f(x)=x^3-2x^2+8$에서 $f'(x)=3x^2-4x$
$f'(x)=0$에서 $x(3x-4)=0$
$x=0$ 또는 $x=\dfrac{4}{3}$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

x에 대한 방정식 $f(x)-xf'(t)=0$을 만족시키는 실수 x는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f'(t)x$의 교점의 x좌표이다.
[그림 1]과 같이 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선과 평행하고 원점을 지나는

직선 $y=f'(t)x$가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 개수가 $g(t)$이다.

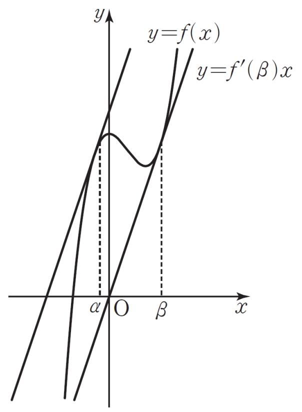


[그림 1]

[그림 2]와 같이 $f'(\alpha)=f'(\beta)$이고, 직선 $y=f'(\beta)x$가 곡선 $y=f(x)$와 접한다고 하면

$$g(t)=\begin{cases} 3 & (t<\alpha) \\ 2 & (t=\alpha) \\ 1 & (\alpha<t<\beta) \\ 2 & (t=\beta) \\ 3 & (t>\beta) \end{cases}$$

이므로 함수 $g(t)$는 $t=\alpha$, $t=\beta$ $(\alpha<\beta)$에서 불연속이다.



[그림 2]

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(\beta,\ \beta^3-2\beta^2+8)$에서의 접선의 방정식은

$y=(3\beta^2-4\beta)(x-\beta)+\beta^3-2\beta^2+8$

이 직선이 원점을 지나므로

$-2\beta^3+2\beta^2+8=0$

$\beta^3-\beta^2-4=0$

$(\beta-2)(\beta^2+\beta+2)=0$

$\beta=2$

접선의 기울기가 $3\times2^2-4\times2=4$이므로

$3\alpha^2-4\alpha=4$

$3\alpha^2-4\alpha-4=0$

$(3\alpha+2)(\alpha-2)=0$

$\alpha=-\dfrac{2}{3}$

따라서 구하는 모든 k의 값의 합은

$-\dfrac{2}{3}+2=\dfrac{4}{3}$

116. 정답 ③

$\overline{\mathrm{AE}}=k$라 하면

$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{AE}}=k$

선분 BC를 $1:2$로 내분하는 점이 D이므로

$\overline{\mathrm{DC}}=2k$

선분 AC의 중점이 E이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=2k$

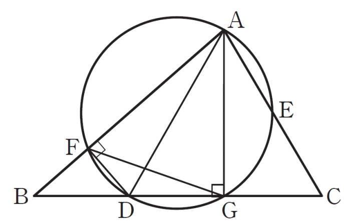
$\overline{\mathrm{DC}}=\overline{\mathrm{AC}}$이고 $\angle\mathrm{CAD}=\angle\mathrm{DCA}$이므로 삼각형 ADC는 정삼각형이다.

점 G는 선분 CD의 중점이므로

$\overline{\mathrm{AG}}=\sqrt{3}k$

직각삼각형 ABG에서

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{4k^2+3k^2}=\sqrt{7}k$



$\angle\mathrm{DGA}=\dfrac{\pi}{2}$이므로 선분 AD는 원의 지름이다. 즉,

$\angle\mathrm{AFD}=\dfrac{\pi}{2}$

삼각형 ABD의 넓이에서

$\dfrac{1}{2}\times\sqrt{7}k\times\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}\times k\times2k\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

이므로 $k=\sqrt{7}$

$\angle\mathrm{GAB}=\theta$라 하면

$\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{AG}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

$\angle\mathrm{FDG}=\pi-\angle\mathrm{GAF}=\pi-\theta$

이므로 삼각형 FDG에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{FG}}^2=3+7-2\times\sqrt{3}\times\sqrt{7}\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)$

$=16$

따라서 선분 FG의 길이는 4이다.

117. 정답 ②

함수 $f(x)$가 삼차함수이므로 점 $(a,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수는 1 또는 2 또는 3이다.

$\{f(x)-x\}^2+\{f'(x)-3\}^2=0$에서

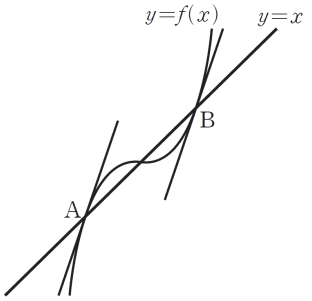
$f(x)-x=0$, $f'(x)-3=0$

$f'(x)=3$인 실수 x의 개수는 2 이하이므로 점 $(a,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수는 1이고 방정식

$\{f(x)-x\}^2+\{f'(x)-3\}^2=0$

의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

방정식 $\{f(x)-x\}^2+\{f'(x)-3\}^2=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로 [그림 1]과 같이 곡선 $y=f(x)$ 위의 접선의 기울기가 3인 두 점 A, B를 직선 $y=x$가 지난다.



[그림 1]

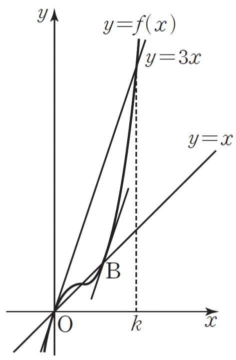
$f'(0)=3$이므로 두 점 A, B 중 한 점은 원점이다.

점 B가 원점이면 모든 양수 a에 대하여 점 $(a,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수가 2 이상이므로 점 A가 원점이다.

[그림 2]와 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3x$의 교점 중 원점이 아닌 점의 x좌표를 k $(k>0)$라 하면

$f(x)-3x=x^2(x-k)$

라 놓을 수 있다.



[그림 2]

$f(x)=x^2(x-k)+3x$에서

$f'(x)=2x(x-k)+x^2+3$

$f'(x)=2x(x-k)+x^2+3=3$에서

$x(3x-2k)=0$이므로

$x=0$ 또는 $x=\dfrac{2k}{3}$

점 B의 x좌표가 $\dfrac{2k}{3}$이므로

$\mathrm{B}\left(\dfrac{2k}{3},\ \dfrac{2k}{3}\right)$

점 B가 곡선 $y=f(x)$ 위에 있으므로

$\left(\dfrac{2k}{3}\right)^2\left(\dfrac{2k}{3}-k\right)+3\times\dfrac{2k}{3}=\dfrac{2k}{3}$

$\dfrac{4k^2}{27}-\dfrac{4k}{3}=0$

$\dfrac{4k}{27}(k+3)(k-3)=0$

$k>0$이므로

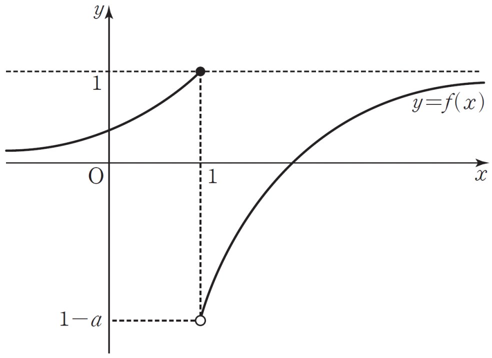
$k=3$

따라서 $f(x)=x^2(x-3)+3x$이므로

$f(2)=4\times(-1)+6=2$

118. 정답 8

곡선 $y=a^{x-1}$의 점근선의 방정식은 $y=0$이고 곡선 $y=1-\left(\dfrac{1}{a}\right)^{x-2}$의 점근선의 방정식은 $y=1$이므로 곡선 $y=f(x)$는 [그림 1]과 같다.



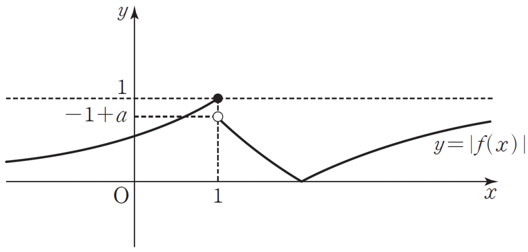
[그림 1]

(ⅰ) $-(1-a)<1$, 즉 $1<a<2$일 때

곡선 $y=|f(x)|$가 [그림 2]와 같다. x에 대한 방정식

$|f(x)|=|f(t)|$

의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t의 값은 $-1+a\le|f(t)|<1$을 만족시키므로 무수히 많다.



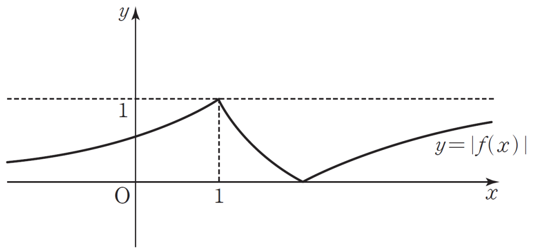
[그림 2]

(ⅱ) $-(1-a)=1$, 즉 $a=2$일 때

곡선 $y=|f(x)|$가 [그림 3]과 같으므로 x에 대한 방정식

$|f(x)|=|f(t)|$

의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t의 값은 존재하지 않는다.



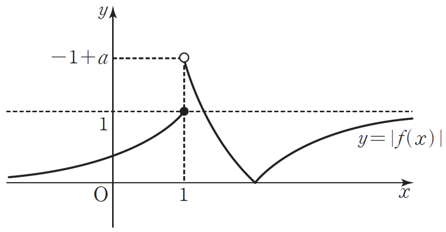
[그림 3]

(ⅲ) $-(1-a)>1$, 즉 $a>2$일 때

곡선 $y=|f(x)|$가 [그림 4]와 같으므로 x에 대한 방정식

$|f(x)|=|f(t)|$

의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t의 값은 곡선 $y=|f(x)|$와 직선 $y=1$의 교점의 x좌표이다.



[그림 4]

$d^{t-1}=1$에서 $t=1$이므로 $t_1=1$

$t_1+t_2=\frac{7}{3}$에서 $t_2=\frac{4}{3}$이므로

$-\left\{1-\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{4}{3}-2}\right\}=1$

$\left(\frac{1}{a}\right)^{-\frac{2}{3}}=2,\ a^{\frac{2}{3}}=2$

따라서

$a^2=2^3=8$

119. 정답 5

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서 연속이다.

$\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0-}(x^2+3x)=0$

$\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0+}f(x)$

$g(0)=0$

에서 $\lim_{x\to0+}f(x)=0$이고 $y=f(x)$는 연속함수이므로

$f(0)=0$ …… ㉠

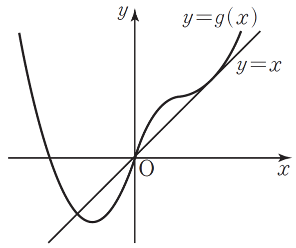
함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=0$에서 미분가능하다.

$$\lim_{x\to0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{x^2+3x-0}{x}$$
$$=\lim_{x\to0-}(x+3)$$
$$=3$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-0}{x}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$
$$=f'(0)$$

에서 $f'(0)=3$ …… ㉡

㉠, ㉡과 조건 (가)에 의하여 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=x$는 그림과 같다.



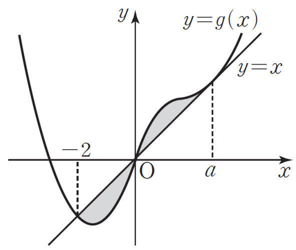
방정식 $x^2+3x=x$의 실근은

$x^2+2x=0$

$x(x+2)=0$

$x=-2$ 또는 $x=0$

방정식 $f(x)=x$의 양의 실근을 a라 하고 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 k $(k>0)$이라 하면 $f(x)-x=kx(x-a)^2$이라 놓을 수 있다.



$f'(x)-1=k(x-a)^2+2kx(x-a)$

㉡에서 $3-1=ka^2+0$이므로

$ka^2=2$ …… ㉢

조건 (나)에 의하여 $\int_{-2}^{a}\{g(x)-x\}dx=0$

$$\int_{-2}^{a}\{g(x)-x\}dx=\int_{-2}^{0}\{(x^2+3x)-x\}dx+\int_{0}^{a}\{f(x)-x\}dx$$
$$=\int_{-2}^{0}(x^2+2x)dx+\int_{0}^{a}kx(x-a)^2dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{-2}^{0}+\int_{-a}^{0}k(x+a)x^2dx$$

(평행이동에 의하여)

$$=0-\left(-\frac{8}{3}+4\right)+k\int_{-a}^{0}(x^3+ax^2)dx$$
$$=-\frac{4}{3}+k\left[\frac{x^4}{4}+\frac{ax^3}{3}\right]_{-a}^{0}$$
$$=-\frac{4}{3}+k\left\{0-\left(\frac{a^4}{4}-\frac{a^4}{3}\right)\right\}$$

$= -\frac{4}{3} + \frac{ka^4}{12}$

$= 0$

㉢에서 $\frac{4}{3} - \frac{2\times a^2}{12} = 0$이므로

$a^2 = 8$

㉢에서 $8k = 2$이므로

$k = \frac{1}{4}$

$f(x) = \frac{1}{4}x(x-2\sqrt{2})^2 + x$이므로

$f(\sqrt{2}) = \frac{1}{4}\times\sqrt{2}\times(\sqrt{2}-2\sqrt{2})^2 + \sqrt{2}$

$= \frac{3\sqrt{2}}{2}$

따라서 $p=2$, $q=3$이므로

$p+q=5$

120. 정답 9

$a_2 > a_1$이므로 $a_3 = a_2 - a_1$

$a_3 - a_2 = -a_1 > 0$에서 $a_3 > a_2$이므로

$a_4 = a_3 - a_2 = -a_1$

$a_4 - a_3 = -a_2$에서

(ⅰ) $a_2 \le 0$일 때

$a_4 - a_3 = -a_2 \ge 0$에서 $a_4 \ge a_3$이므로

$a_5 = a_4 - a_3 = -a_2$

$a_5 - a_4 = -a_2 + a_1 < 0$에서 $a_5 < a_4$이므로

$a_6 = a_5 + a_4 = -a_2 - a_1$

$a_6 - a_5 = a_4 = -a_1 > 0$에서 $a_6 > a_5$이므로

$a_7 = a_6 - a_5 = -a_1$

$a_4 + a_7 = -2a_1 = 12$이므로

$a_1 = -6$

즉, $k=6$

(ⅱ) $a_2 > 0$일 때

$a_4 - a_3 = -a_2 < 0$에서 $a_4 < a_3$이므로

$a_5 = a_4 + a_3 = a_2 - 2a_1$

$a_5 - a_4 = a_2 - a_1 > 0$에서 $a_5 > a_4$이므로

$a_6 = a_5 - a_4 = a_2 - a_1$

$a_6 - a_5 = -a_4 = a_1 < 0$에서 $a_6 < a_5$이므로

$a_7 = a_6 + a_5 = 2a_2 - 4a_1 = 12$이므로

$a_2 = 2a_1 + 6 = -2k + 6$

$-2k + 6 > 0$이므로 $k < 3$

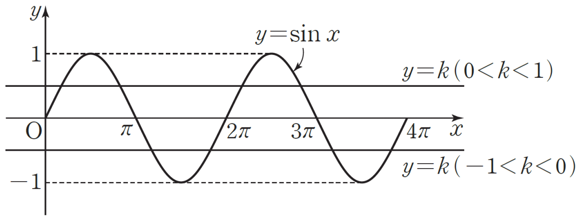
즉, $k=1$ 또는 $k=2$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 모든 k의 값의 합은

$6+1+2=9$

121. 정답 ⑤

함수 $f(x) = \sin x\,(0 \le x \le 4\pi)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서만 만나기 위해서는 $-1<k<0$ 또는 $0<k<1$이다.



$-1<k<0$이면 $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{3}{2}\pi$, $\frac{x_3+x_4}{2} = \frac{7}{2}\pi$이므로

$x_1+x_2+x_3+x_4 = 10\pi$이고, 이는 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

$0<k<1$이면 $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{\pi}{2}$, $\frac{x_3+x_4}{2} = \frac{5}{2}\pi$이므로

$x_1+x_2+x_3+x_4 = 6\pi$이고, 이는 주어진 조건을 만족시킨다.

$0<k<1$일 때, $0<x_1<\frac{\pi}{2}$, $x_4 = 3\pi - x_1$이므로

$\sin(x_4 - x_1) = \sin(3\pi - 2x_1) = \sin 2x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 < 2x_1 < \pi$이므로

$2x_1 = \frac{\pi}{3}$ 또는 $2x_1 = \frac{2}{3}\pi$

즉, $x_1 = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x_1 = \frac{\pi}{3}$

따라서 구하는 모든 x_1의 값의 합은 $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$

122. 정답 ②

시각 $t=a$에서 두 점 P, Q의 속도가 같으므로

$a^2 - 4a + a = 2a - b$

$a^2 - 5a = -b$ …… ㉠

또 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 두 점 P, Q의 위치의 변화량은 각각

$\int_0^a (t^2 - 4t + a)dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + at\right]_0^a = \frac{1}{3}a^3 - a^2$,

$\int_0^a (2t - b)dt = \left[t^2 - bt\right]_0^a = a^2 - ab$,

이고 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 두 점 P, Q의 위치의 변화량이 같으므로

$\frac{1}{3}a^3 - a^2 = a^2 - ab$, $\frac{1}{3}a^3 - 2a^2 = -ab$

$a>0$이므로 양변을 a로 나누면

$\frac{1}{3}a^2 - 2a = -b$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a^2-5a=\frac{1}{3}a^2-2a$, $\frac{2}{3}a^2=3a$

$a>0$이므로 양변을 a로 나누면 $\frac{2}{3}a=3$, $a=\frac{9}{2}$

$a=\frac{9}{2}$를 ㉠에 대입하면 $\frac{81}{4}-\frac{45}{2}=-b$, $b=\frac{9}{4}$

따라서 $a+b=\frac{9}{2}+\frac{9}{4}=\frac{27}{4}$

123. 정답 ⑤

조건 (가)에서 $a_{2n-1}=n^2+2n$

$a_{2n+1}=(n+1)^2+2(n+1)=n^2+4n+3$

조건 (나)에서 $a_{2n+1}-a_{2n}=d\ (d>0)$이라 하면

모든 자연수 n에 대하여 $a_{2n}>a_{2n-1}$이므로

$a_{2n+1}-d>a_{2n-1}$

즉, $n^2+4n+3-d>n^2+2n$이므로

$d<2n+3$ …… ㉠

모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립하고 d는 자연수이므로

$1\le d\le 4$ …… ㉡

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{16}a_n&=\sum_{n=1}^{8}a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{8}a_{2n}\\&=\sum_{n=1}^{8}a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{8}(a_{2n+1}-d)\\&=\sum_{n=1}^{8}(n^2+2n)+\sum_{n=1}^{8}(n^2+4n+3-d)\\&=\sum_{n=1}^{8}(2n^2+6n+3-d)\\&=2\sum_{n=1}^{8}n^2+6\sum_{n=1}^{8}n+(3-d)\sum_{n=1}^{8}1\\&=2\times\frac{8\times9\times17}{6}+6\times\frac{8\times9}{2}+(3-d)\times8\\&=648-8d\end{aligned}$$

d가 최대일 때 $\sum_{n=1}^{16}a_n$의 값이 최소이므로 ㉡에서 $d=4$이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{16}a_n$의 최솟값은 $648-8\times4=616$

124. 정답 ⑤

조건 (가)에서 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=t$에서도 연속이다. 즉, $\lim_{x\to t-}g(x)=\lim_{x\to t+}g(x)=g(t)$이어야 한다. 이때

$\lim_{x\to t-}g(x)=\lim_{x\to t-}f(x)=f(t)$,

$\lim_{x\to t+}g(x)=\lim_{x\to t+}\{-f(x)\}=-f(t)$,

$g(t)=-f(t)$

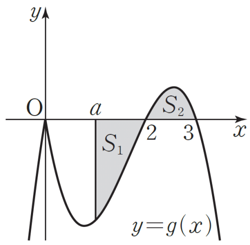
이므로 $f(t)=-f(t)$에서 $f(t)=0$

따라서 $t(t-2)(t-3)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=2$ 또는 $t=3$

(ⅰ) $t=0$일 때

$g(x)=\begin{cases}f(x) & (x<0)\\-f(x) & (x\ge 0)\end{cases}$이므로

함수 $y=g(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같고,



[그림 1]

$$\begin{aligned}\int_0^2 g(x)dx&=\int_0^2\{-f(x)\}dx\\&=-\int_0^2(x^3-5x^2+6x)dx\\&=-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+3x^2\right]_0^2=-\frac{8}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_2^3 g(x)dx&=\int_2^3\{-f(x)\}dx\\&=-\int_2^3(x^3-5x^2+6x)dx\\&=-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+3x^2\right]_2^3\\&=-\left(\frac{9}{4}-\frac{8}{3}\right)\\&=\frac{5}{12}\end{aligned}$$

이때 $a\le x\le 2$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=a\,(0<a<2)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, $2\le x\le 3$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면 $S_1>S_2$가 되도록 하는 $0<a<2$인 실수 a가 존재한다.

즉, $\int_a^2\{-g(x)\}dx>\int_2^3 g(x)dx$에서

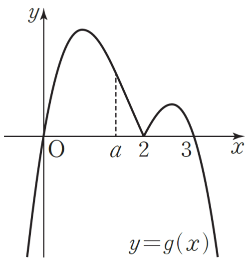
$\int_a^2 g(x)dx+\int_2^3 g(x)dx=\int_a^3 g(x)dx<0$

이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $t=2$일 때

$g(x)=\begin{cases}f(x) & (x<2)\\-f(x) & (x\ge 2)\end{cases}$이므로

함수 $y=g(x)$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

$0<x<3$인 모든 실수 x에 대하여

$x \neq 2$일 때 $g(x)>0$이므로 $0<a<2$인 모든 실수 a에 대하여

$$\int_a^3 g(x)dx>0$$

이다. 즉, 조건 (나)를 만족시킨다.

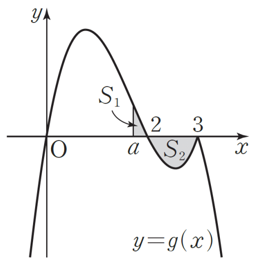
따라서

$$\begin{aligned}\int_1^3 g(x)dx &= \int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 \{-f(x)\}dx \\ &= \int_1^2 (x^3-5x^2+6x)dx-\int_2^3 (x^3-5x^2+6x)dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+3x^2\right]_1^2-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+3x^2\right]_2^3 \\ &= \left(\frac{8}{3}-\frac{19}{12}\right)-\left(\frac{9}{4}-\frac{8}{3}\right)=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

(ⅲ) $t=3$일 때

$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<3) \\ -f(x) & (x \geq 3)\end{cases}$이므로

함수 $y=g(x)$의 그래프는 [그림 3]과 같고,



[그림 3]

$$\int_0^2 g(x)dx=\int_0^2 f(x)dx=\frac{8}{3}$$

$$\int_2^3 g(x)dx=\int_2^3 f(x)dx=-\frac{5}{12}$$

이때 $a \leq x \leq 2$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=a\,(0<a<2)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, $2 \leq x \leq 3$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면 $S_1<S_2$가 되도록 하는 $0<a<2$인 실수 a가 존재한다.

즉, $\int_a^2 g(x)dx<\int_2^3 \{-g(x)\}dx$에서

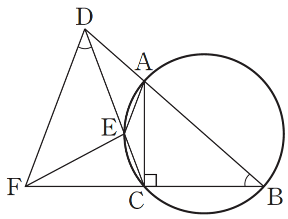
$$\int_a^2 g(x)dx+\int_2^3 g(x)dx=\int_a^3 g(x)dx<0$$

이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$$\int_1^3 g(x)dx=\frac{3}{2}$$

125. 정답 ②



$\angle ACB=\frac{\pi}{2}$이므로

$$\overline{BC}=\overline{AB}\cos(\angle CBA)=8\times\frac{3}{4}=6$$

점 D는 선분 AB를 $1:3$으로 외분하는 점이므로

$$\overline{BD}=\frac{3}{2}\times\overline{AB}=\frac{3}{2}\times 8=12$$

$$\overline{AD}=\frac{1}{2}\times\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 8=4$$

삼각형 BDC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{CD}^2 &= \overline{BC}^2+\overline{BD}^2-2\times\overline{BC}\times\overline{BD}\times\cos(\angle CBD) \\ &= 6^2+12^2-2\times 6\times 12\times\frac{3}{4} \\ &= 72\end{aligned}$$

이므로 $\overline{CD}=6\sqrt{2}$

$\angle CDF=\angle DBF$이고 $\angle DFC$는 공통이므로

두 삼각형 DFC와 BFD는 서로 닮음이고 닮음비는

$\overline{CD} : \overline{DB}=6\sqrt{2} : 12=1 : \sqrt{2}$

이때 $\overline{CF}=x\ (x>0)$이라 하면 $\overline{DF}=\sqrt{2}x$

또 $\overline{DF} : \overline{BF}=1 : \sqrt{2}$이므로

$\overline{BF}=\sqrt{2}\times\overline{DF}=\sqrt{2}\times\sqrt{2}x=2x$

$\overline{BF}=\overline{BC}+\overline{CF}=6+x$에서

$6+x=2x$

즉, $x=6$이므로 $\overline{CF}=6$, $\overline{DF}=6\sqrt{2}$

$\angle AED=\pi-\angle AEC=\angle CBA$이고 $\angle ADE$가 공통이므로

두 삼각형 EAD와 BCD는 서로 닮음이다.

$\overline{AD} : \overline{CD}=\overline{ED} : \overline{BD}$에서

$$\overline{ED}=\frac{\overline{AD}\times\overline{BD}}{\overline{CD}}=\frac{4\times 12}{6\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$$

$$\overline{CE}=\overline{CD}-\overline{ED}=6\sqrt{2}-4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

삼각형 DFC가 $\overline{CD}=\overline{DF}$인 이등변삼각형이므로

$$\cos(\angle DCF)=\frac{\frac{1}{2}\overline{CF}}{\overline{CD}}=\frac{\frac{1}{2}\times 6}{6\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin(\angle DCF)=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{14}}{4}$$

따라서 삼각형 CEF의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{CE}\times\overline{CF}\times\sin(\angle ECF)$$

$=\frac{1}{2}\times\overline{CE}\times\overline{CF}\times\sin(\angle DCF)$

$=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 6\times\frac{\sqrt{14}}{4}=3\sqrt{7}$

126. 정답 ③

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$, 즉 $y=f'(t)x+f(t)-tf'(t)$

이므로

$g(t)=f(t)-tf'(t)$

$\quad=(t^3+at^2+bt+c)-t(3t^2+2at+b)$

$\quad=-2t^3-at^2+c$

한편, $g(t)-g(0)=-2t^3-at^2=-t^2(2t+a)$이므로

$g(t)-g(0)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=-\frac{a}{2}$

조건 (나)에 의하여 함수 $|g(t)-g(0)|$은 $t=1$에서만 미분가능하지 않으므로

$-\frac{a}{2}=1$, $a=-2$

$g(t)=-2t^3+2t^2+c$에서

$g'(t)=-6t^2+4t=-2t(3t-2)$

$g'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=\frac{2}{3}$

함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $g(t)$는 $t=\frac{2}{3}$에서 극댓값 $\frac{35}{27}$를 가지므로

$g\left(\frac{2}{3}\right)=-2\times\frac{8}{27}+2\times\frac{4}{9}+c=\frac{8}{27}+c=\frac{35}{27}$에서 $c=1$

따라서 $g(t)=-2t^3+2t^2+1$이므로

$g(-2)=16+8+1=25$

127. 정답 ①

조건 (가)에서 a_1이 자연수이고 조건 (나)에 의하여 수열 $\{a_n\}$의 모든항은 자연수이다. …… ㉠

$a_{k+1}-a_k=5$이고 $a_{k+2}-a_{k+1}\neq 5$인 자연수 k의 최댓값을 m이라 하자.

$a_{m+1}-a_m=5$, $a_{m+2}-a_{m+1}\neq 5$이므로

$a_{m+1}=a_m+5$, $a_{m+2}=\frac{24}{a_{m+1}}+2$

㉠에서 a_m은 자연수이므로 $a_{m+1}\geq 6$

또 a_{m+1}이 24의 약수이므로 6, 8, 12, 24 중 하나이다.

a_{m+1}의 값이 6, 8, 12, 24인 경우 a_m의 값은 각각 1, 3, 7, 19이다.

이때 $a_{m+1}=a_m+5$, $a_{m+1}=\frac{24}{a_m}+2$를 모두 만족시키는 자연수 a_m은 존재하지 않으므로 $a_{m+1}=a_m+5$에서 a_m은 24의 약수가 아니어야 한다.

1, 3은 24의 약수이므로 a_m의 값은 7, 19 중 하나이다.

(ⅰ) $a_m=7$인 경우

$a_m=a_{m-1}+5$이면 $a_{m-1}=2$이므로 조건 (나)에 모순이다.

$a_m=\frac{24}{a_{m-1}}+2$이면 $a_{m-1}=\frac{24}{5}$이므로 ㉠에 모순이다.

(ⅱ) $a_m=19$인 경우

$a_{m+1}=19+5=24$, $a_{m+2}=\frac{24}{24}+2=3$, $a_{m+3}=\frac{24}{3}+2=10$

10보다 큰 24의 약수는 12, 24뿐이고

$10+5n=12$ 또는 $10+5n=24$인 자연수 n은 존재하지 않으므로

$l\geq m+3$인 모든 자연수 l에 대하여 $a_{l+1}=a_l+5$이다.

즉, $a_{k+1}-a_k=5$이고 $a_{k+2}-a_{k+1}\neq 5$인 m보다 큰 자연수 k가 존재하지 않는다.

한편, $a_m=19$에서

$a_m=a_{m-1}+5$이면 $a_{m-1}=14$

$a_m=\frac{24}{a_{m-1}}+2$이면 $a_{m-1}=\frac{24}{17}$이므로 ㉠에 모순이다.

$a_{m-1}=14$에서

$a_{m-1}=a_{m-2}+5$이면 $a_{m-2}=9$

$a_{m-1}=\frac{24}{a_{m-2}}+2$이면 $a_{m-2}=2$

$a_{m-2}=9$에서

$a_{m-2}=a_{m-3}+5$이면 $a_{m-3}=4$이므로 조건 (나)에 모순이다.

$a_{m-2}=\frac{24}{a_{m-3}}+2$이면 $a_{m-3}=\frac{24}{7}$이므로 ㉠에 모순이다.

$a_{m-2}=2$에서

$a_{m-2}=a_{m-3}+5$이면 $a_{m-3}=-3$이므로 ㉠에 모순이다.

$a_{m-2}=\frac{24}{a_{m-3}}+2$이면 a_{m-3}이 존재하지 않는다.

즉, 조건을 만족시키는 a_{m-3}의 값이 존재하지 않으므로 $m\leq 3$

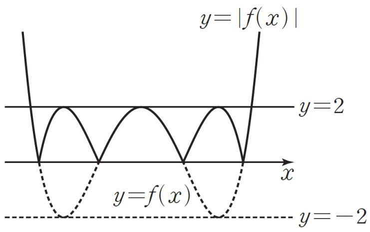
(ⅰ), (ⅱ)에서 자연수 k는 $a_1=2$ 또는 $a_1=9$일 때 최댓값 3을 갖는다.

128. 정답 80

주어진 함수 $y=g(t)$의 그래프로부터 함수 $g(t)$는 다음과 같다.

$$g(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 4 & (t=0)\\ 8 & (0<t<2)\\ 5 & (t=2)\\ 2 & (t>2)\end{cases}$$

$g(2)=5$에서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=2$의 서로 다른 교점의 개수가 5이고, $t>2$일 때 $g(t)=2$이므로 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

즉, 함수 $f(x)$의 극댓값은 2, 극솟값은 -2이다.

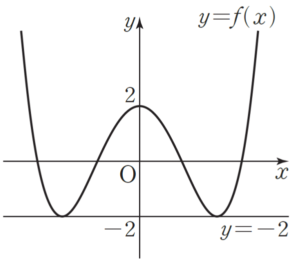
한편, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x}=0$에서 $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}\{f(x)-2\}=0$이고 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $f(0)=2$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=0$이므로

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 2를 갖는다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=-2$와 서로 다른 두 점에서 접하므로 두 접점의 x좌표를 각각 α, β라 하면

$f(x)+2=\frac{1}{2}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$ (단, $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$)

즉, $f(x)=\frac{1}{2}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2-2$ …… ㉠

$$\begin{aligned}f'(x)&=(x-\alpha)(x-\beta)^2+(x-\alpha)^2(x-\beta)\\&=(x-\alpha)(x-\beta)(2x-\alpha-\beta)\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$ 또는 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$이므로 $\frac{\alpha+\beta}{2}=0$, $\beta=-\alpha$

$\beta=-\alpha$를 ㉠에 대입하면

$f(x)=\frac{1}{2}(x-\alpha)^2(x+\alpha)^2-2=\frac{1}{2}(x^2-\alpha^2)^2-2$

$f(0)=\frac{1}{2}\alpha^4-2=2$에서 $\alpha^4=8$, $\alpha^2=2\sqrt{2}$

즉, $f(x)=\frac{1}{2}(x^2-2\sqrt{2})^2-2$이므로

$f(2)=\frac{1}{2}(4-2\sqrt{2})^2-2=10-8\sqrt{2}$

따라서 $p=10$, $q=8$이므로 $p\times q=10\times 8=80$

129. 정답 16

곡선 $y=a^x$ 위의 점 P는 제2사분면 위의 점이므로 점 P의 x좌표를 $-k\,(k>0)$이라 하면 $\mathrm{P}(-k,\ a^{-k})$이다.

곡선 $y=-b^x$ 위의 점 Q는 제4사분면 위의 점이고 조건 (가)에서 $\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{OQ}}=1:4$이므로 $\mathrm{Q}(4k,\ -b^{4k})$이다.

두 점 P, Q는 직선 $x+2y=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x$ 위의 점이므로

$a^{-k}=\frac{k}{2}$, 즉 $a^k=\frac{2}{k}$ …… ㉠

$-b^{4k}=-2k$, 즉 $b^{4k}=2k$ …… ㉡

조건 (가)에서 $\overline{\mathrm{OP}}=l$, $\overline{\mathrm{OR}}=2l$, $\overline{\mathrm{OQ}}=4l\,(l>0)$이라 하자.

조건 (나)에서 $\angle\mathrm{RPO}=\angle\mathrm{QRO}$이고 $\angle\mathrm{PQR}$은 공통이므로 두 삼각형 QPR과 QRO는 서로 닮음이다.

이때 $\overline{\mathrm{RP}}:\overline{\mathrm{RQ}}=\overline{\mathrm{OR}}:\overline{\mathrm{OQ}}=1:2$이므로

$\overline{\mathrm{RP}}=m$, $\overline{\mathrm{RQ}}=2m\,(m>0)$이라 하자.

$\overline{\mathrm{RQ}}:\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{RQ}}$에서

$\overline{\mathrm{OQ}}\times(\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{OQ}})=\overline{\mathrm{RQ}}^2$이므로

$4l\times 5l=(2m)^2$, $m^2=5l^2$

$m=\sqrt{5}\,l$

$\overline{\mathrm{OR}}=2l$, $\overline{\mathrm{OQ}}=4l$, $\overline{\mathrm{RQ}}=2\sqrt{5}\,l$에서 $\overline{\mathrm{RQ}}^2=\overline{\mathrm{OR}}^2+\overline{\mathrm{OQ}}^2$이므로

삼각형 QRO는 $\angle\mathrm{ROQ}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

즉, 두 직선 OR, OQ는 서로 수직이다.

따라서 직선 OR의 기울기는 2이므로 $\mathrm{R}(t,\ 2t)$ $(t>0)$이라 하자.

$\angle\mathrm{PRQ}=\angle\mathrm{ROQ}=\frac{\pi}{2}$, 즉 두 직선 PR, QR은 서로 수직이므로

$$\frac{2t-\frac{k}{2}}{t-(-k)}\times\frac{2t-(-2k)}{t-4k}=-1$$

$(4t-k)(t+k)=-(t+k)(t-4k)$

$t+k>0$이므로 $4t-k=-t+4k$

$5t=5k$, $t=k$

즉, 점 R의 좌표는 $(k,\ 2k)$이고 점 R은 곡선 $y=a^x$ 위의 점이므로

$2k=a^k$ …… ㉢

㉠, ㉢에서

$\dfrac{2}{k}=2k,\ k^2=1$

$k>0$이므로 $k=1$

$k=1$을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$a=2,\ b^4=2$

따라서 $a^3\times b^4=2^3\times 2=16$

130. 정답 54

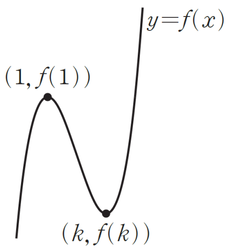
조건 (가)에서 $f'(x)=3(x-1)(x-k)$이고 $k>1$이므로

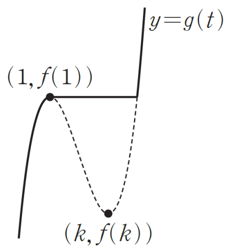
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=k$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	k	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대, $x=k$에서 극소이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(t)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.





이때 $\displaystyle\lim_{t\to 1+}\frac{g(t)-g(1)}{t-1}=0$이므로

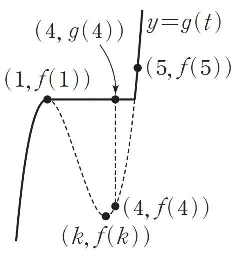
$\displaystyle\lim_{t\to 1-}\frac{g(t)-g(1)}{t-1}\times\lim_{t\to 1+}\frac{g(t)-g(1)}{t-1}-0$

즉, 1은 집합 A의 원소이고 집합 A의 정수인 원소 중 최솟값이다.

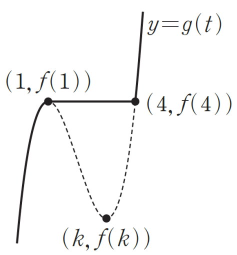
조건 (나)에 의하여 집합 A의 원소 중 정수인 것의 개수가 4이기 위해서는 $a=1,\ 2,\ 3,\ 4$일 때 $\displaystyle\lim_{t\to a-}\frac{g(t)-g(a)}{t-a}\times\lim_{t\to a+}\frac{g(t)-g(a)}{t-a}=0$

이고 $\displaystyle\lim_{t\to 5-}\frac{g(t)-g(5)}{t-5}\times\lim_{t\to 5+}\frac{g(t)-g(5)}{t-5}\neq 0$이어야 한다.

즉, 정수 중에서 $1,\ 2,\ 3,\ 4$만 집합 A의 원소이어야 하므로 [그림 1] 또는 [그림 2]와 같이 $f(4)\le f(1)<f(5)$이어야 한다.



[그림 1]



[그림 2]

한편,

$f(x)=\displaystyle\int 3(x-1)(x-k)dx$

$\quad=\displaystyle\int\{3x^2-3(1+k)x+3k\}dx$

$\quad=x^3-\dfrac{3}{2}(1+k)x^2+3kx+C$ (단, C는 적분상수)

이고 $f(0)=0$이므로 $C=0$

즉, $f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}(1+k)x^2+3kx$이므로

$f(1)=1-\dfrac{3}{2}(1+k)+3k=\dfrac{3}{2}k-\dfrac{1}{2}$

$f(4)=64-24(1+k)+12k=-12k+40$

$f(5)=125-\dfrac{75}{2}(1+k)+15k=-\dfrac{45}{2}k+\dfrac{175}{2}$

$f(4)\le f(1)$에서

$-12k+40\le\dfrac{3}{2}k-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{27}{2}k\ge\dfrac{81}{2},\ k\ge 3$ …… ㉠

$f(1)<f(5)$에서

$\dfrac{3}{2}k-\dfrac{1}{2}<-\dfrac{45}{2}k+\dfrac{175}{2},\ 24k<88,\ k<\dfrac{11}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $3\le k<\dfrac{11}{3}$

따라서 $f(6)=216-54(1+k)+18k=-36k+162$이고

$-36\times\dfrac{11}{3}+162<-36k+162\le -36\times 3+162$, 즉

$30<f(6)\le 54$이므로 $f(6)$의 최댓값은 54이다.

131. 정답 ④

조건 (가)에서

$\dfrac{\log a+\log b}{5}=\dfrac{\log a-\log b}{3}=k$ (k는 실수)

라 하면

$\log a+\log b=5k,\ \log a-\log b=3k$이므로

$\log a=4k,\ \log b=k$

조건 (나)에서 $a^{-1+\log b}$과 1000은 모두 양수이므로

$\log a^{-1+\log b}=\log 1000$

$(-1+\log b)\times\log a=3$

$(-1+k)\times 4k=3$

$4k^2-4k-3=0,\ (2k+1)(2k-3)=0$

$a,\ b$가 모두 1보다 큰 실수이므로

$k>0$에서 $k=\dfrac{3}{2}$

따라서 $\log a=4k=6,\ \log b=k=\dfrac{3}{2}$이므로

$\log a+2\log b=6+2\times\dfrac{3}{2}=9$

132. 정답 ⑤

두 점 P, Q의 시각 t $(t\ge 0)$에서의 위치를 각각 $x_1(t),\ x_2(t)$라 하면

$x_1(t)=0+\displaystyle\int_0^t(3t^2+4at+10)dt$

$= t^3 + 2at^2 + 10t$

$x_2(t) = 0 + \int_0^t (4t + a)dt$

$= 2t^2 + at$

이므로

$f(t) = |x_1(t) - x_2(t)| = |t^3 + 2(a-1)t^2 + (10-a)t|$

$g(t) = t^3 + 2(a-1)t^2 + (10-a)t$라 하면

$g'(t) = 3t^2 + 4(a-1)t + 10 - a$

$= 3\left\{t + \frac{2}{3}(a-1)\right\}^2 - \frac{4}{3}(a-1)^2 + 10 - a$

$t \geq 0$에서 함수 $f(t)$가 증가하고 $f(0) = 0$이므로

$t > 0$에서 $g'(t) \geq 0$이어야 한다.

(i) $a < 1$일 때

$-\frac{2}{3}(a-1) > 0$이므로 $t > 0$에서 $g'(t) \geq 0$이려면

$g'\left(-\frac{2}{3}(a-1)\right) \geq 0$이어야 한다.

즉, $-\frac{4}{3}(a-1)^2 + 10 - a \geq 0$에서

$4(a-1)^2 - 3(10-a) \leq 0$

$4a^2 - 5a - 26 \leq 0$, $(a+2)(4a-13) \leq 0$

$-2 \leq a \leq \frac{13}{4}$

그러므로 $-2 \leq a < 1$

(ii) $a \geq 1$일 때

$-\frac{2}{3}(a-1) \leq 0$이므로 $t > 0$에서 $g'(t) \geq 0$이려면

$\lim_{t \to 0+} g'(t) \geq 0$이면 충분하다.

즉, $10 - a \geq 0$에서 $a \leq 10$

그러므로 $1 \leq a \leq 10$

(i), (ii)에서 $-2 \leq a \leq 10$ …… ㉠

$f(2) = |8 + 8(a-1) + 2(10-a)| = |6a + 20|$

이므로 ㉠에 의하여

$8 \leq f(2) \leq 80$

따라서 $f(2)$의 최댓값과 최솟값의 합은

$80 + 8 = 88$

133. 정답 ⑤

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

$a_2 = 2a_1$에서 $a + d = 2a$이므로 $a = d$

$a_n = a + (n-1)d = a + (n-1)a = an$이므로

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} ak = \frac{an(n+1)}{2}$

$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{S_k} = \sum_{k=1}^{5} \frac{2}{ak(k+1)}$

$= \frac{2}{a}\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

$= \frac{2}{a}\left\{\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right)\right\}$

$= \frac{2}{a}\left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{3a}$

$\frac{5}{3a} = 5$에서 $a = \frac{1}{3}$

따라서 $S_n = \frac{n(n+1)}{6}$이므로

$\sum_{k=1}^{14} \frac{a_{k+1}}{S_k S_{k+1}} = \sum_{k=1}^{14} \frac{S_{k+1} - S_k}{S_k S_{k+1}}$

$= \sum_{k=1}^{14}\left(\frac{1}{S_k} - \frac{1}{S_{k+1}}\right)$

$= \left(\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2}\right) + \left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{S_{14}} - \frac{1}{S_{15}}\right)$

$= \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_{15}}$

$= \frac{6}{1 \times 2} - \frac{6}{15 \times 16} = 3 - \frac{1}{40} = \frac{119}{40}$

134. 정답 ①

함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이므로 조건 (가)에 의하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

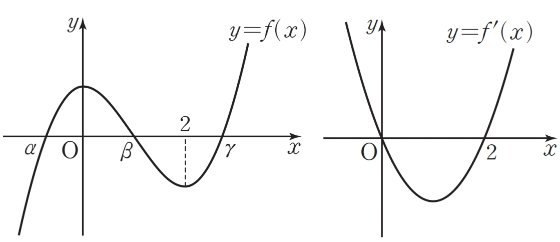
x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

방정식 $f(x) = 0$의 서로 다른 실근의 개수를 기준으로 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하면 다음과 같다.

(i) 방정식 $f(x) = 0$이 서로 다른 세 실근을 가질 때

$f(0)f(2) < 0$이고, 방정식 $f(x) = 0$의 세 실근을 α, β, γ $(\alpha < \beta < \gamma)$라 하면

$\alpha < 0 < \beta < \gamma$이므로 두 함수 $y = f(x)$, $y = f'(x)$의 그래프는 그림과 같다.



방정식 $f(f'(x)) = 0$에서

$f'(x) = \alpha$ 또는 $f'(x) = \beta$ 또는 $f'(x) = \gamma$

이때 함수 $y = f'(x)$의 그래프와 직선 $y = \beta$, 직선 $y = \gamma$는 각각 서로 다른 두 점에서 만나므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

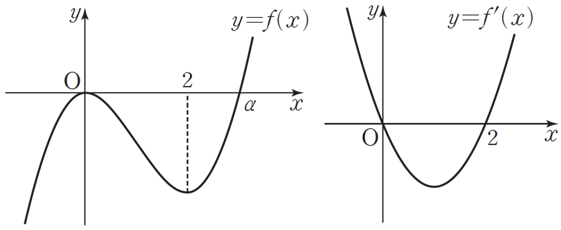
(ii) 방정식 $f(x) = 0$이 서로 다른 두 실근만을 가질 때

$f(0)f(2) = 0$에서 $f(0) = 0$, $f(2) \neq 0$ 또는 $f(0) \neq 0$, $f(2) = 0$

① $f(0)=0$, $f(2)\neq 0$일 때

방정식 $f(x)=0$의 중근이 아닌 한 실근을 α $(\alpha>2)$라 하면

두 함수 $y=f(x)$, $y=f'(x)$의 그래프는 그림과 같다.



방정식 $f(f'(x))=0$에서

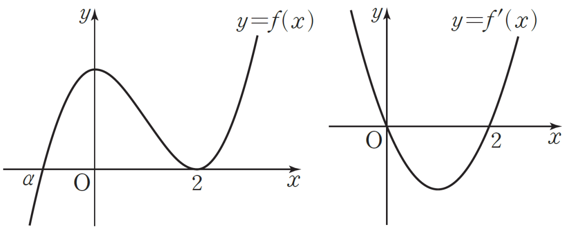
$f'(x)=0$ 또는 $f'(x)=\alpha$

이때 함수 $y=f'(x)$의 그래프와 직선 $y=0$, 직선 $y=\alpha$는 각각 서로 다른 두 점에서 만나므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

② $f(0)\neq 0$, $f(2)=0$일 때

방정식 $f(x)=0$의 중근이 아닌 한 실근을 α $(\alpha<0)$이라 하면

두 함수 $y=f(x)$, $y=f'(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$f(x)=k(x-2)^2(x-\alpha)$ (k는 $k>0$인 상수)로 놓으면

$f'(x)=2k(x-2)(x-\alpha)+k(x-2)^2$

$\quad\quad =k(x-2)(3x-2\alpha-2)$

$f'(0)=4k(\alpha+1)=0$에서 $\alpha=-1$

즉, $f(x)=k(x+1)(x-2)^2$이고, $f'(x)=3kx(x-2)$

방정식 $f(f'(x))=0$에서

$f'(x)=-1$ 또는 $f'(x)=2$

함수 $y=f'(x)$의 그래프와 직선 $y=2$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 조건 (나)를 만족시키기 위해서는 함수 $y=f'(x)$의 그래프와 직선 $y=-1$이 한 점에서 만나야 한다.

함수 $y=f'(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 $f'(1)=-1$이어야 한다.

$f'(1)=3k\times(-1)=-1$에서 $k=\dfrac{1}{3}$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{3}(x+1)(x-2)^2$

(iii) 방정식 $f(x)=0$이 한 실근만을 가질 때

방정식 $f(x)=0$의 한 실근을 a라 하면

방정식 $f(f'(x))=0$에서

$f'(x)=\alpha$

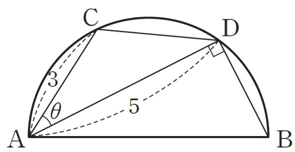
이때 함수 $y=f'(x)$의 그래프와 직선 $y=\alpha$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 2 이하이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $f(x)=\dfrac{1}{3}(x+1)(x-2)^2$이므로

$f(5)=\dfrac{1}{3}\times 6\times 9=18$

135. 정답 ④

$\angle \mathrm{CAD}=\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면



$\tan\theta=\dfrac{3}{4}$에서 $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$, $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{CD}}^2=\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{AD}}^2-2\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{AD}}\times cos\theta$

$\quad\quad =3^2+5^2-2\times3\times5\times\dfrac{4}{5}=10$

이므로 $\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{10}$

삼각형 ADC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여 $\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{sin\theta}=2R$이므로

$R=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{sin\theta}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{10}}{\frac{3}{5}}=\dfrac{5\sqrt{10}}{6}$

직각삼각형 ABD에서

$\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{AD}}^2}=\sqrt{\left(\dfrac{5\sqrt{10}}{3}\right)^2-5^2}=\sqrt{\dfrac{25}{9}}=\dfrac{5}{3}$

삼각형 ABD의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{BD}}=\dfrac{1}{2}\times5\times\dfrac{5}{3}=\dfrac{25}{6}$

삼각형 ADC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{AD}}\times sin\theta=\dfrac{1}{2}\times3\times5\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{9}{2}$

따라서 사각형 ABDC의 넓이는

$\dfrac{25}{6}+\dfrac{9}{2}=\dfrac{26}{3}$

136. 정답 ⑤

$g(x)=\displaystyle\int_x^{x+3}f(|t|)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(|x+3|)-f(|x|)$ …… ㉠

함수 $g(x)$가 $x=\dfrac{1}{2}$에서 극소이므로 $g'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$에서

$g'\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{7}{2}\right)-f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$

즉, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{7}{2}\right)$ …… ㉡

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이고, ㉡에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

$f(x)=(x-2)^2+k$ (k는 상수)

로 놓을 수 있다.

또 $g(1)=0$이므로

$$g(1)=\int_1^4\{(|t|-2)^2+k\}dt=\int_1^4\{(t-2)^2+k\}dt$$
$$=\int_1^4(t^2-4t+4+k)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+(4+k)t\right]_1^4$$
$$=\left(\frac{64}{3}-32+16+4k\right)-\left(\frac{1}{3}-2+4+k\right)$$
$$=3+3k=0$$

에서 $k=-1$

그러므로

$f(x)=(x-2)^2-1=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

이고,

$$f(|x|)=\begin{cases}(x+1)(x+3) & (x<0)\\(x-1)(x-3) & (x\ge 0)\end{cases}$$

$$f(|x+3|)=\begin{cases}(x+4)(x+6) & (x<-3)\\x(x+2) & (x\ge -3)\end{cases}$$

이때 ㉠에서 $g'(x)=0$, 즉 $f(|x|)=f(|x+3|)$인 x의 값을 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) $x<-3$일 때

$(x+1)(x+3)=(x+4)(x+6)$에서

$x^2+4x+3=x^2+10x+24$

$6x=-21$, $x=-\frac{7}{2}$

(ⅱ) $-3\le x<0$일 때

$(x+1)(x+3)=x(x+2)$에서

$x^2+4x+3=x^2+2x$

$2x=-3$, $x=-\frac{3}{2}$

(ⅲ) $x\ge 0$일 때

$(x-1)(x-3)=x(x+2)$에서

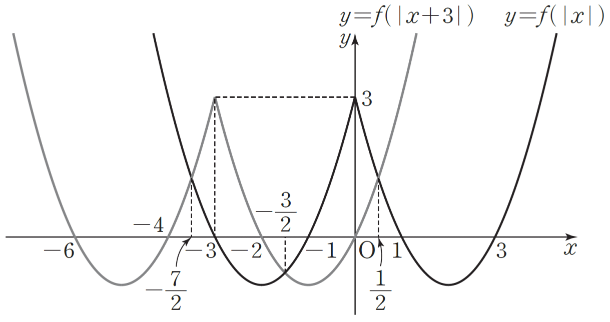
$x^2-4x+3=x^2+2x$

$6x=3$, $x=\frac{1}{2}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $f(|x|)=f(|x+3|)$인 x의 값은

$-\frac{7}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$

이고, 두 함수 $y=f(|x|)$, $y=f(|x+3|)$의 그래프는 그림과 같다.



㉠에 의하여 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{7}{2}$	$\cdots$	$-\frac{3}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=-\frac{3}{2}$에서 극대이므로 함수 $g(x)$의 극댓값은

$$g\left(-\frac{3}{2}\right)=\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}f(|t|)dt=2\int_0^{\frac{3}{2}}f(|t|)dt=2\int_0^{\frac{3}{2}}f(t)dt$$
$$=2\int_0^{\frac{3}{2}}(t^2-4t+3)dt=2\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_0^{\frac{3}{2}}$$
$$=2\left(\frac{9}{8}-\frac{9}{2}+\frac{9}{2}\right)=\frac{9}{4}$$

[참고]

㉠은 다음과 같이 보일 수 있다.

$$g(x)=\int_x^{x+3}f(|t|)dt$$
$$=\int_0^{x+3}f(|t|)dt-\int_0^x f(|t|)dt$$
$$=\int_{-3}^{x}f(|t+3|)dt-\int_0^x f(|t|)dt$$

이때 $h(t)=f(|t+3|)$으로 놓으면

$$g(x)=\int_{-3}^{x}h(t)dt-\int_0^x f(|t|)dt$$

위 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=h(x)-f(|x|)=f(|x+3|)-f(|x|)$

137. 정답 ④

(ⅰ) a_5가 3의 배수일 때

$a_6=\frac{a_5}{3}$이므로

$a_5+a_6=a_5+\frac{a_5}{3}=\frac{4}{3}a_5$

$\frac{4}{3}a_5=16$에서 $a_5=12$, $a_6=4$

$a_5=12$일 때 a_4의 값은 36 또는 10이다.

같은 방법으로 계속하면 다음 표와 같은 결과를 얻을 수 있다.

a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
4	12	36	108	324	322
				106	104
			34	102	100
				32	30(×)
		10	30	90	88
				28	26
			8	24	22
				6(×)	

이 경우 조건을 만족시키는 모든 a_1의 값의 합은

$322+104+100+88+26+22=662$

(ii) a_5가 3의 배수가 아닐 때

$a_6=a_5+2$이므로

$a_5+a_6=a_5+a_5+2=2a_5+2$

$2a_5+2=16$에서 $a_5=7$, $a_6=9$

$a_5=7$일 때 a_4의 값은 21 또는 5이다.

같은 방법으로 계속하면 다음 표와 같은 결과를 얻을 수 있다.

a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
9	7	21	63	189	187
				61	59
			19	57	55
				17	15(×)
		5	15	45	43
				13	11
			3(×)		

이 경우 조건을 만족시키는 모든 a_1의 값의 합은

$187+59+55+43+11=355$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든 a_1의 값의 합은

$662+355=1017$

138. 정답 10

$f(x)=a(x^3-4x)=ax(x+2)(x-2)$이므로

$f(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

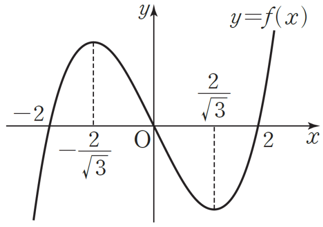
$f'(x)=a(3x^2-4)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ 또는 $x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$a>0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=k$에서도 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to k-}g(x)=\lim\limits_{x\to k+}g(x)=g(k)$이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to k-}g(x)=\lim\limits_{x\to k-}f(x)=f(k)$,

$\lim\limits_{x\to k+}g(x)=\lim\limits_{x\to k+}\{-f(x)\}=-f(k)$,

$g(k)=f(k)$

이므로 $f(k)=-f(k)$에서 $f(k)=0$

그러므로 $k=-2$ 또는 $k=0$ 또는 $k=2$

한편,

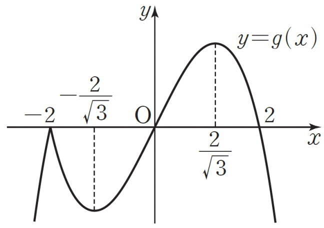
$h(x)=\int_{-2}^{x}g(t)dt-\int_{x}^{2}g(t)dt=\int_{-2}^{x}g(t)dt+\int_{2}^{x}g(t)dt$

에서

$h'(x)=g(x)+g(x)=2g(x)$

(i) $k=-2$일 때

함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



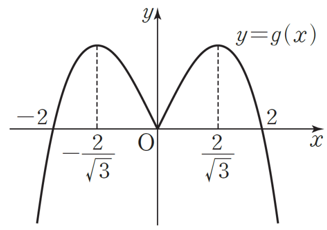
열린구간 $(-2,\ 2)$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(-2)	$\cdots$	0	$\cdots$	(2)
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	극소	↗	

열린구간 $(-2,\ 2)$에서 함수 $h(x)$의 최댓값이 존재하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $k=0$일 때

함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



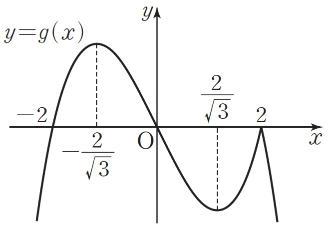
열린구간 $(-2,\ 2)$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(-2)	$\cdots$	0	$\cdots$	(2)
$h'(x)$		$+$	0	$+$	
$h(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$	

열린구간 $(-2,\ 2)$에서 함수 $h(x)$의 최댓값이 존재하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $k=2$일 때

함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



열린구간 $(-2,\ 2)$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(-2)	$\cdots$	0	$\cdots$	(2)
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

열린구간 $(-2,\ 2)$에서 함수 $h(x)$가 $x=0$에서 극대이면서 최대이고, 함수 $h(x)$의 최댓값이 2이므로

$$h(0)=\int_{-2}^{0}g(t)dt-\int_{0}^{2}g(t)dt$$
$$=\int_{-2}^{0}a(t^3-4t)dt-\int_{0}^{2}a(t^3-4t)dt$$
$$=2a\int_{-2}^{0}(t^3-4t)dt$$
$$=2a\left[\frac{1}{4}t^4-2t^2\right]_{-2}^{0}$$
$$=2a\{0-(-4)\}$$
$$=8a=2$$

에서 $a=\frac{1}{4}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 조건을 만족시키는 k의 값은 2이고,

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}x^3-x & (x\le 2)\\ -\frac{1}{4}x^3+x & (x>2)\end{cases}$$

따라서

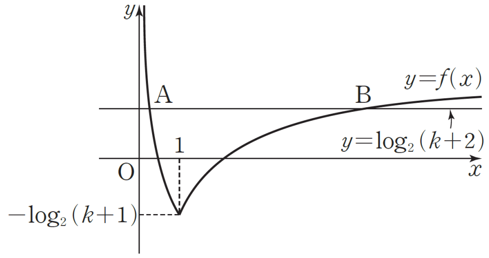
$$\int_{0}^{4}g(x)dx=\int_{0}^{2}\left(\frac{1}{4}x^3-x\right)dx+\int_{2}^{4}\left(-\frac{1}{4}x^3+x\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{2}+\left[-\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_{2}^{4}$$
$$=(-1-0)+(-8-1)$$
$$=-10$$

이므로 $\left|\int_{0}^{4}g(x)dx\right|=10$

139. 정답 611

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=\log_2(k+2)$가 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자.



(ⅰ) $0<x<1$일 때

$-\log_2(k+1)x=\log_2(k+2)$에서

$\log_2\frac{1}{(k+1)x}=\log_2(k+2)$, $\frac{1}{(k+1)x}=k+2$

$x=\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

k가 자연수이므로 $0<\frac{1}{(k+1)(k+2)}<1$

그러므로 점 A의 x좌표는 $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$이다.

(ⅱ) $x\ge 1$일 때

$\log_2\frac{x}{k+1}=\log_2(k+2)$에서 $\frac{x}{k+1}=k+2$

$x=(k+1)(k+2)=k^2+3k+2$

k가 자연수이므로 $k^2+3k+2>1$

그러므로 점 B의 x좌표는 k^2+3k+2이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 두 점 A, B 사이의 거리 $g(k)$는

$g(k)=k^2+3k+2-\frac{1}{(k+1)(k+2)}$이므로

$$\sum_{k=1}^{7}g(k)=\sum_{k=1}^{7}\left\{k^2+3k+2-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{7}k^2+3\sum_{k=1}^{7}k+\sum_{k=1}^{7}2-\sum_{k=1}^{7}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{7\times8\times15}{6}+3\times\frac{7\times8}{2}+2\times7$$
$$-\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ \cdots\ +\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)\right\}$$
$$=140+84+14-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{9}\right)$$
$$=238-\frac{7}{18}$$

따라서

$$\frac{18}{7}\times\sum_{k=1}^{7}g(k)=\frac{18}{7}\times\left(238-\frac{7}{18}\right)=612-1=611$$

140. 정답 19

$\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\times\lim_{x\to(a+4)+}\frac{g(x)-g(a+4)}{x-(a+4)}\le 0$ …… ㉠

$-6\le a\le -2$인 모든 실수 a에 대하여

$\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\le 0$

이므로 ㉠을 만족시키기 위해서는 $-6\le a\le -2$에서

$\lim_{x\to(a+4)+}\frac{g(x)-g(a+4)}{x-(a+4)}\ge 0$

이어야 한다.

즉, $a+4=p$로 놓으면 $-2\le p\le 2$에서

$\lim_{x\to p+}\frac{g(x)-g(p)}{x-p}\ge 0$

이므로 $1\le p\le 2$에서

$\lim_{x\to p+}\frac{g(x)-g(p)}{x-p}\ge 0$ …… ㉡

즉, $\lim_{x\to p+}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}\ge 0$

$-2\le a\le 2$인 모든 실수 a에 대하여

$\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\ge 0$

이므로 ㉠을 만족시키기 위해서는 $-2\le a\le 2$에서

$\lim_{x\to(a+4)+}\frac{g(x)-g(a+4)}{x-(a+4)}\le 0$

이어야 한다.

즉, $2\le p\le 6$에서

$\lim_{x\to p+}\frac{g(x)-g(p)}{x-p}\le 0$ …… ㉢

즉, $\lim_{x\to p+}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}\le 0$

㉡, ㉢에 의하여 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극대이고, $x>1$에서 미분가능하므로

$g'(2)=0$, 즉 $f'(2)=0$

주어진 조건에 의하여 $a<-6$ 또는 $2<a<5$ 또는 $a>5$인 모든 실수 a에 대하여

$\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\times\lim_{x\to(a+4)+}\frac{g(x)-g(a+4)}{x-(a+4)}>0$ …… ㉣

함수 $g(x)$가 $x\le -2$에서 감소하므로 $a<-6$인 모든 실수 a에 대하여 ㉣을 만족시킨다.

$2<a<5$ 또는 $a>5$인 모든 실수 a에 대하여 ㉣을 만족시키기 위해서는 $g'(a)\ne 0$이고 함수 $g(x)$는 구간 $(2,\ \infty)$에서 감소해야 한다.

즉, 구간 $(2,\ \infty)$에서 $g'(x)\le 0$이다.

$a=5$일 때,

$\lim_{x\to 5+}\frac{g(x)-g(5)}{x-5}\times\lim_{x\to 9+}\frac{g(x)-g(9)}{x-9}\le 0$에서

$\lim_{x\to 9+}\frac{g(x)-g(9)}{x-9}<0$이므로 $\lim_{x\to 5+}\frac{g(x)-g(5)}{x-5}\ge 0$

또한 ㉢에 의하여

$\lim_{x\to 5+}\frac{g(x)-g(5)}{x-5}\le 0$

이때 함수 $g(x)$가 $x>1$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 5+}\frac{g(x)-g(5)}{x-5}=g'(5)=0$, 즉 $f'(5)=0$이어야 한다.

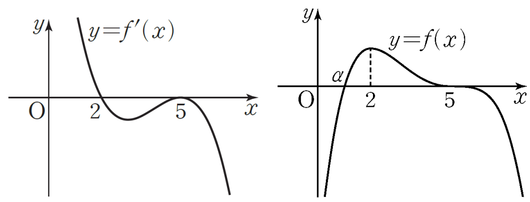
함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 k $(k<0)$인 사차함수라 하면 함수 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 $4k$인 삼차함수이다.

이때 $f'(2)=f'(5)=0$이고

함수 $f(x)$가 구간 $(2,\ \infty)$에서 감소해야 하므로

$f'(x)=4k(x-2)(x-5)^2$

$g(5)=0$에서 $f(5)=0$이므로 함수 $y=f'(x)$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



즉, $f(x)=k(x-\alpha)(x-5)^3$ $(\alpha<2)$로 놓을 수 있다.

$f(x)=k(x-\alpha)(x^3-15x^2+75x-125)$에서

$f'(x)=k(x^3-15x^2+75x-125)+k(x-\alpha)(3x^2-30x+75)$

$\quad=k(x-5)^3+3k(x-\alpha)(x-5)^2$

이때 $f'(2)=0$이므로

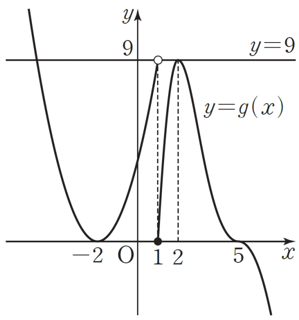
$f'(2)=-27k+27k(2-\alpha)$

$\quad=27k(1-\alpha)=0$

에서 $k\ne 0$이므로 $\alpha=1$

그러므로 $f(x)=k(x-1)(x-5)^3$

$x<1$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=9$와 한 점에서 만나고, 방정식 $g(x)=9$의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로 그림과 같이 $x\ge 1$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=9$와 한 점에서만 만나야 한다.



즉, $g(2)=9$이므로

$g(2)=f(2)=-27k=9$

에서 $k=-\frac{1}{3}$

$f(x)=-\frac{1}{3}(x-1)(x-5)^3$이므로

$g(3)=f(3)=-\frac{1}{3}\times 2\times(-8)=\frac{16}{3}$

따라서 $p=3$, $q=16$이므로 $p+q=3+16=19$

[참고]

$f'(x)=4k(x-2)(x-5)^2$에서 함수 $f(x)$를 다음과 같이 구할 수도 있다.

$f'(x)=4k(x-2)(x^2-10x+25)$

$$=k(4x^3-48x^2+180x-200)$$

이므로

$$f(x)=\int k(4x^3-48x^2+180x-200)dx$$

$$=k(x^4-16x^3+90x^2-200x)+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$g(5)=0$에서 $f(5)=0$이므로

$f(5)=-125k+C=0$, $C=125k$

그러므로

$$f(x)=k(x^4-16x^3+90x^2-200x+125)$$

$$=k(x-1)(x-5)^3$$

141. 정답 ①

$\dfrac{x-\pi}{3}=\theta$라 하면 $x=3\theta+\pi$이므로

$\dfrac{2x+\pi}{6}=\dfrac{2(3\theta+\pi)+\pi}{6}=\theta+\dfrac{\pi}{2}$이고,

$0\le x<2\pi$에서 $-\dfrac{\pi}{3}\le\theta<\dfrac{\pi}{3}$ …… ㉠

x에 대한 부등식 $2\sin^2\dfrac{x-\pi}{3}-3\cos\dfrac{2x+\pi}{6}\le 2$를 θ에 대한 부등식으로 바꾸면

$$2\sin^2\theta-3\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\le 2$$

$$2\sin^2\theta+3\sin\theta-2\le 0$$

$$(\sin\theta+2)(2\sin\theta-1)\le 0$$

$\sin\theta+2>0$이므로 $\sin\theta\le\dfrac{1}{2}$ …… ㉡

$\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$이므로 부등식 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 θ의 값의 범위는

$$-\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{\pi}{6}$$

즉, $-\dfrac{\pi}{3}\le\dfrac{x-\pi}{3}\le\dfrac{\pi}{6}$이므로

$-\pi\le x-\pi\le\dfrac{\pi}{2}$, $0\le x\le\dfrac{3}{2}\pi$

따라서 $\alpha=0$, $\beta=\dfrac{3}{2}\pi$이므로

$$\cos\frac{\beta-\alpha}{2}=\cos\frac{3}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

142. 정답 ③

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

조건 (가)에서 함수 $f'(x)$는 $x=-1$일 때 최솟값을 가지므로

$f'(x)=3(x+1)^2+k$ (k는 상수)

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서 함수 $f(x)$는 열린구간 $(-2,\ 2)$에서 감소하므로

열린구간 $(-2,\ 2)$에서 $f'(x)\le 0$이 성립해야 한다.

함수 $y=f'(x)$의 그래프의 대칭축이 직선 $x=-1$이고 이차항의 계수가 양수이므로 열린구간 $(-2,\ 2)$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)<f'(2)$이다.

$f'(x)\le 0$이면 열린구간 $(-2,\ 2)$에서 항상 $f'(x)<0$이 성립한다.

$f'(2)=27+k\le 0$에서 $k\le -27$

따라서

$$f(1)-f(-1)=\int_{-1}^{1}f'(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(3x^2+6x+3+k)\,dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(3x^2+3+k)\,dx=2\Big[x^3+(3+k)x\Big]_0^1$$

$$=2(1+3+k)=8+2k\le -46$$

143. 정답 ③

두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치가 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$이고,

$x_1(0)=1$, $x_2(0)=5$이므로

$$x_1(t)=1+\int_0^t(4s^2-9s+3)\,ds=\frac{4}{3}t^3-\frac{9}{2}t^2+3t+1$$

$$x_2(t)=5+\int_0^t(s^2-3s+12)\,ds=\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+12t+5$$

시각 t에서의 두 점 P, Q 사이의 거리는 $|x_1(t)-x_2(t)|$이다.

이때

$$h(t)=\left(\frac{4}{3}t^3-\frac{9}{2}t^2+3t+1\right)-\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+12t+5\right)$$

$$=t^3-3t^2-9t-4$$

$h'(t)=3t^2-6t-9=3(t+1)(t-3)$

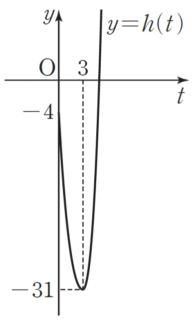
$h'(t)=0$에서 $t=-1$ 또는 $t=3$

$t\ge 0$에서 함수 $h(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(t)$		$-$	0	$+$
$h(t)$	-4	↘	극소	↗

$h(3)=27-27-27-4=-31$

이므로 $t\ge 0$에서 함수 $y=h(t)$의 그래프는 그림과 같다.



$x_1(t)\le x_2(t)$, 즉 $h(t)\le 0$일 때, 시각 t에서의 두 점 P, Q 사이의 거리 $|h(t)|$는 시각 $t=3$일 때 최대이고,

$|h(3)|=|-31|=31$

따라서 $a=3$, $M=31$이므로

$a+M=3+31=34$

144. 정답 ③

a_n이 홀수이면 a_{n+1}은 짝수이고, a_n이 짝수이면 a_{n+1}은 다음 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

(ⅰ) $a_n=4k-2$ (k는 자연수)인 경우

$a_{n+1}=\dfrac{4k-2}{2}+5=2k-1+5=2k+4$

에서 a_{n+1}은 짝수이다.

(ii) $a_n=4k$ (k는 자연수)인 경우

$a_{n+1}=\dfrac{4k}{2}+5=2k+5$

에서 a_{n+1}은 홀수이다.

이때 (i)의 $4k-2<2k+4$에서 $2k<6$, 즉 $k<3$이므로

$k=1$ 또는 $k=2$일 때 $a_n<a_{n+1}$,

$k=3$, 즉 $a_n=10$일 때 $a_{n+1}=\dfrac{10}{2}+5=10$,

$k\geq 4$일 때 $a_n>a_{n+1}$이다.

그러므로 어떤 자연수 m에 대하여 $a_m=10$이면 $n\geq m$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=10$이다.

$a_{30}=10$으로 짝수이므로 a_{29}는 홀수이거나 $4k-2$ (k는 자연수) 꼴로 나타낼 수 있다.

① a_{29}가 홀수인 경우

$a_{29}+3=10$에서 $a_{29}=7$

7은 홀수이므로 a_{28}은 $4k$ (k는 자연수) 꼴이어야 한다.

$\dfrac{a_{28}}{2}+5=7$에서 $a_{28}=4$

ⓐ a_{27}을 홀수라 가정하면 $a_{27}+3=4$에서 $a_{27}=1$

1은 홀수이므로 a_{26}은 $4k$ (k는 자연수) 꼴이어야 한다.

$\dfrac{a_{26}}{2}+5=1$에서 $a_{26}<0$이므로 모든 항이 자연수인 조건을 만족시키지 않는다.

ⓑ a_{27}을 $4k-2$ (k는 자연수) 꼴이라 가정하면

$\dfrac{a_{27}}{2}+5=4$에서 $a_{27}<0$이므로 모든 항이 자연수인 조건을 만족시키지 않는다.

② a_{29}가 $4k-2$ (k는 자연수) 꼴인 경우

$\dfrac{a_{29}}{2}+5=10$에서 $a_{29}=10$

이때 a_{28}이 홀수이면 ①과 같은 방법으로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, a_{28}은 짝수이어야 하고, 이때 $a_{28}=10$이다.

$a_{30}=10$일 때 $a_{29}=10$, $a_{28}=10$인 것을 확인한 방법으로

$a_{30}=a_{29}=a_{28}=\cdots=a_4=10$임을 알 수 있다.

$a_4=10$이므로 $a_3=7$ 또는 $a_3=10$이고,

$a_3=7$인 경우 $a_2=4$이므로 $a_1=1$

$a_3=10$인 경우 $a_2=7$ 또는 $a_2=10$이고,

$a_2=7$인 경우 $a_1=4$

$a_2=10$인 경우 $a_1=7$ 또는 $a_2=10$

따라서 a_1의 값이 될 수 있는 것은 1, 4, 7, 10이므로 그 합은

$1+4+7+10=22$

다른 풀이 1

자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=10$일 때,

a_n이 홀수라 하면 $10=a_n+3$에서 $a_n=7$

a_n이 짝수라 하면 $10=\dfrac{a_n}{2}+5$에서 $a_n=10$

자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=7$일 때,

a_n이 홀수라 하면 $7=a_n+3$에서 $a_n=4$이므로 a_n이 홀수라는 가정을 만족시키지 않는다.

a_n이 짝수라 하면 $7=\dfrac{a_n}{2}+5$에서 $a_n=4$

자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=4$일 때,

a_n이 홀수라 하면 $4=a_n+3$에서 $a_n=1$

a_n이 짝수라 하면 $4=\dfrac{a_n}{2}+5$에서 $a_n=-2$이므로 모든 항이 자연수인 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 a_1의 값이 될 수 있는 것은 1, 4, 7, 10이므로 그 합은

$1+4+7+10=22$

다른 풀이 2

$a_n\geq 11$이면

a_n이 홀수일 때, $a_{n+1}=a_n+3>10$

a_n이 짝수일 때, $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+5>10$

이므로 $a_1\leq 10$

$a_1=10$이면 $a_2=\dfrac{10}{2}+5=10$이므로 $a_3=a_4=a_5=\cdots=a_{30}=10$

$a_1=9$이면 $a_2=9+3=12\geq 11$이므로 $a_{30}\neq 10$

$a_1=8$이면 $a_2=\dfrac{8}{2}+5=9$이므로 $a_{30}\neq 10$

$a_1=7$이면 $a_2=7+3=10$이므로 $a_{30}=10$

$a_1=6$이면 $a_2=\dfrac{6}{2}+5=8$이므로 $a_{30}\neq 10$

$a_1=5$이면 $a_2=5+3=8$이므로 $a_{30}\neq 10$

$a_1=4$이면 $a_2=\dfrac{4}{2}+5=7$, $a_3=10$이므로 $a_{30}=10$

$a_1=3$이면 $a_2=3+3=6$이므로 $a_{30}\neq 10$

$a_1=2$이면 $a_2=\dfrac{2}{2}+5=6$이므로 $a_{30}\neq 10$

$a_1=1$이면 $a_2=1+3=4$이므로 $a_{30}=10$

따라서 a_1의 값이 될 수 있는 것은 1, 4, 7, 10이므로 그 합은

$1+4+7+10=22$

145. **정답** ②

$f(x)=x^3+3x^2-6ax+2$에서

$f'(x)=3x^2+6x-6a=3(x^2+2x)-6a=3(x+1)^2-6a-3$

함수 $f'(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 $-6a-3$을 갖는다.

(ⅰ) $a=-1$인 경우

함수 $f'(x)$의 최솟값이 $f'(-1)=3$이므로

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다.

즉, 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$는 증가하므로 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은

$f(-1)=-1+3-6+2=-2$

따라서 $g(-1)=-2$

(ⅱ) $a=1$인 경우

$f'(x)=3x^2+6x-6=3(x^2+2x-2)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1\pm\sqrt{3}$

이때 $-1-\sqrt{3}<-1<-1+\sqrt{3}<1$이고 $\alpha=-1+\sqrt{3}$이라 하면 $f'(\alpha)=0$

$x=\alpha$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$일 때 극소이면서 최소이다. 즉, 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(\alpha)$이다.

한편,

$f(x)=x^3+3x^2-6x+2=(x^2+2x-2)(x+1)-6x+4$이고

$f'(\alpha)=0$에서 $\alpha^2+2\alpha-2=0$이므로

$f(\alpha)=-6\alpha+4=-6(-1+\sqrt{3})+4=10-6\sqrt{3}$

따라서 $g(1)=10-6\sqrt{3}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $g(-1)+g(1)=-2+(10-6\sqrt{3})=8-6\sqrt{3}$

146. 정답 ③

사각형 BEFC는 BE와 변 CF가 평행한 사다리꼴이고, 사각형 AEBD는 변 BE와 변 DA가 평행한 사다리꼴이다. 직선 $x=k$가 두 곡선 $y=\log_4 x$, $y=\log_{\frac{1}{2}} x$와 각각 만나는 두 점 사이의 거리는

$\left|\log_4 k-\log_{\frac{1}{2}} k\right|=\left|\frac{1}{2}\log_2 k+\log_2 k\right|=\frac{3}{2}|\log_2 k|$

이고, $a>1$이므로

$\overline{\mathrm{BE}}=\frac{3}{2}|\log_2 a|=\frac{3}{2}\log_2 a$, $\overline{\mathrm{CF}}=\frac{3}{2}|\log_2 2a|=\frac{3}{2}(1+\log_2 a)$

$\overline{\mathrm{DA}}=\frac{3}{2}\left|\log_2\frac{1}{a}\right|=\frac{3}{2}\log_2 a$

이때 사다리꼴 BEFC의 넓이가 $3a$이므로

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}\log_2 a+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\log_2 a\right)\times(2a-a)$

$=\frac{1}{2}\times\left(3\log_2 a+\frac{3}{2}\right)\times a=3a$

에서 $3\log_2 a+\frac{3}{2}=6$, $\log_2 a=\frac{3}{2}$

따라서 사다리꼴 AEBD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}\log_2 a+\frac{3}{2}\log_2 a\right)\times\left(a-\frac{1}{a}\right)$

$=\frac{1}{2}\times3\log_2 a\times\left(a-\frac{1}{a}\right)$

$=\frac{1}{2}\times3\times\frac{3}{2}\times\left(a-\frac{1}{a}\right)$

$=\frac{9}{4}\times\left(a-\frac{1}{a}\right)$

이므로 $p=\frac{9}{4}$

147. 정답 ③

$f(x)=g(x)$에서 $f(x)-g(x)=0$

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=x^3-x^2+3x-k-\left(\frac{2}{3}x^3+x^2-x+4|x-1|\right)$

$=\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x-4|x-1|-k$

$=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x+4(x-1)-k & (x<1)\\ \frac{1}{3}x^3-2x^2+4x-4(x-1)-k & (x\ge 1)\end{cases}$

$=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-2x^2+8x-4-k & (x<1)\\ \frac{1}{3}x^3-2x^2+4-k & (x\ge 1)\end{cases}$

이고, 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$h'(x)=\begin{cases}x^2-4x+8 & (x<1)\\ x^2-4x & (x>1)\end{cases}$

$=\begin{cases}(x-2)^2+4 & (x<1)\\ x(x-4) & (x>1)\end{cases}$

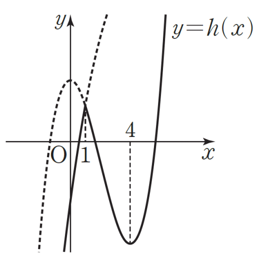
이므로 $x<1$일 때 $h'(x)>0$이고, $x>1$일 때 $h'(x)=0$에서 $x=4$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$h'(x)$	$+$		$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$h(1)=\frac{1}{3}-2+4-k=\frac{7}{3}-k$, $h(4)=\frac{64}{3}-32+4-k=-\frac{20}{3}-k$

방정식 $f(x)=g(x)$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 그림과 같이 함수 $y=h(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로



$\left(\frac{7}{3}-k\right)\left(-\frac{20}{3}-k\right)<0$에서 $-\frac{20}{3}<k<\frac{7}{3}$

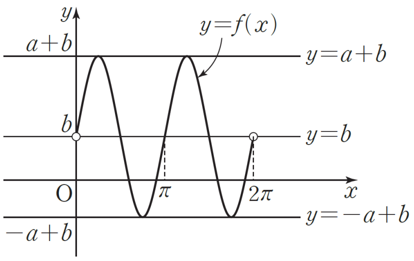
따라서 정수 k의 최댓값은 $M=2$, 최솟값은 $m=-6$이므로

$M-m=2-(-6)=8$

148. 정답 54

함수 $f(x)=a\sin 2x+b$의 주기는 π이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는

함수 $y=a\sin 2x$의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다.
두 자연수 a, b에 대하여 열린구간 $(0,\ 2\pi)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



그림에서 자연수 n에 대하여 $g(n)$은 반드시 0, 2, 3, 4 중 하나의 값을 갖는다.
$g(1)+g(2)+g(3)+g(4)+g(5)=17$에서 17은 홀수이므로 $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$, $g(5)$ 중 적어도 하나의 함숫값은 3이다. 또 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형에서 이 중 두 개 이상의 함숫값이 3이 될 수는 없으므로 $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$, $g(5)$ 중 오직 하나의 함숫값만 3이 된다.
이때 함숫값이 3인 것을 제외한 나머지 네 개의 값을 α, β, γ, δ라 하면 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=14$이고, 네 값은 모두 0 또는 2 또는 4이므로 세 개의 값은 4이고 한 개의 값은 2이다. 즉,

$$\begin{aligned} g(1)+g(2)+g(3)+g(4)+g(5)&=17 \\ &=3+2+4+4+4 \end{aligned}$$

이므로 $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$, $g(5)$는 각각 2, 3, 4, 4, 4 중 하나이다.
이 값들을 순서쌍 $(g(1),\ g(2),\ g(3),\ g(4),\ g(5))$로 나타내면
$(3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 2)$, $(4,\ 3,\ 4,\ 4,\ 2)$, $(2,\ 4,\ 4,\ 3,\ 4)$, $(2,\ 4,\ 4,\ 4,\ 3)$인 경우가 있다.
$b=1$, $a+b=5$인 경우 $a=4$이므로 $a^2+b^2=4^2+1^2=17$
$b=2$, $a+b=5$인 경우 $a=3$이므로 $a^2+b^2=3^2+2^2=13$
$b=4$, $-a+b=1$인 경우 $a=3$이므로 $a^2+b^2=3^2+4^2=25$
$b=5$, $-a+b=1$인 경우 $a=4$이므로 $a^2+b^2=4^2+5^2=41$
따라서 a^2+b^2의 최댓값은 $M=41$, 최솟값은 $m=13$이므로
$M+m=41+13=54$

149. 정답 598

$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}a_k-\sum_{k=1}^{n}a_k$이므로

$$\begin{aligned} a_{n+1}&=\left\{a_{n+1}{}^2+(n+1)a_{n+1}-4\right\}-\left(a_n{}^2+na_n-4\right) \\ &=a_{n+1}{}^2-a_n{}^2+n\left(a_{n+1}-a_n\right)+a_{n+1} \end{aligned}$$

에서

$a_{n+1}{}^2-a_n{}^2+n\left(a_{n+1}-a_n\right)=0$
$\left(a_{n+1}-a_n\right)\left(a_{n+1}+a_n\right)+n\left(a_{n+1}-a_n\right)=0$
$\left(a_{n+1}-a_n\right)\left(a_{n+1}+a_n+n\right)=0$

이때 $a_{n+1}\neq a_n$이므로 $a_{n+1}+a_n=0$
그러므로 $a_n+a_{n+1}=-n$ …… ㉠
$\sum_{k=1}^{n}a_k=a_n{}^2+na_n-4$의 양변에 $n=1$을 대입하면
$a_1=a_1{}^2+a_1-4$, $a_1{}^2=4$
$a_1>0$이므로 $a_1=2$
㉠에서 $a_{2k}+a_{2k+1}=-2k$이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{49}a_k&=a_1+\sum_{k=1}^{24}\left(a_{2k}+a_{2k+1}\right)=2+\sum_{k=1}^{24}(-2k)=2-2\sum_{k=1}^{24}k \\ &=2-2\times\frac{24\times25}{2}=2-600=-598 \end{aligned}$$

따라서 $\sum_{k=1}^{49}\left(-a_k\right)=-\sum_{k=1}^{49}a_k=598$

[참고]
예를 들어 $a_n=-\frac{n}{2}+\frac{1}{4}+(-1)^{n+1}\times\frac{9}{4}$라 하면 수열 $\{a_n\}$은 조건 (가), (나)를 만족시킨다.
즉, $a_1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=2>0$이고

$$\begin{aligned} &a_{n+1}+a_n \\ &=\left\{-\frac{n+1}{2}+\frac{1}{4}+(-1)^{n+2}\times\frac{9}{4}\right\}+\left\{-\frac{n}{2}+\frac{1}{4}+(-1)^{n+1}\times\frac{9}{4}\right\} \\ &=-n \end{aligned}$$

이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}+a_n+n=0$을 만족시킨다.
이때 $a_{n+1}=a_n$인 자연수 n이 존재한다고 가정하면

$$-\frac{n+1}{2}+\frac{1}{4}+(-1)^{n+2}\times\frac{9}{4}=-\frac{n}{2}+\frac{1}{4}+(-1)^{n+1}\times\frac{9}{4}$$

즉, $(-1)^n\times\frac{9}{2}=\frac{1}{2}$이 되어 모순이다.
따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}\neq a_n$이다.

150. 정답 80

조건 (가)에서

$$\int_1^x f(t)\,dt=x\,g(x)+ax+2 \quad\cdots\cdots\ ㉠$$

㉠에 $x=0$을 대입하면

$$\int_1^0 f(t)\,dt=2$$

이므로 $\int_0^1 f(t)\,dt=-2$

조건 (나)에서

$$g(x)=x\int_0^1 f(t)\,dt+b=-2x+b$$

$$\begin{aligned} G(x)&=\int g(x)\,dx=\int(-2x+b)\,dx \\ &=-x^2+bx+C_1\ (\text{단, } C_1\text{은 적분상수}) \end{aligned}$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=g(1)+a+2=(-2+b)+a+2=a+b$

즉, $a+b=0$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=g(x)+xg'(x)+a=(-2x+b)+x\times(-2)+a$

$=-4x+a+b=-4x$

$F(x)=\int f(x)\,dx=\int(-4x)\,dx$

$=-2x^2+C_2$ (단, C_2는 적분상수)

조건 (다)에서 $f(x)G(x)+F(x)g(x)=8x^3+3x^2+4$이므로

$-4x(-x^2+bx+C_1)+(-2x^2+C_2)(-2x+b)=8x^3+3x^2+4$

양변의 x^2의 계수를 서로 비교하면

$-4b-2b=3$, 즉 $-6b=3$에서 $b=-\dfrac{1}{2}$

이므로 $g(x)=-2x-\dfrac{1}{2}$

㉡에서 $a=\dfrac{1}{2}$

$f(x)g(x)=-4x\times\left(-2x-\dfrac{1}{2}\right)=8x^2+2x$이므로

$$\int_b^a f(x)g(x)\,dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(8x^2+2x)\,dx=2\int_0^{\frac{1}{2}}8x^2\,dx$$

$$=2\left[\frac{8}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}}=2\times\left(\frac{8}{3}\times\frac{1}{8}\right)=\frac{2}{3}$$

따라서 $120\times\int_b^a f(x)g(x)\,dx=120\times\dfrac{2}{3}=80$

151. 정답 ⑤

조건 (가)의 $\sin A=\sin C$를 만족시키려면 $A=C$ 또는 $A=\pi-C$이어야 한다.

이때, $A=\pi-C$이면 $A+B+C=\pi$에서 $B=0$

그러므로 $A=C$ ⋯ ㉠

조건 (나)의 $\sin A\sin B=\cos C\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-B\right)$에서

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-B\right)=\sin B$ 이므로 $\sin A\sin B=\cos C\sin B$

이때 $0<B<\pi$이므로 $\sin B\neq 0$이다.

그러므로 양변을 $\sin B$로 나누면 $\sin A=\cos C$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\sin A=\cos A$이므로 $A=C=\dfrac{\pi}{4}$이고 $B=\dfrac{\pi}{2}$이다.

즉, 삼각형 ABC는 직각이등변삼각형이고 외심은 변 AC의 중점이다.

이때 외접원의 넓이가 4π이므로 $\overline{AC}=4$, $\overline{AB}=2\sqrt{2}$, $\overline{BC}=2\sqrt{2}$

따라서 직각이등변삼각형 ABC의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=4$

152. 정답 ⑤

$f(x)=x^2-8x+k=(x-4)^2+k-16$에서 $2^{f(t)}$의 세제곱근 중 실수인 값은 $2^{\frac{(t-4)^2+k-16}{3}}$이고, $1\le t\le 10$이므로

$A=\left\{x\mid 2^{\frac{k-16}{3}}\le x\le 2^{\frac{k+20}{3}}\right\}$이다.

$8\in A$에서 $2^{\frac{k-16}{3}}\le 2^3\le 2^{\frac{k+20}{3}}$이므로 $\dfrac{k-16}{3}\le 3\le\dfrac{k+20}{3}$

즉, $-11\le k\le 25$

따라서 모든 자연수 k의 값의 합은 $\displaystyle\sum_{k=1}^{25}k=\frac{25\times26}{2}=325$

153. 정답 ①

조건 (가)에서 모든 실수 t에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to t}\frac{f(x)-f(-x)}{x-t}$의 값이 존재하고, $x\to t$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to t}\{f(x)-f(-x)\}=f(t)-f(-t)=0$이므로 사차함수 $f(x)$는 모든 실수 t에 대하여 $f(t)=f(-t)$를 만족시킨다.

따라서 사차함수 $y=f(t)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$f(x)=x^4+px^2+q$ (p, q는 상수)로 놓으면 $f'(x)=4x^3+2px$

조건 (나)에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 7)$에서의 접선이 점 $(0,\ -1)$을 지나므로 이 접선의 기울기는 $\dfrac{7-(-1)}{1-0}=8$이다.

그러므로 $f(1)=1+p+q=7$에서 $p+q=6$ ⋯ ㉠

$f'(1)=4+2p=8$에서 $p=2$

$p=2$를 ㉠에 대입하면 $q=4$

따라서 $f(x)=x^4+2x^2+4$이므로 $f(2)=16+8+4=28$

154. 정답 ③

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=-9$이고 공차가 d인 등차수열이므로

$S_n=\dfrac{n\{-18+(n-1)d\}}{2}=\dfrac{d}{2}\left(n^2-\dfrac{18+d}{d}n\right)$

이때 이차함수 $y=\dfrac{d}{2}\left(x^2-\dfrac{18+d}{d}x\right)$의 그래프의 대칭축은 직선 $x=\dfrac{18+d}{2d}$이므로 $S_p=S_q$가 성립하려면 $\dfrac{p+q}{2}=\dfrac{18+d}{2d}$이어야 한다.

따라서 $S_p=S_q$를 만족시키는 서로 다른 두 자연수 p, q $(p<q)$의 모든 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수가 4이기 위해서는

$S_1=S_8$, $S_2=S_7$, $S_3=S_6$, $S_4=S_5$ 또는

$S_1=S_9$, $S_2=S_8$, $S_3=S_7$, $S_4=S_6$이어야 한다.

(i) $S_1=S_8$, $S_2=S_7$, $S_3=S_6$, $S_4=S_5$일 때

$S_4=S_6$에서 $S_5-S_4=0$

즉, $a_4=0$이므로 $-9+4d=0$, $d=\dfrac{9}{4}$

(ii) $S_1=S_9$, $S_2=S_8$, $S_3=S_7$, $S_4=S_6$일 때

$S_4=S_6$에서 $S_6-S_4=0$

즉, $a_5+a_6=0$이므로

$(-9+4d)+(-9+5d)=0,\ d=2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키는 모든 실수 d의 값의 합은

$\frac{9}{4}+2=\frac{17}{4}$

[다른 풀이]

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=-9$이고 공차가 d인 등차수열이므로 $S_p=S_q$에서

$\frac{p\{-18+(p-1)d\}}{2}=\frac{q\{-18+(q-1)d\}}{2}$

$-18p+dp^2-dp=-18q+dq^2-dq$

$-18(p-q)+d(p-q)(p+q)-d(p-q)=0$

$(p-q)\{-18+(p+q-1)d\}=0$

$p\neq q$이므로 $(p+q-1)d=18$

이를 만족시키는 서로 다른 두 자연수 $p,\ q\ (p<q)$의 모든 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수가 4이기 위해서는

$(1,\ 8),\ (2,\ 7),\ (3,\ 6),\ (4,\ 5)$인 $p+q=9$ 또는

$(1,\ 9),\ (2,\ 8),\ (3,\ 7),\ (4,\ 6)$인 $p+q=10$이어야 한다.

(ⅰ) $p+q=9$일 때

$8d=18$에서 $d=\frac{9}{4}$

(ⅱ) $p+q=10$일 때

$9d=18$에서 $d=2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키는 모든 실수 d의 값의 합은

$\frac{9}{4}+2=\frac{17}{4}$

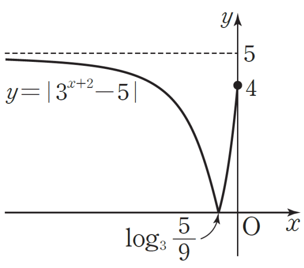
155. 정답 ②

$x\leq 0$일 때, 함수 $y=|3^{x+2}-5|$의 그래프는 함수 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 후 $y<0$인 부분의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

이때 함수 $y=3^{x+2}-5$의 그래프의 점근선은 직선 $y=-5$이므로 함수 $y=|3^{x+2}-5|$의 그래프의 점근선은 직선 $y=5$이고, $x=0$일 때 $y=|3^2-5|=4$이므로 함수 $y=|3^{x+2}-5|\ (x\leq 0)$의 그래프는 점 $(0,\ 4)$를 지난다.

또 $3^{x+2}-5=0$에서 $x+2=\log_3 5$,

즉 $x=\log_3 5-2=\log_3\frac{5}{9}$이므로 함수 $y=|3^{x+2}-5|\ (x\leq 0)$의 그래프는 점 $\left(\log_3\frac{5}{9},\ 0\right)$을 지난다.



한편, $2^{-x+a}-b=2^{-(x-a)}-b$이므로

$x>0$일 때, 함수 $y=2^{-x+a}-b$의 그래프는 함수 $y=2^{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $-b$만큼 평행이동한 것이다.

이때 함수 $y=2^{-x+a}-b$의 그래프의 점근선은 직선 $y=-b$이고, $x=0$일 때 $y=2^a-b$이므로 함수 $y=2^{-x+a}-b$의 그래프는 점 $(0,\ 2^a-b)$를 지난다.

$\log_3\frac{5}{9}\leq k\leq 0$일 때, $B=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이므로

$n(B)=5$가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위가

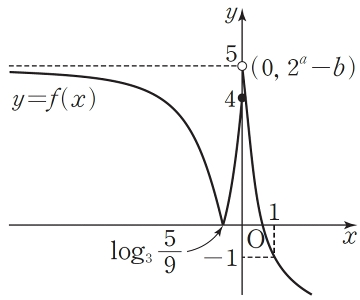
$\log_3\frac{5}{9}\leq k\leq 1$이기 위해서는

$2^a-b\leq 5$ …… ㉠

$k=1$일 때 $n(B)\neq 5$이므로

$f(1)=2^{a-1}-b=-1$

즉, $2^a=2b-2$ …… ㉡



㉡을 ㉠에 대입하면

$(2b-2)-b\leq 5$에서 $b\leq 7$이고,

$2^a\leq 12$이다.

부등식 $2^a\leq 12$를 만족시키는 자연수 a의 값은 $1,\ 2,\ 3$이고, ㉡에서

$a=1$일 때 $b=2$, $a=2$일 때 $b=3$, $a=3$일 때 $b=5$

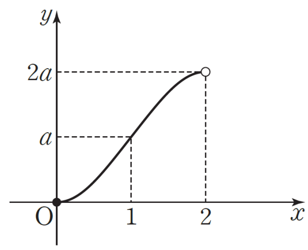
따라서 $a+b$의 최댓값은 $M=3+5=8$, 최솟값은

$m=1+2=3$이므로

$M\times m=8\times 3=24$

156. 정답 ④

$0\leq x<2$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=2$에서도 연속이다.

즉,

$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2+}f(x)=f(2)$이어야 한다.

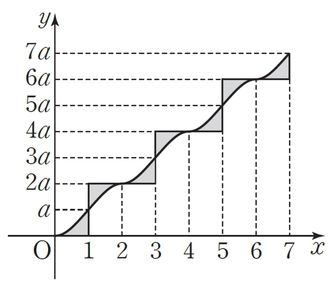
$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2-}\{-a(x-2)^2+2a\}=2a$,

$\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 0+}f(x+2)=\lim_{x\to 0+}\{f(x)+b\}=\lim_{x\to 0+}(ax^2+b)=b$,

$f(2)=f(0)+b=b$

이므로 $2a=b$ …… ㉠

또한 $2\leq x\leq 4$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $0\leq x\leq 2$에서의 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 $2a$만큼 평행 이동한 것이므로 $0\leq x\leq 7$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

한편, 두 곡선 $y=ax^2,\ y=-a(x-2)^2+2a$는 점 $(1,\ a)$에 대하여

대칭이므로 $0 \le x \le 1$에서 곡선 $y=ax^2$과 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이와 $1 \le x \le 2$에서 곡선 $y=-a(x-2)^2+2a$와 두 직선 $x=1$, $y=2a$로 둘러싸인 부분의 넓이는 같다. 그러므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는 가로의 길이가 1, 세로의 길이가 $2a$인 직사각형의 넓이와 같다. 즉,

$$\int_0^2 f(x)dx=1\times 2a=2a$$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=7$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$$S=2a+(2a+4a)+(4a+6a)+\int_6^7 f(x)dx$$

$$=2a+6a+10a+\left(\int_0^1 ax^2dx+6a\right)$$

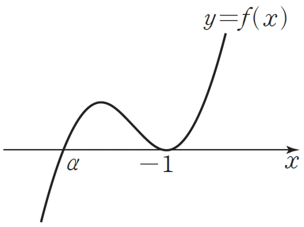
$$=\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^1+24a=\frac{a}{3}+24a=\frac{73}{3}a$$

따라서 $\frac{73}{3}a=73$에서 $a=3$이고, ㉠에서 $b=6$이므로

$a+b=3+6=9$

157. 정답 ③

삼차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고 $f(-1)=0$이며, 조건 (가)에서 함수 $|f(x)|$는 $x=\alpha$ $(\alpha<-1)$에서만 미분가능하지 않으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



즉, $f(\alpha)=0$, $f'(-1)=0$이므로 $f(x)=(x-\alpha)(x+1)^2$으로 놓을 수 있다. $x<\alpha$인 모든 실수 x에 대하여 $\int_\alpha^x f(t)g(t)dt \ge 0$이 성립하기 위해서는 어떤 열린구간 $(\beta,\ \alpha)$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)\le 0$이어야 한다.

$x \ge \alpha$인 모든 실수 x에 대하여 $\int_\alpha^x f(t)g(t)dt \ge 0$이 성립하기 위해서는 어떤 열린구간 $(\alpha,\ \gamma)$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)\ge 0$이어야 한다.

그런데 $x<\alpha$에서 $f(x)<0$, $x\ge\alpha$에서 $f(x)\ge 0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge 0$이어야 한다.

이차함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1이고 $g(\alpha)=0$이므로 $g(x)=(x-\alpha)^2$으로 놓을 수 있다.

조건 (다)에서

$(x+1)h(x)=f(x)g(x)=(x-\alpha)^3(x+1)^2$

이고 함수 $h(x)$는 다항함수이므로

$h(x)=(x-\alpha)^3(x+1)=(x^3-3\alpha x^2+3\alpha^2x-\alpha^3)(x+1)$

$h'(x)=(3x^2-6\alpha x+3\alpha^2)(x+1)+(x^3-3\alpha x^2+3\alpha^2 x-\alpha^3)$

$\quad=3(x-\alpha)^2(x+1)+(x-\alpha)^3=(x-\alpha)^2(4x+3-\alpha)$

$h'(x)=0$에서 $x=\alpha$ 또는 $x=\frac{\alpha-3}{4}$

이때 $\alpha<-1$이므로 $\alpha<\frac{\alpha-3}{4}$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\alpha-3}{4}$	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘		↘	극소	↗

함수 $h(x)$는 $x=\frac{\alpha-3}{4}$에서 극소이고 조건 (다)에서 함수 $h(x)$의 극솟값이 -27이므로

$$h\left(\frac{\alpha-3}{4}\right)=\left(\frac{\alpha-3}{4}-\alpha\right)^3\left(\frac{\alpha-3}{4}+1\right)=\left(-3\times\frac{\alpha+1}{4}\right)^3\left(\frac{\alpha+1}{4}\right)$$

$$=-27\left(\frac{\alpha+1}{4}\right)^4=-27$$

에서 $\left(\frac{\alpha+1}{4}\right)^4=1$

$\frac{\alpha+1}{4}=1$ 또는 $\frac{\alpha+1}{4}=-1$이므로

$\alpha=3$ 또는 $\alpha=-5$

$\alpha<-1$이므로 $\alpha=-5$

따라서 방정식 $h'(x)=0$을 만족시키는 서로 다른 모든 실수 x의 값의 합은

$-5+\frac{-5-3}{4}=-5+(-2)=-7$

158. 정답 31

방정식 $\left(\sin\frac{2x}{a}-t\right)\left(\cos\frac{2x}{a}-t\right)=0$에서

$\sin\frac{2x}{a}=t$ 또는 $\cos\frac{2x}{a}=t$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

즉, 닫힌구간 $[0,\ 2a\pi]$에서 두 함수 $y=\sin\frac{2x}{a}$, $y=\cos\frac{2x}{a}$의 그래프와 직선 $y=t$ $(0\le t\le 1)$의 교점의 x좌표가 방정식 ㉠의 실근이다.

이때 두 함수 $y=\sin\frac{2x}{a}$, $y=\cos\frac{2x}{a}$의 주기는 모두 $\frac{2\pi}{\frac{2}{a}}=a\pi$이다.

(i) $t=1$일 때

$\alpha_3-\alpha_1=a\pi=d\pi$, $\alpha_4-\alpha_2=a\pi=6\pi-d\pi$

$d\pi=6\pi-d\pi$에서 $d=3$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때

$\alpha_3-\alpha_1=\frac{3a}{4}\pi=d\pi$, $\alpha_4-\alpha_2=\frac{3a}{4}\pi=6\pi-d\pi$

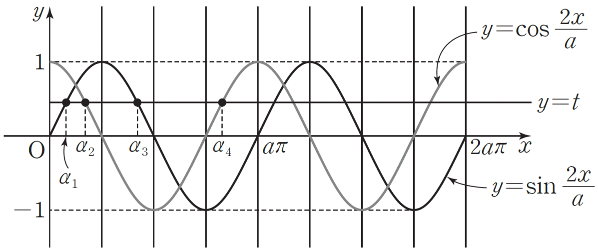
$d\pi=6\pi-d\pi$에서 $d=3$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $t=0$일 때

$\alpha_3-\alpha_1=\frac{a}{2}\pi=d\pi$, $\alpha_4-\alpha_2=\frac{a}{2}\pi=6\pi-d\pi$

$d\pi = 6\pi - d\pi$에서 $d = 3$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iv) $0 < t < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$일 때



$\alpha_1 + \alpha_2 = \dfrac{a}{4}\pi$, $\alpha_3 + \alpha_4 = \dfrac{5a}{4}\pi$이므로

$\alpha_3 - \alpha_1 + \alpha_4 - \alpha_2 = a\pi = 6\pi$에서 $a = 6$

이때 $\dfrac{3}{2}\pi < \alpha_3 - \alpha_1 < 3\pi$, 즉 $\dfrac{3}{2}\pi < d\pi < 3\pi$이므로 $d = 2$

$\alpha_1 + \alpha_3 = \dfrac{a}{2}\pi = 3\pi$ ...... ㉡

$\alpha_3 - \alpha_1 = d\pi = 2\pi$ ...... ㉢

㉡−㉢을 하면 $2\alpha_1 = \pi$, $\alpha_1 = \dfrac{\pi}{2}$이므로

$t = \sin\dfrac{2\alpha_1}{6} = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$

(v) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < t < 1$일 때

$\alpha_3 - \alpha_1 = \dfrac{a}{4}\pi = d\pi$, $\alpha_4 - \alpha_2 = \dfrac{3a}{4}\pi = 6\pi - d\pi$

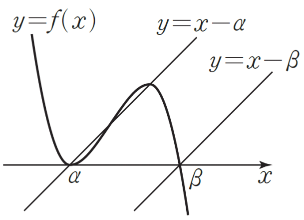
$3d\pi = 6\pi - d\pi$에서 $d = \dfrac{3}{2}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

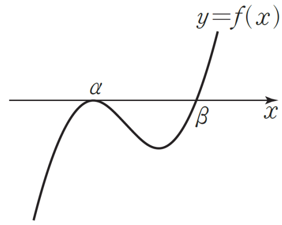
(i)~(v)에서 $a = 6$, $d = 2$, $t = \dfrac{1}{2}$이므로

$t \times (10a + d) = \dfrac{1}{2} \times (10 \times 6 + 2) = 31$

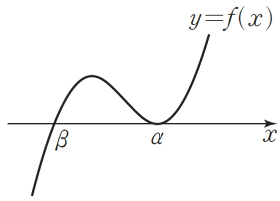
159. 정답 29

조건 (가)에서 삼차방정식 $f(x) = 0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 하면 $f(x) = k(x-\alpha)^2(x-\beta)$ (k는 0이 아닌 상수)로 놓을 수 있다.
조건 (나)에서 방정식 $x - f(x) = \alpha$ 또는 방정식 $x - f(x) = \beta$를 만족시키는 서로 다른 실근의 개수가 5이어야 한다.
즉, 방정식 $f(x) = x - \alpha$또는 방정식 $f(x) = x - \beta$에서 함수 $y = f(x)$의 그래프가 직선 $y = x - \alpha$ 또는 $y = x - \beta$와 만나는 서로 다른 점의 개수가 5이어야 한다.
이때 $k < 0$이면 그림과 같이 함수 $y = f(x)$의 그래프가 직선 $y = x - \beta$와 오직 한 점에서 만나므로 교점의 개수의 최댓값은 4이다.
따라서 $k > 0$이고, 이때 함수 $y = f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.





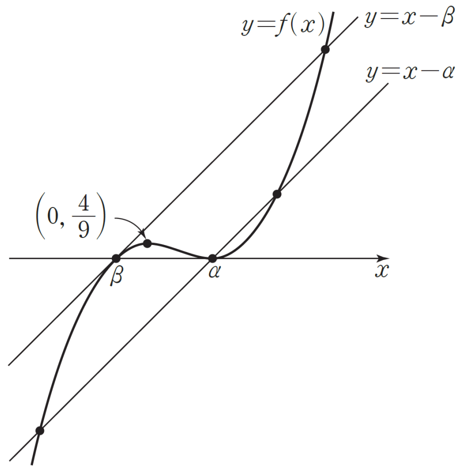
[$\alpha < \beta$인 경우]



[$\alpha > \beta$인 경우]

그런데 $f(0) = \dfrac{4}{9} > 0$, $f'(0) = 0$이므로 $\alpha > \beta$이다.

그러므로 방정식 $f(x - f(x)) = 0$의 서로 다른 실근의 개수가 5인 함수 $y = f(x)$의 그래프와 두 직선 $y = x - \alpha$, $y = x - \beta$의 개형은 그림과 같다.



$f(x) = k(x-\alpha)^2(x-\beta) = k(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2)(x - \beta)$ $(k > 0)$에서

$f(0) = -k\alpha^2\beta = \dfrac{4}{9}$ ...... ㉠

$f'(x) = k(2x - 2\alpha)(x - \beta) + k(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2)$이므로

$f'(0) = 2k\alpha\beta + k\alpha^2 = 0$

$k > 0$이므로 $\alpha(2\beta + \alpha) = 0$

$\alpha = 0$이면 ㉠을 만족시키지 않으므로 $\alpha \neq 0$이고

$\alpha = -2\beta$ ...... ㉡

$f'(\beta) = k(\beta^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2) = 1$ ...... ㉢

㉡을 ㉠, ㉢에 각각 대입하면

$-4k\beta^3 = \dfrac{4}{9}$, $9k\beta^2 = 1$

$\dfrac{-4k\beta^3}{9k\beta^2} = -\dfrac{4\beta}{9} = \dfrac{4}{9}$에서 $\beta = -1$

$\beta = -1$을 ㉡에 대입하면 $\alpha = 2$

$\alpha = 2$, $\beta = -1$을 ㉠에 대입하면

$4k = \dfrac{4}{9}$, $k = \dfrac{1}{9}$

즉, $f(x) = \dfrac{1}{9}(x-2)^2(x+1)$이므로

$f(4) = \dfrac{1}{9} \times 4 \times 5 = \dfrac{20}{9}$

따라서 $p = 9$, $q = 20$이므로

$p+q=9+20=29$

160. 정답 50

모든 자연수 k에 대하여

$a_{3+5k}=a_3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^k$, 즉 $a_{5k+3}=a_{5k-2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)$

이고, a_{5k+3}은 a_{5k-2}에서 $+3$ 또는 $\times\left(-\frac{1}{3}\right)$을 5회 연산하여 결정된다.

$\times\left(-\frac{1}{3}\right)$을 n회 $(1\le n\le 5)$ 연산하면

$a_{5k+3}=a_{5k-2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\alpha$ (α는 상수)

이므로 $\times\left(-\frac{1}{3}\right)$을 1회만 연산해야 하고, $+3$을 4회 연산해야 한다.

이때 그 순서는

$a_{5k+3}=-\frac{1}{3}\times(a_{5k-2}+3+3+3)+3$

이어야 한다.

즉, $a_8=-\frac{1}{3}\times(a_3+3+3+3)+3$이므로

$|a_3|<8$, $|a_4|<8$, $|a_5|<8$, $|a_6|\ge 8$, $|a_7|<8$이다.

$|a_5|=|a_3+6|<8$에서 $-14<a_3<2$이고

$|a_6|=|a_3+9|\ge 8$에서 $a_3\ge -1$ 또는 $a_3\le -17$이므로

$-1\le a_3<2$ …… ㉠

이때 수열 $\{a_n\}$의 각 항의 값이 포함되는 구간은

$8\le a_6=a_3+9<11$, $-\frac{11}{3}<a_7=-\frac{a_6}{3}\le -\frac{8}{3}$,

$\frac{25}{3}<a_{11}=a_7+12\le\frac{28}{3}$, $-\frac{28}{9}\le a_{12}=-\frac{a_{11}}{3}<-\frac{25}{9}$,

$\frac{80}{9}\le a_{16}=a_{12}+12<\frac{83}{9}$, $-\frac{83}{27}<a_{17}=-\frac{a_{16}}{3}\le -\frac{80}{27}$, $\cdots$

즉, 수열 a_7, a_{12}, a_{17}, $\cdots$의 값이 포함되는 구간은 그 길이가 짧아지고 -3을 포함하므로 a_{11}, a_{16}, a_{21}, $\cdots$의 값이 포함되는 구간은 $-3+12=9$를 포함한다.

따라서 부등식 $|a_m|\ge 8$을 만족시키는 자연수 m은 $m=5l+1$ (단, l은 자연수)

3 이상 100 이하의 자연수 m의 개수는 19이고 100 이하의 자연수 m의 개수가 20 이상이려면

a_1, a_2의 값 중 적어도 하나는 8 이상이다. …… ㉡

(i) $|a_2|\ge 8$이면

$a_3=-\frac{1}{3}a_2$이므로 ㉠에서 $-1\le -\frac{1}{3}a_2<2$

즉, $-6<a_2\le 3$이므로 조건을 만족시키는 a_2는 존재하지 않는다.

(ii) $|a_2|<8$이면

$a_3=a_2+3$이므로 ㉠에서 $-1\le a_2+3<2$

즉, $-4\le a_2<-1$이므로 조건을 만족시키는 a_2의 값의 범위는

$-4\le a_2<-1$ …… ㉢

(i), (ii), ㉡에 의하여 $|a_2|<8$이므로 $|a_1|\ge 8$이다.

이때 $a_2=-\frac{1}{3}a_1$이므로 ㉢에서

$-4\le -\frac{1}{3}a_1<-1$

즉, $3<a_1\le 12$이므로 조건을 만족시키는 a_1의 값의 범위는

$8\le a_1\le 12$

따라서 모든 정수 a_1의 값은 8, 9, 10, 11, 12이므로 그 합은

$8+9+10+11+12=50$

161. 정답 ⑤

시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발한 후, 시각 $t=a$ $(a>0)$에서 두 점 P, Q의 위치가 서로 같으므로

$\int_0^a v_1(t)dt=\int_0^a v_2(t)dt$, 즉 $\int_0^a\{v_1(t)-v_2(t)\}dt=0$이어야 한다.

$\int_0^a\{v_1(t)-v_2(t)\}dt=\int_0^a\{(3t^2-2t)-2t\}dt=\int_0^a(3t^2-4t)dt$

$=\left[t^3-2t^2\right]_0^a=a^3-2a^2$

이므로 $a^3-2a^2=0$에서 $a^2(a-2)=0$

$a>0$이므로 $a=2$

따라서 점 P가 시각 $t=0$에서 시각 $t=a$까지 움직인 거리는

$\int_0^a|v_1(t)|dt=\int_0^2|v_1(t)|dt=\int_0^2|3t^2-2t|dt$

$=\int_0^{\frac{2}{3}}(-3t^2+2t)dt+\int_{\frac{2}{3}}^2(3t^2-2t)dt$

$=\left[-t^3+t^2\right]_0^{\frac{2}{3}}+\left[t^3-t^2\right]_{\frac{2}{3}}^2$

$=\left(-\frac{8}{27}+\frac{4}{9}\right)+\left\{(8-4)-\left(\frac{8}{27}-\frac{4}{9}\right)\right\}$

$=\frac{116}{27}$

162. 정답 ④

삼차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고 곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$f(x)=(x-1)(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)라 하면

$f'(x)=(x^2+ax+b)+(x-1)(2x+a)$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 0)$에서의 접선의 기울기가 1이므로

$f'(1)=1$

즉, $f'(1)=1+a+b=1$에서 $a+b=0$ …… ㉠

$g(x)=(x-2)f(x)$라 하면 $g'(x)=f(x)+(x-2)f'(x)$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ 0)$에서의 접선의 기울기가 4이므로

$g'(2)=4$

즉, $g'(2)=f(2)+0=4$에서

$f(2)=4+2a+b=4,\ 2a+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0,\ b=0$

따라서 $f(x)=x^3-x^2$이므로 $f(-1)=-1-1=-2$

163. 정답 ⑤

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=2$에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=2$$

그러므로

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+2x$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x(x+1)}{f(x)} & (f(x)\neq0)\\ k & (f(x)=0)\end{cases}$$
$$=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x^3+ax^2+bx+2} & (f(x)\neq0)\\ k & (f(x)=0)\end{cases}$$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to0}g(x)=g(0)=k$

이때 $\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+1}{x^3+ax^2+bx+2}=\dfrac{1}{2}$이므로 $k=\dfrac{1}{2}$

$h(x)=x^3+ax^2+bx+2$라 하면

$h(0)\neq0$이고 $h(x)$가 삼차함수이므로 $h(\alpha)=0$인 실수 α ($\alpha\neq0$)이 존재한다.

이때 $f(x)=xh(x)$이므로 $f(\alpha)=0$이다.

함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서도 연속이므로

$\lim\limits_{x\to\alpha}g(x)=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{x+1}{x^3+ax^2+bx+2}=\dfrac{1}{2}$ …… ㉠

㉠에서 $x\to\alpha$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to\alpha}(x+1)=\alpha+1=0$이므로 $\alpha=-1$

이때 $h(\alpha)=h(-1)=-1+a-b+2=0$이므로

$b=a+1$ …… ㉡

㉠에서

$$\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^3+ax^2+(a+1)x+2}=\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{(x+1)\{x^2+(a-1)x+2\}}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{1}{x^2+(a-1)x+2}=\frac{1}{4-a}$$

이므로 $\dfrac{1}{4-a}=\dfrac{1}{2}$에서 $a=2$

㉡에 $a=2$를 대입하면 $b=3$

그러므로 $f(x)=x(x^3+2x^2+3x+2)=x(x+1)(x^2+x+2)$

이때 $x^2+x+2=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}>0$이므로 $x\neq0,\ x\neq-1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\neq0$이다.

즉, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

따라서 $f(1)=1\times2\times4=8$

164. 정답 ①

(ⅰ) $a_6=0$일 때

$a_7=a_6-8=-8,\ a_8={a_7}^2=(-8)^2=64$

따라서 $a_6+a_8=0$에 모순이다.

(ⅱ) $a_6<0$일 때

$a_6=k$ ($k<0$)이라 하면 $a_7={a_6}^2=k^2>0$

$a_8=a_7-8=k^2-8$

$a_6+a_8=k+(k^2-8)=k^2+k-8$

$a_6+a_8=0$, 즉 $k^2+k-8=0$을 만족시키는 정수 k는 없다.

(ⅲ) $a_6>0$일 때

$a_6=k$ ($k>0$)이라 하면 $a_7=a_6-8=k-8$

ⓐ $k\geq8$이면 $a_8=a_7-8=(k-8)-8=k-16$

$a_6+a_8=k+(k-16)=2k-16=0$이므로 $k=8$

ⓑ $k<8$이면 $a_8={a_7}^2=(k-8)^2$

$a_6+a_8=k+(k-8)^2=k^2-15k+64=\left(k-\dfrac{15}{2}\right)^2+\dfrac{31}{4}>0$

이므로 모순이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $a_6=8$

(ⅳ) $a_6=8=\begin{cases}a_5-8 & (a_5\geq0)\\ {a_5}^2 & (a_5<0)\end{cases}$

$a_5-8=8$에서 $a_5=16$

${a_5}^2=8$을 만족시키는 정수 a_5는 없다.

(ⅴ) $a_5=16=\begin{cases}a_4-8 & (a_4\geq0)\\ {a_4}^2 & (a_4<0)\end{cases}$

$a_4-8=16$에서 $a_4=24$

$a_4^2=16$에서 $a_4<0$이므로 $a_4=-4$

(ⅵ) $a_4=24$ 또는 $a_4=-4$

ⓐ $a_4=24=\begin{cases}a_3-8 & (a_3\geq0)\\ {a_3}^2 & (a_3<0)\end{cases}$

$a_3-8=24$에서 $a_3=32$

${a_3}^2=24$를 만족시키는 정수 a_3은 없다.

ⓑ $a_4=-4=\begin{cases}a_3-8 & (a_3\geq0)\\ {a_3}^2 & (a_3<0)\end{cases}$

$a_3-8=-4$에서 $a_3=4$

${a_3}^2=-4$를 만족시키는 정수 a_3은 없다.

(vii) $a_3=32$ 또는 $a_3=4$

ⓐ $a_3=32=\begin{cases} a_2-8 & (a_2 \geq 0) \\ a_2{}^2 & (a_2<0) \end{cases}$

$a_2-8=32$에서 $a_2=40$

$a_2{}^2=32$를 만족시키는 정수 a_2는 없다.

ⓑ $a_3=4=\begin{cases} a_2-8 & (a_2 \geq 0) \\ a_2{}^2 & (a_2<0) \end{cases}$

$a_2-8=4$에서 $a_2=12$

$a_2{}^2=4$에서 $a_2<0$이므로 $a_2=-2$

(viii) $a_2=40$ 또는 $a_2=12$ 또는 $a_2=-2$

ⓐ $a_2=40=\begin{cases} a_1-8 & (a_1 \geq 0) \\ a_1{}^2 & (a_1<0) \end{cases}$

$a_1-8=40$에서 $a_1=48$

$a_1^2=40$을 만족시키는 정수 a_1은 없다.

ⓑ $a_2=12=\begin{cases} a_1-8 & (a_1 \geq 0) \\ a_1{}^2 & (a_1<0) \end{cases}$

$a_1-8=12$에서 $a_1=20$

$a_1{}^2=12$를 만족시키는 정수 a_1은 없다.

ⓒ $a_2=-2=\begin{cases} a_1-8 & (a_1 \geq 0) \\ a_1{}^2 & (a_1<0) \end{cases}$

$a_1-8=-2$에서 $a_1=6$

$a_1^2=-2$를 만족시키는 정수 a_1은 없다.

따라서 모든 a_1의 값의 합은 $48+20+6=74$

165. 정답 ③

함수 $f(x)=3\sin \pi x+2$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$이고,

최댓값은 $3+2=5$, 최솟값은 $-3+2=-1$이다.

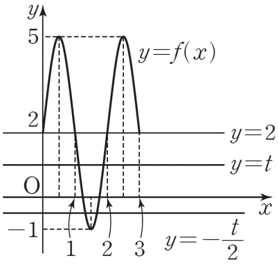
방정식 $\{f(x)-t\}\{2f(x)+t\}=0$에서

$f(x)=t$ 또는 $f(x)=-\frac{t}{2}$

방정식 $f(x)=t$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 x좌표이고, 방정식 $f(x)=-\frac{t}{2}$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-\frac{t}{2}$가 만나는 점의 x좌표이다.

(i) $0<t<2$일 때

$0 \leq x \leq 3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-\frac{t}{2}$가 만나는 두 점을 각각 C, D라 하자.



네 점 A, B, C, D의 x좌표를 각각 a, b, c, d $(a<c<d<b)$라 하면

$\frac{a+b}{2}=\frac{3}{2}$, $\frac{c+d}{2}=\frac{3}{2}$

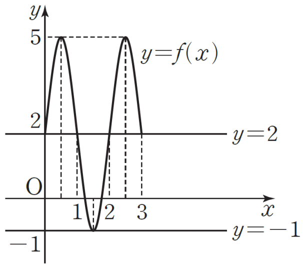
이므로 $a+b=3$, $c+d=3$

따라서 $g(t)=4$, $h(t)=3+3=6$이므로

$h(t)-g(t)=6-4=2$

(ii) $t=2$일 때

$0 \leq x \leq 3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2$가 만나는 네 점의 좌표는 각각 $(0,\ 2)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 2)$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-1$이 만나는 점의 좌표는 $\left(\frac{3}{2},\ -1\right)$이다.

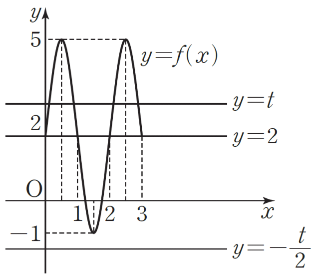


따라서 $g(2)=5$, $h(2)=0+1+2+3+\frac{3}{2}=\frac{15}{2}$이므로

$h(2)-g(2)=\frac{15}{2}-5=\frac{5}{2}$

(iii) $2<t<5$일 때

$0 \leq x \leq 3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 네 점을 각각 P, Q, R, S라 하자. 네 점 P, Q, R, S의 x좌표를 각각 p, q, r, s $(p<q<r<s)$라 하면



$\frac{p+q}{2}=\frac{1}{2}$, $\frac{r+s}{2}=\frac{5}{2}$

이므로

$p+q=1$, $r+s=5$

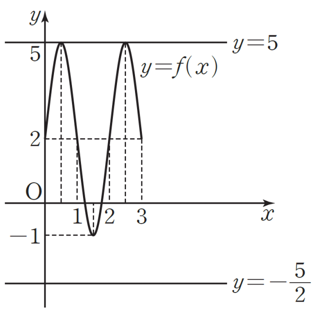
한편, $0 \leq x \leq 3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-\frac{t}{2}$는 만나지 않는다.

따라서 $g(t)=4$, $h(t)=1+5=6$이므로

$h(t)-g(t)=6-4=2$

(iv) $t=5$일 때

$0 \leq x \leq 3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=5$가 만나는 두 점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ 5\right)$, $\left(\frac{5}{2},\ 5\right)$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-\frac{5}{2}$는 만나지 않는다.

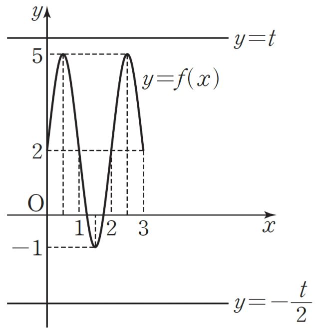


따라서 $g(5)=2$, $h(5)=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=3$이므로

$h(5)-g(5)=3-2=1$

(v) $t>5$일 때

$0 \le x \le 3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나지 않고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-\dfrac{t}{2}$도 만나지 않는다.



따라서 $g(t)=0$, $h(t)=0$이므로

$h(t)-g(t)=0-0=0$

(ⅰ)~(ⅴ)에서 $h(t)-g(t)$의 최댓값은 $\dfrac{5}{2}$이다.

166. 정답 ④

조건 (가)에서 함수 $|f(x)|$가 $x=-1$에서만 미분가능하지 않으므로

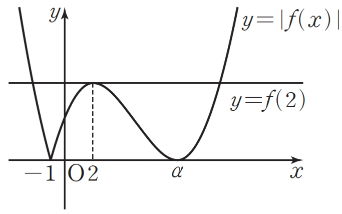
$f(-1)=0$, $f'(-1)\neq 0$

방정식 $|f(x)|=f(-1)$, 즉 $|f(x)|=0$에서 $|f(-1)|=0$이므로

$x=-1$은 방정식 $|f(x)|=0$의 실근이다.

조건 (나)에서 방정식 $|f(x)|=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 이 두 실근의 합이 1보다 크므로 방정식 $|f(x)|=0$의 두 실근을 -1, α $(\alpha>2)$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축은 접하고

$f(x)=(x+1)(x-\alpha)^2$으로 놓을 수 있다.



조건 (다)에서 방정식 $|f(x)|=f(2)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이고 $a>2$이므로

$f'(2)=0$이어야 한다.

$f(x)=(x+1)(x-\alpha)^2=(x+1)(x^2-2\alpha x+\alpha^2)$에서

$f'(x)=(x^2-2\alpha x+\alpha^2)+(x+1)(2x-2\alpha)=(x-\alpha)(3x-\alpha+2)$

$f'(2)=(2-\alpha)(6-\alpha+2)=0$에서

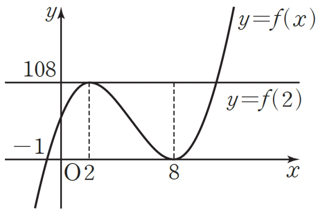
$\alpha>2$이므로 $\alpha=8$

함수 $y=f(x-m)+n$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다.

이때 $f'(2)=0$, $f'(8)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 갖고 $x=8$에서 극솟값을 갖는다.

$f(x)=(x+1)(x-8)^2$이고,

$f(2)=108$, $f(8)=0$



이므로 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$m=-6$, $n=108$

이어야 한다.

따라서 $m+n=-6+108=102$

167. 정답 ②

곡선 $y=\log_2(x+a)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$y=\log_2(x+a)$에서 $x=\log_2(y+a)$

$y+a=2^x$, $y=2^x-a$

$h(x)=2^x-a$

조건 (가)에서 두 곡선 $y=4^x+\dfrac{b}{8}$, $y=2^x-a$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $4^x+\dfrac{b}{8}=2^x-a$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$(2^x)^2-2^x+a+\dfrac{b}{8}=0$에서 $2^x=X$ $(X>0)$이라 하면

$X^2-X+a+\dfrac{b}{8}=0$ …… ㉠

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\times1\times\left(a+\dfrac{b}{8}\right)>0$이므로

$a+\dfrac{b}{8}<\dfrac{1}{4}$ …… ㉡

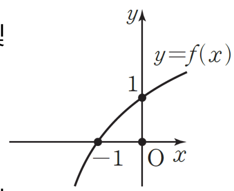
㉠의 두 근이 모두 양수이므로

$a+\dfrac{b}{8}>0$ …… ㉢

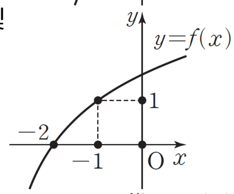
㉡, ㉢에서 $0<a+\dfrac{b}{8}<\dfrac{1}{4}$ …… ㉣

자연수 a의 값에 따른 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 구하면 다음과 같다.

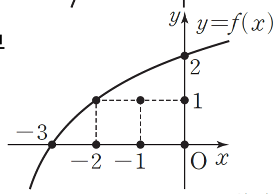
(ⅰ) $a=2$이면 곡선 $y=\log_2(x+2)$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 3이다.



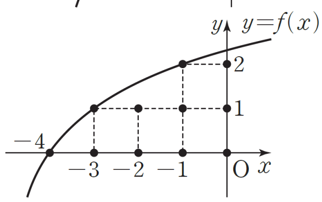
(ⅱ) $a=3$이면 곡선 $y=\log_2(x+3)$과 x축 및 y축으로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 5이다.



(ⅲ) $a=4$이면 곡선 $y=\log_2(x+4)$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 8이다.



(ⅳ) $a\ge5$이면 곡선 $y=\log_2(x+a)$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 11 이상이다.



(ⅰ)~(ⅳ)에서 $a=4$이고, ㉣에 의하여 $0<4+\dfrac{b}{8}<\dfrac{1}{4}$에서

$-4<\dfrac{b}{8}<-\dfrac{15}{4}$, $-32<b<-30$

이때 b가 정수이므로 $b=-31$

따라서 $a+b=4+(-31)=-27$

168. 정답 60

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle ABC)=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{CA}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{BC}}=\dfrac{1^2+x^2-(3-x)^2}{2\times1\times x}=\dfrac{3x-4}{x}$

이므로 $\dfrac{3x-4}{x}=\dfrac{1}{3}$에서 $9x-12=x$, $x=\dfrac{3}{2}$

$\overline{AD}=a$라 하면 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BD}\times\cos(\angle ABD)$

$a^2=1^2+1^2-2\times1\times1\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}$, $a=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle BAD)=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-\overline{BD}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{AD}}$

$=\dfrac{1^2+\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2-1^2}{2\times1\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

이므로 $\sin^2(\angle BAD)=1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\dfrac{2}{3}$

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle CAD)=\dfrac{\overline{AD}^2+\overline{CA}^2-\overline{DC}^2}{2\times\overline{AD}\times\overline{CA}}$

$=\dfrac{\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}{2\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{3}{2}}=\dfrac{5}{3\sqrt{3}}$

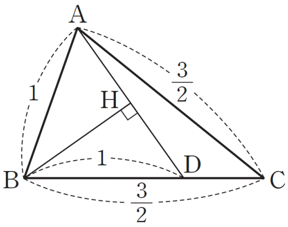
이므로 $\sin^2(\angle CAD)=1-\left(\dfrac{5}{3\sqrt{3}}\right)^2=\dfrac{2}{27}$

즉, $\sin^2(\angle BAD)+\sin^2(\angle CAD)=\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{27}=\dfrac{20}{27}$

따라서 $k=\dfrac{20}{27}$이므로 $81k=81\times\dfrac{20}{27}=60$

[참고]

풀이에서 $\overline{AD}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$이므로 $\sin(\angle BAD)$, $\sin(\angle CAD)$의 값은 사인법칙을 이용하여 다음과 같이 구할 수도 있다.



그림과 같이 점 B에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 ABD가 $\overline{AB}=\overline{BD}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\overline{AD}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\overline{BH}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{1^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

그러므로 $\sin(\angle BAD)+\sin(\angle BAH)=\dfrac{\overline{BH}}{\overline{AB}}=\dfrac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{1}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

이등변삼각형 ABD에서 $\angle BAD=\angle ADB$이므로

$\sin(\angle ADB)=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{DC}}{\sin(\angle CAD)}=\dfrac{\overline{CA}}{\sin(\pi-\angle ADB)}$

즉, $\dfrac{\overline{DC}}{\sin(\angle CAD)}=\dfrac{\overline{CA}}{\sin(\angle ADB)}$이므로

$\sin(\angle CAD)=\dfrac{\overline{DC}}{\overline{CA}}\times\sin(\angle ADB)=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{\sqrt{6}}{9}$

169. 정답 27

조건 (가)에 $n=6$을 대입하면 $a_6a_8<a_6a_7$ …… ㉠

조건 (가)에 $n=7$을 대입하면 $a_6a_8<a_7a_8$ …… ㉡

㉠에서 $a_6\neq0$이다.

$a_6>0$일 때, ㉠에서 $a_8<a_7$이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 공차는 음수이고, $a_6>a_7$이다.

또한 ㉡에서 $a_8\neq0$이므로 $a_8<0$이다. 즉, $a_8<0<a_6$

$a_6<0$일 때, 마찬가지 방법으로 $a_8>0$이므로 $a_6<0<a_8$

(ⅰ) $a_6<0<a_8$일 때

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d (d는 정수)라 하면 $d>0$이다.

$a_8=a_1+7d>0$에서 $a_1>-7d$이고

$a_6=a_1+5d<0$에서 $a_1<-5d$이므로

$-7d<a_1<-5d$ …… ㉢

① $a_7>0$일 때

조건 (나)에서

$\sum_{k=1}^{10}(|a_k|+a_k)=2(a_7+a_8+a_9+a_{10})=30$이므로

$a_7+a_8+a_9+a_{10}=15$, $4a_1+30d=15$ …… ㉣

이때 a_1과 d가 모두 정수이므로 ㉣을 만족시키는 a_1과 d의 값은 존재하지 않는다.

② $a_7\leq0$일 때

조건 (나)에서 $\sum_{k=1}^{10}(|a_k|+a_k)=2(a_8+a_9+a_{10})=30$이므로

$a_8+a_9+a_{10}=15$, $3a_9=15$, $a_9=5$

즉, $a_9=a_1+8d=5$이므로 $a_1=5-8d$ …… ㉤

㉤을 ㉢에 대입하면

$-7d<5-8d<-5d$, $\dfrac{5}{3}<d<5$

한편, $a_7=a_1+6d=(5-8d)+6d=5-2d\le 0$에서 $d\ge\dfrac{5}{2}$

이때 d는 양의 정수이므로 $d=3$ 또는 $d=4$이고, ㉤에서

$d=3$일 때 $a_1=-19$, $d=4$일 때 $a_1=-27$

(ii) $a_8<0<a_6$일 때

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d (d는 정수)라 하면 $d<0$이다.

$a_8=a_1+7d<0$에서 $a_1<-7d$이고

$a_6=a_1+5d>0$에서 $a_1>-5d$이므로

$-5d<a_1<-7d$ …… ㉥

① $a_7>0$일 때

조건 (나)에서

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(|a_k|+a_k)=2(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7)=30$이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7=15$, $7a_4=15$, $a_4=\dfrac{15}{7}$

이때 a_4가 정수가 아니므로 모든 항이 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.

② $a_7\le 0$일 때

조건 (나)에서

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(|a_k|+a_k)=2(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_6)=30$이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_6=15$, $6a_1+15d=15$

$a_1=\dfrac{5-5d}{2}$ …… ㉦

㉦을 ㉥에 대입하면

$-5d<\dfrac{5-5d}{2}<-7d$, $-10d<5-5d<-14d$

$-1<d<-\dfrac{5}{9}$

이때 정수 d의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a_1=-19$ 또는 $a_1=-27$

따라서 $|a_1|$의 최댓값은 27이다.

170. 정답 252

함수 $g(x)$를 n차함수 (n은 자연수)라 하면 조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)$는 $(n+1)$차함수이다.

조건 (가)의

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$는 $2n$차함수이고,

$18\{G(x)+2f'(x)+22\}$는 $(n+1)$차함수이므로

$2n=n+1$에서 $n=1$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 이차함수이고, 함수 $g(x)$는 일차함수이다.

$g(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\ne 0$)이라 하면

$g'(x)=a$, $G(x)=\displaystyle\int g(x)dx=\frac{1}{2}ax^2+bx+C$ (C는 적분상수)이다.

조건 (다)에서 $G(0)=1$이므로 $C=1$

즉, $G(x)=\dfrac{1}{2}ax^2+bx+1$

조건 (나)에서

$f(x)=\displaystyle\int_1^x g(t)dt+6(3x-2)=\int_1^x(at+b)dt+6(3x-2)$

$=\left[\dfrac{1}{2}at^2+bt\right]_1^x+6(3x-2)$

$=\left(\dfrac{1}{2}ax^2+bx-\dfrac{1}{2}a-b\right)+18x-12$

$=\dfrac{1}{2}ax^2+(b+18)x-\left(\dfrac{1}{2}a+b+12\right)$ …… ㉠

$f'(x)=ax+b+18$

조건 (가)에서 $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$=(ax+b+18)(ax+b)+\left\{\dfrac{1}{2}ax^2+(b+18)x-\left(\dfrac{1}{2}a+b+12\right)\right\}\times a$

$=\{a^2x^2+a(2b+18)x+b^2+18b\}$

$\quad+\left\{\dfrac{1}{2}a^2x^2+a(b+18)x-\left(\dfrac{1}{2}a^2+ab+12a\right)\right\}$

$=\dfrac{3}{2}a^2x^2+a(3b+36)x+\left(-\dfrac{1}{2}a^2-ab-12a+b^2+18b\right)$ …… ㉡

$18\{G(x)+2f'(x)+22\}$

$=18\left\{\dfrac{1}{2}ax^2+bx+1+2(ax+b+18)+22\right\}$

$=9ax^2+18(2a+b)x+18(2b+59)$ …… ㉢

조건 (가)에 의하여 ㉡=㉢이므로

$\dfrac{3}{2}a^2=9a$에서 $a\ne 0$이므로 $a=6$

$-\dfrac{1}{2}a^2-ab-12a+b^2+18b=18(2b+59)$에서

$-\dfrac{1}{2}\times 6^2-6b-72+b^2+18b=36b+18\times 59$

$b^2-24b-18\times 64=0$, $(b+24)(b-48)=0$

$b=-24$ 또는 $b=48$

즉, $g(x)=6x-24$ 또는 $g(x)=6x+48$

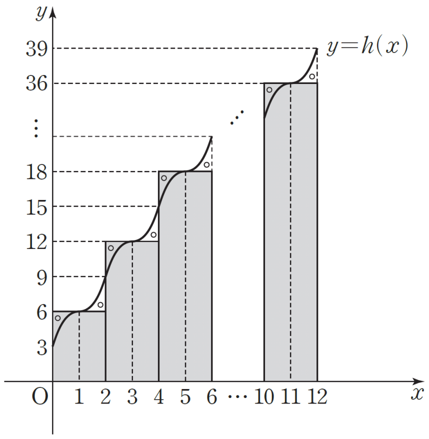
조건 (다)에서 $g(1)<0$이므로 $g(x)=6x-24$

따라서 $a=6$, $b=-24$이므로 ㉠에서

$f(x)=3x^2-6x+9=3(x-1)^2+6$

$h(x)=\begin{cases}-3(x-1)^2+6 & (0\le x<1)\\ 3(x-1)^2+6 & (1\le x\le 2)\end{cases}$이고,

모든 실수 x에 대하여 $h(x)=h(x-2)+6$이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다.



◦를 표시한 부분의 넓이가 서로 같고, $g(4)=0$, $g(6)=12$이므로

$$\int_{g(4)}^{g(6)} h(x)dx$$
$$=\int_{0}^{12} h(x)dx$$
$$=2\times[f(1)+\{f(1)+6\}+\{f(1)+12\}+\cdots+\{f(1)+30\}]$$
$$=2\times6\times\{f(1)+(1+2+3+4+5)\}$$
$$=2\times6\times\left(6+\frac{5\times6}{2}\right)=252$$

171. 정답 ⑤

정적분과 미분의 관계

$$(1-x)f(x)=x^3-6x^2+9x-\int_{-1}^{x} f(t)dt \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$2f(-1)=-16$에서

$f(-1)=-8$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$-f(x)+(1-x)f'(x)=3x^2-12x+9-f(x)$

$(1-x)f'(x)=3(x-1)(x-3)$

$f(x)$가 다항함수이므로

$f'(x)=-3x+9$

$f(x)=\int(-3x+9)dx$

$\quad=-\frac{3}{2}x^2+9x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(-1)=-\frac{3}{2}-9+C=-8$에서

$C=\frac{5}{2}$

따라서 $f(x)=-\frac{3}{2}x^2+9x+\frac{5}{2}$이므로

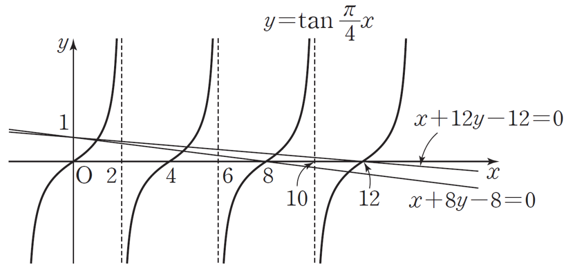
$f(1)=-\frac{3}{2}+9+\frac{5}{2}=10$

172. 정답 ①

삼각함수의 그래프

함수 $y=\tan\frac{\pi}{4}x$의 주기는

$\frac{\pi}{\frac{\pi}{4}}=4$이므로 함수 $y=\tan\frac{\pi}{4}x$의 그래프는 그림과 같다.



직선 $x+ny-n=0$에서

$x+n(y-1)=0$

이므로 직선 $x+ny-n=0$은 n의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 1)$을 지난다.

이때 직선 $x+ny-n=0$은 점 $(n,\ 0)$을 지나므로

직선 $x+ny-n=0$과 함수 $y=\tan\frac{\pi}{4}x$의 그래프가 제1사분면에서 만나는 점의 개수가 3이려면 $8<n\le12$

이어야 한다.

따라서 구하는 자연수 n의 값은

$9,\ 10,\ 11,\ 12$

이므로 그 합은

$9+10+11+12=42$

173. 정답 ②

수직선 위를 움직이는 점의 속도

점 P의 시각 $t(t\ge0)$에서의 속도를 $v(t)$라 하자.

$v(t)=x'(t)=3t^2-12t+9$

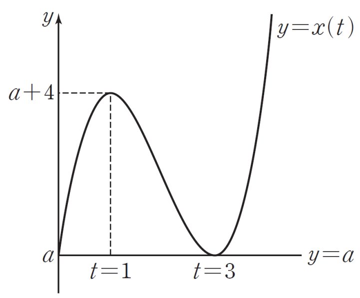
$\quad=3(t-1)(t-3)$

$v(t)=0$에서

$t=1$ 또는 $t=3$

따라서 함수 $x(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

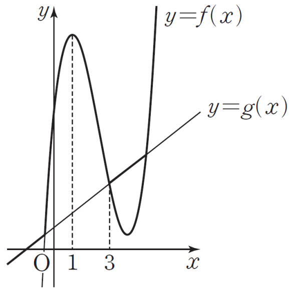
t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$x'(t)$		+	0	−	0	+
$x(t)$	a	↗	$a+4$	↘	a	↗



$x(0)=a$이므로 $t \geq 0$에서 함수 $x(t)$는 $t=3$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 a이다.
즉, $t \geq 0$인 모든 실수 t에 대하여
$x(t) \geq x(b)=a$
이때 $b>0$이므로
$b=3$
한편, 시각 $t=b$에서 점 P의 위치는 1이므로
$x(b)=a=1$
따라서 시각 $t=a+b=4$에서의 점 P의 속도는
$$\begin{aligned} x'(4)&=v(4)\\ &=3(4-1)(4-3)\\ &=9 \end{aligned}$$

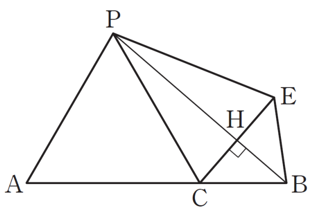
174. 정답 ①
수열의 합과 일반항의 관계
수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 S_1+4, 즉 a_1+4이고 공비가 4인 등비수열이므로
$b_n=S_n+4=(a_1+4)\times 4^{n-1}$
$S_n=(a_1+4)\times 4^{n-1}-4$
2 이상의 자연수 n에 대하여
$$\begin{aligned} a_n&=S_n-S_{n-1}\\ &=\left\{(a_1+4)\times 4^{n-1}-4\right\}-\left\{(a_1+4)\times 4^{n-2}-4\right\}\\ &=(a_1+4)(4^{n-1}-4^{n-2})\\ &=(a_1+4)(4-1)\times 4^{n-2}\\ &=3(a_1+4)\times 4^{n-2} \end{aligned}$$
$a_2=21$에서
$3(a_1+4)=21$
$a_1=3$
따라서
$$\begin{aligned} a_1+a_3&=3+21\times 4\\ &=87 \end{aligned}$$

175. 정답 ①
함수의 극대와 극소
조건 (가)에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 서로 다른 세 점에서 만나야 한다. 또 조건 (나)를 만족시키려면 그림과 같이 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 $x=3$인 점에서 만나야 한다.



$f(x)=2x^3+ax^2+bx+18$에서
$f'(x)=6x^2+2ax+b$이고
$f'(1)=0$이어야 하므로
$6+2a+b=0$ …… ㉠
$f(3)=g(3)$이어야 하므로
$54+9a+3b+18=9$에서
$3a+b=-21$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-15$, $b=24$
이므로
$f(x)=2x^3-15x^2+24x+18$이고
$$\begin{aligned} f'(x)&=6x^2-30x+24\\ &=6(x-1)(x-4) \end{aligned}$$
$f'(x)=0$에서
$x=1$ 또는 $x=4$
따라서 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합은
$$\begin{aligned} f(1)+f(4)&=29+2\\ &=31 \end{aligned}$$

176. 정답 ③
사인법칙과 코사인법칙



선분 CE는 두 원 O_2, O_3의 공통인 현이므로 두 직선 PB, CE는 서로 수직이다.
삼각형 PAC는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로 삼각형 PAB에서 코사인법칙에 의하여
$$\begin{aligned} \overline{PB}^2&=\overline{PA}^2+\overline{AB}^2-2\times\overline{PA}\times\overline{AB}\times\cos(\angle PAB)\\ &=2^2+3^2-2\times 2\times 3\times\frac{1}{2}\\ &=7 \end{aligned}$$
$\overline{PB}>0$이므로
$\overline{PB}=\sqrt{7}$

점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 길이가 $\sqrt{3}$이므로 삼각형 PCB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이때 두 선분 PB, CE의 교점을 H라 하면

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CH}}\times\overline{\mathrm{PB}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{\mathrm{CH}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$

삼각형 EDC의 외접원 O_3의 반지름의 길이가 2이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{CE}}}{\sin(\angle\mathrm{EDC})}=2\times 2$

따라서

$$\sin(\angle\mathrm{EDC})=\frac{\overline{\mathrm{CE}}}{4}=\frac{2\sqrt{21}}{7}\times\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{21}}{14}$$

177. 정답 ②

미분법(방정식에의 활용)

$f(x)=x^3-6x^2+9x+16$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9$
$=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	20	↘	16	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 20을 갖고, $x=3$에서 극솟값 16을 갖는다.

한편, $f(x)=(x+1)(x^2-7x+16)$이고

모든 실수 x에 대하여

$x^2-7x+16=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0$

이므로 $f(x)=0$에서 $x=-1$

집합 A의

$f(x)f'(t)(x-t)+f(x)f(t)=0$

에서

$f(x)f'(t)(x-t)+f(t)=0$

$f(x)=0$ 또는 $f'(t)(x-t)+f(t)=0$

이때 $g(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$라 하면 함수 $y=g(x)$의 그래프는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$에서의 접선이다.

집합 A의 원소의 개수가 1이려면 방정식 $f(x)g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 1이어야 한다.

즉, 접선 $y=g(x)$가 x축에 평행하거나 점 $(-1,\ 0)$을 지나야 한다.

$t=1$ 또는 $t=3$일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$에서의 접선 $y=g(x)$는 x축에 평행하다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y-(t^3-6t^2+9t+16)=(3t^2-12t+9)(x-t)$

이 접선이 점 $(-1,\ 0)$을 지날 때,

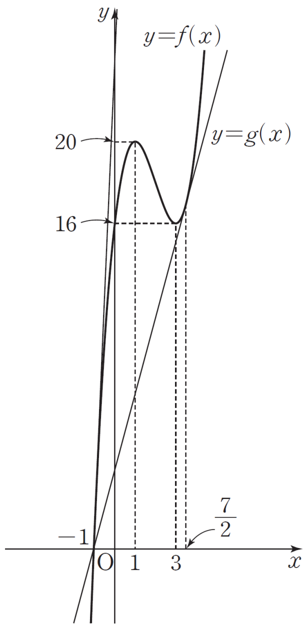
$x=-1,\ y=0$을 대입하면

$0-(t^3-6t^2+9t+16)=(3t^2-12t+9)(-1-t)$

$(t+1)^2(2t-7)=0$

$t=-1$ 또는 $t=\frac{7}{2}$

즉, $t=-1$ 또는 $t=\frac{7}{2}$일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$에서의 접선 $y=g(x)$는 점 $(-1, 0)$을 지난다.



따라서 집합 A의 원소의 개수가 1이 되도록 하는모든 t의 값의 합은

$-1+1+3+\frac{7}{2}=\frac{13}{2}$

178. 정답 22

지수함수와 로그함수의 그래프

점 A의 좌표는 $(0,\ 1)$이므로 점 B의 좌표는 $(m,\ 1+n)$이다.

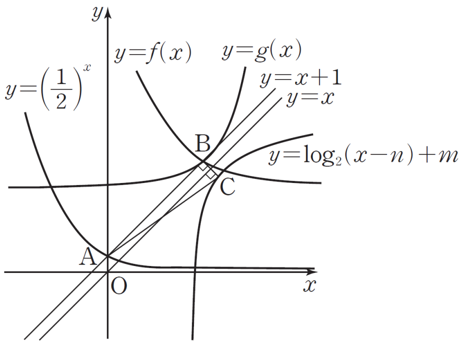
점 B는 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로 $1+n=m+1$에서 $m=n$이다.

함수 $y=2^x$의 그래프도 y축과 점 A에서 만나므로

$g(x)=2^{x-m}+n$이라 하면 함수 $y=g(x)$의 그래프도 점 $\mathrm{B}(m,\ 1+n)$을 지난다.

또한 함수 $y=g(x)$의 역함수가 $y=\log_2(x-n)+m$이고 기울기가 -1인 직선이두 함수 $y=g(x)$, $y=\log_2(x-n)+m$의 그래프와

만나는 점이 각각 B, C이므로 두 점 B, C는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



즉, 두 점 B, C의 좌표는 각각 $(m, m+1)$, $(m+1, m)$이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

두 직선 AB, BC의 기울기의 곱은 -1이므로 삼각형 ABC에서 $\angle \mathrm{B}=90°$이다.

$m>0$이고 삼각형 ABC의 넓이가 6이므로

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}m\times\sqrt{2}$$
$$=m=6$$

따라서 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-6}+6$이므로

$$f(2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}+6$$
$$=16+6$$
$$=22$$

179. 정답 16

미분법의 활용

$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ (a, b, c, d, e는 상수, $a\neq 0$)

이라 하면

조건 (가)에서 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^4}=\frac{1}{2}$ 이므로 $a=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x^2}=\frac{1}{2}$에서 $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$이므로

$e=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^4+bx^3+cx^2+dx}{2x^2}$$
$$=\frac{1}{2}\times\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}x^2+bx+c+\frac{d}{x}\right)$$
$$=\frac{1}{2}$$

이므로

$c=1$, $d=0$

그러므로 $f(x)=\frac{1}{2}x^4+bx^3+x^2$

조건 (나)에서 $0<x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$f(x_1)+{x_1}^2<f(x_2)+{x_2}^2$

이므로 $g(x)=f(x)+x^2$이라 하면 함수 $g(x)$는 열린구간 $(0, \infty)$에서 증가하는 함수이다.

함수 $g(x)$가 열린구간 $(0, \infty)$에서 증가하기 위한 필요조건은 $x>0$일 때 $g'(x)\geq 0$이다.

$$g'(x)=f'(x)+2x$$
$$=2x^3+3bx^2+2x+2x$$
$$=x(2x^2+3bx+4)$$에서 $x>0$이므로

$2x^2+3bx+4\geq 0$

$h(x)=2x^2+3bx+4$라 하면 $x>0$일 때 이차부등식 $h(x)\geq 0$이 성립하기 위해서는 $x>0$일 때 이차함수 $y=h(x)$의 그래프가 x축과 접하거나 x축보다 위쪽에 있어야 한다.

(i) $b>0$일 때 이차함수 $y=h(x)$의 그래프의 축의 방정식은

$x=-\frac{3}{4}b<0$

이고 $h(0)=4>0$이므로 $x>0$일 때 $h(x)>0$이 성립한다.

(ii) $b<0$일 때

이차함수 $y=h(x)$의 그래프의 축의 방정식은

$x=-\frac{3}{4}b>0$

이므로 $x>0$일 때 함수 $h(x)$의 최솟값이 0보다 크거나 같아야 한다.

즉, $h\left(-\frac{3}{4}b\right)=4-\frac{9}{8}b^2\geq 0$에서

$b^2\leq\frac{32}{9}$이므로

$-\frac{4\sqrt{2}}{3}\leq b<0$

이때 $-\frac{4\sqrt{2}}{3}<b<0$이면 함수 $h(x)$의 최솟값이 0보다 크므로 $x>0$일 때 $h(x)=0$이다. 또한 $b=-\frac{4\sqrt{2}}{3}$이면 $x=\sqrt{2}$에서만 $h(x)=0$이고, $x=\sqrt{2}$를 제외한 모든 실수 x에서 $h(x)>0$이다.

(iii) $b=0$일 때 $h(x)=2x^2+4$이므로 $x>0$일 때 $h(x)>0$이 성립한다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 $b=-\frac{4\sqrt{2}}{3}$일 때 $x=\sqrt{2}$에서만 $g'(x)=0$이고 $x=\sqrt{2}$를 제외한 모든 양의 실수 x에서 $g'(x)>0$이므로 $x>0$일 때 함수 $g(x)$가 증가한다.

그러므로 함수 $g(x)$가 $x>0$일 때 증가하기 위한 필요충분조건은 $b\geq-\frac{4\sqrt{2}}{3}$이다.

$f(\sqrt{2})=4+2\sqrt{2}b$

$\geq 4+2\sqrt{2}\times\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)=-\frac{4}{3}$

따라서 $f(\sqrt{2})$의 최솟값은 $m=-\frac{4}{3}$이므로

$9m^2=9\times\left(-\frac{4}{3}\right)^2$

$=16$

180. 정답 125

귀납적으로 정의된 수열

(ⅰ) a_4가 홀수인 경우

$a_5=\frac{a_4+1}{2}$

① a_5가 홀수이면

$a_6=\frac{a_5+1}{2}=\frac{a_4+3}{4}=a_4$에서

$4a_4=a_4+3$, $a_4=1$

따라서 $a_5=1$, $a_6=1$

② a_5가 짝수이면

$a_6=a_5+3=\frac{a_4+1}{2}+3=a_4$에서

$a_4+7=2a_4$, $a_4=7$

따라서 $a_5=4$, $a_6=7$

(ⅱ) a_4가 짝수인 경우

$a_5=a_4+3$

a_5는 홀수이므로

$a_6=\frac{a_5+1}{2}=\frac{a_4+4}{2}=a_4$에서

$a_4+4=2a_4$, $a_4=4$

따라서 $a_5=7$, $a_6=4$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 a_6의 값은 1, 4, 7 중 하나이므로 $a_2\neq a_4$임을 확인하여 보자.

<table>
<tr><th>a_6</th><th>a_5</th><th>a_4</th><th>a_3</th><th>a_2</th><th>a_1</th><th>$a_2\neq a_4$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td>$a_2=a_4$(모순)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">4</td><td rowspan="3">7</td><td rowspan="3">4</td><td rowspan="3">7</td><td rowspan="2">13</td><td>25</td><td>$a_2\neq a_4$</td></tr>
<tr><td>10</td><td>$a_2\neq a_4$</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td>$a_2=a_4$(모순)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">7</td><td rowspan="4">4</td><td rowspan="4">7</td><td rowspan="3">13</td><td rowspan="2">25</td><td>49</td><td>$a_2\neq a_4$</td></tr>
<tr><td>22</td><td>$a_2\neq a_4$</td></tr>
<tr><td>10</td><td>19</td><td>$a_2\neq a_4$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>7</td><td></td><td>$a_2=a_4$(모순)</td></tr>
</table>

따라서 a_1의 값은 10, 19, 22, 25, 49 중 하나이므로 구하는 합은

$10+19+22+25+49=125$

181. 정답 ②

수열의 합과 일반항의 관계 및 $\sum$의 성질

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$

$=n^2+2n-1$

(ⅰ) $n=1$일 때,

$a_1=S_1$

$=1+2-1$

$=2$

(ⅱ) $n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2+2n-1)-\{(n-1)^2+2(n-1)-1\}$

$=2n+1$ $\cdots\cdots$ ㉠

이때 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같지 않으므로 수열 $\{a_n\}$은

$\begin{cases} a_1=2 \\ a_n=2n+1 \quad (n\geq 2) \end{cases}$

한편,

$k=1$일 때

$a_{k+3}-a_k=a_4-a_1$

$=9-2$

$=7$

$k\geq 2$일 때

$a_{k+3}-a_k=\{2(k+3)+1\}-(2k+1)$

$=6$

따라서

$\sum_{k=1}^{10}(a_{k+3}-a_k)=(a_4-a_1)+\sum_{k=2}^{10}(a_{k+3}-a_k)$

$=7+\sum_{k=2}^{10}6$

$=7+9\times 6$

$=61$

182. 정답 ③

적분의 활용(속도와 거리)

$\lim_{t\to\infty}(t)=\infty$이므로 점 P가 출발 후 운동 방향을 바꾸지 않으려면

$t\geq 0$인 모든 실수 t에 대하여 $v(t)\geq 0$이어야 한다.

$t>0$에서 $v'(t)=t^2-2at=t(t-2a)$이므로

$v'(t)=0$에서 $t=2a$

이때 속도 $v(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$v'(t)$		$-$	0	$+$
$v(t)$		↘	극소	↗

따라서 속도 $v(t)$는 시각 $t=2a$에서 최소이고, 최솟값이 0 이상이어야 하므로

$$v(2a)=\frac{8}{3}a^3-4a^3+3a$$
$$=-\frac{4}{3}a^3+3a$$
$$=-\frac{4}{3}a\left(a^2-\frac{9}{4}\right)\geq 0$$

$a>0$이므로 $a^2 \leq \frac{9}{4}$, 즉

$$0<a\leq\frac{3}{2}$$

한편, 시각 $t=2$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^2 v(t)dt=\int_0^2\left(\frac{1}{3}t^3-at^2+3a\right)dt$$
$$=\left[\frac{1}{12}t^4-\frac{a}{3}t^3+3at\right]_0^2$$
$$=\frac{4}{3}-\frac{8}{3}a+6a$$
$$=\frac{4}{3}+\frac{10}{3}a$$

따라서 구하는 최댓값은 $a=\frac{3}{2}$일 때

$$\frac{4}{3}+\frac{10}{3}\times\frac{3}{2}=\frac{19}{3}$$

183. 정답 ①

로그의 정의와 성질

이차방정식 $x^2-\left(\log_a\frac{a^3}{4}\right)x-2=0$의 두 근이 $\log_2 a$, $\log_a b$이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_2 a+\log_a b=\log_a\frac{a^3}{4} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$
$$\log_2 a\times\log_a b=-2 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉡에서

$$\frac{\log a}{\log 2}\times\frac{\log b}{\log a}=-2$$
$$\log b=-2\log 2$$
$$=\log\frac{1}{4}$$
$$b=\frac{1}{4}$$

$b=\frac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면

$$\log_2 a+\log_a\frac{1}{4}=\log_a\frac{a^3}{4}$$
$$\log_2 a-2\log_a 2=3-2\log_a 2$$
$$\log_2 a=3$$
$$a=2^3=8$$

따라서

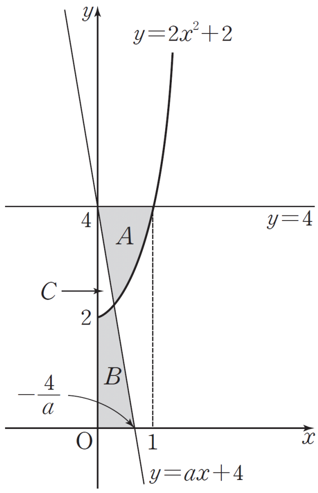
$$ab=8\times\frac{1}{4}=2$$

184. 정답 ①

두 곡선 사이의 넓이

곡선 $y=2x^2+2(x\geq 0)$과 직선 $y=4$가 만나는 점의 x좌표를 구하면

$2x^2+2=4$에서 $x=1$



곡선 $y=2x^2+2(x\geq 0)$과 y축 및 직선 $y=ax+4$로 둘러싸인 부분의 넓이를 C라 하자.

곡선 $y=2x^2+2(x\geq 0)$과 y축 및 직선 $y=4$로 둘러싸인 부분의 넓이는 $A+C$이므로

$$A+C=\int_0^1\{4-(2x^2+2)\}dx$$
$$=\int_0^1(2-2x^2)dx$$
$$=\left[2x-\frac{2}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=2-\frac{2}{3}$$
$$=\frac{4}{3}$$

직선 $y=ax+4$의 x절편, y절편이 각각 $-\frac{4}{a}$, 4이고 x축, y축 및 직선 $y=ax+4$로 둘러싸인 부분의 넓이는 $B+C$이므로

$$B+C=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{4}{a}\right)\times 4$$
$$=-\frac{8}{a}$$

이때 $A=B$이므로

$$A+C=B+C$$

따라서 $\frac{4}{3}=-\frac{8}{a}$이므로

$a=-6$

185. 정답 ②

사인법칙과 코사인법칙

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos(\angle ABC)$$
$$=3^2+(\sqrt{5})^2-2\times3\times\sqrt{5}\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$
$$=20$$

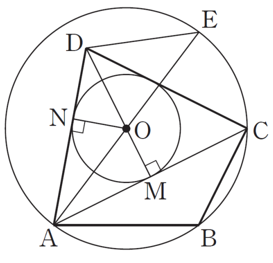
$\overline{AC}=2\sqrt{5}$

$$\sin(\angle ABC)=\sqrt{1-\cos^2(\angle ABC)}$$
$$=\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}$$
$$=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

삼각형 ABC 의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABC)}=2R$$
$$R=\frac{\overline{AC}}{2\sin(\angle ABC)}$$
$$=\frac{2\sqrt{5}}{2\times\frac{2\sqrt{5}}{5}}$$
$$=\frac{5}{2}$$

점 O는 삼각형 ABC 의 외접원의 중심이므로 선분 AC 의 수직이등분선 위에 있다. 그러므로 내접원의 중심이 O 인 삼각형 ACD 는 $\overline{AD}=\overline{CD}$인 이등변삼각형이다.



삼각형 ACD 의 내접원의 반지름의 길이를 r, 선분 AC 의 중점을 M 이라 하면 직각삼각형 OAM 에서

$$\overline{OM}^2=\overline{AO}^2-\overline{AM}^2$$
$$=R^2-\left(\frac{\overline{AC}}{2}\right)^2$$
$$=\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right)^2$$
$$=\frac{5}{4}$$

$$r=\overline{OM}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

점 O 에서 선분 AD 에 내린 수선의 발을 N 이라 하면 두 직각삼각형 DAM, DON 은 서로 닮은 도형이고 닮음비는

$$\overline{AM}:\overline{ON}=\sqrt{5}:\frac{\sqrt{5}}{2}=2:1$$

$\overline{AD}=x$라 하면 $\overline{DO}=\frac{x}{2}$, $\overline{DN}=\frac{1}{2}\overline{DM}$

점 O가 삼각형 ACD 의 내접원의 중심이므로

$\overline{AN}=\overline{AM}$, $\angle DAE=\angle OAM$

$$\overline{AD}=\overline{AN}+\overline{DN}$$
$$=\overline{AM}+\frac{1}{2}\overline{DM}$$
$$=\overline{AM}+\frac{1}{2}(\overline{DO}+\overline{OM})$$

에서

$$x=\sqrt{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{4}x+\frac{5\sqrt{5}}{4}$$
$$\frac{3}{4}x=\frac{5\sqrt{5}}{4}$$
$$\overline{AD}=x=\frac{5\sqrt{5}}{3}$$

$$\cos(\angle DAE)=\cos(\angle OAM)$$
$$=\frac{\overline{AM}}{\overline{AO}}$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{\frac{5}{2}}$$
$$=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

따라서 삼각형 DAE 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{DE}^2=\overline{AD}^2+\overline{AE}^2-2\times\overline{AD}\times\overline{AE}\times\cos(\angle DAE)$$
$$=\left(\frac{5\sqrt{5}}{3}\right)^2+5^2-2\times\frac{5\sqrt{5}}{3}\times5\times\frac{2\sqrt{5}}{5}$$
$$=\frac{50}{9}$$

이므로

$$\overline{DE}=\frac{5\sqrt{2}}{3}$$

186. 정답 ③

극대, 극소와 함수의 그래프

사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고, 조건 (가)에서 함수 $|f(x)-f(1)|$은 $x=\alpha(\alpha\neq1)$에서만 미분가능하지 않으므로

$$f(x)-f(1)=(x-1)^3(x-\alpha)$$

로 놓을 수 있다.
즉,

$f(x)=(x-1)^3(x-\alpha)+f(1)$

$f'(x)=3(x-1)^2(x-\alpha)+(x-1)^3$

$\quad=(x-1)^2(4x-3\alpha-1)$

조건 (나)에서 함수 $f(x)$가 $x=-\frac{1}{2}$에서 극값을 가지므로

$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2(-2-3\alpha-1)$

$\quad=0$

에서

$\alpha=-1$

조건 (나)에서 함수 $f(x)$의 극솟값이 0이므로

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}-1\right)^3\left(-\frac{1}{2}+1\right)+f(1)$

$\quad=0$

$f(1)=\frac{27}{16}$

그러므로

$f(x)=(x-1)^3(x+1)+\frac{27}{16}$

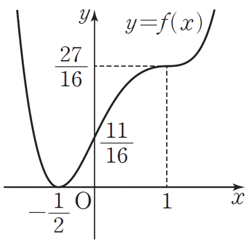
한편, $f'(x)=2(x-1)^2(2x+1)=0$에서

$x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗	$\frac{27}{16}$	↗

$f(0)=\frac{11}{16}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$f(f(x))=t$에서

$f(x)=X(X\geq 0)$이라 하면

$f(X)=t$

(i) $t<\frac{11}{16}$일 때

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$는 만나지 않거나 만나는 경우에도 교점의 x좌표의 값이 0보다 작으므로 방정식 $f(X)=t$의 해는 없다. 즉, $g(t)=0$이다.

(ii) $t=\frac{11}{16}$일 때

$f(X)=\frac{11}{16}$에서 $X=0$

즉, $f(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$이므로

$g\left(\frac{11}{16}\right)=1$

(iii) $t>\frac{11}{16}$일 때

제1사분면에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$는 오직 한 점에서 만나므로 방정식 $f(X)=t$를 만족시키는 실수 X의 값은 1개 존재한다.

방정식 $f(X)=t$의 실근을 $p(p>0)$이라 하면

$X=p$에서 $f(x)=p$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=p(p>0)$은 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=p$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

즉, $g(t)=2$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$$g(t)=\begin{cases}0 & \left(t<\frac{11}{16}\right)\\ 1 & \left(t=\frac{11}{16}\right)\\ 2 & \left(t>\frac{11}{16}\right)\end{cases}$$

함수 $g(t)$는 $t=\frac{11}{16}$에서만 불연속이므로

$\beta=\frac{11}{16}$

따라서

$\alpha+\beta=-1+\frac{11}{16}$

$\quad=-\frac{5}{16}$

187. 정답 ③

귀납적으로 정의된 수열

$$a_n=\begin{cases}a_{n+1}-4 & (a_n\text{이 }3\text{의 배수가 아닌 경우})\\ 3a_{n+1} & (a_n\text{이 }3\text{의 배수인 경우})\end{cases}$$

이고, 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 30 이하의 자연수이므로 $a_n>0$이어야 한다.

$a_8=2$에서 $a_7>0$이어야 하므로

$a_7=3a_8=3\times2=6$

(i) $a_6=a_7-4=6-4=2$인 경우

$a_5>0$이어야 하므로

$a_5=3a_6=3\times2=6$

㉠ $a_4=a_5-4=6-4=2$일 때

$a_3 > 0$이어야 하므로

$a_3 = 3a_4 = 3 \times 2 = 6$

$a_2 = a_3 - 4 = 6 - 4 = 2$이면

$a_1 > 0$이어야 하므로

$a_1 = 3a_2 = 3 \times 2 = 6$

$a_2 = 3a_3 = 3 \times 6 = 18$이면

$a_1 \leq 30$이어야 하므로

$a_1 = a_2 - 4 = 18 - 4 = 14$

㉡ $a_4 = 3a_5 = 3 \times 6 = 18$일 때

$a_n \leq 30$이어야 하므로

$a_3 = a_4 - 4 = 18 - 4 = 14$

$a_2 = a_3 - 4 = 14 - 4 = 10$

이때 $a_2 - 4 = 10 - 4 = 6$은 3의 배수이므로

$a_1 = 3a_2 = 30$

(ii) $a_6 = 3a_7 = 3 \times 6 = 18$인 경우

$a_n \leq 30$이어야 하므로

$a_5 = a_6 - 4 = 18 - 4 = 14$

$a_4 = a_5 - 4 = 14 - 4 = 10$

이때 $a_4 - 4 = 10 - 4 = 6$은 3의 배수이므로

$a_3 = 3a_4 = 3 \times 10 = 30$

마찬가지로 $a_n \leq 30$이어야 하므로

$a_2 = a_3 - 4 = 30 - 4 = 26$

$a_1 = a_2 - 4 = 26 - 4 = 22$

따라서 가능한 모든 a_1의 값의 합은

$6 + 14 + 30 + 22 = 72$

188. 정답 11

함수의 연속

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x = 1$, $x = 3$에서도 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to 1-} g(x) = \lim_{x \to 1+} g(x) = g(1)$에서

$\frac{1}{2} = \frac{1}{f(1)}$, $f(1) = 2$ …… ㉠

또 $\lim_{x \to 3-} g(x) = \lim_{x \to 3+} g(x) = g(3)$에서

$\frac{1}{f(3)} = \frac{1}{6}$, $f(3) = 6$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$f(x) - 2x = a(x-1)(x-3)$ (단, $a > 0$)

로 놓을 수 있다. 즉,

$f(x) = ax^2 - 2(2a-1)x + 3a$

$= a\left(x - \frac{2a-1}{a}\right)^2 - \frac{a^2 - 4a + 1}{a}$ …… ㉢

이고 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면

$1 \leq x \leq 3$에서 $f(x) \neq 0$이어야 한다.

(i) $\frac{2a-1}{a} \leq 1$인 경우

$2a - 1 \leq a$, $a \leq 1$

즉, $0 < a \leq 1$인 경우 $f(1) = 2 > 0$이므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $\frac{2a-1}{a} \geq 3$인 경우

$2a - 1 \geq 3a$

$a \leq -1$이므로 조건을 만족시키는 양수 a는 존재하지 않는다.

(iii) $1 < \frac{2a-1}{a} < 3$, 즉 $a > 1$인 경우

㉢에서 $-\frac{a^2 - 4a + 1}{a} > 0$이어야 하므로

$a^2 - 4a + 1 < 0$, $2 - \sqrt{3} < a < 2 + \sqrt{3}$

즉, $1 < a < 2 + \sqrt{3}$

(i), (ii), (iii)에 의하여 조건을 만족시키는 양수 a의 값의 범위는

$0 < a < 2 + \sqrt{3}$이고, $k = f(0) = 3a$이므로

$0 < k < 6 + 3\sqrt{3}$

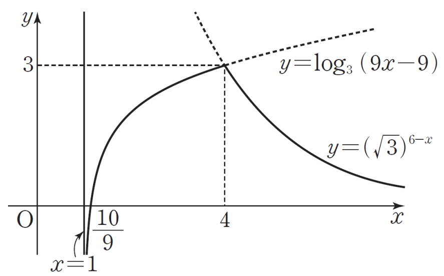
이때 $11 < 6 + 3\sqrt{3} < 12$이므로 조건을 만족시키는 자연수 k의

최댓값은 11이다.

189. 정답 23

지수함수와 로그함수

함수 $y = f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $f(x)$는 $x = 4$일 때 최댓값 3을 가지므로

$t \leq x \leq t + 2$에 $x = 4$가 포함되면 최댓값은 3이다.

즉, $t \leq 4 \leq t + 2$에서 $2 \leq t \leq 4$이고 이를 만족시키는 자연수 t의

값은 2, 3, 4로 그 개수는 3이다.

즉, $a = 3$

$s \leq x \leq s + 1$에서 최솟값이 1인 경우는 다음과 같이 경우를 나누어

생각할 수 있다.

(i) $s > 1$, $s + 1 < 4$일 때

$1 < s < 3$이고 함수 $f(x)$는 $s \leq x \leq s + 1$에서 x의 값이

증가하면 y의 값도 증가하는 함수이므로 $x = s$일 때 최소이다.

$f(s) = \log_3(9s - 9) = 1$에서

$9s - 9 = 3, s = \frac{4}{3}$

이는 $1 < s < 3$을 만족시킨다.

(ii) $1 < s < 4$, $s+1 \geq 4$일 때

$3 \leq s < 4$이고

$f(3) = \log_3 18 > \log_3 3 = 1$

$f(4) = (\sqrt{3})^2 = 3 > 1$이므로 $s \leq x \leq s+1$에서

함수 $f(x)$의 최솟값은 1보다 크다.

(iii) $s \geq 4$일 때

함수 $f(x)$는 $s \leq x \leq s+1$에서 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하는 함수이므로 $x = s+1$일 때 최소이다.

즉, $f(s+1) = (\sqrt{3})^{6-(s+1)} = 1$에서

$5 - s = 0$, $s = 5$

이는 $s \geq 4$를 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에 의하여

$$b = \frac{4}{3} \times 5 = \frac{20}{3}$$

따라서

$$a + 3b = 3 + 3 \times \frac{20}{3} = 23$$

190. 정답 320

미분법의 활용(함수의 그래프)

방정식 $f(x) = 0$의 두 실근을 α, $\beta(\alpha < \beta)$라 하면

$f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$,

$f'(x) = 2x - \alpha - \beta$

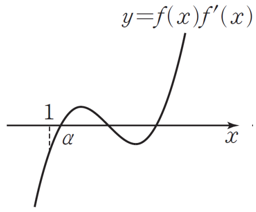
이므로

$$f(x)f'(x) = 2(x-\alpha)(x-\beta)\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

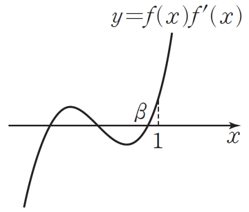
이때 $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$이다.

(i) $\alpha > 1$ 또는 $\beta < 1$일 때

함수 $y = f(x)f'(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

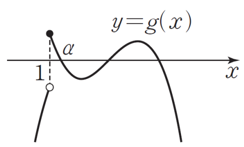


[$\alpha > 1$일 때]

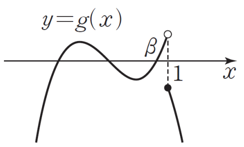


[$\beta < 1$일 때]

함수 $y = g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



[$\alpha > 1$일 때]

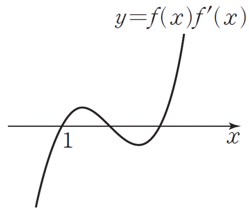


[$\beta < 1$일 때]

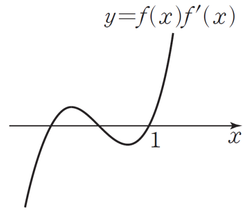
이때 함수 $g(x)$는 $x = 1$에서 불연속이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(ii) $\alpha = 1$ 또는 $\beta = 1$일 때

함수 $y = f(x)f'(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

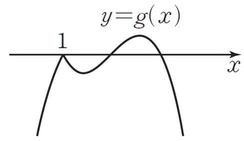


[$\alpha = 1$일 때]

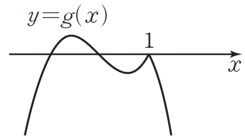


[$\beta = 1$일 때]

함수 $y = g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



[$\alpha = 1$일 때]



[$\beta = 1$일 때]

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

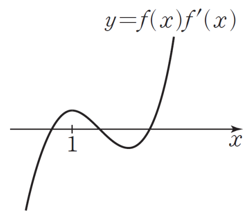
조건 (나)를 만족시키지만 $h(k) = 2$이고

$\lim_{t \to k-} h(t) > \lim_{t \to k+} h(t)$

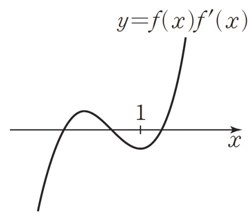
를 만족시키는 실수 k가 존재하지 않으므로 조건 (다)를 만족시키지 못한다.

(iii) $\alpha < 1 < \frac{\alpha+\beta}{2}$ 또는 $\frac{\alpha+\beta}{2} < 1 < \beta$일 때

함수 $y = f(x)f'(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

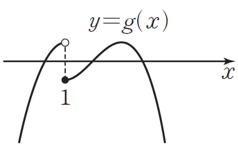


$\left[\alpha < 1 < \frac{\alpha+\beta}{2}\text{일 때}\right]$

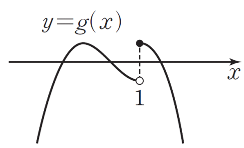


$\left[\frac{\alpha+\beta}{2} < 1 < \beta\text{일 때}\right]$

함수 $y = g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$\left[\alpha < 1 < \frac{\alpha+\beta}{2}\text{일 때}\right]$

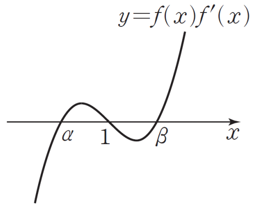


$\left[\frac{\alpha+\beta}{2} < 1 < \beta\text{일 때}\right]$

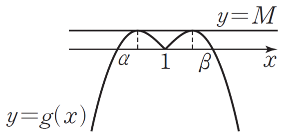
이때 함수 $g(x)$는 $x = 1$에서 불연속이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(iv) $\frac{\alpha+\beta}{2} = 1$일 때

함수 $y = f(x)f'(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$i(x)=f(x+1)f'(x+1)$이라 하면
$i(x)=2x(x-\alpha+1)(x+\alpha-1)$
이므로
$i(-x)=-i(x)$이다.
즉, 함수 $y=i(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 $i(x)$의 극댓값을 M이라 하면 $i(x)$의 극솟값은 $-M$이다.
따라서 함수 $y=f(x)f'(x)$의 그래프는 점 $(1,\ 0)$에 대하여 대칭이고, 극댓값은 M, 극솟값은 $-M$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 조건 (나)를 만족시킨다.
또 $h(k)=2$이고
$\lim_{t\to k-}h(t)>\lim_{t\to k+}h(t)$
를 만족시키는 실수 $k=M$이 존재하므로 조건 (다)를 만족시킨다.

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 $\frac{\alpha+\beta}{2}=1$이므로
$f(x)=x^2-2x+a$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.
$f'(x)=2(x-1)$이므로
$x<1$일 때 $g(x)=2(x-1)(x^2-2x+a)$
$g(-1)=2\times(-2)\times(3+a)=20$에서
$a=-8$이므로
$g(x)=2(x-1)(x^2-2x-8)$
$\quad=2(x+2)(x-1)(x-4)$
한편, $x\geq 1$일 때
$g(x)=-2(x+2)(x-1)(x-4)$이므로

$$g(x)=\begin{cases}2(x+2)(x-1)(x-4) & (x<1)\\ -2(x+2)(x-1)(x-4) & (x\geq 1)\end{cases}$$

따라서
$g(0)=2\times2\times(-1)\times(-4)$
$\quad=16$
$g(3)=-2\times5\times2\times(-1)$
$\quad=20$
이므로
$g(0)\times g(3)=16\times20$
$\quad=320$

191. 정답 ②
정적분과 미분의 관계

$$\int_0^x f(t)dt=2x^3-ax^2+x\int_0^1 f(t)dt \quad \cdots\cdots ㉠$$

의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$\int_0^1 f(t)dt=2\times1^3-a\times1^2+\int_0^1 f(t)dt$$

$0=2-a$
$a=2$
이를 ㉠에 대입하면

$$\int_0^x f(t)dt=2x^3-2x^2+x\int_0^1 f(t)dt \quad \cdots\cdots ㉡$$

$\int_0^a f(x)dx=0$이므로 ㉡의 양변에 $x=2$를 대입하면

$$\int_0^2 f(t)dt=2\times2^3-2\times2^2+2\int_0^1 f(t)dt$$
$$=8+2\int_0^1 f(t)dt$$
$$=0$$
$$\int_0^1 f(t)dt=-4$$

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=6x^2-4x+\int_0^1 f(t)dt$$
$$=6x^2-4x-4$$

따라서
$f(a)=f(2)$
$\quad=6\times2^2-4\times2-4$
$\quad=12$

192. 정답 ②
수열의 합

$$\sum_{k=1}^{6}k^2(a_k-a_{k+1})$$
$$=1^2(a_1-a_2)+2^2(a_2-a_3)+3^2(a_3-a_4)+4^2(a_4-a_5)+5^2(a_5-a_6)+6^2(a_6-a_7)$$
$$=a_1+(2^2-1^2)a_2+(3^2-2^2)a_3+(4^2-3^2)a_4+(5^2-4^2)a_5+(6^2-5^2)a_6-6^2a_7$$
$$=a_1+3a_2+5a_3+7a_4+9a_5+11a_6-36a_7$$
$$=\sum_{k=1}^{6}(2k-1)a_k-36a_7$$
$$=\sum_{k=1}^{6}\left\{(2k-1)\times\frac{k}{2k-1}\right\}-36a_7$$
$$=\sum_{k=1}^{6}k-36a_7$$

이므로 $\sum_{k=1}^{6} k-36a_7=pa_7$에서

$\sum_{k=1}^{6} k=(p+36)\times a_7$

$a_n=\frac{n}{2n-1}$에서 $a_7=\frac{7}{13}$이므로

$\sum_{k=1}^{6} k=(p+36)\times\frac{7}{13}$

$\frac{6\times7}{2}=(p+36)\times\frac{7}{13}$

$p+36=39$

따라서

$p=3$

193. 정답 ④

함수의 극한의 활용

두 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$, $\mathrm{A}(4,\ 0)$에 대하여 선분 PA의 중점을 M이라 하면

점 M의 좌표는

$\left(\frac{t+4}{2},\ \frac{t^2}{2}\right)$

직선 PA의 기울기는

$\frac{t^2}{t-4}$

이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는

$-\frac{t-4}{t^2}$

이다.

즉, 선분 PA의 수직이등분선의 방정식은

$y-\frac{t^2}{2}=-\frac{t-4}{t^2}\left(x-\frac{t+4}{2}\right)$

이 직선의 x절편이 $f(t)$이므로

$0-\frac{t^2}{2}=-\frac{t-4}{t^2}\left\{f(t)-\frac{t+4}{2}\right\}$

$f(t)-\frac{t+4}{2}=\frac{t^4}{2(t-4)}$

$f(t)=\frac{t^4}{2(t-4)}+\frac{t+4}{2}$

$=\frac{t^4+t^2-16}{2(t-4)}$

따라서

$\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t^3}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^4+t^2-16}{2t^3(t-4)}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{t^4+t^2-16}{2(t^4-4t^3)}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{1+\frac{1}{t^2}-\frac{16}{t^4}}{2(1-\frac{4}{t})}$

$=\frac{1}{2}$

194. 정답 ④

지수함수와 로그함수의 그래프

$y=-|x|+k$

$=\begin{cases} x+k & (x<0) \\ -x+k & (x\ge 0)\end{cases}$

한편, 두 함수 $y=2^x$, $y=\log_2 x$는 서로 역함수이므로

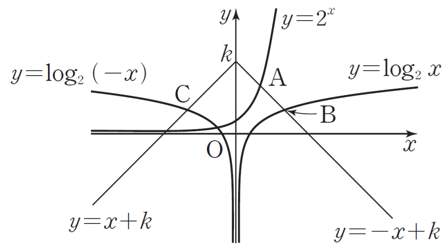
두 함수 $y=2^x$, $y=\log_2 x$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

그러므로 기울기가 -1인 직선 $y=-x+k$와

두 함수 $y=2^x$, $y=\log_2 x$의 그래프가 만나는 두 점 A, B는

직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

그러므로 $\mathrm{A}(p,\ q)$라 하면 $\mathrm{B}(q,\ p)$



또 두 직선 $y=-x+k$, $y=x+k$는 y축에 대하여 대칭이고

두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(-x)$의 그래프도

y축에 대하여 대칭이므로 두 점 B, C는 y축에 대하여 대칭이다.

그러므로

$\mathrm{C}(-q,\ p)$

이때 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가

$\left(\frac{2}{3},\ a\right)$

이므로

$\frac{p+q+(-q)}{3}=\frac{2}{3}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\frac{q+p+p}{3}=a$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠에서

$p=2$이고 $q=2^p=2^2=4$

이므로 ㉡에서

$a=\frac{4+2+2}{3}=\frac{8}{3}$

또 점 $\mathrm{A}(2,\ 4)$가 직선 $y=-x+k$ 위에 있으므로

$4=-2+k$

$k=6$

따라서

$k+a=6+\frac{8}{3}$

$=\frac{26}{3}$

195. 정답 ①

수직선 위를 움직이는 점의 속도와 거리

시각 t에서 두 점 P, Q의 위치를 각각

$x_1(t),\ x_2(t)$

라 하면

$x_1(t)=k+\int_0^t v_1(t)dt$

$=k+\int_0^t (3t^2-12t+k)dt$

$=k+\left[t^3-6t^2+kt\right]_0^t$

$=t^3-6t^2+kt+k$

$x_2(t)=2k+\int_0^t v_2(t)dt$

$=2k+\int_0^t (-2t-4)dt$

$=2k+\left[-t^2-4t\right]_0^t$

$=-t^2-4t+2k$

$x_1(t)=x_2(t)$에서

$t^3-6t^2+kt+k=-t^2-4t+2k$

$t^3-5t^2+(k+4)t-k=0$

$(t-1)(t^2-4t+k)=0$

$x_1(1)=x_2(1)$이므로 두 점 P, Q는 시각 $t=1$일 때 만난다.

이때 두 점 P, Q가 출발한 후 한 번만 만나려면

t에 대한 이차방정식

$t^2-4t+k=0$

의 실근이 존재하지 않거나 양수인 실근이 존재한다면

그 실근은 $t=1$뿐이어야 한다.

이차방정식

$t^2-4t+k=0$

의 실근이 존재하는 경우 실근이 모두 음수일 수 없고,

$t=1$을 실근으로 갖는 경우 $k=3$이므로

$t=3$도 실근으로 갖게 되어 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

그러므로 이차방정식

$t^2-4t+k=0$

의 실근이 존재하지 않아야 한다. 즉, 이차방정식

$t^2-4t+k=0$

의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-k<0$

이어야 하므로

$k>4$

따라서 구하는 자연수 k의 최솟값은 5이다.

196. 정답 ⑤

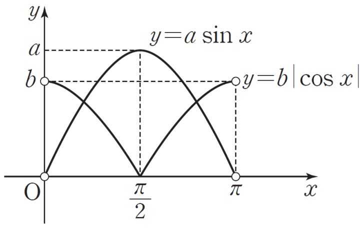
[삼각함수의 그래프]

$0<x<p$에서 두 함수

$y=a\sin x,\ y=b|\cos x|$

의 그래프는 a, b의 부호에 따라 다음과 같다.

(ⅰ) $a>0,\ b>0$일 때



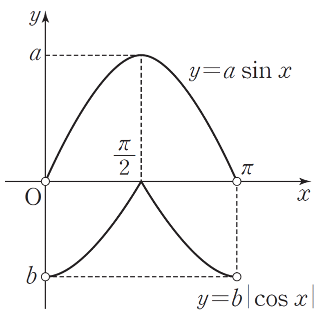
함수 $y=b|\cos x|+k$의 그래프는 함수 $y=b|\cos x|$의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이므로 두 함수

$y=a\sin x,\ y=b|\cos x|+k$

의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위는 $-b<k<a$이다.

따라서 $a=4,\ b=3$

(ⅱ) $a>0,\ b<0$일 때

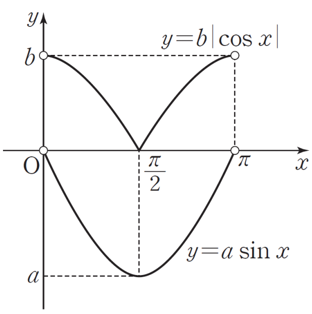


두 함수

$y=a\sin x,\ y=b|\cos x|+k$

의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은 음수가 될 수 없으므로 실수 k의 값의 범위가 $-3<k<4$가 될 수 없다.

(ⅲ) $a<0,\ b>0$일 때

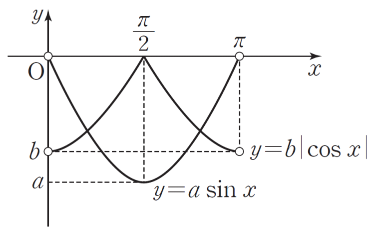


두 함수

$y=a\sin x,\ y=b|\cos x|+k$

의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은 양수가 될 수 없으므로 실수 k의 값의 범위가 $-3<k<4$가 될 수 없다.

(iv) $a<0,\ b<0$일 때



두 함수

$y=a\sin x,\ y=b|\cos x|+k$

의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위는 $a<k<-b$이다.

따라서

$a=-3,\ b=-4$

(ⅰ)~(iv)에 의하여 두 실수 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(-3,\ -4),\ (4,\ 3)$

이므로

$a_1=-3,\ b_1=-4,\ a_2=4,\ b_2=3$

따라서

$$(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2=(-3-4)^2+(-4-3)^2$$
$$=98$$

197. 정답 ⑤

미분법의 활용(함수의 그래프)

$$g(x)=\begin{cases}-f(-x)+x & (x<0)\\ f(x)+x & (x\ge 0)\end{cases}$$

에서

$$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0-}(-f(-x)+x)$$
$$=-f(0)$$
$$\lim_{x\to 0+}g(x)=\lim_{x\to 0+}(f(x)+x)$$
$$=f(0)$$

$g(0)=f(0)$

이고 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0+}g(x)=g(0)$$

에서

$-f(0)=f(0)$, 즉 $f(0)=0$

이다.

함수 $y=-f(-x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것과 같고, 함수 $y=x$의 그래프도 원점에 대하여 대칭이므로 함수

$$g(x)=\begin{cases}-f(-x)+x & (x<0)\\ f(x)+x & (x\ge 0)\end{cases}$$

의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

즉, 함수 $|g(x)|$가 0이 아닌 실수 a에 대하여 $x=a$에서 미분가능하지 않으면 함수 $y=g(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 함수 $|g(x)|$는 $x=-a$에서도 미분가능하지 않다.

이때 조건 (가)에서 함수 $|g(x)|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수가 1이므로 $a=0$이다.

조건 (나)에서 함수 $g(x)$가 $x=b(-1<b<0)$에서 극댓값 1을 갖고 함수 $y=g(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 함수 $g(x)$는 $x=-b$에서 극솟값 -1을 갖는다. 즉, $c=-b$로 놓으면

$0<c<1$이고

$g(c)=f(c)+c=-1<0,\ g'(c)=0$

이다.

또 조건 (나)에서 함수 $|g(x)|$가 $x=-1$에서 극소이므로 $x=1$에서 극소이고, $f(1)=-1$에서

$$g(1)=f(1)+1$$
$$=0$$

이므로 함수 $|g(x)|$는 $x=1$에서 극솟값 0을 갖는다.

이때 함수 $|g(x)|$가 $x=1$에서 미분가능하므로

함수 $g(x)$의 $x=1$에서의 미분계수가 0이어야 한다.

즉, 함수 $h(x)$를

$h(x)=f(x)+x$

라 하면 함수 $h(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 사차함수이고,

$h(c)=-1,\ h(0)=0,\ h(1)=0,\ h'(1)=0$이다.

따라서 두 실수 $p(p>0)$, q에 대하여

$h(x)=px(x-q)(x-1)^2$

으로 놓을 수 있다. 이때 $q\le 0$이면

$h(c)=p\times c\times(c-q)\times(c-1)^2>0$

이므로 $h(c)=-1$이라는 조건에 모순이다.

따라서 $q>0$이고 함수 $|g(x)|$가 $x>0$에서 미분가능하므로

함수 $|h(x)|$는 $x>0$에서 미분가능하고 $q=1$이다. 즉,

$$h(x)=px(x-1)^2$$
$$=px^4-3px^3+3px^2-px$$

이다. 이때

$h'(c)=0,\ h(c)=-1$

에서

$$h'(x)=4px^3-9px^2+6px-p$$
$$=p(4x-1)(x-1)^2$$

에서 $c=\frac{1}{4},\ b=-\frac{1}{4}$이고

$$h\left(\frac{1}{4}\right)=p\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{4}-1\right)^3$$
$$=-\frac{27p}{256}$$
$$=-1$$

에서

$p=\dfrac{256}{27}$

따라서

$f(x)=h(x)-x$

$\quad=\dfrac{256}{27}x(x-1)^3-x$

이므로

$b\times f(4)=-\dfrac{1}{4}\times\left\{\dfrac{256}{27}\times 4\times(4-1)^3-4\right\}$

$\quad=-255$

198. 정답 17

거듭제곱근

m^m의 n제곱근 중 양수인 것은

$\sqrt[n]{m^m}=m^{\frac{m}{n}}$

이므로 다음 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) m이 소수인 경우

$m=2,\ 3,\ 5,\ 7$이면 m의 약수 중에서 2이상인 약수는 m뿐이므로 $m^{\frac{m}{n}}$의 값은 $n=m$일 때에만 자연수이다.

따라서

$f(2)=f(3)$

$\quad=f(5)$

$\quad=f(7)$

$\quad=1$

(ii) $m=4$인 경우

$4^{\frac{4}{n}}=(2^2)^{\frac{4}{n}}=2^{\frac{8}{n}}$

이고 $2^{\frac{8}{n}}$의 값은 n이 8의 약수일 때 자연수이다. 즉, 조건을 만족시키는 2이상의 자연수 n의 값은 $2,\ 4,\ 8$이므로

$f(4)=3$

(iii) $m=6$인 경우

$6^{\frac{6}{n}}$의 값은 n이 6의 약수일 때 자연수이다. 즉, 조건을 만족시키는 2이상의 자연수 n의 값은 $2,\ 3,\ 6$이므로

$f(6)=3$

(iv) $m=8$인 경우

$8^{\frac{8}{n}}=(2^3)^{\frac{8}{n}}=2^{\frac{24}{n}}$이고 $2^{\frac{24}{n}}$의 값은

n이 24의 약수일 때 자연수이다.

$24=2^3\times 3$

에서 24의 양의 약수의 개수는

$(3+1)\times(1+1)=8$

이므로 조건을 만족시키는 2이상의 자연수 n의 개수는

$8-1=7$

따라서

$f(8)=7$

(i)~(iv)에 의하여

$\displaystyle\sum_{m=2}^{8}f(m)=1\times4+3\times2+7$

$\quad=4+6+7$

$\quad=17$

199. 정답 10

접선의 방정식

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)+1}{x-1}=\frac{g(1)}{12}$에서

$x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to1}(f(x)+1)=0$이고 $f(x)$가 다항함수이므로

$f(1)=-1$

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)+1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$\quad=f'(1)$

이므로

$f'(1)=\dfrac{g(1)}{12}$ …… ㉠

$f(x)g(x)=x^4+x^3-4x^2-4x$ …… ㉡

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)g(1)=1^4+1^3-4\times1^2-4\times1$

$-1\times g(1)=-6$, 즉

$g(1)=6$

$g(1)=6$을 ㉠에 대입하면

$f'(1)=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$=4x^3+3x^2-8x-4$ …… ㉢

㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$

$=4\times1^3+3\times1^2-8\times1-4$

$\dfrac{1}{2}\times6+(-1)\times g'(1)=-5$, 즉

$g'(1)=8$

곡선 $y=g(x)$위의 점 $(1,\ g(1))$, 즉 $(1,\ 6)$에서의 접선의 방정식은

$y-6=8(x-1)$, 즉

$y=8x-2$

따라서 $a=8,\ b=-2$이므로

$a-b=8-(-2)=10$

[참고]

$f(x)=\frac{1}{2}(x+1)(x-2)$, $g(x)=2x(x+2)$이면

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 주어진 조건을 만족시킨다.

200. 정답 17

수열의 귀납적 정의

자연수 m에 대하여

$a_m=0<m$

이므로

$a_{m+1}=m+a_m$

$=m$

$a_{m+1}=m<m+1$이므로

$a_{m+2}=(m+1)+a_{m+1}$

$=2m+1$

$2m+1-(m+2)=m-1\geq 0$, 즉

$2m+1\geq m+2$이므로

$a_{m+3}=a_{m+2}-p$

$=2m+1-p$

$2m+1-p-(m+3)=m-2-p$

이므로 다음과 같은 경우로 나누어 구한다.

(i) $m-2<p$, 즉 $2m+1-p<m+3$일 때

$a_{m+4}=(m+3)+a_{m+3}$

$=3m+4-p$

$a_{m+4}=0$에서

$3m+4-p=0$

$p=3m+4$

$p=3m+4\leq 10$에서

$m\leq 2$

$m-2<p$에서

$m-2<3m+4$

$m>-3$

따라서 조건을 만족시키는 m의 값은 1, 2이고,

$m=1$이면 $p=7$, $m=2$이면 $p=10$이다.

(ii) $m-2\geq p$, 즉 $2m+1-p\geq m+3$일 때

$a_{m+4}=a_{m+3}-p$

$=2m+1-2p$

$a_{m+4}=0$에서

$2m+1-2p=0$

$2p=2m+1$

이 등식을 만족시키는 두 자연수 p, m은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 모든 p의 값의 합은

$7+10=17$

201. 정답 ①

속도와 가속도(도함수의 활용)

점 P의 시각 $t(t\geq 0)$에서의 속도를 v라 하면

$v=3t^2-2at+b$

$=3\left(t-\frac{a}{3}\right)^2+b-\frac{a^2}{3}$

이때 조건 (가)에서 점 P가 운동 방향을 바꾸지 않으므로 0 이상의 모든 실수 t에 대하여 $v\geq 0$이어야 한다.

이때 $a>0$이므로

$b-\frac{a^2}{3}\geq 0$, 즉

$b\geq\frac{a^2}{3}$

한편, $t\geq 0$일 때 $v\geq 0$이므로 점 P의 속력은

$|v|=v$

$=3\left(t-\frac{a}{3}\right)^2+b-\frac{a^2}{3}$

이다.

조건 (나)에서 $|v|$가 $t=\frac{2}{3}$일 때 최소이므로

$\frac{a}{3}=\frac{2}{3}$, 즉 $a=2$

그러므로

$b\geq\frac{a^2}{3}=\frac{4}{3}$

따라서

$x=t^3-2t^2+bt\left(b\geq\frac{4}{3}\right)$

이고 점 P의 시각 $t=3$에서의 위치는

$27-2\times 9+3b=3b+9$

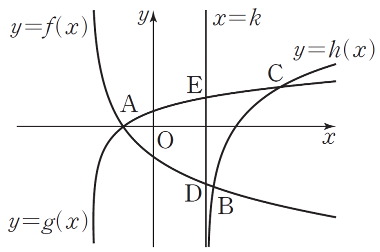
$\geq 3\times\frac{4}{3}+9$

$=13$

이므로 구하는 최솟값은 13이다.

202. 정답 ②

로그함수의 그래프



함수 $h(x)=\log_2(x-k)$의 그래프의 점근선은

직선 $x=k$이므로

$D\left(k, \log_{\frac{1}{2}}(k+2)\right)$, $E\left(k, \log_4(k+2)\right)$

이다.

$\overline{\mathrm{DE}}=\log_4(k+2)-\log_{\frac{1}{2}}(k+2)$

$=\frac{1}{2}\log_2(k+2)+\log_2(k+2)$

$=\frac{3}{2}\log_2(k+2)$

이므로

$\frac{3}{2}\log_2(k+2)=\frac{3}{2}\log_2\frac{15}{4}$

$k+2=\frac{15}{4},\ k=\frac{7}{4}$

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점 A의 x좌표를 구해 보자.

$f(x)=g(x)$에서

$\log_{\frac{1}{2}}(x+2)=\log_4(x+2)$

$-\log_2(x+2)=\frac{1}{2}\log_2(x+2)$

$\frac{3}{2}\log_2(x+2)=0$

$x+2=1,\ x=-1$

즉, 점 A의 x좌표는 -1이다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=h(x)$의 그래프의 교점 B의 x좌표를 구해 보자.

$f(x)=h(x)$에서

$\log_{\frac{1}{2}}(x+2)=\log_2\left(x-\frac{7}{4}\right)$

$-\log_2(x+2)=\log_2\left(x-\frac{7}{4}\right)$

$\log_2(x+2)\left(x-\frac{7}{4}\right)=0$

$(x+2)\left(x-\frac{7}{4}\right)=1$

$4x^2+x-18=0$

$(4x+9)(x-2)=0$

$x>\frac{7}{4}$이므로 $x=2$

즉, 점 B의 x좌표는 2이다.

두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프의 교점 C의 x좌표를 구해 보자.

$g(x)=h(x)$에서

$\log_4(x+2)=\log_2\left(x-\frac{7}{4}\right)$

$\log_4(x+2)=\log_4\left(x-\frac{7}{4}\right)^2$

$x+2=\left(x-\frac{7}{4}\right)^2$

$16x^2-72x+17=0$

$(4x-1)(4x-17)=0$

$x>\frac{7}{4}$이므로 $x=\frac{17}{4}$

즉, 점 C의 x좌표는 $\frac{17}{4}$이다.

그러므로 삼각형 ABC의 무게중심의 x좌표는

$$\frac{-1+2+\frac{17}{4}}{3}=\frac{7}{4}$$

203. 정답 ④

정적분의 성질

조건 (가)에서함수

$$g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x+1} & (x\neq-1)\\ c & (x=-1)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-1$에서 연속이고

$\lim_{x\to-1}g(x)=g(-1)$

이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=c$ …… ㉠

이고, $\lim_{x\to-1}(x+1)=0$이므로 $\lim_{x\to-1}f(x)=0$이어야 한다.

$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}(3x^2+ax+b)=3-a+b=0$

$b=a-3$

이를 $f(x)=3x^2+ax+b$에 대입하여 정리하면

$f(x)=3x^2+ax+a-3$

$=(x+1)(3x+a-3)$

이고 $x\neq-1$일 때

$g(x)=\frac{f(x)}{x+1}$

$=\frac{(x+1)(3x+a-3)}{x+1}$

$=3x+a-3$

이므로

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}(3x+a-3)=a-6$

㉠에서

$c=a-6$

한편,

$\int_{-a}^{a}g(x)dx=\int_{-a}^{a}(3x+a-3)dx$

$=2\int_0^a(a-3)dx$

$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{a}(3x^2+ax+a-3)dx$

$$=2\int_0^a(3x^2+a-3)dx$$
$$=2\int_0^a 3x^2dx+2\int_0^a(a-3)dx$$

이고 조건 (나)에서

$\int_{-a}^{a} g(x)dx+f(a)=\int_{-a}^{a} f(x)dx$ 이므로

$$2\int_0^a(a-3)dx+f(a)$$
$$=2\int_0^a 3x^2dx+2\int_0^a(a-3)dx$$
$$f(a)=2\int_0^a 3x^2dx$$

이때

$$f(a)=3a^2+a\times a+a-3$$
$$=4a^2+a-3$$
$$2\int_0^a 3x^2dx=2\Big[x^3\Big]_0^a=2a^3$$

이므로

$$4a^2+a-3=2a^3$$
$$2a^3-4a^2-a+3=0$$
$$(a-1)(2a^2-2a-3)=0$$

a는 정수이므로

$a=1$

즉, $f(x)=3x^2+ax+a-3=3x^2+x-2$

이고

$b=a-3=-2,\ \ c=a-6=-5$

이므로

$$f(b-c)=f(3)$$
$$=3\times3^2+3-2$$
$$=28$$

204. 정답 ①

등차수열

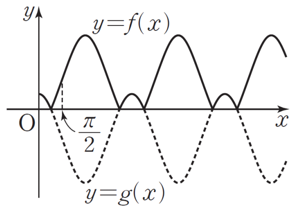
$g(x)=p\cos x+q$라하면 $f(x)=|g(x)|$이다.

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 함수 $g(x)$가 감소하므로

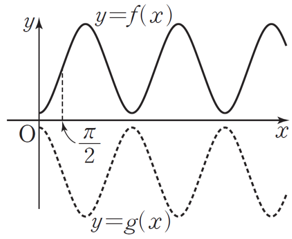
$f(0)<f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, 즉 $|g(0)|<\left|g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|$를 만족시키려면 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$이어야 한다.

함수 $g(x)$의 최댓값 $g(0)=p+q$의 부호에 따라

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같은 경우가 있다.



[$p+q>0$일 때]



[$p+q\le0$일 때]

(i) $p+q>0$일 때

직선 $y=t$가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 모든 점의 x좌표를 나열한 수열은 $t=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$이면 첫째항이 $\frac{\pi}{2}$이고 공차가 π인 등차수열이고,

$t=f(\pi)$이면 첫째항이 π이고 공차가 2π인 등차수열이다.

한편, 나머지 경우에는 직선 $y=t$가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 모든 점의 x좌표를 나열한 수열은 연속하는 두 항 사이의 차가 π보다 큰 값과 π보다 작은 값이 모두 있으므로 등차수열이 되지 않는다.

$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=q<0,$

$g(\pi)=p\cos\pi+q=-p+q<0$

이므로

$\alpha=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=|q|=-q,$

$\beta=f(p)=|-p+q|=p-q$

이때 $\alpha+\beta=7$이므로

$-q+(p-q)=7,$

즉, $p-2q=7$ ...... ㉠

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{\pi}{2}$이고 공차가 π인 등차수열이므로

$$a_3=\frac{\pi}{2}+2\times\pi$$
$$=\frac{5}{2}\pi$$

수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 π이고 공차가 2π인 등차수열이므로

$$b_2=\pi+1\times2\pi$$
$$=3\pi$$

$\frac{f(b_2)}{a_3}=\frac{2}{\pi},$

즉 $f(b_2)=\frac{2}{\pi}\times a_3$이고

$|p\cos3\pi+q|=\frac{2}{\pi}\times\frac{5}{2}\pi$

$|-p+q|=5$

$p-q=5$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$p=3,\ q=-2$

(ii) $p+q\le 0$일 때

직선 $y=t$가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 모든 점의 x좌표를 나열한 수열은 $t=f(0)$이면 공차가 2π인 등차수열, $t=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$이면 공차가 π인 등차수열, $t=f(\pi)$이면 공차가 2π인 등차수열이다. 이때 등차수열이 되도록 하는 t의 값이 2개뿐이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에 의하여

$p=3,\ q=-2$

따라서

$p+q=3+(-2)=1$

205. 정답 ④

넓이(정적분의 활용)

곡선 $y=-x^4+2x^3$과 직선 $y=k(x-2)$의 교점 중 x좌표가 2가 아닌 점의 x좌표를 α라 하면

$B-A$

$=\int_\alpha^2\{(-x^4+2x^3)-k(x-2)\}dx-\int_0^\alpha\{k(x-2)-(-x^4+2x^3)\}dx$

$=\int_\alpha^2\{(-x^4+2x^3)-k(x-2)\}dx+\int_0^\alpha\{(-x^4+2x^3)-k(x-2)\}dx$

$=\int_0^2\{(-x^4+2x^3)-k(x-2)\}dx$

$=\int_0^2(-x^4+2x^3-kx+2k)dx$

$=\left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^4-\frac{k}{2}x^2+2kx\right]_0^2$

$=\frac{8}{5}+2k$

$B-A=1$이므로

$\frac{8}{5}+2k=1$

따라서

$k=-\frac{3}{10}$

206. 정답 ④

사인법칙과 코사인법칙

ㄱ. 두 삼각형 ARS, APQ에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{RS}}{\sin(\angle RAS)}=4,\ \frac{\overline{PQ}}{\sin(\angle PAQ)}=6$

$\overline{RS}=4\sin(\angle RAS),\ \overline{PQ}=6\sin(\angle PAQ)$

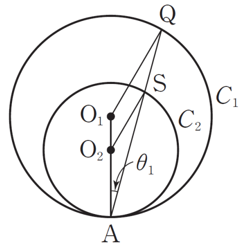
이때 $\sin(\angle RAS)=\sin(\angle PAQ)$이므로

$\overline{PQ}:\overline{RS}=3:2$

따라서

$\overline{PQ}=\frac{3}{2}\overline{RS}$ (참)

ㄴ.



[그림 1]

[그림 1]에서 $\angle O_1AQ=\theta_1$이라 하면 이등변삼각형 O_1AQ에서

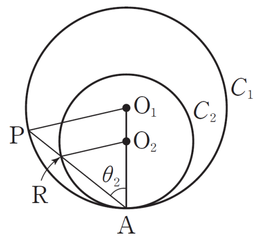
$\overline{AQ}=2\times\overline{O_1A}\times\cos\theta_1=6\cos\theta_1$

이등변삼각형 O_2AS에서

$\overline{AS}=2\times\overline{O_2A}\times\cos\theta_1$

$=4\cos\theta_1$

따라서 $\overline{AQ}:\overline{AS}=3:2$



[그림 2]

[그림 2]에서

$\angle O_1AP=\theta_2$라 하면 이등변삼각형 O_1AP에서

$\overline{AP}=2\times\overline{O_1A}\times\cos\theta_2=6\cos\theta_2$

이등변삼각형 O_2AR에서

$\overline{AR}=2\times\overline{O_2A}\times\cos\theta_2$

$=4\cos\theta_2$

따라서 $\overline{AP}:\overline{AR}=3:2$

그러므로 두 삼각형 ARS, APQ는 서로 닮은 도형이고, 두 선분 PQ, RS는 서로 평행하다.

이때 두 선분 RS, O_2B의 교점을 V라 하면

두 삼각형 O_1AU, O_1VO_2는 각각

$\angle O_1AU=90^\circ$, $\angle O_1VO_2=90^\circ$인 직각삼각형이고, 서로 닮은 도형이다.

따라서

$\sin(\angle O_1O_2V)=\sin(\angle O_1UA)$

$=\frac{\overline{O_1A}}{\overline{O_1U}}=\frac{3}{\overline{O_1U}}$

이므로 삼각형 O_1BO_2의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{O_1O_2}}\times\overline{\mathrm{O_2B}}\times\sin(\angle \mathrm{O_1O_2V})=\frac{1}{2}\times1\times2\times\frac{3}{\overline{\mathrm{O_1U}}}$$

$$=\frac{3}{\overline{\mathrm{O_1U}}} \text{ (거짓)}$$

ㄷ. 삼각형 $\mathrm{O_1O_2B}$에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{O_1B}}^2&=\overline{\mathrm{O_1O_2}}^2+\overline{\mathrm{O_2B}}^2-2\times\overline{\mathrm{O_1O_2}}\times\overline{\mathrm{O_2B}}\times\cos(\angle O_1O_2B)\\&=1^2+2^2-2\times1\times2\times\cos(\angle O_1O_2B)\\&=5-4\cos(\angle O_1O_2B)\\&=5-4\cos(\angle O_1UA)\\&=5-4\times\frac{\overline{\mathrm{AU}}}{\overline{\mathrm{O_1U}}}\end{aligned}$$

삼각형 $\mathrm{O_1O_2T}$에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{O_2T}}^2&=\overline{\mathrm{O_1O_2}}^2+\overline{\mathrm{O_1T}}^2-2\times\overline{\mathrm{O_1O_2}}\times\overline{\mathrm{O_1T}}\times\cos(\angle O_2O_1T)\\&=1^2+3^2-2\times1\times3\times\cos(90^\circ+\angle O_1O_2B)\\&=10+6\sin(\angle O_1O_2B)\\&=10+6\sin(\angle O_1UA)\\&=10+6\times\frac{\overline{\mathrm{O_1A}}}{\overline{\mathrm{O_1U}}}\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\left(\frac{\overline{\mathrm{O_1B}}^2-5}{4}\right)^2+\left(\frac{\overline{\mathrm{O_2T}}^2-10}{6}\right)^2&=\left(-\frac{\overline{\mathrm{AU}}}{\overline{\mathrm{O_1U}}}\right)^2+\left(\frac{\overline{\mathrm{O_1A}}}{\overline{\mathrm{O_1U}}}\right)^2\\&=\frac{\overline{\mathrm{AU}}^2+\overline{\mathrm{O_1A}}^2}{\overline{\mathrm{O_1U}}^2}\\&=\frac{\overline{\mathrm{O_1U}}^2}{\overline{\mathrm{O_1U}}^2}=1 \text{ (참)}\end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

207. 정답 ⑤

함수의 그래프(도함수의 활용)

조건 (가)에서 $p\in\mathrm{A}(p>0)$이므로

$f(p)=p$

이고 따라서 곡선 $y=f(x)$는 점 $(p,\ p)$를 지난다.

한편, $kp+(1-k)q$에서

$p=q$이면

$kp+(1-k)q=kp+(1-k)p=p$이고,

$p\neq q$이면

$p<q$인 경우

$p<kp+(1-k)q<q$이고,

$p>q$인 경우

$q<kp+(1-k)q<p$이므로

조건 (나)에서 집합 A의 원소의 개수가 2 이상이면

집합 B는 집합 A에 속한 임의의 서로 다른 두 실수의 사이에 있는

어떤 실수를 원소로 갖고, 두 집합 A, B의 원소의 최댓값과 최솟값은

각각 서로 같다.

어떤 양수 c에 대하여 구간 $(p-c,\ p)$에서 $f(x)>x$인 경우,

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로

$f(\alpha_1)=\alpha_1$이고 $\alpha_1<p$인 실수 α_1이 존재하고, $\alpha_1\in A$이다.

이때 $\alpha_1<0$이면 $|f(\alpha_1)|=|\alpha_1|>0$이므로

$\alpha_1\notin B$이고 조건 (나)의 $A\subset B$라는 조건을 만족시키지 않는다.

$\alpha_1=0$이면 구간 $(0,\ p)$에서 $f(x)>x$이고

$|f(x)|>x$이므로 구간 $(0,\ p)$의 어떤 실수도 집합 B에 속하지 않아

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$0<\alpha_1<p$이면 구간 $(-\infty,\ \alpha_1)$에서 $f(x)<x$이므로

$f(0)<0$이고, 구간 $[0,\ \alpha_1]$에서 함수 $f(x)$가 연속이고 증가하므로

사잇값의 정리에 의해

$f(\alpha_2)=0$이고 $0<\alpha_2<\alpha_1$인 실수 α_2가 반드시 하나 존재한다.

이때 $|f(0)|>0$이고

$|f(\alpha_2)|-\alpha_2=0-\alpha_2<0$

이며 구간 $[0,\ \alpha_2]$에서 함수 $|f(x)|-x$가 연속이므로

사잇값의 정리에 의해

$|f(\alpha_3)|-\alpha_3=0$

이고 $0<\alpha_3<\alpha_2$인 실수 α_3이 적어도 하나 존재한다.

즉, $\alpha_3\in B$이고, 집합 A의 원소의 최솟값이 α_1이며

$\alpha_3<\alpha_1<p$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 어떤 양수 c에 대하여 구간 $(p-c,\ p)$에서

$f(x)<x$이다.

이때 구간 $(-\infty,\ p)$에서 $f(x)<x$인 경우,

$f(\beta_1)=0$이고 $0<\beta_1<p$인 실수 β_1이 적어도 하나 존재한다.

이때 $f(x)=0$의 실근의 최솟값을 β_2라 하면

$0<\beta_2<p$이고, $|f(\beta_3)|-\beta_3=0$이고

$0<\beta_3<\beta_2$인 실수 β_3이 존재하므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

즉, 어떤 양수 c에 대하여 구간 $(p-c,\ p)$에서

$f(x)<x$이고, 구간 $(-\infty,\ p)$에서 방정식

$f(x)=x$를 만족시키는 실수 x가 존재해야 한다.

이때 방정식 $f(x)=x$가 음의 실근을 가지면

방정식 $|f(x)|=x$는 음의 실근을 가질 수 없으므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

또, 방정식 $f(x)=x$가 양의 실근만을 가지면

집합 A의 원소의 최솟값보다 집합 B의 원소의 최솟값이 작으므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 방정식 $f(x)=x$는 $x=0$을 근으로 갖는다.

한편, $f(x)=x$가 $x=0,\ x=p$ 이외의 다른 실근 $x=\gamma$를 갖게 되면

반드시 $0<\gamma<p$이고, 구간 $(0,\ \gamma)$에서 $f(x)>x$이므로

$|f(x)|>x$이고 구간 $(0,\ \gamma)$의 어떤 실수도 집합 B에 속하지 않아

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 방정식 $f(x)=x$의 실근은 $x=0,\ x=p$뿐이고

어떤 양수 c에 대하여 구간 $(p-c,\ p)$에서 $f(x)<x$이므로

방정식 $f(x)=x$는 $x=0$을 중근으로 갖는다.

즉, 양수 a에 대하여

$f(x)-x=ax^2(x-p)$ …… ㉠

로 놓을 수 있다.

이때 $A=\{0,\ p\}$이므로 $kp+(1-k)\times 0=kp$에서

$B=A\cup\{kp\}=\{0,\ kp,\ p\}$

이다.

즉, 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=x$와 두 점 $(0,\ 0)$, $(p,\ p)$에서만 만나고

곡선 $y=-f(x)$와 직선 $y=x$는 점 $(0,\ 0)$에서 만나고

점 $(p,\ p)$에서는 만나지 않으므로

곡선 $y=-f(x)$는 직선 $y=x$와 $0<x<p$인 범위에서 접해야 한다.

㉠에서

$-f(x)=-ax^2(x-p)-x$

이므로 $-f(x)=x$에서

$-ax^2(x-p)-x=x$

$x\{ax(x-p)+2\}=0$

위의 x에 대한 삼차방정식이 $x\neq 0$인 중근을 가져야 하므로

x에 대한 이차방정식

$ax(x-p)+2=0$

이 중근을 가져야 한다.

x에 대한 이차방정식

$ax^2-apx+2=0$

의 판별식을 D라 하면

$D=(-ap)^2-4\times a\times 2$

$=a^2p^2-8a$

$=a(ap^2-8)=0$

$a>0$이므로 $ap^2-8=0$에서

$a=\dfrac{8}{p^2}$

이를 ㉠에 대입하여 정리하면

$f(x)=\dfrac{8}{p^2}x^2(x-p)+x$

이다. 이때

$f'(x)=\dfrac{8}{p^2}\times 2x(x-p)+\dfrac{8}{p^2}x^2+1$

이므로 $f'(p)=p$에서

$f'(p)=8+1=9=p$

따라서

$f(x)=\dfrac{8}{81}x^2(x-9)+x$

이므로

$f\left(-\dfrac{p}{3}\right)=f(-3)$

$=\dfrac{8}{81}\times(-3)^2\times(-3-9)+(-3)$

$=-\dfrac{41}{3}$

208. 정답 62

수열의 귀납적 정의

조건 (가)에서

$a_{n+1}=a_n-k$ 또는 $a_{n+1}=-2a_n+k$

이므로 $a_1=a$라 하면

a_2, a_3은 다음과 같다.

a_1	a_2	a_3
a	$a-k$	$a-2k$
		$-2a+3k$
	$-2a+k$	$-2a$
		$4a-k$

조건 (나)에서 $a_1=a_3$이고 $a_1\neq a_2$이므로

다음의 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $a_3=a-2k$인 경우

$a_1=a_3$에서

$a=a-2k,\ k=0$

이때 $a_2=a$이므로 $a_1=a_2$가 되어 조건 (나)에 모순이다.

(ii) $a_3=-2a+3k$인 경우

$a_1=a_3$에서

$a=-2a+3k,\ k=a$

이때 $a_2=0$이고 a_1이 자연수이므로 $a_1\neq a_2$를 만족시킨다.

(iii) $a_3=-2a$인 경우

$a_1=a_3$에서

$a=-2a,\ a=0$

이는 첫째항이 자연수라는 조건에 모순이다.

(iv) $a_3=4a-k$인 경우

$a_1=a_3$에서

$a=4a-k,\ k=3a$

이때 $a_2=-2a+k=a$이므로 $a_1=a_2$가 되어 조건 (나)에 모순이다.

(i)~(iv)에 의하여 $k=a$이고 $a_3=a$이다. 이때 a_4, a_5는 다음과 같다.

a_3	a_4	a_5	a_6
a	0	$-a$	$-2a$
			$3a$
		a	0
			$-a$
	$-a$	$-2a$	$-3a$
			$5a$
		$3a$	$2a$
			$-5a$

a는 자연수이므로 $a_6=60$에서

$3a=60$ 또는 $5a=60$ 또는 $2a=60$, 즉

$a=20$ 또는 $a=12$ 또는 $a=30$

따라서 조건을 만족시키는 모든 a_1의 값의 합은

$20+12+30=62$

209. 정답 35

함수의 극한

$f(x)=x^4-\frac{8}{3}x^3-2x^2+8x+2$에서

$f'(x)=4x^3-8x^2-4x+8$

$\quad=4(x+1)(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서$x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

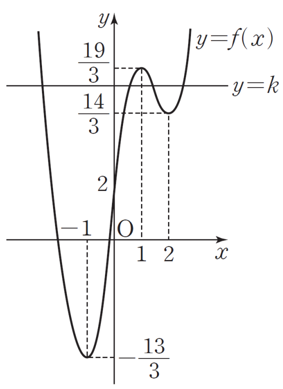
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f''(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

$f(-1)=1+\frac{8}{3}-2-8+2=-\frac{13}{3}$

$f(1)=1-\frac{8}{3}-2+8+2=\frac{19}{3}$

$f(2)=16-\frac{64}{3}-8+16+2=\frac{14}{3}$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



한편, 함수 $y=g(x)$, 즉 $y=|f(x)-k|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 $-k$만큼 평행이동한 그래프의 x축의 아래 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

이때 방정식 $f'(x)=0$의 근이

$x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

이므로 함수 $g(x)$의 $x=a$에서의 미분계수가 0인

a의 값은 -1, 1, 2뿐이다.

또한 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축이 점 $(t, g(t))$에서 접하지 않고 만난다고 하면 함수 $g(x)$는 $x=t$에서 미분가능하지 않고

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(t+h)-g(t)}{h}=-\lim_{h\to 0+}\frac{g(t+h)-g(t)}{h}$$

집합 $A=\left\{x \,\middle|\, \lim_{h\to 0-}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\lim_{h\to 0+}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=0\right\}$

의 원소 α에 대하여 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 미분가능하면

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h}+\lim_{h\to 0+}\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h}$$

$=g'(\alpha)+g'(\alpha)$

$=2g'(\alpha)=0$

$g'(\alpha)=0$이므로

$-1\in A$, $1\in A$, $2\in A$

함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 미분가능하지 않으면

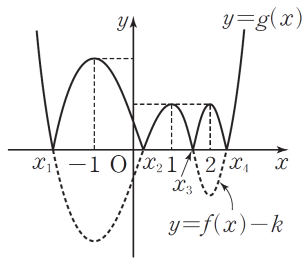
$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h}+\lim_{h\to 0+}\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h}=0$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h}$$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축이 접하지 않고 만나는 점의 x좌표는 집합 A의 원소이다.

이때 $n(A)=7$이려면 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축이 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로

$\frac{14}{3}<k<\frac{19}{3}$이어야 한다.



그림과 같이 $\frac{14}{3}<k<\frac{19}{3}$일 때 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축이 만나는 네 점의 x좌표를

x_1, x_2, x_3, $x_4$$(x_1<-1<x_2<1<x_3<2<x_4)$

라 하면

$A=\{x_1,\ -1,\ x_2,\ 1,\ x_3,\ 2,\ x_4\}$

$g(x_1)=g(x_2)=g(x_3)=g(x_4)=0$이므로 집합 $B=\{g(x)\,|\,x\in A\}$에 대하여 $n(B)=3$이려면 세 함숫값 $g(-1)$, $g(1)$, $g(2)$ 중 두 함숫값이 서로 같아야 한다.

이때 $\frac{14}{3}<k<\frac{19}{3}$이므로 세 함숫값 $g(-1)$, $g(1)$, $g(2)$ 중 두 함숫값이 서로 같은 경우는

$g(-1) \neq g(1) = g(2)$

일 때뿐이고, 이 경우에 집합 B는

$B = \{g(x_1),\ g(-1),\ g(1)\}$이다.

$g(1) = |f(1)-k| = \left|\dfrac{19}{3}-k\right| = \dfrac{19}{3}-k,$

$g(2) = |f(2)-k| = \left|\dfrac{14}{3}-k\right| = k-\dfrac{14}{3}$

이므로 $g(1) = g(2)$에서

$\dfrac{19}{3}-k = k-\dfrac{14}{3},\ 2k = 11,\ k = \dfrac{11}{2}$

그러므로 $g(x) = |f(x)-k| = \left|f(x)-\dfrac{11}{2}\right|$이고

$g(-1) = \left|f(-1)-\dfrac{11}{2}\right|$

$= \left|-\dfrac{13}{3}-\dfrac{11}{2}\right|$

$= \dfrac{59}{6}$

$g(1) = \left|f(1)-\dfrac{11}{2}\right|$

$= \left|\dfrac{19}{3}-\dfrac{11}{2}\right|$

$= \dfrac{5}{6}$

즉, $B = \left\{0,\ \dfrac{5}{6},\ \dfrac{59}{6}\right\}$이므로 집합 B의 모든 원소

의 합은

$0+\dfrac{5}{6}+\dfrac{59}{6} = \dfrac{32}{3}$

따라서 $p = 3,\ q = 32$이므로

$p+q = 3+32 = 35$

210. 정답 8

지수부등식

풀이 |

(i) $0 < a < \dfrac{2}{3}$일 때

$0 < a < 1,\ 0 < a+\dfrac{1}{3} < 1$이므로

$a^{x^2+bx} \geq a^{x+2}$에서 $x^2+bx \leq x+2$

$\left(a+\dfrac{1}{3}\right)^{x^2+bx} \geq \left(a+\dfrac{1}{3}\right)^{x+2}$

에서

$x^2+bx \leq x+2$

$x^2+bx \leq x+2$에서 $x^2+(b-1)x-2 \leq 0$

이차방정식 $x^2+(b-1)x-2 = 0$의 판별식을 D라 하면

$D = (b-1)^2+8 > 0$

이차방정식

$x^2+(b-1)x-2 = 0$의 두 실근을 $\alpha,\ \beta(\alpha < \beta)$

라 하면

$A = B = C = \{x \mid \alpha \leq x \leq \beta,\ x$는 실수$\}$이므로

주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\dfrac{2}{3} < a < 1$일 때

$0 < a < 1,\ a+\dfrac{1}{3} > 1$이므로

$a^{x^2+bx} \geq a^{x+2}$에서

$x^2+bx \leq x+2$ …… ㉠

$\left(a+\dfrac{1}{3}\right)^{x^2+bx} \geq \left(a+\dfrac{1}{3}\right)^{x+2}$에서

$x^2+bx \geq x+2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키려면

$x^2+bx = x+2$, 즉 $x^2+(b-1)x-2 = 0$

이차방정식 $x^2+(b-1)x-2 = 0$의 판별식을 D라 하면

$D = (b-1)^2+8 > 0$

이차방정식 $x^2+(b-1)x-2 = 0$의 두 실근을

$\alpha,\ \beta(\alpha < \beta)$라 하면

$C = \{\alpha,\ \beta\}$

$n(C) = 2,\ 1 \in C$이고, 집합 C의 모든 원소의 곱이 c이므로

$C = \{1,\ c\}$

그러므로 $C = \{\alpha,\ \beta\} = \{1,\ c\}$

이차방정식 $x^2+(b-1)x-2 = 0$의 한 근이 1이므로

$1+(b-1)-2 = 0$에서 $b = 2$

$x^2+(b-1)x-2 = x^2+x-2 = 0$에서

$(x+2)(x-1) = 0$

$x = -2$ 또는 $x = 1$

즉, $C = \{-2,\ 1\},\ c = -2$이므로 조건을 만족시킨다.

(iii) $a > 1$일 때

$a > 1,\ a+\dfrac{1}{3} > 1$이므로

$a^{x^2+bx} \geq a^{x+2}$에서

$x^2+bx \geq x+2$

$\left(a+\dfrac{1}{3}\right)^{x^2+bx} \geq \left(a+\dfrac{1}{3}\right)^{x+2}$

에서

$x^2+bx \geq x+2$

$x^2+bx \geq x+2$에서

$x^2+(b-1)x-2 \geq 0$

이차방정식 $x^2+(b-1)x-2 = 0$의 판별식을 D라 하면

$D = (b-1)^2+8 > 0$

이차방정식 $x^2+(b-1)x-2 = 0$의 두 실근을

$\alpha,\ \beta(\alpha < \beta)$라 하면

$A=B=C=\{x \mid x \le \alpha$ 또는 $x \ge \beta,\ x$는 실수$\}$
이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

$\frac{2}{3}<a<1$

이므로 $p<a$를 만족시키는 실수 p의 최댓값은

$M=\frac{2}{3}$

따라서

$$|3\times M\times b\times c|=\left|3\times\frac{2}{3}\times 2\times(-2)\right| =8$$

211. 정답 ④

부정적분

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하자.

$g(x)-g(x-h)=\int_{x-h}^{x} f(t)dt=F(x)-F(x-h)$의 양변을 0이 아닌 실수 h로 나누면

$$\frac{g(x)-g(x-h)}{h}=\frac{F(x)-F(x-h)}{h}$$

이고 위 식의 양변에 극한 $h\to 0$을 취하면

$\lim_{h\to 0}\frac{g(x)-g(x-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{F(x)-F(x-h)}{h}$ 에서

$\lim_{h\to 0}\frac{g(x-h)-g(x)}{-h}=\lim_{h\to 0}\frac{F(x-h)-F(x)}{-h}$

$g'(x)=f(x)$

$g(x)=\int f(x)dx=\int(3x^2+4x)dx$

$=x^3+2x^2+C$ (C는 적분상수)

$g(0)=1$이므로 $C=1$이고 $g(x)=x^3+2x^2+1$

따라서 $g(2)=8+8+1=17$

212. 정답 ④

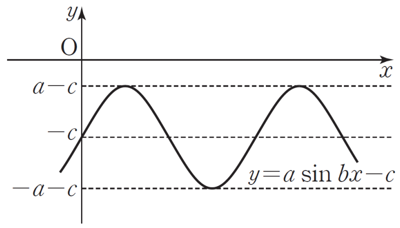
삼각함수의 그래프

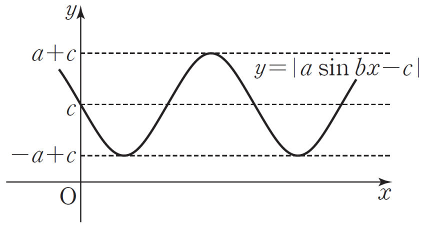
함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합과 차가 각각 $9,\ 5$이므로 함수 $f(x)$의 최댓값은 7, 최솟값은 2이다.

함수 $y=|a\sin bx-c|$의 최솟값은 양수이므로

함수 $y=a\sin bx-c$의 그래프는 x축과 만나지 않는다.

함수 $y=a\sin bx-c$의 그래프는 함수 $y=a\sin bx$의 그래프를 y축의 방향으로 $-c$만큼 평행이동한 것이고, $-c<0$이므로 함수 $y=a\sin bx-c$의 그래프와 함수 $y=|a\sin bx-c|$의 그래프는 그림과 같다.





함수 $y=|a\sin bx-c|$의 주기가 4π이므로 함수 $y=a\sin bx-c$의 주기도 4π이다.

즉, $\frac{2\pi}{b}=4\pi$에서 $b=\frac{1}{2}$

함수 $y=|a\sin bx-c|$의 최댓값이 $a+c$, 최솟값이 $-a+c$이므로

$a+c+(-a+c)=9,\ a+c-(-a+c)=5$

두 식을 연립하여 풀면

$c=\frac{9}{2},\ a=\frac{5}{2}$

그러므로 $f(x)=\left|\frac{5}{2}\sin\frac{1}{2}x-\frac{9}{2}\right|$

따라서

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left|\frac{5}{2}\sin\frac{\pi}{6}-\frac{9}{2}\right|=\left|\frac{5}{4}-\frac{9}{2}\right|=\frac{13}{4}$$

213. 정답 ②

위치와 속도

시각 $t(t>0)$에서의 점 P의 위치를 $x=f(t)$라 하면

$f(t)=3t^4-8t^3-6t^2+24t$

이고 점 P의 속도는

$f'(t)=12t-24t^2-12t+24$

이다. 점 P가 운동 방향을 바꾸는 시각을 구하기 위해 방정식 $f'(t)=0$을 풀면

$12t^3-24t^2-12t+24=0$

$t^3-2t^2-t+2=0$

$(t+1)(t-1)(t-2)=0$

$t=1$ 또는 $t=2$

$t=1$일 때 점 P의 위치는

$f(1)=3-8-6+24=13$

$t=2$일 때 점 P의 위치는

$f(2)=3\times 2^4-8\times 2^3-6\times 2^2+24\times 2$

$=48-64-24+48=8$

따라서 구하는 두 지점 사이의 거리는

$|f(2)-f(1)|=|8-13|=5$

214. 정답 ②

일반항과 부분합

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{a_{k+1}}=n^2-16n$에서

$n=1$일 때,

$\dfrac{b_1}{a_2}=-15,\ b_1=-15a_2$

$n\geq 2$일 때,

$$\frac{b_n}{a_{n+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{a_{k+1}}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{b_k}{a_{k+1}}$$
$$=n^2-16n-\{(n-1)^2-16(n-1)\}$$
$$=2n-17$$

$\dfrac{b_n}{a_{n+1}}=2n-17\,(n\geq 2)$이므로

$b_n=(2n-17)a_{n+1}\,(n\geq 2)$이다.

$b_1=-15a_2$이므로

$b_n=(2n-17)a_{n+1}\,(n\geq 1)$이다.

모든 자연수 n에 대하여 $a_n>0$이므로

$1\leq n\leq 8$인 모든 자연수 n에 대하여 $b_n<0$이고, $n\geq 9$인 모든 자연수 n에 대하여 $b_n>0$이다.

따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{b_k}{a_k}$의 값은 음수인 항들을 모두 더했을 때 최소가 되므로

$m=8$일 때 최솟값을 가진다.

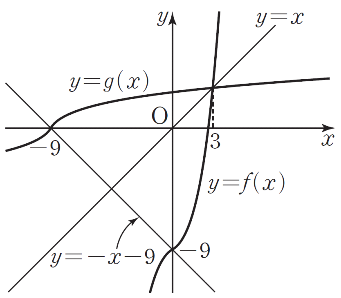
215. 정답 ⑤

역함수와 넓이

함수 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x-9$가 실수 전체의 집합에서 증가하므로 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구하면

$\dfrac{1}{3}x^3+x-9=x$에서 $x^3-27=0$이므로 $x=3$



곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=x,\ x=0$으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^3\{x-f(x)\}dx=\int_0^3\left(9-\frac{1}{3}x^3\right)dx$$
$$=\left[9x-\frac{1}{12}x^4\right]_0^3$$
$$=27-\frac{1}{12}\times 3^4=\frac{81}{4}$$

곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=x,\ x=0$으로 둘러싸인 도형의 넓이와 곡선 $y=g(x)$와 두 직선 $y=x,\ y=0$으로 둘러싸인 도형의 넓이는 같으므로 곡선 $y=g(x)$와 두 직선 $y=x,\ y=0$으로 둘러싸인 도형의 넓이도 $\dfrac{81}{4}$이다.

가로, 세로의 길이가 각각 9인 직각삼각형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 9\times 9=\dfrac{81}{2}$이므로 두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$와 직선 $y=-x-9$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{81}{4}+\frac{81}{4}+\frac{81}{2}=81$$

216. 정답 ⑤

사인법칙과 코사인법칙

ㄱ. 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos C=\frac{\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-\overline{\mathrm{AB}}^2}{2\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BC}}}$$
$$=\frac{7^2+8^2-9^2}{2\times 7\times 8}=\frac{2}{7}$$

$\sin C>0$이므로

$$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{2}{7}\right)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{7}\ \text{(참)}$$

ㄴ. 삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin C}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin(\angle\mathrm{ADC})}$$
$$\frac{8}{\frac{3\sqrt{5}}{7}}=\frac{7}{\sin(\angle\mathrm{ADC})}$$
$$\sin(\angle\mathrm{ADC})=\frac{7}{8}\times\frac{3\sqrt{5}}{7}$$
$$=\frac{3\sqrt{5}}{8}\ \text{(참)}$$

ㄷ. $\sin(\angle\mathrm{ADB})=\sin(\pi-\angle\mathrm{ADC})$
$$=\sin(\angle\mathrm{ADC})$$
$$=\frac{3\sqrt{5}}{8}$$

$\cos(\angle\mathrm{ADB})<0$이므로

$$\cos(\angle\mathrm{ADB})=-\sqrt{1-\sin^2(\angle\mathrm{ADB})}$$
$$=-\sqrt{1-\left(\frac{3\sqrt{5}}{8}\right)^2}$$
$$=-\frac{\sqrt{19}}{8}$$

$\overline{\mathrm{BD}}=x$라 하면 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + x^2 - 2\times\overline{AD}\times x\times\cos(\angle ADB)$

$9^2 = 8^2 + x^2 - 2\times8\times x\times\left(-\dfrac{\sqrt{19}}{8}\right)$

$81 = 64 + x^2 + 2\sqrt{19}x$

$x^2 + 2\sqrt{19}x - 17 = 0$

$x = -\sqrt{19}\pm6$

$x > 0$이므로

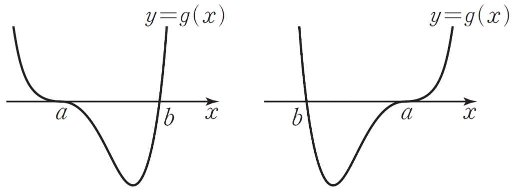
$x = 6-\sqrt{19}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

217. 정답 ②

함수의 미분가능성

삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가 $g'(x) = f(x)$이고 $g(a)=0$, $g'(a)=0$이므로 함수 $|g(x)|$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수가 1이려면 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같아야 한다.



삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$g(x) = \dfrac{1}{4}(x-a)^3(x-b)$ (b는 $a\neq b$인 상수)라 하면

$g'(x) = \dfrac{3}{4}(x-a)^2(x-b) + \dfrac{1}{4}(x-a)^3$

$= \dfrac{1}{4}(x-a)^2\{3(x-b)+(x-a)\}$

$= \dfrac{1}{4}(x-a)^2(4x-a-3b)$

이다.

$g'(a+2) = \dfrac{1}{4}\times4\times(3a-3b+8) = 3a-3b+8$

$g(a+2) = \dfrac{1}{4}\times8\times(a-b+2) = 2(a-b+2)$

에서 $g'(a+2) = g(a+2)$이므로

$3a-3b+8 = 2(a-b+2)$

$b = a+4$

그러므로 $g(x) = \dfrac{1}{4}(x-a)^3(x-a-4)$이고

$g(2a) = a^3$에서

$\dfrac{1}{4}a^3(a-4) = a^3$, $a=8$

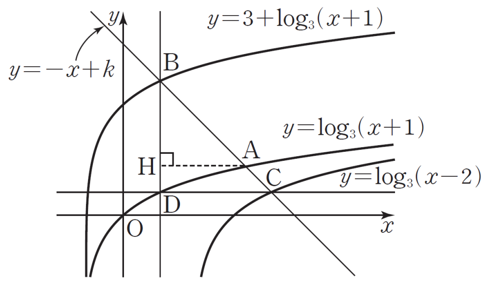
즉, $g(x) = \dfrac{1}{4}(x-8)^3(x-12)$

따라서 $g(9) = \dfrac{1}{4}\times1^3\times(-3) = -\dfrac{3}{4}$

218. 정답 3

로그함수의 그래프

곡선 $y=\log_3(x+1)$을 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 곡선과 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 곡선이 각각 $y=\log_3(x-2)$, $y=3+\log_3(x+1)$이다.



점 B를 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=\log_3(x+1)$와 만나는 점을 D라 하면

$\overline{BD}=3$

점 D를 지나고 y축에 수직인 직선이 곡선 $y=\log_3(x-2)$와 만나는 점을 C′이라 하면

$\overline{DC'}=3$

삼각형 BDC′은 $\overline{BD}=\overline{DC'}$인 직각삼각형이므로 직선 BC′의 기울기는 -1이다. 그러므로 점 C와 점 C′은 같은 점이다.

점 A에서 직선 BD에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AB}=2\overline{AC}$이므로 $\overline{BH}=\dfrac{2}{3}\overline{BD}=2$

$\overline{AH}=\overline{BH}=2$이므로 점 A의 좌표를 $A(t,\ \log_3(t+1))(t>-1)$이라 하면

점 B의 좌표는 $B(t-2,\ 3+\log_3(t-1))$이다.

$\overline{BH} = \{3+\log_3(t-1)\}-\log_3(t+1)$

$= 3+\log_3\dfrac{t-1}{t+1} = 2$

에서 $\log_3\dfrac{t-1}{t+1} = -1$이므로

$\dfrac{t-1}{t+1} = \dfrac{1}{3}$

$3(t-1) = t+1$

$t=2$

그러므로 점 A의 좌표는 $A(2,\ 1)$이고, 점 A는 직선 $y=-x+k$ 위의 점이므로 $1=-2+k$

따라서 $k=3$

219. 정답 7

정적분과 미분의 관계, 도함수의 방정식에의 활용

조건에서 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-10}{2h}$의 값이 존재하고 (분모) → 0이므로 (분자) → 0이다.

그러므로 $f(1)=10$이고 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-10}{2h}=\dfrac{f'(1)}{2}$이다.

$\dfrac{2f'(x)-f'(1)}{2}\ge\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-10}{2h}$에서

$\dfrac{2f'(x)-f'(1)}{2}\ge\dfrac{f'(1)}{2}$

$f'(x)\ge f'(1)$

이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 대칭축은 $x=1$이다.

$f'(2)=0$이므로 $f'(0)=0$이고 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $f'(x)=3x(x-2)=3x^2-6x$이다.

$f(x)=\displaystyle\int f'(x)dx=x^3-3x^2+C$ (단, C는 적분상수)

$f(1)=10$에서

$f(1)=1-3+C=10$

$C=12$

$f(x)=x^3-3x^2+12$

$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x f(t)dt=\dfrac{d}{dx}\{F(x)-F(0)\}=f(x)$

$\displaystyle\int_0^x\left\{\dfrac{d}{dt}f(t)\right\}dt=\int_0^x f'(t)dt=f(x)-f(0)$

이므로

$\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^x f(t)dt+\int_0^x\left\{\dfrac{d}{dt}f(t)\right\}dt$

$=f(x)+f(x)-f(0)$

$=2f(x)-f(0)$

$=2x^3-6x^2+24-12$

$=2x^3-6x^2+12$

$h(x)=2x^3-6x^2+12-n$이라 하면

$h'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$

$h'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

삼차방정식 $h(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$h(0)\times h(2)<0$이어야 하므로

$h(0)=12-n$, $h(2)=4-n$에서

$(12-n)(4-n)<0$

$(n-4)(n-12)<0$

$4<n<12$

따라서 구하는 자연수 n이 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11이므로 개수는 7이다.

220. 정답 33

수열의 귀납적 정의

조건 (가)에서

$a_2=a_1\times a_1-1=a_1^2-1$

$a_3=a_2+1=a_1^2$

$a_4=a_1\times a_2-1=a_1(a_1^2-1)-1=a_1^3-a_1-1$

$a_5=a_3+1=a_1^2+1$

이다. 위의 식을 조건 (나)에 대입하면

$a_2-a_3+a_4=3a_5-8$

$a_1^2-1-a_1^2+a_1^3-a_1-1=3(a_1^2+1)-8$

$a_1^3-3a_1^2-a_1+3=0$

$(a_1-3)(a_1-1)(a_1+1)=0$

$a_1=3$ 또는 $a_1=1$ 또는 $a_1=-1$

$a_4>0$이므로 $a_1=3$이고

$a_2=8,\ a_3=9,\ a_4=23,\ a_5=10$이다.

$a_k=13$인 자연수 k를 구하기 위해 조건 (가)의

$a_{2n+1}=a_{n+1}+1$에서

$a_9=a_5+1=11$

$a_{17}=a_9+1=12$

$a_{33}=a_{17}+1=13$

$a_{65}=a_{33}+1=14$

따라서 $k=33$

221. 정답 ④

삼각함수의 그래프

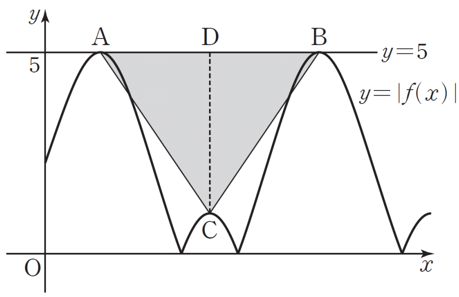
함수 $f(x)$의 최댓값이 5이고 a, c가 양수이므로 $a+c=5$

삼각형 ABC가 이등변삼각형이므로 선분 AB의 중점을 D라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 C, D를 지나는 직선에 대하여 대칭이고 점 C를 x축에 대하여 대칭이동시킨 점을 C′이라 하면 점 C′의 y좌표는 $-a+c$이므로 점 C의 y좌표는 $a-c$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{CD}}=(a+c)-(a-c)=2c$ …… ㉠

한편 두 점 A, B 사이의 거리가 함수 $f(x)$의 주기와 같고 b가 양수이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{2\pi}{b\pi}=\dfrac{2}{b}$



선분 AB의 중점이 D이고 삼각형 ABC가 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{5}$인 이등변삼각형이므로 선분 AB와 선분 CD는 수직이다.

두 점 B, C를 지나는 직선의 기울기가 2이므로

$\overline{BD} : \overline{CD} = 1 : 2$에서

$\overline{CD} = \overline{AB} = \dfrac{2}{b}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$2c = \dfrac{2}{b},\ c = \dfrac{1}{b}$ …… ㉢

또한 $\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2 = 4\overline{BD}^2 + \overline{BD}^2 = 5\overline{BD}^2 = 20$에서

$\overline{BD} = 2$

㉡에서 $\dfrac{2}{b} = 4,\ b = \dfrac{1}{2}$

㉢에서 $c = \dfrac{1}{b} = 2$

한편 $a + c = 5$이므로 $a = 3$

따라서 $f(x) = 3\sin\dfrac{\pi}{2}x + 2$이므로

$f(3) = 3\sin\dfrac{3}{2}\pi + 2 = 3\times(-1) + 2 = -1$

222. 정답 ②

다항함수의 적분법

조건 (가)에서

$$f(x) = \int 4x(x-3)(x-\alpha)dx$$
$$= \int \{4x^3 - 4(3+\alpha)x^2 + 12\alpha x\}dx$$
$$= x^4 - \frac{4}{3}(3+\alpha)x^3 + 6\alpha x^2 + C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$f(0) = 0$이므로 $f(x) = x^4 - \dfrac{4}{3}(3+\alpha)x^3 + 6\alpha x^2$

조건 (나)에서 함수 $y = f(x)$의 그래프는 직선 $x = k$에 대하여 대칭이고, 극댓값과 극솟값이 모두 존재하므로 $x = k$에서 극댓값을 갖는다.

한편 $\alpha = 0$일 때 $f(x) = x^4 - 4x^3$이고 이는 조건 (나)를 만족시키지 못하고 $\alpha = 3$인 경우도 마찬가지이다.

즉 $\alpha \neq 0$이고 $\alpha \neq 3$이므로 α의 값의 범위에 따라 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $\alpha < 0 < 3$인 경우

x	$\cdots$	α	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

조건 (나)에서 사차함수 $y = f(x)$의 그래프는 직선 $x = 0$, 즉 y축에 대하여 대칭이고 $x = 0$에서 극댓값을 가지므로 $k = 0$

따라서 $f(k) = 0$

(ii) $0 < \alpha < 3$인 경우

x	$\cdots$	0	$\cdots$	α	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

조건 (나)에서 사차함수 $y = f(x)$의 그래프는 직선 $x = \alpha$에 대하여 대칭이고 $x = \alpha$에서 극댓값을 가지므로

$k = \alpha$

한편 $\alpha = \dfrac{0+3}{2} = \dfrac{3}{2}$이므로

$f(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2$이고

$f(k) = f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \left(\dfrac{3}{2}\right)^4 - 6\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^3 + 9\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{81}{16}$

(iii) $\alpha > 3$인 경우

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

조건 (나)에서 사차함수 $f(x)$는 $x = 3$에서 극댓값을 가지므로

$k = 3$

$\dfrac{0+\alpha}{2} = 3$이므로 $\alpha = 6$

$f(x) = x^4 - 12x^3 + 36x^2$이므로

$f(k) = f(3) = 3^4 - 12\times3^3 + 36\times3^2 = 81$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $f(k)$의 최댓값은 81이다.

223. 정답 ③

사인법칙과 코사인법칙

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta = \dfrac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2\times5\times8} = \dfrac{1}{2}$ …… ㉠

$\overline{AD} : \overline{DC} = 3 : 1$에서 $\overline{AD} = 8\times\dfrac{3}{4} = 6$이므로

$\overline{BD} = k$라 하면

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta = \dfrac{5^2 + 6^2 - k^2}{2\times5\times6} = \dfrac{61 - k^2}{60}$이고

㉠에서 $\dfrac{61-k^2}{60} = \dfrac{1}{2},\ 61 - k^2 = 30,\ k = \sqrt{31}$이므로

$\overline{BD} = \sqrt{31}$

$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

한편 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BD}}{\sin\theta} = 2R$이므로

$R = \dfrac{\sqrt{31}}{2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{31}}{\sqrt{3}}$

따라서 삼각형 ABD의 외접원의 넓이는

$\pi\times\left(\dfrac{\sqrt{31}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \dfrac{31}{3}\pi$

224. 정답 ②

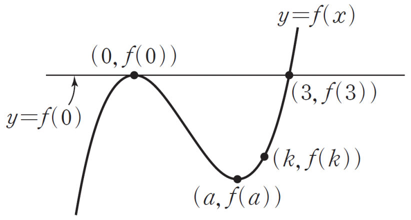
도함수의 활용 - 함수의 최대, 최소

조건 (가)에서

$$f(x)=\int\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}ax\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}ax^2+C$$ (단, C는 적분상수)

조건 (나)에 의하여 열린구간 $(-\infty,\ k)$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 존재하기 위해서는 그림과 같이 $k\le 3$이어야 한다.



즉 $f(0)=f(3)$에서 $C=\frac{27}{2}-\frac{27}{4}a+C$이므로 $a=2$

$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+C$이고

$f(2)=\frac{1}{2}\times 8-\frac{3}{2}\times 4+C=0$에서 $C=2$이고

$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+2$이므로 $f(-1)=0,\ f(0)=2$

따라서

$$\int_{f(-1)}^{f(0)}f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx$$

$$=\int_0^2\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+2\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{2}x^3+2x\right]_0^2$$

$$=\frac{1}{8}\times 16-\frac{1}{2}\times 8+2\times 2=2$$

225. 정답 ⑤

거듭제곱근 중 실수인 것의 개수

$(n-3)(n-6)\le 0$에서 $3\le n\le 6$이므로

집합 A를 원소나열법으로 나타내면 $A=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

$f(x)$는 이차함수이므로 $f(n)$은 실수이고, n이 홀수일 때

$f(n)$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 항상 1이다.

즉 모든 홀수 n에 대하여 $g(n)=1$이므로

$g(3)=g(5)=1$

한편 집합 B를 원소나열법으로 나타내면

$B=\{1,\ g(4),\ g(6)\}$이고 집합 B의 원소의 개수가 3이므로

$g(4)\ne 1,\ g(6)\ne 1$이고 $g(4)\ne g(6)$이어야 한다.

따라서 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $g(4)=0,\ g(6)=2$인 경우

$g(4)=0$이려면 $f(4)<0$이어야 하고,

$g(6)=2$이려면 $f(6)>0$이어야 한다.

$f(4)=\frac{1}{2}\times 4^2-3\times 4+k<0,\ 8-12+k<0,\ k<4$

$f(6)=\frac{1}{2}\times 6^2-3\times 6+k>0,\ k>0$

따라서 $0<k<4$이므로 모든 자연수 k의 값의 합은

$1+2+3=6$

(ii) $g(4)=2,\ g(6)=0$인 경우

$g(4)=2$가 되려면 $f(4)>0$이어야 하고,

$g(6)=0$이 되려면 $f(6)<0$이어야 한다.

$f(4)=\frac{1}{2}\times 4^2-3\times 4+k>0,\ 8-12+k>0,\ k>4$

$f(6)=\frac{1}{2}\times 6^2-3\times 6+k<0,\ k<0$

이를 만족시키는 자연수 k는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 모든 자연수 k의 값의 합은 6이다.

226. 정답 ④

도함수의 활용

$h(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+\frac{25}{3}$라 하면

조건 (가)에서 함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

$\lim_{x\to -1-}g(x)=\lim_{x\to -1-}f(x)$,

$\lim_{x\to -1+}g(x)=\lim_{x\to -1+}h(x)=h(-1)=0$에서

$\lim_{x\to -1-}f(x)=0$이므로 $f(-1)=0$ …… ㉠

함수 $g(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하므로

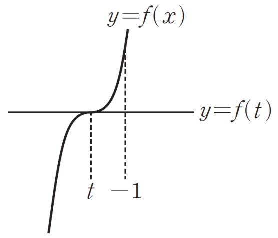
$$\lim_{x\to -1-}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$$
$$=f'(-1)$$

$$\lim_{x\to -1+}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1+}\frac{h(x)-h(-1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1+}\frac{\frac{1}{3}x^2-3x^2+5x+\frac{25}{3}}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1+}\frac{\frac{1}{3}(x+1)(x-5)^2}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1+}\frac{1}{3}(x-5)^2=12$$에서

$f'(-1)=12$ …… ㉡

조건 (나)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같이

$x=t(t<-1)$에서 접선의 기울기가 0이지만 극값을 갖지 않아야 한다.



따라서 함수 $f(x)=4(x-t)^3+a$(a는 상수)라 하면 ㉠에서

$f(-1)=4(-1-t)^3+a=-4(1+t)^3+a=0$이므로

$a=4(1+t)^3$

$f'(x)=12(x-t)^2$이므로

㉡에서 $f'(-1)=12(-1-t)^2=12(1+t)^2=12$

$(1+t)^2=1$

$t<-1$이므로 $1+t=-1$, $t=-2$이고

$a=4\{1+(-2)\}^3=-4$

따라서 $f(x)=4(x+2)^3-4$이고 $-2<-1$이므로

$$\int_{-2}^{1} g(x)dx$$

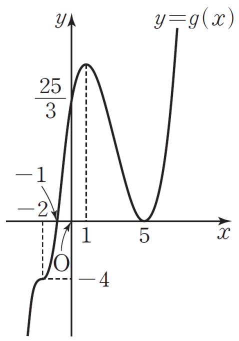
$$=\int_{-2}^{-1}\{4(x+2)^3-4\}dx+\int_{-1}^{1}\left\{\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+\frac{25}{3}\right\}dx$$

$$=4\int_{-2}^{-1}(x^3+6x^2+12x+7)dx+2\int_{0}^{1}\left\{-3x^2+\frac{25}{3}\right\}dx$$

$$=4\times\left[\frac{1}{4}x^4+2x^3+6x^2+7x\right]_{-2}^{-1}+2\times\left[-x^3+\frac{25}{3}x\right]_{0}^{1}$$

$$=-3+\frac{44}{3}=\frac{35}{3}$$

[참고] 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



227. 정답 ④

귀납적으로 정의된 수열

2이상의 자연수 k에 대하여 $a_k=192$라 하자.

a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{k-1}, 192는 첫째항이 3이고 공비가 r인 등비수열이므로

$a_k=3\times r^{k-1}$, 즉 $192=3\times r^{k-1}$

a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, $\cdots$은 첫째항이 $a_k=192$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$a_{k+l}=a_k\times\left(\frac{1}{2}\right)^l=192\times\left(\frac{1}{2}\right)^l$(단, l은 자연수)

이때 $r=1$이면 $a_k=a_1=3<192$이므로 $a_k=192$인 자연수 k가 존재하지 않는다.

즉, $r\geq 2$이다.

$r\geq 2$이면 서로 다른 두 자연수 p, $q(p<q)$에 대하여 $p<q<k$인 경우 $a_p<a_q$이고 $k<p<q$인 경우 $a_p>a_q$이므로 $a_p=a_q$를 만족시키는 10이하의 두 자연수 p, $q(p<q)$는 존재하지 않는다.

따라서 $a_p=a_q$를 만족시키는 서로 다른 두 자연수 p, q가 존재하기 위해서는 $p<k<q$이어야 한다.

$a_p=3\times r^{p-1}$, $a_q=192\times\left(\frac{1}{2}\right)^{q-k=3}\times r^{k-1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{q-k}$

이므로 $a_p=a_q$가 성립하려면

$3\times r^{p-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{q-k}\times 3\times r^{k-1}$에서 $r^{p-k=}\left(\frac{1}{2}\right)^{q-k}$이고

$r=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{q-k}{p-k}}=2^{\frac{q-k}{k-p}}$에서 r은 $r\geq 2$인 자연수이므로 $\frac{q-k}{k-p}$도 자연수이어야 한다.

한편 $192=3\times 64=3\times 2^6=3\times r^{k-1}$에서 r이 자연수이므로 $a_k=192$인 자연수 k가 존재하기 위해서는 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

$r^{k-1}=2^6$에서 $r=2$, $k=7$

$r^{k-1}=2^6=4^3$에서 $r=4$, $k=4$

$r^{k-1}=2^6=8^2$에서 $r=8$, $k=3$

$r^{k-1}=2^6=64^1$에서 $r=64$, $k=2$

(i) $r=2$, $k=7$인 경우

$n<7$일 때, 3, 6, 12, 24, 48, 96

$n\geq 7$일 때, $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$에서 $a_n=192\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-7}$이므로

192, 96, 48, 24, 12, 6, 3, $\frac{3}{2}$, $\cdots$

즉 $a_4=a_{10}$, $a_5=a_9$, $a_6=a_8$

따라서 10이하의 두 자연수 p, $q(p<q)$에 대하여 $a_p=a_q$를 만족시키는 순서쌍은 $(4, 10)$, $(5, 9)$, $(6, 8)$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $r=4$, $k=4$인 경우

$n<4$일 때, 3, 12, 48이고

$n\geq 4$일 때, $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$에서 $a_n=192\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$이므로

192, 96, 48, 24, 12, 6, 3, $\frac{3}{2}$, $\cdots$이다.

즉 $a_1=a_{10}$, $a_2=a_8$, $a_3=a_6$

따라서 10이하의 두 자연수 p, $q(p<q)$에 대하여 $a_p=a_q$를 만족시키는 순서쌍은 $(1, 10)$, $(2, 8)$, $(3, 6)$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $r=8,\ k=3$인 경우

$n<3$일 때, $3,\ 24$이고

$n\ge 3$일 때, $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$에서 $a_n=192\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$이므로

$192,\ 96,\ 48,\ 24,\ 12,\ 6,\ 3,\ \frac{3}{2},\ \cdots$이다.

즉 $a_1=a_9,\ a_2=a_6$

따라서 10이하의 두 자연수 $p,\ q(p<q)$에 대하여 $a_p=a_q$를 만족시키는 순서쌍은 $(1,\ 9),\ (2,\ 6)$이므로 조건을 만족시키고 $\frac{q-k}{k-p}=3$이다. 따라서 $a_9=3$에서 $m=9$이다.

(ⅳ) $r=64,\ k=2$인 경우

$a_1=3$이고

$n\ge 2$일 때, $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$에서 $a_n=192\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$이므로

$192,\ 96,\ 48,\ 24,\ 12,\ 6,\ 3,\ \frac{3}{2},\ \cdots$이다.

즉 $a_1=a_8$

따라서 10이하의 서로 다른 두 자연수 $p,\ q$에 대하여 $a_p=a_q$를 만족시키는 순서쌍은 $(1,\ 8)$뿐이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 $r=8$이고 $m=9$이므로

$$\sum_{n=1}^{9}a_n=(3+24)+\sum_{n=3}^{9}192\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$
$$=27+192\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=408$$

228. 정답 15

등차수열의 합

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d (d는 자연수)라 하면

$a_{2k}=a_1+(2k-1)d=0$에서

$a_1=-(2k-1)d$ $\cdots\cdots$ ㉠

$S_7=\frac{7(2a_1+6d)}{2}=7(a_1+3d)=42$에서

$a_1+3d=6$이므로 $a_4=6$

공차가 자연수이므로

$a_{2k}=0$에서 $2k=2,\ k=1$ $\cdots\cdots$ ㉡

즉, $a_2=0,\ a_4=6$이므로

$a_4-a_2=2d$에서 $2d=6,\ d=3$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면 $a_1=-3$이므로

$$S_n=\frac{n\{2\times(-3)+3(n-1)\}}{2}$$
$$=\frac{3}{2}n(n-3)$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{5}S_n=\sum_{n=1}^{5}\frac{3}{2}n(n-3)=\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{5}(n^2-3n)$$
$$=\frac{3}{2}\left(\sum_{n=1}^{5}n^2-\sum_{n=1}^{5}3n\right)$$
$$=\frac{3}{2}\left(\frac{5\times6\times11}{6}-3\times\frac{5\times6}{2}\right)$$
$$=\frac{3}{2}\times10$$
$$=15$$

229. 정답 85

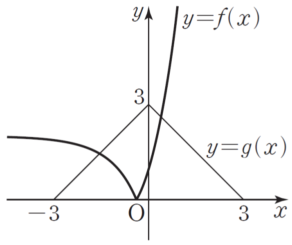
지수함수의 그래프

$3^{x+1}-n=0$에서 $x+1=\log_3 n$

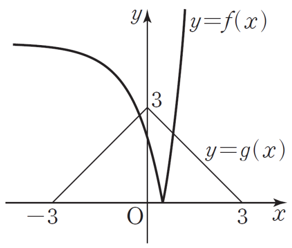
$x=-1+\log_3 n=\log_3\frac{n}{3}$이므로 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}-3^{x+1}+n & \left(x<\log_3\frac{n}{3}\right)\\ 3^{x+1}-n & \left(x\ge\log_3\frac{n}{3}\right)\end{cases}$$

방정식 $f(x)=g(x)$가 서로 다른 두 실근을 갖고 두 실근의 곱이 음수가 되기 위해서는 함수 $f(x)$는 $x<\log_3\frac{n}{3}$에서 감소하는 함수이고, $x\ge\log_3\frac{n}{3}$에서 증가하는 함수이므로 그림과 같이 곡선 $y=-3^{x+1}+n$이 직선 $y=x+3$과 한 점에서 만나고 곡선 $y=3^{x+1}-n$이 직선 $y=-x+3$과 한 점에서 만나야 한다.



또는



이때 곡선 $y=-3^{x+1}+n$이 직선 $y=x+3$과 한 점에서 만나고 곡선 $y=3^{x+1}-n$이 직선 $y=-x+3$과 한 점에서 만나기 위해서는 $h(x)=-3^{x+1}+n,\ i(x)=3^{x+1}-n$이라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여 $h(-3)=-3^{-2}+n=-\frac{1}{9}+n>0$이므로

$\log_3 \frac{n}{3} \le 0$일 때, $i(0) < 3$이거나

$\log_3 \frac{n}{3} > 0$일 때, $h(0) < 3$이어야 한다.

$\log_3 \frac{n}{3} \le 0$에서 $\frac{n}{3} \le 1$, $n \le 3$이고

$i(0) < 3$에서 $3 - n < 3$, $n > 0$

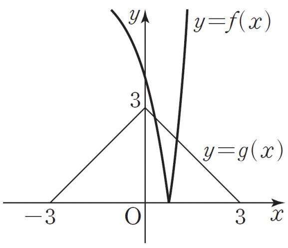
즉, $0 < n \le 3$

또 $\log_3 \frac{n}{3} > 0$에서 $n > 3$이고 $h(0) < 3$에서 $-3 + n < 3$, $n < 6$

즉, $3 < n < 6$

따라서 곡선 $y = -3^{x+1} + n$이 직선 $y = x + 3$과 한 점에서 만나고 곡선 $y = 3^{x+1} - n$이 직선 $y = -x + 3$과 한 점에서 만나기 위한 자연수 n의 값의 범위는 $n < 6$이므로 $M_1 = 5$

한편 방정식 $f(x) = g(x)$가 서로 다른 두 실근을 갖고 두 실근의 곱이 양수가 되기 위해서는 그림과 같이 두 곡선 $y = -3^{x+1} + n$과 곡선 $y = 3^{x+1} - n$이 직선 $y = -x + 3$과 각각 한 점에서 만나야 한다.



이때 두 곡선 $y = -3^{x+1} + n$과 곡선 $y = 3^{x+1} - n$이 직선 $y = -x + 3$과 각각 한 점에서 만나기 위해서는 함수 $f(x)$는 $x < \log_3 \frac{n}{3}$에서 감소하는 함수이고, $x \ge \log_3 \frac{n}{3}$에서 증가하는 함수이므로

$h(x) = -3^{x+1} + n$, $i(x) = 3^{x+1} - n$이라 할 때,

$h(0) > 3$이고 $\log_3 \frac{n}{3} < 3$이어야 한다.

$h(0) > 3$에서 $-3 + n > 3$, $n > 6$이고

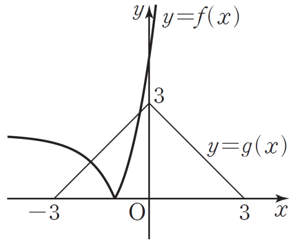
$\log_3 \frac{n}{3} < 3$에서 $\frac{n}{3} < 27$, $n < 81$이므로

자연수 n의 값의 범위는 $6 < n < 81$

따라서 두 곡선 $y = -3^{x+1} + n$과 $y = 3^{x+1} - n$이 직선 $y = -x + 3$과 각각 한 점에서 만나기 위한 자연수 n의 값의 범위는 $6 < n < 81$이므로 $M_2 = 80$

따라서 $M_1 + M_2 = 5 + 80 = 85$

[참고] 그림과 같이 두 곡선 $y = -3^{x+1} + n$과 곡선 $y = 3^{x+1} - n$이 직선 $y = x + 3$과 각각 한 점에서 만나는 경우도 방정식 $f(x) = g(x)$의 두 실근의 곱이 양수이다.



이때 $i(0) > 3$에서 $n < 0$이므로 n이 자연수라는 조건에 모순이다. 즉, 두 곡선 $y = -3^{x+1} + n$과 곡선 $y = 3^{x+1} - n$이 직선 $y = x + 3$과 각각 한 점에서 만나도록 하는 자연수 n의 값은 존재하지 않는다.

230. 정답 86

도함수의 활용

함수 $y = g(x)$의 그래프는 $x < 1$일 때 함수 $y = f(x)$의 그래프와 같고, $x \ge 1$일 때 $x < 1$에서의 함수 $y = f(x)$의 그래프를 $x = 1$에 대하여 대칭이동시킨 그래프와 같다.

조건 (가)에서 함수 $g(x)$는 $x = 1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{h \to 0-} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1)$$

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0+} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} &= \lim_{h \to 0+} \frac{f(2-(1+h)) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0+} \frac{f(1-h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0+} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} \times (-1) \\ &= -f'(1)\end{aligned}$$

$f'(1) = -f'(1)$에서

$f'(1) = 0$

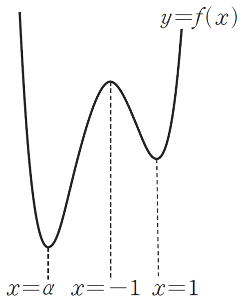
최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여

$f'(-1) = f'(1) = 0$이므로

$f'(x) = 4(x+1)(x-1)(x-a)$라 하면 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $\alpha < -1$인 경우

$\alpha < -1 < 1$이므로 최고차항의 계수가 1인 함수 $y = f(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같이 $x = \alpha$, $x = 1$에서 극솟값을 갖고, $x = -1$에서 극댓값을 가지므로 조건을 만족시키지 않는다.

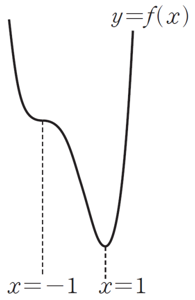


[그림 1]

(ii) $\alpha = -1$인 경우

함수 $f'(x) = 4(x+1)^2(x-1)$이므로 함수 $y = f(x)$의 그래프는

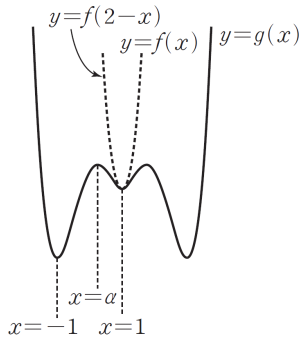
[그림 2]와 같고 $x=-1$에서 극솟값을 갖지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.



[그림 2]

(iii) $-1<\alpha<1$인 경우

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 극솟값을, $x=\alpha$에서 극댓값을 가지므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 [그림 $3-1$] 또는 [그림 $3-2$]와 같다.

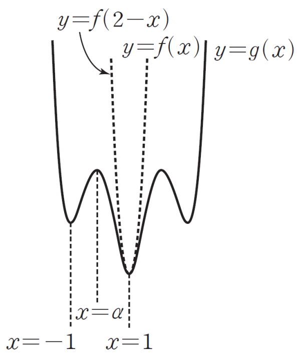


[그림 $3-1$]

[그림 $3-1$]에서 함수 $h(k)$는

$$h(k)=\begin{cases} 2 & (k>g(\alpha)) \\ 4 & (k=g(\alpha)) \\ 6 & (g(1)<k<g(\alpha)) \\ 5 & (k=g(1)) \\ 4 & (g(-1)<k<g(1)) \\ 2 & (k=g(-1)) \\ 0 & (k<g(-1)) \end{cases}$$

이므로 $\lim\limits_{k\to a+}h(k)>\lim\limits_{k\to a-}h(k)$를 만족시키는 서로 다른 실수 a의 개수가 2가 되어 조건 (나)를 만족시키고, $f(-1)<f(1)$도 만족시킨다.



[그림 $3-2$]

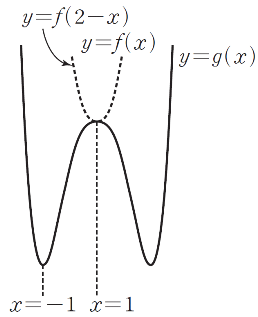
[그림 $3-2$]에서 함수 $h(k)$는

$$h(k)=\begin{cases} 2 & (k>g(\alpha)) \\ 4 & (k=g(\alpha)) \\ 6 & (g(-1)<k<g(\alpha)) \\ 5 & (k=g(-1)) \\ 4 & (g(1)<k<g(-1)) \\ 2 & (k=g(1)) \\ 0 & (k<g(1)) \end{cases}$$

이므로 $\lim\limits_{k\to a+}h(k)>\lim\limits_{k\to a-}h(k)$를 만족시키는 서로 다른 실수 a의 개수가 2가 되어 조건 (나)를 만족시키지만 $f(-1)<f(1)$은 만족시키지 않는다.

(iv) $\alpha=1$인 경우

함수 $f'(x)=4(x+1)(x-1)^2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 4]와 같다.



[그림 4]

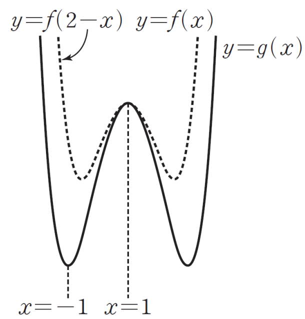
이때 함수 $h(k)$는

$$h(k)=\begin{cases} 2 & (k>g(1)) \\ 3 & (k=g(1)) \\ 4 & (g(-1)<k<g(1)) \\ 2 & (k=g(-1)) \\ 0 & (k<g(-1)) \end{cases}$$

이므로 $\lim\limits_{k\to a+}h(k)>\lim\limits_{k\to a-}h(k)$를 만족시키는 서로 다른 실수 a의 개수가 1이 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(v) $a>1$인 경우

$f'(x)=4(x+1)(x-1)(x-\alpha)$이고 $-1<1<\alpha$이므로 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=\alpha$에서 극솟값을, $x=1$에서 극댓값을 갖고 사차함수 $f(2-x)$는 $x=\alpha$에서 극솟값을 가지므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 [그림 5]와 같다.



[그림 5]

이때 함수 $h(k)$는

$$h(k)=\begin{cases}2 & (k>g(1))\\ 3 & (k=g(1))\\ 4 & (g(-1)<k<g(1))\\ 2 & (k=g(-1))\\ 0 & (k<g(-1))\end{cases}$$

이므로 $\lim_{k\to a+}h(k)>\lim_{k\to a-}h(k)$를 만족시키는 서로 다른 실수 a의 개수가 1이 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(i)~(v)에 의하여

$f'(x)=4(x+1)(x-\alpha)(x-1)(-1<\alpha<1)$이고

$x<1$일 때, $g(x)=f(x)$이므로

$$\int 4(x+1)(x-\alpha)(x-1)dx=4\int(x^3-\alpha x^2-x+\alpha)dx$$
$$=x^4-\frac{4}{3}\alpha x^3-2x^2+4\alpha x+C$$

즉, $f(x)=x^4-\frac{4}{3}\alpha x^3-2x^2+4\alpha x+C$이고

$f(0)=h(g(1))=5$에서 $C=5$

$f(-1)=h(g(-1))=2$에서

$1+\frac{4}{3}\alpha-2-4\alpha+5=2,\ \alpha=\frac{3}{4}$

따라서 $f(x)=x^4-x^3-2x^2+3x+5(x<1)$이고

$g(5)=f(2-5)=f(-3)$이므로

$g(5)=(-3)^4-(-3)^3-2\times(-3)^2+3\times(-3)+5$
$=86$

231. 정답 ①

속도와 가속도

점 P의 속도와 가속도를 각각 v_1, a_1이라 하면

$v_1=x_1'=9t^2-10t-6$

$a_1=v_1'=18t-10$ …… ㉠

점 Q의 속도와 가속도를 각각 v_2, a_2라 하면

$v_2=x_2'=3t^2+2t+12$

$a_2=v_2'=6t+2$ …… ㉡

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 시각은

$v_1=v_2$에서

$9t^2-10t-6=3t^2+2t+12$

$6t^2-12t-18=0$

$t^2-2t-3=0$

$(t+1)(t-3)=0$에서

$t=3$

$t=3$을 ㉠에 대입하면 점 P의 가속도는

$18\times3-10=44$

이고 $t=3$을 ㉡에 대입하면 점 Q의 가속도는

$6\times3+2=20$

따라서 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점의 가속도의 차는

$44-20=24$

232. 정답 ③

삼각함수의 그래프

함수 $f(x)=a\sin b\pi x+2$의 주기는

$\frac{2\pi}{b\pi}=\frac{2}{b}$

함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값은 각각 $a+2$, $-a+2$이다.

함수 $f(x)$의 그래프가 x축과 만나야 하므로

$-a+2\le0$, 즉 $2\le a$

(i) $a=2$인 경우

닫힌구간 $\left[0,\ \frac{2}{b}\right]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수는 1이므로 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수는

$1\times\frac{4}{\frac{2}{b}}=2b$

이때 $2b=20$이므로

$b=10$

$a=2,\ b=10$이므로

$a+b=2+10=12$

(ii) $a>2$인 경우

닫힌구간 $\left[0,\ \frac{2}{b}\right]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수는 2이므로 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수는

$2\times\frac{4}{\frac{2}{b}}=4b$

이때 $4b=20$이므로

$b=5$

$a>2$이므로 $a+b$의 최솟값은 $a=3$일 때

$a+b=3+5=8$

(i), (ii)에서 $a+b$의 최솟값은 8이다.

233. 정답 ①

정적분

$\int_{-x}^{x}\left\{f(t)-\frac{1}{2}t^2\right\}dt=0$에서

정적분의 성질을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_{-x}^{x}f(t)dt-\int_{-x}^{x}\frac{1}{2}t^2dt=0$$

$$\int_{-x}^{x}f(t)dt=\int_{-x}^{x}\frac{1}{2}t^2dt$$

이때

$$\int_{-x}^{x}\frac{1}{2}t^2dt=\left[\frac{1}{6}t^3\right]_{-x}^{x}$$
$$=\frac{1}{3}x^3$$

이므로

$$\int_{-x}^{x} f(t)dt = \frac{1}{3}x^3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$3\int_{-1}^{3} f(t)dt = 2\int_{-1}^{-3} f(t)dt + \frac{4}{3}$$ 에서

$$3\int_{-1}^{3} f(t)dt - 2\int_{-1}^{-3} f(t)dt = \frac{4}{3}$$

$$3\int_{-1}^{3} f(t)dt + 2\int_{-3}^{-1} f(t)dt = \frac{4}{3}$$

$$2\left\{\int_{-3}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{3} f(t)dt\right\} + \int_{-1}^{3} f(t)dt = \frac{4}{3}$$

$$2\int_{-3}^{3} f(t)dt + \int_{-1}^{3} f(t)dt = \frac{4}{3}$$

$$2\int_{-3}^{3} f(t)dt + \int_{-1}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{3} f(t)dt = \frac{4}{3} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서 $x=3$일 때, $\int_{-3}^{3} f(t)dt = \frac{1}{3}\times 3^3 = 9$이고

$x=1$일 때, $\int_{-1}^{1} f(t)dt = \frac{1}{3}\times 1^3 = \frac{1}{3}$이므로

이를 ㉡에 대입하면 $2\times 9 + \frac{1}{3} + \int_{1}^{3} f(t)dt = \frac{4}{3}$

따라서 $\int_{1}^{3} f(t)dt = -17$

234. 정답 ①

수열의 귀납적 정의

a_n을 이용하여 a_{n+2}를 나타내면 다음과 같다.

$a_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a_n+1\right)+1$ 또는 $a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_n+1)+1$ 또는

$a_{n+2} = \left(\frac{1}{2}a_n+1\right)+1$ 또는 $a_{n+2} = (a_n+1)+1$

(i) $a_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a_n+1\right)+1$인 경우

$a_n = a_{n+2}$이 성립하면 $a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a_n+1\right)+1$에서

$a_n = 2$

(ii) $a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_n+1)+1$인 경우

$a_n = a_{n+2}$이 성립하면 $a_n = \frac{1}{2}(a_n+1)+1$에서

$a_n = 3$

(iii) $a_{n+2} = \left(\frac{1}{2}a_n+1\right)+1$인 경우

$a_n = a_{n+2}$이 성립하면 $a_n = \left(\frac{1}{2}a_n+1\right)+1$에서

$a_n = 4$

(iv) $a_{n+2} = (a_n+1)+1$인 경우

$a_n = a_{n+2}$이 성립하면 $a_n = (a_n+1)+1$에서 $0=2$이므로 성립하지 않는다.

그런데 $a_6 = 2$이면 $a_5 = 2$ 또는 $a_5 = 1$이다. 이때 $a_5 = 2$이면 $a_5 = a_7 = 2$가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않고, $a_5 = 1$이면 a_4가 자연수가 아니므로 모든 항이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다. 또, $a_6 = 3$이면 $a_5 = 4$이므로 $a_5 = a_7 = 4$가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

즉, 조건 (나)에서 $a_6 = 4$

$a_6 = 4$이면 $a_5 = 3$ 또는 $a_5 = 6$이다. 이때 $a_5 = 3$이면 $a_5 = a_7$이 되어 조건 (나)를 만족시키지 않으므로 $a_5 = 6$이다.

$a_5 = 6$이면 $a_4 = 10$ 또는 $a_4 = 5$

그런데 조건 (나)에서 a_4는 짝수이므로 $a_4 = 10$

$a_4 = 10$이므로 $a_{3=18}$ 또는 $a_3 = 9$

$a_{3=18}$이면 a_2, a_1은 다음과 같다.

a_3	a_2	a_1
18	34	66
		33
	17	32

$a_3 = 9$이면 a_2, a_1은 다음과 같다.

a_3	a_2	a_1
9	16	30
		15

따라서 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 값의 최댓값과 최솟값은 각각 66, 15이므로 그 합은

$66+15=81$

235. 정답 ②

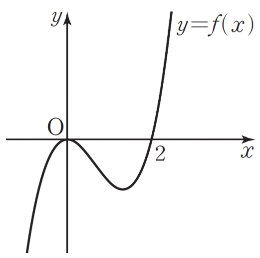
정적분의 활용(넓이)

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$는

조건 (가)에서 $f(0)=f(2)=0$이므로

$f(x) = x^2(x-2)$ 또는 $f(x) = x(x-2)^2$

(i) $f(x) = x^2(x-2)$인 경우



$x<2$이면 $f(x) \le 0$이므로

$$\int_{x}^{2} f(t)dt \le 0$$

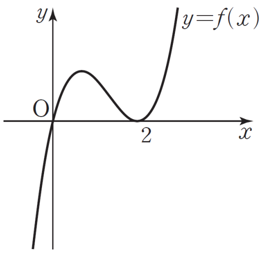
$$\int_{2}^{x} f(t)dt = -\int_{x}^{2} f(t)dt \ge 0$$

$x \ge 2$이면 $f(x) \ge 0$이므로

$$\int_{2}^{x} f(t)dt \ge 0$$

함수 $f(x)$는 조건 (나)를 만족시킨다.

(ii) $f(x)=x(x-2)^2$인 경우



$0<x<2$이면 $f(x)>0$이므로

$$\int_{x}^{2} f(t)dt > 0$$

$$\int_{2}^{x} f(t)dt = -\int_{x}^{2} f(t)dt < 0$$

함수 $f(x)$는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$는

$f(x)=x^2(x-2)$

$$S=\int_{0}^{2} |f(x)|dx = \int_{0}^{2} \{-f(x)\}dx$$

$S=\int_{2}^{a} f(x)dx$에 위 식을 대입하면

$$-\int_{0}^{2} f(x)dx = \int_{2}^{a} f(x)dx$$

$$\int_{0}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{a} f(x)dx = 0$$

즉, $\int_{0}^{a} f(x)dx = 0$ …… ㉠

$$\begin{aligned}\int_{0}^{a} f(x)dx &= \int_{0}^{a} (x^3-2x^2)dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^a \\ &= \left(\frac{1}{4}a^4 - \frac{2}{3}a^3\right) - 0 \\ &= \frac{1}{4}a^4 - \frac{2}{3}a^3\end{aligned}$$

㉠에 위 식을 대입하면

$\frac{1}{4}a^4 - \frac{2}{3}a^3 = 0$

$3a^4 - 8a^3 = 0$

$a^3(3a-8)=0$

$a>0$이므로 $a=\frac{8}{3}$

236. 정답 ③

지수함수와 로그함수

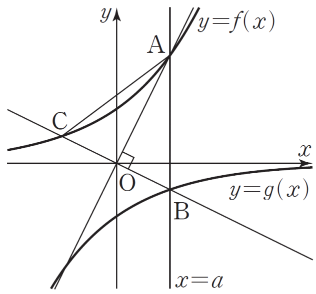
직선 $x=a$와 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 점이 각각 A, B이므로 두 점 A, B의 좌표는 다음과 같다.

$\mathrm{A}(a,\ 2^a)$, $\mathrm{B}(a,\ -2^{-a})$

직선 OA에 수직인 직선 OB가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점이 C이므로 두 점 B, C는 원점에 대하여 대칭이고 점 C의 좌표는

$\mathrm{C}(-a,\ 2^{-a})$

즉, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 삼각형 ABC는 다음 그림과 같다.



이때 두 삼각형 ABO와 ACO가 합동이므로 삼각형 ABC는 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$인 이등변삼각형이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=2^a-(-2^{-a})=2^a+2^{-a}$

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(2a)^2+(2^a-2^{-a})^2}$

이므로

$2^a+2^{-a}=\sqrt{(2a)^2+(2^a-2^{-a})^2}$

의 양변을 각각 제곱하면

$(2^a+2^{-a})^2=4a^2+(2^a-2^{-a})^2$

$2=4a^2-2$

$a^2=1$

$a>0$이므로 $a=1$

세 점 A, B, C의 좌표는

$\mathrm{A}(1,\ 2)$, $\mathrm{B}\left(1,\ -\frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{C}\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$

곡선 $y=\log_2(x+p)$는 점 $(1,\ 0)$을 지나는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-p$만큼 평행이동한 것이다.

곡선 $y=\log_2(x+p)$가 점 A를 지날 때

$2=\log_2(1+p)$, $1+p=2^2$, $p=3$

점 C를 지날 때

$\frac{1}{2}=\log_2(-1+p)$, $-1+p=\sqrt{2}$, $p=1+\sqrt{2}$

따라서 곡선 $y=\log_2(x+p)$와 삼각형 ABC가 만나도록 하는 p의 값의 범위는 $p \le 3$이므로 자연수 p의 값은 1, 2, 3이고 그 합은

$1+2+3=6$

다른 풀이

다음과 같은 방법으로 a의 값을 구할 수 있다.

직선 OA의 기울기는 $\frac{2^a}{a}$, 직선 OB의 기울기는 $\frac{-2^{-a}}{a}$이다.

두 직선 OA, OB가 수직이므로

$\frac{2^a}{a} \times \frac{-2^{-a}}{a} = -1,\ a^2 = 1$

$a > 0$이므로 $a = 1$

237. 정답 ⑤

구간으로 주어진 함수의 미분가능성

$f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 27x$

$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 12x + 27$

$f'(x) = 3$에서

$12x^3 - 24x^2 - 12x + 27 = 3$

$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

$(x+1)(x-1)(x-2) = 0$

$p = -1$ 또는 $p = 1$ 또는 $p = 2$

함수 $y = f(x-a) + b$의 그래프는 함수 $y = f(x)$의 그래프를 x축으로 a만큼, y축으로 b만큼 평행이동한 것이므로 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $p-a$도 방정식 $f'(x) = 3$의 근이다.

$a < 0$이므로 $p - a > p$이다.

즉, $p - a > p,\ f'(p) = f'(p-a) = 3$ …… ㉠

또, 함수 $g(x)$가 $x = p$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to p} g(x) = \lim_{x\to p+} g(x) = g(p)$

$\lim_{x\to p} g(x) = \lim_{x\to p} f(x) = f(p)$

$\lim_{x\to p+} g(x) = \lim_{x\to p+} \{f(x-a) + b\} = f(p-a) + b$

$g(p) = f(p)$

즉, $f(p) = f(p-a) + b$ …… ㉡

$f(-1) = -22,\ f(1) = 16,\ f(2) = 14$ …… ㉢

(ⅰ) $p = -1$인 경우

㉠에서 $p - a = 1$ 또는 $p - a = 2$

즉, $a = -2$ 또는 $a = -3$

$a = -2$이면 ㉡, ㉢에서

$f(-1) = f(1) + b$

$-22 = 16 + b$

$b = -38$이므로

$a - b = (-2) - (-38) = 36$

$a = -3$이면 ㉡, ㉢에서

$f(-1) = f(2) + b$

$-22 = 14 + b$

$b = -36$이므로

$a - b = (-3) - (-36) = 33$

(ⅱ) $p = 1$인 경우

㉠에서 $p - a = 2$

즉, $a = -1$

$a = -1$이면 ㉡, ㉢에서

$f(1) = f(2) + b$

$16 = 14 + b$

$b = 2$이므로

$a - b = (-1) - 2 = -3$

(ⅲ) $p = 2$이면

$p - a = 1$ 또는 $p - a = -1$에서 $a = 1$ 또는 $a = 3$이므로 ㉠을 만족시키는 음수 a가 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 조건을 만족시키는 $a - b$의 값은 $36,\ 33,\ -3$이다.

따라서 최댓값은 36, 최솟값은 -3이므로 그 합은

$36 + (-3) = 33$

238. 정답 28

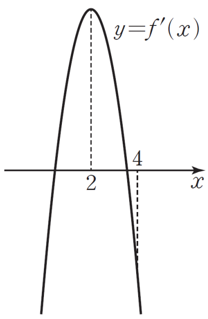
극대, 극소

$f(x) = -x^3 + 6x^2 + kx$에서

$f'(x) = -3x^2 + 12x + k$

$= -3(x-2)^2 + k + 12$

함수 $f(x)$가 열린구간 $(2,\ 4)$에서 극댓값을 가지려면 함수 $y = f'(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같아야 한다.



즉, $f'(4) = k < 0,\ f'(2) = k + 12 > 0$이어야 하므로

$-12 < k < 0$ …… ㉠

k는 정수이므로 $k = -11,\ -10,\ -9,\ \cdots,\ -1$

이때 함수 $f(x)$가 $x = \alpha$에서 극소이고, $x = \beta$에서 극대라 하면

$0 < \alpha < 2 < \beta < 4$

이고 $\alpha,\ \beta$는 $f'(x) = 0$, 즉 $-3x^2 + 12x + k = 0$의 서로 다른 두 실근이므로

$\alpha + \beta = 4,\ \alpha\beta = -\frac{k}{3}$

함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합은

$f(\alpha) + f(\beta) = -\alpha^3 + 6\alpha^2 + k\alpha - \beta^3 + 6\beta^2 + k\beta$

$= -(\alpha^3 + \beta^3) + 6(\alpha^2 + \beta^2) + k(\alpha + \beta)$

$= -(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) + 6(\alpha^2 + \beta^2) + k(\alpha + \beta)$

$= 4k + 32$

$4k + 32$가 최대가 되기 위해서는 k의 값이 최대이어야 한다. ㉠에서 정수 k의 최댓값은 -1이므로 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합의 최댓값은 28이다.

239. 정답 138

수열의 합, 등차수열

조건 (가)에서 수열 $\{a_n\}$은 공차가 자연수인 등차수열이므로

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d(d는 자연수)라 하자.

$a_m=a_1+(m-1)d$

$a_m-a_1=(m-1)d$

조건 (나)에서 $a_m-a_1=20$이므로

$(m-1)d=20$ …… ㉠

인 두 자연수 m, d가 존재한다.

순서쌍 $(m-1,\ d)$를 구하면

$(1,\ 20)$, $(2,\ 10)$, $(4,\ 5)$, $(5,\ 4)$, $(10,\ 2)$, $(20,\ 1)$이므로

자연수 m으로 가능한 값은

$2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 11,\ 21$ …… ㉡

$\sum_{n=1}^{m}a_n=\dfrac{m\{2a_1+(m-1)d\}}{2}$

$=\dfrac{m(2a_1+20)}{2}$ (㉠에 의하여)

$=m(a_1+10)$

조건 (나)에서 $\sum_{n=1}^{m}a_n=108$이므로

$m(a_1+10)=108$ …… ㉢

이때 a_1+10이 자연수이므로 m은 108의 약수이어야 한다. ㉡ 중에서 가능한 m의 값은 $2,\ 3,\ 6$이다.

(ⅰ) $m=2$인 경우

㉠에서 $d=20$이고 ㉢에서 $a_1+10=54$, $a_1=44$이므로

$a_m=a_2=a_1+d$

$=44+20=64$

(ⅱ) $m=3$인 경우

㉠에서 $d=10$이고 ㉢에서 $a_1+10=36$, $a_1=26$이므로

$a_m=a_3=a_1+2d$

$=26+20=46$

(ⅲ) $m=6$인 경우

㉠에서 $d=4$이고 ㉢에서 $a_1+10=18$, $a_1=8$이므로

$a_m=a_6=a_1+5d$

$=8+20=28$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_m의 값의 합은

$64+46+28=138$

240. 정답 3

함수의 극대, 극소

집합 A에서 $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)+1}{x-\alpha}$의 값이 존재하면 $x\to\alpha$일 때 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x\to\alpha}\{f(x)+1\}=0$

함수 $f(x)$는 다항함수이므로

$f(\alpha)+1=0$

즉, 집합 A의 원소는 사차방정식 $f(x)+1=0$의 근이다.

한편, $f(\beta)+1\neq 0$이면 $\lim_{x\to\beta}\dfrac{x-\beta}{f(x)+1}$의 값은 항상 0이므로 존재한다.

$f(\beta)+1=0$이면

β가 방정식 $f(x)+1=0$의 근이므로 다항식 $f(x)+1$은 $x-\beta$를 인수로 갖는다.

$f(x)+1=(x-\beta)g(x)$ ($g(x)$는 다항식)이라 하면

$\lim_{x\to\beta}\dfrac{x-\beta}{f(x)+1}=\lim_{x\to\beta}\dfrac{x-\beta}{(x-\beta)g(x)}$

$=\lim_{x\to\beta}\dfrac{1}{g(x)}$

이고 $g(x)$도 다항함수이므로

$\lim_{x\to\beta}g(x)\neq 0$이어야 $\lim_{x\to\beta}\dfrac{1}{g(x)}$의 값이 존재한다.

즉, $f(\beta)+1=0$일 때 $\lim_{x\to\beta}\dfrac{x-\beta}{f(x)+1}$의 값이 존재하려면 다항식 $f(x)+1$은 $x-\beta$를 인수로 갖고 $(x-\beta)^2$은 인수로 갖지 않는다.

따라서 집합 B의 원소는 $f(x)+1\neq 0$인 경우와 $x-\beta$가 다항식 $f(x)+1$의 인수이고 $(x-\beta)^2$은 다항식 $f(x)+1$의 인수가 아닌 경우이다.

$(A\cap B)\subset A$이므로 $A\cap B=\{-2,\ 2\}$에서 $-2\in A$, $2\in A$이고 집합 A의 원소는 사차방정식 $f(x)+1=0$의 근이므로 집합 A의 원소의 개수는 2 이상 4 이하이다.

(ⅰ) 집합 A의 원소의 개수가 4인 경우

$A\cap B$의 원소의 개수도 4이므로 $A\cap B=\{-2,\ 2\}$라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) 집합 A의 원소의 개수가 3인 경우

$-2\in A$, $2\in A$이고 집합 A의 모든 원소의 합이 0이므로

$A=\{-2,\ 0,\ 2\}$이다.

(ⅲ) 집합 A의 원소의 개수가 2인 경우

$A=\{-2,\ 2\}$이므로 다항식 $f(x)+1$이 $(x+2)^2$또는 $(x-2)^2$을 인수로 가져야 하므로 집합 $A\cap B=\{-2,\ 2\}$라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여

$f(x)+1=-x^2(x+2)(x-2)$

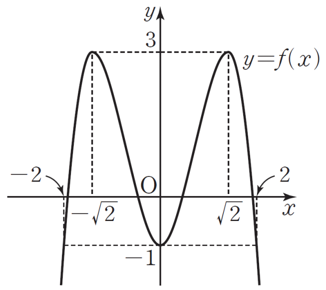
$f(x)=-x^4+4x^2-1$

$f'(x)=-4x^3+8x=-4x(x^2-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$이므로

함수 $f(x)$의 증감표와 그래프는 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	3	↘	1	↗	3	↘



따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$에서 극대이고, 극댓값은 3이다.

241. 정답 ③

정적분

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 이차함수 $f(x)$가 $f(x)\geq 0$을 만족시키므로

$$\int_0^1 f(t)dt=a\ \ (a>0)$$

이라 하면

$$f(x)=\frac{1}{a}x^2+\frac{8}{a}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)dt&=\int_0^1\left(\frac{1}{a}t^2+\frac{8}{a}\right)dt\\&=\left[\frac{1}{3a}t^3+\frac{8}{a}t\right]_0^1\\&=\frac{1}{3a}+\frac{8}{a}\\&=\frac{25}{3a}=a\end{aligned}$$

$3a^2=25$에서 $a^2=\frac{25}{3}$이므로

$$a=\frac{5}{\sqrt{3}}$$

즉, $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{5}x^2+\frac{8\sqrt{3}}{5}$이므로

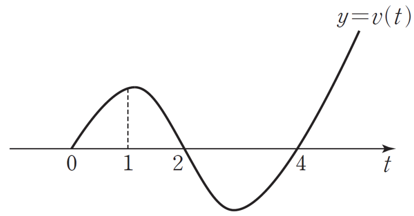
$$f(\sqrt{2})=\frac{2\sqrt{3}}{5}+\frac{8\sqrt{3}}{5}=2\sqrt{3}$$

242. 정답 ④

속도와 거리

점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$$\begin{aligned}v(t)&=\frac{dx}{dt}\\&=4t^3-24t^2+32t\\&=4t(t^2-6t+8)\\&=4t(t-2)(t-4)\end{aligned}$$

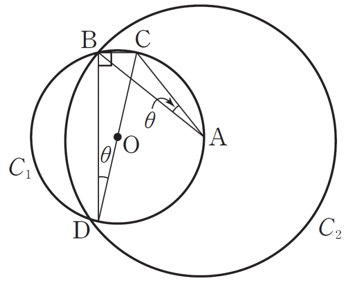


따라서 점 P가 $t=1$일 때의 운동 방향과 반대 방향으로 움직인 거리는 $t=2$에서 $t=4$까지 움직인 거리와 같으므로

$$\begin{aligned}\int_2^4|v(t)|dt&=\int_2^4|4t^3-24t^2+32t|dt\\&=\int_2^4(-4t^3+24t^2-32t)dt\\&=\left[-t^4+8t^3-16t^2\right]_2^4\\&=(-256+512-256)-(-16+64-64)\\&=16\end{aligned}$$

243. 정답 ⑤

삼각함수의 활용



원 C_1의 중심을 O라 하고 직선 CO와 원 C_1이 만나는 점 중 C가 아닌 점을 D라 하면

$\angle\mathrm{CBD}=90^\circ$, $\overline{\mathrm{CD}}=10$

또한 $\angle\mathrm{BAC}=\theta$라 하면 $\angle\mathrm{CDB}=\theta$이므로

$$\sin\theta=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{CD}}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$$

즉, 삼각형 ABC에서

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

이고 삼각형 ABC의 넓이가 4이므로

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\frac{\sqrt{2}}{10}=4$$

$$\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}=40\sqrt{2}\quad\cdots\cdots\ ㉠$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\cos\theta$$

$$2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2\times40\sqrt{2}\times\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=114\quad\cdots\cdots\ ㉡$$

㉠에서 $\overline{\mathrm{AC}}=\dfrac{40\sqrt{2}}{\overline{\mathrm{AB}}}$이므로 ㉡에 대입하여 정리하면

$\overline{\mathrm{AB}}^4-114\overline{\mathrm{AB}}^2+3200=0$

$(\overline{\mathrm{AB}}-8)(\overline{\mathrm{AB}}+8)(\overline{\mathrm{AB}}-5\sqrt{2})(\overline{\mathrm{AB}}+5\sqrt{2})=0$

이때 $\overline{\mathrm{AB}}=r$이고 r은 5보다 큰 자연수이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=8$

다른 풀이

삼각형 ABC에서 $\angle\mathrm{BAC}=\theta$라 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\theta}=2\times5,\ \dfrac{\sqrt{2}}{\sin\theta}=10$

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$

244. 정답 ①

함수의 극한

조건 (가)에서

$x=-1$을 대입하면

$0=-3f(0),\ f(0)=0$

$x=2$를 대입하면

$3f(2)=0,\ f(2)=0$

$x=0$을 대입하면

$f(0)=-2f(1),\ 0=-2f(1),\ f(1)=0$

따라서 $f(x)$는 $x,\ x-1,\ x-2$를 인수로 가지므로

$f(x)=kx(x-1)(x-2)g(x)$

(k는 0이 아닌 상수, $g(x)$는 다항식 또는 상수) …… ㉠

조건 (가)에 ㉠을 대입하면

$(x+1)\times kx(x-1)(x-2)g(x)$

$=(x-2)\times k(x+1)x(x-1)g(x+1)$

이 식은 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로

$g(x)=g(x+1)$

즉, $g(x)$는 상수이다.

따라서 $f(x)=kx(x-1)(x-2)$로 놓으면

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}$의 값이 존재하지 않으므로

$a=0$ 또는 $a=1$ 또는 $a=2$

(i) $a=0$일 때

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{f(x+a)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{f(x)}=1$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=1$일 때

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{f(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{kx(x-1)(x-2)}{k(x+1)x(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x+1}=-\frac{1}{2}$$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $a=2$일 때

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{f(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{kx(x-1)(x-2)}{k(x+2)(x+1)x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{(x+2)(x+1)}=0$$

따라서 $a=2$이고

$$\lim_{x\to f(3)}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 6k}\frac{kx(x-1)(x-2)}{x}=\lim_{x\to 6k}k(x-1)(x-2)=k(6k-1)(6k-2)=36k^3-18k^2+2k$$

즉, $36k^3-18k^2+2k=220,\ 18k^3-9k^2+k-110=0$

이므로

$(k-2)(18k^2+27k+55)=0$

즉, $k=2$이므로

$f(x)=2x(x-1)(x-2)$

따라서

$f(a^2)=f(4)=2\times4\times3\times2=48$

245. 정답 ③

넓이

$f(x)=x^3-3x+18=(x+3)(x^2-3x+6)$이므로

$a=-3$

또한

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

이므로 $b=-1$

이때 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(p,\ p^3-3p+18)$에서의 접선의 방정식은

$y-(p^3-3p+18)=(3p^2-3)(x-p)$

이 접선이 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$, 즉 $\mathrm{P}(t,\ t^3-3t+18)$을 지나므로

$(t^3-3t+18)-(p^3-3p+18)=(3p^2-3)(t-p)$

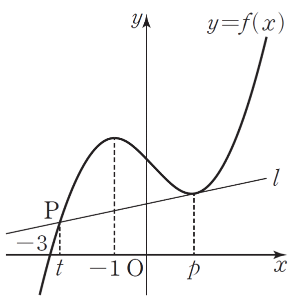
$(t-p)(t^2+pt+p^2-3)=(3p^2-3)(t-p)$

그런데 $t\neq p$이므로

$t^2+pt+p^2-3=3p^2-3,\ 2p^2-tp-t^2=0$

$(p-t)(2p+t)=0$

$p=-\dfrac{t}{2}$



따라서 직선 l의 방정식은

$y-\left(-\frac{t^3}{8}+\frac{3}{2}t+18\right)=\left(\frac{3}{4}t^2-3\right)\left(x+\frac{t}{2}\right)$

즉, $y=\left(\frac{3}{4}t^2-3\right)x+\frac{t^3}{4}+18$이므로

$S(t)=\int_t^{-\frac{t}{2}}\left\{(x^3-3x+18)-\left(\frac{3}{4}t^2-3\right)x-\frac{t^3}{4}-18\right\}dx$

$=\int_t^{-\frac{t}{2}}\left(x^3-\frac{3}{4}t^2x-\frac{t^3}{4}\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{8}t^2x^2-\frac{t^3}{4}x\right]_t^{-\frac{t}{2}}$

$=\frac{1}{4}\left(-\frac{t}{2}\right)^4-\frac{3}{8}t^2\left(-\frac{t}{2}\right)^2-\frac{t^3}{4}\left(-\frac{t}{2}\right)-\frac{1}{4}t^4+\frac{3}{8}t^4+\frac{t^4}{4}$

$=\frac{27}{64}t^4$

따라서 $\lim_{t\to b-}S(t)=\lim_{t\to -1-}\frac{27}{64}t^4=\frac{27}{64}$

246. 정답 ⑤

여러 가지 수열의 합

첫째항이 29, 공차가 -1인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=29-(n-1)=-n+30$

조건 (가)에 의하여

$b_1=b_{14},\ b_2=b_{13},\ b_3=b_{12},\ \cdots,\ b_7=b_8$

또한 조건 (나)에 의하여

$b_1=b_{15},\ b_2=b_{16},\ b_3=b_{17},\ \cdots,\ b_7=b_{21}$

$b_{14}=b_{28},\ b_{13}=b_{27},\ b_{12}=b_{26},\ \cdots,\ b_8=b_{22}$

따라서

$\sum_{k=1}^{28}a_kb_{29-k}=a_1b_{28}+a_2b_{27}+a_3b_{26}+\cdots+a_{28}b_1$

$=a_{28}b_1+a_{27}b_2+a_{26}b_3+\cdots+a_1b_{28}$

이므로

$2\sum_{k=1}^{28}a_kb_{29-k}=(a_1b_{28}+a_{28}b_1)+(a_2b_{27}+a_{27}b_2)$

$+(a_3b_{26}+a_{26}b_3)+\cdots+(a_{28}b_1+a_1b_{28})$

$=(a_1b_1+a_{28}b_1)+(a_2b_2+a_{27}b_2)$

$+(a_3b_3+a_{26}b_3)+\cdots+(a_{28}b_{28}+a_1b_{28})$

$=(a_1+a_{28})b_1+(a_2+a_{27})b_2+(a_3+a_{26})b_3$

$+\cdots+(a_{28}+a_1)b_{28}$

따라서

$\sum_{k=1}^{28}a_kb_{29-k}=\frac{a_1+a_{28}}{2}b_1+\frac{a_2+a_{27}}{2}b_2+\frac{a_3+a_{26}}{2}b_3$

$+\ \cdots\ +\frac{a_{28}+a_1}{2}b_{28}$

$=\frac{31}{2}b_1+\frac{31}{2}b_2+\frac{31}{2}b_3+\cdots+\frac{31}{2}b_{28}$

$=\frac{31}{2}(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{28})$

$=\frac{31}{2}\times 4\sum_{k=1}^{7}b_k$

$=\frac{31}{2}\times 4\times 10$

$=620$

247. 정답 ①

도함수의 활용

방정식 $g(x)-x=0$, 즉 $g(x)=x$는 서로 다른 세 실근 $-1,\ -\frac{1}{2},$

$\frac{1}{2}$만을 가지므로

$g(-1)=-a+|f(-1)|=-1$

$|f(-1)|=a-1\ge 0$

따라서 $a\ge 1$

또한 모든 실수 x에서 $f(x)\ge 0$이면

$g(x)=ax^3+|f(x)|=ax^3+f(x)$

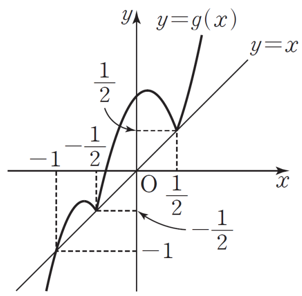
이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근

$\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$를 갖는다고 하면

$g(x)=\begin{cases}ax^3-f(x) & (\alpha<x<\beta)\\ ax^3+f(x) & (x\le\alpha \text{ 또는 } x\ge\beta)\end{cases}$

이므로 두 조건 (가), (나)를 만족시키기 위해서는 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같아야 한다.



따라서 $\alpha=-\frac{1}{2},\ \beta=\frac{1}{2}$이므로

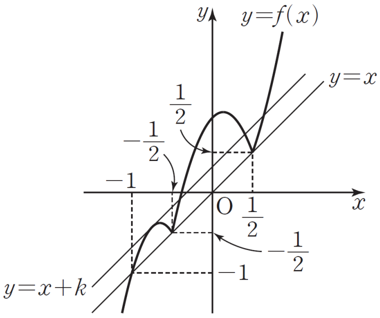
$f(x)=4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=4x^2-1$

$g(x)=ax^3+|4x^2-1|$에서

$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}a=\frac{1}{2}$이므로 $a=4$

따라서 $g(x)=\begin{cases}4x^3-4x^2+1 & \left(-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right)\\ 4x^3+4x^2-1 & \left(x\le-\frac{1}{2} \text{ 또는 } x\ge\frac{1}{2}\right)\end{cases}$

이때 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 네 개의 교점을 가지려면 그림과 같이 $x\le-\frac{1}{2}$에서 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접해야 한다.



따라서 접점의 x좌표를 α $\left(\alpha \le -\frac{1}{2}\right)$라 하면

$g(x)=4x^3+4x^2-1$, $g'(x)=12x^2+8x$에서

$4\alpha^3+4\alpha^2-1=\alpha+k$ …… ㉠

$12\alpha^2+8\alpha=1$ …… ㉡

㉡에서 $12\alpha^2+8\alpha-1=0$이므로

$$\alpha=\frac{-2-\sqrt{7}}{6}$$

㉠에서

$$\begin{aligned}k&=4\alpha^3+4\alpha^2-\alpha-1\\&=(12\alpha^2+8\alpha-1)\left(\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{9}\right)-\frac{14}{9}\alpha-\frac{8}{9}\\&=-\frac{14}{9}\times\frac{-2-\sqrt{7}}{6}-\frac{8}{9}\\&=\frac{-10+7\sqrt{7}}{27}\end{aligned}$$

248. 정답 28

지수함수의 그래프

직선 $y=-x+n$과 곡선 $y=2^x$이 만나는 점의 x좌표가 m이므로

$-m+n=2^m$

즉, $n=2^m+m$

따라서 $\frac{n}{32}<m<\frac{n}{2}$에서

$$\frac{2^m+m}{32}<m<\frac{2^m+m}{2}$$

$\frac{2^m+m}{32}<m$에서 $2^m<31m$ …… ㉠

$m<\frac{2^m+m}{2}$에서 $m<2^m$ …… ㉡

이때 모든 자연수 m에 대하여 ㉡은 항상 성립하고 ㉠에서

$m=7$일 때 $2^7<31\times7$, 즉 $128<217$

$m=8$일 때 $2^8>31\times8$, 즉 $256>248$

이므로 모든 자연수 m의 값의 합은

$1+2+3+4+5+6+7=28$

249. 정답 18

삼각함수의 그래프

함수 $f(x)=\cos ax$ $(a>0)$의 주기는 $\frac{2\pi}{a}$이고

닫힌구간 $\left[0,\ \frac{2\pi}{a}\right]$에서의 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{a}$에서 최솟값을 갖는다.

따라서 $g(a)=8$이므로 닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 함수 $f(x)$는

$x=\frac{\pi}{a}$, $x=\frac{\pi}{a}+\frac{2\pi}{a}$, $x=\frac{\pi}{a}+\frac{4\pi}{a}$, $x=\frac{\pi}{a}+\frac{6\pi}{a}$,

$x=\frac{\pi}{a}+\frac{8\pi}{a}$, $x=\frac{\pi}{a}+\frac{10\pi}{a}$, $x=\frac{\pi}{a}+\frac{12\pi}{a}$, $x=\frac{\pi}{a}+\frac{14\pi}{a}$

에서 최솟값을 가져야 한다.

따라서

$\frac{\pi}{a}+\frac{14\pi}{a}\le 2\pi$ …… ㉠

$\frac{\pi}{a}+\frac{16\pi}{a}>2\pi$ …… ㉡

를 만족시켜야 하므로

㉠에서 $\frac{15}{a}\le 2$, $\frac{15}{2}\le a$

㉡에서 $\frac{17}{a}>2$, $a<\frac{17}{2}$

이므로 $\frac{15}{2}\le a<\frac{17}{2}$

즉, $\alpha=\frac{15}{2}$, $\beta=\frac{17}{2}$이므로

$3\beta-\alpha=3\times\frac{17}{2}-\frac{15}{2}=18$

250. 정답 10

수열의 귀납적 정의

a_1이 정수이면 조건 (나)에 의하여

$a_2=(1-1)a_1=0$

$a_3=\left(1-\frac{1}{2}\right)a_2=\frac{1}{2}\times0=0$ …

$a_6=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 a_1은 정수가 아니다.

(1) a_5가 정수인 경우

$a_6=\left(1-\frac{1}{5}\right)a_5=\frac{4}{5}a_5=1$,

즉, $a_5=\frac{5}{4}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(2) a_5가 정수가 아닌 경우

$a_6=\left(1+\frac{1}{5}\right)a_5=\frac{6}{5}a_5=1$

$a_5=\frac{5}{6}$

① a_4가 정수인 경우

$a_5=\left(1-\frac{1}{4}\right)a_4=\frac{3}{4}a_4=\frac{5}{6}$

즉, $a_4=\frac{10}{9}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

② a_4가 정수가 아닌 경우

$a_5=\left(1+\frac{1}{4}\right)a_4=\frac{5}{4}a_4=\frac{5}{6}$

$a_4=\frac{2}{3}$

㉠ a_3이 정수인 경우

$a_4=\left(1-\frac{1}{3}\right)a_3=\frac{2}{3}a_3=\frac{2}{3}$

$a_3=1$

(i) a_2가 정수인 경우

$a_3=\left(1-\frac{1}{2}\right)a_2=\frac{1}{2}a_2=1$

$a_2=2$

a_1은 정수가 아니므로

$a_2=(1+1)a_1=2a_1=2$

즉, $a_1=1$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) a_2가 정수가 아닌 경우

$a_3=\left(1+\frac{1}{2}\right)a_2=\frac{3}{2}a_2=1$

$a_2=\frac{2}{3}$

a_1은 정수가 아니므로

$a_2=(1+1)a_1=2a_1=\frac{2}{3}$

$a_1=\frac{1}{3}$

㉡ a_3이 정수가 아닌 경우

$a_4=\left(1+\frac{1}{3}\right)a_3=\frac{4}{3}a_3=\frac{2}{3}$

$a_3=\frac{1}{2}$

(i) a_2가 정수인 경우

$a_3=\left(1-\frac{1}{2}\right)a_2=\frac{1}{2}a_2=\frac{1}{2}$

$a_2=1$

a_1은 정수가 아니므로

$a_2=(1+1)a_1=2a_1=1$

$a_1=\frac{1}{2}$

(ii) a_2가 정수가 아닌 경우

$a_3=\left(1+\frac{1}{2}\right)a_2=\frac{3}{2}a_2=\frac{1}{2}$

$a_2=\frac{1}{3}$

a_1은 정수가 아니므로

$a_2=(1+1)a_1=2a_1=\frac{1}{3}$

$a_1=\frac{1}{6}$

즉, a_1의 값은 $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$이므로 $k=\frac{1}{6}$

따라서 $60k=60\times\frac{1}{6}=10$

251. 정답 ⑤

적분과 미분의 관계

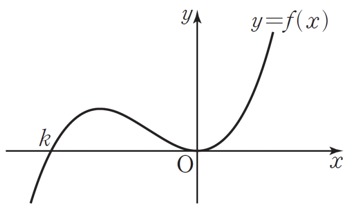
조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$가 $x=0$에서 x축과 접하므로

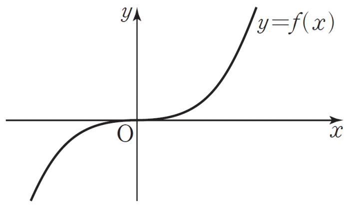
$f(0)=0$이고 $f'(0)=0$이다.

따라서 삼차식 $f(x)$는 x^2을 인수로 갖는다. 즉,

$f(x)=mx^2(x-k)\ \ (m>0)$

(i) $k\le 0$인 경우





$\int_0^1 f(x)dx<\int_0^3 f(x)dx$이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(ii) $k>0$인 경우

조건 (나)에서

$\int_0^3 f(x)dx-\int_0^1 f(x)dx=0$

$\int_1^3 f(x)dx=0$

따라서

$$\begin{aligned}\int_1^3 f(x)dx&=\int_1^3 mx^2(x-k)dx\\&=\left[\frac{m}{4}x^4-\frac{mk}{3}x^3\right]_1^3\\&=\left(\frac{81m}{4}-9mk\right)-\left(\frac{m}{4}-\frac{mk}{3}\right)\\&=20m-\frac{26mk}{3}\\&=2m\left(10-\frac{13k}{3}\right)=0\end{aligned}$$

이므로 $k=\dfrac{30}{13}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $f(x)=mx^2\left(x-\dfrac{30}{13}\right)$이다.

따라서 $x<\dfrac{30}{13}$에서 $\dfrac{d}{dx}\left\{\displaystyle\int_3^x f(t)dt\right\}=f(x)\le 0$이고,

$x\ge\dfrac{30}{13}$에서 $\dfrac{d}{dx}\left\{\displaystyle\int_3^x f(t)dt\right\}=f(x)\ge 0$이므로

함수 $\displaystyle\int_3^x f(t)dt$는 $x=\dfrac{30}{13}$에서 극소이자 최소이다.

252. 정답 ②

수열의 귀납적 정의

(ⅰ) $0\le a_m\le 1$인 경우

$a_{m+1}=ka_m=a_m$에서

$a_m=0$

(ⅱ) $1<a_m\le 3$인 경우

$a_{m+1}=-\dfrac{k}{2}a_m+\dfrac{3}{2}k=a_m$에서

$-ka_m+3k=2a_m$

$a_m=\dfrac{3k}{k+2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a_3=0$ 또는 $a_3=\dfrac{3k}{k+2}$

마찬가지 방식으로, a_3부터 a_1까지를 표로 나타내면 다음과 같다.

<table>
<tr><td>a_3</td><td colspan="4">0</td><td colspan="4">$\dfrac{3k}{k+2}$</td></tr>
<tr><td>a_2</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">$\dfrac{3}{k+2}$</td><td colspan="2">$\dfrac{3k}{k+2}$</td></tr>
<tr><td>a_1</td><td></td><td></td><td>3</td><td>0</td><td>$\dfrac{3}{k(k+2)}$</td><td>$3-\dfrac{6}{k(k+2)}$</td><td>$\dfrac{3}{k+2}$</td><td>$\dfrac{3k}{k+2}$</td></tr>
</table>

따라서 조건을 만족시키는 모든 a_1의 값의 합은

$3+0+\dfrac{3}{k(k+2)}+\left\{3-\dfrac{6}{k(k+2)}\right\}+\dfrac{3}{k+2}+\dfrac{3k}{k+2}$

$=6+\dfrac{3(k^2+k-1)}{k(k+2)}$

따라서 $6+\dfrac{3(k^2+k-1)}{k(k+2)}=\dfrac{53}{7}$이므로

$\dfrac{3(k^2+k-1)}{k(k+2)}=\dfrac{11}{7}$

$21(k^2+k-1)=11k(k+2)$

$10k^2-k-21=0$

$(2k-3)(5k+7)=0$

$1<k<3$이므로 $k=\dfrac{3}{2}$

253. 정답 ③

함수의 연속

함수 $|g(x)|$는 $x=0$에서 연속이므로

$\displaystyle\lim_{x\to 0+}|g(x)|=\lim_{x\to 0-}|g(x)|$

$|f(2a)-a|=|f(0)-a|$

(ⅰ) $f(0)=f(2a)$인 경우

조건 (나)에 의하여 $f(x)=(x-a)^2+a$이므로

$f(2)=a^2-3a+4=8$

$(a+1)(a-4)=0$

$a=-1$ 또는 $a=4$

① $a=-1$인 경우

$f(x)=(x+1)^2-1$이므로 $f(5)=35$

즉, $f(5)+a=35-1=34$

② $a=4$인 경우

$f(x)=(x-4)^2+4$이므로 $f(5)=5$

즉, $f(5)+a=5+4=9$

(ⅱ) $f(0)+f(2a)=2a$인 경우

조건 (나)에 의하여

$f(x)=(x-a)(x-b)+a$ (b는 실수)라 하면

$f(0)=ab+a$, $f(2a)=2a^2-ab+a$이므로

$f(0)+f(2a)=2a(a+1)=2a$, $a=0$

$f(x)=x(x-b)$이고 $f(2)=8$이므로

$2(2-b)=8$, $b=-2$

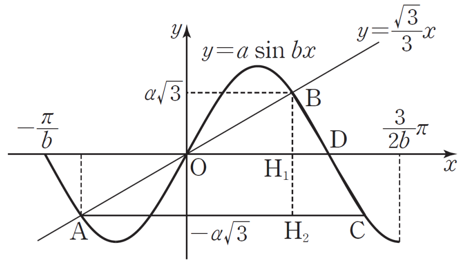
따라서 $f(x)=x(x+2)$이므로 $f(5)=35$

즉, $f(5)+a=35+0=35$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $f(5)+a$의 최댓값은 35이다.

254. 정답 ①

삼각함수의 그래프



점 B에서 x축, 선분 AC에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 하고

직선 BC와 x축이 만나는 점을 D라 하자.

직선 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$와 x축의 양의 부분이 이루는 각의 크기가 30°이고

$\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overleftrightarrow{\mathrm{BC}}$이므로 $\angle\mathrm{BDH_1}=60^\circ$이다.

한편 $\mathrm{D}\left(\dfrac{\pi}{b},\ 0\right)$이므로 $\overline{\mathrm{H_1D}}=\alpha$라 하면

$\overline{\mathrm{OH_1}}=\dfrac{\pi}{b}-\alpha$이고

$\overline{\mathrm{BH_1}}=\overline{\mathrm{OH_1}}\times\tan 30^\circ=\overline{\mathrm{H_1D}}\times\tan 60^\circ$

따라서

$\left(\dfrac{\pi}{b}-\alpha\right)\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\alpha\times\sqrt{3}$

$\alpha=\dfrac{\pi}{4b}$

또한

$\overline{\mathrm{BH_1}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4b}\pi$

$=a\sin b\left(\dfrac{\pi}{b}-\dfrac{\pi}{4b}\right)$

$=a\sin\dfrac{3}{4}\pi$

이므로

$\dfrac{\sqrt{3}}{4b}\pi=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $ab=\dfrac{\sqrt{6}}{4}\pi$ …… ㉠

곡선 $y=a\sin bx$와 직선 BC는 둘 다 점 $\left(\dfrac{\pi}{b},\ 0\right)$에 대하여 대칭인 도형이므로

$\overline{\mathrm{CH_2}}=2\times\overline{\mathrm{DH_1}}=2\alpha$

마찬가지로 곡선 $y=a\sin bx$와 직선 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$는 둘 다 원점에 대하여 대칭인 도형이고

$\overline{\mathrm{OH_1}}=\overline{\mathrm{BH_1}}\times\tan 60^\circ=3\alpha$

이므로

$\overline{\mathrm{AH_2}}=2\times\overline{\mathrm{OH_1}}=6\alpha$

따라서

$\overline{\mathrm{AC}}=6\alpha+2\alpha=8\alpha=\dfrac{2}{b}\pi$

한편,

$\overline{\mathrm{BH_2}}=2\times\overline{\mathrm{BH_1}}=2\alpha\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2b}\pi$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BH_2}}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{b}\pi\times\dfrac{\sqrt{3}}{2b}\pi$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2b^2}\pi^2=2\sqrt{3}$

이므로 $b=\dfrac{\pi}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

따라서 $f(x)=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}x$이므로

$f\left(\dfrac{2b}{3\pi}\right)=f\left(\dfrac{1}{3}\right)$

$=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\times\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

255. 정답 ①

함수의 그래프

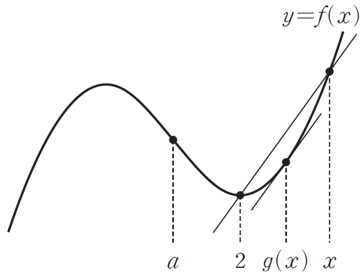
조건 (가)에서

$x\neq 2$일 때 $f'(g(x))=\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ …… ㉠

삼차함수 대칭점을 $(a,\ f(a))$라 할 때, $y=f'(x)$는 직선 $x=a$에 대하여 대칭인 곡선이고, 함수 $g(x)$는 두 점 $(2,\ f(2))$와 $(x,\ f(x))$를 지나는 직선의 기울기와 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(c,\ f(c))$에서의 기울기가 같은 c의 값 중 하나이며 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\le a$가 되거나, 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge a$가 되는 두 경우 중의 하나이다.

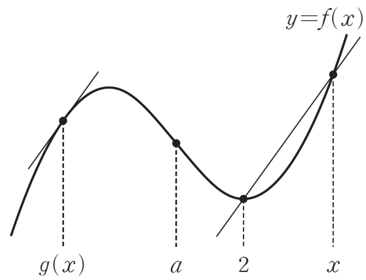
(ⅰ) $a<2$인 경우

① 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge a$인 경우



$g(x)$의 최댓값이 존재하지 않으므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

② 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\le a$인 경우



$g(x)<a<3$이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(ⅱ) $a=2$인 경우

① 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge a$인 경우

$g(x)$의 최댓값이 존재하지 않으므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

② 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\le a$인 경우

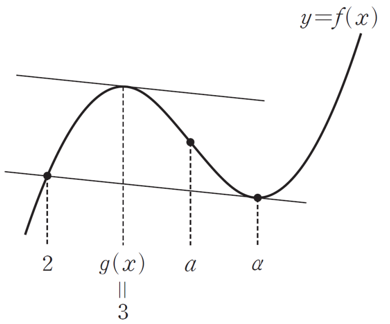
$g(x)<3$이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(ⅲ) $a>2$인 경우

① 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge a$인 경우

$g(x)$의 최댓값이 존재하지 않으므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

② 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\le a$인 경우



위의 그림과 같이 점 $(2,\ f(2))$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선 중 기울기가 작은 접선의 기울기와 점 $(3,\ f(3))$에서의 접선의 기울기가 같은 경우 조건 (나)를 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 점 $(2,\ f(2))$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선 중 기울기가 작은 접선의 방정식을 $y=mx+n$과 곡선 $y=f(x)$가 접하는 점의 x좌표를 α라 하면

$f(x)-(mx+n)=(x-2)(x-\alpha)^2$

$f(x)-(mx+n)=h(x)$라 하면 $h'(x)=0$인 x의 값 중 하나가 3이므로 $\alpha=5$이다.

따라서

$f(x)-(mx+n)=(x-2)(x-5)^2$ …… ㉡

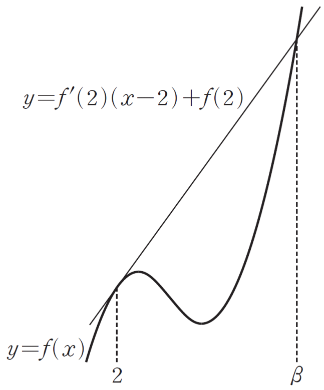
또한 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

㉠에서

$\lim\limits_{x\to 2}f'(g(x))=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$f'(g(2))=f'(2)$

따라서 $g(x)=2$가 되도록 하는 x의 값은 $x=2$ 또는 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선이 만나는 점의 x좌표 중 2가 아닌 값이다.



곡선 $y=f(x)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선과 만나는 점의 x좌표 중 2가 아닌 값을 β라 하자.

㉡에서 $f'(2)=m+9$이므로

$f(x)-\{f'(2)(x-2)+f(2)\}$

$=\{(x-2)(x-5)^2+mx+n\}-\{f'(2)(x-2)+f(2)\}$

$=(x-2)(x-5)^2-9x+18$

$=(x-2)^2(x-\beta)$

따라서 $\beta=8$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은

$2+8=10$

[참고]

(1) $a\neq 2$인 경우, $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}>f'(a)$가 되어

$g(x)=a$일 수 없다.

(2) (ⅰ)과 (ⅲ)에서, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $g(x)$의 값 중 $g(x)>a$인 경우와 $g(x)<a$인 경우와 공존할 수 없다.

256. 정답 ⑤

사인법칙과 코사인법칙

삼각형 APC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{CP}}}{\sin 30^\circ}=2R_1$

삼각형 BPC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{CP}}}{\sin(\angle\mathrm{PBC})}=2R_2$

$R_1:R_2=\sqrt{3}:1$이므로

$\dfrac{\overline{\mathrm{CP}}}{\sin 30^\circ}:\dfrac{\overline{\mathrm{CP}}}{\sin(\angle\mathrm{PBC})}=\sqrt{3}:1$에서

$\sin(\angle\mathrm{PBC})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

삼각형 ABC는 예각삼각형이므로

$\angle\mathrm{PBC}=60^\circ$

$\angle\mathrm{PAB}=\alpha^\circ$, $\angle\mathrm{PBA}=\beta^\circ$라 하면

$180^\circ-\angle\mathrm{APB}=30^\circ=\angle\mathrm{PAB}+\angle\mathrm{PBA}=\alpha^\circ+\beta^\circ$

이므로

$\angle\mathrm{ACB}=180^\circ-\angle\mathrm{PAC}-\angle\mathrm{PBC}-\alpha^\circ-\beta^\circ=60^\circ$

따라서 직선 BP와 선분 AC의 교점을 점 Q라 하면 삼각형 BCQ는 정삼각형이다.

$\angle\mathrm{BQC}=60^\circ$이고 $\angle\mathrm{APQ}=180^\circ-\angle\mathrm{APB}=30^\circ$

$\overline{\mathrm{AP}}=k\sqrt{3}$이라 하면 $\overline{\mathrm{PQ}}=k$, $\overline{\mathrm{BP}}=3k$이므로

$\overline{\mathrm{BQ}}=4k$

한편, 삼각형 APB에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2-2\times\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{BP}}\times\cos 150^\circ$

$=(k\sqrt{3})^2+(3k)^2-2\times k\sqrt{3}\times 3k\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=21k^2$

즉, $\overline{\mathrm{AB}}=k\sqrt{21}$

따라서 $\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{BC}}}=\dfrac{k\sqrt{21}}{4k}=\dfrac{\sqrt{21}}{4}$

257. 정답 ②

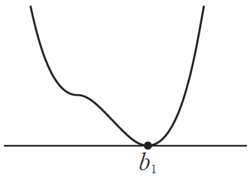
정적분의 계산

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 $F(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이고

$$\left|\int_t^x f(s)ds\right| = |F(x)-F(t)|$$

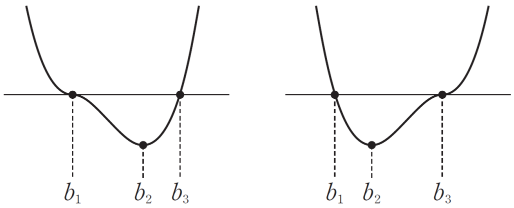
(ⅰ) 함수 $F(x)$의 극값이 1개인 경우

① 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 1인 경우



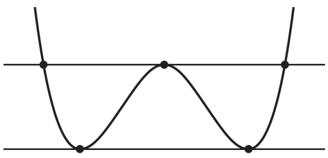
함수 $h(t)$가 불연속이 되도록 하는 실수 t의 개수는 1이므로 n이 3 이상의 자연수라는 조건을 만족시키지 못한다.

② 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우



위의 두 경우 모두 $n=3$이므로 $b_{n-2}-b_2=4$를 만족시키지 못한다.

(ⅱ) 함수 $F(x)$의 극값이 3개이고 함수 $F(x)$의 두 극솟값이 서로 같은 경우



그림과 같이 함수 $h(t)$가 불연속이 되도록 하는 t의 값은 5개이므로

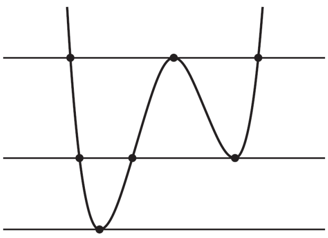
함수 $f(x)$가 극소가 되는 두 x의 값 중 작은 값이 b_2이고 함수 $f(x)$가 극대가 되는 x의 값이 b_{n-2}이다.

이때 함수 $f(x)$에서 x이 값이 b_2에서 b_{n-2}까지 변할 때의 평균변화율은 양수가 되므로 조건을 만족시키지 못한다.

(ⅲ) 함수 $F(x)$의 극값이 3개이고 두 극솟값이 서로 다른 경우

함수 $F(x)$가 극소가 되는 서로 다른 x의 값을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하자.

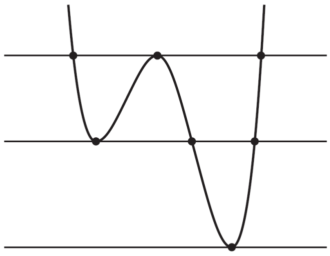
$F(\alpha)<F(\beta)$이면



그림과 같이 함수 $h(t)$가 불연속이 되도록 하는 t의 값은 7개이고 $\alpha=b_3$이고 $\beta=b_{n-1}=b_6$이 된다.

이때 함수 $F(x)$에서 x의 값이 b_2에서 b_{n-2}까지 변할 때의 평균변화율은 양수가 되므로 조건을 만족시키지 못한다.

$F(\alpha)>F(\beta)$이면



그림과 같이 $\alpha=b_2$이고 $\beta=b_{n-2}=b_5$가 된다.

$b_5-b_2=4$이므로 $b_2=0$, $b_5=4$라 가정해도 일반성을 잃지 않는다.

$b_3=c$ $(0<c<4)$라 하면

$$f(x)=4x(x-c)(x-4)$$
$$=4x^3-4(c+4)x^2+16cx$$

$F(x)=x^4-\dfrac{4}{3}(c+4)x^3+8cx^2+C$ (단, C는 적분상수)

따라서 조건으로부터

$$\frac{F(b_{n-2})-F(k)-\{F(b_2)-F(k)\}}{b_{n-2}-b_2}$$
$$=\frac{F(4)-F(0)}{4}$$
$$=\frac{1}{4}\left\{4^4-\frac{4}{3}(c+4)\times4^3+8c\times4^2\right\}$$
$$=\frac{32}{3}(c-2)=-16$$

즉, $c=\dfrac{1}{2}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

$$f(x)=4x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-4)$$
$$=4x^3-18x^2+8x$$

따라서

$$\int_{b_2}^{b_3} f(x)\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}(4x^3-18x^2+8x)dx$$
$$=\left[x^4-6x^3+4x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{16}-\frac{6}{8}+\frac{4}{4}=\frac{5}{16}$$

258. 정답 18

등비수열

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하자.

$S_1=\log_2 a_1$이므로 $f(1)=1$

$S_2=\log_2(a_1\times a_2)$에서

(ⅰ) $a_2<1$인 경우

$a_1>a_1\times a_2$이므로

$S_2=\log_2 a_{f(2)}<\log_2 a_1$인데

$r>1$이고 $f(2)\geq 1$이므로 $a_{f(2)}\geq a_1$이 되어 모순이다.

(ⅱ) $a_2>1$인 경우

$a_1<a_1\times a_2<a_2$이므로

$\log_2 a_1<S_2=\log_2 a_{f(2)}<\log_2 a_2$인데

$r>1$이고 $f(2)\geq 2$이므로 $a_{f(2)}\geq a_2$가 되어 모순이다.

(ⅲ) $a_2=1$인 경우

$r=\dfrac{1}{a_1}$이므로 $a_n=a_1^{\,2-n}$

따라서

$$S_n=\log_2(a_1\times a_2\times\cdots\times a_n)$$
$$=\log_2 a_1^{\,2-\frac{n(n-3)+4}{2}}$$

이므로 $f(n)=\dfrac{n(n-3)+4}{2}$이고 $f(5)=7$

조건 (나)에서 $S_7=42$이므로

$S_7=\log_2 a_1^{\,-14}=42$,

즉 $a_1=2^{-3}$, $r=2^3$이고

$a_n=2^{3n-6}$

따라서

$$\log_2\left(56\sum_{k=1}^{6}a_k+1\right)=\log_2\left(56\times\frac{8^6-1}{56}+1\right)$$
$$=\log_2 8^6$$
$$=\log_2 2^{18}$$
$$=18$$

259. 정답 11

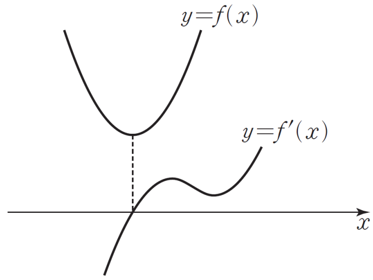
함수의 극대와 극소

$g(x)=\displaystyle\int_0^x[\{f(s)-t\}\times f'(s)]ds$라 하면

$g'(x)=\{f(x)-t\}\times f'(x)$이다.

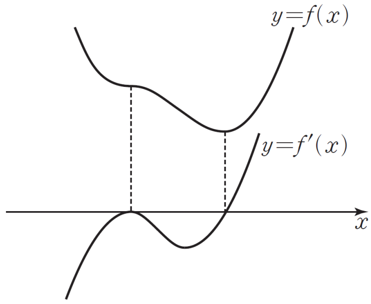
함수 $g(x)$가 3개의 극솟값을 갖기 위해서는 $g'(x)$의 부호가 최소 5회 바뀌어야 한다.

(ⅰ) $f'(x)=0$인 서로 다른 x의 개수가 1인 경우



x에 대한 방정식 $f(x)-t=0$이 서로 다른 네 실근을 가질 수 없으므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

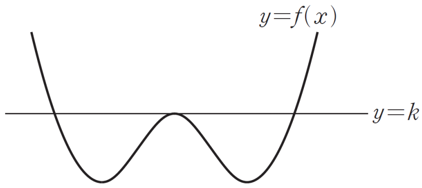
(ⅱ) $f'(x)=0$인 서로 다른 x의 개수가 2인 경우



x에 대한 방정식 $f(x)-t=0$이 서로 다른 세 실근을 가질 수 없으므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

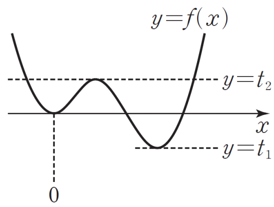
(ⅲ) $f'(x)=0$인 서로 다른 x의 개수가 3인 경우

함수 $f(x)$의 두 극솟값이 같은 경우 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

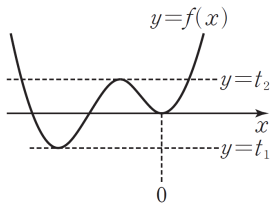


함수 $f(x)$의 극댓값을 k라 하면 3개의 극솟값을 갖도록 하는 실수 t의 집합은 $\{t\,|\,t\geq k\}$이므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

따라서 조건 (가)를 만족시키고 함수 $|f(x)|$가 $x=0$에서 미분가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음의 두 경우 중 하나이다.



[그림 1]



[그림 2]

[그림 1]의 경우, 함수 $|f(x)|$가 $x=5$에서 미분가능하므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 [그림 2]와 같다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$f(x)=x^2(x-\alpha)(x-\beta)$ $(\alpha<\beta<0)$

한편, 함수 $|f(x)|$는 $x=-5$에서 미분가능하지 않으므로 $\alpha=-5$

또는 $\beta=-5$인데,

$\beta=-5$인 경우 $\int_{-5}^{0} f(x)dx>0$이므로 조건 (다)를 만족시키지 못한다.

따라서 $\alpha=-5$이다.

조건 (다)에서 $\int_{-5}^{0} f(x)dx=0$이므로

$$\int_{-5}^{0} f(x)dx=\int_{-5}^{0}\{x^4-(\alpha+\beta)x^3+\alpha\beta x^2\}$$

$$=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{(\alpha+\beta)}{4}x^4+\frac{\alpha\beta}{3}x^3\right]_{-5}^{0}$$

$$=-\frac{1}{5}(-5)^5+\frac{(-5+\beta)}{4}(-5)^4-\frac{(-5)^4\beta}{3}$$

$$=0$$

즉, $\beta=-3$이므로

$f(x)=x^2(x+5)(x+3)$

$f'(x)=2x(2x^2+12+15)$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{-6-\sqrt{6}}{2}$ 또는 $x=\frac{-6+\sqrt{6}}{2}$ 또는 $x=0$

따라서

$$t_1=f\left(\frac{-6-\sqrt{6}}{2}\right)$$

$$=\frac{(-6-\sqrt{6})^2}{4}\times\frac{4-\sqrt{6}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

$$t_2=f\left(\frac{-6+\sqrt{6}}{2}\right)$$

$$=\frac{(-6+\sqrt{6})^2}{4}\times\frac{4+\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}$$

이므로

$$t_1+t_2=-\frac{\sqrt{6}}{16}\{(-6-\sqrt{6})^2(4-\sqrt{6})-(-6+\sqrt{6})^2(4+\sqrt{6})\}$$

$$=-\frac{\sqrt{6}}{16}\{(42+12\sqrt{6})(4-\sqrt{6})-(42-12\sqrt{6})(4+\sqrt{6})\}$$

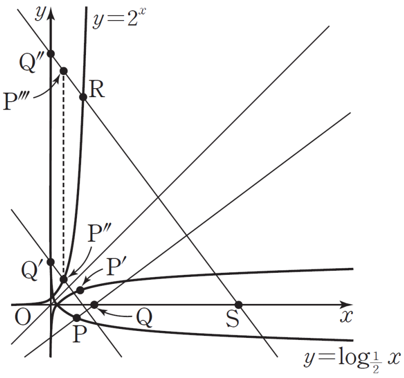
$$=-\frac{\sqrt{6}}{16}\times 12\sqrt{6}=-\frac{9}{2}$$

따라서 $p=2$, $q=9$이므로

$p+q=11$

260. 정답 32

지수함수와 로그함수의 그래프



$P(a,\ b)$라 하고 $P'(a,\ -b)$라 하면 점 P가 곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 위의 점이므로 점 P′은 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점이고 $\overline{PQ}=\overline{P'Q}$이다. …… ㉠

$P''(-b,\ a)$라 하면 점 P″은 곡선 $y=2^x$ 위의 점이고, 점 P″을 지나고 기울기가 $-\frac{4}{3}$인 직선이 y축과 만나는 점을 Q′이라 하면 Q′은 점 Q를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이 되므로

$\overline{P'Q}=\overline{P''Q'}$이다. …… ㉡

직선 RS가 y축과 만나는 점을 Q″이라 하고, 직선 RS 위의 점 중 x좌표가 점 P″과 같은 점을 P‴이라 하면 $\overline{P''Q'}=\overline{P'''Q''}$이다. …… ㉢

한편, $\overline{OS}\times\frac{5}{3}=\overline{SQ''}$이고 ㉠, ㉡, ㉢에서 $\overline{PQ}=\overline{P'''Q''}$이므로, 조건 (가)에서

$\overline{P'''Q''}+\overline{RS}+5=\overline{SQ''}$

따라서 $\overline{P'''R}=5$이고 직선 P‴R의 기울기가 $-\frac{4}{3}$이므로 점 R의 x좌표는 $-b+3$이다.

따라서 $R(-b+3,\ 2^{-b+3})$이고 $2^{-b}=a$이므로

$R(-b+3,\ 8a)$, 즉 점 R의 y좌표는 $8a$이다.

따라서 조건 (나)에서

$8a-a=28$, $a=4$

이므로 점 R의 y좌표는

$8\times4=32$

261. 정답 ④

미분

함수 $f(x)+g(x)$가 $x=3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to3}\{f(x)+g(x)\}=f(3)+g(3)$

$3+(3a+b)=4+c$

$3a+b=1+c$ …… ㉠

함수 $f(x)g(x)$가 $x=3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to3}f(x)g(x)=f(3)g(3)$

$3(3a+b)=4c$

$3a+b=\frac{4c}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$1+c=\frac{4c}{3}$

$\frac{c}{3}=1,\ c=3$

따라서

$$g(3)+\lim_{x\to 3}g(x)=c+(3a+b)$$
$$=1+2x$$
$$=7$$

262. 정답 ①

사인법칙과 코사인법칙

$\overline{BD}:\overline{CD}=2:1$이므로 두 삼각형 ABD, ACD의 넓이의 비도 $2:1$이다.

$\sin(\angle BAD)=\sin(\angle CAD)$이고

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\sin(\angle BAD):\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AD}\times\sin(\angle CAD)$

$=2:1$이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=2:1$

$\overline{AB}+\overline{AC}=9$이므로 $\overline{AB}=6,\ \overline{AD}=3$

$\overline{BC}=2\sqrt{7}+\sqrt{7}=3\sqrt{7}$이므로

$$\cos(\angle BAC)=\frac{6^2+3^2-(3\sqrt{7})^2}{2\times6\times3}=-\frac{1}{2}$$

$$\sin(\angle BAC)=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 r이라 하면

$$2r=\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)}$$

$$2=\frac{3\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$r=\sqrt{21}$

따라서 구하는 원의 넓이는

$r^2\pi=21\pi$

263. 정답 ③

정적분의 활용

시각 t에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_1(t),\ x_2(t)$라 하면

중점 M의 위치는 $\frac{x_1(t)+x_2(t)}{2}$

시각 $t=3$일 때 선분 PQ의 중점 M의 위치가 6이므로

$x_1(3)=\int_0^3 v_1(t)dt,\ x_2(3)=\int_0^3 v_2(t)dt$에서

$$x_1(3)+x_2(3)=\int_0^3\{v_1(t)+v_2(t)\}dt$$

$$\frac{x_1(3)+x_2(3)}{2}=\frac{1}{2}\int_0^3\{v_1(t)+v_2(t)\}dt$$

$$6=\frac{1}{2}\int_0^3(3t^2+at+1)dt$$

$$12=\left[t^3+\frac{a}{2}t^2+t\right]_0^3$$

$$12=\frac{9a}{2}+30$$

$a=-4$

따라서 시각 $t=5$일 때 점 M의 위치는

$$\frac{x_1(5)+x_2(5)}{2}=\frac{1}{2}\int_0^5\{v_1(t)+v_2(t)\}dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^5(3t^2-4t+1)dt$$
$$=\frac{1}{2}\left[t^3-2t^2+t\right]_0^5$$
$$=\frac{1}{2}\times80=40$$

264. 정답 ①

수열의 합

두 점 P, Q의 좌표는 각각

$(n,\ f(n)),\ (n+2,\ f(n+1))$

이므로 세 점 R, S, H의 좌표는 각각

$(n,\ 0),\ (n+2,\ 0),\ (n+2,\ f(n))$

이다.

$\overline{PH}=(n+2)-n=2$

$\overline{QH}=f(n+2)-f(n)=4n+4+2a$

이므로 직각삼각형 PQH의 넓이 a_n은

$$a_n=\frac{1}{2}\times2\times(4n+4+2a)$$
$$=4n+4+2a$$

$\overline{PR}=f(n)=n^2+an+3$이므로 직사각형 PRSH의 넓이 b_n은

$b_n=2(n^2+an+3)$

수열 $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$이 등차수열이므로

$\frac{b_n}{a_n}=\frac{n^2+an+3}{2n+2+a}$이 n에 대한 일차식이다.

인수정리에 의하여

$$\left(-\frac{a+2}{2}\right)^2+a\times\left(-\frac{a+2}{2}\right)+3=0$$

$a^2-16=0$

$a>0$이므로 $a=4$

따라서

$$\sum_{n=1}^{8}(b_n-a_n)=\sum_{n=1}^{8}\{(2n^2+8n+6)-(4n+12)\}$$
$$=\sum_{n=1}^{8}(2n^2+4n-6)=504$$

265. 정답 ②

도함수의 활용

$f(x)=x^3+ax^2+bx-1$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

주어진 조건에서 두 직선 l_1, l_2는 서로 평행하므로

$f'(0)=f'(2)$

$b=12+4a+b$

$a=-3$

$f'(0)=f'(2)=b$이고, $f(0)=-1$, $f(2)=2b-5$이므로

두 접선 l_1, l_2의 방정식은 각각

$l_1 : y=bx-1$, $l_2 : y=bx-5$ …… ㉠

점 $\mathrm{P}(0,\ -1)$에서 직선 $y=bx-5$, 즉 $bx-y-5=0$까지의 거리가 $2\sqrt{2}$이므로

$$\frac{|-4|}{\sqrt{b^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$$

$\sqrt{b^2+1}=\sqrt{2}$

$b^2+1=2$

$b^2=1$ …… ㉡

㉠에서 두 점 T, S의 x좌표를 각각 구하면

$\frac{1}{b}$, $\frac{5}{b}$

이므로

$$\overline{\mathrm{TS}}=\left|\frac{1}{b}-\frac{5}{b}\right|=\frac{4}{|b|}$$

㉡에서 $|b|=1$이므로 $\overline{\mathrm{TS}}=4$

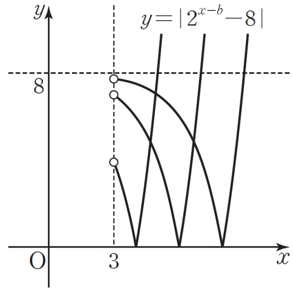
266. 정답 ⑤

지수함수와 로그함수

(ⅰ) $x>3$인 경우

b의 값이 커질수록 $|2^{3-b}-8|$의 값은 8보다 작으면서 8에 한없이 가까워지므로

$x>3$에서 함수 $f(x)=|2^{x-b}-8|$의 그래프의 개형은 b의 값에 따라 다음과 같이 변한다.



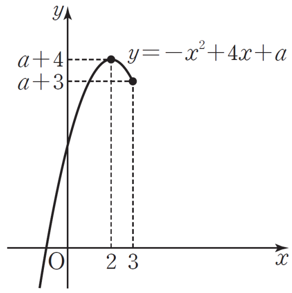
$x>3$에서 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는

$t\ge|2^{3-b}-8|$일 때 1,

$0<t<|2^{3-b}-8|$일 때 2이다.

(ⅱ) $x\le3$인 경우

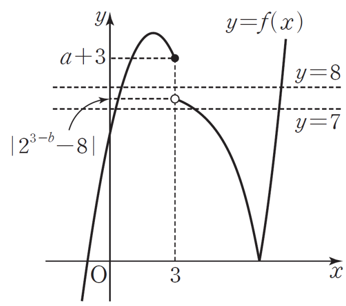
$x\le3$에서 함수 $f(x)=-x^2+4x+a$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$x\le3$에서 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는

$t<a+3$일 때 1이고, $a+3\le t<a+4$일 때 2이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



방정식 $g(t)=3$을 만족시키는 자연수 t의 개수가 8이므로

$7<|2^{3-b}-8|$, $7<a+3$

이고 조건을 만족시키는 자연수 t의 값은 각각 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7과 $a+3$이다.

$|2^{3-b}-8|>7$에서 b가 자연수일 때, $2^{3-b}-8<0$이므로

$-2^{3-b}+8>7$

$2^{3-b}<2^0$, 즉 $b>3$

$a+3>7$에서 $a>4$

따라서 조건을 만족시키는 $a+b$의 최솟값은 $a=5$, $b=4$일 때 9이다.

267. 정답 ⑤

정적분의 성질

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 0-} g(x) = \lim_{x \to 0+} g(x) = g(0)$에서

$f(p)+q=f(0)$ …… ㉠

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로

$\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$

이다.

임의의 양수 실수 x에 대하여 $g(x)=f(x) \geq 0$이면,

$t > -2$일 때

$$S(t) = \int_0^t g(t)dx$$
$$= -\int_t^0 g(x)dx$$
$$= \left| \int_t^0 g(x)dx \right|$$

이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

구간 $(0,\ \infty)$에서 함수 $g(x)$가 음수인 함숫값을 가지고

$g(0)=f(0)>0$

이므로 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 양의 실수 α, β $(\alpha<\beta)$를 근으로 갖는다.

그러므로 조건 (가)에서 $\alpha=2$이고

$f(x)=3(x-2)(x-\beta)$이다.

$S(2)=20$에서

$$\int_0^2 3(x-2)(x-\beta)\,dx = \int_0^2 \{3x^2-3(2+\beta)x+6\beta\}\,dx$$
$$= \left[x^3 - \frac{3}{2}(2+\beta)x^2 + 6\beta x\right]_0^2$$
$$= 8-6(2+\beta)+12\beta$$
$$= 6\beta - 4 = 20$$

즉, $\beta=4$이므로

$$f(x)=3(x-2)(x-4)$$
$$=3(x-3)^2-3$$

이고 ㉠에서

$f(x+p)+q=3(x+p-3)^2-3+q$ …… ㉡

구간 $(-\infty,\ 0)$에서 함수 $g(x)$가 음수인 함숫값을 가지면 방정식 $f(x+p)+q=0$은 서로 다른 두 음의 실수를 근으로 가지므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 임의의 음의 실수 x에 대하여

$g(x)=f(x+p)+q \geq 0$ …… ㉢

이다.

(i) $0 \leq p \leq 3$인 경우

㉡에서 곡선 $y=f(x+p)+q$의 꼭짓점의 x좌표가 음이 아닌 실수이고

$f(0)=24>0$

이므로 ㉢이 항상 성립한다.

㉠에서 $q=-3(p-3)^2+27$이므로

$p=0$일 때, $q=0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

$p=1$일 때, $q=15$

$p=2$일 때, $q=24$

$p=3$일 때, $q=27$

(ii) $p \geq 4$인 경우

㉡에서 곡선 $y=f(x+p)+q$의 꼭짓점의 x좌표가 음의 실수이므로 곡선 $y=f(x+p)+q$의 꼭짓점의 y좌표가 항상 0 이상이다.

즉, $-3+q \geq 0$, $q \geq 3$ …… ㉣

㉠에서 $q=-3(p-3)^2+27$이므로

$p=4$일 때, $q=24$

$p=5$일 때, $q=15$

$p \geq 6$일 때, $q \leq 0$이므로 ㉣을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 구하는 $q-p$의 최솟값은 $q=15$, $p=5$일 때 10이다.

268. 정답 24

삼각함수의 그래프

사각형 PRSQ가 평행사변형이고 $\overline{PQ}=\overline{RS}$이므로

$|b|=|c|$, 즉 $b=-c$

두 점 P, R의 x좌표의 차는 함수 $y=a\sin\frac{\pi}{a}x$의 주기의 $\frac{1}{2}$이므로

a이고, y좌표는 차는 $b-c=2b$이다.

$\overline{PR}=\sqrt{2}a$에서

$\sqrt{a^2+(2b)^2}=\sqrt{2}a$

$a^2+4b^2=2a^2$

$b^2=\frac{a^2}{4}$

$b=\frac{a}{2}$

$\frac{a}{2}=a\sin\frac{\pi}{a}x$에서

$\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{a}x$

$x=\frac{a}{6}$ 또는 $x=\frac{5a}{6}$ …… ㉠

$\overline{PQ}=4$이므로 ㉠에 의하여

$\frac{5a}{6}-\frac{a}{6}=4$

$\frac{2a}{3}=4$

$a=6$

따라서 평행사변형 PRSQ의 넓이는

$4\times 2b=4\times 2\times\frac{a}{2}=24$

269. 정답 108

다항함수의 미분법

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+1}{f(-x)}=1$이므로 $f(x)$는 일차 이상의 다항함수이다.

$f(x)$의 차수를 n이라 하면

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+1}{f(-x)}=1$에서 n이 짝수이다.

$x^3f(x)$의 차수는 $n+3$이고 $\{f'(x)\}^2$의 차수는 $2n-2$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3f(x)}{\{f'(x)\}^2}=\infty$에서

$n+3>2n-2$

$n<5$

n은 짝수이므로 $n=2$ 또는 $n=4$

(ⅰ) $n=2$인 경우

$f'(x)$는 일차함수이므로 방정식 $f'(x)=0$은 반드시 실근 β를 갖는다.

조건 (나)에서 $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{f'(x)}$의 값이 항상 존재하므로

$f(x)=(x-\beta)^2$임을 알 수 있다.

$f(0)=0$이므로 $\beta=0$에서 $f(x)=x^2$, $f'(x)=2x$

그러나 $f(-2)=f(2)$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $n=4$인 경우

$f'(x)$는 삼차함수이므로 방정식 $f'(x)=0$은 반드시 실근 β를 갖는다.

조건 (나)에서 $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{f'(x)}$의 값이 항상 존재하므로

$f'(\beta)=0$이면 $f(\beta)=0$이다.

즉, $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지면 $f(x)$의 차수는 6 이상이고, $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지면 $f(x)$의 차수는 5 이상이다.

그러므로 $f'(x)=0$은 단 하나의 실근 β를 갖는다.

$x=\beta$가 $f'(x)=0$의 중근인 경우 $f(x)=(x-\beta)^4$이므로 $\beta=0$, 즉 $f(x)=x^4$이다. 이때 $f(-2)>f(2)$를 만족시키지 않는다.

즉, $x=\beta$가 $f'(x)=0$의 단 하나의 실근이므로

$f(x)=(x-\beta)^2(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)

$b=0$이면 $f(x)=x^3(x+a)$에서 $f'(x)=x^2(4x+3a)$

이므로 조건 (나)에서 $a=0$, 즉 $f(x)=x^4$이다. 이때 $f(-2)>f(2)$를 만족시키지 않는다.

$b\neq0$이므로 $f(0)=0$에서

$f(x)=x^2(x^2+ax+b)$

이다.

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{1}{2}$에서

$\lim_{x\to1}\frac{x^2(x^2+ax+b)}{x(4x^2+3ax+2b)}=\frac{1}{2}$

$\frac{1+a+b}{4+3a+2b}=\frac{1}{2}$

$2+2a+2b=4+3a+2b$

$a=-2$

$f(x)=x^2(x^2-2x+b)$이고,

$f(-2)-f(2)=4\times(8+b)-4b=32>0$이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(x)=x^2(x^2-2x+b)$이므로

$\lim_{x\to3}\{f(-x)-f(x)\}=9\times(15+b)-9\times(3+b)$

$=108$

270. 정답 19

수열의 귀납적 정의

(ⅰ) $a_4\geq4$인 경우

$a_5=a_4-2$에서 $a_4=4$이다.

① $a_3\geq3$이라 가정하면

$a_4=a_3-2$, $a_3=6$

$a_2=0$ 또는 $a_2=1$이면 $a_3=a_2+a_1$이므로

$a_2=0$일 때, $a_1=6$

$a_2=1$일 때, $a_1=5$

두 경우 모두 $a_2\neq a_1-2$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $a_2\geq2$이고 $a_3=a_2-2$, $a_2=8$

$a_2=a_1-2$에서 $a_1=10$

② $a_3<3$이라 가정 하면

a_3은 음이 아닌 정수이므로

$a_3=0$ 또는 $a_3=1$ 또는 $a_3=2$이다.

이때 $a_4=a_3+a_2$이므로

$a_3=0$일 때, $a_2=4$

$a_3=1$일 때, $a_2=3$

$a_3=2$일 때, $a_2=2$

세 경우 모두 $a_2\geq2$이므로 $a_3=a_2-2$에서

$a_3=1$인 경우에만 조건을 만족시킨다.

$a_2=a_1-2$에서 $a_1=5$

(ⅱ) $a_4<4$인 경우

a_4는 음이 아닌 정수이므로

$a_4=0$ 또는 $a_4=1$ 또는 $a_4=2$ 또는 $a_4=3$이다.

이때 $a_5=a_4+a_3$이므로

$a_4=0$일 때, $a_3=2$

$a_4=1$일 때, $a_3=1$

$a_4=2$일 때, $a_3=0$

$a_4=3$일 때, $a_3=-1$

$a_4=3$인 경우 $a_3=-1$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

나머지 세 경우 모두 $a_3<3$이므로 $a_4=a_3+a_2$이다.

$a_4=0$, $a_3=2$일 때, $a_2=-2$

$a_4=1$, $a_3=1$일 때, $a_2=0$

$a_4=2$, $a_3=0$일 때, $a_2=2$

$a_4=0$, $a_3=2$, $a_2=-2$인 경우에는 $a_2<0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$a_4=1$, $a_3=1$, $a_2=0$인 경우에는 $a_2=a_1-2$에서 $a_1=2$

$a_2<2$이고 $a_3\neq a_2+a_1$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$a_4=2$, $a_3=0$, $a_2=2$인 경우에는 $a_2=a_1-2$에서 $a_1=4$

$a_2\geq 2$이고 $a_3=a_2-2$이므로 조건을 만족시킨다.

따라서 $a_1=4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 a_1의 값의 합은

$10+5+4=19$

271. 정답 ①

[수열의 합]

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{S_n}{4k^2-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{S_n}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$=\frac{S_n}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\frac{S_n}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{S_n}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{nS_n}{2n+1}$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{S_n}{4k^2-1}=n(n+1)$에서

$$\frac{nS_n}{2n+1}=n(n+1)$$

$S_n=(n+1)(2n+1)$

$a_1=S_1=2\times 3=6$

이고, $n\geq 2$일 때

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=(n+1)(2n+1)-n(2n-1)$$
$$=4n+1$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{10}\log\frac{a_k}{4k+5}$$

$$=\log\frac{a_1}{9}+\sum_{k=2}^{10}\log\frac{a_k}{4k+5}$$

$$=\log\frac{2}{3}+\sum_{k=2}^{10}\log\frac{4k+1}{4k+5}$$

$$=\log\frac{2}{3}+\sum_{k=2}^{10}\{\log(4k+1)-\log(4k+5)\}$$

$$=\log\frac{2}{3}+\{(\log 9-\log 13)+(\log 13-\log 17)+\cdots+(\log 41-\log 45)\}$$

$$=\log\frac{2}{3}+(\log 9-\log 45)$$

$$=\log\frac{2\times 9}{3\times 45}$$

$$=\log\frac{2}{15}$$

272. 정답 ③

[삼각방정식]

$\sin\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right)=-\cos x$이므로

$\cos^2x-\sin\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right)=1$에서

$\cos^2x+\cos x=1$

$\cos^2x+\cos x-1=0$ …… ㉠

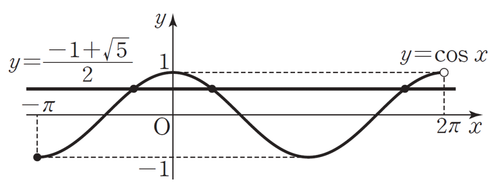
$\cos x=X$로 놓으면

$-\pi\leq x<2\pi$일 때, $-1\leq X\leq 1$

㉠에서 $X^2+X-1=0$

$$X=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

즉, 구하는 실근의 개수는 $-\pi\leq x<2\pi$에서 곡선 $y=\cos x$와 직선 $y=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$의 교점의 개수이다.



따라서 위의 그림에서 구하는 실근의 개수는 3이다.

273. 정답 ②

[미분과 적분의 관계]

$F(x)=\displaystyle\int_1^x(t^2+1)f(t)dt$로 놓으면 함수 $F(x)$는 미분가능하고,

$F(1)=0$, $F'(x)=(x^2+1)f(x)$이므로 조건 (가)에서

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x(t^2+1)f(t)dt$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{(x-1)(x+1)}$$

$=\dfrac{1}{2}F'(1)$

$=\dfrac{1}{2}(1^2+1)f(1)$

$=f(1)$

$=1$

조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여

$f(2x+1)=f(2x-1)+x$

이고, 이차함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to1}f(2x+1)=\lim\limits_{x\to1}\{f(2x-1)+x\}$

$f(3)=f(1)+1=2$ …… ㉠

$\lim\limits_{x\to0}f(2x+1)=\lim\limits_{x\to x\to0}\{f(2x-1)+x\}$

$f(-1)=f(1)=1$ …… ㉡

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수이고, $a\neq0$)으로 놓으면 ㉠, ㉡에서

$a+b+c=1$, $9a+3b+c=2$, $a-b+c=1$

$a=\dfrac{1}{8}$, $b=0$, $c=\dfrac{7}{8}$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{8}x^2+\dfrac{7}{8}$이므로

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(\frac{1}{8}x^2+\frac{7}{8}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{24}x^3+\frac{7}{8}x\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{24}+\frac{7}{8}$$

$$=\frac{11}{12}$$

274. 정답 ④

[등비수열]

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r_1이라 하고, 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r_2라 하자. $\dfrac{a_2}{a_1}=r_1$, $\dfrac{b_2}{b_1}=r_2$이므로 조건 (가)에서 두 수 r_1, r_2는 모두 자연수이고, 조건 (가)에서 $a_1b_1\neq0$이므로

조건 (나)에서

$a_1b_1(r_1-1)(r_2-1)=6a_1b_1$

$(r_1-1)(r_2-1)=6$ …… ㉠

이때 ㉠을 만족시키는 모든 순서쌍 $(r_1,\ r_2)$는

$(2,\ 7)$, $(3,\ 4)$, $(4,\ 3)$, $(7,\ 2)$ …… ㉡

조건 (다)에서

$$\sum_{k=1}^{4}\frac{b_1{}^2a_k}{b_2-b_1}=\sum_{k=1}^{4}\frac{3a_1{}^2b_k}{a_2-a_1}+\frac{5}{2}a_1b_1$$

$$\frac{b_1{}^2}{b_1(r_2-1)}\sum_{k=1}^{4}a_k=\frac{3a_1{}^2}{a_1(r_1-1)}\sum_{k=1}^{4}b_k+\frac{5}{2}a_1b_1$$

$$\frac{b_1{}^2a_1(r_1{}^4-1)}{b_1(r_2-1)(r_1-1)}=\frac{3a_1{}^2b_1(r_2{}^4-1)}{a_1(r_1-1)(r_2-1)}+\frac{5}{2}a_1b_1$$

$a_1b_1\neq0$이므로 위 등식의 양변을 a_1b_1로 나누면

$$\frac{r_1{}^4-1}{(r_2-1)(r_1-1)}=\frac{3(r_2{}^4-1)}{(r_1-1)(r_2-1)}+\frac{5}{2} \quad \cdots\cdots \text{㉢}$$

㉠, ㉢에서

$r_1{}^4-1=3(r_2{}^4-1)+15$

$r_1{}^4-13=3r_2{}^4$ …… ㉣

이때 ㉡에서 ㉣을 만족시키는 것은

$r_1=4$, $r_2=3$

따라서

$$\frac{a_3b_1}{a_1b_2}=\frac{a_1b_1r_1{}^2}{a_1b_1r_2}$$

$$=\frac{r_1{}^2}{r_2}=\frac{16}{3}$$

275. 정답 ④

[함수의 연속]

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to2-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to2+}f(x)$의 값이 존재하고,

$f(2)=\lim\limits_{x\to2-}f(x)=\lim\limits_{x\to2+}f(x)$ …… ㉠

이다. 이때

$$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}\frac{ax-1}{\sqrt{5-x^2}-1} \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

의 값이 존재하고, $x\to2-$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to2-}(ax-1)=2a-1=0$

$a=\dfrac{1}{2}$ …… ㉢

㉡에서

$$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}\frac{\frac{1}{2}x-1}{\sqrt{5-x^2}-1}$$

$$=\lim_{x\to2-}\frac{\left(\frac{1}{2}x-1\right)(\sqrt{5-x^2}+1)}{(5-x^2)-1^2}$$

$$=\lim_{x\to2-}\frac{(2-x)(\sqrt{5-x^2}+1)}{-2(2-x)(2+x)}$$

$$=\lim_{x\to2-}\frac{\sqrt{5-x^2}+1}{-2(2+x)}$$

$$=-\frac{1}{4}$$

즉, ㉠에 의하여

$f(2)=\lim_{x\to 2+}f(x)$

$=\lim_{x\to 2+}\dfrac{x-2}{x^2+bx+12}$

$=-\dfrac{1}{4}$ …… ㉣

㉣에서 극한값이 0이 아니고, $x\to 2+$일 때

(분자)$\to 0$이므로 (분모)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2+}(x^2+bx+12)=4+2b+12=0$

$b=-8$ …… ㉤

따라서 ㉢, ㉣, ㉤에서

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{2}x-1}{\sqrt{5-x^2}-1} & (0<x<2)\\ -\dfrac{1}{4} & (x=2)\\ \dfrac{x-2}{x^2+8x+12} & (2<x<6)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{\sqrt{5-x^2}+1}{2(x+2)} & (0<x<2)\\ -\dfrac{1}{4} & (x=2)\\ \dfrac{1}{x-6} & (2<x<6)\end{cases}$$

이고, $ab+7=3$이므로

$f(1)+f(2)+f(ab+7)$

$=f(1)+f(2)+f(3)$

$=-\dfrac{\sqrt{5-1}+1}{2(1+2)}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3-6}$

$=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}$

$=-\dfrac{13}{12}$

276. 정답 ③

[사인법칙과 코사인법칙]

$\overline{\mathrm{AB}}=c$, $\overline{\mathrm{BC}}=\mathrm{a}$, $\overline{\mathrm{CA}}=\mathrm{b}$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$이라 하자.

삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 36π이므로 이 원의 반지름의 길이를 R $(R>0)$이라 하면

$\pi R^2=36\pi$, $R=6$

사인법칙에 의하여 $\dfrac{\mathrm{a}}{\sin \mathrm{A}}=\dfrac{\mathrm{b}}{\sin \mathrm{B}}=\dfrac{\mathrm{c}}{\sin \mathrm{C}}=2\mathrm{R}=12$

$\sin \mathrm{A}=\dfrac{\mathrm{a}}{12}$, $\sin \mathrm{B}=\dfrac{\mathrm{b}}{12}$, $\sin \mathrm{C}=\dfrac{\mathrm{c}}{12}$ …… ㉠

조건 (가)에서 $\sin \mathrm{B}=\sqrt{2}\sin \mathrm{C}$이므로 ㉠에서

$\dfrac{b}{12}=\dfrac{\sqrt{2}c}{12}$, 즉 $b=\sqrt{2}c$ …… ㉡

조건 (가)에서 $\cos \mathrm{C}=\dfrac{2\sin \mathrm{A}}{\sin \mathrm{B}}$이므로

$2\sin \mathrm{A}=\sin \mathrm{B}\cos \mathrm{C}$

코사인법칙과 ㉠에 의하여

$\dfrac{a}{6}=\dfrac{b}{12}\times\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$4a^2=a^2+b^2-c^2$

$3a^2+c^2=b^2$ …… ㉢

㉡에 의하여 $3a^2+c^2=2c^2$이므로

$c=\sqrt{3}a$, $b=\sqrt{6}a$ …… ㉣

선분 AC의 중점 M에 대하여 $\overline{\mathrm{MB}}=\mathrm{d}$, $\angle\mathrm{AMB}=\theta$ $(0<\theta<\pi)$라 하자.

삼각형 ABM과 삼각형 BCM에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{\left(\frac{b}{2}\right)^2+d^2-c^2}{2\times\frac{b}{2}\times d}$

$=\dfrac{\left(\frac{b}{2}\right)^2+d^2-c^2}{bd}$

$\cos(\pi-\theta)=\dfrac{\left(\frac{b}{2}\right)^2+d^2-a^2}{2\times\frac{b}{2}\times d}$

$=\dfrac{\left(\frac{b}{2}\right)^2+d^2-a^2}{bd}$

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$이므로

$\dfrac{\left(\frac{b}{2}\right)^2+d^2-a^2}{bd}=-\dfrac{\left(\frac{b}{2}\right)^2+d^2-c^2}{bd}$

$\left(\dfrac{b}{2}\right)^2+d^2-a^2=-\left(\dfrac{b}{2}\right)^2-d^2+c^2$

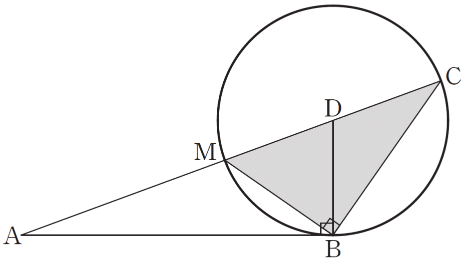
$d^2=\dfrac{c^2}{2}+\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{b^2}{4}$

㉣에서 $b=\sqrt{6}a$, $c=\sqrt{3}a$이므로

$d^2=\dfrac{3}{2}a^2+\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{3}{2}a^2=\dfrac{a^2}{2}$, 즉 $d=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$

$\overline{\mathrm{MB}}=\mathrm{d}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{a}$, $\overline{\mathrm{BC}}=\mathrm{a}$, $\overline{\mathrm{MC}}=\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{2}=\dfrac{\mathrm{b}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{a}$

$\overline{\mathrm{MB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{MC}}^2$이므로 그림과 같이 삼각형 BCM은 $\angle\mathrm{MBC}=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형이고, 선분 MC는 삼각형 BSM의 외접원의 지름이다.



조건 (나)에서 삼각형 BCM의 외접원의 반지름의 길이가 $\sqrt{6}$ 이므로

$\overline{\mathrm{MC}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{a}=2\sqrt{6}$

$a=4$, $b=4\sqrt{6}$, $c=4\sqrt{3}$

점 B를 지나고 직선 AB에 수직인 직선이 선분 AC와 만나는 점 D는 선분 MC의 중점이므로 선분 DB의 길이는 삼각형 BCM의 외접원의 반지름의 길이와 같다.

따라서 직각삼각형 ABD의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{DB}}=\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times\sqrt{6}=6\sqrt{2}$

[참고]

선분 MC의 중점을 D$'$이라 하면 점 D$'$은 삼각형 BCM의 외접원의 중심이므로 삼각형 ABD$'$에서

$\overline{\mathrm{AB}}=\mathrm{c}=4\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{AD'}}=\dfrac{3}{4}\overline{\mathrm{AC}}=3\sqrt{6}$, $\overline{\mathrm{D'B}}=\sqrt{6}$

즉, $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{D'B}}^2=\overline{\mathrm{AD'}}^2$이 성립하므로 $\angle\mathrm{ABD'}=\dfrac{\pi}{2}$

따라서 점 B를 지나고 직선 AB에 수직인 직선이 선분 AC와 만나는 점 D는 선분 MC의 중점 D$'$과 일치한다.

277. 정답 ③

[수열의 귀납적 정의]

조건 (가)에서 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}-a_n=-3$ 또는 $a_{n+1}-a_n=3$

즉, $a_{n+1}=a_n-3$ 또는 $a_{n+1}=a_n+3$

조건 (나)에서

$a_7=a_1+3\times2+(-3)\times4=a_1-6$

이때 $a_8>a_7$이면 조건 (가)에서

$|b_9|=|a_8-a_7|=3$

이 되어 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

즉, $a_8\le a_7$에서

$a_8=a_7-3=a_1-9$

이고, 조건 (가), (다)에서

$b_9=\displaystyle\sum_{k=1}^{7}a_k=-15$ 또는 $b_9=\displaystyle\sum_{k=1}^{7}a_k=15$ …… ㉠

조건 (나)에서 $a_{n+1}-a_n=3$을 만족시키는 6 이하의 자연수 n의 값을 각각 p, q $(1\le p<q\le6)$이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제7항까지를 표로 나타내면 다음과 같다.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_1	a_1-3	a_1-6	a_1-9	a_1-12	a_1-15	a_1-18
	a_1+3	a_1	a_1-3	a_1-6	a_1-9	a_1-12
		a_1+6	a_1+3	a_1	a_1-3	a_1-6
			a_1+9	a_1+6	a_1+3	a_1
				a_1+12	a_1+9	a_1+6
					a_1+15	a_1+12
						a_1+18

이때 위의 표를 이용하여 p, q의 값에 따라 구한 $\displaystyle\sum_{k=1}^{7}a_k$의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

$(p,\ q)$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{7}a_k$	$(p,\ q)$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{7}a_k$
(1, 2)	$7a_1+3$	(3, 4)	$7a_1-21$
(1, 3)	$7a_1-3$	(3, 5)	$7a_1-27$
(1, 4)	$7a_1-9$	(3, 6)	$7a_1-33$
(1, 5)	$7a_1-15$	(4, 5)	$7a_1-33$
(1, 6)	$7a_1-21$	(4, 6)	$7a_1-39$
(2, 3)	$7a_1-9$	(5, 6)	$7a_1-45$
(2, 4)	$7a_1-15$		
(2, 5)	$7a_1-21$		
(2, 6)	$7a_1-27$		

즉, 9 이하의 자연수 m에 대하여

$b_9=\displaystyle\sum_{k=1}^{7}a_k$

$=7a_1+9-6m$

㉠에서 $b_9=-15$ 또는 $b_9=15$이므로

$7a_1+9-6m=-15$에서

$a_1=\dfrac{6(m-4)}{7}$ …… ㉡

$7a_1+9-6m=15$에서

$a_1=\dfrac{6(m+1)}{7}$ …… ㉢

이때 a_1의 값은 정수이므로 ㉡에서 $m-4$는 0 또는 7의 배수이어야 한다.

$m=4$일 때, $a_1=0$, $a_8=a_1-9=-9$에서

$a_1+a_8=-9$

㉢에서 $m+1$은 0 또는 7의 배수이어야 하므로

$m=6$일 때, $a_1=6$, $a_8=a_1-9=-3$에서

$a_1+a_8=3$

따라서 조건을 만족시키는 모든 a_1+a_8의 값의 합은

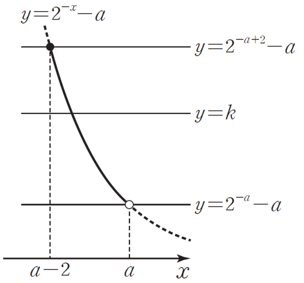
$-9+3=-6$

278. 정답 3

[삼각함수]

$a-2\le x<a$에서 곡선 $y=2^{-x}-a$와 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수를 $p(k)$라 하고,

$a\le x\le a+2$에서 곡선 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$와 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수를 $q(k)$라 하자.



함수 $y=2^{-x}-a$는 x의 값이 증가할 때, y의 값은 감소하므로 위의 그림에서

$$p(k)=\begin{cases}0 & (k\le 2^{-a}-a)\\ 1 & (2^{-a}-a<k\le 2^{-a+2}-a)\\ 0 & (k>2^{-a+2}-a)\end{cases}$$

임을 알 수 있다.

(ⅰ) $a\le 0$일 때

$2^{-a}-a\ge 1,\ -1\le\sin\frac{\pi}{2}x\le 1$

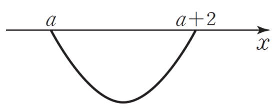
이므로 $k>2^{-a}-a$일 때 $q(k)=0$이다.

즉, 조건을 만족시키려면 $a\le x\le a+2$에서 곡선 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 2인 정수 k의 개수가 2이어야 한다.

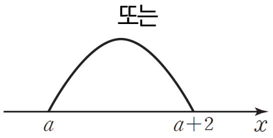
이때 함수 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$이므로 $q(k)$의 값은 정수 a의 값에 따라 다음과 같다.

① $a=2m$ (m은 정수)인 경우

$a\le x\le a+2$에서 곡선 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$는 그림과 같다.



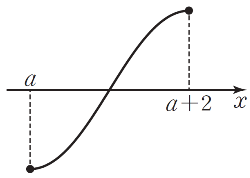
또는



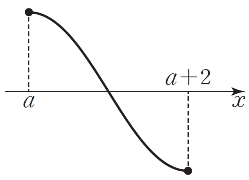
즉, $q(k)=2$를 만족시키는 정수 k의 값은 0뿐이므로 조건을 만족시키지 않는다.

② $a=2m-1$ (m은 정수)인 경우

$a\le x\le a+2$에서 곡선 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$는 그림과 같다.



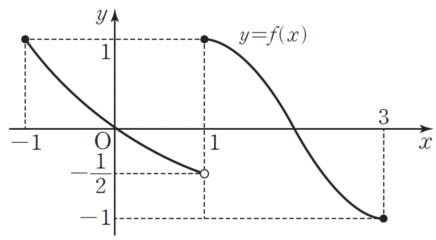
또는



즉, $q(k)=2$를 만족시키는 정수 k는 존재하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a=1$일 때

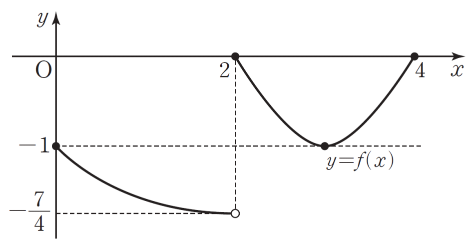
곡선 $y=f(x)$는 그림과 같다.



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 k의 값은 0, 1로 그 개수가 2이므로 조건을 만족시킨다.

(ⅲ) $a=2$일 때

곡선 $y=f(x)$는 그림과 같다.



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 k의 값은 -1, 0으로 그 개수가 2이므로 조건을 만족시킨다.

(ⅳ) $a\ge 3$일 때

$2^{-a+2}-a\le-\frac{5}{2}<-1,\ -1\le\sin\frac{\pi}{2}x\le 1$

이므로 $k\le 2^{-a+2}-a$일 때 $q(k)=0$이다.

즉, 조건을 만족시키려면 $a\le x\le a+2$에서 곡선 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 2인 정수 k의 개수가 2이어야 한다.

이때 (ⅰ)과 마찬가지의 방법으로 조사하면 $q(k)=2$를 만족시키는

정수 k의 개수가 2가 되도록 하는 정수 a는 존재하지 않음을 알 수 있다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서 조건을 만족시키는 정수 a의 값은 1, 2이므로 그 합은 3이다.

279. 정답 12

[미분과 적분의 관계]

$$\int_{-1}^{x} f(t)\{t+f(x)\}dt$$

$$=\int_{-1}^{x} \{tf(t)+f(x)f(t)\}dt$$

$$=\int_{-1}^{x} tf(t)dt+f(x)\int_{-1}^{x} f(t)dt$$

이므로 조건 (다)에서

$$g(x)=\int_{-1}^{x} tf(t)dt+f(x)\int_{-1}^{x} f(t)dt \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$g'(x)=xf(x)+f'(x)\int_{-1}^{x} f(t)dt+\{f(x)\}^2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

조건 (나)에서

$$1<\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^5+1}<4$$

이므로 다항함수 $g(x)$의 차수는 5이다.

다항함수 $f(x)$가 상수함수이면 등식 ㉠을 만족시키지 않는다.

즉, 다항함수 $f(x)$의 차수를 n이라 하면 $n\ge 1$이고

㉠에서 우변의 차수는 $2n+1$이다.

$2n+1=5$에서 $n=2$이고, 조건 (가)에서 $f'(0)=0$이므로

$$f(x)=ax^2+b \ (a,\ b\text{는 상수이고, } a\ne 0) \quad \cdots\cdots ㉢$$

으로 놓을 수 있다.

㉡의 양변에 $x=0$을 대입하면

$g'(0)=\{f(0)\}^2=0$

즉, $f(0)=b\equiv$

㉡의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$g'(-1)=-f(-1)+f'(-1)\times 0+\{f(-1)\}^2$

$\qquad=\{f(-1)\}^2-f(-1)$

이때 조건 (가)에서 $g'(-1)=6$이므로

$\{f(-1)\}^2-f(-1)=6$

$\{f(-1)+2\}\{f(-1)-3\}=0$

$f(-1)=-2$ 또는 $f(-1)=3$

(ⅰ) $f(-1)=-2$일 때

$f(x)=ax^2$에서

$f(-1)=a=-2$

$f(x)=-2x^2=-2x^2$이므로

$f(2)=-8$

(ⅱ) $f(-1)=3$일 때

$f(x)=ax^2$에서

$f(-1)=a=3$

$f(x)=3x^2$이므로

$f(2)=12$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(2)$의 최댓값은 12이다.

[참고]

두 함수

$$f(x)=-2x^2,\ g(x)=\frac{4}{3}x^5-\frac{1}{2}x^4+\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{2}$$

또는

$$f(x)=3x^2,\ g(x)=3x^5+\frac{3}{4}x^4+3x^2-\frac{3}{4}$$

은 문제의 조건을 만족시킨다.

280. 정답 23

[도함수의 활용]

$y=t-2^x$에서

$x=\log_2(t-y)$

즉, 함수 $f(x)$의 역함수는

$$f^{-1}(x)=\log_2(t-x) \quad \cdots\cdots ㉠$$

$p(x)=a(x-2)(x-3)$

$\qquad=a(x^2-5x+6)$ (a는 양수)

로 놓으면

$p'(x)=a(2x-5)$

$p'(x)=a$에서

$x=3$

이때 곡선 $y=p(x)$ 위의 점 $(3,\ 0)$에서의 접선의 방정식은

$y=a(x-3)$

즉, $t=-3$일 때 직선 $y=a(x+t)$와 곡선 $y=p(x)$는 접한다.

또 직선 $y=a(x+t)$와 곡선 $y=a(x-2)(x-3)$이 $x=t$인 점에서 만난다면

$a(t-2)(t-3)=2at$에서

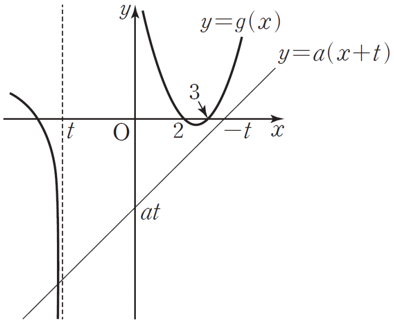
$a(t^2-7t+6)=0$

$a(t-1)(t-6)=0$

$t=1$ 또는 $t=6$

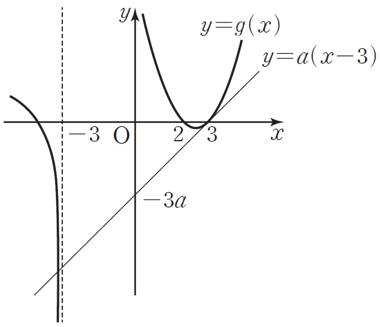
즉, $t=1$ 또는 $t=6$일 때 직선 $y=a(x+t)$와 곡선 $y=a(x-2)(x-3)$은 $x=t$인 점에서 만난다.

(ⅰ) $t<-3$일 때



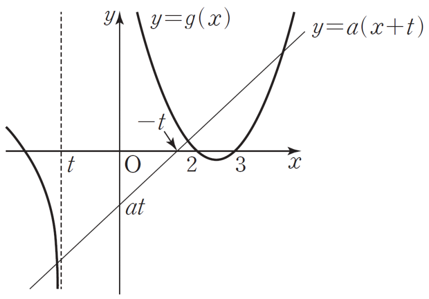
직선 $y=a(x+t)$와 함수 $y=g(x)$의 그래프의 서로 다른 교점의 개수는 1이다.

(ii) $t=-3$일 때



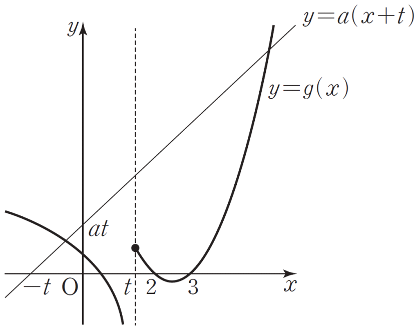
직선 $y=a(x-3)$과 함수 $y=g(x)$의 그래프의 서로 다른 교점의 개수는 2이다.

(iii) $-3<t\le 1$일 때



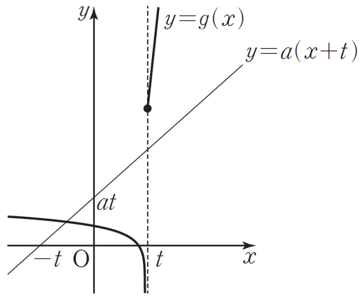
직선 $y=a(x+t)$와 함수 $y=g(x)$의 그래프의 서로 다른 교점의 개수는 3이다.

(iv) $1<t\le 6$일 때



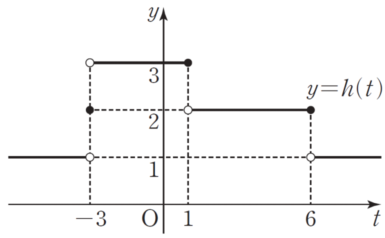
직선 $y=a(x+t)$와 함수 $y=g(x)$의 그래프의 서로 다른 교점의 개수는 2이다.

(v) $t>6$일 때



직선 $y=a(x+t)$와 함수 $y=g(x)$의 그래프의 서로 다른 교점의 개수는 1이다.

(ⅰ)~(ⅴ)에서 함수 $y=h(t)$의 그래프는 그림과 같다.



이 그래프에서 $h(-3)=2$, $\lim\limits_{t\to-3-}h(t)=1$, $\lim\limits_{t\to-3+}h(t)=3$

이므로 등식

$$\left\{h(b)-\lim_{t\to b-}h(t)\right\}\left\{h(b)-\lim_{t\to b+}h(t)\right\}=-1$$

을 만족시키는 실수 b의 값은 -3이다.

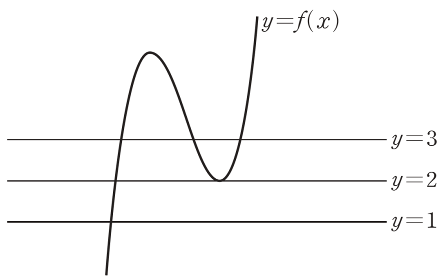
따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}h(b+k)&=\sum_{k=1}^{10}h(k-3)\\&=h(-2)+h(-1)+h(0)+\cdots+h(7)\\&=3\times4+2\times5+1\\&=23\end{aligned}$$

281. 정답 ⑤

[도함수의 활용]

삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수는 1 또는 2 또는 3 이므로 $g(1)<g(2)<g(3)$이 성립하려면 $g(1)=1$, $g(2)=2$, $g(3)=3$이어야 한다.



그러므로 함수 $f(x)$의 극댓값은 3보다 크고 극솟값은 2이다.

$f(x)=2x^3-3ax^2+2a^2+a$에서

$f'(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$

이므로 $f'(0)=f'(a)=0$

이때 $a>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값, $x=a$에서 극솟값을 갖는다.

$f(0)>3$, $f(a)=2$

$f(0)>3$에서

$2a^2+a>3$

$2a^2+a-3>0$

$(2a+3)(a-1)>0$

$a>0$이므로 $a>1$ …… ㉠

또 $f(a)=2$에서

$2a^3-3a^3+2a^2+a=2$

$a^3-2a^2-a+2=0$

$a^2(a-2)-(a-2)=0$

$(a^2-1)(a-2)=0$

$(a+1)(a-1)(a-2)=0$

㉠에서 $a=2$

따라서 $f(x)=2x^3-6x^2+10$이므로

함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(0)=10$이다.

282. 정답 ②

[수열의 합]

$\sum_{k=1}^{n} a_k=a_n a_{n+1}$에 $n=1$을 대입하면 $a_1=a_1a_2$

$a_1\neq 0$이므로 $a_2=1$

$\sum_{k=1}^{n} a_k=a_n a_{n+1}$에서 n 대신 $n+1$을 대입하면

$$\begin{aligned}a_{n+1}a_{n+2}&=\sum_{k=1}^{n+1} a_k\\&=\sum_{k=1}^{n} a_k+a_{n+1}\\&=a_na_{n+1}+a_{n+1}\\&=a_{n+1}(a_n+1)\end{aligned}$$

모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}\neq 0$이므로

$a_{n+2}=a_n+1$ …… ㉠

㉠에 $n=2k-1$을 대입하면

$a_{2k+1}=a_{2k-1}+1$이고 $a_1=2$이므로

$a_{2k-1}=2+(k-1)\times 1$

$\quad=k+1$

또 ㉠에 $n=2k$를 대입하면

$a_{2k+2}=a_{2k}+1$이고 $a_2=1$이므로

$a_{2k}=1+(k-1)\times 1$

$\quad=k$

따라서

$\sum_{k=1}^{10} a_k=a_{10}\times a_{11}$

$=5\times(6+1)$

$=35$

283. 정답 ②

[미분계수]

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+1}{x^2+x-2}=5$에서 $x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1}\{f(x)+1\}=0$이고 다항함수 $f(x)$는 연속함수이므로

$f(1)+1=0$ 에서

$f(1)=-1$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+1}{x^2+x-2}&=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x+2)}\\&=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)}\times\frac{1}{x+2}\right\}\\&=f'(1)\times\frac{1}{3}\\&=5\text{이므로}\end{aligned}$$

$f'(1)=15$

한편, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+g(x)}{x-1}=12$ 에서 $x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1}\{f(x)+g(x)\}=0$이고 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 연속함수이므로

$f(1)+g(1)=0$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+g(x)}{x-1}&=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}+\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\right\}\\&=f'(1)+g'(1)=12\end{aligned}$$

이므로

$g'(1)=12-f'(1)$

$\quad=12-15=-3$

따라서

$f'(1)\times g'(1)=15\times(-3)$

$\quad=-45$

284. 정답 ③

[삼각방정식]

$f(x)=\sin 3x$, $g(x)=\pi\cos\pi x$이므로

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\pi\cos\pi x$

$\quad=\sin(3\pi cos\pi x)$

방정식 $(f\circ g)(x)=0$에서

$\sin(3\pi cos\pi x)=0$ …… ㉠

$1<x<2$에서 $\pi<\pi x<2\pi$이므로

$-1<\cos\pi x<1$

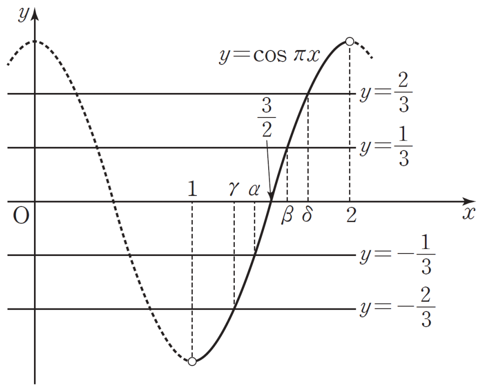
$-3\pi<3\pi\cos\pi x<3\pi$이므로 방정식 ㉠에서

$3\pi\cos\pi x=-2\pi$ 또는 $3\pi\cos\pi x=-\pi$

또는 $3\pi\cos\pi x=0$ 또는 $3\pi\cos\pi x=\pi$ 또는 $3\pi\cos\pi x=2\pi$

즉, $\cos\pi x=-\frac{2}{3}$ 또는 $\cos\pi x=-\frac{1}{3}$ 또는 $\cos\pi x=0$

또는 $\cos\pi x=\frac{1}{3}$ 또는 $\cos\pi x=\frac{2}{3}$



이때 방정식 $\cos\pi x=0$의 근은 $x=\frac{3}{2}$

함수 $y=\cos\pi x$의 그래프는 점 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$에 대하여 대칭이므로 두 방정식 $\cos\pi x=-\frac{1}{3}$, $\cos\pi x=\frac{1}{3}$의 근을 각각 α, β라 하면

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{2}$, $\alpha+\beta=3$

두 방정식 $\cos\pi x=-\frac{2}{3}$, $\cos\pi x=\frac{2}{3}$의 근을 각각 γ, δ라 하면

$\frac{\gamma+\delta}{2}=\frac{3}{2}$, $\gamma+\delta=3$

따라서 $1<x<2$에서 방정식 $(f\circ g)(x)=0$의 모든 실근의 합은

$$\frac{3}{2}+\alpha+\beta+\gamma+\delta=\frac{3}{2}+3+3=\frac{15}{2}$$

285. 정답 ①

[넓이]

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다.

조건 (가)에서 $f'(-x)=f'(x)$이므로

$f'(x)=3x^2+a$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+a)dx$

$=x^3+ax+C$ (단, C는 적분상수)

이므로 조건 (나)에서

$\int_{-1}^{1}f(x)dx=2\int_{0}^{1}Cdx=2\Big[Cx\Big]_0^1$

$=2C=10$

$C=5$

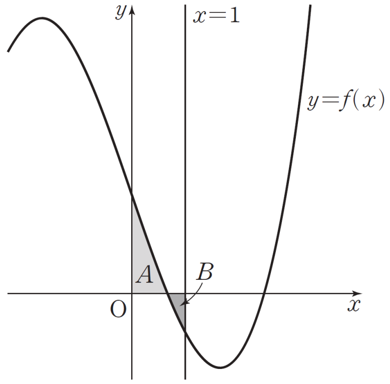
즉 $f(x)=x^3+ax+5$

조건 (다)에서

$f(1)=1+a+5=-2$

$a=-8$

이므로 $f(x)=x^3-8x+5$



따라서

$A-B=\int_0^1 f(x)dx$

$=\int_0^1(x^3-8x+5)dx$

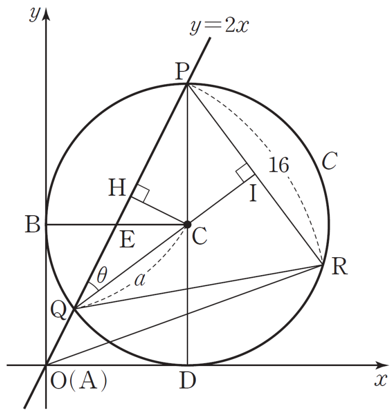
$=\left[\frac{1}{4}x^4-4x^2+5x\right]_0^1$

$=\frac{1}{4}-4+5$

$=\frac{5}{4}$

286. 정답 ③

[사인법칙과 코사인법칙]



그림과 같이 정사각형 ABCD 와 원 C를 점 A가 원점, 점 B가 y축, 점 D가 x축 위에 오도록 좌표평면 위에 두면 직선 AP(AE)의 방정식은 $y=2x$이고, 원 C가 x축과 y축에 동시에 접하므로 원 C의 중심을 $\mathrm{C}(a,\ a)$ $(a>0)$이라 하면 원 C의 반지름의 길이는 a이다. 점 C 에서 직선 $y=2x$에 내린 수선의 발을 H 라 하면 선분 CH 의 길이는 점 $\mathrm{C}(a,\ a)$와 직선

$2x-y=0$사이의 거리와 같으므로

$\overline{\mathrm{CH}}=\dfrac{|2\times a-a|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{a}{\sqrt{5}}$

$\angle\mathrm{CQH}=\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면 $\overline{\mathrm{CQ}}=a$이므로

삼각형 CQH에서

$\sin\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{CH}}}{\overline{\mathrm{CQ}}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ …… ㉠

이때 $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$이므로

$\overline{\mathrm{QH}}=\overline{\mathrm{CQ}}\ \cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}a$

한편, 삼각형 CQP는 $\overline{\mathrm{CQ}}=\overline{\mathrm{CP}}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=2\,\overline{\mathrm{QH}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}a$

이고, 점 Q에서 선분 PR에 내린 수선의 발을 I라 하면

삼각형 QRP는 $\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{QR}}$인 이등변삼각형이므로 선분 QI는 원 C의 중심 C를 지나고

$\overline{\mathrm{PI}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{PR}}=8$

이다. 즉, 직각삼각형 QPI에서

$\sin\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{PI}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}=\dfrac{8}{\dfrac{4}{\sqrt{5}}a}$

$=\dfrac{2\sqrt{5}}{a}$

㉠에서 $\dfrac{2\sqrt{5}}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$이므로

$a=10$

그러므로 세 점 D, C, P 는

D$(10,\ 0)$, C$(10,\ 10)$, P$(10,\ 20)$

따라서 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{10^2+20^2}=10\sqrt{5}$이고,

$\angle\mathrm{OPR}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$이므로 삼각형 OPR에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{OR}}^2=\overline{\mathrm{OP}}^2+\overline{\mathrm{PR}}^2-2\times\overline{\mathrm{OP}}\times\overline{\mathrm{PR}}\times\cos(\angle\mathrm{OPR})$

$=(10\sqrt{5})^2+16^2-2\times10\sqrt{5}\times16\times\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

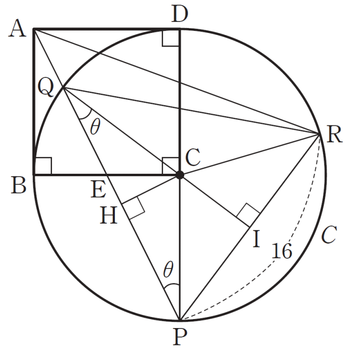
$=500+256-320\sqrt{5}\times\sin\theta=756-320\sqrt{5}\times\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$=756-320=436$

따라서

$\overline{\mathrm{AR}}^2=\overline{\mathrm{OR}}^2=436$

다른 풀이



점 E가 선분 BC의 중점이고 선분 AD와 선분 BC가 평행하므로 세 점 D, C, P는 한 직선 위에 있고, 선분 DP는 원 C의 지름이다.

원 C의 반지름의 길이를 r이라 하면

$\overline{\mathrm{AD}}=r$, $\overline{\mathrm{DP}}=2r$에서

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{5}\,r$

$\angle\mathrm{APD}=\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ …… ㉠

삼각형 CQP는 $\overline{\mathrm{CQ}}=\overline{\mathrm{CP}}$인 이등변삼각형이므로 점 C에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하면 ㉠에서

$\overline{\mathrm{PQ}}=2\,\overline{\mathrm{PH}}=2r\cos\theta$

$=\dfrac{4}{\sqrt{5}}r$ …… ㉡

한편, 삼각형 PQR은 $\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{QR}}$인 이등변삼각형이고, 삼각형 CPR은 $\overline{\mathrm{CP}}=\overline{\mathrm{CR}}$인 이등변삼각형이므로 점 Q에서 선분 PR에 내린 수선의 발을 I라 하면 점 C는 선분 QI 위의 점이다.

㉠, ㉡에서

$\overline{\mathrm{PI}}=\overline{\mathrm{PQ}}\sin\theta$

$=\dfrac{4}{\sqrt{5}}r\times\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$=\dfrac{4}{5}r$

$\dfrac{4}{5}r=\dfrac{1}{2}\times16=8$ 에서 $r=10$

즉, $\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{5}\,r=10\sqrt{5}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}^2=500$

또 직각삼각형 PQI에서 $\angle\mathrm{QPI}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$이므로

삼각형 APR에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AR}}^2=\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{PR}}^2-2\times\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{PR}}\times\cos(\angle\mathrm{APR})$

$=\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{PR}}^2-2\times\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{PR}}\times\cos(\angle\mathrm{QPI})$

$=\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{PR}}^2-2\times\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{PR}}\times\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{PR}}^2-2\times\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{PR}}\times\sin\theta$

$=500+256-2\times10\sqrt{5}\times16\times\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$=756-320$

$=436$

287. 정답 ③

[도함수의 활용]

이차함수 $g(x)$는 계수가 모두 정수이므로 조건 (가)에 의하여

$g(x)=p(x-1)^2+q$ (p, q는 정수, $p\neq0$)

으로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서 $f(1)=g(1)$, $f(3)=g(3)$이고

$f(x)-g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)-g(x)=(x-1)(x-3)(x+k)$ (k는 상수)

로 놓을 수 있다.

이때 조건 (다)에 의하여

$f(x)-g(x)=(x-1)(x-3)^2$

또는 $f(x)-g(x)=(x-1)^2(x-3)$이므로

$f(x)=(x-1)(x-3)^2+p(x-1)^2+q$ 또는

$f(x)=(x-1)^2(x-3)+p(x-1)^2+q$

이때 $g(1)=q$이므로

(ⅰ) $f(x)=(x-1)(x-3)^2+p(x-1)^2+q$인 경우

$f(x)-g(1)$

$=(x-1)(x-3)^2+p(x-1)^2$

$=(x-1)\{x^2+(p-6)x+9-p\}$

이때 $1^2+(p-6)\times1+9-p\neq0$ 이므로

방정식 $f(x)-g(1)=0$이 한 실근만 가지려면 이차방정식

$x^2+(p-6)x+9-p=0$은 실근을 갖지 않아야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2+(p-6)x+9-p=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(p-6)^2-4\times(9-p)$

$=p^2-8p=p(p-8)<0$

에서 p는 $0<p<8$인 정수이다.

이때

$f(2)-g(1)$

$=(2-1)\{2^2+2(p-6)+9-p\}=p+1$

(ⅱ) $f(x)=(x-1)^2(x-3)+p(x-1)^2+q$인 경우

$f(x)-g(1)$

$=(x-1)^2(x-3)+p(x-1)^2$

$=(x-1)^2(x-3+p)$

방정식 $f(x)-g(1)=0$이 한 실근만 가져야 하므로

$3-p=1$에서 $p=2$

즉, $f(x)-g(1)=(x-1)^3$이므로

$f(2)-g(1)=1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 합은

$\sum_{p=1}^{7}(p+1)+1=\sum_{p=1}^{8}p$

$=\frac{8\times9}{2}$

$=36$

288. 정답 32

[로그함수]

점 $A(0,\ 4)$를 지나고 기울기가 음수인 직선의 방정식을

$y=mx+4$ $(m<0)$이라 하자.

$\overline{AB}=\overline{BC}$에서 점 B의 x좌표를 α라 하면 점 C x좌표는 2α이므로

$\log_2\alpha=m\alpha+4$ …… ㉠

$\log_4 2\alpha=2m\alpha+4$ …… ㉡

㉡에서

$\log_4 2\alpha=\frac{1}{2}\log_2 2\alpha$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_2\alpha$

이므로

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_2\alpha=2m\alpha+4$

$\log_2\alpha=4m\alpha+7$ …… ㉢

㉢−㉠을 하면

$0=3m\alpha+3$

$m\alpha=-1$

㉠에서

$\log_2\alpha=3$

$\alpha=2^3=8$

$m\alpha=-1$이므로

$m=-\frac{1}{8}$

그러므로 직선 AB의 방정식은

$y=-\frac{1}{8}x+4$

점 D의 x좌표는 $-\frac{1}{8}x+4=0$에서

$x=32$

이때 점 C의 x좌표는

$x=2\alpha=2\times8=16$

이므로 y좌표는

$y=\log_4 16=\log_4 4^2=2\log_4 4=2$

따라서 삼각형 COD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times32\times2=32$

289. 정답 31

[넓이]

직선 l의 방정식을 $y=cx+d$라 하면 직선 l이 곡선 $y=f(x)$와 두 점

$\mathrm{A}(-1,\ f(-1))$, $\mathrm{B}(1,\ f(1))$에서 접하므로

$f(x)-(cx+d)=(x+1)^2(x-1)^2$

$f(x)=x^3-2x^2+cx+d+1$이므로

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+2x$에서

$a=0,\ b=-2,\ c=2,\ d=-1$

즉, $f(x)=x^4-2x^2+2x$이고,

직선 l의 방정식은

$y=2x-1$

직선 m은 직선 l과 평행하므로 직선 m의 기울기는 2이고, 직선 m과 곡선 $y=f(x)$의 접점을 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$라 하면

$f'(t)=4t^3-4t+2=2$에서

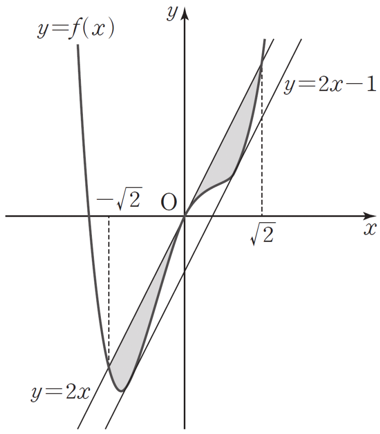
$4t(t+1)(t-1)=0$

$t\neq-1,\ t\neq1$이므로

$t=0$

그러므로 점 P의 좌표는 $(0,\ 0)$이고,

직선 m의 방정식은 $y=2x$이다.



방정식 $f(x)=2x$, 즉 $x^2(x^2-2)=0$에서

$x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$

그러므로

$$S=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\{2x-f(x)\}dx$$

$$=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(-x^4+2x^2)dx$$

$$=2\int_{0}^{\sqrt{2}}(-x^4+2x^2)dx$$

$$=2\left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{16\sqrt{2}}{15}$$

이므로 $p=15,\ q=16$

따라서 $p+q=31$

290. **정답** 161

[수열의 귀납적 정의]

$$a_n=\begin{cases}a_{n+1}-4 & (|a_n|\text{이 3의 배수가 아닌 경우})\\ 3a_{n+1} & (|a_n|\text{이 3의 배수인 경우})\end{cases}$$

이고, 조건 (나)에서 $|a_3|=|a_5|$이므로 $|a_3|$의 값이 3의 배수인 경우와 아닌 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) $|a_3|\neq3k$ (k는 자연수)인 경우

$a_4=a_3+4$이므로

$a_5=a_4+4=a_3+8$ 또는

$a_5=\frac{1}{3}a_4=\frac{1}{3}a_3+\frac{4}{3}$

① $a_5=a_3+8$인 경우

$|a_3|=|a_5|$에서

$|a_3|=|a_3+8|$

$a_3+8=-a_3$에서

$a_3=-4$

이때 $a_4=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

② $a_5=\frac{1}{3}a_3+\frac{4}{3}$인 경우

$|a_3|=|a_5|$에서

$|a_3|=\left|\frac{1}{3}a_3+\frac{4}{3}\right|$

양변을 제곱하여 정리하면

$a_3{}^2-a_3-2=0$

$(a_3+1)(a_3-2)=0$

$a_3=-1$ 또는 $a_3=2$

이때 가능한 a_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$#의 값은 다음과 같다.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
-15	-5	-1	3	1
	-3			
-6	-2	2	6	2
	6			

그런데 $a_2=-3$이면 $|a_2|=|a_4|=3$, $a_2=6$이면 $|a_2|=|a_4|=6$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

즉, 가능한 $|a_1|$의 값은 15, 6이다.

(ⅱ) $|a_3|=3k$ (k는 자연수)인 경우

$a_4=\frac{1}{3}a_3$이므로

$a_5=a_4+4=\frac{1}{3}a_3+4$ 또는 $a_5=\frac{1}{3}a_4=\frac{1}{9}a_3$

① $a_5=\frac{1}{3}a_3+4$인 경우

$|a_3|=|a_5|$에서

$|a_3|=\left|\frac{1}{3}a_3+4\right|$

양변을 제곱하여 정리하면

$a_3{}^2-3a_3-18=0$

$(a_3+3)(a_3-6)=0$

$a_3=-3$ 또는 $a_3=6$

이때 가능한 a_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$의 값은 다음과 같다.

<table>
<tr><th>a_1</th><th>a_2</th><th>a_3</th><th>a_4</th><th>a_5</th></tr>
<tr><td>-11</td><td rowspan="2">-7</td><td rowspan="4">-3</td><td rowspan="4">-1</td><td rowspan="4">3</td></tr>
<tr><td>-21</td></tr>
<tr><td>-13</td><td rowspan="2">-9</td></tr>
<tr><td>-27</td></tr>
<tr><td></td><td>2</td><td rowspan="3">6</td><td rowspan="3">2</td><td rowspan="3">6</td></tr>
<tr><td>14</td><td rowspan="2">18</td></tr>
<tr><td>54</td></tr>
</table>

그런데 $a_2=2$이면 $|a_2|=|a_4|=2$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

즉, 가능한 $|a_1|$의 값은 $11,\ 21,\ 13,\ 27,\ 14,\ 54$이다.

② $a_5=\dfrac{1}{9}a_3$인 경우

$|a_3|=|a_5|$에서

$|a_3|=\left|\dfrac{1}{9}a_3\right|$

이때 $a_3=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 합은

$(15+6)+(11+21+13+27+14+54)$

$=21+140$

$=161$

291. 정답 ①

[속도와 거리]

두 점 P, Q의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하자.

$$x_1(t)=x_1(0)+\int_0^t v_1(s)\,ds$$
$$=0+\int_0^t (3s^2-6s)\,ds$$
$$=\Big[s^3-3s^2\Big]_0^t$$
$$=t^3-3t^2$$
$$x_2(t)=x_2(0)+\int_0^t v_2(s)\,ds$$
$$=0+\int_0^t (2s-3)\,ds$$
$$=\Big[s^2-3s\Big]_0^t$$
$$=t^2-3t$$

두 점 P, Q가 만날 때 두 점의 위치가 같으므로

$x_1(t)=x_2(t)$에서

$t^3-3t^2=t^2-3t$

$t^3-4t^2+3t=0$

$t(t^2-4t+3)=0$

$t=0$ 또는 $t=1$ 또는 $t=3$

이때 $0<a<b$이므로

$a=1,\ b=3$

따라서 점 P가 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 움직인 거리는

$$\int_1^3 |v_1(t)|\,dt=\int_1^2 \{-v_1(t)\}\,dt+\int_2^3 v_2(t)\,dt$$
$$=\Big[-t^3+3t^2\Big]_1^2+\Big[t^3-3t^2\Big]_2^3$$
$$=\{(-8+12)-(-1+3)\}+\{(27-27)-(8-12)\}$$
$$=2+4$$
$$=6$$

292. 정답 ①

[접선의 방정식]

$f(x)=x^3+6x^2+a$에서

$f'(x)=3x^2+12x$

이므로 점 $(0,\ k)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점을 $(t,\ f(t))$라 하면 접선의 방정식은

$y=(3t^2+12t)(x-t)+(t^3+6t^2+a)$

이 직선이 점 $(0,\ k)$를 지나므로

$k=(3t^2+12t)\times(-t)+t^3+6t^2+a$

$=-3t^3-12t^2+t^3+6t^2+a$

$=-2t^3-6t^2+a$

$h(t)=-2t^3-6t^2+a$라 하자.

접선의 개수가 3이 되려면 직선 $y=k$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 서로 다른 점의 개수가 3이어야 한다.

$h'(x)=-6x^2-12x$

$=-6x(x+2)$

이므로 $h'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

그러므로 직선 $y=k$가 함수 $y=h(x)$의 그래프와 만나는 서로 다른 점의 개수가 3이 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 범위는

$h(-2)<k<h(0)$

$-8+a<k<a$

따라서 k는 $a-7$부터 $a-1$까지의 정수이므로 그 합은

$(a-7)+(a-6)+\cdots+(a-2)+(a-1)$

$=7a-28$

이고, 그 합이 42이므로

$7a-28=42$

$7a=70$

$a=10$

293. 정답 ⑤

조건 (가)에서 $a_{n+1}-a_n=-8$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 -8인 등차수열이다.

$$S_n=\frac{n\{2a_1+(n-1)\times(-8)\}}{2}$$
$$=-n(4n-a_1-4)$$

이때 함수 $y=-x(4x-a_1-4)$의 그래프는 직선 $y=\frac{a_1+4}{8}$에 대하여 대칭이고, $\sum_{k=m}^{m+6}S_k$가 최대인 경우는 S_n의 최댓값이 S_{m+3}일 때이므로

$$\frac{a_1+4}{8}-\frac{1}{2}\le 6\le\frac{a_1+4}{8}+\frac{1}{2}$$

$$\frac{11}{2}\le\frac{a_1+4}{8}\le\frac{13}{2}$$

$40\le a_1\le 48$

따라서 a_1의 최댓값은 48, 최솟값은 40이므로 그 합은

$48+40=98$

다른 풀이

조건 (가)에서 $a_{n+1}-a_n=-8$이므로 $\{a_n\}$은 공차가 -8인 등차수열이다.

$$S_n=\frac{n\{2a_1+(n-1)\times(-8)\}}{2}$$
$$=-n(4n-a_1-4)$$

조건 (나)에서 $\sum_{k=m}^{m+6}S_k$는 $m=3$에서 최댓값을 가지므로

$S_3+S_4+S_5+\cdots+S_8+S_9\ge S_2+S_3+S_4+\cdots+S_7+S_8$에서

$S_9\ge S_2$

$-9(4\times9-a_1-4)\ge-2(4\times2-a_1-4)$

$-28+9a_1\ge-8+2a_1$

$a_1\ge 40$ $\cdots\cdots$ ㉠

또

$S_3+S_4+S_5+\cdots+S_8+S_9\ge S_4+S_5+S_6+\cdots+S_9+S_{10}$에서

$S_3\ge S_{10}$

$-3(4\times3-a_1-4)\ge-10(4\times10-a_1-4)$

$-24+3a_1\ge-360+10a_1$

$a_1\le 48$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$40\le a_1\le 48$

따라서 a_1의 최댓값은 48, 최솟값은 40이므로 그 합은 $48+40=98$

294. 정답 ④

[사인함수의 그래프]

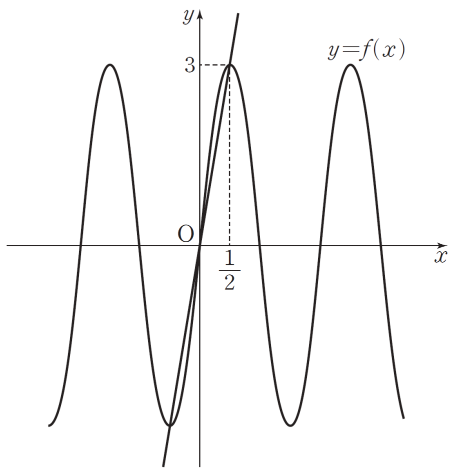
함수 $f(x)=a\sin bx$의 그래프와 직선 $y=6x$는 모두 원점을 지나고, 원점에 대하여 대칭이므로 세 교점의 y좌표는 $\alpha=-\gamma,\ \beta=0,\ \gamma$이다.

이때 $\gamma-\alpha=6$이므로

$2\gamma=6,\ \gamma=3$

즉, 세 점 $\left(-\frac{1}{2},\ -3\right)$, $(0,\ 0)$, $\left(\frac{1}{2},\ 3\right)$이 교점이다.

제1사분면에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=6x$와 점 $\left(\frac{1}{2},\ 3\right)$에서 만나고, 함수 $f(x)$의 최댓값이 3이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $f(x)=a\sin bx\ (b>0)$의 주기는 $\frac{2\pi}{b}$이므로 그래프에서

$$\frac{1}{4}\times\frac{2\pi}{b}=\frac{1}{2}$$

$b=\pi$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=a\sin\frac{\pi}{2}$$
$$=3$$

이므로

$a=3$

따라서 $f(x)=3\sin\pi x$이므로

$$f\left(\frac{a}{4}\right)=f\left(\frac{3}{4}\right)$$
$$=3\sin\frac{3}{4}\pi$$
$$=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

295. 정답 ②

[다항함수의 미분]

$f(x)=\left|x^2-3x-4\right|$

$\quad=\left|(x+1)(x-4)\right|$

이므로 $h(x)=f(x)g(x)$라 하면

$$h(x)=\begin{cases}-(x+1)(x-4)g(x) & (-1<x<4)\\ (x+1)(x-4)g(x) & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 4)\end{cases}$$

함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=-1$에서 미분가능하다.

이때 $h(-1)=0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to -1-}\frac{h(x)}{x+1}=\lim_{x\to -1+}\frac{h(x)}{x+1}$에서

$\displaystyle\lim_{x\to -1-}\frac{(x+1)(x-4)g(x)}{x+1}=\lim_{x\to -1+}\frac{-(x+1)(x-4)g(x)}{x+1}$

$\displaystyle\lim_{x\to -1-}(x-4)g(x)=\lim_{x\to -1+}\{-(x-4)g(x)\}$

$-5g(-1)=5g(-1)$

$g(-1)=0$ …… ㉠

또 함수 $h(x)$가 $x=4$에서 미분가능하고, $h(4)=0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to 4-}\frac{h(x)}{x-4}=\lim_{x\to 4+}\frac{h(x)}{x-4}$

$\displaystyle\lim_{x\to 4-}\frac{-(x+1)(x-4)g(x)}{x-4}=\lim_{x\to 4+}\frac{(x+1)(x-4)g(x)}{x-4}$

$-5g(4)=5g(4)$

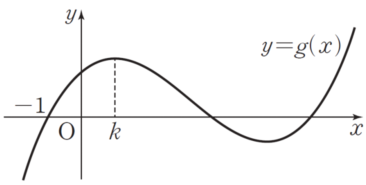
$g(4)=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$를

$g(x)=(x+1)(x-4)(x-a)$ (a는 상수)

라 할 수 있다.

함수 $g(x)$는 $x=k$ (k는 자연수)에서 극대이므로 삼차함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$g'(k)=0$이고, $0<k<4$

즉, $k=1$ 또는 $k=2$ 또는 $k=3$

또 $k<a$ …… ㉢

$g(x)=(x^2-3x-4)(x-a)$에서

$g'(x)=(2x-3)(x-a)+(x^2-3x-4)$

(ⅰ) $k=1$인 경우

$g'(1)=-(1-a)+(-6)=0$이므로

$-1+a-6=0$

$a=7$

(ⅱ) $k=2$인 경우

$g'(2)=(2-a)+(-6)=0$이므로

$-a-4=0$

$a=-4$

㉢을 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $k=3$인 경우

$g'(3)=3(3-a)+(-4)=0$이므로

$9-3a-4=0$

$a=\dfrac{5}{3}$

㉢을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $k=1,\ a=7$

따라서 $g(x)=(x^2-3x-4)(x-7)$이므로

$g(k)=g(1)$

$\quad=-6\times(-6)$

$\quad=36$

296. 정답 ④

[함수의 극한]

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}=2$에서 $x\to a$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

$f(x)$가 이차함수이므로

$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)=0$

즉,

$f(x)=p(x-a)(x-b)$ (b는 상수)

로 놓을 수 있다.

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{p(x-a)(x-b)}{x-a}$

$\quad=2$

$p(a-b)=2$ …… ㉠

모든 실수 t에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to t}\frac{f(x^2)}{f(x)}$의 값이 존재하므로

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x^2)}{f(x)}$과 $\displaystyle\lim_{x\to b}\frac{f(x^2)}{f(x)}$의 값이 존재한다.

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{p(x^2-a)(x^2-b)}{p(x-a)(x-b)}$에서 $x\to a$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉,

$\displaystyle\lim_{x\to a}p(x^2-a)(x^2-b)=0$이므로

$p(a^2-a)(a^2-b)=0$

이때 $p\neq 0$이므로

$a(a-1)(a^2-b)=0$ …… ㉡

또 $\displaystyle\lim_{x\to b}\frac{p(x^2-a)(x^2-b)}{p(x-a)(x-b)}$에서 $x\to b$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉,

$\displaystyle\lim_{x\to b}p(x^2-a)(x^2-b)=0$이므로

$p(b^2-a)(b^2-b)=0$

이때 $p\neq 0$이므로

$b(b-1)(b^2-a)=0$

$b=0$ 또는 $b=1$ 또는 $b=a^2$

(i) $b=0$인 경우

ⓒ에서 $a^2(a-1)=0$이므로

$a=0$ 또는 $a=1$

$a=0$일 때, ㉠을 만족시키지 않는다.

$a=1$일 때, ㉠에서

$p(1-0)=2$

$p=2$

(ii) $b=1$인 경우

ⓒ에서 $a(a-1)^2(a+1)=0$이므로

$a=0$ 또는 $a=1$ 또는 $a=-1$

$a=0$일 때, ㉠에서

$p(0-1)=2$

$p=-2$

$a=1$일 때, ㉠을 만족시키지 않는다.

$a=-1$일 때, ㉠에서

$p(-1-1)=2$

$p=-1$

(iii) $b=a^2$인 경우

ⓒ에서

$b^2(b^2-1)(b^4-b)=b^3(b-1)^2(b+1)(b^2+b+1)=0$

이고, (i), (ii)의 경우를 제외하면

$b=-1$

이때 $a=1$이므로

㉠에서

$p\{1-(-1)\}=2$

$p=1$

(i), (ii), (iii)에 의하여 함수 $f(x)$가 조건을 만족시키도록 하는 실수 p의 값은 $2,\ -2,\ -1,\ 1$이므로 그 개수는 4이다.

297. 정답 ③

[수열의 귀납적 정의]

a_n이 홀수인 자연수이면

$a_{n+1}=3a_n-1$

a_n이 짝수인 자연수이면

$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}$

이므로 a_{n+1}은 홀수 또는 짝수인 자연수이다.

이때 첫째항이 자연수이므로 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 자연수이다.

또 a_{n+1}이 홀수이면 a_n은 짝수이므로

$a_n=2a_{n+1}$이고,

a_{n+1}이 짝수이면

$a_n=\dfrac{a_{n+1}+1}{3}$ 또는 $a_n=2a_{n+1}$이다.

$a_5=13$은 홀수이므로

$a_4=2a_5=26$

a_4는 짝수이므로

$a_3=\dfrac{a_4+1}{3}=9$ 또는 $a_3=2a_4=52$

(i) $a_3=9$인 경우

a_3은 홀수이므로

$a_2=2a_3=18$

a_2는 짝수이므로

$a_1=\dfrac{a_2+1}{3}=\dfrac{19}{3}$ 또는 $a_1=2a_2=36$

이때 $\dfrac{19}{3}$은 자연수가 아니므로 $a_1=36$만 가능하다.

(ii) $a_3=52$인 경우

a_3은 짝수이므로

$a_2=\dfrac{a_3+1}{3}=\dfrac{53}{3}$ 또는 $a_2=2a_3=104$

이때 $\dfrac{53}{3}$은 자연수가 아니므로 $a_2=104$만 가능하다.

a_2는 짝수이므로

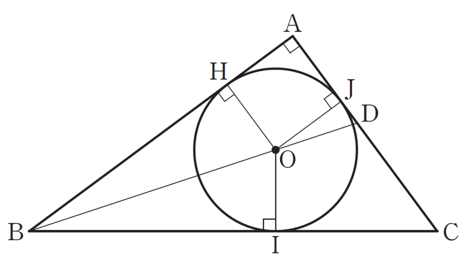
$a_1=\dfrac{a_2+1}{3}=35$ 또는 $a_1=2a_2=208$

(i), (ii)에 의하여 $a_5=13$이 되도록 하는 모든 a_1의 값은 $36,\ 35,\ 208$이므로 구하는 합은

$36+35+208=279$

298. 정답 143

[사인법칙]



점 O에서 선분 AB, BC, CA에 내린 수선의 발을 각각 H, I, J라 하자. 두 직선 HO, AD가 서로 평행하므로

$\overline{\mathrm{BH}}:\overline{\mathrm{HA}}=\overline{\mathrm{BO}}:\overline{\mathrm{OD}}$

$=3:1$

$\overline{\mathrm{BH}}=3k$이고,

$\overline{\mathrm{JA}}=\overline{\mathrm{HA}}=k$,

$\overline{\mathrm{BI}}=\overline{\mathrm{BH}}=3k$,

$\overline{CI}=\overline{CJ}$

$=\overline{CA}-\overline{JA}$

$=3-k$

이므로 삼각형 ABC에서

$\{3k+(3-k)\}^2=3^2+(3k+k)^2$

$(2k+3)^2=9+(4k)^2$

$4k^2+12k+9=9+16k^2$

$12k^2-12k=0$

$12k(k-1)=0$

이때 $k>0$이므로 $k=1$

$\sin C=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$

$=\dfrac{4}{5}$

삼각형 BOH에서

$\overline{BO}=\sqrt{3^2+1^2}$

$=\sqrt{10}$

이므로

$\overline{BO}=\dfrac{4}{3}\overline{BO}$

$=\dfrac{4}{3}\sqrt{10}$

삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BD}}{\sin C}=\dfrac{\frac{4}{3}\sqrt{10}}{\frac{4}{5}}$

$=\dfrac{5\sqrt{10}}{3}=2R$

에서

$R=\dfrac{5\sqrt{10}}{6}$

삼각형 BCD의 외접원의 넓이는

$\left(\dfrac{5\sqrt{10}}{6}\right)^2\pi=\dfrac{125}{18}\pi$

따라서 $p=18$, $q=125$이므로

$p+q=143$

299. 정답 147

[지수함수와 로그함수의 그래프]

점 O에서 직선 $y=-x+4$에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 직선 $y=x$와 $y=-x+4$의 교점이므로 점 H의 좌표는 $(2,\ 2)$이다.

$\overline{OH}=\sqrt{2^2+2^2}$

$=\sqrt{8}$

$=2\sqrt{2}$

삼각형 OAB의 넓이가 8이므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{OH}\times\overline{AB}=8$

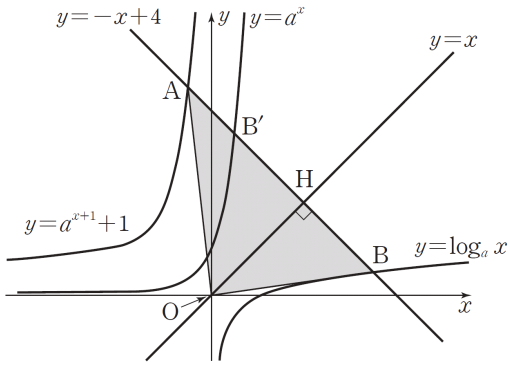
$\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\overline{AB}=8$

$\sqrt{2}\,\overline{AB}=8$

$\overline{AB}=8\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$=4\sqrt{2}$

곡선 $y=a^{x+1}+1$은 함수 $y=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같다.



함수 $y=a^x$은 함수 $y=\log_a x$의 역함수이므로 점 B를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라하면 점 B′은 $y=a^x$의 그래프 위의 점이다.

이때 점 B′이 직선 $y=-x+4$ 위의 점이므로 점 B′은 점 A를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것과 같다.

$\overline{AB'}=\sqrt{2}$이므로

$\overline{B'B}=\overline{AB}-\overline{AB'}$

$=4\sqrt{2}-\sqrt{2}$

$=3\sqrt{2}$

이고, $\overline{B'H}=\overline{HB}$에서

$\overline{HB}=\dfrac{1}{2}\times\overline{B'B}$

$=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

점 B는 점 H를 x축의 방향으로 $\dfrac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 $-\dfrac{3}{2}$만큼 평행이동한 것과 같으므로 점 B의 좌표는 $\left(2+\dfrac{3}{2},\ 2-\dfrac{3}{2}\right)$이다.

즉, $B\left(\dfrac{7}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

이때 점 B는 곡선 $y=\log_a x$ 위의 점이므로

$\dfrac{1}{2}=\log_a\dfrac{7}{2}$

$a^{\frac{1}{2}}=\dfrac{7}{2}$

$a=\left(\dfrac{7}{2}\right)^2=\dfrac{49}{4}$

따라서

$12a = 12\times\frac{49}{4}$

$= 147$

300. 정답 290

[다항함수의 부정적분]

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이므로 함수 $F(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이다.

조건 (가)의 $0\in(A\cap B)$에서

$f(0)=0,\ F(0)=0$이므로

$F(x)=x^2(x^2+ax+b)$ (단, a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에 의하여 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 서로 다른 모든 실근의 합은 4이다. …… ㉠

(ⅰ) 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 중근을 갖는 경우 ㉠에 의하여 중근은 4이고, $B=\{0,\ 4\}$이다.

즉,

$F(x)=x^2(x-4)^2$

$=x^2(x^2-8x+16)$

$=x^4-8x^3+16x^2$

이므로

$f(x)=F'(x)$

$=4x^3-24x^2+32x$

$=4x(x^2-6x+8)$

$=4x(x-2)(x-4)$

따라서 $A=\{0,\ 2,\ 4\}$이므로 조건을 만족시킨다.

(ⅱ) 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우 ㉠과 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a=-4$

① 서로 다른 두 실근 중 한 근이 0인 경우

$b=0$이므로

$F(x)=x^2(x^2-4x)$

$=x^4-4x^3$

에서 $B=\{0,\ 4\}$

$f(x)=F'(x)$

$=4x^3-12x^2$

$=4x^2(x-3)$

따라서 $A=\{0,\ 3\}$이므로 조건을 만족시킨다.

② 서로 다른 두 실근이 모두 0이 아닌 경우

조건 (나)에 의하여 이차방정식 $x^2-4x+b=0$의 서로 다른 두 실근은 모두 자연수이고, 그 합이 4이므로 1과 3이다.

즉, $B=\{0,\ 1,\ 3\}$이고, $b=3$이다.

$F(x)=x^2(x^2-4x+3)$

$=x^4-4x^3+3x^2$

에서

$f(x)=F'(x)$

$=4x^3-12x^2+6x$

$=2x(2x^2-6x+3)$

따라서 $A=\{0\}$이므로 조건을 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$f(x)=4x(x-2)(x-4)$ 또는

$f(x)=4x^2(x-3)$ 또는

$f(x)=2x(2x^2-6x+3)$

이므로

$f(5)=4\times5\times5\times3\times1=60$ 또는

$f(5)=4\times5^2\times2=200$ 또는

$f(5)=2\times5\times(50-30+3)=230$

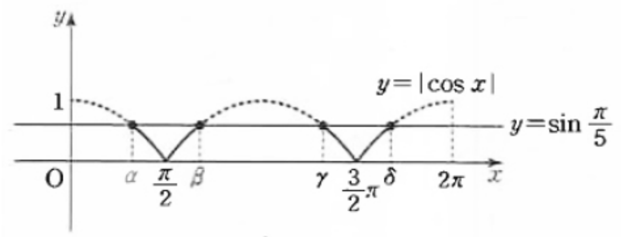
따라서 $f(5)$의 최댓값은 230, 최솟값은 60이므로 그 합은

$230+60=290$

301. 정답 ②

부등식 $|\cos x|\le\sin\frac{\pi}{5}$를 만족시키는 x의 값의 범위는

함수 $y=|\cos x|$의 그래프가 직선 $y=\sin\frac{\pi}{5}$와 만나는 부분과 아래쪽에 있는 x의 값의 범위이다.



$\sin\frac{\pi}{5}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)$이므로 위의 그림에서

$\alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5},\ \beta=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5},$

$\gamma=\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{5},\ \delta=\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{5}$

따라서

$\gamma-\beta=\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{5}-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}\right)$

$=\frac{3}{5}\pi$

302. 정답 ②

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(-1,\ -4)$, $\mathrm{Q}(3,\ 8)$에서의 접선의 기울기는

각각
$f'(-1)=3-2a+b$
$f'(3)=27+6a+b$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선과 점 Q에서의 접선이 서로 평행하므로
$f'(-1)=f'(3)$
$3-2a+b=27+6a+b$
$8a=-24$, $a=-3$
그러므로 $f(x)=x^3-3x^2+bx+c$
$f(-1)=-1-3-b+c=-4$에서
$b=c$ …… ㉠
$f(3)=27-27+3b+c=8$에서
$3b+c=8$ …… ㉡
㉠, ㉡에서
$b=c=2$
따라서 $f(x)=x^3-3x^2+2x+2$이므로
$f(5)=125-75+10+2=62$

303. 정답 ①
두 점 P, Q의 a초의 위치를 각각 $x_1(a)$, $x_2(a)$라 하면

$$x_1(a)=-12+\int_0^a(6t^2-4t-2)dt$$
$$=2a^3-2a^2-2a-12$$
$$x_2(a)=12+\int_0^a(-4t-6)dt$$
$$=-2a^2-6a+12$$

두 점 P, Q가 만날 때, 즉 $x_1(a)=x_2(a)$일 때
$2a^3-2a^2-2a-12=-2a^2-6a+12$
$2a^3+4a-24=0$
$a^3+2a-12=0$
$(a-2)(a^2+2a+6)=0$
따라서 두 점 P, Q는 출발 후 $t=2$일 때 만나므로 두 점 P, Q가 만날 때까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^2|v_1(t)|dt$$
$$=\int_0^2|6t^2-4t-2|dt$$
$$=\int_0^1(-6t^2+4t+2)dt+\int_1^2(6t^2-4t-2)dt$$
$$=\left[-2t^3+2t^2+2t\right]_0^1+\left[2t^3-2t^2-2t\right]_1^2$$
$$=(-2+2+2)-0+(16-8-4)-(2-2-2)$$
$$=8$$

304. 정답 ③

(ⅰ) a_3이 4의 배수일 때

$a_4=\frac{1}{2}a_3$, $a_5=\frac{1}{4}a_3$이므로

$$a_3+a_4+a_5=a_3+\frac{1}{2}a_3+\frac{1}{4}a_3$$
$$=\frac{7}{4}a_3$$

$\frac{7}{4}a_3=42$에서
$a_3=24$
이때 a_2, a_1의 값을 찾아보면 다음과 같다.

a_1	a_2	a_3
96	48	24
45		
42	21	

(ⅱ) a_3이 4의 배수가 아닌 짝수일 때

$a_4=\frac{1}{2}a_3$, $a_5=\frac{1}{2}a_3+3$이므로

$$a_3+a_4+a_5=a_3+\frac{1}{2}a_3+\frac{1}{2}a_3+3$$
$$=2a_3+3$$

$2a_3+3=42$를 만족시키는 자연수 a_3은 존재하지 않는다.

(ⅲ) a_3이 홀수일 때

$a_4=a_3+3$, $a_5=\frac{a_3+3}{2}$이므로

$$a_3+a_4+a_5=a_3+a_3+3+\frac{a_3+3}{2}$$
$$=\frac{5a_3+9}{2}$$

$\frac{5a_3+9}{2}=42$에서
$5a_3+9=84$, $5a_3=75$
$a_3=15$
이때 a_2, a_1의 값을 찾아보면 다음과 같다.

a_1	a_2	a_3
60	30	15
27		

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 가능한 모든 a_1의 값의 합은
$96+45+42+60+27=270$

305. 정답 ④
극값을 가지고 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)$의 부호는 x의 값이 증가함에 따라 양에서 음으로 바뀌고 다시 음에서 양으로 바뀐다.
$f'(x)=0$인 x의 값을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면
$f'(x-4)=0$인 x의 값은 $\alpha+4$, $\beta+4$

이때 $\beta=\alpha+4$이고 $\alpha=-1$, $\beta=3$이다.

$f'(x)=3(x+1)(x-3)=3x^2-6x-9$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=x^3-3x^2-9x+C$(단, C는 적분상수)

함수 $f(x)$의 극솟값이 13이므로

$f(3)=27-27-27+C=13$에서

$C=40$

따라서 구하는 극댓값은

$f(-1)=-1-3+9+40=45$

306. 정답 ③

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{PQ}}$이므로

$\mathrm{P}(\alpha,\ \log_2 3\alpha)$, $\mathrm{Q}(2\alpha,\ \log_2 6\alpha)$라 하면

$2(\log_2 3\alpha-1)=\log_2 6\alpha-1$

$2\log_2 3\alpha=\log_2 6\alpha+1$

$\log_2(3\alpha)^2=\log_2 6\alpha+\log_2 2$

$\log_2 9\alpha^2=\log_2 12\alpha$

$9\alpha^2=12\alpha$에서 $\alpha\neq 0$이므로

$9\alpha=12$

$\alpha=\frac{4}{3}$

따라서 $\mathrm{P}\left(\frac{4}{3},\ 2\right)$이므로

$m=\frac{2-1}{\frac{4}{3}-0}=\frac{3}{4}$

307. 정답 ⑤

조건 (나)에 의하여 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수 $f(x)$는 일차함수이므로 $f'(0)\neq 0$, $f'(1)\neq 0$이다.

(ⅰ) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0-}h(x)=\lim_{x\to 0+}h(x)=h(0)$

이때

$\lim_{x\to 0-}h(x)=\lim_{x\to 0-}\{f(x)-g(x)+1\}=f(0)-g(0)+1$

$\lim_{x\to 0+}h(x)=\lim_{x\to 0+}f(x)g(x)=f(0)g(0)$

이므로

$f(0)-g(0)+1=f(0)g(0)$

$f(0)g(0)-f(0)+g(0)-1=0$

$f(0)\{g(0)-1\}+\{g(0)-1\}=0$

$\{f(0)+1\}\{g(0)-1\}=0$

$f(0)=-1$ 또는 $g(0)=1$ …… ㉠

(ⅱ) 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-}h(x)=\lim_{x\to 1+}h(x)=h(1)$

이때

$\lim_{x\to 1-}h(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)g(x)=f(1)g(1)$

$\lim_{x\to 1+}h(x)=\lim_{x\to 1+}\{f(x)+g(x)-1\}=f(1)+g(1)-1$

이므로

$f(1)g(1)=f(1)+g(1)-1$

$f(1)g(1)-f(1)-g(1)+1=0$

$f(1)\{g(1)-1\}-\{g(1)-1\}=0$

$\{f(1)-1\}\{g(1)-1\}=0$

$f(1)=1$ 또는 $g(1)=1$ …… ㉡

(ⅲ) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 0-}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}$

이때

$\lim_{x\to 0-}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}$

$=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-g(x)+1-f(0)g(0)}{x}$

$=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)-\{g(x)-g(0)\}}{x}$

$=f'(0)-g'(0)$

$\lim_{x\to 0+}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}$

$=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}$

$=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$

이므로

$f'(0)-g'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$

㉠에 의하여

$f(0)=-1$이면 $f'(0)=f'(0)g(0)$이고

$f'(0)\neq 0$이므로

$g(0)=1$

$g(0)=1$이면 $-g'(0)=f(0)g'(0)$이고

$g'(0)\neq 0$이므로

$f(0)=-1$

그러므로 $f(0)=-1$이고 $g(0)=1$ …… ㉢

(ⅳ) 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 1-}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}$

$\lim_{x\to 1-}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1}$

$=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$

$=\lim_{x\to 1+}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)+g(x)-1-\{f(1)+g(1)-1\}}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)+g(x)-g(1)}{x-1}$

$=f'(1)+g'(1)$

$f'(1)+g'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$에서

ⓛ에 의하여

$f(1)=1$이면 $f'(1)=f'(1)g(1)$이고

$f'(1)\neq 0$이므로

$g(1)=1$

$g(1)=1$이면 $g'(1)=f(1)g'(1)$이고

$g'(1)\neq 0$이므로

$f(1)=1$

그러므로 $f(1)=1$이고 $g(1)=1$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣에 의하여

$f(0)=-1$, $f(1)=1$에서

$f(x)=2x-1$이고 $f'(x)=2$

$g(0)=1$, $g(1)=1$에서

$g(x)-1=x(x-1)$, 즉 $g(x)=x(x-1)+1$이고

$g'(x)=2x-1$

$0\leq x<1$일 때, $h(x)=f(x)g(x)$

따라서

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

이므로

$h'\left(\frac{1}{4}\right)=f'\left(\frac{1}{4}\right)g\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)g'\left(\frac{1}{4}\right)$

$=2\times\frac{13}{16}+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{13}{8}+\frac{1}{4}=\frac{15}{8}$

308. 정답 175

$\angle BAC=\angle BCA=\angle ACD=\angle ADC$에서

삼각형 ABC와 삼각형 DAC는 서로 닮음이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{DA}:\overline{DC}=\overline{AC}:\overline{CD}$에서

$\overline{AB}\times\overline{CD}=\overline{AC}^2$

$\overline{AB}=x$라 하면

$\overline{AB}+\overline{CD}=21$에서 $\overline{CD}=21-x$이므로

$x(21-x)=(3\sqrt{10})^2$

$21x-x^2=90$

$x^2-21x+90=0$

$(x-6)(x-15)=0$

$x=6$ 또는 $x=15$

$\overline{AB}>\overline{CD}$이므로 $\overline{AB}=15$, $\overline{CD}=6$

$\angle BAC=\angle BCA=\angle ACD=\angle ADC=\theta$라 하면

$\cos\theta=\frac{\frac{1}{2}\times 6}{3\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=2R_1$에서

$\frac{15}{\frac{3}{\sqrt{10}}}=2R_1$

$R_1=\frac{5\sqrt{10}}{2}$

삼각형 ACD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AC}}{\sin\theta}=2R_2$에서

$\frac{3\sqrt{10}}{\frac{3}{\sqrt{10}}}=2R_2$

$R_2=5$

따라서

$2({R_1}^2+{R_2}^2)=2\left(\frac{125}{2}+25\right)$

$=175$

309. 정답 525

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

조건 (가)에서 $S_{10}+2S_{20}=0$에서

$\frac{10(a_1+a_{10})}{2}+2\times\frac{20(a_1+a_{20})}{2}=0$

$a_1+a_{10}+4(a_1+a_{20})=0$

$a+a+9d+4(a+a+19d)=0$

$10a+85d=0$

$d=-\frac{2}{17}a$ $\cdots\cdots$ ㉠

모든 항이 정수이므로 a, d는 모두 정수이다.

조건 (나)에서 $a>a+a+d$이므로 $a+d<0$

따라서 ㉠에 의하여 $a<0$, $d>0$이다.

㉠을 만족시키는 음의 정수 a와 양의 정수 d의 순서쌍 $(a,\ d)$는

$(-17,\ 2)$, $(-34,\ 4)$, $(-51,\ 6)$, $(-68,\ 8)$, $(-85,\ 10)$, $\cdots$

$a_{18}=a+17d=a+17\times\left(-\frac{2}{17}a\right)=-a$

조건 (다)에 의하여 $a=-51$이고

㉠에서 $d=6$

따라서

$S_{25}=\frac{25(2a+24d)}{2}$

$=25(a+12d)$
$=25(-51+12\times 6)$
$=25\times 21=525$

310. 정답 14

$\int_1^x (x-t)f(t)dt=ax^5+bx^4+5x-3$에서

$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=ax^5+bx^4+5x-3$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$0=a+b+5-3$에서
$b=-a-2$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면
$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=5ax^4+4bx^3+5$에서
$\int_1^x f(t)dt=5ax^4+4bx^3+5$ …… ㉢

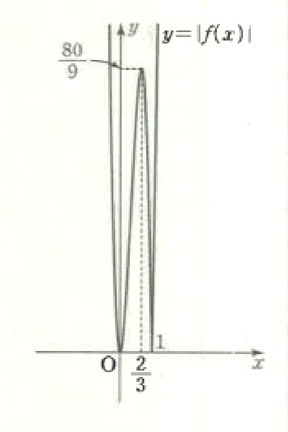
㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면
$0=5a+4b+5$ …… ㉣

㉡을 ㉣에 대입하면
$0=5a+4(-a-2)+5$
$a=3$
㉡에서 $b=-5$
㉢에서
$\int_1^x f(t)dt=15x^4-20x^3+5$ …… ㉤

㉤의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)=60x^3-60x^2$
$f'(x)=180x^2-120x$
$\quad=60x(3x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{2}{3}$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0 (극대)	$\searrow$	$-\frac{80}{9}$ (극소)	$\nearrow$

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 다음과 같다.



$g(x)=\int_0^x \{|f(t)|-kt\}dt$에서 양변을 x에 대하여 미분하면
$g'(x)=|f(x)|-kx$
$k<0$이면 $g'(x)=0$인 x의 값이 두 개 존재하고 각각의 x의 값에 대한 함숫값은 모두 극값이다.
$k=0$이면 $g'(x)=|f(x)|=0$인 x의 값이 두 개 존재하지만 $g'(x)$의 부호가 양에서 양으로 바뀌지 않으므로 극값이 존재하지 않는다.
극값이 네 개 존재하려면 원점에서 함수 $y=-f(x)$의 그래프에 그은 기울기가 양수인 접선을 구해 보자.
접점의 좌표를 $(t,\ -60(t^3-t^2))$이라 할 때, 접선의 기울기가 $-60(3t^2-2t)$이므로 접선의 방정식은
$y=-60(3t^2-2t)(x-t)-60(t^3-t^2)$
이 접선이 원점을 지나므로
$0=-60(3t^2-2t)\times(-t)-60(t^3-t^2)$
$0=3t^3-2t^2-t^3+t^2$
$2t^3-t^2=0$
$t\neq 0$이므로
$2t-1=0$에서 $t=\frac{1}{2}$
이때 접선의 기울기는
$-60\left(\frac{3}{4}-1\right)=15$
따라서 $0<k<15$일 때, $g'(x)=|f(x)|-kx=0$인 x의 값이 4개 존재하고, x의 값의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 바뀌므로 각각의 x의 값에 대한 함숫값은 모두 극값이다.
따라서 자연수 k의 최댓값은 14이다.

311. 정답 ①

$\log_3 a+\log_3 b=-2$에서
$\frac{1}{\log_a 3}+\frac{1}{\log_b 3}=-2$
$\frac{\log_a 3+\log_b 3}{\log_a 3\times\log_b 3}=-2$
$\log_a 3+\log_b 3=-2(\log_a 3\times\log_b 3)$ …… ㉠

한편, $\log_a 9+\log_b 9=4$에서

$\log_a 3^2+\log_b 3^2=4$

$2\log_a 3+2\log_b 3=4$

$\log_a 3+\log_b 3=2$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$2=-2(\log_a 3\times\log_b 3)$

$\log_a 3\times\log_b 3=-1$

따라서

$(\log_a 3)^2+(\log_b 3)^2$

$=(\log_a 3+\log_b 3)^2-2(\log_a 3\times\log_b 3)$

$=2^2-2\times(-1)=6$

312. 정답 ③

두 점 P, Q가 출발 후 처음으로 만난 시각을 a $(a>0)$이라 하면

$$\int_0^a v_1(t)dt=\int_0^a v_2(t)dt$$

에서

$$\int_0^a \{v_1(t)-v_2(t)\}dt=0$$

이때

$$\int_0^a \{v_1(t)-v_2(t)\}dt$$

$$=\int_0^a (t^2-2t-2t)dt$$

$$=\int_0^a (t^2-4t)dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2\right]_0^a$$

$$=\frac{1}{3}a^3-2a^2$$

즉, $\frac{1}{3}a^3-2a^2=0$에서

$\frac{1}{3}a^2(a-6)=0$

$a>0$이므로 $a=6$

따라서 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^6 |t^2-2t|dt$$

$$=\int_0^2 (-t^2+2t)dt+\int_2^6 (t^2-2t)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_2^6$$

$$=\left(-\frac{8}{3}+4\right)+(72-36)-\left(\frac{8}{3}-4\right)$$

$$=\frac{4}{3}+36+\frac{4}{3}=\frac{116}{3}$$

313. 정답 ④

$a_{k+1}=S_{k+1}-S_k$, $a_1=S_1=8$이므로

$$\sum_{k=1}^{8}\frac{a_{k+1}}{S_kS_{k+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{8}\frac{S_{k+1}-S_k}{S_kS_{k+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{S_k}-\frac{1}{S_{k+1}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)+\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{S_8}-\frac{1}{S_9}\right)$$

$$=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_9}$$

따라서 $\frac{1}{8}-\frac{1}{S_9}=\frac{1}{12}$에서

$$\frac{1}{S_9}=\frac{1}{8}-\frac{1}{12}=\frac{1}{24}$$

이므로

$S_9=24$

314. 정답 ⑤

$f(x)=3(x+1)(x-1)=3x^2-3$이고

$0\le x\le 1$에서 $f(x)\le 0$, $x>1$에서 $f(x)>0$이므로

닫힌구간 $[0, 1]$에서

$$g(x)=\int_x^{x+1}|f(t)|dt$$

$$=\int_x^{x+1}|3t^2-3|dt$$

$$=-\int_x^1 (3t^2-3)dt+\int_1^{x+1}(3t^2-3)dt$$

$$=-\left[t^3-3t\right]_x^1+\left[t^3-3t\right]_1^{x+1}$$

$$=-(1-3)+(x^3-3x)+\{(x+1)^3-3(x+1)\}-(1-3)$$

$$=2x^3+3x^2-3x+2$$

$g'(x)=6x^2+6x-3$이므로

$g'(x)=0$에서 $x=\frac{-3\pm\sqrt{27}}{6}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

$0\le x\le 1$이므로 $x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

닫힌구간 $[0, 1]$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	$\cdots$	1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	극소	↗	

따라서 함수 $g(x)$는 $x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$에서 극소이면서

최소이므로

$\alpha = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

315. 정답 ④

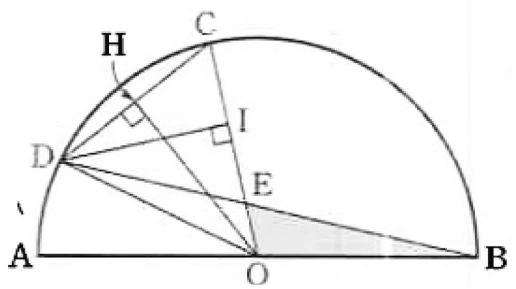
주어진 반원에서 반지름의 길이는 8이고, 중심이 O이므로 삼각형 OCD는 이등변삼각형이다.

점 O에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\cos(\angle OCD) = \cos(\angle OCH) = \dfrac{\overline{CH}}{\overline{OC}} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

에서 $\overline{OC}=8$이므로

$\overline{CH}=\overline{DH}=2\sqrt{3}$, $\overline{CD}=4\sqrt{3}$



점 D에서 선분 OC에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\cos(\angle OCD) = \cos(\angle ICD) = \dfrac{\overline{CI}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{CI}}{4\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

에서 $\overline{CI}=3$

$\overline{OE}=2$에서 $\overline{CE}=6$이므로 선분 DI는 선분 CE의 수직이등분선이고, 삼각형 CDE는 이등변삼각형이다.

삼각형 OBE에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{OB}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{BE}^2 - 2\times\overline{OE}\times\overline{BE}\times\cos(\angle OEB)$

이때

$\cos(\angle OEB) = \cos(\angle DEC)$

$= \cos(\angle OCD) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

이므로

$64 = 4 + \overline{BE}^2 - 2\times2\times\overline{BE}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$\overline{BE}=x$라 하면

$x^2 - \sqrt{3}x - 60 = 0$

$x = \dfrac{\sqrt{3}\pm\sqrt{3+240}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}\pm9\sqrt{3}}{2}$

$x>0$이므로 $x=5\sqrt{3}$

$\cos(\angle OEB) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$에서

$\sin(\angle OEB) = \sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{13}}{4}$

따라서 삼각형 OBE의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{OE}\times\overline{BE}\times\sin(\angle OEB)$

$= \dfrac{1}{2}\times2\times5\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{13}}{4}$

$= \dfrac{5\sqrt{39}}{4}$

316. 정답 ④

$y=x^3-x^2+3$에서

$y'=3x^2-2x$

$\quad = x(3x-2)$

$y'=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\dfrac{2}{3}$

함수 $y=x^3-x^2+3$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	극대	↘	극소	↗

그러므로 $x=0$일 때 극댓값 3, $x=\dfrac{2}{3}$일 때 극솟값 $\dfrac{77}{27}$을 갖는다.

직선 $y=m(x+2)$는 m의 값에 관계없이 점 $(-2,\ 0)$을 지나므로 점 $(-2,\ 0)$에서 곡선 $y=x^3-x^2+3$에 그은 접선의 방정식은 접점의 x좌표를 t라 하면

$y-(t^3-t^2+3)=(3t^2-2t)(x-t)$

이 직선이 점 $(-2,\ 0)$을 지나므로

$0-(t^3-t^2+3)=(3t^2-2t)(-2-t)$

$-t^3+t^2-3=-6t^2+4t-3t^3+2t^2$

$2t^3+5t^2-4t-3=0$

$(t+3)(2t+1)(t-1)=0$

$t=-3$ 또는 $t=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $t=1$

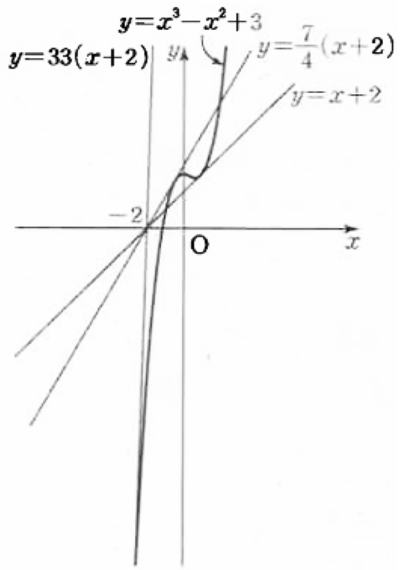
$t=-3$일 때, 접선의 방정식은

$y=33(x+2)$

$t=-\dfrac{1}{2}$일 때, 접선의 방정식은

$y=\dfrac{7}{4}(x+2)$

$t=1$일 때, 접선의 방정식은 $y=x+2$



그러므로 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $f(m)$은

$$f(m)=\begin{cases}1 & (0\le m<1)\\ 2 & (m=1)\\ 3 & \left(1<m<\frac{7}{4}\right)\\ 2 & \left(m=\frac{7}{4}\right)\\ 1 & \left(\frac{7}{4}<m\le 2\right)\end{cases}$$

즉, 함수 $f(m)$은 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 $m=1$ 또는 $m=\frac{7}{4}$일 때 불연속이다.

함수 $g(x)=(x^2+ax+b)f(x)$가 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 연속이 되려면 함수 $g(x)$가 $x=1$과 $x=\frac{7}{4}$에서 연속이어야 한다.

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이 되려면

$\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1+}g(x)=g(1)$이어야 하므로

$(1+a+b)\times1=(1+a+b)\times3=(1+a+b)\times2$

에서

$1+a+b=0$

$a+b=-1$ …… ㉠

함수 $g(x)$가 $x=\frac{7}{4}$에서 연속이 되려면

$\lim_{x\to\frac{7}{4}-}g(x)=\lim_{x\to\frac{7}{4}+}g(x)=g\left(\frac{7}{4}\right)$이어야 하므로

$$\left(\frac{49}{16}+\frac{7}{4}a+b\right)\times3=\left(\frac{49}{16}+\frac{7}{4}a+b\right)\times1$$
$$=\left(\frac{49}{16}+\frac{7}{4}a+b\right)\times2$$

에서 $\frac{49}{16}+\frac{7}{4}a+b=0$

$\frac{7}{4}a+b=-\frac{49}{16}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-\frac{11}{4}$, $b=\frac{7}{4}$

따라서 $b-a=\frac{7}{4}-\left(-\frac{11}{4}\right)=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}$

[참고]

$$g(x)=(x-1)\left(x-\frac{7}{4}\right)f(x)$$
$$=\left(x^2-\frac{11}{4}x+\frac{7}{4}\right)f(x)$$

317. 정답 ④

$a_{n+1}=2a_n$인 경우 $a_n=\frac{1}{2}a_{n+1}$이고

$a_{n+1}=2a_n-1$인 경우 $a_n=\frac{1}{2}a_{n+1}+\frac{1}{2}$

이므로

$a_6=\frac{1}{2}$인 경우

$a_5=\frac{1}{4}$ 또는 $a_5=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

에서 $a_5=\frac{1}{4}$ 또는 $a_5=\frac{3}{4}$

$a_4=\frac{1}{8}$ 또는 $a_4=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$

또는 $a_4=\frac{3}{8}$ 또는 $a_4=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}=\frac{7}{8}$

에서 작은 값부터 나열하면

$a_4=\frac{1}{8}$ 또는 $a_4=\frac{3}{8}$ 또는 $a_4=\frac{5}{8}$ 또는 $a_4=\frac{7}{8}$

$a_3=\frac{1}{16}$ 또는 $a_3=\frac{1}{16}+\frac{1}{2}=\frac{9}{16}$

또는 $a_3=\frac{3}{16}$ 또는 $a_3=\frac{3}{16}+\frac{1}{2}=\frac{11}{16}$

또는 $a_3=\frac{5}{16}$ 또는 $a_3=\frac{5}{16}+\frac{1}{2}=\frac{13}{16}$

또는 $a_3=\frac{7}{16}$ 또는 $a_3=\frac{7}{16}+\frac{1}{2}=\frac{15}{16}$

에서 작은 값부터 나열하면

$a_3=\frac{1}{16}$ 또는 $a_3=\frac{3}{16}$ 또는 $a_3=\frac{5}{16}$

또는 $a_3=\frac{7}{16}$ 또는 $a_3=\frac{9}{16}$ 또는 $a_3=\frac{11}{16}$

또는 $a_3=\frac{13}{16}$ 또는 $a_3=\frac{15}{16}$

같은 방법으로 a_2의 값으로 가능한 모든 값은

$\frac{1}{32}, \frac{3}{32}, \frac{5}{32}, \cdots, \frac{31}{32}$

이고, a_1의 값으로 가능한 모든 값은

$\frac{1}{64}, \frac{3}{64}, \frac{5}{64}, \cdots, \frac{63}{64}$

이므로 $m=32,\ b_k=\frac{2k-1}{64}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 32)$

따라서

$$\begin{aligned} b_5 \times \sum_{k=1}^{m} b_k &= \frac{9}{64} \times \sum_{k=1}^{32} \frac{2k-1}{64} \\ &= \frac{9}{2^{19}}\left(2\sum_{k=1}^{32} k - \sum_{k=1}^{32} 1\right) \\ &= \frac{9}{2^{19}}\left(2 \times \frac{32 \times 33}{2} - 1 \times 32\right) \\ &= \frac{9}{2^{19}} \times 32^2 \\ &= \frac{9}{2^{19}} \times 2^{10} \\ &= \frac{9}{2^2} \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

318. 정답 6

진수 조건에서

$x>0,\ 3-x>0$이므로

$0<x<3$

$$\begin{aligned} f(x) &= \log_2 x + \log_4 (3-x) + 5 \\ &= \log_2 x + \frac{1}{2} log_2 (3-x) + 5 \\ &= \frac{1}{2}\{2\log_2 x + \log_2 (3-x)\} + 5 \\ &= \frac{1}{2} log_2 x^2 (3-x) + 5 \end{aligned}$$

밑이 1보다 크므로 $y=x^2(3-x)$가 최대일 때 함수 $f(x)$가 최대가 된다.

$g(x)=x^2(3-x)=-x^3+3x^2$ $(0<x<3)$이라 하면

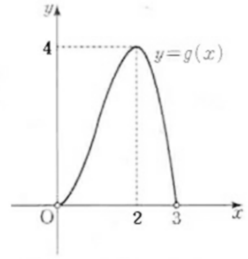
$$\begin{aligned} g'(x) &= -3x^2+6x \\ &= -3x(x-2) \end{aligned}$$

$0<x<3$이므로 $g'(x)=0$에서 $x=2$

$0<x<3$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

함수 $g(x)$는 $x=2$일 때 극댓값 $g(2)=4$를 가지므로 $0<x<3$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



즉, $0<x<3$에서 $0<g(x)\le 4$이다.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} log_2 x^2 (3-x) + 5 \\ &\le \frac{1}{2} log_2 4 + 5 = 1+5 = 6 \end{aligned}$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 6을 갖는다.

319. 정답 15

$g(t)=t^2-x^2$이라 하면

$g(t)=(t-x)(t+x)$이므로

$g(t)=0$에서 $t=x$ 또는 $t=-x$

함수 $g(t)$의 한 부정적분을 $G(t)$라 하면

$$\begin{aligned} G(t) &= \int g(t)dt \\ &= \int (t^2-x^2)dt \\ &= \frac{1}{3}t^3 - x^2 t + C \end{aligned}$$ (단, C는 적분상수)

(ⅰ) $0 \le x < 1$일 때

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-1}^{1} |g(t)|dt \\ &= \int_{-1}^{-x} g(t)dt + \int_{-x}^{x} \{-g(t)\}dt + \int_{x}^{1} g(t)dt \\ &= \Big[G(t)\Big]_{-1}^{-x} + \Big[-G(t)\Big]_{-x}^{x} + \Big[G(t)\Big]_{x}^{1} \\ &= G(-x)-G(-1)-G(x)+G(-x)+G(1)-G(x) \\ &= 2G(-x)-2G(x)+G(1)-G(-1) \\ &= 2(G(-x)-G(x))+G(1)-G(-1) \\ &= 4\left(-\frac{1}{3}x^3+x^3\right)+2\left(\frac{1}{3}-x^2\right) \\ &= \frac{8}{3}x^3-2x^2+\frac{2}{3} \end{aligned}$$

(ⅱ) $x \ge 1$일 때

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-1}^{1} |g(t)|dt \\ &= \int_{-1}^{1} \{-g(t)\}dt \\ &= \Big[-G(t)\Big]_{-1}^{1} \\ &= -G(1)+G(-1) \end{aligned}$$

$=2x^2-\dfrac{2}{3}$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{8}{3}x^3-2x^2+\dfrac{2}{3} & (0 \le x < 1) \\ 2x^2-\dfrac{2}{3} & (x \ge 1) \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 8x^2-4x & (0<x<1) \\ 4x & (x>1) \end{cases}$$

$8x^2-4x=4x(2x-1)=0$에서

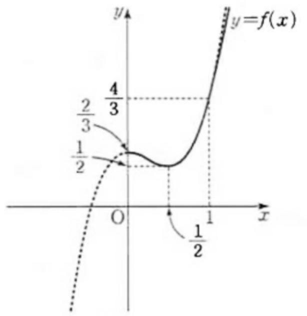
$x=0$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$		↘	극소	↗		↗

함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{1}{2}$에서 극소이면서 최소이고, 최솟값은

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{2}$



따라서 $\alpha=\dfrac{1}{2}$, $m=\dfrac{1}{2}$이므로

$60\alpha m=60\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=15$

320. 정답 73

$\displaystyle\lim_{x\to0+}\frac{x^3f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2-x-1}=2$이므로 $s=\dfrac{1}{x}$이라 하면

$x\to0+$일 때, $s\to\infty$이고

$$\lim_{x\to0+}\frac{x^3f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2-x-1}=\lim_{s\to\infty}\frac{\frac{1}{s^3}f(s)}{\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}-1}$$

$$=\lim_{s\to\infty}\frac{f(s)}{s-s^2-s^3}=2$$

그러므로 $f(s)$는 최고차항의 계수가 -2인 삼차함수이다.

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{(2-x)f(x)-f(1)}{1-x}=2$에서

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{(2-x)f(x)-(2-1)f(1)}{x-1}=-2$

$h(x)=(2-x)f(x)$라 하면 $h'(1)=-2$이므로

$h'(x)=-f(x)+(2-x)f'(x)$에서

$h'(1)=-f(1)+f'(1)=-2$ …… ㉠

$f(x)=-2x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=-6x^2+2ax+b$

조건 (나)에서

$f(0)=1$이므로 $c=1$

$f'(0)=12$이므로 $b=12$

이고

$f(x)=-2x^3+ax^2+12x+1$,

$f'(x)=-6x^2+2ax+12$

이므로 ㉠에서

$-6+2a+12=-2+a+12+1-2$

$a=3$

그러므로

$f(x)=-2x^3+3x^2+12x+1$

$f'(x)=-6x^2+6x+12$

$\quad=-6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

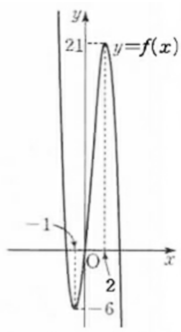
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

$f(-1)=2+3-12+1=-6$

$f(2)=-16+12+24+1=21$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 -6을 갖고,

$x=2$에서 극댓값 21을 갖는다.



$g(1)$은 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이므로

$g(1)=f(2)$

$g(2)$는 닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이므로

$g(2)=f(2)$

$g(3)$는 닫힌구간 $[2,\ 4]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이므로

$g(3)=f(2)$

$g(4)$는 닫힌구간 $[3,\ 5]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이므로

$g(4)=f(3)$

$f(x)=-2x^3+3x^2+12xx+1$에서

$g(1)=f(2)=21$

$g(2)=f(2)=21$

$g(3)=f(2)=21$

$g(4)=f(3)=-54+27+36+1=10$

따라서

$\sum_{k=1}^{4} g(k)=21+21+21+10=73$

[참고]

닫힌구간 $[t-1,\ t+1]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$0 \le t \le 1$일 때, 닫힌구간 $[t-1,\ t+1]$에서 함수 $f(x)$는 증가하므로

$g(t)=f(t+1)$

$1 < t \le 3$일 때, 닫힌구간 $[t-1,\ t+1]$에서 함수 $f(x)$는 극댓값 21을 가지므로

$g(t)=21$

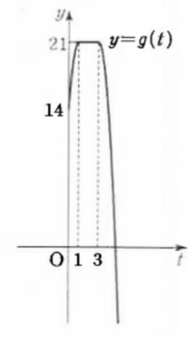
$t > 3$일 때, 닫힌구간 $[t-1,\ t+1]$에서 함수 $f(x)$는 감소하므로

$g(t)=f(t-1)$

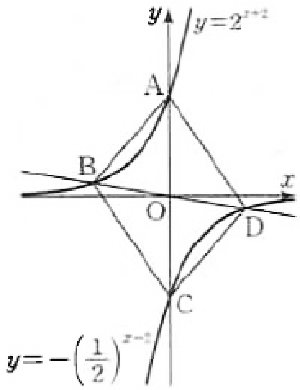
그러므로 $t \ge 0$일 때 함수 $g(t)$는

$$g(t)=\begin{cases} f(t+1) & (0 \le t \le 1) \\ 21 & (1 < t \le 3) \\ f(t-1) & (t > 3) \end{cases}$$

이고, 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.



321. 정답 ④



$-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}=-2^{-x+2}$이므로 함수 $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$의 그래프는 함수 $y=2^{x+2}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이다.

이때 두 점 B, O를 지나는 직선이 함수 $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$의 그래프와 만나는 점이 D이므로 점 D는 점 B를 원점에 대하여 대칭이동한 점이다.

점 B가 제2사분면에 있으므로 $a<0$인 a에 대하여

$\mathrm{A}(0,\ 4)$, $\mathrm{B}(a,\ 2^{a+2})$, $\mathrm{C}(0,\ -4)$, $\mathrm{D}(-a,\ -2^{a+2})$으로 놓을 수 있다.

한편, 사각형 ABCD의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이와 삼각형 ACD의 넓이의 합과 같으므로

$24=\frac{1}{2}\times 8\times(-a)+\frac{1}{2}\times 8\times(-a)$

따라서 $a=-3$이므로 $\mathrm{B}\left(-3,\ \frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{D}\left(3,\ -\frac{1}{2}\right)$이고,

직선 BD의 기울기는

$\dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}}{3-(-3)}=-\frac{1}{6}$

322. 정답 ④

등비수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r>0,\ r\neq 1)$이라 하면

$a_2a_4=1$에서 $(a_3)^2=1$

이고 모든 항이 양수이므로 $a_3=1$

$\sum_{k=1}^{4}(a_k-a_{k+1})=-7a_1$에서

$a_1-a_5=-7a_1$

$a_1-a_1r^4=-7a_1$

$a_1>0$이므로 위 식의 양변을 a_1으로 나누면

$1-r^4=-7,\ r^4=8$

$r^2=2\sqrt{2}$

$\sum_{k=1}^{5}(a_{2k+1}+a_{2k+3})=2\sum_{k=1}^{4}a_{2k+3}+a_3+a_{13}$

에서 a_{2k+3}은 첫째항이 a_5이고 공비가 $2\sqrt{2}$인 등비수열이다.

$a_5 = a_3 \times r^2 = 2\sqrt{2}$이므로

$$\sum_{k=1}^{4} a_{2k+3} = \frac{a_5\{(2\sqrt{2})^4 - 1\}}{2\sqrt{2}-1}$$
$$= \frac{2\sqrt{2}\times 63}{2\sqrt{2}-1}$$
$$= \frac{2\sqrt{2}\times 63\times(2\sqrt{2}+1)}{(2\sqrt{2}-1)(2\sqrt{2}+1)}$$
$$= 18\sqrt{2}(2\sqrt{2}+1)$$
$$= 72+18\sqrt{2}$$

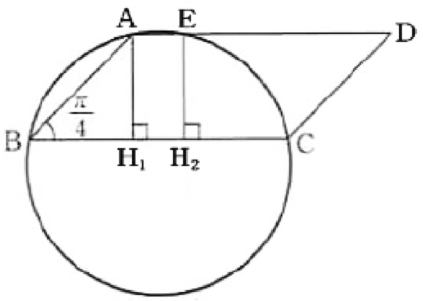
한편, $a_3 = 1$이고

$a_{13} = a_3 r^{10} = (r^2)^5 = (2\sqrt{2})^5 = 128\sqrt{2}$이므로

$$\sum_{k=1}^{5}(a_{2k+1}+a_{2k+3}) = 2(72+18\sqrt{2})+1+128\sqrt{2}$$
$$= 145+164\sqrt{2}$$

323. 정답 ①

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_1}$이라 하고, 점 E에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_2}$라 하자.



$\overline{\mathrm{AB}} = 4$이므로

$\overline{\mathrm{BH_1}} = 4\times\cos\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{AE}} : \overline{\mathrm{ED}} = 1:4$이므로 $\overline{\mathrm{AE}} = k(k>0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{ED}} = 4\mathrm{k}$

두 선분 AE, BC는 평행하므로

$\angle\mathrm{EAC} = \angle\mathrm{ACB}$

$\angle\mathrm{EAC}$는 호 EC에 대한 원주각이고, $\angle\mathrm{ACB}$는 호 AB에 대한 원주각이므로 호 EC와 호 AB의 길이가 같고 $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{EC}} = 4$이다.

즉, 사각형 ABCE는 등변사다리꼴이다.

$\overline{\mathrm{CH_2}} = \overline{\mathrm{BH_1}} = 2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{H_1H_2}} = \overline{\mathrm{AE}} = k$

$\overline{\mathrm{BC}} = k+4\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{BC}}$이므로

$5k = k+4\sqrt{2}$

$k = \sqrt{2}$

삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}} = 4$, $\overline{\mathrm{BC}} = 5\sqrt{2}$, $\angle\mathrm{ABC} = \frac{\pi}{4}$이므로

코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{AC}}^2 = 4^2+(5\sqrt{2})^2 - 2\times4\times5\sqrt{2}\times\cos\frac{\pi}{4}$$
$$= 16+50-40 = 26$$

$\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{26}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\frac{\pi}{4}} = 2R,\quad \frac{\sqrt{26}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2R$$

따라서 $R = \sqrt{13}$

324. 정답 ②

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식의 기울기가 $f'(a)$이고 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$y = f'(a)(x-1)$

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선이 두 점 $(1, 0)$, $(4a,\ f(4a))$를 지나므로 x에 대한 방정식

$f(x) = f'(a)(x-1)$의 근은 $x=a$(중근), $x=4a$이다.

$f(x) - f'(a)(x-1) = (x-a)^2(x-4a)$

$f(x) = f'(a)(x-1)+(x-a)^2(x-4a)$ …… ㉠

$f(1) = (1-a)^2(1-4a) = -304$

$(a-1)^2(4a-1) = 304$ …… ㉡

a가 1이 아닌 자연수이므로 $a-1$, $4a-1$도 자연수이고,

$304 = 4^2\times19$이므로 $a-1$의 값은 1, 2, 4 중 하나이다.

$a-1$의 값이 1 또는 2이면 ㉡이 성립하지 않으므로

$a-1 = 4$, 즉 $a=5$이다.

$a=5$를 ㉠에 대입하면

$f(x) = f'(5)(x-1)+(x-5)^2(x-20)$

$f(a) = 2$이므로

$f(5) = f'(5)\times4 = 2$

따라서 $f'(5) = \frac{1}{2}$

325. 정답 ②

곡선 $y=x^2-6x+8$과 직선 $y=m(x-2)$의 교점의 x좌표는

$x^2-6x+8 = m(x-2)$에서

$(x-2)(x-m-4) = 0$

$x=2$ 또는 $x=m+4$이다.

$m>-2$이므로 $m+4>2$

$A=B$이므로 $A-B=0$

$$A-B = \int_0^2\{(x^2-6x+8)-m(x-2)\}dx$$

$$-\int_{2}^{m+4}\{m(x-2)-(x^2-6x+8)\}dx$$

$$=\int_{0}^{2}\{(x^2-6x+8)-m(x-2)\}dx$$

$$+\int_{2}^{m+4}\{(x^2-6x+8)-m(x-2)\}dx$$

$$=\int_{0}^{m+4}\{(x^2-6x+8)-m(x-2)\}dx=0$$

$$\int_{0}^{m+4}\{(x^2-6x+8)-m(x-2)\}dx$$

$$=\int_{0}^{m+4}\{x^2-(m+6)x+2(m+4)\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{m+6}{2}x^2+2(m+4)\right]_0^{m+4}$$

$$=\frac{1}{3}(m+4)^3-\frac{(m+6)(m+4)^2}{2}+2(m+4)^2=0$$

$\frac{1}{3}(m+4)^3-\frac{(m+6)(m+4)^2}{2}+2(m+4)^2=0$에서 $m+4\neq0$이므로

양변을 $(m+4)^2$으로 나누면

$$\frac{1}{3}(m+4)-\frac{(m+6)}{2}+2=0$$

따라서 $m=2$

326. 정답 ⑤

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수이므로 연속함수이다. 따라서 함수 $g(x)$는 $x=3$에서도 미분가능하고 연속이어야 한다.

또 함수 $f(x)$는 이차함수이므로 미분가능한 함수이고 연속함수이다.

함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to3-}g(x)=\lim_{x\to3+}g(x)=g(3)$$

이때

$$\lim_{x\to3-}g(x)=\lim_{x\to3-}f(x)=f(3)$$

$$\lim_{x\to3+}g(x)=\lim_{x\to3+}\{f(x)\}^2=\{f(3)\}^2$$

이므로

$f(3)=\{f(3)\}^2$, $f(3)\{f(3)-1\}=0$

$f(3)=0$ 또는 $f(3)=1$ …… ㉠

함수 $g(x)$가 $x=3$에서 미분가능하므로

$$\lim_{h\to0-}\frac{g(x+3)-g(3)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{g(x+3)-g(3)}{h}$$

이때

$$\lim_{h\to0-}\frac{g(x+3)-g(3)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{f(x+3)-f(3)}{h}$$

$$=f'(3)$$

$$\lim_{h\to0+}\frac{g(x+3)-g(3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{\{f(3+h)\}^2-\{f(3)\}^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{\{f(3+h)-f(3)\}\{f(3+h)+f(3)\}}{h}$$

$$=2f'(3)f(3)$$

이므로

$f'(3)=2f'(3)f(3)$, $f'(3)\{2f(3)-1\}=0$

$f'(3)=0$ 또는 $f(3)=\frac{1}{2}$ …… ㉡

그런데 $f(x)$는 함수이므로 $f(3)$의 값이 단 하나이어야 한다. 이때 $f(3)=\frac{1}{2}$이면 ㉠을 만족시키지 못하므로 ㉠, ㉡에서 $f(3)=0$ 또는 $f(3)=1$이고 $f'(3)=0$이다.

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f'(x)=2x+a$

(ⅰ) $f(3)=0$이고 $f'(3)=0$인 경우

$f(3)=9+3a+b=0$

$3a+b=-9$ …… ㉢

$f'(3)=6+a=0$에서 $a=-6$

$a=-6$을 ㉢에 대입하면 $b=9$

즉, $f(x)=x^2-6x+9$이고 $f'(x)=2x-6$

$g(x)=\begin{cases}f(x) & (x\le3)\\ \{f(x)\}^2 & (x>3)\end{cases}$에서

$g'(x)=\begin{cases}f'(x) & (x\le3)\\ 2f(x)f'(x) & (x>3)\end{cases}$이므로

$g'(5)=2f(5)f'(5)=2\times4\times4=32$

(ⅱ) $f(3)=1$이고 $f'(3)=0$인 경우

$f(3)=9+3a+b=1$

$3a+b=-8$ …… ㉣

$f'(3)=6+a=0$에서 $a=-6$

$a=-6$을 ㉣에 대입하면 $b=10$

즉, $f(x)=x^2-6x+10$이고 $f'(x)=2x-6$

$g(x)=\begin{cases}f(x) & (x\le3)\\ \{f(x)\}^2 & (x>3)\end{cases}$에서

$g'(x)=\begin{cases}f'(x) & (x\le3)\\ 2f(x)f'(x) & (x>3)\end{cases}$이므로

$g'(5)=2f(5)f'(5)=2\times5\times4=40$

(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키는 함수 $g(x)$에 대하여 $g'(5)$의 값으로 가능한 것은 32 또는 40이다.

따라서 $g'(5)$의 최댓값은 40이다.

327. 정답 ①

(ⅰ) a_p의 값이 1, 2, 3 중 하나인 경우

$a_p=1$이면 $a_{p+1}=2$, $a_{p+2}=3$, $a_{p+3}=1$이므로 $n\ge p$인 모든

자연수 n에 대하여 $a_p = a_{p+3}$이다.

$a_p = 2$이면 $a_{p+1} = 3$, $a_{p+2} = 1$, $a_{p+3} = 2$이므로 $n \geq p$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_p = a_{p+3}$이다.

$a_p = 3$이면 $a_{p+1} = 1$, $a_{p+2} = 2$, $a_{p+3} = 3$이므로 $n \geq p$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_p = a_{p+3}$이다.

(ii) a_p의 값이 1, 2, 3이 아닌 자연수인 경우

$3k+1$, $3k+2$, $3k+3$ (k는 자연수)로 나누어 생각한다.

$a_p = 3k+1$이면

$a_{p+1} = 3k+2$, $a_{p+2} = 3k+3$, $a_{p+3} = k+1$

이때 $a_p = a_{p+3}$에서 $3k+1 = k+1$, 즉 $k=0$이 되어 k는 자연수라는 조건이 성립하지 않는다.

$a_p = 3k+2$이면 $a_{p+1} = 3k+3$, $a_{p+2} = k+1$이고

$a_{p+3} = k+2$ 또는 $a_{p+3} = \dfrac{k+1}{3}$

이때 $a_p = a_{p+3}$에서

$3k+2 = k+2$ 또는 $3k+2 = \dfrac{k+1}{3}$

$k=0$ 또는 $k = -\dfrac{5}{8}$가 되어 k는 자연수라는 조건이 성립하지 않는다.

$a_p = 3k+3$이면 k가 $3l-1$, $3l-2$, $3l$ (l은 자연수)인 경우로 나누어 생각한다.

$k = 3l-1$이면 $a_p = 9l$, $a_{p+1} = 3l$, $a_{p+2} = l$이므로

$a_{p+3} = l+1$ 또는 $a_{p+3} = \dfrac{l}{3}$이다.

$a_{p+3} = l+1$이면 $a_p = a_{p+3}$에서 $9l = l+1$, 즉 $l = \dfrac{1}{8}$이 되어 l은 자연수라는 조건이 성립하지 않는다.

$a_{p+3} = \dfrac{l}{3}$이면 $a_p = a_{p+3}$에서 $9l = \dfrac{l}{3}$, 즉 $l=0$이 되어 l은 자연수라는 조건이 성립하지 않는다.

$k = 3l-2$이면 $a_p = 9l-3$, $a_{p+1} = 3l-1$, $a_{p+2} = 3l$,

$a_{p+3} = l$이므로 $a_p = a_{p+3}$에서 $9l-3 = l$, 즉 $l = \dfrac{3}{8}$이 되어 l은 자연수라는 조건이 성립하지 않는다.

$k = 3l$이면 $a_p = 9l+3$, $a_{p+1} = 3l+1$, $a_{p+2} = 3l+2$,

$a_{p+3} = 3l+3$이므로 $a_p = a_{p+3}$에서 $9l+3 = 3l+3$. 즉, $l=0$이 되어 l은 자연수라는 조건이 성립하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 수열 $\{a_n\}$에서 어떤 자연수 p에 대하여 a_p의 값이 1, 2, 3 중 하나이면 $n \geq p$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+3} = a_n$이 성립하고, a_p의 값이 1, 2, 3이 아닌 자연수이면 $a_{n+3} = a_n$이 성립하지 않는 $n \geq p$인 어떤 자연수 n이 존재 한다.

즉, 조건 (나)를 만족시키려면 수열 $\{a_n\}$에서 1, 2, 3 중 어느 하나가 최초로 나타나는 것은 a_6이어야 한다.

한편, $a_6 = 1$이면 $a_5 = 3$ 또는 $a_5 = 0$인데, $a_5 = 3$이면 조건 (나)를 만족시키지 않고, $a_5 = 0$이면 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수라는 조건이 성립하지 않으므로 $a_6 \neq 1$

(iii) $a_6 = 2$인 경우

$a_5 = 6$ 또는 $a_5 = 1$

$a_5 = 1$이면 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$a_5 = 6$이면 $a_4 = 18$ 또는 $a_4 = 5$

$a_4 = 18$이면 $a_3 = 54$ 또는 $a_3 = 17$인데,

$a_3 = 54$이면 $a_3 > a_4$이므로 $a_2 < a_3 < a_4$라는 조건을 만족시키지 않는다. 즉, $a_3 = 17$이고,

$a_3 = 17$이면 $a_2 = 51$ 또는 $a_2 = 16$인데,

$a_2 = 51$이면 $a_2 > a_3$이므로 $a_2 < a_3 < a_4$라는 조건을 만족시키지 않는다. 따라서 $a_2 = 16$이고, $a_1 = 48$이므로 $a_1 = 48$, $a_2 = 16$, $a_3 = 17$, $a_4 = 18$, $a_5 = 6$, $a_6 = 2$이다.

같은 방법으로 $a_4 = 5$이면 $a_3 = 15$ 또는 $a_3 = 4$인데,

$a_3 = 15$이면 $a_3 > a_4$이므로 $a_2 < a_3 < a_4$라는 조건을 만족시키지 않는다. 또 $a_3 = 4$이면 $a_2 = 12$이고 $a_2 < a_3 < a_4$라는 조건을 만족시키지 않는다. 따라서 $a_4 = 5$이면 조건을 모두 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 존재하지 않는다.

즉, $a_6 = 2$인 경우 조건을 모두 만족시키는 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 48$, $a_2 = 16$, $a_{13} = 17$, $a_4 = 18$, $a_5 = 6$, $a_6 = 2$이므로

$$\sum_{n=1}^{15} a_n = 48+16+17+18+6+(2+3+1)\times 3+2 = 125$$

(iv) $a_6 = 3$인 경우

같은 방법으로 $a_5 = 9$ 또는 $a_5 = 2$

$a_5 = 2$이면 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$a_5 = 9$이면 $a_4 = 27$ 또는 $a_4 = 8$

$a_4 = 27$이면 $a_3 = 81$ 또는 $a_3 = 26$인데, $a_3 = 81$이면 $a_3 > a_4$이므로 $a_2 < a_3 < a_4$라는 조건을 만족시키지 않는다. 또 $a_3 = 26$이면 $a_2 = 78$ 또는 $a_2 = 25$인데, $a_2 = 78$이면 $a_2 > a_3$이므로 $a_2 < a_3 < a_4$라는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $a_2 = 25$이고 $a_1 = 75$이므로 $a_1 = 75$, $a_2 = 25$, $a_3 = 26$, $a_4 = 27$, $a_5 = 9$, $a_6 = 3$이다.

같은 방법으로 $a_4 = 8$이면 $a_3 = 24$ 또는 $a_3 = 7$인데,

$a_3 = 24$이면 $a_3 > a_4$이므로 $a_2 < a_3 < a_4$라는 조건을 만족시키지 않는다. 또 $a_3 = 7$이면 $a_2 = 21$인데, $a_2 = 21$이면 $a_2 > a_3$이므로 $a_2 < a_3 < a_4$라는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $a_4 = 8$이면 조건을 모두 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 존재하지 않는다.

즉, $a_6 = 3$인 경우 조건을 모두 만족시키는 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 75$, $a_2 = 25$, $a_3 = 26$, $a_4 = 27$, $a_5 = 9$, $a_6 = 3$이므로

$$\sum_{n=1}^{15} a_n = 75+25+26+27+9+(3+1+2)\times 3+3 = 183$$

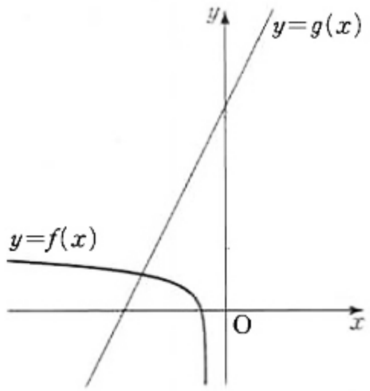
(ⅲ), (ⅳ)에서 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{15} a_n$의 값은 125, 183이므로 최댓값은 183이다.

328. 정답 23

함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는

$\log(ax+b)=0$에서 $ax+b=1$이므로 $x=\dfrac{1-b}{a}$

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 제2사분면에서 만나기 위해서는 $\dfrac{b^2-37}{a}>0$이고 $g\left(\dfrac{1-b}{a}\right)>0$이어야 한다. 이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$g\left(\dfrac{1-b}{a}\right)=\dfrac{2-2b}{a}+\dfrac{b^2-37}{a}=\dfrac{b^2-2b-35}{a}>0$

에서 $a<0$이므로

$b^2-2b-35<0$

$(b+5)(b-7)<0$

$b<0$이므로 $-5<b<0$이고, $-5<b<0$에서 $\dfrac{b^2-37}{a}>0$도 성립한다.

즉, 조건 (나)를 만족시키는 음의 정수 b의 값은 -1, -2, -3, -4

(ⅰ) $b=-1$인 경우

$\dfrac{-36}{a}$이 정수인 음의 정수 a의 값의 개수는 36의 약수의 개수와 같으므로 $36=2^2\times3^2$에서 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$(2+1)\times(2+1)=9$

(ⅱ) $b=-2$인 경우

$\dfrac{-33}{a}$이 정수인 음의 정수 a의 값의 개수는 33의 약수의 개수와 같으므로 $33=3\times11$에서 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$(1+1)\times(1+1)=4$

(ⅲ) $b=-3$인 경우

$\dfrac{-28}{a}$이 정수인 음의 정수 a의 값의 개수는 28의 약수의 개수와 같으므로 $28=2^2\times7$에서 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$(2+1)\times(1+1)=6$

(ⅳ) $b=-4$인 경우

$\dfrac{-21}{a}$이 정수인 음의 정수 a의 값의 개수는 21의 약수의 개수와 같으므로 $21=3\times7$에서 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

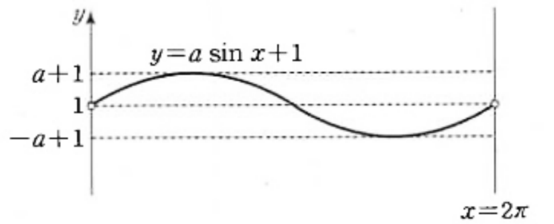
$(1+1)\times(1+1)=4$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 조건을 만족시키는 두 음의 정수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 $9+4+6+4=23$

329. 정답 16

(ⅰ) $a>0$인 경우

$0<x<2\pi$에서 함수 $y=a\sin x+1$의 그래프를 그려 보면



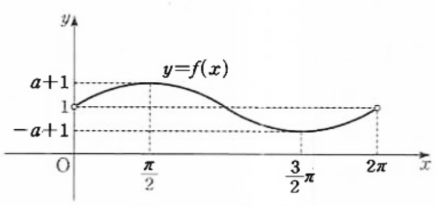
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $-a+1<0$, $-a+1=0$, $-a+1>0$인 경우로 나누어 생각한다.

$0<a<1$, $a=1$, $a>1$인 경우 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 각각 그림과 같다.

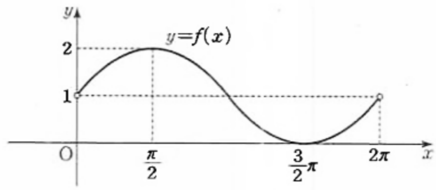
[$0<a<1$인 경우]

[$a=1$인 경우]

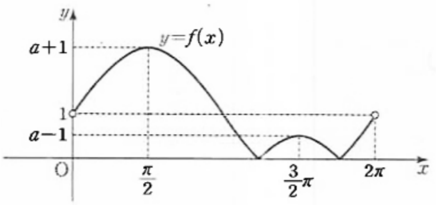
[$a>1$인 경우]



[$0<a<1$인 경우]



[$a=1$인 경우]

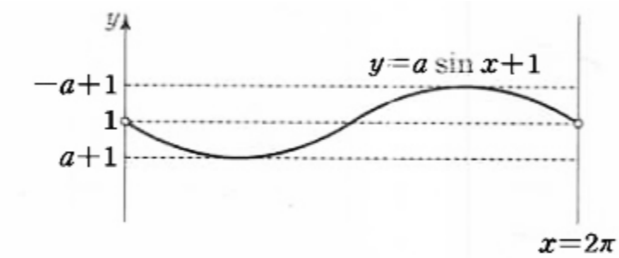


[$a>1$인 경우]

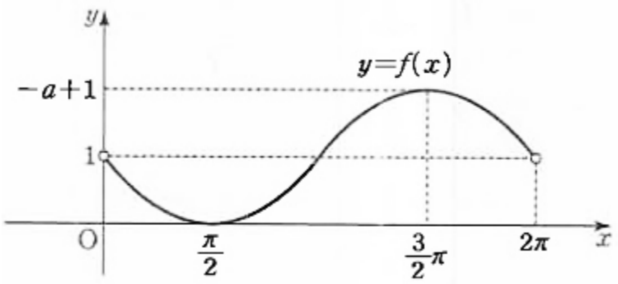
이므로 함수 $f(x)$의 최댓값은 $a+1$이다.
즉, $a+1<a+29$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a+29$는 항상 만나지 않는다.

(ii) $a<0$인 경우

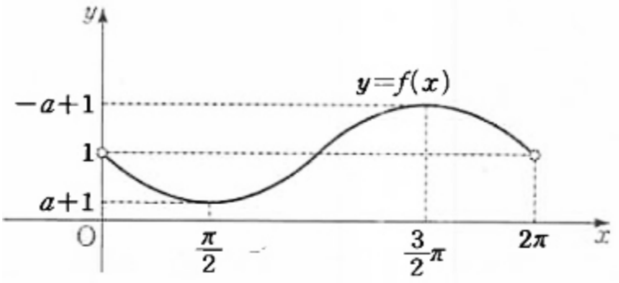
마찬가지의 방법으로 $0<x<2\pi$에서 함수 $y=a\sin x+1$의 그래프를 그려 보면



이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $a+1<0$, $a+1=0$, $a+1>0$인 경우로 나누어 생각한다.
$a=-1$, $-1<a<0$인 경우 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 각각 그림과 같다.

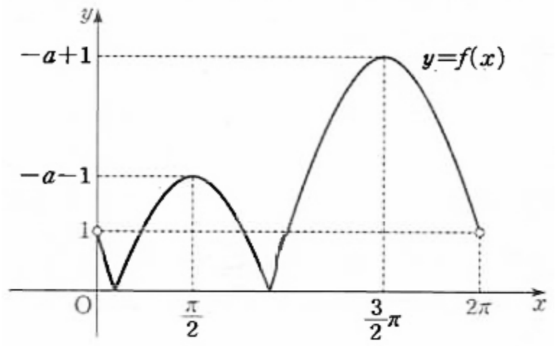


[$a=-1$인 경우]

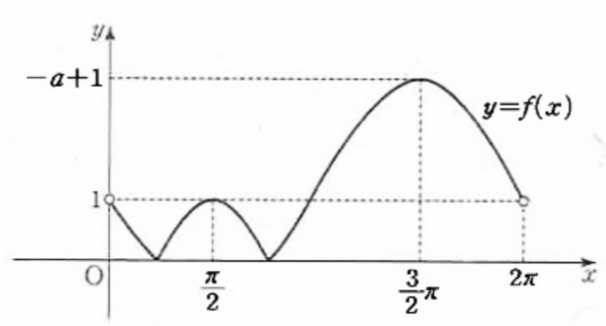


[$-1<a<0$인 경우]

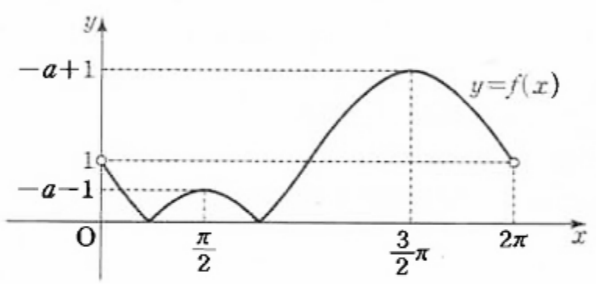
이므로 함수 $f(x)$의 최댓값은 $-a+1$이다.
한편, $-1\le a<0$에서 $-a+1$의 값의 범위를 구하면
$0<-a\le 1$, $1<-a+1\le 2$이고 $28\le a+29<29$
즉, $a=-1$인 경우와 $-1<a<0$인 경우, $-a+1<a+29$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a+29$는 항상 만나지 않는다.
즉, 함수 $f(x)=|a\sin x+1|$의 그래프가 직선 $y=a+29$와 만나는 모든 점의 x좌표의 합이 $\frac{7}{2}\pi$인 경우는 $a<-1$인 경우만 나타날 수 있다.
$a<-1$일 때, $a+1<0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $-a-1>1$, $-a-1=1$, $0<-a-1<1$인 경우로 나누어 생각한다.
$a<-2$, $a=-2$, $-2<a<-1$인 경우 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 각각 그림과 같다.



[$a<-2$인 경우]



[$a=-2$인 경우]



[$-2<a<-1$인 경우]

한편, 함수 $f(x)=|a\sin x+1|$의 그래프가 직선 $y=a+29$와 만나는 서로 다른 실근이 두 개 이상인 경우 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이거나 직선 $x=\frac{3}{2}\pi$에 대하여 대칭인 근이 존재한다.

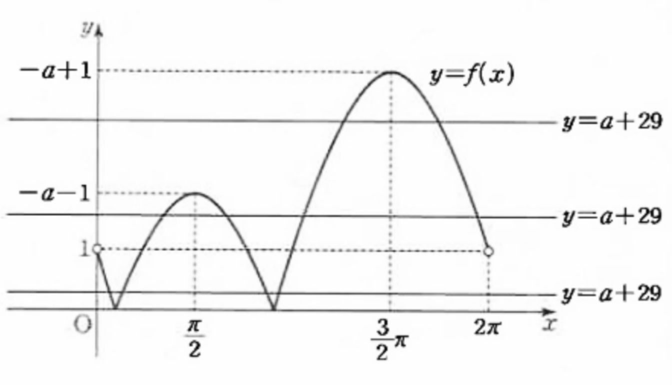
$-2\le a<-1$일 때, 함수 $f(x)=|a\sin x+1|$의 그래프가 직선 $y=a+29$와 만나는 모든 점의 x좌표의 합이 $\frac{7}{2}\pi$인 경우가 없으므로 $a<-2$이다.

$a<-2$일 때, 함수 $f(x)=|a\sin x+1|$의 그래프가 직선 $y=a+29$와 만나는 모든 점의 x좌표의 합이 $\frac{7}{2}\pi$인 경우는 직선 $y=a+29$가 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ -a-1\right)$을 지나는 경우이다.

따라서 $a+29=-a-1$에서 $a=-15$이고, 이때 함수 $f(x)$의 최댓값은 $-a+1=15+1=16$이다.

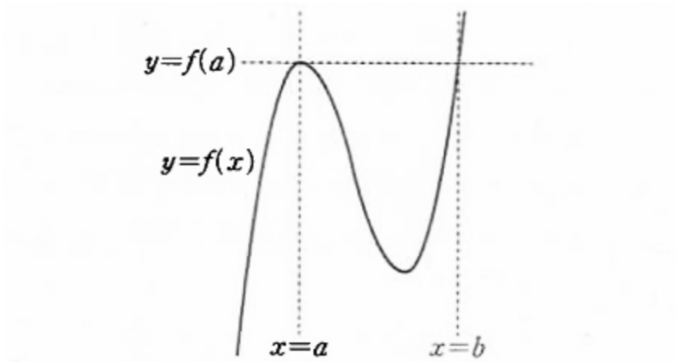
[참고]

다음 그림과 같이 함수 $f(x)=|a\sin x+1|$의 그래프가 직선 $y=a+29$와 만나는 서로 다른 실근이 두 개 이상인 경우, 즉 $a<-1$인 경우 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이거나 직선 $x=\frac{3}{2}\pi$에 대하여 대칭인 근이 존재한다.



330. 정답 108

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극대이고 x에 대한 방정식 $f(x)=f(a)$의 a가 아닌 실근을 b $(b>a)$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



문제의 조건으로부터 닫힌구간 $[k-1,\ k+1]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 $f(a)$가 되도록 하는 실수 k의 최솟값은 $k+1=a$일 때, 즉 $k=a-1$일 때이다.

또 닫힌구간 $[k-1,\ k+1]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 $f(a)$가 되도록 하는 실수 k의 최댓값은 $k+1=b$일 때, 즉 $k=b-1$일 때이다.

닫힌구간 $[k-1,\ k+1]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 $f(a)$가 되도록 하는 실수 k의 최댓값과 최솟값의 합이 9이므로

$(a-1)+(b-1)=9$

$b=11-a$

그런데 $a<b$이므로

$a<11-a$에서 $a<\frac{11}{2}$ …… ㉠

즉, x에 대한 방정식 $f(x)=f(a)$의 근이 $x=a$ (중근), $x=b$이고, 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)-f(a)=(x-a)^2(x-b)$

$b=11-a$이므로

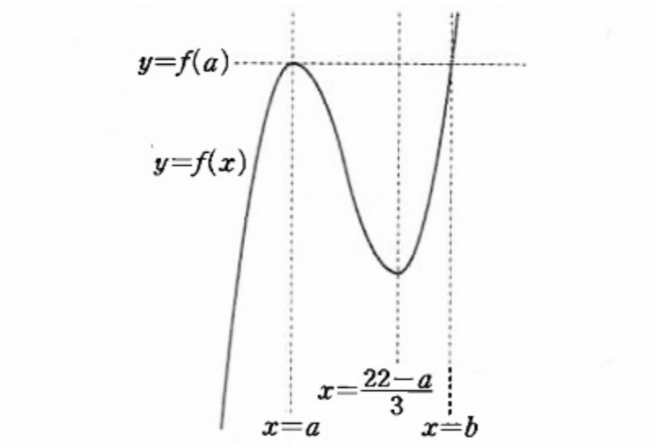
$f(x)=(x-a)^2(x-11+a)+f(a)$ …… ㉡

라 하면

$$\begin{aligned}f'(x)&=2(x-a)(x-11+a)+(x-a)^2\\&=(x-a)\{2(x-11+a)+(x-a)\}\\&=(x-a)(3x+a-22)\end{aligned}$$

이고 $f'(x)=0$에서 $x=a$ 또는 $x=\dfrac{22-a}{3}$

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극대이므로 $x=\dfrac{22-a}{3}$에서 극소이고 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



㉠에서 $a<\dfrac{11}{2}$이므로 $-a>-\dfrac{11}{2}$

$22-a>\dfrac{33}{2}$, $\dfrac{22-a}{3}>\dfrac{11}{2}$

즉, $4<\dfrac{11}{2}<\dfrac{22-a}{3}$

한편, $x<\dfrac{22-a}{3}$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(a)$이므로 $f(4)$가 최대일 때, $a=4$

또 ㉠이 성립하므로 $a=4$를 ㉡에 대입하면

$f(x)=(x-4)^2(x-7)+f(4)$

이때 $f(0)=0$이므로

$f(0)=(-4)^2\times(-7)+f(4)=0$

에서 $f(4)=112$

따라서 $f(x)=(x-4)^2(x-7)+112$이고

함수 $f(x)$는 $x=6$에서 극솟값 $f(6)=2^2\times(-1)+112=108$을 갖는다.

331. 정답 ⑤

$f(x)=\sin\left(nx+\dfrac{\pi}{2}\right)\tan\left(nx+\dfrac{\pi}{2}\right)$

$=\sin\left(n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\times\dfrac{\sin\left(n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)}$

$=\cos nx\times\dfrac{\cos nx}{-\sin nx}$

이때 $0<x<\dfrac{\pi}{n}$에서 $\sin nx\neq0$이므로

$f(x)=-\dfrac{\cos^2 nx}{\sin nx}$

$=-\dfrac{1-\sin^2 nx}{\sin nx}$

$=-\dfrac{1}{\sin nx}+\sin nx$

따라서

$g(x)=\sin nx\times f(x)$

$=\sin nx\times\left(-\dfrac{1}{\sin nx}+\sin nx\right)$

$=\sin^2 nx-1$

이므로

$g(x)=-\dfrac{3}{4}$에서 $\sin^2 nx-1=-\dfrac{3}{4}$, $\sin^2 nx=\dfrac{1}{4}$

열린구간 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{n}\right)$에서 $\sin nx>0$이므로

$\sin nx=\dfrac{1}{2}$

따라서 $nx=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $nx=\dfrac{5}{6}\pi$이므로

$x=\dfrac{\pi}{6n}$ 또는 $x=\dfrac{5}{6n}\pi$

즉, $M=\dfrac{5}{6n}\pi$, $m=\dfrac{\pi}{6n}$이므로

$M-m=\dfrac{5}{6n}\pi-\dfrac{\pi}{6n}=\dfrac{2}{3n}\pi$

따라서 $\dfrac{2}{3n}\pi=\dfrac{\pi}{15}$에서 $n=10$

332. 정답 ①

곡선 $y=x^3+2ax^2$ 위의 점을 $(s,\ s^3+2as^2)$이라 하면

$y'=3x^2+4ax$이므로 점 $(s,\ s^3+2as^2)$에서의 접선의 방정식은

$y-(s^3+2as^2)=(3s^2+4as)(x-s)$

$y=(3s^2+4as)x-2s^3-2as^2$ …… ㉠

곡선 $y=3ax^2-\dfrac{3}{a}$ 위의 점을 $\left(t,\ 3at^2-\dfrac{3}{a}\right)$이라 하면

$y'=6ax$이므로 $\left(t,\ 3at^2-\dfrac{3}{a}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-\left(3at^2-\dfrac{3}{a}\right)=6at(x-t)$

$y=6atx-3at^2-\dfrac{3}{a}$ …… ㉡

㉠, ㉡이 서로 일치해야 하므로

$3s^2+4as=6at$ …… ㉢

$-2s^3-2as^2=-3at^2-\dfrac{3}{a}$

즉, $2s^3+2as^2=3at^2+\dfrac{3}{a}$ …… ㉣

㉢에서 $t=\dfrac{s^2}{2a}+\dfrac{2s}{3}$이므로 ㉣에 대입하면

$2s^3+2as^2=3a\left(\frac{s^2}{2a}+\frac{2s}{3}\right)^2+\frac{3}{a}$

$2s^3+2as^2=\frac{3s^4}{4a}+2s^3+\frac{4as^2}{3}+\frac{3}{a}$

$9s^4-8a^2s^2+36=0$

이때 $u=s^2(u\geq 0)$이라 하면 $9u^2-8a^2u+36=0$이고 음이 아닌 실근이 존재해야 하므로

$f(u)=9u^2-8a^2u+36$이라 하면

$f(u)=9\left(u-\frac{4a^2}{9}\right)^2-\frac{16a^4}{9}+36$

이고 $f(0)=36$이고 $\frac{4a^2}{9}>0$이므로 음이 아닌 실근이 존재하기 위해서는

$-\frac{16a^4}{9}+36\leq 0,\ a^4\geq\frac{81}{4}$

따라서 a^4의 최솟값은 $\frac{81}{4}$이다.

333. 정답 ④

$\{g(n)\}^3=(-2)^{f(n)},\ \{g(n+1)\}^3=(-2)^{f(n+1)},$

$\{g(n+2)\}^3=(-2)^{f(n+2)}$에서

$\{g(n)g(n+1)g(n+2)\}^3=(-2)^{f(n)+f(n+1)+f(n+2)}$

$g(n)\times g(n+1)\times g(n+2)=1$이므로

$(-2)^{f(n)+f(n+1)+f(n+2)}=1$에서

$f(n)+f(n+1)+f(n+2)=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

그런데 함수 $h(x)=x^3$의 그래프는 점$(0,\ 0)$에 대하여 대칭이고 함수 $f(x)=(x-k-4)^3$의 그래프는 함수 $y=h(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $(k+4)$만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(k+4,\ 0)$에 대하여 대칭이다.

따라서 ㉠을 만족시키기 위해서는 k가 음이 아닌 정수이므로

$n+1=k+4$

따라서 $n-k=3$이므로

$$\begin{aligned}f(2n-k)&=\{(2n-k)-k-4\}^3\\&=\{2(n-k)-4\}^3\\&=(2\times 3-4)^3\\&=2^3=8\end{aligned}$$

334. 정답 ⑤

(ⅰ) $a_4\leq 4$일 때

$a_5=a_4+4=5$에서 $a_4=1$

① $a_3\leq 3$일 때

$a_4=a_3+3=1$에서 $a_3=-2$이므로 모순이다.

② $a_3>3$일 때

$a_4=a_3-3=1$에서 $a_3=4$

㉠ $a_2\leq 2$일 때

$a_3=a_2+2=4$에서 $a_2=2$

(가) $a_1\leq 1$일 때

$a_2=a_1+1=2$에서 $a_1=1$

(나) $a_1>1$일 때

$a_2=a_1-1=2$에서 $a_1=3$

㉡ $a_2>2$일 때

$a_3=a_2-2=4$에서 $a_2=6$

(다) $a_1\leq 1$일 때

$a_2=a_1+1=6$에서 $a_1=5$이므로 모순이다.

(라) $a_1>1$일 때

$a_2=a_1-1=6$에서 $a_1=7$

(ⅱ) $a_4>4$일 때

$a_5=a_4-4=5$에서 $a_4=9$

① $a_3\leq 3$일 때

$a_4=a_3+3=9$에서 $a_3=6$이므로 모순이다.

② $a_3>3$일 때

$a_4=a_3-3=9$에서 $a_3=12$

㉠ $a_2\leq 2$일 때

$a_3=a_2+2=12$에서 $a_2=10$이므로 모순이다.

㉡ $a_2>2$일 때

$a_3=a_2-2=12$에서 $a_2=14$

(가) $a_1\leq 1$일 때

$a_2=a_1+1=14$에서 $a_1=13$이므로 모순이다.

(나) $a_1>1$일 때

$a_2=a_1-1=14$에서 $a_1=15$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a_1=1,\ a_1=3,\ a_1=7,\ a_1=15$이므로 모든 a_1의 값의 합은

$1+3+7+15=26$

335. 정답 ④

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+(9-n^2)x$에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=x^2-6x+9-n^2\\&=(x-3)^2-n^2\\&=(x-3-n)(x-3+n)\end{aligned}$$

따라서 방정식 $f'(x)=0$의 근은

$x=3+n$ 또는 $x=3-n$

(ⅰ) $1\leq n\leq 2$일 때

구간 $[0,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$3-n$	$\cdots$	$3+n$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

$f(x)$는 $f(0)$ 또는 $f(3+n)$에서 최솟값을 갖는다.
이때

$$\begin{aligned} f(3+n)-f(0) &= f(3+n) \\ &= \frac{1}{3}(3+n)^3-3(3+n)^2+(9-n^2)(3+n) \\ &= \frac{1}{3}(3+n)^2\{3+n-9+3(3-n)\} \\ &= \frac{1}{3}(3+n)^2(3-2n) \end{aligned}$$

따라서 $n=1$일 때 $f(3+n)>f(0)$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖고
$n=2$일 때 $f(3+n)<f(0)$이므로 $f(x)$는 $x=5$에서 최솟값을 갖는다.

(ii) $n \geq 3$일 때
구간 $[0, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$3+n$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

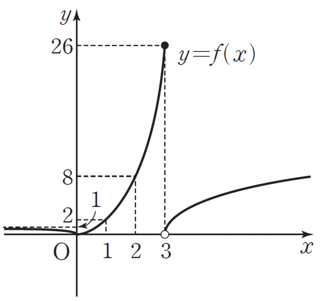
이때 함수 $f(x)$는 $x=3+n$에서 최솟값을 갖는다.

(i), (ii)에서 $a_n=\begin{cases} 0 & (n=1) \\ n+3 & (n \geq 2) \end{cases}$이므로

$$\sum_{n=1}^{10} a_n=\sum_{n=1}^{9}(n+4)=\frac{9\times10}{2}+4\times9=45+36=81$$

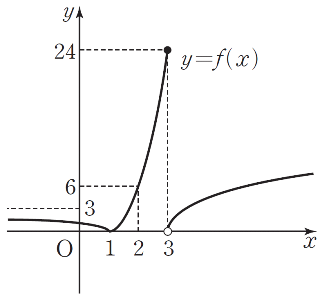
336. 정답 ③

(i) $a=1$일 때 함수 $f(x)=\begin{cases} |3^x-1| & (x \leq 3) \\ \log_2(x-2) & (x>3) \end{cases}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



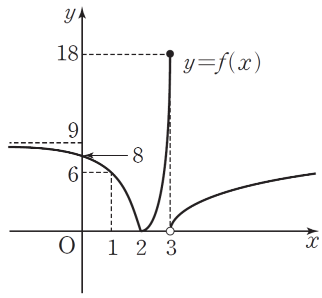
따라서 자연수 b에 대하여 집합 $\{f(x) \mid x \leq b\}$의 원소 중 자연수인 원소의 개수가 8이기 위해서는 $b=2$이므로
$a+b=3$

(ii) $a=2$일 때 함수 $f(x)=\begin{cases} |3^x-3| & (x \leq 3) \\ \log_2(x-2) & (x>3) \end{cases}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



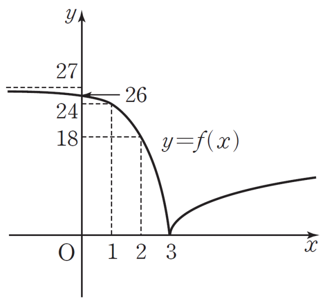
따라서 집합 $\{f(x) \mid x \leq b\}$의 원소 중 자연수인 원소의 개수가 8이기 위한 자연수 b는 존재하지 않는다.

(iii) $a=3$일 때 함수 $f(x)=\begin{cases} |3^x-9| & (x \leq 3) \\ \log_2(x-2) & (x>3) \end{cases}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



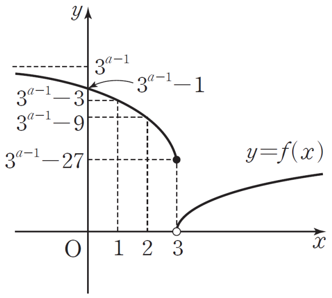
따라서 자연수 b에 대하여 집합 $\{f(x) \mid x \leq b\}$의 원소 중 자연수인 원소의 개수가 8이기 위해서는 $b=2$이므로
$a+b=5$

(iv) $a=4$일 때 함수 $f(x)=\begin{cases} |3^x-27| & (x \leq 3) \\ \log_2(x-2) & (x>3) \end{cases}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 집합 $\{f(x) \mid x \leq b\}$의 원소 중 자연수인 원소의 개수가 8이기 위한 자연수 b는 존재하지 않는다.

(v) $5 \leq a \leq 10$일 때 함수 $f(x)=\begin{cases} |3^x-3^{a-1}| & (x \leq 3) \\ \log_2(x-2) & (x>3) \end{cases}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 집합 $\{f(x)\,|\,x \le b\}$의 원소 중 자연수인 원소의 개수가 8이기 위한 자연수 b는 존재하지 않는다.

(ⅰ)~(ⅴ)에서 모든 k의 값의 합은

$3+5=8$

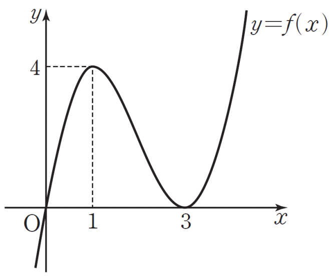
337. 정답 ②

$f(x)=x^3-6x^2+9x=x(x-3)^2$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9$

$\quad=3(x-1)(x-3)$

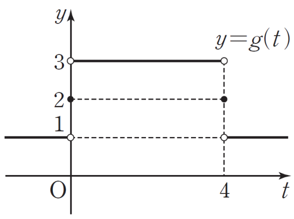
이고 $f(1)=4,\ f(3)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수가 $g(t)$이므로

$$g(t)=\begin{cases}1 & (t<0)\\ 2 & (t=0)\\ 3 & (0<t<4)\\ 2 & (t=4)\\ 1 & (t>4)\end{cases}$$

즉, 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 일차함수 $h(t)=st-5s+2=s(t-5)+2$의 그래프는 기울기가 s이고 점 $(5,\ 2)$를 지나는 직선이다.

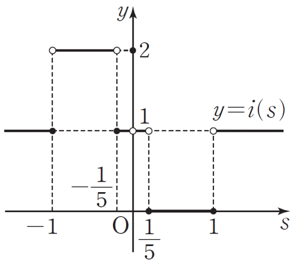
따라서

두 점 $(5,\ 2)$, $(4,\ 1)$을 지나는 직선의 기울기는 1

두 점 $(5,\ 2)$, $(0,\ 1)$을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{5}$

두 점 $(5,\ 2)$, $(4,\ 3)$을 지나는 직선의 기울기는 -1

이므로 함수 $y=i(s)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $a_1=-1,\ a_2=-\frac{1}{5},\ a_3=0,\ a_4=\frac{1}{5},\ a_5=1$

이므로

$n\times a_4=5\times\frac{1}{5}=1$

338. 정답 27

이등변삼각형 ABC에서 $\angle\mathrm{ABC}=120^\circ$이므로

$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BCA}=30^\circ$

따라서 $\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BDC}=30^\circ$

$\angle\mathrm{BCA}=\angle\mathrm{BDA}=30^\circ$이므로

$\angle\mathrm{ADC}=\angle\mathrm{BDA}+\angle\mathrm{BDC}=60^\circ$

또한 $\overline{\mathrm{AD}}=x,\ \overline{\mathrm{CD}}=y\ (x>y)$라 하면 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{2})^2=x^2+(\sqrt{3})^2-2\times x\times\sqrt{3}\times\cos30^\circ$

$x^2-3x+1=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{2})^2=y^2+(\sqrt{3})^2-2\times y\times\sqrt{3}\times\cos30^\circ$

$y^2-3y+1=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $x>y$이므로

$x=\frac{3+\sqrt{5}}{2},\ y=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

따라서 삼각형 ABCD의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sin120^\circ+\frac{1}{2}xy\sin60^\circ$

$\quad=\frac{\sqrt{3}}{4}(2+xy)$

$\quad=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(2+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\times\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$

$\quad=\frac{\sqrt{3}}{4}\times3=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

이므로

$16S^2=16\times\frac{27}{16}=27$

339. 정답 15

조건 (가)에 의하여 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

a, d는 모두 자연수이고
조건 (나)에 의하여
$a_6 = a+5d \le 200$ …… ㉠
조건 (다)에 의하여

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6 = \frac{6(2a+5d)}{2} = 3(2a+5d) = 738$$

$2a+5d = 246$
따라서
$a = \frac{246-5d}{2}$ …… ㉡
이므로 ㉠에 대입하면
$\frac{246-5d}{2}+5d \le 200$, $5d \le 154$
따라서 $d \le 30.8$
그런데 ㉡에서 $246-5d$가 2의 배수가 되어야 a가 자연수가 되므로 d는 2의 배수가 되어야 한다.
따라서 $d \le 30.8$을 만족시키는 자연수 d 중에서 2의 배수는 15개이므로 조건을 만족시키는 등차수열 $\{a_n\}$의 개수는 15이다.

340. 정답 12
함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이므로
$\lim_{x\to 3-} f(x) = \lim_{x\to 3+} f(x) = f(3)$
즉, $-3 = 3a+b$에서
$3a+b = -3$ …… ㉠
또한 $0 \le x < 3$일 때

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x (-t)dt = \left[-\frac{1}{2}t^2\right]_0^x = -\frac{1}{2}x^2$$

$$\int_x^6 f(t)dt = \int_x^3 (-t)dt + \int_3^6 (at+b)dt = \left[-\frac{1}{2}t^2\right]_x^3 + \left[\frac{a}{2}t^2+bt\right]_3^6 = -\frac{9}{2}+\frac{1}{2}x^2+\frac{27}{2}a+3b$$

이므로

$$g(x) = \left|\int_0^x f(t)dt\right| + \left|\int_x^6 f(t)dt\right| = \left|-\frac{1}{2}x^2\right| + \left|\frac{1}{2}x^2+\frac{27}{2}a+3b-\frac{9}{2}\right| = \frac{1}{2}x^2 + \left|\frac{1}{2}x^2+\frac{27}{2}a+3b-\frac{9}{2}\right|$$

이때 ㉠에 의하여

$$\frac{27}{2}a+3(-3a-3)-\frac{9}{2} = \frac{9}{2}a-\frac{27}{2} = \frac{9}{2}(a-3) > 0$$

이므로

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 + \left|\frac{1}{2}x^2+\frac{27}{2}a+3b-\frac{9}{2}\right| = \frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{1}{2}x^2+\frac{27}{2}a+3b-\frac{9}{2}\right) = x^2+\frac{27}{2}a+3b-\frac{9}{2} = x^2$$

$\frac{27}{2}a+3b-\frac{9}{2} = 0$, $27a+6b = 9$ …… ㉡
㉠, ㉡에서
$a=3$, $b=-12$
$3 \le x \le 6$일 때

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^3 (-t)dt + \int_3^x (3t-12)dt = -\frac{9}{2}+\left[\frac{3}{2}t^2-12t\right]_3^x = -\frac{9}{2}+\left(\frac{3}{2}x^2-12x\right)-\left(\frac{27}{2}-36\right) = \frac{3}{2}x^2-12x+18 = \frac{3}{2}(x-2)(x-6)$$

$$\int_x^6 f(t)dt = \int_x^6 (3t-12)dt = \left[\frac{3}{2}t^2-12t\right]_x^6 = (54-72)-\left(\frac{3}{2}x^2-12x\right) = -\frac{3}{2}x^2+12x-18 = -\frac{3}{2}(x-2)(x-6)$$

이고
$\frac{3}{2}(x-2)(x-6) \le 0$, $-\frac{3}{2}(x-2)(x-6) \ge 0$
이므로

$$g(x) = \left|\int_0^x f(t)dt\right| + \left|\int_x^6 f(t)dt\right| = \left|\frac{3}{2}(x-2)(x-6)\right| + \left|-\frac{3}{2}(x-2)(x-6)\right| = -\frac{3}{2}(x-2)(x-6)-\frac{3}{2}(x-2)(x-6) = -3(x-2)(x-6)$$

즉, $h(x) = -3(x-2)(x-6)$이므로
$f(5)+h(5) = 3+9$

$=12$

341. 정답 ②

(i) $a^3 \neq 1$, 즉 $a \neq 1$일 때,

$$\lim_{x\to1}\frac{ax^2+x-2a}{x^3-a^3}=\frac{a+1-2a}{1-a^3}=\frac{-(a-1)}{-(a-1)(a^2+a+1)}=\frac{1}{a^2+a+1}=1$$

$a^2+a+1=1$, $a(a+1)=0$

$a=-1$ 또는 $a=0$

(ii) $a=1$일 때,

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=\frac{3}{3}=1$$

이 되어 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은

$-1+0+1=0$

342. 정답 ④

$$(1+\sin\theta)\tan\theta+\frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}$$
$$=\frac{(1+\sin\theta)\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}$$
$$=\frac{\sin\theta\{(1+\sin\theta)^2+\cos^2\theta\}}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$$
$$=\frac{\sin\theta(1+2\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$$
$$=\frac{2\sin\theta(1+\sin\theta)}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$$
$$=\frac{2\sin\theta}{\cos\theta}=2\tan\theta=-3$$

$\tan\theta=-\frac{3}{2}$

$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$에서

$$\cos\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}$$
$$=\frac{1}{1+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{4}{13}$$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\cos^2\theta<0$ 이므로

$$\cos\theta=-\frac{2}{\sqrt{13}}=-\frac{2\sqrt{13}}{13}$$

343. 정답 ③

함수 $y=f(x+1)$의 그래프는 함수 $y=f(-x+1)$의 그래프와 y축에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-3}^{0}f(x+1)dx=\int_{0}^{3}f(-x+1)dx$$

함수 $y=f(x+1)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프이므로

$$\int_{-2}^{4}f(x)dx=\int_{-3}^{3}f(x+1)dx$$
$$=\int_{-3}^{0}f(x+1)dx+\int_{0}^{3}f(x+1)dx$$
$$=\int_{0}^{3}f(-x+1)dx+\int_{0}^{3}f(x+1)dx$$
$$=\int_{0}^{3}\{f(-x+1)+f(x+1)\}dx$$
$$=\int_{0}^{3}(x^2+6)dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}+6x\right]_0^3=9+18=27$$

344. 정답 ②

함수 $y=3^{-2x+a}+a$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 그래프를 나타내는 함수는

$x=3^{-2y+a}$, $-2y+a=\log_3(x-a)$

$y=-\frac{1}{2}\log_3(x-a)+\frac{a}{2}$ …… ㉠

㉠의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 y축의 방향으로 3만큼 평행이동시킨 그래프를 나타내는 함수는

$y-3=-\frac{1}{2}\log_3(x-2-a)+\frac{a}{2}$

$y=-\frac{1}{2}log_3(x-2-a)+\frac{a}{2}+3$ …… ㉡

㉡의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2+a$이므로

$2+a=-2$에서 $a=-4$

㉡의 그래프가 점 $(b,\ 0)$을 지나므로

$0=-\frac{1}{2}log_3(b-2+4)+\frac{-4}{2}+3$

$\log_3(b+2)=2$, $b+2=9$

$b=7$

따라서 $a+b=-4+7=3$

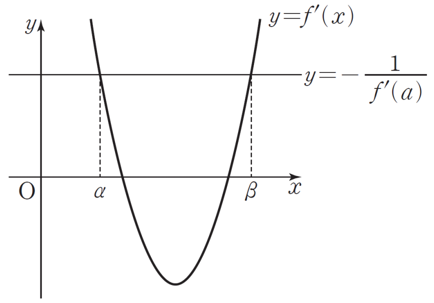
345. 정답 ④

$f'(x)=3x^2-10x+7=(3x-7)(x-1)$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))\left(1<a<\dfrac{7}{3}\right)$에서의 접선에 수직이고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 두 접선의 접점 Q, R의 x좌표를 각각 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면 두 수 α, β는 방정식

$f'(x)=-\dfrac{1}{f'(a)}$ …… ㉠

의 서로 다른 두 실근이다.



이때 $f'(a)=3\left(a-\dfrac{5}{3}\right)^2-\dfrac{4}{3}$이므로 $1<a<\dfrac{7}{3}$이면

$-\dfrac{4}{3}\le f'(a)<0$, 즉 $-\dfrac{1}{f'(a)}\ge\dfrac{3}{4}$

선분 $\mathrm{Q'R'}$의 길이는 방정식 ㉠의 두 실근의 차 $|\alpha-\beta|$와 같고,

$-\dfrac{1}{f'(a)}=\dfrac{3}{4}$일 때 $|\alpha-\beta|$의 값이 최소이다.

$f'(x)=\dfrac{3}{4}$에서 $3x^2-10x+7=\dfrac{3}{4}$

$12x-40x+25=0$

$(6x-5)(2x-5)=0$

$x=\dfrac{5}{6}$ 또는 $x=\dfrac{5}{2}$

$\alpha\le\dfrac{5}{6}$, $\beta\ge\dfrac{5}{2}$이므로

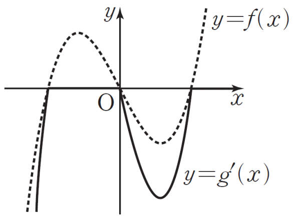
$\overline{\mathrm{Q'R'}}=|\alpha-\beta|\ge\dfrac{5}{2}-\dfrac{5}{6}=\dfrac{5}{3}$

346. 정답 ⑤

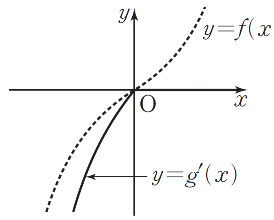
조건 (가)에서 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 $f(x)=ax(x^2-b)$(a, b는 상수이고, $a\ne0$)으로 놓자

$g'(x)=f(x)-|f(x)|=\begin{cases}0 & (f(x)\ge0)\\ 2f(x) & (f(x)<0)\end{cases}$

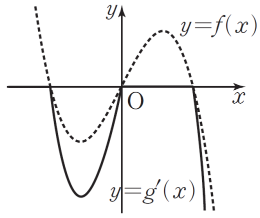
이므로 a, b의 값의 부호에 따라 함수 $y=g'(x)$의 그래프는 그림과 같다.



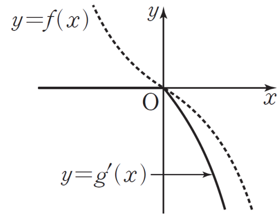
$a>0$, $b>0$일 때



$a>0$, $b\le0$일 때



$a<0$, $b>0$일 때



$a<0$, $b\le0$일 때

이때 조건 (나)를 만족시키려면 함수 $g(x)$는 최댓값이 존재해야 하고, 조건 (다)에 의하여 $a<0$, $b>0$이다.

$f(x)=ax(x+\sqrt{b})(x-\sqrt{b})$

로 놓으면 함수 $g(x)$의 최댓값이 $g(-2)$이므로

$-2\le-\sqrt{b}$, 즉 $0<b\le4$ …… ㉠

또, 조건 (다)에 의하여

$\sqrt{b}\ge2$, 즉 $b\ge4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $b=4$이므로

$f(x)=ax(x+2)(x-2)=a(x^3-4x)\,(a<0)$

$\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx=\int_0^4 a(x^3-4x)dx=a\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_0^4$

$=a(64-32)=32a$

$32a=-12$에서 $a=-\dfrac{8}{3}$이므로

$f(1)=-\dfrac{3}{8}(1^3-4)=\dfrac{9}{8}$

347. 정답 ④

$a_1=1>0$이므로 $a_3=a_1+a_2-2=a_2-1$

(ⅰ) $a_2>1$일 때,

$a_4=a_2+a_3-4=2a_2-5$

$a_3=a_2-1>0$이므로

$a_5=a_3+a_4-6=(a_2-1)+(2a_2-5)-6$

$=3a_2-12$

① $1<a_2\le\dfrac{5}{2}$일 때

$a_4=2a_2-5\le0$이므로

$a_6=a_4+4=2a_2-1$

이때, $1<a_2\le\dfrac{5}{2}$를 만족시키지 않는다.

② $a_2>\dfrac{5}{2}$일 때

$a_4=2a_2-5>0$이므로

$a_6=a_4+a_5-8=5a_2-25$

$5a_2-25=1$에서 $a_2=\frac{26}{5}$

이때 $a_2>\frac{5}{2}$이므로 조건을 만족시킨다.

따라서

$a_5=3\times\frac{26}{5}-12=\frac{18}{5}$

$a_5>0$이므로 $a_7=a_5+a_6-10=-\frac{27}{5}$

$a_7<0$이므로 $a_9=a_7+7=\frac{8}{5}$

(ii) $0<a_2\le 1$일 때,

$a_4=a_2+a_3-4=2a_2-5$

$a_3=a_2-1\le 0$이므로

$a_5=a_3+3=a_2+2$

$a_4=2a_2-5<0$이므로

$a_6=a_4+4=2a_2-1$

$2a_2-1=1$에서 $a_2=1$

이때 $0<a_2\le 1$이므로 조건을 만족시킨다.

따라서

$a_5=1+2=3$

$a_5>0$이므로 $a_7=a_5+a_6-10=-6$

$a_7<0$이므로 $a_9=a_7+7=1$

(iii) $-2<a_2\le 0$일 때

$a_4=a_2+2$

$a_3=a_2-1<0$이므로

$a_5=a_3+3=a_2+2$

$a_4>0$이므로

$a_6=a_4+a_5-8=2a_2-4$

$2a_2-4=1$에서 $a_2=\frac{5}{2}$

(iv) $a_2\le -2$일 때

$a_4=a_2+2$

$a_3=a_2-1<0$이므로

$a_5=a_3+3=a_2+2$

$a_4=a_2+2\le 0$이므로

$a_6=a_4+4=a_2+6$

$a_2+6=1$에서 $a_2=-5$

이때 $a_2\le -2$이므로 조건을 만족시킨다.

따라서

$a_5=-5+2=-3$

$a_5<0$이므로 $a_7=a_5+5=2$

$a_6>0$이므로 $a_8=a_6+a_7-12=-9$

$a_7>0$이므로 $a_9=a_7+a_8-14=-21$

(i)~(iv)에서 모든 a_9의 값의 합은

$\frac{8}{5}+1+(-21)=-\frac{92}{5}$

348. 정답 103

$\overline{BC}=x\,(x>0)$으로 놓으면 삼각형 ABC에서 코사인 법칙에 의하여

$(4\sqrt{2})^2=5^2+x^2-2\times5\times x\times\cos(\angle CBA)$

$x^2-6x-7=0$, $(x+1)(x-7)=0$

$x>0$에서 $x=7$

$$\cos(\angle ACB)=\frac{(4\sqrt{2})^2+7^2-5^2}{2\times4\sqrt{2}\times7}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

두 삼각형 ABD, CAE가 서로 닮은 도형으로

$\angle CBA=\angle DAC$

$\overline{DC}=t\,(0<t<7)$로 놓으면 삼각형 ADC에서 사인 버칙에 의하여

$$\frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)}=\frac{\overline{DC}}{\sin(\angle DAC)}$$

$$\frac{\overline{AD}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}=\frac{\overline{DC}}{\sin(\angle DAC)}$$

$$\frac{\overline{AD}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}=\frac{t}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}}$$

$$\overline{AD}=\frac{5}{4}t\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{8}t$$

삼각형 ADC에서 코사인 법칙에 의하여

$$\left(\frac{5\sqrt{2}}{8}t\right)^2=(4\sqrt{2})^2+t^2-2\times4\sqrt{2}\times t\times\cos(\angle ACD)$$

$\frac{25}{32}t^2=32+t^2-8t$, $7t^2-256t+1024=0$

$(7t-32)(t-32)=0$

$0<t<7$이므로 $t=\frac{32}{7}$

두 삼각형 ABD, CAE가 서로 닮은 도형이므로

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$$

$$\overline{AE}=\frac{7-\frac{32}{7}}{5}\times4\sqrt{2}=\frac{68\sqrt{2}}{35}$$

$p=35$, $q=68$이므로

$p+q=103$

349. 정답 12

일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 두 점 $(7,\ 0)$, $(3,\ 4)$를 지나므로

$g(x)=-x+7$ …… ㉠

이차함수 $y=f(x)$가 원점을 지나고, 일차함수 $y=g(x)$, 즉 $y=-x+7$과 두 점 $(3,\ 4)$, $(7,\ 0)$에서 만나므로

$f(x)-(-x+7)=a(x-3)(x-7)$(a는 상수)

로 놓을 수 있다.

$f(0)=0$이므로 $-7=21a$에서 $a=-\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{3}x(x-7)$ …… ㉡

$2^{f(x)g(x)}>1$에서 $f(x)g(x)>0$

$\log_2(f(x)g(x)+8) \geq 1-\log_{\frac{1}{2}}\{2f(x)+g(x)\}$에서

로그의 진수 조건에 의해

$f(x)g(x)+8>0,\ 2f(x)+g(x)>0$

$\log_2\{f(x)g(x)+8\} \geq \log_2\{2f(x)+g(x)\}$

$f(x)g(x)+8 \geq 4f(x)+2g(x)$

즉, $\{f(x)-2\}\{g(x)-4\} \geq 0$ …… ㉢

$f(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=7$

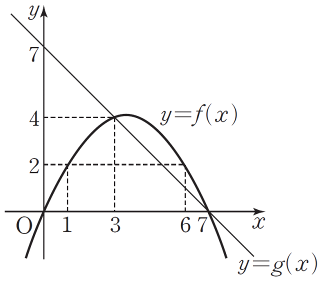
$f(x)=2$에서 $-\frac{1}{3}x(x-7)=2$

$x^2-7x+6=0,\ (x-1)(x-6)=0$

$x=1,\ x=6$

$g(x)=0$에서 $x=7$

$g(x)=4$에서 $x=3$



(ⅰ) $0<f(x)<2,\ 0<g(x)<4$일 때

$0<f(x)<2$를 만족시키는 x의 값의 범위는

$0<x<1$ 또는 $6<x<7$

$0<g(x)<4$를 만족시키는 x의 값의 범위는

$3<x<7$

따라서 이 경우 부등식 ㉢을 만족시키는 x의 값의 범위는

$6<x<7$

(ⅱ) $f(x)>2,\ g(x)>4$일 때,

$f(x)>2$를 만족시키는 x값의 범위는 $1<x<6$

$g(x)>4$를 만족시키는 x의 값의 범위는 $x<3$

따라서 이 경우 부등식 ㉢을 만족시키는 x의 값의 범위는

$1<x<3$

(ⅲ) $f(x)=2$일 때,

$g(x)>0$인 모든 $g(x)$의 값에 대하여 부등식 ㉢이 성립하므로

$x=1$ 또는 $x=6$

(ⅳ) $g(x)=4$일 때,

$f(x)>0$인 모든 $f(x)$의 값에 대하여 부등식 ㉢이 성립하므로

$x=3$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 부등식 ㉢을 만족시키는 x의 값의 범위는

$1 \leq x \leq 3$ 또는 $6 \leq x \leq 7$

따라서 모든 정수 x의 값은 $1,\ 2,\ 3,\ 6$이므로 그 합은 12이다.

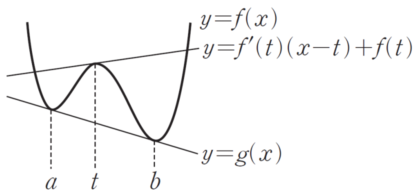
350. 정답 40

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(t)(x-t)+f(t)$ …… ㉠

부등식 $f(x)-f'(t)x \leq f(t)-tf'(t)$에서

$f(x) \leq f'(t)(x-t)+f(t)$ …… ㉡



조건 (다)에서 부등식 ㉡을 만족시키는 실수 x의 개수가 2이상이려면 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$위의 점 중 직선 ㉠위의 점이거나 직선 ㉠의 아래쪽에 있는 점의 개수가 2이상이어야 한다.

따라서 곡선 $y=f(x)$와 서로 다른 두점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))\,(a<b)$에서 접하는 직선 $y=g(x)$라 하면 조건 (다)를 만족시키는 실수 t의 값의 범위는 $a \leq t \leq b$이다.

$h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면

$h(x)=(x-a)^2(x-b)^2$이므로

$h'(x)=2(x-a)(x-b)^2+2(x-a)^2(x-b)$

$=2(x-a)(x-b)(2x-a-b)$

조건 (나)에서 $f'(x)=f'(1)$ 즉

$h'(x)+g'(x)=f'(1)$

이때 $g(x)$는 일차함수이므로 $g'(x)=m$(m은 상수) 로 놓으면

$h'(x)=f'(1)-m$ …… ㉢

삼차방정식 $h'(x)=0$의 세 실근 $a,\ \frac{a+b}{2},\ b$가 이 순서대로 등차수열을 이루고 있으므로 삼차방정식 ㉢이 서로 다른 세 실근 $\alpha,\ \beta,\ \gamma(\alpha<\beta<\gamma)$를 가지고 세 수 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$가 이 순서대로 등차수열을 이루려면 $f'(1)-m=0$, 즉 $f'(1)=m$이어야 한다.

이때 방정식 $f'(x)=m$, 즉 $h'(x)=0$의 서로 다른 세 실근이 $a,\ \frac{a+b}{2},\ b$이므로

$a=1$ 또는 $\frac{a+b}{2}=1$ 또는 $b=1$

조건 (다)에서 부등식 ㉡을 만족시키는 실수 t의 값의 최댓값과 최솟값의 차가 2이려면

$a=-1,\ b=1$ 또는 $a=0,\ b=2$ 또는 $a=1,\ b=3$

이어야 한다.

(ⅰ) $a=-1,\ b=1$일 때

$h(x)=(x+1)^2(x-1)^2$

$h'(x)=4x(x+1)(x-1)$

$g(x)=f'(1)(x-1)+f(1)$이므로

$f(2)=h(2)+g(2)=9+f'(1)+f(1)=0$

$f'(2)=h'(2)+g'(2)=24+f'(1)=14$

$f'(1)=-10,\ f(1)=1$

$f(x)=(x+1)^2(x-1)^2-10(x-1)+1$

$=(x+1)^2(x-1)^2-10x+11$

이때 $f(0)=12$이므로 조건 (가)를 만족시킨다.

(ii) $a=0,\ b=2$일 때,

$h(x)=x^2(x-2)^2$

$h'(x)=4x(x-1)(x-2)$

$g(x)=f'(2)(x-2)+f(2)$이므로

$f(x)=x^2(x-2)^2+14(x-2)$

이때 $f(0)=-28$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(iii) $a=1,\ b=3$일 때,

$h(x)=(x-1)^2(x-3)^2$,

$h'(x)=4(x-1)(x-2)(x-3)$,

$g(x)=f'(1)(x-1)+f(1)$이므로

$f(2)=h(2)+g(2)=1+f'(1)+f(1)=0$

$f'(2)=h'(2)+g'(2)=0+f'(1)=14$

$f'(1)=14, f(1)=-15$

$f(x)=(x-1)^2(x-3)^2+14(x-1)-15$

$=(x-1)^2(x-3)^2+14x-29$

이때 $f(0)=-20$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

따라서 $f(x)=(x+1)^2(x-1)^2-10x+11$이므로

$f(-2)=(-1)^2\times(-3)^2+20+11=40$

[참고]

만약 $y=f(x)$와 서로 다른 두 점에서 접하는 직선이 존재하지 않으면 부등식 ㉡을 만족시키는 실수 x의 개수는 1이다.

351. 정답 ③

곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=t,\ x=t+1$로 둘러싸인 부분의 넓이 $S_1(t)$는

$$S_1(t)=\int_t^{t+1} f(x)dx$$

$$=\int_t^{t+1} kx^2dx$$

$$=\left[\frac{k}{3}x^3\right]_t^{t+1}$$

$$=\frac{k}{3}\{(t+1)^3-t^3\}$$

$$=\frac{k}{3}(3t^2+3t+1)$$

곡선 $y=f(x)$와 y축 및 두 직선 $y=f(t),\ y=f(t+1)$로 둘러싸인 부분의 넓이가 $S_2(t)$이므로 $S_1(t)+S_2(t)$는 네 점 $(0,\ 0),\ (t+1,\ 0),\ (t+1,\ f(t+1)),\ (0,\ f(t+1))$을 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이에서 네 점 $(0,\ 0),\ (t,\ 0),\ (t,\ f(t)),\ (0,\ f(t))$를 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이를 뺀 것이다. 그러므로

$$S_1(t)+S_2(t)=(t+1)f(t+1)-tf(t)$$

$$=(t+1)\times k(t+1)^2-t\times kt^2$$

$$=k(3t^2+3t+1)$$

$$S_2(t)=k(3t^2+3t+1)-S_1(t)$$

$$=k(3t^2+3t+1)-\frac{k}{3}(3t^2+3t+1)$$

$$=\frac{2k}{3}(3t^2+3t+1)$$

$$kS_1(t)-S_2(t)=k\times\frac{k}{3}(3t^2+3t+1)-\frac{2k}{3}(3t^2+3t+1)$$

$$=\frac{(k^2-2k)(3t^2+3t+1)}{3}$$

따라서

$$\lim_{t\to\infty}\frac{kS_1(t)-S_2(t)}{t^2}=\frac{k^2-2k}{3}\lim_{t\to\infty}\frac{3t^2+3t+1}{t^2}$$

$$=\frac{k^2-2k}{3}\lim_{t\to\infty}\left(3+\frac{3}{t}+\frac{1}{t^2}\right)$$

$$=\frac{k^2-2k}{3}(3+0+0)$$

$$=k^2-2k=3$$

$(k+1)(k-3)=0$

$k>0$이므로 $k=3$

352. 정답 ②

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $d=a_{n+1}-a_n$이므로 조건(가)에 의하여 d는 한 자리의 자연수이다.

$a_1=1$이므로 $a_n=a_1+(n-1)d=1+(n-1)d$이고

조건 (나)에서

$$S=\sum_{k=1}^{10}\frac{(a-1)^2}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}$$

$$=(a_2-a_1)^2\sum_{k=1}^{10}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{(\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k})(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k})}$$

$$=d^2\sum_{k=1}^{10}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{a_{k+1}-a_k}$$

$$=d\sum_{k=1}^{10}(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k})$$

$$=d\{(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1})+(\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2})+(\sqrt{a_4}-\sqrt{a_3})$$
$$+\cdots+(\sqrt{a_{11}}-\sqrt{a_{10}})\}$$

$$=d(\sqrt{a_{11}}-\sqrt{a_1})$$

$=d(\sqrt{1+10d}-1)$

d는 한 자리의 자연수이므로 $\sqrt{1+10d}-1$의 값은 $d=8$인 경우에만 자연수이고, $d\neq 8$인 경우에는 무리수가 된다.

S가 자연수이므로 $d=8$이어야 한다. 그러므로

$S=8(\sqrt{1+80}-1)=64$

$a_n=1+(n-1)\times 8=8n-7$

따라서 부등식 $a_m>S$에서

$8m-7>64,\ m>\dfrac{71}{8}=8.875$

이므로 자연수 m의 최솟값은 9이다.

353. 정답 ②

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)+2}{x-1}=3$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to1}\{f(x)+2\}=0$이므로 $f(1)=-2$이고

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3$$

또한 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4-2g(x)}{f(x)+2}=-1$, 즉

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4-2g(x)}{f(x)-f(1)}=-1$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to1}\{4-2g(x)\}=0$이므로 $g(1)=2$이고

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{4-2g(x)}{f(x)-f(1)}&=-2\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{f(x)-f(1)}\\&=-2\lim_{x\to1}\frac{\frac{g(x)-g(1)}{x-1}}{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}\\&=-2\times\frac{g'(1)}{f'(1)}=-1\end{aligned}$$

$g'(1)=\dfrac{1}{2}f'(1)=\dfrac{3}{2}$

한편 $h(x)=\{f(x)+1\}\{g(x)+1\}$이라 하면

$$\begin{aligned}h(1)&=\{f(1)+1\}\{g(1)+1\}\\&=(-2+1)\times(2+1)=-3\end{aligned}$$

이므로 $a=h(1)=-3$

$$\begin{aligned}h'(x)&=\{f(x)+1\}'\{g(x)+1\}+\{f(x)+1\}\{g(x)+1\}'\\&=f'(x)\{g(x)+1\}+g'(x)\{f(x)+1\}\end{aligned}$$

에서

$$\begin{aligned}h'(1)&=f'(1)\{g(1)+1\}+g'(1)\{f(1)+1\}\\&=3(2+1)+\frac{3}{2}(-2+1)=\frac{15}{2}\end{aligned}$$

이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프 위의 점 $(1,\ -3)$에서의 접선의 방정식은

$y+3=\dfrac{15}{2}(x-1)$, 즉 $y=\dfrac{15}{2}x-\dfrac{21}{2}$ …… ㉠

직선 ㉠의 x절편은 $\dfrac{7}{5}$, y절편은 $-\dfrac{21}{2}$이므로

직선 ㉠과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

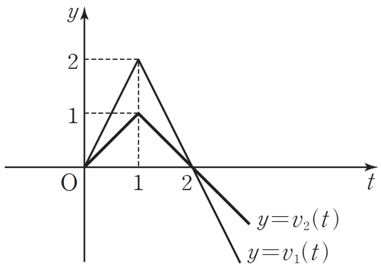
$S=\dfrac{1}{2}\times\left|\dfrac{7}{5}\right|\times\left|-\dfrac{21}{2}\right|=\dfrac{147}{20}$

따라서 $a+S=-3+\dfrac{147}{20}=\dfrac{87}{20}$

354. 정답 ⑤

$v_1(t)=-2|t-1|+2=\begin{cases}2t & (0\le t<1)\\ -2t+4 & (t\ge1)\end{cases}$

$v_2(t)=-|t-1|+1=\begin{cases}t & (0\le t<1)\\ -t+2 & (t\ge1)\end{cases}$



두 점 P, Q가 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하였으며, $0<t<2$일 때 $v_1(t)>v_2(t)>0$이고, $t>2$일 때 $v_1(t)<v_2(t)<0$이므로 시각 $t=\alpha$에서 두 점 P, Q의 위치가 같아지려면 $\alpha>2$이어야 한다.

따라서

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha v_1(t)dt&=\int_0^1 v_1(t)dt+\int_1^\alpha v_1(t)dt\\&=\int_0^1 2tdt+\int_1^\alpha(-2t+4)dt\\&=\Big[t^2\Big]_0^1+\Big[-t^2+4t\Big]_1^\alpha\\&=(1-0)+\{(-\alpha^2+4\alpha)-(-1+4)\}\\&=-\alpha^2+4\alpha-2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha v_2(t)dt&=\int_0^1 v_2(t)dt+\int_1^\alpha v_2(t)dt\\&=\int_0^1 tdt+\int_1^\alpha(-t+2)dt\\&=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{2}t^2+2t\right]_1^\alpha\\&=\left(\frac{1}{2}-0\right)+\left\{\left(-\frac{1}{2}\alpha^2+2\alpha\right)-\left(-\frac{1}{2}+2\right)\right\}\\&=-\frac{1}{2}\alpha^2+2\alpha-1\end{aligned}$$

$\int_0^{\alpha} v_1(t)dt = \int_0^{\alpha} v_2(t)dt$에서

$-\alpha^2+4\alpha-2=-\frac{1}{2}\alpha^2+2\alpha-1$

$\alpha^2-4\alpha+2=0$ …… ㉠

$\alpha=2\pm\sqrt{2}$

$\alpha>2$이므로 $\alpha=2+\sqrt{2}$

시각 $t=0$에서 $t=\alpha$, 즉 $t=2+\sqrt{2}$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$s=\int_0^{\alpha}|v_1(t)|dt$

$=\int_0^1 2tdt+\int_1^2(-2t+4)dt-\int_2^{\alpha}(-2t+4)dt$

$=\left[t^2\right]_0^1+\left[-t^2+4t\right]_1^2-\left[-t^2+4t\right]_2^{\alpha}$

$=(1-0)+\{(-4+8)-(-1+4)\}-\{(-\alpha^2+4\alpha)-(-4+8)\}$

$=\alpha^2-4\alpha+6$

이때 ㉠에서 $\alpha^2-4\alpha+2=0$이므로

$s=\alpha^2-4\alpha+6$

$=(\alpha^2-4\alpha+2)+4$

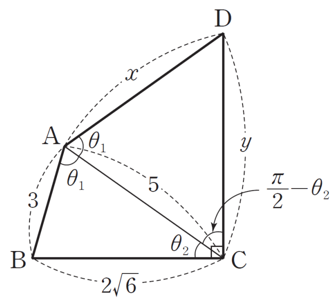
$=0+4=4$

따라서

$\alpha+s=(2+\sqrt{2})+4$

$=6+\sqrt{2}$

355. 정답 ②



$\angle BAC=\angle CAD=\theta_1$, $\angle ACB=\theta_2$라 하면 삼각형 ABC에서

$\cos\theta_1=\frac{\overline{AB}^2+\overline{CA}^2-\overline{BC}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{CA}}$

$=\frac{3^2+5^2-(2\sqrt{6})^2}{2\times3\times5}$

$=\frac{1}{3}$

$\cos\theta_2=\frac{\overline{BC}^2+\overline{CA}^2-\overline{AB}^2}{2\times\overline{BC}\times\overline{CA}}$

$=\frac{(2\sqrt{6})^2+5^2-3^2}{2\times2\sqrt{6}\times5}$

$=\frac{\sqrt{6}}{3}$

이므로

$\sin\theta_1=\sqrt{1-\cos^2\theta_1}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}$

$=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\sin\theta_2=\sqrt{1-\cos^2\theta_2}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}$

이때 $\angle DCA=\frac{\pi}{2}-(\angle ACB)=\frac{\pi}{2}-\theta_2$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_2\right)=\sin\theta_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$

이때 $\overline{AD}=x$, $\overline{CD}=y$라 하고 점 D에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH}=\overline{AD}\cos\theta_1=\frac{x}{3}$, $\overline{CH}=\overline{CD}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_2\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}y$

이고 $\overline{AC}=\overline{AH}+\overline{CH}$이므로 $5=\frac{x}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}y$

$x+\sqrt{3}=15$ …… ㉠

삼각형 ACD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{y}{\sin\theta_1}=\frac{x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta_2\right)}$, 즉 $\frac{y}{\sin\theta_1}=\frac{x}{\cos\theta_2}$

$\frac{y}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{x}{\frac{\sqrt{6}}{3}}$, $y=\frac{2}{\sqrt{3}}x$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $x+\sqrt{3}\times\frac{2}{\sqrt{3}}x=15$, $x=5$

따라서 사각형 ABCD의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times3\times5\times\sin\theta_1+\frac{1}{2}\times5\times5\times\sin\theta_1$

$=\left(\frac{15}{2}+\frac{25}{2}\right)\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$=\frac{40\sqrt{2}}{3}$

356. 정답 ④

$0\le x\le2$일 때 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$

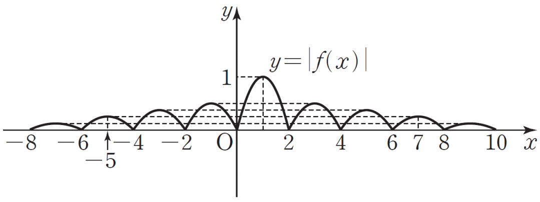
$2\le x\le4$일 때 $f(x)=\frac{1}{2}sin\frac{\pi}{2}x$

$4\le x\le6$일 때 $f(x)=\frac{1}{4}sin\frac{\pi}{2}x$

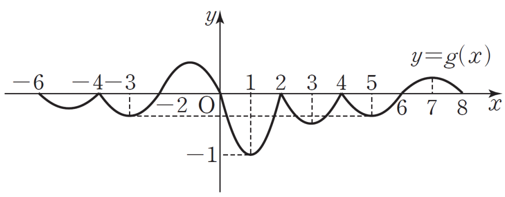
⋮

이고 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 곡선

$y=|f(x)|$는 그림과 같다.



조건 (가)에 의하여 구간 $[2n-2,\ 2n]$에서 곡선 $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$와 일치하거나 곡선 $y=-f(x)$와 일치한다.
이때 조건 (나)에서 $g(7)>0$이고 두 구간 $(-\infty,\ -6]$, $[8,\ \infty)$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $|g(x)|<g(7)$이므로 $x\le -6$ 또는 $x\ge 8$일 때 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=g(7)$은 만나지 않는다.
또한 구간 $[-6,\ -4]$에서 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=g(7)$은 한 점에서만 만나거나 만나지 않는다.
또한 다섯 구간 $[-4,\ -2]$, $[-2,\ 0]$, $[0,\ 2]$, $[2,\ 4]$, $[4,\ 6]$에서 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=g(7)$은 각각 서로 다른 두 점에서 만나거나 만나지 않는다.
$x=7$은 방정식 $g(x)=g(7)$의 한 근이므로 조건 (나)의 방정식 $g(x)=g(7)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이려면 다섯 구간 $[-4,\ -2]$, $[-2,\ 0]$, $[0,\ 2]$, $[2,\ 4]$, $[4,\ 6]$중 한 구간에서만 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=g(7)$이 서로 다른 두 점에서 만나야 하고 구간 $[-6,\ -4]$에서는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(7)$이 만나지 않아야 한다.
정수 k에 대하여 구간 $[2k,\ 2k+2]$에서 곡선 $y=g(x)$는 직선 $x=2k+1$에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=g(7)$이 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표가
구간 $[-4,\ -2]$에 속하면 방정식 $g(x)=g(7)$의 세 실근의 합은
$2\times(-3)+7=1$
구간 $[-2,\ 0]$에 속하면 방정식 $g(x)=g(7)$의 세 실근의 합은
$2\times(-1)+7=5$
구간 $[0,\ 2]$에 속하면 방정식 $g(x)=g(7)$의 세 실근의 합은
$2\times1+7=9$
구간 $[2,\ 4]$에 속하면 방정식 $g(x)=g(7)$의 세 실근의 합은
$2\times3+7=13$
구간 $[4,\ 6]$에 속하면 방정식 $g(x)=g(7)$의 세 실근의 합은
$2\times5+7=17$
따라서 방정식 $g(x)=g(7)$의 서로 다른 세 실근의 합이 5의 배수이려면 구간 $[-2,\ 0]$에서 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=g(7)$이 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.
이때의 곡선 $y=g(x)$ $(-6\le x\le 8)$은 그림과 같다.



곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=g(5)$는 서로 다른 6개이 점에서 만나고 이 6개의 점의 x좌표를 작은 수부터 차례대로 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6이라 하면

$$a_1=-3,\ \frac{a_2+a_3}{2}=1,\ \frac{a_4+a_5}{2}=3,\ a_6=5$$

이므로 방정식 $g(x)=g(5)$의 서로 다른 실근의 개수는 6이고, 이 6개의 실근의 합은

$$a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+a_6=-3+2+6+5=10$$

따라서 $m=6$, $S=10$이므로
$m+S=16$

357. 정답 ⑤

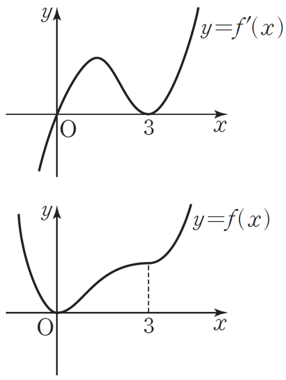
사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 최고차항의 계수를 $a(a\ne0)$이라 하자.
조건 (가)에서 $f'(0)=0$이고, 조건 (나)에서 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 점 $(3,\ 0)$에서 접하므로 함수 $f'(x)$는

$$f'(x)=ax(x-3)^2=ax^3-6ax^2+9ax$$

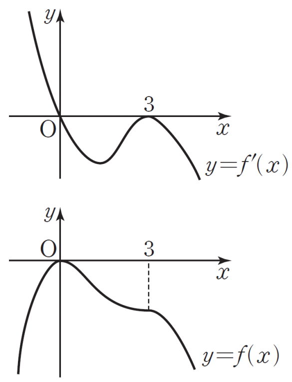
로 놓을 수 있다.

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(ax^3-6ax^2+9ax)dx$$
$$=\frac{a}{4}x^4-2ax^3+\frac{9}{2}ax^2+C$$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=0$이므로 $C=0$
따라서 $f(x)=\frac{a}{4}x^4-2ax^3+\frac{9}{2}ax^2$이고 a의 부호에 따라 함수 $y=f'(x)$의 그래프의 개형과 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



[그림 1] $a>0$일 때



[그림 2] $a<0$일 때

ㄱ. a의 부호에 관계없이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(2)$는 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=f(2)$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (참)

ㄴ. $$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{a}{4}x^4-2ax^3+\frac{9}{2}ax^2}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{a}{4}x^2-2ax+\frac{9}{2}a\right)=\frac{9}{2}a$$

이므로 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}<0$이면 $\frac{9}{2}a<0$, 즉 $a<0$이므로 함수

$y=f(x)$의 그래프는 [그림 2]와 같이 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \le 0$이다. (참)

ㄷ. $f(1)=\frac{a}{4}-2a+\frac{9}{2}a=\frac{11}{4}a$이므로

$f(1)=\frac{11}{4}$에서 $\frac{11}{4}a=\frac{11}{4}$, $a=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^3+\frac{9}{2}x^2$이므로 방정식

$4f(x)=8x+k$에서

$x^4-8x^3+18x^2=8x+k$

$x^4-8x^3+18x^2-8x=k$

이때 $h(x)=x^4-8x^3+18x^2-8x$라 하면 방정식 $4f(x)=8x+k$의 서로 다른 실근의 개수는 방정식 $h(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

$$\begin{aligned} h'(x) &= 4x^3-24x^2+36x-8 \\ &= 4(x^3-6x^2+9x-2) \\ &= 4(x-2)(x^2-4x+1) \end{aligned}$$

$h'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=2\pm\sqrt{3}$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$2-\sqrt{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$	$2+\sqrt{3}$	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

이때 $\alpha=2-\sqrt{3}$, $\beta=2+\sqrt{3}$이라 하자.

α는 이차방정식 $x^2-4x+1=0$의 근이므로

$\alpha^2=4\alpha-1$

$\alpha^3=4\alpha^2-\alpha=4(4\alpha-1)-\alpha=15\alpha-4$

$\alpha^4=15\alpha^2-4\alpha=15(4\alpha-1)-4\alpha=56\alpha-15$

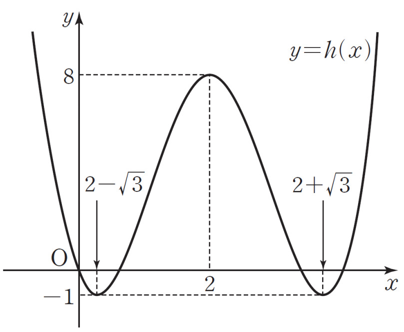
이고

$$\begin{aligned} h(\alpha) &= \alpha^4-8\alpha^3+18\alpha^2-8\alpha \\ &= (56\alpha-15)-8(15\alpha-4)+18(4\alpha-1)-8\alpha \\ &= -1 \end{aligned}$$

마찬가지 방법으로 $h(\beta)=-1$이고

$h(2)=16-64+72-16=8$

이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다.



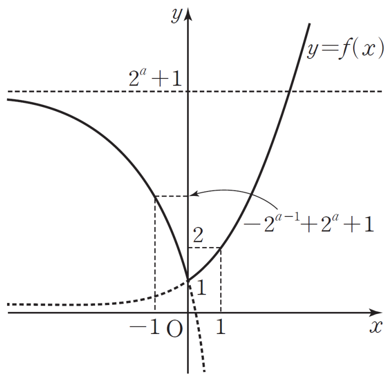
따라서 방정식 $h(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 2이려면 $k=-1$ 또는 $x>8$이어야 하므로 정수 k의 최솟값은 -1이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

358. 정답 58

함수 $y=-2^{x+a}+2^a+1$의 그래프는 점근선이 x축(직선 $y=0$)인 함수 $y=-2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 2^a+1만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=-2^{x+a}+2^a+1$의 그래프의 점근선은 $y=2^a+1$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 $f(0)=1$이고 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge f(0)$이므로 닫힌구간 $[-n,\ n]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 항상 1이다.

또한 $f(-1)=-2^{a-1}+2^a+1$, $f(1)=2$이고 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 M이라 하면 최솟값은 1이고 $c_1=6$이므로

$c_1=M+1=6$, $M=5$

따라서 $-2^{a-1}+2^a+1=5$이므로

$2^a\left(-\frac{1}{2}+1\right)=4$

$2^a=8=2^3$, $a=3$

이므로 $f(x)=\begin{cases} -2^{x+3}+9 & (x<0) \\ 2^x & (x\ge 0) \end{cases}$

함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 0)$에서 감소하고, 구간$(0,\ \infty)$에서 증가하므로 c_n의 값은 다음과 같다.

$f(-2)=-2^{-2+3}+9=7$, $f(2)=2^2=4$에서

$f(-2)>f(2)$이므로 $c_2=7+1=8$

$f(-3)=-2^{-3+3}+9=8$, $f(3)=2^3=8$에서

$f(-3)=f(3)$이므로 $c_3=8+1=9$

$n\ge 4$인 모든 자연수 n에 대하여

$f(-n)<9$, $f(n)\ge f(4)=2^4$이므로

$c_n=f(n)+1=2^{n+1}$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{5}(c_k-a) &= \sum_{k=1}^{5}(c_k-3) \\ &= (6+8+9+17+33)-3\times 5 \\ &= 58 \end{aligned}$$

359. 정답 225

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 두 곡선 $y=f(-x)$, $y=f(x)$가 일치하므로 곡선 $y=f(x)$는 y축에 대하여 대칭이다.

함수 $f(x)$를 $f(x)=x^4+ax^2+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f'(x)=4x^3+2ax=2x(2x^2+a)$ …… ㉠

이때 함수 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le 0) \\ f(x-m)+n & (x>0) \end{cases}$ 에서

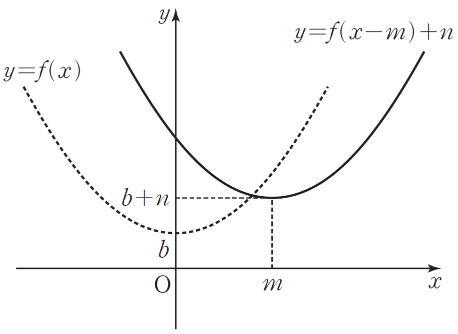
$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0-}\frac{(x^4+ax^2+b)-b}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0-}\frac{x(x^3+ax)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0-}(x^3+ax)=0$$

이므로 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능 하려면 함수 $f(x-m)+n$도 $x=0$에서의 미분계수가 0이어야 한다.

한편 ㉠에서 $a \ge 0$이면 $f'(x)=0$의 근은 $x=0$뿐이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

$f(0)=b$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $y=f(x-m)+n$의 그래프는 함수 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이고, m, n이 모두 자연수이므로 함수 $f(x-m)+n$의 $x=0$에서의 미분계수는 항상 음수이다.

따라서 $a \ge 0$이면 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

㉠에서 $a<0$이면 $f'(x)=0$의 근은 $x=0$ 또는 $x^2=-\dfrac{a}{2}$

즉, $x=0$ 또는 $x=-\sqrt{-\dfrac{a}{2}}$ 또는 $x=\sqrt{-\dfrac{a}{2}}$

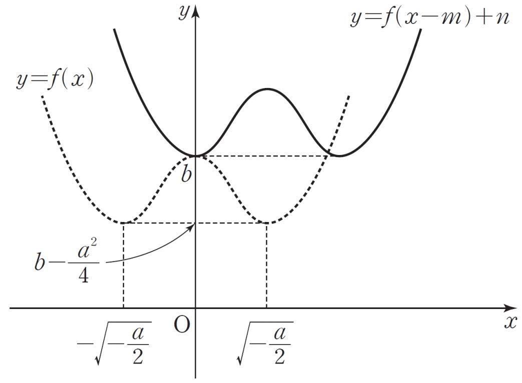
이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{-\frac{a}{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{-\frac{a}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

$$f\left(-\sqrt{-\frac{a}{2}}\right)=f\left(\sqrt{-\frac{a}{2}}\right)=\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{2}+b=b-\frac{a^2}{4},$$

$f(0)=b$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

이때 m, n이 모두 자연수이므로 함수 $f(x-m)+n$의 $x=0$에서의 미분계수가 0이려면 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하였을 때, 점 $\left(-\sqrt{-\dfrac{a}{2}},\ b-\dfrac{a^2}{4}\right)$이 점 $(0,\ b)$로 이동되어야 한다.



즉, $-\sqrt{-\dfrac{a}{2}}+m=0$, $\left(b-\dfrac{a^2}{4}\right)+n=b$

$-\sqrt{-\dfrac{a}{2}}+m=0$에서 $a=-2m^2$ …… ㉡

$\left(b-\dfrac{a^2}{4}\right)+n=b$에서 $n=\dfrac{a^2}{4}$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $n=\dfrac{(-2m^2)^2}{4}=m^4$

따라서 $h(m)=m^4$이므로

$$\sum_{m=1}^{5}\frac{h(m)}{m}=\sum_{m=1}^{5}\frac{m^4}{m}$$
$$=\sum_{m=1}^{5}m^3$$
$$=\left(\frac{5\times 6}{2}\right)^2=225$$

360. 정답 21

모든 항이 정수이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 공차 d는 정수이어야 한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 첫째항 a_1이 음수이므로 $d \le 0$이면 $0>a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \cdots$ 이고

$0>S_1>S_2>S_3>\cdots$, $|S_1|<|S_2|<|S_3|<\cdots$

따라서 $d \le 0$이면 $|S_m|=|S_{m+2}|=|S_k|=24$를 만족시키는 두 자연수 m, k가 존재하지 않는다.

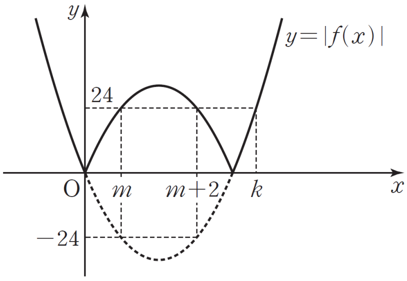
$d>0$, 즉 d는 자연수라 하고, $a_1=a$라 하면

$S_n=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

$=\dfrac{d}{2}n^2+\dfrac{2a-d}{2}n$

이때 $f(x)=\dfrac{d}{2}x^2+\dfrac{2a-d}{2}x$라 하면 $d>0$,

$f(0)=0$, $f(1)=a<0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점을 지나고 아래로 볼록한 그래프이고, 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$m+2<k$인 두 자연수 m, k에 대하여

$|S_m|=|S_{m+2}|=|S_k|=24$, 즉

$|f(m)|=|f(m+2)|=|f(k)|=24$인 m, k가 존재하려면

그림에서

$f(m)=f(m+2)=-24$, $f(k)=24$, 즉 $S_m=S_{m+2}=-24$,

$S_k=24$이어야 한다.

$S_m=S_{m+2}$에서

$S_{m+2}-S_m=a_{m+1}+a_{m+2}$

$=(a+md)+\{a+(m+1)d\}=2a+(2m+1)d$

$=0$

$a=-\dfrac{d}{2}(2m+1)$ …… ㉠

이때 자연수 m에 대하여 $2m+1$은 홀수, a는 음의 정수이므로 d는 짝수이어야 한다.

$S_m=-24$에서

$S_m=\dfrac{m\{2a+(m-1)d\}}{2}=-24$ …… ㉡

㉡에 ㉠을 대입하면

$\dfrac{m\{-d(2m+1)+(m-1)d\}}{2}=-24$

$d\times m(m+2)=48$ …… ㉢

등식 ㉢을 만족시키는 짝수 d와 자연수 m의 값은 $d=2$, $m=4$ 또는 $d=6$, $m=2$ 또는 $d=16$, $m=1$인 경우만 존재한다.

(i) $d=2$, $m=4$일 때

㉠에 의하여

$a=-\dfrac{2}{2}(2\times4+1)=-9$이므로

$a_n=2n-11$, $S_n=n^2-10n$

이때 $S_k=24$에서

$k^2-10k=24$, $(k+2)(k-12)=0$

k는 자연수이므로 $k=12$

(ii) $d=6$, $m=2$일 때

$a=-\dfrac{6}{2}(2\times2+1)=-15$이므로

$a_n=6n-21$, $S_n=3n^2-18n$

이때 $S_k=24$에서

$3k^2-18k=24$, $k^2-6k-8=0$

이 이차방정식을 만족시키는 자연수 k의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $d=16$, $m=1$일 때

$a=-\dfrac{16}{2}(2\times1+1)=-24$이므로

$a_n=16n-40$, $S_n=8n^2-32n$

이때 $S_k=24$에서

$8k^2-32k=24$, $k^2-4k-3=0$

이 이차방정식을 만족시키는 자연수 k의 값은 존재하지 않는다.

(i)~(iii)에 의하여

$m=4$, $k=12$이고 $a_n=2n-11$이므로

$a_{m+k}=a_{16}=2\times16-11=21$