

2026학년도 전공수학 중등교원임용시험

정현민 전공수학

2026 기출풀이

A형 기입형

2. A 과수원에서 판매하는 수박의 무게 X 와 B 과수원에서 판매하는 수박의 무게 Y 는 각각 정규분포 $N(\mu_1, 400^2)$, $N(\mu_2, 300^2)$ 을 따르며 서로 독립이다. $X+Y$ 의 표준편차를 구하시오.

A 과수원에서 임의로 추출한 수박 100개의 무게의 표본평균이 3000이었고, B 과수원에서 임의로 추출한 수박 100개의 무게의 표본평균이 2000이었을 때, $\mu_1 + \mu_2$ 에 대한 95% 신뢰구간은 $(5000 - 1.96 \times c, 5000 + 1.96 \times c)$ 이다. c 의 값을 구하시오. (단, 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z 에 대하여 $P(Z \leq 1.96) = 0.975$ 이다.) [2점]

3. 복소함수

$$f(z) = \frac{(z-i+1)^5(z+1+i)^4}{z^6(z-1+4i)^3(z-9+2i)^5} e^z$$

과 복소평면에 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r 인 원을 시계반대방향으로 한 바퀴 도는 곡선 $C(r)$ 이 있다.

선적분 $\int_{C(2)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ 의 값을 구하시오.

또한 $\int_{C(r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$ 을 만족시키는 양의 정수 r 의 개수를 구하시오. [2점]

4. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$ 에서 단위속력곡선(unit speed curve) $\alpha: (0,2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ 이 모든 $s \in (0,2)$ 에 대하여

$$\alpha(s) \cdot \alpha'(s) = 0, \quad \alpha(s) \cdot N(s) = -2s^2$$

을 만족시킨다. $\alpha(1) \cdot B(1) = 12$ 일 때, 곡선 $\alpha(s)$ 의 $s=1$ 에서의 곡률(curvature) $\kappa(1)$ 과 비틀림률(열률, 꼬임률, torsion)의 절댓값 $|\tau(1)|$ 을 순서대로 구하시오. (단, $N(s)$ 는 점 $\alpha(s)$ 에서의 법선벡터(normal vector)이고, $B(s)$ 는 점 $\alpha(s)$ 에서의 종법선벡터(binormal vector)이다.) [2점]

A형 서술형

7. 수열 $\{a_n\}$ 이 점화식

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 2, \quad a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

를 만족시킨다. 이 점화식의 특성다항식(고유다항식, characteristic polynomial)과 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 순서대로 구하시오.

또한 수열 $\{a_n\}$ 의 생성함수(generating function)를 $f(x)$

라 할 때, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = x \left(f\left(\frac{x}{2}\right) \right)^3$ 을 만족시키는 수열 $\{b_n\}$ 의 일반항을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

8. 함수 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 을 $f(x, y) = x^4 + y^4 - xy^2$ 이라 하자. $t \neq 0$ 인 상수 t 에 대하여 직선 $y = tx$ 와 등위곡선(level curve) $f(x, y) = 0$ 의 원점 이외의 교점을 구하시오.

또한 영역 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) \leq 0, y \geq 0\}$ 의 넓이를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

※ 다음은 필요하면 사용할 수 있다.

$$\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$$

9. 모든 성분이 실수인 3×3 행렬 A 가

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -20 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \det(A) = 800$$

을 만족시킬 때, A 의 모든 고윳값(eigenvalue)을 구하시오.

또한 가역 대칭행렬(symmetric matrix) B 가

$$AB = 2\det(B)I, \quad \text{tr}(B) < 0$$

을 만족시킬 때, B 의 모든 고윳값과, B 의 고유벡터(eigenvector)로 구성된 $\mathbb{R}^3$ 의 정규 직교 기저(orthonormal basis)를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $\det(M)$ 은 행렬 M 의 행렬식(determinant), $\text{tr}(M)$ 은 M 의 대각합(trace)이고, I 는 3×3 단위행렬이다.) [4점]

10. 자연수 n 에 대하여 함수 $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 을

$$f_n(x) = \frac{x^4 + \sqrt{n}x^3}{n(x^2 + 2\sqrt{n}x + 2n)}$$

으로 정의하자. 모든 양의 실수 L 에 대하여 함수항 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

가 닫힌구간 $[-L, L]$ 에서 고른수렴(평등수렴, 균등수렴, uniform convergence)하는지 판별하고 그 이유를

쓰시오. 또한 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 가 $\mathbb{R}$ 에서 연속인지 판별하고 그

이유를 쓰시오. [4점]

11. 덧셈군 $\mathbb{Z}_{20}$, $\mathbb{Z}_{26}$, $\mathbb{Z}_{200}$ 에 대하여 군 준동형사상(group homomorphism) $\phi: \mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{26} \rightarrow \mathbb{Z}_{200}$ 의 상(치역, image) $\text{Im}(\phi)$ 가 6개의 부분군을 가질 때, $\text{Im}(\phi)$ 의 위수(order)를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 ϕ 의 핵(kernel) $\text{Ker}(\phi)$ 의 위수를 구하시오.

(단, $\mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{26}$ 은 $\mathbb{Z}_{20}$ 과 $\mathbb{Z}_{26}$ 의 직접곱(직적, direct product)이다.) [4점]

12. 집합 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x < 1\}$ 위에서 거리함수 d 를

$$d((x, y), (x', y')) = \min \left\{ \sqrt{(x - (x' + k))^2 + (y - y')^2} \mid k = -2, 0, 2 \right\}$$

라 하자. 집합 $\left\{ (x, 0) \in A \mid d((-1, 0), (x, 0)) \leq \frac{1}{2} \right\}$ 에 속하는 점의 x 좌표 중 가장 작은 양의 실수를 풀이 과정과 함께 쓰시오.

또한 $\mathbb{R}_*^2 = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ 에 대하여 함수 $f: A \rightarrow \mathbb{R}_*^2$ 을 $f(x, y) = e^y(\cos \pi x, \sin \pi x)$ 라 하고, $\mathbb{R}_*^2$ 위에서 거리함수 d_* 을 $d_*((u, v), (u', v')) = d(f^{-1}(u, v), f^{-1}(u', v'))$ 이라 하자. 거리공간 $(\mathbb{R}_*^2, d_*)$ 의 수열(sequence) $\left\{ \left(0, \frac{1}{n} \right) \right\}$ 이 코시수열(Cauchy sequence)이 아님을 보이시오. [4점]

B형 기입형

2. $\mathbb{R}$ 의 위상 $\mathcal{T} = \{\emptyset, (-1, 1), (-1, 3), (-1, 5), \mathbb{R}\}$ 에 대하여 위상공간 $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ 의 부분집합 Z 의 상대위상(부분위상, relative topology) $\mathcal{T}_Z$ 를 구하시오. 또한 위상공간 $(Z, \mathcal{T}_Z)$ 에서 집합 $A = \{0, 1, 2, 3\}$ 의 내부(interior) A° 를 구하시오. (단, $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ 이다.) [2점]

B형 서술형

6. 어떤 공장에서 생산하는 제품의 수명 X 의 확률밀도함수(probability density function)가 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^3}, & x > 2 \\ \frac{c}{16}x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

이 공장에서 생산하는 제품은 수명이 4 이상인 경우 우수 제품으로 분류되고, 4 미만인 경우 일반 제품으로 분류된다. 상수 c 의 값과 임의로 선택한 제품이 우수 제품일 확률 $P(X \geq 4)$ 의 값을 순서대로 구하시오.

또한 임의로 4개의 제품을 선택했을 때, 우수 제품이 일반 제품보다 더 많이 포함되어 있을 확률을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

7. 집합 A, B, C 가

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 21x \equiv 45 \pmod{66}, 0 \leq x \leq 65\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^3 - 1 \equiv 0 \pmod{151}, 0 \leq x \leq 150\},$$

$$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^n - 1 \equiv 0 \pmod{151}, 0 \leq x \leq 150\}$$

이다. A 와 B 의 원소의 개수를 순서대로 구하시오.

또한 $|A| = |B \cup C|$ 를 만족시키는 정수 $n(0 \leq n \leq 150)$ 의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, 151은 소수이고 $|X|$ 는 집합 X 의 원소의 개수이다.) [4점]

8. 복소수 $z = x + iy$ (x, y 는 실수)에 대한 함수

$$f(z) = \frac{x+iy}{x^2+y^2} + x^2 + by^2 + i\left(\frac{cy}{x^2+y^2} + dxy\right)$$

가 영역 $\mathbb{C} - \{0\}$ 에서 해석적(analytic)이 되도록 하는 실수 a, b, c, d 의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.

또한 $e^{\frac{1}{z}}f(z)$ 의 $z=0$ 을 중심으로 하는 로랑 급수 (Laurent series)를 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ 이라 할 때, a_{-1} 의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

9. 다항식환 $\mathbb{Z}_7[x]$ 에서 다항식 $f(x) = x^4 + 3x^2 - 1$ 이 기약(irreducible)임을 보이시오. 또한 α 를 $f(x)$ 의 해라 하고, 갈루아 군(Galois group) $G(\mathbb{Z}_7(\alpha)/\mathbb{Z}_7)$ 의 원소 σ 의 위수(order)가 4라 하자. $G(\mathbb{Z}_7(\alpha)/\mathbb{Z}_7)$ 의 부분군 $\langle \sigma^2 \rangle$ 의 고정체(fixed field) E 의 위수(order)를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $\mathbb{Z}_7(\alpha)$ 는 유한체 $\mathbb{Z}_7$ 위의 단순 확대체(simple extension field)이다.) [4점]

10. 함수 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 을

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

이라 하고, $S = \left\{ \frac{f(x)}{x} \mid x \text{는 양의 실수} \right\}$ 라 하자. 집합 S 의 상한(supremum)과 하한(infimum)을 순서대로 구하시오.

또한 $\lim_{s \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{f(x)}{s} e^{-\frac{x^2}{s^2}} dx$ 의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

11. 최고차항의 계수가 2인 삼차함수 $f(x)$ 가 $-1 < x < 2$ 에서 $f(x) > 0$ 이다. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$ 에서 곡선 $y = f(x)$, $z = 0$ ($-1 < x < 2$)를 x 축 둘레로 360° 회전시켜 얻은 회전면(surface of revolution)을 M 이라 하고, 곡면 M 이 평면 $x=0$ 과 만나서 생기는 원을 α , 평면 $x = \frac{2}{3}$ 와 만나서 생기는 원을 β , 평면 $x=1$ 과 만나서 생기는 원을 γ 라 하자. 곡면 M 에 놓인 곡선으로서 α, β, γ 의 측지곡률(geodesic curvature)이 각각 $0, 0, \frac{2}{5}$ 이다. $f(0)$ 의 값과 곡선 α 위의 점에서 M 의 가우스 곡률(Gaussian curvature)을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

수고하셨습니다. ^^

정답 및 풀이

충분히 고민 후 참고용으로 사용해주세요. ^^

A형 기입형

A02. 정답 : 500, 50

A03. 정답 : $6\pi i$, 5개A04. 정답 : $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ **A형 서술형**A07. 정답 : $t^2 - 4t + 4$, $a_n = n2^n$ ($n \geq 0$),

$$b_n = \begin{cases} 0, & n = 0, 1, 2, 3 \\ \binom{n+1}{5}, & n \geq 4 \end{cases}$$

특성다항식: $t^2 - 4t + 4$.일반항: $a_n = n2^n$ ($n \geq 0$)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(2x)^n = \frac{2x}{(1-2x)^2} \sim (*)$$

$$((*) : \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \xrightarrow{\text{미분}} \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2})$$

이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n &= x \left(f\left(\frac{x}{2}\right) \right)^3 = \frac{x^4}{(1-x)^6} = x^4 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+5}{5} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+5}{5} x^{n+4} = \sum_{n=4}^{\infty} \binom{n+1}{5} x^n \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$b_n = \begin{cases} 0, & n = 0, 1, 2, 3 \\ \binom{n+1}{5}, & n \geq 4 \end{cases}$$

이다.

A08. 정답 : $\left(\frac{t^2}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4} \right), \frac{\sqrt{2}\pi}{32}$

$$\text{교점: } \left(\frac{t^2}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4} \right)$$

$$f(x, y) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x^4 + y^4 \leq xy^2$$

이므로 $x \geq 0$ 이다. 또한 $y \geq 0$ 이므로 1사분면만 생각하면 충분하다. 즉, $y = tx$ 에서 $t > 0$ 만 생각하면 충분하다.

곡선 C 를

$$C: \alpha(t) = \left(\frac{t^2}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4} \right), \quad 0 < t < \infty$$

라 하면 주어진 영역은

$$\{s\alpha(t) \mid 0 \leq s \leq 1, t > 0\}$$

와 같으므로 넓이는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} t \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{4(1+t^4)} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\left[-\frac{t}{4(1+t^4)} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^4} dt \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{32} \end{aligned}$$

A09. 정답 : A 의 모든 고윳값: 4, 10, 20 B 의 모든 고윳값: -5, -2, -1

$$\left\{ \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

 A 의 모든 고윳값: 4, 10, 20 λ_i 와 $\mathbf{x}_i$ 를

$$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 10, \lambda_3 = 20$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3: \lambda_3 \text{의 고유벡터}$$

라 하면 $A\mathbf{x}_1 = 4\mathbf{x}_1$, $A\mathbf{x}_1 = 10\mathbf{x}_1$ 이다.

$$B\mathbf{x}_i = 2\det(B)A^{-1}\mathbf{x}_i = \frac{2\det(B)}{\lambda_i} \mathbf{x}_i \quad (\because \det(A) \neq 0)$$

이므로 $\text{tr}(B) = \sum_{i=1}^3 \frac{2\det(B)}{\lambda_i} < 0$ 이다. 즉, $\det(B) < 0$ 이다.

$$\begin{aligned} AB &= 2\det(B)I \Rightarrow \det(A)\det(B) = 8\det(B)^3 \\ &\Rightarrow \det(B) = -10 \end{aligned}$$

이므로 B 의 모든 고윳값은 -5, -2, -1이고 각각에 대응하는 고유벡터는 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ 이다. 대칭행렬에서 서로 다른 고윳값에 대응하는 고유벡터는 수직이므로 $\mathbf{x}_3$ 는

$$\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

와 평행하다. 따라서 B 의 고유벡터로 이루어진 $\mathbb{R}^3$ 의 정규직 교기저는

$$\left\{ \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

이다.

**A10. 정답 : $[-L, L]$ 에서 균등수렴한다.
연속이다.**

임의의 $n \in \mathbb{N}$ 과 임의의 $x \in [-L, L]$ 에 대하여

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &\leq \frac{|x|^4 + \sqrt{n}|x|^3}{n\{(x + \sqrt{n})^2 + n\}} \\ &\leq \frac{L^4 + \sqrt{n}L^3}{n^2} \end{aligned}$$

이고 p -급수 판정법에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{L^4}{n^2} + \frac{L^3}{n^{3/2}} \right)$ 는 수렴하므로

Weierstrass-M 판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 는 $[-L, L]$ 에서 균등수렴한다. $f_n(x)$ 의 분모가 모든 $x \in \mathbb{R}$ 에 대해

$$n\{(x + \sqrt{n})^2 + n\} > 0$$

이므로 $f_n(x)$ 는 $\mathbb{R}$ 에서 연속이다. $x_0 \in \mathbb{R}$ 라 하자. $|x_0| < L$

인 L 에 대해 $f_n(x)$ 는 $[-L, L]$ 에서 연속이고 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 는 $[-L, L]$ 에서 균등수렴한다. 따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 가 $[-L, L]$ 에서 연속이므로 x_0 에서 연속이다.

A11. 정답 : $|\text{Im}\phi| = 20$, $|\ker\phi| = 26$

$\mathbb{Z}_{200}$ 은 순환군이므로 $\text{Im}\phi$ 는 위수가 200의 약수이고 순환부분군이다. 순환군의 부분군의 개수는 위수의 약수 개수와 같은데 문제의 조건에 의해 $\text{Im}\phi$ 는 6개의 부분군을 갖는 순환군이므로 $|\text{Im}\phi| = 20$ 또는 50이다.

또한 제1동형정리에 의해 $|\text{Im}\phi| = \frac{20 \cdot 26}{|\ker\phi|}$ 이므로 조건을 만족하는 $|\text{Im}\phi| = 20$ 이다. 따라서 $|\ker\phi| = 26$ 이다.

A12. 정답 : $\frac{1}{2}$

$$d((-1, 0), (x, 0)) = \min\{|x-1|, |x+1|, |x+3|\}$$

이므로 양의 실수 $0 < x < 1$ 에 대해

$$d((-1, 0), (x, 0)) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x < 1$$

이므로 조건을 만족하는 가장 작은 양의 실수는 $\frac{1}{2}$ 이다.

$a_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$ 이라 하자. a_n 이 코시수열이라고 가정하면

$\epsilon_0 = 1$ 에 대하여 적당한 자연수 N 이 존재하여

$$n, m \geq N \Rightarrow d_*(a_n, a_m) < 1$$

을 만족해야한다. $n = N$, $m = 3N$ 으로 택하면

$$\begin{aligned} d_*(a_N, a_{3N}) &= d\left(f^{-1}\left(0, \frac{1}{N}\right), f^{-1}\left(0, \frac{1}{3N}\right)\right) \\ &= d\left(\left(\frac{1}{2}, \ln \frac{1}{N}\right), \left(\frac{1}{2}, \ln \frac{1}{3N}\right)\right) \\ &= \ln 3 > \ln e = 1 = \epsilon_0 \end{aligned}$$

이므로 모순이다. 따라서 코시수열이 아니다.

B형 기입형

**B02. 정답 : $\mathfrak{I}_Z = \{\{0\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}, \emptyset, Z\}$
 $A^\circ = \{0, 1, 2\}$**

B형 서술형

B06. 정답 : $c = 4$, $P(X \geq 4) = \frac{1}{8}, \frac{29}{2^{12}}$

$$c = 4, P(X \geq 4) = \frac{1}{8}$$

4개의 제품 중 우수 제품의 개수를 확률변수 Y 라 하면

$Y \sim B\left(4, \frac{1}{8}\right)$ 이다. 그러므로 구하고자 하는 확률은

$$P(Y=4) + P(Y=3) = \left(\frac{1}{8}\right)^4 + 4\left(\frac{1}{8}\right)^3\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{29}{2^{12}}$$

이다.

B07. 정답 : $|A| = 3$, $|B| = 3$, 60

$$|A| = 3, |B| = 3.$$

$$x^n \equiv 1 \pmod{151}, x^{\gcd(3, n)} \equiv 1 \pmod{151}$$

은 해 $x = 1$ 을 가지므로

$$|C| = \gcd(n, \varphi(151))$$

$$|B \cap C| = \gcd(\gcd(3, n), \varphi(151))$$

이다. 따라서

$$|A| = |B \cup C| \Leftrightarrow \gcd(n, \varphi(151)) = \gcd(3, n)$$

$$\Leftrightarrow \gcd(n, 150) = 1 \text{ 또는 } \gcd(n, 150) = 3$$

$\gcd(n, 150) = 1$ 인 n 은 $\varphi(150) = 40$ 개, $\gcd(n, 150) = 3$ 인

경우 n 은 3의 배수이므로 $n = 3k$ ($1 \leq k \leq 50$) 이라 하면

$$\gcd(3k, 150) = 3 \Leftrightarrow \gcd(k, 50) = 1$$

이므로 $|n| = \varphi(50) = 20$ 이다. 따라서 $40 + 20 = 60$ 이다.

B08. 정답 : $a=0, b=-1, c=-1, d=2$

$$a_{-1} = \frac{7}{6}$$

$$u(x, y) = \frac{x+ay}{x^2+y^2} + x^2 + by^2, \quad v(x, y) = \frac{cy}{x^2+y^2} + dxy$$

라 하면 u, v 는 $\mathbb{C} - \{0\}$ 에서 코시-리만 방정식을 만족해야한다.

$$u_x(1, 0) = v_y(1, 0) \Leftrightarrow 1 = c + d$$

$$u_x(0, 1) = v_y(0, 1) \Leftrightarrow 1 = -c$$

이므로 $c=-1, d=2$ 이다. 또한

$$u_y(1, 0) = -v_x(1, 0) \Leftrightarrow a = 0$$

$$u_y(0, 1) = -v_x(0, 1) \Leftrightarrow -a + 2b = -d$$

이므로 $a=0, b=-1$ 이다.

$$f(z) = \left(\frac{x-iy}{x^2+y^2} \right) + (x^2 - y^2 + i2xy) = \frac{1}{z} + z^2$$

이므로 $e^{1/z}f(z)$ 의 $z=0$ 에서 로랑급수는

$$e^{1/z}f(z) = \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots \right) \left(\frac{1}{z} + z^2 \right)$$

이므로

$$a_{-1} = 1 + \frac{1}{3!} = \frac{7}{6}$$

이다.

B09. 정답 : $|E| = 49$

$$f(0) = -1, f(\pm 1) = 3, f(\pm 2) = -1, f(\pm 3) = 2$$

이므로 $f(x)$ 는 일차인수를 갖지 않는다.

$$f(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

라고 가정하자. 계수를 비교하면

$$\begin{cases} a+c \equiv 0 \pmod{7} \\ ac+b+d \equiv 3 \pmod{7} \\ ad+bc \equiv 0 \pmod{7} \\ bd \equiv -1 \pmod{7} \end{cases}$$

이므로

$$\begin{cases} a \equiv -c \pmod{7} \\ -a^2 + b + d \equiv 3 \pmod{7} \\ a(d-b) \equiv 0 \pmod{7} \\ bd \equiv -1 \pmod{7} \end{cases}$$

이다.

① $a \equiv 0 \pmod{7}$ 가 아닌 경우

$b \equiv d \pmod{7}$ 이므로 $b^2 \equiv -1 \pmod{7}$ 이 되는데 이를 만족하는 $b \in \mathbb{Z}_7$ 은 존재하지 않으므로 모순.

② $a \equiv 0 \pmod{7}$ 인 경우

$b \equiv 3-d \pmod{7}$ 이므로 $(3-d)d \equiv -1 \pmod{7}$ 를 만족.

즉, $(d+2)^2 \equiv 5 \pmod{7}$ 이 되는데 이를 만족하는 $d \in \mathbb{Z}_7$ 은 존재하지 않으므로 모순.

따라서 $f(x)$ 는 $\mathbb{Z}_7[x]$ 에서 기약다항식이다.

갈루아 이론의 기본정리에 의해

$$[E: \mathbb{Z}_7] = \frac{4}{[Z_7(\alpha): E]} = \frac{4}{|\sigma^2|} = 2$$

가 성립하므로

$$|E| = 7^{[E: \mathbb{Z}_7]} = 49$$

이다.

B10. 정답 : $\sup S = \frac{1}{\sqrt{2e}}, \inf S = 0$

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{f(x)}{s} e^{-\frac{x^2}{s^2}} dx = 0$$

$$\sup S = \frac{1}{\sqrt{2e}}, \inf S = 0.$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^1 \frac{f(x)}{s} e^{-\frac{x^2}{s^2}} dx = \int_0^1 \frac{1}{s} e^{-\left(\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{s^2}\right)} dx \\ &\leq \int_0^1 \frac{1}{s} e^{-2\sqrt{\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{s^2}}} dx \quad (\because \text{산술기하}) \\ &= \frac{1}{s} e^{-\frac{2}{s}} \end{aligned}$$

이고

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{1}{s} e^{-\frac{2}{s}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{2t}} = 0 \quad \left(t = \frac{1}{s} \right)$$

$$\text{이므로 } \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{f(x)}{s} e^{-\frac{x^2}{s^2}} dx = 0 \text{이다.}$$

B11. 정답 : $f(0) = \sqrt{5}, K = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

(sol1)

α, β 에서 측지곡률이 0이므로 $f'(0) = 0, f'\left(\frac{2}{3}\right) = 0$ 이다.

$$f'(x) = 6x \left(x - \frac{2}{3} \right) = 6x^2 - 4x$$

이므로 $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + c$ 인 실수 c 가 존재한다.

$$\frac{2}{5} = \kappa \langle U, B \rangle$$

$$= \frac{1}{f(1)} \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0), (-1, 0, 0) \right\rangle$$

$$= \frac{2}{c\sqrt{5}}$$

이므로 $c = \sqrt{5}$ 이다.

$(0, f(0), 0)$ 에서 $U = (0, -1, 0)$ 를 생각하자. 그러면

$$\text{위선의 법곡률} = \frac{1}{f(0)} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

이고 경선은 $\alpha(t) = (t, f(t), 0)$ 이므로

$$\text{경선의 법곡률} = \frac{\langle \alpha''(0), U \rangle}{\langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle} = 4$$

이다. 따라서 가우스 곡률은 $\frac{4}{\sqrt{5}}$ 이다.

(sol2)

M 은

$$X(u, v) = (u, f(u)\cos v, f(u)\sin v)$$

로 매개화가능하다.

$$X_u = (1, f'(u)\cos v, f'(u)\sin v)$$

$$X_v = (0, -f(u)\sin v, f(u)\cos v)$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{\{f'(u)\}^2 + 1}} (f'(u), -\cos v, -\sin v)$$

이고 위선에서의 측지곡률은 한 점에서 계산하면 충분하므로

$$\kappa_g = \frac{f'(u)}{f(u) \sqrt{\{f'(u)\}^2 + 1}}$$

이다. $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 하면

$$f'(0) = 0, \quad f'\left(\frac{2}{3}\right) = 0$$

이므로 $a = -2, b = 0$ 이다.

$$\frac{2}{5} = \left| \frac{f'(1)}{f(1) \sqrt{\{f'(1)\}^2 + 1}} \right| = \frac{2}{c\sqrt{5}} \quad (\because f(1) > 0)$$

이므로 $c = \sqrt{5}$ 이다. 따라서 $f(0) = \sqrt{5}$ 이다.

점 $X(0, 0)$ 에서 가우스곡률을 구하면 충분하므로 점 $X(0, 0)$ 에서

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 5$$

$$L = 4, \quad M = 0, \quad N = \sqrt{5}$$

이므로 $K = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ 이다.