1. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$의 임의의 부분집합 X에 대하여

$$X \sim (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$$

는

$$x_i = \begin{cases} 1\ ,\ i \in X \\ 0\ ,\ i \not\in X \end{cases} (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

으로 정의한다. $X \sim (1,\ 1,\ 0,\ 1)$인 집합 X를 구하시오. [1995]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

2. 자연수 n에 대하여 집합

$$A_n = \left(-\infty,\ -\frac{1}{n}\right] \cup \left[\frac{1}{n},\ \infty\right)$$

일 때, 집합 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$의 여집합 $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c$을 구하시오.
[2009 모의평가]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

3. 정수 전체의 집합을 $\mathbb{Z}$라 하고 모든 자연수 n에 대하여 집합 A_n과 B_n을 다음과 같이 정의하자.

$$A_n = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \le n\},$$
$$B_n = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \ge -n\}$$

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [2010]

<보기>

ㄱ. $\bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B_n) = \{-1, 0, 1\}$

ㄴ. $\mathbb{Z} \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n^c \cup B_n^c) \right) = \varnothing$

ㄷ. $\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - B_n) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \le -1\}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

- 정의/정리 -

- 풀이 -

4. 함수 $f: X \to Y$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 모두 고른 것은? [2011]

<보기>

ㄱ. 임의의 $B \subseteq Y$에 대하여 $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$이다.

ㄴ. 임의의 $A \subseteq X$와 $B \subseteq Y$에 대하여 $f^{-1}(f(A) \cap B) = A \cap f^{-1}(B)$이다.

ㄷ. 임의의 $A \subseteq X$와 $B \subseteq Y$에 대하여 $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

- 정의/정리 -

- 풀이 -

5. 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$와 $A=\{2,\ 4,\ 6\}$에 대하여

$$R=\{(a,\ b)\mid a,\ b\in A\}\cup\{(x,\ x)\mid x\in X\}$$

라 하자. 임의의 $x\in X$에 대하여

$$[x]=\{y\in X\mid (x,\ y)\in R\}$$

라 할 때, 집합 $X/R=\{[x]\mid x\in X\}$의 원소의 개수를 구하시오. [2009]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

6. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 의 멱집합(power set) $P(\mathbb{R})$에 대하여 $X = P(\mathbb{R}) - \{\varnothing\}$이라 하자. 집합 X 에서의 관계(relation) $\sim$을

$$A \sim B \Leftrightarrow A \cap B \neq \varnothing \quad (A,\ B \in X)$$

로 정의할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2012]

<보기>

ㄱ. 관계 $\sim$은 반사적(reflexive)이다.
ㄴ. 관계 $\sim$은 대칭적(symmetric)이다.
ㄷ. 관계 $\sim$은 추이적(transitive)이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

- 정의/정리 -

- 풀이 -

7. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$, 유리수 전체의 집합을 $\mathbb{Q}$라 할 때, 가산집합(countable set)만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2013]

<보기>

ㄱ. $\mathbb{Q}\times(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$

ㄴ. $\{F \mid F$는 $\mathbb{Q}$의 유한부분집합$\}$

ㄷ. 상집합(quotient set) $\mathbb{R}/\sim$
(단, $\sim$은 $\mathbb{R}$에서 $x\sim y \Leftrightarrow x-y\in\mathbb{Q}$로 정의된 동치관계(equivalence relation)이다.)

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

- 정의/정리 -

- 풀이 -

8. 집합 $X=\{a, b, c, d\}$에 대하여 $(X, \mathfrak{I})$를 위상공간이라 하고, 임의의 $x\in X$에 대하여

$$N(x)=\{V\subseteq X \mid V\text{는 } (X, \mathfrak{I})\text{에서 } x\text{의 근방}\}$$

이라 할 때, 다음이 성립한다고 하자.

$$N(a)=\{V\subseteq X \mid \{a, c\}\subseteq V\}$$
$$N(b)=\{V\subseteq X \mid \{b, c\}\subseteq V\}$$
$$N(c)=\{V\subseteq X \mid \{c\}\subseteq V\}$$
$$N(d)=\{X\}$$

단, V는 $(X, \mathfrak{I})$에서 x의 근방'이란 $x\in U\subseteq V$를 만족시키는 $U\in\mathfrak{I}$가 존재함을 의미한다.

이 때, $\mathfrak{I}$를 구하시오. [2009]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

9. 위상 공간 X의 부분집합 S에 대하여, S를 부분집합으로 갖는 모든 닫힌집합(closed set)들의 교집합을 $\overline{S}$로 나타낸다. A와 B가 위상공간 X의 부분집합일 때, 옳지 않은 것은? [1993]

① $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$　　② $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

③ $A - \overline{B} \subset \overline{A - B}$　　④ $\overline{\varnothing} = \varnothing$

\- 정의/정리 -

\- 풀이 -

10. 위상공간 X에서 부분집합 A의 내부(interior)와 폐포(closure)를 각각 $\mathrm{int}(A)$, $\overline{A}$로 나타낼 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2012]

<보기>

ㄱ. $\mathrm{int}(X-A)=X-\overline{A}$

ㄴ. $\overline{\mathrm{int}(\overline{A})}=\overline{A}$

ㄷ. $X-\overline{A\cap B}=(X-\overline{A})\cup(X-\overline{B})$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

- 정의/정리 -

- 풀이 -

11. 위상공간 X의 부분집합 A의 내부(interior)와 경계(boundary)를 각각 $\mathrm{Int}(A)$, $\mathrm{Bd}(A)$라고 할 때, 다음은 희수가 $\mathrm{Int}(A)= A-\mathrm{Bd}(A)$ 임을 증명한 답안이다.

(경우 1) A가 열린 집합(open set)일 때:
집합 A의 외부(exterior)를 $\mathrm{Ext}(A)$라 하면 $\mathrm{Int}(A) = A$이므로 $\mathrm{Bd}(A) \subset \mathrm{Ext}(A)$이다.
따라서 $A-\mathrm{Bd}(A) = A = \mathrm{Int}(A)$이다.

(경우 2) A가 닫힌 집합(closed set)일 때:
이 경우 집합 A의 폐포(closure) $\overline{A}$는 A와 같으므로 $A = \overline{A} = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Bd}(A)$이다.
그런데 일반적으로 집합 B, C에 대하여 $D = B \cup C$ 이면 $B = D - C$이므로 $\mathrm{Int}(A) = A - \mathrm{Bd}(A)$이다.

희수의 답안을 보고 옳게 말한 학생을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2009 모의평가]

<보기>

(현정) 희수가 맞게 풀었네.
(기태) 위와 같이 (경우 1)과 (경우 2)로 나누어 증명하는 것은 옳지 않아.
(수연) '$D = B \cup C$이면 $B = D - C$'는 일반적으로 성립하지 않아.
(영호) $\mathrm{Int}(A) = A$인 경우는 $\mathrm{Bd}(A) \subset \mathrm{Ext}(A)$이 아니라 $\mathrm{Bd}(A) = \varnothing$ 이야.

① 현정 ② 기태, 수연
③ 기태, 영호 ④ 수연, 영호
⑤ 기태, 수연, 영호

- 정의/정리 -

- 풀이 -

12. 집합 $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$상에 다음과 같은 위상이 주어졌다.

$$\mathfrak{I}=\{X, \varnothing, \{x_1\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_5\}\}$$

이 때, 집합 $\{x_2\}$의 폐포(closure)를 구하시오. [1998]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

13. 집합 $X=\{a, b, c, d, e\}$위에 위상(topology) $\mathfrak{I}$가 다음과 같이 주어졌다.
$\mathfrak{I}=\{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, e\}, \{a, b, c, d\}\}$
이 때, 집합 $A=\{b, c\}$의 도집합(derived set) A'을 구하시오. [2000]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

14. 실수 전체 집합 $\mathbb{R}$의 멱집합(power set)의 부분집합

$$\mathscr{F} = \{\mathbb{R} - \{p\} \mid p \in \mathbb{R}\}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오. [2004]

(1) $\mathscr{F}$를 부분기저(subbase)로 갖는 위상(topology) $\mathfrak{I}$를 구하시오.

(2) 위상공간 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$에서 자연수 전체 집합 $\mathbb{N}$의 도집합(derived set)을 구하시오.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

15. $\mathbb{R}$을 실수 집합이라 하고 $\mathfrak{I}$를 $\mathbb{R}$ 위에서의 여가산 위상(cocountable topology)이라 하자. 즉,
$\mathfrak{I} = \{U \subset \mathbb{R} \mid \mathbb{R} - U$는 가산집합(countable set)$\}$
$\cup \{\varnothing\}$
이다. $\mathbb{Q}$를 유리수 집합이라 하고 $A = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$를 무리수 집합이라 할 때 A의 내부(interior), 유도집합(derived set), 폐포(closure), 경계(boundary)를 증명 없이 각각 구하시오. [2008]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

16. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$에 다음 조건 ①, ②에 의해 정의 되는 부분집합족(family of subsets) β를 기저로 하는 위상 $\mathfrak{I}$가 주어졌다고 하자.

> ① 모든 정수 m에 대하여, $\{m\} \in \beta$이다.
> ② 모든 정수 n과 음이 아닌 모든 정수 k에 대하여 $(n,\, n+2^{-k}) \in \beta$

위상공간 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$에서 집합 $A = \left\{\frac{1}{2}\right\}$의 도집합 (derived set) A'을 구하시오. [2015]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

17. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$의 임의의 부분집합 A에 대하여

$$c(A) = \begin{cases} A \ , A\text{는 가산(countable)집합} \\ \mathbb{R} \ , A\text{는 비가산(uncountable)집합} \end{cases}$$

로 정의할 때, 다음 조건을 만족시키는 $\mathbb{R}$ 위의 위상(topology)을 $\mathfrak{J}$라 하자.

> 임의의 $A \subseteq \mathbb{R}$에 대하여 위상공간 $(\mathbb{R}, \mathfrak{J})$에서 A의 폐포(closure)는 $c(A)$이다.

$\mathrm{int}(\mathbb{Z})$, $\mathrm{int}([0, 1])$, $\mathrm{int}(\mathbb{R}-\mathbb{Z})$를 구하시오.
(단, $\mathrm{int}(A)$는 $(\mathbb{R}, \mathfrak{J})$에서 A의 내부(interior), $\mathbb{Z}$는 정수 전체의 집합,
$[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 1\}$이다.) [2011]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

18. 자연수 전체의 집합을 N이라 하자.
집합 $X=\{n\in\mathrm{N} \mid n\geq 2\}$의 각 원소 n에 대하여 $B_n=\{k\in X \mid k$는 n의 약수$\}$라 하고, $\{B_n \mid n\in X\}$를 기저로 하는 X 위에서의 위상을 $\mathfrak{I}$라 하자. 다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 설명하시오. [2010]

① 집합 $\{2,4,6,8,10\}$은 열린 집합이다.
② 소수 전체의 집합은 열린 집합이다.
③ 소수 전체의 집합은 X에서 조밀(dense)하다.
④ 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $\{x\}$의 폐포(closure)는 $\{nx \mid n\in\mathrm{N}\}$이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

19. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$에 대하여

$$X_1 = (\mathbb{R}, \mathsf{U}),\ X_2 = (\mathbb{R}, D)$$

라고 하자. 여기서 U 는 보통위상(usual topology)이고 D는 이산위상(discrete topology)이다. $X = X_1 \times X_2$를 X_1과 X_2의 곱공간이라 하자. X의 부분집합

$$A = (-1, 1) \times (-1, 1)$$

에 대하여 A의 폐포(closure)와 경계(boundary)를 (증명없이) 각각 그림으로 나타내시오. [2007]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

20. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위의 여가산위상(cocountable topology, countable complement topology) $\mathfrak{I}_1$ 을

$$\mathfrak{I}_1 = \{U \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} - U\text{는 가산집합}\} \cup \{\varnothing\}$$

이라 하고, 좌표평면 $\mathbb{R}^2$ 위의 보통위상(usual topology)을 $\mathfrak{I}_2$ 라고 하자. 적공간(곱공간, product space) $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_1) \times (\mathbb{R}^2, \mathfrak{I}_2)$에서 집합

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\} \times \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y = \sin\frac{1}{x}\right\}$$

의 내부(interior) S° 와 폐포(closure) $\overline{S}$ 를 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오. [2025]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

21. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위의 두 위상 $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2$를

$$\mathfrak{I}_1 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}-\mathbb{Q}\},$$
$$\mathfrak{I}_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{R}-\mathbb{N}\}$$

으로 정의하자. $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_1)$과 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_2)$의 적공간(곱공간, product space) $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_1)\times(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_2)$에 대하여 다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 설명하시오. (단, $\mathbb{Q}$는 유리수 전체의 집합, $\mathbb{N}$은 자연수 전체의 집합이다.) [2011]

> $[0, 1]\times[0, 1]$은 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_1)\times(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_2)$에서 조밀(dense)하다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

22. 자연수 전체의 집합 $\mathbb{N}$과 자연수 n에 대하여 $A_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\}$이라 하고, $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$을 기저(base)로 하는 $\mathbb{N}$ 위의 위상을 $\mathfrak{I}$라 하자. $X = (\mathbb{N}, \mathfrak{I})$라 하고 $Y = [0, 1]$을 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_u)$의 부분공간(subspace)이라 할 때, 적공간(product space) $X \times Y$에 대하여 다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 설명하시오.
(단, $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$이고, $\mathfrak{I}_u$는 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위의 보통위상(usual topology)이다.) [2013]

> 집합 $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \times (Y \cap \mathbb{Q})$는 $X \times Y$에서 조밀(dense)하다.
> (단, $\mathbb{Q}$는 유리수 전체의 집합이다.)

- 정의/정리 -

- 풀이 -

23. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$에서 $\{[a,\ b)\,|\,a,\ b\in\mathbb{R}\}$를 기저(base, basis)로 하는 위상을 $\mathfrak{I}_l$이라 하고, $\{(a,\ b]\,|\,a,\ b\in\mathbb{R}\}$를 기저로 하는 위상을 $\mathfrak{I}_u$라 하자. 적공간(곱공간, product space) $(\mathbb{R},\mathfrak{I}_l)\times(\mathbb{R},\mathfrak{I}_u)$에서 집합

$$A=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2\le 1\}$$

의 내부(interior) A°를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 A의 폐포(closure) $\overline{A}$와 A의 경계(boundary) $b(A)$를 구하시오.
(단, $[a,\ b)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\le x<b\}$, $(a,\ b]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a<x\le b\}$이다.) [2016]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

24. 공집합이 아닌 위상공간 X의 두 부분집합 A와 B가 각각 X에서 조밀(dense)하다고 하자.
이 때, B가 X에서 열린집합이면 $A \cap B$가 X에서 조밀함을 증명하시오. [2008]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

25. 정수 전체의 집합 $\mathbb{Z}$ 위에 위상(topology) $\mathfrak{I}$를 다음과 같이 정의한다.

$\mathfrak{I} = \{ U \subset \mathbb{Z} \mid U = \varnothing$ 또는 U^c는 유한집합$\}$

이 때 서로 다른 정수 a_n들로 이루어진 수열 $\{a_n\}$은 위상공간 $(\mathbb{Z}, \mathfrak{I})$에서 각각의 정수 m에 수렴함을 증명하시오. [1997]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

26. 임의의 위상공간의 부분집합 S에 대하여, S를 부분집합으로 갖는 모든 닫힌집합들의 교집합을 $\overline{S}$로 나타낸다. X와 Y가 위상공간이고 f가 X에서 Y로의 함수일 때, f의 연속성과 동치가 아닌 것은? [1994]

① Y의 각 부분집합 B에 대하여 $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$

② X의 각 부분집합 A에 대하여 $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ 이다.

③ Y의 각 닫힌집합 B에 대하여 $f^{-1}(B)$는 X에서 닫힌집합이다.

④ X의 각 열린집합 A에 대하여 $f(A)$는 열린집합이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

27. X를

$\mathscr{B} = \{ V \subset X \mid V$와 V^c는 모두 열린집합 (open set)$\}$

을 기저(basis)로 갖는 위상공간이라 하자. 그리고 F를 닫힌집합(closed set), p를 F에 속하지 않는 X의 점이라고 할 때 $f(p) = 0$이고, $f(F) = \{1\}$인 연속함수 $f : X \to \mathbb{R}$가 존재함을 보이시오. (단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합이다.) [2007]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

28. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위의 보통위상(usual topology) $\mathfrak{I}_u$에 대하여 $X=(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_u)$라 할 때, 다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 설명하시오.
(단, $(a, b)=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}$ 이다.) [2013]

> $Y=\{1, 2, 3, 4\}$가 X의 부분공간일 때, $f(5)\neq f(6)$인 연속함수 $f: X\rightarrow Y$가 존재한다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

29. 위상공간 X, Y에 대하여 사상 $f: X \to Y$가 다음 조건을 만족할 때, f를 폐사상(closed map)이라 한다.

> 임의의 폐집합(closed set) $A(\subset X)$에 대하여, $f(A)$는 폐집합이다.

보통위상(usual topology)공간 $\mathbb{R}$에 대하여 사상 $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$를 $f(x, y) = x$로 정의할 때, f는 연속사상임을 보이고 폐사상은 아님을 보이시오. [2006]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

30. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$, 유리수 전체의 집합을 $\mathbb{Q}$라 하자. $\mathfrak{I}$를 $\mathbb{R}$ 위의 보통위상(usual topology)이라 하고 $(\mathbb{Q}, \mathfrak{I}_{\mathbb{Q}})$를 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$의 부분공간이라 하자. 함수 $j : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$를 임의의 $r \in \mathbb{Q}$에 대하여 $j(r) = r$로 정의할 때, 다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 설명하시오. [2009]

> ㄱ. 함수 $j : (\mathbb{Q}, \mathfrak{I}_{\mathbb{Q}}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{I})$는 연속이다.
> ㄴ. 임의의 위상공간 X와 함수 $f : X \to (\mathbb{Q}, \mathfrak{I}_{\mathbb{Q}})$에 대하여 $j \circ f : X \to (\mathbb{R}, \mathfrak{I})$가 연속이면 $f : X \to (\mathbb{Q}, \mathfrak{I}_{\mathbb{Q}})$가 연속이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

31. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위의 보통위상(usual topology)을 $\mathfrak{I}$라 하고, 함수 $f : \mathbb{R} \to [0, 1)$을 $f(x) = x - [x]$로 정의하자.
집합 $[0, 1)$위의 위상 $\mathfrak{I}_0$을

$$\mathfrak{I}_0 = \{ G \subseteq [0, 1) \mid f^{-1}(G) \in \mathfrak{I} \}$$

로 정의하자. 다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 이유를 설명하시오.
(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이고, $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$이다.) [2011]

> 함수 $h : [0, 1) \to \mathbb{R}$를 $h(x) = 1 - x$로 정의하면 $h : ([0, 1), \mathfrak{I}_0) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{I})$는 연속이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

32. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위의 두 위상 $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2$를

$$\mathfrak{I}_1 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}-\mathbb{Q}\},$$
$$\mathfrak{I}_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{R}-\mathbb{N}\}$$

으로 정의하자. $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_1)$과 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_2)$의 적공간(곱공간, product space) $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_1)\times(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_2)$에 대하여 다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 설명하시오.
(단, $\mathbb{Q}$는 유리수 전체의 집합, $\mathbb{N}$은 자연수 전체의 집합이다.) [2011]

> 함수 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$를
>
> $$F(x)=\begin{cases}(x,1) & , x\text{는 유리수} \\ (x,-1) & , x\text{는 무리수}\end{cases}$$
>
> 로 정의 하면
>
> $$F:(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_1)\to(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_1)\times(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_2)$$
>
> 는 연속함수이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

33. 자연수 전체의 집합 $\mathbb{N}$과 자연수 n에 대하여 $A_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\}$이라 하고, $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$을 기저(base)로 하는 $\mathbb{N}$ 위의 위상을 $\mathfrak{I}$라 하자. $X = (\mathbb{N}, \mathfrak{I})$라 하고 $Y = [0, 1]$을 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_u)$의 부분공간(subspace)이라 할 때, 다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 설명하시오.
(단, $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$이고, $\mathfrak{I}_u$는 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위의 보통위상(usual topology)이다.) [2013]

> 함수 $f : X \to X \times Y$를 $f(n) = \left(2n, \dfrac{1}{n}\right)$로 정의하면 f는 연속함수이다.

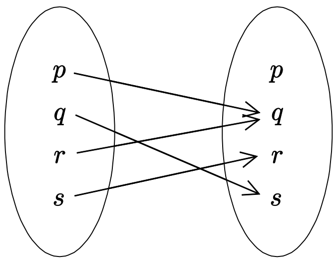
- 정의/정리 -

- 풀이 -

34. 집합 $X=\{p,\ q,\ r,\ s\}$ 위에서 정의된 위상 (topology)을

$$\mathfrak{I}=\{X,\ \varnothing,\ \{p\},\ \{q\},\ \{p,\ q\},\ \{q,\ r,\ s\}\}$$

이라 하자. 함수 $f:X\to X$가 그림과 같이 정의될 때, 함수 f가 연속이 아닌 점을 구하시오. [1995]



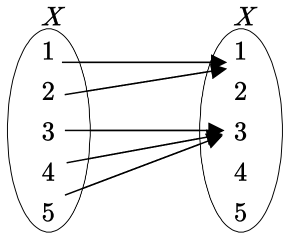
- 정의/정리 -

- 풀이 -

35. $X=\{1,2,3,4,5\}$이고,

$\mathfrak{J}=\{X,\ \varnothing,\ \{1,2\},\ \{2\},\ \{3,4,5\},\ \{2,3,4,5\},\ \{4\},\ \{1,2,4\},\ \{2,4\}\}$

이라 하자. 함수 $f: X\to X$를 아래와 같이 정의할 때, 다음 물음에 답하시오. [2002]



(1) $f:(X,\mathfrak{J})\to(X,2^X)$가 연속임을 보이시오.

(2) $(X,\mathfrak{J})$에서 $\{2\}$와 $\{4\}$의 폐포(closure)를 각각 구하시오.

(3) 집합

$\{h \mid h:(X,\mathfrak{J})\to(X,2^X)$는 연속, $h(2)=1,\ h(4)=3\}$

의 원소의 개수를 구하고, 그 이유를 설명하시오.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

36. 자연수 전체의 집합을 N 이라 하자.
집합 $X=\{n\in\mathrm{N}\,|\,n\geq 2\}$의 각 원소 n에 대하여
$B_n=\{k\in X\,|\,k$는 n의 약수$\}$라 하고,
$\{B_n|n\in X\}$를 기저로 하는 X 위에서의 위상을 $\mathfrak{I}$라 하자. 다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 설명하시오. [2010]

> 함수 $f:(X,\mathfrak{I})\rightarrow(X,\mathfrak{I}')$을 $f(x)=x$로 정의할 때, f는 $x=2$에서 연속이다. 여기서 $\mathfrak{I}'$은 X위에서의 이산위상(discrete topology)이다.

- 풀이 -

- 정의/정리 -

37. 자연수 전체의 집합 $\mathbb{N}$에서 위상 $\mathfrak{I}$를

$$\mathfrak{I}=\{G\subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N}-G\text{는 유한집합}\}\cup\{\varnothing\}$$

으로, 함수 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$을

$$f(n)=\begin{cases}1, & 1\le n<5\\ 2, & 5\le n<10\\ 3, & 10\le n\end{cases}$$

으로 정의하자. $\mathfrak{I}_d$를 $\mathbb{N}$에서 이산위상(discrete topology)이라 하고, 집합 A를

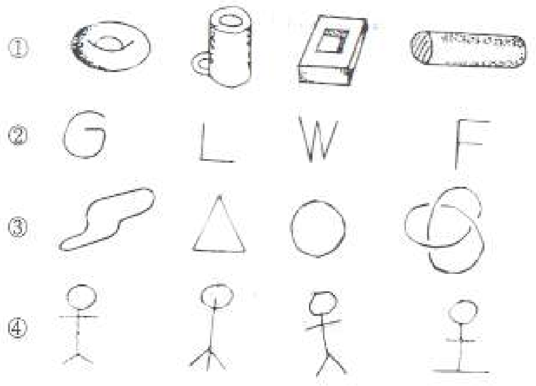
$A=\{n\in\mathbb{N} \mid f:(\mathbb{N},\mathfrak{I})\to(\mathbb{N},\mathfrak{I}_d)\text{는 } n\text{에서 불연속}\}$

이라 할 때, 집합 A의 원소의 개수를 구하시오. [2014]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

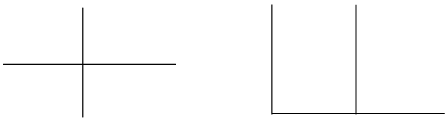
38. 다음은 위상적 동형(homeomorphism)관계를 나타내고 있다. 이 중에서 모두 위상적 동형인 것은? [1996]



- 정의/정리 -

- 풀이 -

39. 다음 두 평면도형이 위상적으로 동형이 아님을 보이시오. [1996]



- 정의/정리 -

- 풀이 -

40. 다음 각 물음에 답하시오. [2001]

(1) 주어진 두 위상공간 X, Y에 대하여 X에서 Y로의 위상동형사상(homeomorphism)의 정의를 쓰시오.

(2) $X=\{a, b, c, d\}$위에 위상(topology)

$$\mathfrak{T}=\{X, \{a, b\}, \{c, d\}, \varnothing\}$$

이 주어져 있을 때, X에서 X로의 위상동형사상의 개수를 구하시오.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

41. 정수 전체의 집합 $\mathbb{Z}$에서 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$로의 함수 $f:\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{R}$가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$f(x)=\begin{cases} 1\ ,\ x=2k,\ k\in\mathbb{Z}-\{0\} \\ 0\ ,\ x=0 \\ -1\ ,\ x=2k-1,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$\mathbb{R}$에 보통위상(usual topology)이 주어져 있을 때, 함수 f가 연속이 되도록 하는 $\mathbb{Z}$의 최소 위상을 $\mathfrak{I}$라고 하자. 위상 $\mathfrak{I}$를 구하시오.
(단, 최소의 위상은 원소의 개수가 가장 작은 위상을 뜻한다.) [2009 모의평가]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

42. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 에서 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 를

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in\mathbb{Q} \\ 0, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$$

로 정의하자. $\mathbb{R}$ 위의 보통위상(usual topology) $\mathfrak{I}$에 대하여

$$\{f^{-1}(G) \mid G\in\mathfrak{I}\}$$

로 정의된 $\mathbb{R}$ 위의 위상을 $\mathfrak{I}_0$이라 하자.
위상공간 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_0)$에 대하여 옳지 않은 것은?
(단, $\mathbb{Q}$ 는 유리수 전체의 집합이다.) [2012]

① $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_0)$에서 $\sqrt{2}$는 $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ 의 내점(interior point)이다.
② $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_0)$에서 $\mathbb{Q}$ 의 경계(boundary)는 $(\mathbb{R}-\mathbb{Q})\cup\{0\}$이다.
③ 구간 $(-1, 1)$에 대하여 $(-1, 1)\cup(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$는 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_0)$에서 열린집합(open set)이다.
④ 구간 $[-1, 1]$에 대하여 $[-1, 1]\cup(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$는 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_0)$에서 닫힌집합(closed set)이다.
⑤ $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_0)$에서 0은 $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ 의 집적점(극한점, accumulation point, cluster point, limit point)이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

43. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$에 대하여 $\{[a,\, b) \mid a,\, b \in \mathbb{R}\}$를 기저(base)로 하는 $\mathbb{R}$ 위의 위상을 $\mathfrak{I}$라 하자.
함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$를 $f(x) = |x|$로 정의하고,
$$\mathfrak{I}_1 = \{f^{-1}(G) \mid G \in \mathfrak{I}\}$$
라 하자. 위상공간 $(\mathbb{R},\, \mathfrak{I}_1)$에서 집합 $(-2,\, 1)$의 내부(interior) A와 집합 $[1,\, 2)$의 내부 B를 구하시오.
(단, $|x|$는 x의 절댓값이고,
$(a,\, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$,
$[a,\, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$
이다.) [2013]

\- 정의/정리 -

\- 풀이 -

44. $\mathbb{R}$ 위의 보통위상(usual topology)을 $\mathfrak{I}$, 함수 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ 를 $f(n) = n^2$이라 하고, $\mathbb{Z}$ 위의 위상 $\mathfrak{I}_1$을 $\mathfrak{I}_1 = \{f^{-1}(G) \mid G \in \mathfrak{I}\}$라 하자.
$A = \{0\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{-1, 1\}$이라 할 때, 적공간(product space) $(\mathbb{Z}, \mathfrak{I}_1) \times (\mathbb{Z}, \mathfrak{I}_1)$에서 $A \times B$의 폐포(closure) $\overline{A \times B}$와 $A \times B$의 내부(interior) $(A \times B)^\circ$ 를 구하시오.
이를 이용하여 $(\mathbb{Z}, \mathfrak{I}_1) \times (\mathbb{Z}, \mathfrak{I}_1)$에서 $A \times B$의 경계(boundary) $b(A \times B)$를 구하는 과정을 쓰시오.
(단, $\mathbb{N}$은 자연수 전체의 집합, $\mathbb{Z}$는 정수 전체의 집합, $\mathbb{R}$는 실수 전체의 집합이다.) [2014]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	위상수학 기출문제	단원	상위상

45. 위상공간 (X, τ)와 집합 X 위의 동치관계 R이 주어져 있다. X/R을 X의 관계 R에 의한 동치류 전체의 집합이라 하고, 다음과 같은 함수를 정의한다.

$f : X \to X/R,\ x \to \overline{x}$ ($\overline{x}$는 x를 포함하는 동치류)

이 때, 집합의 상위상(quotient topology) τ'과 f에 대한 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? [1995]

ㄱ. $U \in \tau'$이면 $f^{-1}(U) \in \tau$이다.
ㄴ. C가 X의 컴팩트(compact) 부분집합이면, $f(C)$는 X/R의 컴팩트 부분집합이다.
ㄷ. $V \in \tau$이면 $f(V) \in \tau'$

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ

③ ㄴ, ㄷ ④ ㄱ, ㄴ, ㄷ

- 정의/정리 -

- 풀이 -

46. 위상공간 X와 전사함수 $g : X \to Y$에 의한 집합 Y의 상위상(quotient topology)은 $g^{-1}(O)$가 X에서 개집합(open set)이 되는 Y의 부분집합 O로 이루어지는 Y위의 위상이다.
실위상공간 $X = \mathbb{R}$과 정수집합 $Y = \mathbb{Z}$에 대하여 전사함수 $f : X \to Y$, $f(x) = [x]$에 의한 Y의 위상을 구하시오.
(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수이다.)
[2005]

\- 정의/정리 -

\- 풀이 -

47. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위에서 $\{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$를 기저(base)로 하는 위상을 $\mathfrak{I}_1$이라 하자. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 다음과 같이 정의된 함수 $f : (\mathbb{R}, \mathfrak{I}_1) \to A$를 생각하자.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ 3, & 0 < x \le 1 \\ 4, & x > 1 \end{cases}$$

함수 f에 의해서 만들어진 A위에서의 상위상 (quotient topology)을 $\mathfrak{I}$라 할 때, 위상공간 $(A, \mathfrak{I})$에서 열린 집합(open set)의 총 개수를 구하시오.
(단, $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$이다.) [2010]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

48. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위의 보통위상(usual topology)을 $\mathfrak{I}$라 하고, 함수 $f:\mathbb{R}\to[0,\,1)$을 $f(x)=x-[x]$로 정의하자. 집합 $[0,\,1)$위의 위상 $\mathfrak{I}_0$을

$$\mathfrak{I}_0=\{G\subseteq[0,\,1)\,|\,f^{-1}(G)\in\mathfrak{I}\}$$

로 정의하자. 다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 이유를 설명하시오. (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이고, $[a,\,b)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\le x<b\}$이다.) [2011]

$$[0,\,\frac{1}{2})\in\mathfrak{I}_0$$

- 정의/정리 -

- 풀이 -

49. 위상공간 $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{I}_u)$의 부분공간(subspace)

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$$

와 집합

$$X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

에 대하여 함수 $f : A \to X$를

$$f(x, y) = [x^2 + y^2]$$

으로 정의하자. 집합 X위의 위상 $\mathfrak{I}$를

$$\mathfrak{I} = \{U \subseteq X \mid f^{-1}(U) \in \mathfrak{I}_u\}$$

로 정의할 때, 3을 원소로 갖는 X의 모든 열린 집합(open set)의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또 위상공간 $(X, \mathfrak{I})$에서 집합 $B = \{1, 2\}$의 도집합(derived set) B'을 구하시오.

(단, $\mathfrak{I}_u$는 $\mathbb{R}^2$위의 보통위상(usual topology)이고, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.) [2018]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

50. 좌표평면 $\mathbb{R}^2$의 거리함수 $d((x, y), (a, b)) = |x-a| + |y-b|$와 원점 O에 대하여, $\mathbb{R}^2$에서 거리함수 e를 다음과 같이 정의하자.

$$e(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \begin{cases} d(\mathrm{O}, \mathrm{P}) + d(\mathrm{O}, \mathrm{Q}), & \mathrm{P} \neq \mathrm{Q} \\ 0, & \mathrm{P} = \mathrm{Q} \end{cases}$$

거리공간 $(\mathbb{R}^2, e)$에서 두 점 $(1, 3)$과 $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ 사이의 거리를 구하시오. 또한 열린 집합

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid e((x, y), (1, 3)) < 9\}$$

에 속하고 각 좌표가 모두 정수인 원소의 개수를 구하시오. [2020]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

51. 좌표평면 $\mathbb{R}^2$에서 거리함수 $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$를 다음과 같이 정의하자.

$$d(P,\ Q) = \begin{cases} \| P \| + \| Q \|, & \| P \| \neq \| Q \| \\ \| P - Q \|, & \| P \| = \| Q \| \end{cases}$$

거리공간 $(\mathbb{R}^2,\ d)$에서 열린집합

$$A = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,\ (2,\ 0)) < 4\},$$

$$B = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,\ (2,\ 0)) < 1\}$$

을 좌표평면에 그림으로 순서대로 나타내시오.

(단, $\| (x,\ y) \| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 이다.) [2023]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

52. 거리공간 (X, d)에서 임의의 $x, y \in X$에 대하여, 다음과 같이 d_1이 정의되어 있다. 이 때, (X, d_1)은 유계(bounded)인 거리공간(metric space)이 됨을 증명하시오. [1999]

$$d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad x, y \in X$$

- 정의/정리 -

- 풀이 -

53. 평면 $\mathbb{R}^2$상의 두 점 $x=(x_1,\ x_2)$와 $y=(y_1,\ y_2)$ 사이의 거리(metric)를

$$d(x,\ y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$$

으로 정의할 때 행렬

$$A=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}$$

에 의하여 표현되는 변환 $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$가 거리공간 $\mathbb{R}^2$에서 연속함수임을 밝히시오. [2001]

\- 정의/정리 -

\- 풀이 -

54. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위에서 여가산위상 (countable complement topology) $\mathfrak{I}$를 다음과 같이 정의하자.

$$\mathfrak{I} = \{ U \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} - U \text{는 가산집합} \} \cup \{ \varnothing \}$$

다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 이유를 설명하시오. [2010]

> 위상공간 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$는 분리(분해)가능공간 (separable space)이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

55. $\mathbb{R}^2$위의 점 $q=(0,1)$과 집합

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=0\}$$

에 대하여 $X=A\cup\{q\}$라 하자. X위의 위상 $\mathfrak{I}$를
$\mathfrak{I}=P(A)\cup\{U\subseteq X \mid q\in U,\ A-U\text{가 유한집합}\}$
으로 정의할 때, 다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 이유를 설명하시오.
(단, $P(A)=\{U \mid U\subseteq A\}$이다.) [2012]

$(X,\mathfrak{I})$는 분리가능공간(가분공간, separable space)이다.

- 풀이 -

- 정의/정리 -

56. $\mathfrak{I} = \{X, \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$가 $X = \{a, b, c\}$ 위에서의 위상(topology)일 때, 다음 공간들 중에서 $(X, \mathfrak{I})$가 만족하는 것은? [1996]

① T_1-space ② regular space
③ normal space ④ T_4-space

- 정의/정리 -

- 풀이 -

57. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위에서 여가산위상 (countable complement topology) $\mathfrak{I}$를 다음과 같이 정의하자.

$$\mathfrak{I} = \{ U \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} - U \text{는 가산집합} \} \cup \{ \varnothing \}$$

다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 이유를 설명하시오. [2010]

위상공간 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$는 T_1-공간이다.

\- 정의/정리 -

\- 풀이 -

58. $\mathbb{R}^2$ 위의 점 $q=(0,1)$과 집합

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=0\}$$

에 대하여 $X=A\cup\{q\}$라 하자. X위의 위상 $\mathfrak{I}$를 $\mathfrak{I}=P(A)\cup\{U\subseteq X \mid q\in U,\ A-U$가 유한집합$\}$으로 정의할 때, 다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 이유를 설명하시오.
(단, $P(A)=\{U \mid U\subseteq A\}$이다.) [2012]

$(X, \mathfrak{I})$는 정규공간(normal space)이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

59. $\mathbb{R}^2$ 위에 동치관계(equivalence relation) $\sim$을 다음과 같이 정의하자.

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow (x, y) = (tx', ty')\text{인 실수 } t \neq 0\text{가 존재한다.}$$

원소 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$에 대하여 $\sim$에 관한 동치류(equivalence class)를 $[x, y]$라 하고, $\sim$에 관한 상집합(quotient set)을 $Y = \mathbb{R}^2/\sim$, 상사상(quotient map)을 $\pi : \mathbb{R}^2 \to Y$ $(\pi(x, y) = [x, y])$라 하자.
$\mathbb{R}^2$ 위에 보통위상(usual topology)이 주어진 위상공간을 X라 하고, 상집합 Y 위의 $\pi : X \to Y$에 대한 상위상(quotient topology)을 $\mathfrak{I}$라 하자. 즉, $\mathfrak{I}$는 Y 위의 $X/\sim$의 상위상이다.
이때 $[0, 0]$을 포함하는 $\mathfrak{I}$의 원소가 유일함을 증명하고, $(Y, \mathfrak{I})$가 T_1-공간이 아닌 이유를 서술하시오.
(단, 보통위상은 거리함수 $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ 로부터 유도되는 위상이다.) [2021]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

60. 집합 $X=\{a, b, c\}$ 위에 $\mathscr{B}=\{\{a\}, \{a, b\}, \{c\}\}$를 기저(base, basis)로 갖는 위상 $\mathfrak{I}_{\mathscr{B}}$가 있다. 위상공간 $(X, \mathfrak{I}_{\mathscr{B}})$ 위에서 정의된 점렬(점열, sequence of points)

$$x_n \equiv \begin{cases} a & (n\text{은 홀수}) \\ b & (n\text{은 짝수}) \end{cases}$$

의 극한(limit)을 쓰시오.
또한, 위상공간 $(X, \mathfrak{I}_{\mathscr{B}})$에서 공집합이 아닌 임의의 서로소인 두 닫힌집합(closed set) F_1, F_2에 대하여

$$F_1 \subset G_1,\ F_2 \subset G_2,\ G_1 \cap G_2 = \varnothing$$

을 만족하는 열린집합(open set) G_1, G_2가 존재함을 보이시오. [2022]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

61. 다음 중 공간 $\mathbb{R}^5$상에서 컴팩트(compact) 집합이 아닌 것은? [1994]

① 유계인 닫힌집합(bounded closed set)
② 닫힌집합과 컴팩트 집합의 교집합
③ 컴팩트 집합의 폐부분 집합
④ 공간 $\mathbb{R}^5$

- 정의/정리 -

- 풀이 -

62. 위상공간 X가 T_2공간(Hausdorff space)일 때, 임의의 컴팩트집합(compact set) $A \subset X$와 임의의 $x \in X - A$에 대하여 다음 조건을 만족하는 개집합(open set) $U, V \subset X$가 존재함을 증명하시오. [2003]

조건 : $x \in U$, $A \subset V$, $U \cap V = \varnothing$

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	위상수학 기출문제	단원	콤팩트

63. 집합 $X=[-1,1]=\{x\in\mathbb{R}\mid -1\le x\le 1\}$에 다음과 같이 위상 $\mathfrak{J}$를 정의할 때, 위상공간 $(X,\mathfrak{J})$는 컴팩트(compact, 긴밀) 공간임을 보이시오. [2006]

$$\mathfrak{J}=\{U\subset X\mid 0\notin U\}\cup\{U\subset X\mid(-1,1)\subset U\}$$

- 정의/정리 -

- 풀이 -

64. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$, 유리수 전체의 집합을 $\mathbb{Q}$라 하자. $\mathfrak{I}$를 $\mathbb{R}$ 위의 보통위상(usual topology)이라 하고 $(\mathbb{Q}, \mathfrak{I}_{\mathbb{Q}})$를 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$의 부분공간이라 하자. 함수 $j : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$를 임의의 $r \in \mathbb{Q}$에 대하여 $j(r) = r$로 정의할 때, 다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 설명하시오. [2009]

> A가 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$의 콤팩트(compact) 부분공간이면 $j^{-1}(A)$는 $(\mathbb{Q}, \mathfrak{I}_{\mathbb{Q}})$의 콤팩트 부분공간이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

65. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위에서 여가산위상 (countable complement topology) $\mathfrak{I}$를 다음과 같이 정의하자.

$$\mathfrak{I} = \{ U \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} - U \text{는 가산집합} \} \cup \{ \varnothing \}$$

다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 이유를 설명하시오. [2010]

> 위상공간 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$의 부분집합 A가 콤팩트(compact)이기 위한 필요충분조건은 A가 유한집합인 것이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

66. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위의 보통위상(usual topology)을 $\mathfrak{I}$라 하고, 함수 $f:\mathbb{R}\to[0,\,1)$을 $f(x)=x-[x]$로 정의하자.
집합 $[0,\,1)$위의 위상 $\mathfrak{I}_0$을

$$\mathfrak{I}_0=\{G\subseteq[0,\,1)\,|\,f^{-1}(G)\in\mathfrak{I}\}$$

로 정의하자. 다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 이유를 설명하시오. (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이고, $[a,\,b)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\le x<b\}$이다.) [2011]

$([0,\,1),\,\mathfrak{I}_0)$은 콤팩트(compact)공간이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

67. $\mathbb{R}^2$위의 점 $q=(0,1)$과 집합

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=0\}$$

에 대하여 $X=A\cup\{q\}$라 하자. X위의 위상 $\mathfrak{I}$를
$\mathfrak{I}=P(A)\cup\{U\subseteq X \mid q\in U,\ A-U$가 유한집합$\}$
으로 정의할 때, 다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 이유를 설명하시오.
(단, $P(A)=\{U \mid U\subseteq A\}$이다.) [2012]

$(X,\mathfrak{I})$는 콤팩트공간(compact space)이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

68. 자연수 전체의 집합 $\mathbb{N}$과 자연수 n에 대하여 $A_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\}$이라 하고, $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$을 기저(base) 로 하는 $\mathbb{N}$ 위의 위상을 $\mathfrak{I}$라 하자. $X = (\mathbb{N}, \mathfrak{I})$라 하고 $Y = [0, 1]$을 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_u)$의 부분공간(subspace)이라 할 때, 다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 설명하시오.
(단, $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$이고, $\mathfrak{I}_u$는 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위의 보통위상(usual topology) 이다.) [2013]

$X \times Y$는 콤팩트공간이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

69. 자연수 전체의 집합 $\mathbb{N}$에 대하여, 집합

$$X=\mathbb{N}\cup\{-1,\ -2,\ -3\}$$

위에

$\wp(\mathbb{N})\cup\{\mathbb{N}\cup\{-1\}-F \mid F$는 $\mathbb{N}$의 유한부분집합$\}$
$\cup\{\{-2,\ -3\}\}$

을 기저(base)로 하는 위상을 $\mathfrak{I}$라 하자.

> ① $\mathbb{N}\subsetneq A\subsetneq X$, $A\neq\mathbb{N}\cup\{-1\}$이고 $(A, \mathfrak{I}_A)$가 콤팩트(compact)이다.
>
> ② $\mathbb{N}\subsetneq B\subsetneq X$이고 $(B, \mathfrak{I}_B)$가 콤팩트가 아니다.

①을 만족하는 A를 모두 구하고, ②를 만족하는 B의 예를 하나 제시하고 예가 되는 이유를 설명하시오. (단, $\wp(\mathbb{N})=\{G \mid G\subseteq\mathbb{N}\}$, $Y\subset X$일 때 $\mathfrak{I}_Y=\{G\cap Y \mid G\in\mathfrak{I}\}$이다.) [2014]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

70. 좌표평면 $\mathbb{R}^2$에서 거리함수(metric, distance function) $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$는

$$d(p, q) = \begin{cases} 0, & p = q \\ \max\{\|p\|, \|q\|\}, & p \neq q \end{cases}$$

이다. d에 의해 유도된 $\mathbb{R}^2$상의 거리위상(metric topology)을 $\mathfrak{T}_d$라 하자.

위상공간 $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{T}_d)$의 부분집합

$$A = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1\}$$

의 폐포(closure) $\overline{A}$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{T}_d)$에서 콤팩트(compact)인 무한 부분집합 B의 예를 하나 제시하시오.

(단, $p = (x, y)$에 대하여 $\|p\| = \sqrt{x^2 + y^2}$이고 $\max\{a, b\}$는 a와 b 중 작지 않은 수이다.) [2017]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

71. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위의 위상

$\mathfrak{I}=\{U\subseteq\mathbb{R}\mid\mathbb{R}-U\text{는 유한집합}\}\cup\{\varnothing\}$

에 대하여, $(\mathbb{R},\mathfrak{I})$의 두 부분공간(subspace) $A=[0,1]\cup[2,3)$과 $B=\{3,4,5\}$의 위상을 각각 $\mathfrak{I}_A$, $\mathfrak{I}_B$라 하자.

집합 $X=A\cup B$에서 $\mathfrak{I}_A\cup\mathfrak{I}_B$를 기저(base, basis)로 하는 위상을 $\mathfrak{I}'$이라 할 때, 위상공간 $(X,\mathfrak{I}')$에서 집합 $C=\left\{3-\frac{1}{n}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{3\}$의 경계(boundary) $b(C)$를 구하시오. 또한 $(X,\mathfrak{I}')$이 컴팩트 공간(compact space)임을 보이시오.

(단, $[0,1]=\{x\in\mathbb{R}\mid 0\le x\le 1\}$, $[2,3)=\{x\in\mathbb{R}\mid 2\le x<3\}$이고 $\mathbb{N}$은 자연수 전체의 집합이다.) [2019]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

72. 집합 $K=\left\{\dfrac{1}{n} \mid n\text{은 자연수}\right\}$에 대하여 집합 Ω를

$$\Omega=\{(a,\, b) \mid a,\, b\in\mathbb{R}\,,\, a<b\}$$
$$\cup\{(a,\, b)-K \mid a,\, b\in\mathbb{R}\,,\, a<b\}$$

라 하고, Ω를 기저로 하는 $\mathbb{R}$ 위의 위상을 $\mathfrak{I}$라 하자. 위상 공간 $(\mathbb{R}\,,\mathfrak{I})$에서 K의 도집합 K'을 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 $[0,\,1]$이 $(\mathbb{R}\,,\mathfrak{I})$의 컴팩트(옹골) 부분집합인지 판별하고 그 이유를 쓰시오. [2023]

(단, $(a,\, b)=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}$이고 $[a,\, b]=\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x\le b\}$이다.)

- 정의/정리 -

- 풀이 -

73. 다음조건을 만족시키는 실위상공간 $\mathbb{R}$의 부분집합 W, X, Y, Z의 예를(증명없이) 하나씩 구하시오. [2005]

(1) Y, Z는 연결집합(connected set)이다.
(2) $Y \subset W \subset Z$, $Y \subset X \subset Z$.
(3) W는 연결집합이다.
(4) X는 연결집합이 아니다.

여기에서 기호 $A \subset B$는 A가 B의 진부분집합임을 나타낸다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

74. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 에
$\{V \subset \mathbb{R} \mid V$의 여집합은 유한집합$\} \cup \{\varnothing\}$
을 기저(basis, base)로 하는 위상이 주어져 있을 때, 연결집합을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2009 모의평가]

<보기>

ㄱ. $\{0,\ 1\}$
ㄴ. $(0,\ 1) \cup \{3\}$
ㄷ. $(-1,\ 0) \cup (0,\ 1)$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

- 정의/정리 -

- 풀이 -

75. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위의 두 위상 $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2$를

$$\mathfrak{I}_1 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}-\mathbb{Q}\},$$
$$\mathfrak{I}_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{R}-\mathbb{N}\}$$

으로 정의하자. $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_1)$과 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_2)$의 적공간(곱공간, product space) $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_1)\times(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_2)$에 대하여 다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 설명하시오. (단, $\mathbb{Q}$는 유리수 전체의 집합, $\mathbb{N}$은 자연수 전체의 집합이다.) [2011]

> $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_1)\times(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_2)$는 연결(connected)공간이다.

- 풀이 -

- 정의/정리 -

76. 집합 $X=\{a,\,b,\,c\}$에서 정의된 두 위상 $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $|\mathfrak{I}_1|=|\mathfrak{I}_2|=4$
> (나) $(X,\,\mathfrak{I}_1)$은 연결공간(connected space)이다.
> (다) $(X,\,\mathfrak{I}_2)$는 비연결공간(disconnected space)이다.

이때 $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$를 각각 1개씩 구하시오.
(단, $|A|$는 집합 A의 원소의 개수이다.) [2021]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

77. 보통 위상(usual topology)이 주어진 4차원 좌표 공간 $\mathbb{R}^4$에서

$$A = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a^2+b^2=1,\ c^2+d^2=1,\ ac+bd=0\}$$

이 컴팩트(긴밀, 옹골, compact) 집합임을 보이시오. 또한, 집합 A에서 정의된 함수 $f(a,b,c,d)=ad-bc$의 치역을 구하고, 이를 이용하여 집합 A가 연결집합(connected set)인지 판별하고 그 이유를 쓰시오. [2024]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

78. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위의 보통위상(usual topology) $\mathfrak{I}_u$에 대하여 $X=(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_u)$라 할 때, 다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 설명하시오. (단, $(a, b)=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}$이다.) [2013]

ㄱ. X의 부분공간(subspace) $\mathbb{Q}$는 연결(connected) 공간이다. (단, $\mathbb{Q}$는 유리수 전체의 집합이다.)

ㄴ. X의 부분공간 $(-2,\ -1)\cup(0,\ 1)\cup\{\sqrt{2}\}$의 성분(component)의 개수는 3이다.

- 풀이 -

- 정의/정리 -

79. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위에서 위상 $\mathfrak{I}_1$과 $\mathfrak{I}_2$를 다음과 같이 정의하자.

$\mathfrak{I}_1$은 $\{[a,\, b) \mid a,\, b \in \mathbb{R}\}$를 기저(base)로 하는 위상

$\mathfrak{I}_2 = \{\mathbb{R},\, \varnothing,\, \{0,\, 1\}\}$

위상공간 $(\mathbb{R},\, \mathfrak{I}_i)$ $(i = 1,\, 2)$에서 원소 0을 포함하는 성분(component)을 $A_i (i = 1,\, 2)$라고 할 때, A_i를 구하시오.

(단, $[a,\, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$이고, 위상공간 X에서 '성분'은 X의 극대 연결부분공간을 의미한다.) [2009]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

80. 자연수 전체의 집합 $\mathrm{N}=\{1,\,2,\,3,\,\cdots\}$에 대하여, 집합

$$X=\{(m,\,n)\in\,\mathrm{N}\times\mathrm{N}\,|\,m\geq 12\text{ 또는 }n\geq 6\}$$

에 다음과 같이 위상 $\mathfrak{I}$가 주어졌다고 하자.

$$\mathfrak{I}=\{G\subseteq X\,|\,X-G\text{는 유한집합}\}\cup\{\varnothing\}$$

함수 $f:X\to\mathrm{N}$을 $f(m,\,n)=m+n$으로 정의하고, N의 위상을

$$\mathfrak{I}_{\mathrm{N}}=\{U\subseteq\mathrm{N}\,|\,f^{-1}(U)\in\mathfrak{I}\}$$

라 하자. 위상공간 $(\mathrm{N},\,\mathfrak{I}_N)$의 연결성분(connected component)의 개수를 구하시오. [2015]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

81. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$의 보통 위상을 $\mathfrak{I}_u$라 하고, 함수 $f_i : \mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{I}_u)$ $(i = 1, 2)$를

$$f_1(x) = \lfloor x \rfloor, \quad f_2(x) = \lfloor -x \rfloor$$

로 정의하자. 집합

$$\{f_1^{-1}(U) \mid U \in \mathfrak{I}_u\} \cup \{f_2^{-1}(U) \mid U \in \mathfrak{I}_u\}$$

을 부분기저(subbase, subbasis)로 하여 생성된 $\mathbb{R}$의 위상을 $\mathfrak{I}$라 정의하자. 위상공간 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$에서 $\sqrt{2}$를 포함하는 성분(연결성분, component, connected component)을 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$에서 집합 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$의 내부(interior)와 폐포(closure)를 구하시오.

(단, $\left[\frac{1}{2}, 2\right] = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{1}{2} \leq x \leq 2\right\}$이고, $\lfloor x \rfloor$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.) [2020]

- 정의/정리 -

- 풀이 -