과목	선형대수 기출문제	단원	행렬식

1. 행렬식 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ 의 값을 구하시오. [1990]

- 풀이 -

- 정의/정리 -

2. 3×3 행렬 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$의 역행렬을 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$라 할 때, $a_{21}+a_{32}$의 값은? [1996]

\- 정의/정리 -

\- 풀이 -

과목	선형대수 기출문제	단원	행렬식

3. 연립방정식 $\begin{cases} x+y+az=0 \\ x+ay+z=0 \\ ax+y+z=0 \end{cases}$ 이 $x=y=z=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 a의 값들의 합은? [1992]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

4. 행렬 $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$에 대한 보기의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2010]

〈보기〉

A는 항등행렬이 아닌 두 개의 가역행렬(정칙행렬)의 곱으로 나타낼 수 있다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

5. 행렬 $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$에 대한 보기의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2010]

〈보기〉

A는 수반행렬(adjoint matrix)의 행렬식(determinant)은 A의 행렬식의 제곱과 같다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

6. 각 성분이 실수인 3×3 정칙행렬(가역행렬) A의 수반행렬(adjoint matrix)을 $\mathrm{adj}\,A$라 할 때, <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2011]

<보기>

ㄱ. 임의의 자연수 n에 대하여 $\mathrm{adj}\,(A^n)=(\mathrm{adj}A)^n$이다.

ㄴ. 행렬 A의 전치행렬(transpose matrix)을 A^T라 할 때, $\mathrm{adj}\,(A^T)=(\mathrm{adj}A)^T$이다.

ㄷ. $\mathrm{adj}\,(\mathrm{adj}A)=A$

- 정의/정리 -

- 풀이 -

7. 벡터 공간(vector space) $\mathbb{R}^3$의 부분공간(subspace) 이 아닌 것은? [1996]

① $W=\{(x,\ y,\ z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=z\}$
② $W=\{(x,\ y,\ z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+z=0\}$
③ $W=\{(x,\ y,\ z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y+z=0\}$
④ $W=\{(x,\ y,\ z)\in\mathbb{R}^3 \mid xy=0\}$

- 정의/정리 -

- 풀이 -

8. 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간 V에 대하여 W_1, W_2를 V의 부분공간이라 하자.
$V = W_1 + W_2$일 때, 임의의 $v \in V$에 대하여

$$v = w_1 + w_2 (w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2)$$

로 유일하게 표현될 필요충분조건은 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$임을 증명하시오. [2003]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

9. 실수체 $\mathbb{R}$ 위에서 정의된 벡터공간 $\mathbb{R}^3$에 관련된 <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2010]

<보기>

ㄱ. 유리수 전체의 집합 $\mathbb{Q}$에 대하여 $\mathbb{Q}^3$는 $\mathbb{R}^3$의 부분공간이다.

ㄴ. $\mathbb{R}^3$의 부분공간

$$U = \{(x, y, z) \mid z = x + 5y\}$$

에 대하여 $\mathbb{R}^3$가 U와 W의 직합 (direct sum) $U \oplus W$와 같게 되는 $\mathbb{R}^3$의 부분 공간 W가 존재한다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

10. 세 벡터 $(1,1,0),(1,x,1),(0,1,-1)$이 일차종속이 될 x의 값은? [1992]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

11. 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간 $\mathbb{R}^5$에 속하는 벡터 v_1, v_2, v_3에 대하여 옳은 것만을 <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2013]

<보기>

ㄱ. v_1, v_2, v_3이 일차독립이면 $v_1+v_2+v_3$, v_2+v_3, v_3도 일차독립이다.

ㄴ. 집합 $\{av_1+bv_2+cv_3 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$는 $\mathbb{R}^5$의 부분공간이다.

ㄷ. 5차 정사각행렬 A에 대하여 두 방정식 $Ax=v_1$, $Ax=v_2$가 모두 해를 가지면 방정식 $Ax=2v_1+v_2$도 해를 가진다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

12. 다음 벡터 중에서 실수체 $\mathbb{R}$ 위에서 일차종속인 것은? [1991]

① $e^t,\ e^{2t}$
② $(1,\ 1,\ 1),\ (0,\ 1,\ 2)$
③ $(-1,\ -1,\ 0),\ (0,\ 1,\ 2)$
④ $(-1,\ 2,\ -4),\ (2,\ -4,\ 8)$

- 정의/정리 -

- 풀이 -

13. 벡터공간 $Mat_2(\mathbb{R})$의 부분공간

$$W=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a-3b+2c+d=0\right\}$$

의 차원 $\dim(W)$는? [1993]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

14. U, V는 두 벡터 공간(vector space)이고,
$\dim(U)=7$, $\dim(V)=8$, $\dim(U+V)=10$
일 때, 벡터 공간 $U\cap V$의 차원(dimension)은?
[1994]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

15. 실수의 집합 $\mathbb{R}$ 위에서 정의된 벡터공간 $\mathbb{R}^4$의 두 벡터

$$a = (a_1, a_2, a_3, a_4),\ b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$$

에 대하여 내적 $a \cdot b$를

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4$$

로 정의하자. 두 벡터 $(1, 0, 1, -1)$과 $(1, 2, 2, 0)$이 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값은? [2009 모의평가]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

16. 3차원 유클리드 내적 공간 $\mathbb{R}^3$에서 두 벡터

$$v_1 = (1,\ 2,\ 2),\ v_2 = (1,\ -1,\ 2)$$

로 생성된 부분공간을 V라 하자.
V의 임의의 정규직교기저(orthonormal basis) $B = \{u_1,\ u_2\}$에 대하여 B에 의해 결정되는 네 실수 $a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22}$가 존재하여

$$v_1 = a_{11}u_1 + a_{12}u_2,\ v_2 = a_{21}u_1 + a_{22}u_2$$

일 때, $|a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}|$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.
(단, 두 벡터 $u = (x_1,\ y_1,\ z_1)$, $v = (x_2,\ y_2,\ z_2)$의 유클리드 내적은 $u \cdot v = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$이다.)
[2017]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

17. 실수 집합을 $\mathbb{R}$ 이라 하자.
선형변환(linear tansformation) $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 은 $\mathbb{R}^n$ 의 임의의 두 점 $x, y\,(x \neq y)$를 잇는 선분

$$\{(1-t)x+ty \mid 0 \le t \le 1\}$$

을 $\mathbb{R}^m$ 에 포함되는 선분(또는 점)으로 보내는 것을 보이시오. [2006]

\- 정의/정리 -

\- 풀이 -

18. 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간

$$P_2 = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

에 대하여 선형변환(linear transformation) $T: P_2 \to P_2$가 다음을 만족한다고 하자.

$$T(1+x) = 1 + x^2$$
$$T(x+x^2) = x - x^2$$
$$T(1+x^2) = 1 + x + x^2$$

이 때, $T(4 + 2x + 3x^2)$을 구하시오. [2008]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

19. 점 $(x,\, y)$를 점 $(ry,\, rx)$로 옮기는 일차변환 f와 점 $(x,\, y)$를 점

$$(x\sin\theta + y\cos\theta,\, x\cos\theta - y\sin\theta)$$

로 옮기는 일차변환 g에 의한 합성변환 $g\circ f$를 나타내는 행렬의 모든 성분의 합은? [1994]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

20. $\mathbb{R}^2$의 두 기저(basis),

$$\alpha = \{v_1, v_2\},\ \beta = \{u_1, u_2\}$$

에 대하여

$$v_1 = (0, 1),\ v_2 = (1, 0),$$
$$u_1 = (1, -2),\ u_2 = (2, 3)$$

일 때, 다음 물음에 답하시오. [2001]

(1) 선형변환
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(v_1) = u_1,\ f(v_2) = u_2$를
나타내는 행렬 A를 구하시오.

(2) 이 선형변환에 의하여 세 점

$$P(-1, 0),\ Q(1, -1),\ R(2, 3)$$

이 옮겨지는 점을 각각 P', Q', R'이라 할 때, $\triangle P'Q'R'$의 넓이를 구하시오.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

21. 유한차원 내적공간 V의 부분공간 W $(W \neq V)$에 대하여 선형사상 P를 V에서 W로의 정사영 (orthogonal projection)이라 하자.
P에 관한 설명 중 옳지 않은 것은? [2009]

① $\mathrm{Im}(P) = W$이다.
② $\mathrm{Ker}(P) \cap W = \{0\}$이다.
③ 임의의 $w \in W$에 대하여 $P(w) = w$이다.
④ 임의의 $v \in V$에 대하여 $P(P(v)) = P(v)$이다.
⑤ P를 나타내는 행렬은 가역행렬이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

22. 직교좌표평면 위의 임의의 점 $P(x,\ y)$에서 직선 $y=mx\ (m\neq 0)$에 내린 수선의 발을 $P'(x',y')$이라고 할 때, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$를 만족하는 일차변환의 행렬 A는? [1993]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	선형대수 기출문제	단원	선형변환

23. 다음 중 선형사상인 것은? [1990]

① $F_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F_1(x,\ y,\ z) = (x+1,\ z-2)$

② $F_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F_2(x,\ y) = xy$

③ $F_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F_3(x,\ y) = (y,\ x^2)$

④ $F_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F_4(x,\ y,\ z) = (-x,\ -y,\ -z)$

- 정의/정리 -

- 풀이 -

24. 선형 사상 $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 이

$$T(x, y, z) = (x+2y+3z,\ 4x+5y+6z,\ 7x+8y+9z)$$

로 정의될 때, $T(\mathbb{R}^3)$의 차원(dimension)을 구하시오. [1996]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

25. 선형사상 $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$는 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$에 의한 곱이다. 즉, $x \in \mathbb{R}^3$에 대하여 $Tx = Ax$이다. T의 핵(kernel)의 차원(dimension)과 T의 상(image)의 차원을 각각 구하시오. [2005]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

26. 실수체 $\mathbb{R}$ 위에서 정의된 벡터공간 $\mathbb{R}^3$에 관련된 <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2010]

<보기>

선형사상

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$T(x, y, z) = (x - y, 2y, x - 3z)$

에 대하여 T의 핵(kernel) $\ker(T)$의 차원은 1이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

27. 실수체 $\mathbb{R}$ 위에서 정의된 벡터공간

$$V=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}\right\}$$

와 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$에 대하여 선형사상 $L : V \to V$를

$$L(B) = AB - BA$$

로 정의하자. V의 부분공간(subspace)

$$\mathrm{im}(L) = \{L(B) \mid B \in V\}$$

의 차원은? [2012]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

- 정의/정리 -

- 풀이 -

28. 행렬 $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$에 대한 보기의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2010]

〈보기〉

함수 $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$를 임의의 $v \in \mathbb{R}^3$에 대하여 $T(v)=Av$로 정의할 때, T는 정칙선형사상이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

29. 2차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^2$의 단위벡터(unit vector) u에 대하여 선형사상 $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$을

$$T(\mathrm{x}) = \mathrm{x} - 2(\mathrm{x} \cdot \mathrm{u})\mathrm{u}$$

로 정의하자. 모든 벡터 x에 대하여 $\|T(\mathrm{x})\| = \|\mathrm{x}\|$임을 보이시오. 또한, $\mathrm{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$일 때, $\mathbb{R}^2$의 기저(basis) $B = \{(1, 0), (1, 1)\}$에 대한 T의 행렬 $[T]_B$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, 두 벡터 x, y에 대하여 $\mathrm{x} \cdot \mathrm{y}$는 x와 y의 점곱(유클리드 내적, dot product, Euclidean inner product)이고, $\|\mathrm{x}\|$은 x의 유클리드 노름(Euclidean norm)이다.) [2016]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

30. 3차원 유클리드 내적 공간 $\mathbb{R}^3$의 세 벡터

$$v_1 = (1,\ 0,\ 0),\ v_2 = (1,\ 1,\ 1),\ v_3 = (0,\ -1,\ 1)$$

에 대하여, 두 벡터 v_1, v_2로 생성된 부분공간을 W_{12}라 하고 두 벡터 v_1, v_3으로 생성된 부분공간을 W_{13}이라 하자.

$\mathbb{R}^3$의 벡터 u에 대하여 부분공간 W 위로의 u의 정사영(orthogonal projection)을 $\mathrm{proj}_W u$라 하고, 실수 k에 대하여 선형변환 $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$을

$$T_k(u) = \mathrm{proj}_{W_{12}} u + \mathrm{proj}_{W_{13}} u + ku$$

로 정의하자. T_k의 역변환(inverse transformation)이 존재하지 않도록 하는 모든 k의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 T_k의 랭크(계수, 계급수, 유효차수, rank)가 2인 k의 값을 구하시오.

(단, 두 벡터 $u_1 = (a_1, a_2, a_3)$, $u_2 = (b_1, b_2, b_3)$의 유클리드 내적은 $u_1 \cdot u_2 = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$이다.) [2019]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

31. V와 W가 n차원 실벡터 공간이라 하자.
선형 사상 $L: V \to W$에 대하여 $\ker L = \{0\}$이면 L은 동형사상 (isomorphism)임을 보이시오.
[2002]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

32. 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간 $\mathbb{R}^4$의 서로 다른 벡터 $v_1,\ v_2, v_3,\ v_4,\ v_5$로 생성되는 벡터공간

$$V = \langle v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5 \rangle$$

에 대하여 옳은 것만을 <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2012]

<보기>

ㄱ. 벡터공간 V와 $\mathbb{R}^n$이 동형(isomorphic)이 되는 자연수 n이 존재한다.

ㄴ. 집합 $\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5\}$가 V의 기저(basis)인 벡터 $v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5$가 존재한다.

ㄷ. $\dim V = 2$인 벡터 $v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5$가 존재한다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

33. 실벡터공간 $\mathbb{R}^3$ 에서의 벡터 a에 대하여 선형사상

$$T(p) = a \times p + (p \cdot a)a \quad (p \in \mathbb{R}^3)$$

가 정의되었다. 벡터 a의 크기가 $\sqrt{2}$일 때 T의 고유치를 구하고, T의 고유치는 그것뿐임을 보이시오. 단, $u \times v$와 $u \cdot v$는 각각 벡터 u, v의 외적(cross product)과 내적(inner product)을 나타낸다. [1997]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

34. 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간 $\mathbb{R}^3$에 대하여 선형사상 $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$을

$$T(x,\, y,\, z) = (x+y-2z,\, y,\, x-2z)$$

로 정의하자. T의 상(image) $\mathrm{im}(T)$와 T의 핵(kernel) $\ker(T)$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2013]

<보기>

ㄱ. $\mathrm{im}(T)$의 차원은 1이다.

ㄴ. 벡터 $(1,\, 0,\, 0)$의 $\ker(T)$ 위로의 직교정사영(orthogonal projection)은 $\frac{2}{5}(2,\, 0,\, 1)$이다.

ㄷ. 벡터 $(x,\, y,\, z)$의 $\ker(T)$ 위로의 직교정사영을 $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$로 나타낼 때, 행렬 A의 고유치(eigenvalue, characteristic value)를 모두 더한 값은 1이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

- 정의/정리 -

- 풀이 -

35. 다음 행렬의 고유치(eigen value)와 고유공간 (eigen-space)을 구하시오. [2004]

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- 정의/정리 -

- 풀이 -

36. 3×3행렬 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$에 대하여, A^{10}의 고윳값(eigen values)과 고유벡터(eigenvector)를 모두 구하시오. [2000]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

37. 행렬 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$에 대한 보기의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2010]

<보기>

(1) A의 고유다항식(characteristic polynomial)은 $x^3-6x^2-9x+54$이다.

(2) A^2의 모든 고윳값(eigenvalue, characteristic value)들의 합은 36이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

38. 두 행렬 A, B가 유사(similar)행렬이고, A의 고유치(eigen value)가 $1, 2, 3$이면 행렬 B의 고유치는? [1994]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

39. 각 성분이 실수인 4×4 행렬 A의 고윳값 (eigenvalue)이 1, -1, 2, 4일 때, <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2009]

<보기>

ㄱ. A의 행렬식(determinant)은 -8이다.
ㄴ. A의 자취(trace)는 6이다.
ㄷ. A는 대칭행렬(symmetric matrix)이다.
ㄹ. A의 계수(rank)는 4이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

40. $P^{-1}AP$가 대각행렬이 되도록 적당한 정칙행렬 P를 사용하여, 행렬 $A=\begin{pmatrix}-5 & 9 \\ -6 & 10\end{pmatrix}$을 대각화하시오. [1999]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

41. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 다음 중 $P^{-1}AP$가 대각 행렬이 되도록 하는 행렬 P를 구하시오. [2009 모의평가]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

42. 행렬 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$가 대각화가능함을 보이고, $P^{-1}AP$가 대각행렬이 되는 행렬 P를 하나 구하시오. [2007]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

43. 행렬 $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\0 & 3 & 1\\0 & -2 & 0\end{bmatrix}$에 대하여 $A=PDP^{-1}$을 만족하는 행렬 $D=\begin{bmatrix}d_1 & 0 & 0\\0 & d_2 & 0\\0 & 0 & d_3\end{bmatrix}$와 가역행렬 P를 풀이 과정과 함께 쓰시오.
또한 행렬 A^n의 2행 3열의 성분을 구하시오.
(단, $d_1 \le d_2 \le d_3$이고 n은 자연수이다.) [2021]

\- 정의/정리 -

\- 풀이 -

44. 다음은 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 정사각행렬(square matrix)에 대한 설명이다. <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2011]

<보기>

ㄱ. 정칙행렬은 대각화가능(diagonalizable)하다.

ㄴ. 행렬 A의 전치행렬이 대각화가능하면 A는 대각화가능하다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

45. 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간 $\mathbb{R}^3$에 대하여 선형변환 $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$을
$L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2 + x_3,\ x_2 - x_3,\ -x_2 + x_3)$
으로 정의하고, $\mathbb{R}^3$의 순서 기저(ordered basis) α를
$$\alpha = \{(1,1,1), (0,1,1), (1,0,1)\}$$
이라 하자. 순서 기저 α에 대한 L의 행렬 $[L]_\alpha$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 $[L]_\alpha$가 대각화가능인지 판별하고 그 이유를 쓰시오. [2023]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

46. 좌표공간 $\mathbb{R}^3$에서 원점과 점 $(1,\,2,\,3)$을 지나는 직선을 회전축으로 하여 $180°$ 회전 이동하는 변환을 T라 하자. 벡터 $(x,\,y,\,z)$에 대하여

$$T(x,\,y,\,z) = A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

가 되는 행렬 A의 특성다항식(고유다항식, characteristic polynomial)을 구하시오. [2015]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

47. 다음은 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 정사각행렬(square matrix)에 대한 설명이다. <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2011]

<보기>

선형사상

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$
$$T(x,\ y,\ z) = (x,\ x+y,\ y+z)$$

의 $\mathbb{R}^3$의 표준기저(standard basis)에 대한 행렬은 대각화가능하다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

48. 3차 정사각행렬 $A=(a_{ij})$가

$$A\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\4\\8\end{bmatrix},\quad A\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\-2\end{bmatrix},\quad A\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\-2\\0\end{bmatrix}$$

을 만족할 때, A의 고윳값(eigenvalue)을 모두 쓰시오. 또한, $a_{11}+a_{12}+a_{13}$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [2022]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

49. 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간 $\mathbb{R}^3$의 기저(basis) $\{v_1, v_2, v_3\}$에 대하여 세 벡터

$$v_1+v_2,\ v_1+v_3,\ v_2+v_3$$

이 일차독립임을 보이시오.

또 모든 성분이 실수인 3×3 행렬 A가

$$(A-I)(v_1+v_2)=0,$$
$$(A-2I)(v_1+v_3)=0,$$
$$(A-3I)(v_2+v_3)=0$$

을 만족시킬 때, A의 행렬식(determinant) $\det(A)$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, I는 3×3 단위행렬이다.) [2018]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

50. 모든 성분이 실수인 3×3 행렬 A와 행렬 $B=A^2-A+5I$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 행렬 $A-3I$는 역행렬을 갖지 않는다.
> (나) 행렬 A의 특성방정식(고유방정식, characteristic equation)은 허근 α를 가지고 $|\alpha|=\sqrt{2}$이다.
> (다) 행렬 B의 최소다항식(minimal polynomial)의 차수는 B의 특성다항식(고유다항식, characteristic polynomial)의 차수보다 낮다.

행렬 A의 모든 고윳값(eigenvalue)과 대각합(trace) 및 행렬식(determinant)을 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, I는 3×3 단위행렬이다.) [2024]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

51. 행렬 $A=\begin{bmatrix}5 & 3 & -3\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}$의 고윳값을 모두 구하시오. 또한 선형변환 $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$을 $T(\mathrm{x})=A\mathrm{x}$라 할 때, $\mathbb{R}^3$의 기저 B에 대한 T의 행렬표현 $[T]_B$이 대각행렬이 되도록 하는 기저 B를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [2020]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

52. 모든 성분이 실수인 3×3 대칭행렬(symmetric matrix) A가 다음 <조건>을 만족시킨다.

<조건>

(가) 행렬 A의 행렬식(determinant)은 32이다.

(나) 행렬 $A^{-1}-\frac{1}{2}I$의 영공간(null space)은 두 벡터 $(1,\ -2,\ 1)$, $(1,\ 2,\ -3)$으로 생성된다.

대각행렬(diagonal matrix) $D=(d_{ij})$와 직교행렬(orthogonal matrix) P가 $D=P^TAP$를 만족시킬 때, D와 P를 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, A^{-1}은 A의 역행렬, I는 3×3 단위행렬, P^T는 P의 전치행렬(transpose matrix)이고 $d_{11}\le d_{22}\le d_{33}$이다.) [2025]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

53. 좌표평면 $\mathbb{R}^2$ 위에 곡선

$C=\{(x,\, y)\in\mathbb{R}^2 \mid 14ax^2+2a^2xy+14ay^2+x+y-1=0\}$

이 주어져 있다. 곡선 C를 원점을 중심으로 시계 방향으로 45° 만큼 회전이동 했을 때, 초점이 x축에 있는 쌍곡선이 되는 자연수 a중에서 가장 작은 수를 구하시오. [2014]

- 정의/정리 -

- 풀이 -