과목	현대대수 기출문제	단원	군의 기본 정리

1. 집합 $\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$의 임의의 원소 A, B에 대하여 연산 $\triangle$를

$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

로 정의할 때, $\triangle$에 대한 $\{1\}$의 역원을 구하시오. [1993]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	현대대수 기출문제	단원	군의 기본 정리

2. 다음 명제의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [1994]

"모든 군에서 교환법칙이 성립한다."

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	현대대수 기출문제	단원	군의 기본 정리

3. 군 G의 임의의 원소 g에 대하여 $g^{-1}=g$이면, G는 가환군임을 보이시오. [1999]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

4. 다음 명제의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2011]

"$G = \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_7$의 원소 $(3, 1)$의 위수(order)는 28이다."

- 정의/정리 -

- 풀이 -

5. 대칭군(symmetric group) S_5와 덧셈 순환군 (additive cyclic group) $\mathbb{Z}_{12}$의 직접곱(직적, direct product) $S_5 \times \mathbb{Z}_{12}$에 대하여, S_5의 원소 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$의 위수(order)와 $S_5 \times \mathbb{Z}_{12}$의 원소 $(\sigma, 9)$의 위수를 각각 구하시오. [2020]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

6. 군 G가 유한군(finite group)이고 H가 G의 부분군일 때, 다음 명제의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2010]

(1) G와 H의 부분군의 개수가 같으면 $G=H$이다.

(2) $H^{-1}=\{a^{-1} \mid a \in H\}$는 G의 부분군이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

7. 군 G는 직접곱(직적, direct product) $\mathbb{Z}_{13}^{*} \times \mathbb{C}^{*}$ 이다. 위수(order)가 18인 G의 원소의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰고, 덧셈군 $\mathbb{Z}_{18}$과 군동형(group isomorphic)이 되는 G의 부분군의 개수를 구하시오. (단, $\mathbb{Z}_{13}^{*}$과 $\mathbb{C}^{*}$은 각각 유한체 $\mathbb{Z}_{13}$과 복소수체 $\mathbb{C}$의 영이 아닌 원소들의 곱셈군이다.) [2021]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	현대대수 기출문제	단원	순환군

8\. 다음 명제의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2009 모의평가]

"위수가 소수 p인 군 G는 $p-1$개의 생성원 (generator)을 갖는다."

\- 정의/정리 -

\- 풀이 -

과목	현대대수 기출문제	단원	순환군

9. 다음 명제의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오.

(1) 5는 군(group) $\mathbb{Z}_{12}$의 생성원(generator)이다. [1994]

(2) 위수(order)가 360인 순환군의 생성원(generator)은 모두 96개 이다. [2012]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

10. 군(group) $(\overline{\mathbb{Z}_{20}},\ +)$는 $\overline{1}$를 생성원(generater)으로 갖는 순환군(cyclic group)이다.
$(\overline{\mathbb{Z}_{20}},\ +)$의 부분군의 개수를 구하시오.
(단, 동형(isomorphic)인 것은 같은 것으로 본다.) [1996]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	현대대수 기출문제	단원	순환군

11. 환(ring) $\mathbb{Z}_{11}$에서 모든 단원(unit, unit element)들의 집합 $\mathbb{Z}_{11}^{*}$는 순환군(cyclic group)이다. $\mathbb{Z}_{11}^{*}$의 생성원(generator)을 모두 쓰시오. [2022]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	현대대수 기출문제	단원	순환군

12. 위수(order)가 $2014=2\times19\times53$인 순환군(cyclic group) G에 대하여 G의 부분군의 개수를 m, G에서 위수가 38인 원소의 개수를 n이라 하자. $m+n$의 값을 구하시오. [2014]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

13. 다음 명제의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오.

(1) a를 항등원으로 갖는 군 $G=\{a, b, c, d\}$에 대하여 $b^2=c$이면 G는 순환군이 아니다. [2009 모의평가]

(2) 군 G가 유한군(finite group)이고 H와 K가 G의 부분군일 때, G가 순환군(cyclic group)이면 H와 K는 모두 아벨군이다. [2010]

(3) 덧셈군 $G=\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_7$는 순환군(cyclic group)이다. [2011]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

14. 다음 명제의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2009 모의평가]

"유한군 G가 자명하지 않은 진부분군(nontrivial proper subgroup)을 갖지 않으면 G는 가환군이다."

\- 정의/정리 -

\- 풀이 -

과목	현대대수 기출문제	단원	순환군

15. 다음 명제의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2009]

"부분군의 개수가 유한인 군은 유한군이다."

- 정의/정리 -

- 풀이 -

16. 다음 명제의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오.

(1) m과 n이 서로소이면 군 $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$과 군 $\mathbb{Z}_{mn}$은 동형이다. $(m, n \in \mathbb{Z}^+)$ [1994]

(2) 무한순환군(infinite cyclic group) G는 덧셈군 $\mathbb{Z}$와 서로 동형(isomorphic)이다. [2012]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

17. 정이면체군

$$D_3 = \langle a,\, b \mid a^2 = b^3 = 1,\ a^{-1}ba = b^{-1} \rangle$$

과 대칭군 $S_3 = \langle (1\,2),\, (1\,2\,3) \rangle$이 동형(isomorphic)임을 보이시오. [2007]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

18. 무한 순환군(infinite cyclic group) G에 대하여

$$\sigma : G \to G$$

를 아래와 같이 정의할 때, 다음 물음에 답하시오. [2004]

$\sigma(g) = g^{-1}$ (단, g^{-1}는 g의 역원)

(1) σ가 동형사상(isomorphism)임을 보이시오.

(2) G에서 G로의 동형사상은 항등사상(identity map)과 σ뿐임을 보이시오.

\- 정의/정리 -

\- 풀이 -

19. 집합 $G=\{i,\ a,\ b,\ c\}$가 곱셈에 관하여 군(group)을 이룰 때, 다음 설명 중 옳지 않은 것은? [1992]

① $a^2+b^2+c^2=1$
② G는 곱셈에 관하여 아벨군을 이룬다.
③ G의 적당한 부분집합 H에 대하여 H가 덧셈군을 이룬다.
④ G의 적당한 진부분집합 H에 대하여 H가 곱셈군을 이룬다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

20. 유한군에 대한 다음 명제의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2009 모의평가]

“치환군 S_3는 위수(order)가 2인 세 개의 부분군을 갖는다.”

- 정의/정리 -

- 풀이 -

21. 다음 명제의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오.

(1) 위수가 6인 순환하지 않는 모든 유한군은 비가환군이다. [2009 모의평가]

(2) 위수가 8인 군은 아벨군(가환군)이다. [2009]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

22. 다음 명제의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오.

(1) 군 G가 유한군(finite group)이고 H와 K가 G의 부분군일 때, G가 아벨군(가환군)이면 HK는 G의 정규부분군(normal subgroup)이다. [2010]

(2) $G=\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_7$의 모든 부분군(subgroup)은 정규부분군(normal subgroup)이다. [2011]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

23. 복소수 집합을 $\mathbb{C}$ 라 하고, 2차 정사각행렬의 일반선형군을 $GL(2,\ \mathbb{C})$라 하고 하자. 행렬의 사원수군 (quaternion group) Q는 $GL(2,\ \mathbb{C})$의 부분집합

$$\{I,\ A,\ A^2,\ A^3,\ B,\ BA,\ BA^2,\ BA^3 = AB\}$$

으로, 위수 8인 부분군이다. 이때, Q의 모든 부분군이 정규부분군임을 보이시오. [2006]

(단,

$GL(2,\ \mathbb{C}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : ad - bc \neq 0,\ a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{C} \right\}$,

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$이다.)

- 정의/정리 -

- 풀이 -

24. 곱셈군 G와 G의 정규부분군(normal subgroup) N이 주어져 있다. 집합 $G/N=\{gN \mid g\in G\}$에 연산

$$(g_1N)(g_2N)=g_1g_2N$$

이 주어져 있을 때, 이 연산은 잘 정의된 연산(well-defined operation)이고, 군을 이루고 있음을 증명하시오. [2000]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

25. 덧셈군 $G=\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_6$에서 $(5,5)\in G$로 생성된 부분군을 H라 하자. 잉여군(quotient group, factor group) G/H에서 원소 $(3,3)+H$의 위수(order)를 구하시오. [2015]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

26. 잉여군(quotient group)에 관련된 <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2010]

<보기>

(1) 군 $G=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$의 잉여군의 집합
$X=\{G/N \mid N$은 G의 정규부분군$\}$
에 속하며 서로 동형이 아닌 잉여군은 모두 4개다.

(2) 정수의 집합에서 정의된 덧셈군 $\mathbb{Z}$의 부분군 $6\mathbb{Z}$에 의한 잉여군 $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$는 모두 3개의 부분군을 갖는다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

27. 순환군(cyclic group) G의 한 부분군(subgroup) H에 대하여 G에서의 H의 지수(index) $|G:H|$는 520이다. 잉여군(상군, factor group, quotient group) G/H의 생성원(generator)의 개수를 구하시오. 또한, G/H의 한 생성원 aH와 G의 한 부분군 K에 대하여 $K/H=\langle (aH)^{35}\rangle$일 때, $G/H=(K/H)(L/H)$를 만족시키는 G의 부분군 L의 개수를 구하시오. [2024]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

28. <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2013]

<보기>

군 G의 잉여군(quotient group, factor group) $G/Z(G)$가 순환군(cyclic group)이면 G는 아벨군(가환군)이다.
(단, $Z(G)$는 G의 중심(center)이다.)

- 정의/정리 -

- 풀이 -

29. 다음 명제의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2013]

"함수 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$을 $f(k)=([k]_2,\ [k]_3)$으로 정의 할 때, $\ker(f)=6\mathbb{Z}$ 이다."

- 정의/정리 -

- 풀이 -

30. φ가 군준동형사상일 때, $\varphi : H \to G$의 kernel이 H의 정규부분군임을 보이시오. [1996]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

31. 체 $\mathbb{Z}_3$위의 행렬에 대하여 연산이 행렬의 곱셈인 군

$$G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a,\, b,\, c \in \mathbb{Z}_3,\, ac \neq 0\right\}$$

이 있다. 군 G에서 곱셈군 $\mathbb{Z}_3^* = \mathbb{Z}_3 - \{0\}$으로의 군 준동형 사상(group homomorphism)

$$\phi : G \to \mathbb{Z}_3^*,\ \phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = ac$$

의 핵(kernel) $\ker(\phi)$와 동형인 군을 구하시오. [2012]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

32. 군 준동형사상(group homomorphism) $f:\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_6\to\mathbb{Z}_{12}$를 $f(x,\ y)=9x$로 정의하자. f의 핵(kernel)을 K라 할 때, 잉여군(상군, factor group, quotient group) $(\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_6)/K$의 위수(order)를 구하시오.
(단, 양의 정수 n에 대하여 $\mathbb{Z}_n$은 위수가 n인 덧셈 순환군(additive cyclic group)이다.) [2016]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

33. 덧셈군 $\mathbb{Z}_{20}$, $\mathbb{Z}_{26}$, $\mathbb{Z}_{200}$에 대하여 군 준동형사상 (group homomorphism) $\phi : \mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{26} \to \mathbb{Z}_{200}$의 상(치역, image) $\mathrm{Im}(\phi)$가 6개의 부분군을 가질 때, $\mathrm{Im}(\phi)$의 위수(order)를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 ϕ의 핵(kernel) $\mathrm{Ker}(\phi)$의 위수를 구하시오.
(단, $\mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{26}$은 $\mathbb{Z}_{20}$과 $\mathbb{Z}_{26}$의 직접곱(직적, direct product)이다.) [2026]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

34. 치환 $\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 4&2&5&1&7&6&8&3 \end{pmatrix}$의 위수를 구하시오. [1991]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	현대대수 기출문제	단원	유한 가환군

35. 위수(order)가 각각 10과 n인 두 순환군(cyclic group) $\mathbb{Z}_{10}$과 $\mathbb{Z}_n$의 직접곱(직적, direct product) $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_n$이 순환군이 되도록 하는 10 이상이고 100 이하인 자연수 n의 개수를 구하시오. [2018]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

36. 다음 명제의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오.

(1) 위수가 27인 아벨군 중에서 동형이 아닌 것의 종류는 3가지이다. [2009]

(2) 위수(order)가 400인 아벨군 중에서 서로 동형이 아닌 것의 종류는 8가지이다. [2013]

(3) 두 덧셈군 $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_{15}$와 $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{36}$은 서로 동형이다. [2012]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

37. G는 위수(order)가 150인 군(group)이다. 위수가 6인 G의 부분군(subgroup)이 유일하게 존재할 때, 위수가 30인 G의 부분군이 존재함을 보이시오. [2019]

- 풀이 -

- 정의/정리 -

38. 다음 명제의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오.

(1) 군 G의 위수가 40이면, 위수가 5인 정규부분군 H와 위수가 8인 잉여군 G/H가 존재한다. [2010]

(2) G의 위수(order)가 12이면 G는 단순군 (simple group)이다. [2010]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

39. 위수(order)가 200인 군 G가 부분군 H와 정규 부분군(normal subgroup) N을 가진다.
H와 N의 위수가 각각 8과 40일 때, H가 N의 부분군임을 보이시오. [2017]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

40. 유한인 정역(finite integral domain) D는 체(field)임을 증명하시오. [1998]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

41. 다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 이유를 설명하시오. [2013]

〈보기〉

(1) 환 $\mathbb{Z}_n$의 0이 아닌 원소 a가 영인자(zero divisor)이면 a는 단원(unit)이 아니다.

(2) 정역(integral domain) R의 표수(characteristic) n이 양수이면 n은 소수이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

42. 다음 명제의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [1994]

"실수체 $\mathbb{R}$ 과 복소수체 $\mathbb{C}$ 는 동형이다."

- 정의/정리 -

- 풀이 -

43. $\mathbb{Z}$는 정수환이고 $\mathbb{Q}$는 유리수환이다. 환준동형사상(ring homomorphism) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$가 일대일(injective) 사상일 때, 참, 거짓을 판정하고 이유를 설명하시오. [2011]

〈보기〉

ㄱ. 임의의 정수 n에 대하여 $g(n) = n$이다.

ㄴ. $\mathbb{Z}$의 임의의 아이디얼(ideal) I에 대하여 $g(I)$는 $\mathbb{Q}$의 아이디얼이다.

ㄷ. $\mathbb{Q}$의 임의의 아이디얼 J에 대하여 $g(I) = J$가 성립하는 $\mathbb{Z}$의 아이디얼 I가 존재한다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

44. 환(Ring) R의 원소 a가 적당한 양의 정수 m에 대하여 $a^m = 0$으로 될 때, a를 R의 멱영원 (Nilpotent element)이라고 한다.
가환환(Commutative ring) R의 멱영원 전체의 집합을 J라고 할 때, J는 R의 이데알(Ideal)임을 보이시오. [1997]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	현대대수 기출문제	단원	아이디얼

45. 다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 이유를 설명하시오. [2010]

<보기>

$\mathbb{Z}$의 주아이디얼(principal ideal)은 무한히 많이 존재한다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

46. 환 준동형사상(ring homomorphism)

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$$

는 다음과 같이 정의된다.

$$f(x) = (x+3\mathbb{Z},\ x+5\mathbb{Z},\ x+7\mathbb{Z})$$

[2005]

(1) f의 핵(kernel)을 구하시오.

(2) $f(x) = (2+3\mathbb{Z},\ 3+5\mathbb{Z},\ 4+7\mathbb{Z})$를 만족시키는 정수 x를 모두 구하시오.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

47. 정수환 $\mathbb{Z}$에서 가환환 $\mathbb{Z}_6$으로 가는 환 준동형사상 (ring homomorphism) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_6$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(n) \equiv 4n \pmod{6}$$

위의 f를 이용하여, 두 개의 환 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$와 $2\mathbb{Z}_6$이 동형(isomorphic)임을 보이시오.
(단, $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$는 6을 법(modulo)으로 하는 덧셈과 곱셈 연산을 가지는 가환환이다.) [2006]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

48. 정수 b를 자연수 m으로 나눈 나머지를 b_m이라 고 할 때, 자연수 n에 대하여 환 준동형사상(ring homomorphism)

$$\psi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{2^n} \times \mathbb{Z}_5$$

를

$$\psi(a,\ b) = \left(a,\ a,\ b_{2^n},\ b_5\right)$$

로 정의하자. ψ의 상(치역, image) $\mathrm{Im}(\psi)$의 단원(unit, unit element)의 개수가 2^7인 자연수 n을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $\mathbb{Z}$는 정수환이고 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$와 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{2^n} \times \mathbb{Z}_5$는 환의 직접곱(직적, 직합, direct product, external direct sum)이다.) [2022]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

49. 환 R을 두 가환환(commutative ring) $\mathbb{Z}_{10}$과 $\mathbb{Z}_{12}$의 직접곱(직적, direct product) $\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_{12}$라고 하자. 환 R의 아이디얼(이데알, ideal) 중에서 원소 $(3,8)$을 포함하는 가장 작은 것을 $\mathbb{Z}_{10}$의 아이디얼 I와 $\mathbb{Z}_{12}$의 아이디얼 J의 직접곱 $I\times J$의 형태로 풀이 과정과 함께 쓰시오.
또한 다음 <조건>을 만족시키는 환 S 중에서 서로 동형(isomorphic)이 아닌 것을 풀이 과정과 함께 모두 쓰시오.[2025]

<조건>

환 R의 원소 $(3,8)$을 영(zero)으로 대응시키는 전사(onto, surjective)인 환 준동형사상(ring homomorphism) $\phi : R\to S$가 존재한다.

※ 다음 정리는 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

단위원(곱셈항등원, identity, unity)을 가지는 두 가환환 R_1과 R_2에 대하여 직접곱 $R_1\times R_2$의 아이디얼은 $I_1\times I_2$의 형태로 나타낼 수 있다. (단, I_1은 R_1의 아이디얼이고 I_2는 R_2의 아이디얼이다.)

- 정의/정리 -

- 풀이 -

50. $\mathbb{Z}$ 에서 $17\mathbb{Z}$ 의 극대아이디얼(maximal ideal)여부를 판정하시오. [2010]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

51. 다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 이유를 설명하시오.

〈보기〉

(1) $\mathbb{Z}$의 부분환은 무한히 많이 존재한다. [2010]

(2) $\mathbb{Z}$는 $\mathbb{Z}[x]$의 부분환이다. [2009]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

52. 다음 환의 정역 여부를 판정하시오.

(1) $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$위에서의 다항식환 $\mathbb{Z}_4[x]$ [1993]

(2) $\mathbb{Z}_{24}[x]$ [2011]

(3) $(\mathbb{Z}, +, \times)$, $\mathbb{Z} = \{z \mid z$는 정수$\}$ [1996]

(4) $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \times)$,
$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ [1996]

(5) $(\overline{\mathbb{Z}_{10}}, +, \times)$, $\overline{\mathbb{Z}_{10}} = \{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{9}\}$ [1996]

(6) $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$,
$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ [1996]

- 정의/정리 -

과목	현대대수 기출문제	단원	$F[x]$에서의 연산

- 풀이 -

53. 정수 집합 $\mathbb{Z}$ 위의 다항식환(polynomial ring)을 $\mathbb{Z}[x]$라 하자. $\mathbb{Z}[x]$의 두 원소 a와 bx에 의해 생성되는 $\mathbb{Z}[x]$의 이데알(ideal) $I=(a,\ bx)$에 대하여 다음을 증명하시오. (단, $a,\ b \in \mathbb{Z}$) [2008]

> I가 단항이데알(principal ideal)이면,
> $a=0$ 또는 a는 b의 약수이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

54. 다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 이유를 설명하시오. [1993]

〈보기〉

(1) R이 가환환이면 R위의 다항식환 $R[x]$도 가환환이다.

(2) R이 정역이면 R위의 다항식환 $R[x]$도 정역이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

55. (1) $\mathbb{Z}[i]$의 단원(unit)을 모두 구하시오. [2012]

(2) $\mathbb{Z}[x]$의 단원(unit)을 모두 구하시오. [2009]

(3) 다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 이유를 설명하시오. [2011]

〈보기〉

$\mathbb{Z}_{24}[x]$는 8개 이상의 단원(unit)을 갖는다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

56. (1) 환(ring) $\mathbb{Z}_6$에서 $x^2-3x+2=0$의 해를 모두 구하시오. [1994]

(2) 다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 이유를 설명하시오. [2011]

〈보기〉

다항식 $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$은 $\mathbb{Z}_{24}$에서 오직 3개의 근을 갖는다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

57. 체 $\mathbb{Z}_2 = \{0,\ 1\}$위에서의 다항식환 $\mathbb{Z}_2[x]$에서 기약인 이차 다항식을 모두 구하시오. [1993]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	현대대수 기출문제	단원	근, 기약성

58. $\mathbb{Q}[x]$에서 다항식 $x^7+9x^4+3x^2-15x+12$의 기약(irreducible) 여부를 판정하시오. [2013]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

59. F가 체일 때, $F[x]$의 모든 이데알(ideal)은 주이데알임을 증명하시오. [1999]

- 풀이 -

- 정의/정리 -

60. 다음 두 조건을 만족시키는 유한체(finite field) $\mathbb{Z}_5$ 위의 다항식환(polynomial ring) $\mathbb{Z}_5[x]$의 아이디얼(ideal) I의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [2018]

(가) 잉여환(factor ring, quotient ring) $\mathbb{Z}_5[x]/I$의 위수(order)는 25이다.
(나) $\mathbb{Z}_5[x]/I$의 극대 아이디얼 (maximal ideal)의 개수는 2이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

61. $\mathbb{Z}_7[x]$는 유한체(finite field) $\mathbb{Z}_7$ 위의 다항식환(polynomial ring)이다. $\mathbb{Z}_7[x]$의 주 아이디얼(단항이데알, principal ideal) $I=\langle x^2-x\rangle$에 대하여 잉여환(상환, factor ring, quotient ring) $\mathbb{Z}_7[x]/I$의 단원(unit, unit element)의 개수를 구하시오. [2019]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

62. 실수체 $\mathbb{R}$의 원소 $\alpha=\sqrt{2-\sqrt{2}}$에 대하여 환준동형사상(ring homomorphism) $\varphi_\alpha : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{R}$를 $\varphi_\alpha(f(x))=f(\alpha)$로 정의하자. 사상 φ_α의 핵(kernel)을 K라 할 때, $K=\langle p(x)\rangle$를 만족하는 최고차항의 계수가 1인 기약다항식(irreducible polynomial) $p(x)$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 잉여환(상환, factor ring, quotient ring) $\mathbb{Q}[x]/K$의 원소 $(x-2)+K$의 곱셈에 대한 역원을 $g(x)+K$라 할 때, $\deg g(x)<\deg p(x)$인 다항식 $g(x)$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $\mathbb{Q}[x]$는 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위의 다항식환이고, $\deg h(x)$는 다항식 $h(x)$의 차수 이다.) [2020]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

63. 체(field) F 위의 다항식환 $F[x]$에서 $p(x) \in F[x]$가 기약다항식(irreducible polynomial)이면 $p(x)$로 생성된 이데알 $\langle p(x)\rangle$는 극대 이데알(maximal ideal)임을 증명하시오. [2003]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

64. 다항식 $f(x)=x^2+x+1 \in \mathbb{Z}_2[x]$는 기약 다항식이므로 $f(x)$로 생성되는 이데알 $\langle f(x) \rangle$는 ㉠이며,

$$\mathbb{Z}_2[x]/(x^2+x+1)$$

은 위수가 ㉡인 유한체이다. ㉠, ㉡에 모두 옳은 것은? [1995]

	㉠	㉡
①	극대이데알	2
②	극대이데알	4
③	소이데알	8
④	소이데알	16

- 정의/정리 -

- 풀이 -

65. 다항식환(polynomial ring) $\mathbb{Z}_n[x]$의 주 아이디얼(principal ideal) $I=\langle x^2+ax+1-a\rangle$에 대하여 잉여환(상환, factor ring, quotient ring) $\mathbb{Z}_n[x]/I$가 홀수인 표수(특성, characteristic)를 갖고 위수(order)가 40 이하인 정역(integral domain)이 되도록 하는 정수의 순서쌍 (n, a)를 풀이 과정과 함께 모두 쓰시오. (단, $0 \le a < n$이다.) [2024]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

66. 다음은 환과 그 환의 극대이데알(maximal ideal)을 순서쌍으로 나타낸 것이다. 잘못 짝지어진 것은? (단, $\langle a\rangle$는 a로 생성된 이데알을 나타낸다.) [2009 모의평가]

① $\left(\mathbb{Z}_5[x],\ \langle x^3+3x+2\rangle\right)$
② $\left(\mathbb{Z}_6,\ \langle 3\rangle\right)$
③ $\left(\mathbb{Q}[x],\ \langle x^5-4x+22\rangle\right)$
④ $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\ 2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$
⑤ $\left(\mathbb{Z}[x],\ \langle 3x^3+x^2+x-2\rangle\right)$

- 정의/정리 -

- 풀이 -

67. 체 F 위의 다항식환 $F[x]$에서 I를 영이 아닌 진이데알(nontrivial proper ideal)이라고 하자. 다음 명제 중 나머지네 개의 명제와 동치가 아닌 것은? [2009 모의평가]

① I의 영이 아닌 모든 원소는 기약다항식의 곱으로 표현할 수 있다.
② $I=\langle p(x)\rangle$인 기약다항식 $p(x)\in F[x]$가 존재한다.
③ $F[x]/I$의 영이 아닌 모든 원소는 곱셈에 대한 역원을 갖는다.
④ I를 포함하는 $F[x]$의 진이데알은 I뿐이다.
⑤ $g(x),\ h(x)\in F[x]$에 대하여 $g(x)h(x)\in I$이면 $g(x)\in I$ 이거나 $h(x)\in I$이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

68. 다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 이유를 설명하시오. [2011]

<보기>

주아이디얼(principal ideal) $I=\langle x^2+12\rangle$에 대하여 잉여환 (factor ring, quotient ring) $\mathbb{Z}_{24}[x]/I$는 체이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

69. 위수가 9인 체(field) F_9를 구성하고, F_9를 원소 나열법으로 나타내시오. [2007]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

70. 체(field) F위의 기약 다항식(irreducible polynomial) $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in F[x]$ (단, $a_n\neq 0$)에 대하여 $f(x)$의 한 개의 근(root)을 포함하는 F의 확대체(extension field)가 존재함을 보이시오. [2002]

\- 정의/정리 -

\- 풀이 -

71. 다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 이유를 설명하시오. [2010]

〈보기〉

$\mathbb{Z}$ 의 원소 a가 소원(prime element)이면, a는 기약원(irreducible element)이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

72. $\mathbb{Z}[i]$에서 주아이디얼(principal ideal) $\langle 2 \rangle$의 극대 아이디얼(maximal ideal) 여부를 판정하시오. [2012]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

73. (1) $\mathbb{Z}$와 $\mathbb{Z}$의 부분환 $3\mathbb{Z}$의 환동형 (ring isomorphic) 여부를 판정하시오. [2010]

(2) $\mathbb{Z}[x]$와 $\mathbb{Z}[i]$의 환동형 여부를 판정하시오. [2009]

(3) $\mathbb{Z}_{24}[x]$와 $\mathbb{Z}_4[x]\times\mathbb{Z}_6[x]$의 환동형 여부를 판정하시오. [2011]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

74. 가우스 정수환

$$\mathbb{Z}[i] = \{a+bi \mid a,\, b \in \mathbb{Z}\}$$

는 유클리드 노름이 $\nu(a+bi) = a^2+b^2$ 인 유클리드 정역이다. $\alpha = 1-3i$ 와 $\beta = 3-4i$ 를 포함하는 $\mathbb{Z}[i]$ 의 가장 작은 아이디얼(이데알)을 I라 하자. $\eta \neq 0$인 $\eta \in I$에 대하여 $\nu(\eta)$의 최솟값과 잉여환(상환) $\mathbb{Z}[i]/I$의 표수를 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $i = \sqrt{-1}$ 이다.) [2023]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

75. 다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 이유를 설명하시오. [2012]

〈보기〉

$\mathbb{Z}[i]$는 주아이디얼 정역(principal ideal domain)이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

76. 다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 이유를 설명하시오. [2009]

〈보기〉

$\mathbb{Z}$의 분수체(field of quotients)는 유리수체 $\mathbb{Q}$와 동형이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	현대대수 기출문제	단원	ED, PID, UFD, 분수체

77. 다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 이유를 설명하시오. [2009]

〈보기〉

$\mathbb{Z}[x]$는 유일인수분해 정역 (unique factorization domain)이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

78. 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위의 기약다항식 (irreducible polynomial) $f(x)=x^3-2x+2$에 대하여 $f(x)$의 한 근(root) θ를 포함하는 $\mathbb{Q}$의 확대체(extension filed)를 $\mathbb{Q}(\theta)$라 하자. 이 때, $\mathbb{Q}(\theta)$에서 $3+\theta$의 곱셈에 대한 역원을 구하시오. [2008]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

79. E는 체 F의 확대체이고, $F[x]$는 F 위의 다항식 환이다. $\alpha \in E$가 F 위에서 대수적(algebraic)일 때, 함수 $\phi_\alpha : F[x] \to E$는 $f(x) \in F[x]$에 대하여 $\phi_\alpha(f(x)) = f(\alpha)$로 정의된 환준동형사상이다. <보기>에서 항상 성립하는 것을 모두 고른 것은? [2009]

<보기>

ㄱ. $\mathrm{Ker}(\phi_\alpha) \neq \{0\}$

ㄴ. $F[x]/\mathrm{Ker}(\phi_\alpha)$와 E는 서로 환동형이다.

ㄷ. $\mathrm{Ker}(\phi_\alpha)$는 $F[x]$의 소 아이디얼(prime ideal)이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

\- 정의/정리 -

\- 풀이 -

80. 체 K는 체 F의 대수적 확대체 (algebraic extension field)로서

$[K:F]=10$ (즉, $[K:F]=\dim_F K=10$)

이다. F 위의 기약다항식(irreducible polynomial) $f(x)$의 차수(degree)가 3일 때, $f(x)$의 어떤 근도 K에 포함 되지 않음을 보이시오. [2005]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

81. 유리수 체 $\mathbb{Q}$ 위에서 대수적인 원소 α와 단순 확대체(simple extension field) $K=\mathbb{Q}(\alpha)$가 있다. F가 K의 부분체이고

$$\mathrm{irr}(\alpha, F)=x^r+a_1x^{r-1}+a_2x^{r-2}+\cdots+a_r$$
$$(a_1, a_2, \cdots, a_r \in F)$$

일 때, $F=\mathbb{Q}(a_1, a_2, \cdots, a_r)$임을 보이시오.

또한, $\alpha=\sqrt{2}+i$이고 $F=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$일 때, $\mathrm{irr}(\alpha, F)$를 구하시오.

(단, $i=\sqrt{-1}$이고, $\mathrm{irr}(\alpha, F)$는 F 위에서 α의 기약다항식(최소다항식, irreducible polynomial, minimal polynomial)이다.) [2016]

\- 정의/정리 -

\- 풀이 -

82. 실수 $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 일 때 환

$$\mathbb{Z}[\alpha] = \{a + b\alpha \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

와 행렬환 $M_2(\mathbb{Z}_3)$에 대하여 환준동형사상(ring homomorphism) $\varphi : \mathbb{Z}[\alpha] \to M_2(\mathbb{Z}_3)$을 다음과 같이 정의하자.

$$\varphi(a + b\alpha) = \begin{pmatrix} [a+b]_3 & [b]_3 \\ [b]_3 & [a]_3 \end{pmatrix}$$

(단, $[k]_3$은 $\mathbb{Z}$에서 법 3에 대한 k의 합동류이다.)

φ의 핵(kernel) $\ker(\varphi)$와 φ의 상(image) $\mathrm{im}(\varphi)$에 대하여 옳은 것은? (단, $\langle a \rangle$는 a로 생성되는 주아이디얼(principal ideal)이고, F_n은 위수가 n인 유한체이다.) [2013]

① $\ker(\varphi) = \langle 3 \rangle$이고, $\mathrm{im}(\varphi)$는 F_9와 환동형이다.
② $\ker(\varphi) = \langle 3 \rangle$이고, $\mathrm{im}(\varphi)$는 $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$과 환동형이다.
③ $\ker(\varphi) = \langle 9 \rangle$이고, $\mathrm{im}(\varphi)$는 F_{27}과 환동형이다.
④ $\ker(\varphi) = \langle 9 \rangle$이고, $\mathrm{im}(\varphi)$는 $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$과 환동형이다.
⑤ $\ker(\varphi) = \langle 9 \rangle$이고, $\mathrm{im}(\varphi)$는 $\mathbb{Z}_{27}$과 환동형이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	현대대수 기출문제	단원	확대체

83. E가 체 F위에서 유한확대체(finite extension field)이면, E는 F위에서 대수적 확대체(algebraic extension)임을 증명하시오. [1999]

- 풀이 -

- 정의/정리 -

84. 체 $\mathbb{Q}$는 유리수체이고 $\mathbb{Q}[x]$는 다항식환이다. 체 E를 다항식

$$f(x)=(x^2-2)(x^2-11)\in\mathbb{Q}[x]$$

의 분해체(splitting field)라 하자. 체 E의 부분체와 관련된 <보기>의 명제 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [2010]

<보기>

ㄱ. 원소 $\alpha\in E$를 첨가한 단순확대체(simple extension field) $\mathbb{Q}(\alpha)$에 속하는 모든 원소는 $\mathbb{Q}$ 위에서 대수적(algebraic)이다.

ㄴ. 체 $\mathbb{Q}(\beta^2)$ 위에서 체 $\mathbb{Q}(\beta)$의 차수(degree) $[\mathbb{Q}(\beta):\mathbb{Q}(\beta^2)]$가 1보다 큰 홀수가 되는 원소 $\beta\in E$가 존재한다.

ㄷ. 차수 $[E:\mathbb{Q}(\gamma)]$가 1인 원소 $\gamma\in E$가 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

- 정의/정리 -

- 풀이 -

85. 환 $\mathbb{Z}_{60}$의 잉여환(factor ring, quotient ring)으로 나타내어지는 모든 체(field)의 직접곱(직적, direct product)을 R라 하자. 환 R의 표수(characteristic)를 구하시오. [2017]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

86. 표수(characteristic)가 a인 체 F에 대하여 군 G는 직접곱(직적, direct product) $\mathbb{Z}_4 \times F^*$이다. 군 G가 160 이하의 위수(order)를 갖는 순환군(cyclic group)이 되도록 하는 체 F 중에서 서로 동형(isomorphic)이 아닌 것의 개수를 b라고 하자. 이때, a와 b의 값을 순서대로 구하시오. (단, $\mathbb{Z}_4$는 덧셈 순환군이고, F^*는 체 F의 영(zero)이 아닌 모든 원소로 구성된 곱셈군이다.) [2025]

\- 정의/정리 -

\- 풀이 -

87. 다항식환 $\mathbb{Z}_2[x]$에서 기약인 다항식 x^3+x^2+1의 한 근 α를 포함한 단순확대체(simple extension field)를 E라고 하자.
확대체 E에서 다항식 x^3+x^2+1의 나머지 두 근을 β, γ라 할 때, 집합 $\{\alpha+\beta, \alpha+\gamma\}$와 같은 것은? [2009 모의평가]

① $\{0, 1+\alpha\}$
② $\{1+\alpha, \alpha^2\}$
③ $\{\alpha^2, \alpha+\alpha^2\}$
④ $\{1+\alpha^2, \alpha+\alpha^2\}$
⑤ $\{\alpha^2, 1+\alpha+\alpha^2\}$

- 정의/정리 -

- 풀이 -

88. 군, 환, 체, 벡터공간에 관한 다음 설명 중에서 옳은 것은? [1995]

〈보기〉

ㄱ. 위수가 4인 모든 군은 동형이다.
ㄴ. 위수가 4인 모든 환은 동형이다.
ㄷ. 위수가 4인 모든 체는 동형이다.
ㄹ. 군 G의 임의의 부분군 H에 의한 상군(quotient group) G/H를 항상 만들 수 있다.
ㅁ. 환 R의 임의의 부분환 S에 의한 상환(quotient ring) R/S를 항상 만들 수 있다.
ㅂ. 벡터공간 V의 임의의 부분공간 W에 의한 상공간(quotient space) V/W를 항상 만들 수 있다.

① ㄱ, ㄹ　　② ㄴ, ㅁ
③ ㄷ, ㅂ　　④ ㄱ, ㄴ, ㄷ

- 정의/정리 -

- 풀이 -

89. 체 $\mathbb{Z}_2$의 유한확대체(finite extension field) F가 $[F:\mathbb{Z}_2]=6$을 만족시키고, $\alpha\in F$에 대하여 함수

$$\varphi_\alpha : \mathbb{Z}_2[x]\to F,\ \varphi_\alpha(f(x))=f(\alpha)$$

는 대입준동형사상(evaluation homomorphism)이다. 옳지 않은 것은? [2012]

① 체 F는 위수(order)가 64인 유한체이다.
② φ_α의 핵 $\ker(\varphi_\alpha)$는 $\mathbb{Z}_2[x]$의 주아이디얼(principal ideal)이다.
③ α의 기약다항식 $\mathrm{irr}(\alpha,\ \mathbb{Z}_2)$는 $\mathbb{Z}_2[x]$에서 다항식 $x^{64}-x$를 나눈다.
④ 기약다항식 $\mathrm{irr}(\alpha,\ \mathbb{Z}_2)$의 차수(degree)가 4인 $\alpha\in F$가 존재한다.
⑤ φ_α의 상 $\mathrm{im}(\varphi_\alpha)$는 F의 부분체(subfield)이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

90. F는 체 $\mathbb{Z}_2$의 유한확대체(finite extension field)이다. $[F:\mathbb{Z}_2]=60$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2013]

<보기>

ㄱ. K가 F의 부분체(subfield)이면 $\mathbb{Z}_2 \subseteq K$이다.

ㄴ. F의 두 부분체 K_1과 K_2가
$$[F:K_1]=5,\ [F:K_2]=10$$
을 만족하면 $K_2 \subseteq K_1$이다.

ㄷ. F의 두 부분체 K_1과 K_2가
$$[F:K_1]=6,\ [F:K_2]=10$$
을 만족하면 $K_1 \cap K_2 = \mathbb{Z}_2$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

- 정의/정리 -

- 풀이 -

91. 체 K가 체 F 위의 확대체이고 $\mathrm{Aut(K)}$를 K에서 K로의 자기동형사상(automorphism) 전체의 집합이라 할 때, $\mathrm{Aut(K)}$의 부분군 $G(K/F)$를

$$G(K/F)=\{\sigma\in Aut(K)\,|\,\text{모든 } a\in F\text{에 대하여 } \sigma(a)=a\}$$

로 정의하자. 체 K가 체 $\mathbb{Z}_3=\{0,1,2\}$위의 차수(degree) 6인 유한확대체일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [2009]

<보기>

ㄱ. 체 K는 $\mathbb{Z}_3$위의 분해체(splitting field)이다.

ㄴ. 체 K는 $\mathbb{Z}_3$위의 분리확대체(separable extension filed)이다.

ㄷ. $\mathbb{Z}_3$와 K 사이에는 $G(K/E)$의 위수가 2가 되는 체 E가 3개 존재한다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

- 정의/정리 -

- 풀이 -

92. 다항식 x^6+3의 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서의 분해체 (splitting field)를 K라 하면 갈루아군 $G(K/\mathbb{Q})$의 위수(order)는 6임을 증명하시오. [2014]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	현대대수 기출문제	단원	Galois 이론

93. 실수 $\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}$ 을 근으로 가지는 다항식

$$f(x)=x^9+3x^6+165x^3+1$$

은 13을 법으로 하여

$$f_{13}(x)=x^9+3x^6+9x^3+1$$

과 합동이고, $f_{13}(x)$는 $\mathbb{Z}_{13}[x]$에서 기약다항식임이 알려져 있다. 이를 이용하여, $f(x)$가 $\mathbb{Q}[x]$에서 기약임을 보이시오.

그리고 $K=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{3})$라 할 때 차수(degree) $[K:\mathbb{Q}]$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰고, 다항식 $g(x)=(x^3-2)(x^3-3)\in\mathbb{Q}[x]$의 분해체(splitting field) E에 대하여 갈루아 군 $G(E/\mathbb{Q})$의 위수(order)를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [2015]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

94. 체 K는 유리수 체 $\mathbb{Q}$ 위에서 차수(degree)가 $[K:\mathbb{Q}]=270$인 갈루아 확대체(정규확대체, Galois extension field, normal extension field)이고, 갈루아 군(Galois group) $G(K/\mathbb{Q})$는 순환군(cyclic group)이다. $\sqrt{2}$가 K의 원소일 때, $\sqrt{2}$를 포함하는 K의 부분체의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [2016]

\- 정의/정리 -

\- 풀이 -

95. K는 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위의 갈루아 확대체(정규 확대체, Galois extension field, normal extension field)이고, 갈루아군(Galois group) $G(K/\mathbb{Q})$는 덧셈 순환군(additive cyclic group) $\mathbb{Z}_2$와 대칭군(symmetric group) S_3의 직접곱(직적, direct product) $\mathbb{Z}_2 \times S_3$과 동형이다.

$\mathbb{Q}$ 위의 차수(degree) $[E:\mathbb{Q}]=6$인 K의 부분체 E의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한, K의 부분체 F에 대하여, F가 $\mathbb{Q}$ 위의 갈루아 확대체이고 갈루아군 $G(F/\mathbb{Q})$가 S_3과 동형이 되도록 하는 체 F가 존재함을 보이시오. [2025]

\- 정의/정리 -

\- 풀이 -

96. 유리수 체 $\mathbb{Q}$ 위에서 대수적인 원소 α에 대하여 단순 확대체(simple extension field) $K=\mathbb{Q}(\alpha)$는 $\mathbb{Q}$ 위의 갈루아 확대체(정규 확대체, Galois extension field, normal extension field)이고 차수(degree)는 $[K:\mathbb{Q}]=100$이다.
갈루아 군(Galois group) $G(K/\mathbb{Q})$가 $\sigma(\alpha)=\alpha^{-1}$을 만족시키는 자기동형사상(automorphism) σ를 가질 때, K의 부분체 $F=\mathbb{Q}(\alpha+\alpha^{-1})$의 $\mathbb{Q}$ 위의 차수 $[F:\mathbb{Q}]$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [2017]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

97. 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위의 기약다항식 (irreducible polynomial) $f(x)$의 $\mathbb{Q}$ 위의 분해체 (splitting field) K에 대하여 갈루아 군(Galois group) $G(K/\mathbb{Q})$가 아벨군(abel group)이다.
이 때 $G(K/\mathbb{Q})$의 위수(order)가 $f(x)$의 차수 $\deg(f(x))$와 같음을 보이시오.
또 $\deg(f(x))=2018$ 일 때 K의 모든 부분체 (subfield)의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오.
(참고 : $2018=2\times1009$이고 1009는 소수이다.)
[2018]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

98. 체(field) K를 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서 $x^{23}-88$의 분해체(splitting field)라 하자. K의 $\mathbb{Q}$위에서의 차수(degree) $[K:\mathbb{Q}]$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한, $[K:E]-[E:\mathbb{Q}]$가 1010의 양의 약수이고 $\mathbb{Q}\le E\le K$를 만족시키는 체 E의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [2024]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

99. 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서 대수적인 두 실수 a, b에 대하여 단순 확대체(simple extension) $K = \mathbb{Q}(a+bi)$가 $\mathbb{Q}$ 위의 갈루아 확대체(정규 확대체, Galois extension field, normal extension field)이고 갈루아군(Galois group) $G(K/\mathbb{Q})$가 아벨군(abelian group)이라 하자.
$a^2+b^2 \in \mathbb{Q}$ 이고 $b \neq 0$일 때, $G(K/\mathbb{Q})$의 위수(order)는 짝수임을 보이시오.
또한 $G(K/\mathbb{Q})$의 위수를 $2m$이라 할 때, 자연수 m의 각각의 양의 약수 d에 대하여 $\mathbb{Q}[x]$에 속하고 모든 근이 실수이며 차수가 d인, $\mathbb{Q}$ 위의 기약다항식(irreducible polynomial)이 존재함을 보이시오.
(단, $i = \sqrt{-1}$이고 $\mathbb{Q}[x]$는 $\mathbb{Q}$ 위의 다항식환(polynomial ring)이다.) [2019]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

100. 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서 다항식 $x^{24}-1$의 분해체 (splitting field)를 K라 하자. 갈루아군(Galois group) $G(K/\mathbb{Q})$의 위수(order)와 복소수 $\zeta = e^{\frac{\pi}{12}i}$의 $\mathbb{Q}$ 위에서의 기약다항식(irreducible polynomial) $\mathrm{irr}(\zeta,\ \mathbb{Q})$을 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $i=\sqrt{-1}$) [2020]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

101. 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서 다항식 x^5+5의 분해체 (splitting field)를 K라 하자.
체 $\mathbb{Q}(\sqrt[10]{5})$가 K의 부분체임을 증명하고, K의 원소

$$\alpha = e^{\frac{2\pi}{5}i} + e^{\frac{3\pi}{5}i}$$

의 $\mathbb{Q}$ 위에서의 기약다항식(irreducible polynomial) $\mathrm{irr}(\alpha,\ \mathbb{Q})$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $i=\sqrt{-1}$) [2021]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

102. $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2},\, e^{\frac{2\pi}{75}i}\right)$는 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서 다항식 $(x^3-2)(x^{25}-1)$의 분해체(splitting field)이다. 갈루아군(Galois group) $G(K/\mathbb{Q})$의 위수(order)를 쓰시오.
또한, 다음 <조건>을 모두 만족하는 $G(K/\mathbb{Q})$의 부분군(subgroup) H_1과 H_2가 존재함을 보이시오. (단, $i=\sqrt{-1}$이다.) [2022]

<조건>

(가) H_1과 H_2는 $G(K/\mathbb{Q})$의 정규부분군(normal subgroup)이다.
(나) H_1의 위수는 20이고 H_2의 위수는 6이다.
(다) $G(K/\mathbb{Q})=H_1H_2$이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

103. K는 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서 다항식 $x^{13}-1$의 분해체이다. 갈루아군 $G(K/\mathbb{Q})$에 대하여 집합 X를

$$X=\{\sigma\in G(K/\mathbb{Q})\mid K_{\langle\sigma\rangle}=\mathbb{Q}\}$$

라 하자. X의 원소 개수를 구하고 X의 원소 각각에 대하여 $\zeta=e^{\frac{2\pi i}{13}}$의 상을 ζ의 거듭제곱으로 나타내시오. 또한 K의 원소

$$\beta=\zeta+\zeta^3+\zeta^4+\zeta^9+\zeta^{10}+\zeta^{12}$$

의 $\mathbb{Q}$ 위에서의 기약다항식(최소다항식) $\mathrm{irr}(\beta,\ \mathbb{Q})$를 풀이 과정과 함께 쓰시오.
(단, $K_{\langle\sigma\rangle}$는 σ로 생성되는 순환군 $\langle\sigma\rangle$의 고정체이고, $i=\sqrt{-1}$이다.) [2023]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

104. 다항식환 $\mathbb{Z}_7[x]$에서 다항식 $f(x)=x^4+3x^2-1$이 기약(irreducible)임을 보이시오. 또한 α를 $f(x)$의 해라 하고, 갈루아 군(Galois group) $G(\mathbb{Z}_7(\alpha)/\mathbb{Z}_7)$의 원소 σ의 위수(order)가 4라 하자. $G(\mathbb{Z}_7(\alpha)/\mathbb{Z}_7)$의 부분군 $\langle\sigma^2\rangle$의 고정체(fixed field) E의 위수(order)를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $\mathbb{Z}_7(\alpha)$는 유한체 $\mathbb{Z}_7$ 위의 단순 확대체(simple extension field)이다.)
[2026]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

105. 유한체(finite field) $\mathbb{Z}_p$(p는 소수) 위의 다항식

$$f(x)=x^{p^4}-x\in\mathbb{Z}_p[x]$$

에 대하여 체 K가 $\mathbb{Z}_p$위에서의 $f(x)$의 분해체 (splitting field)일 때, <보기>에서 옳은 것만을 모두 고른 것은? [2011]

<보기>

ㄱ. 임의의 원소 $\alpha\in K$에 대하여 $\alpha^{p^4}=\alpha$ 이다.

ㄴ. $\mathbb{Z}_p\subsetneq L\subsetneq K$를 만족시키는 중간체 (intermediate field) L은 오직 한 개 존재한다.

ㄷ. 갈루아 군 (Galois group) $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Z}_p)$는 위수(order)가 4인 순환군(cyclic group)이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

\- 정의/정리 -

\- 풀이 -

106. 두 실수 $\sqrt[4]{3}$와 $\sqrt[5]{3}$의 작도가능성에 다음 설명으로 옳은 것은? [1995]

① $\sqrt[4]{3}$: 작도 가능 $\sqrt[5]{3}$: 작도 가능
② $\sqrt[4]{3}$: 작도 불가능 $\sqrt[5]{3}$: 작도 가능
③ $\sqrt[4]{3}$: 작도 가능 $\sqrt[5]{3}$: 작도 불가능
④ $\sqrt[4]{3}$: 작도 불가능 $\sqrt[5]{3}$: 작도 불가능

- 정의/정리 -

- 풀이 -