과목	복소함수 기출문제	단원	복소수

1. 복소수 z가 $0<|z|<1$을 만족할 때, 복소평면 위의 무한 개의 점 $z, z^2, z^3, z^4, \cdots$ 를 차례로 연결해서 만들어지는 선분들의 길이의 합은? [1993]

① $\dfrac{|z|}{1-|z|}$ ② $\left|\dfrac{z}{1-z}\right|$

③ $\dfrac{|1-z^4|}{1-|z|}$ ④ $\dfrac{|z-z^2|}{1-|z|}$

- 정의/정리 -

- 풀이 -

2. 복소함수 $f(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$에 대하여, 집합 $\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=2\}$에서 $|f(z)|$의 최댓값과 최솟값을 구하시오. [2021]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

3. $w = \cos 20^\circ + i \sin 20^\circ$ $(i = \sqrt{-1})$일 때,

$$\frac{1}{|w + 2w^2 + 3w^3 + \cdots + 18w^{18}|}$$

의 값은? [1994]

① $\frac{1}{9}\sin 10^\circ$ ② $\frac{1}{18}\sin 20^\circ$

③ $\frac{2}{9}\sin 10^\circ$ ④ $\frac{1}{9}\sin 20^\circ$

- 정의/정리 -

- 풀이 -

4. 40보다 작은 양의 정수 n에 대하여

$$(\sin\theta + i\cos\theta)^n = \sin n\theta + i\cos n\theta$$

를 만족하는 n의 값들의 합은? [1995]

① 171 ② 180 ③ 190 ④ 200

- 정의/정리 -

- 풀이 -

5. $|z-10i|=6$을 만족하는 복소수 z의 편각을 θ라고 할 때, $8\sin\theta+6\cos\theta$의 최댓값과 최솟값의 곱은? [1995]

① 7　② 14　③ 21　④ 28

\- 정의/정리 -

\- 풀이 -

과목	복소함수 기출문제	단원	지수형식

6. $z_1 = 2i$, $z_2 = 1+i$ 일 때, 두 복소수의 몫 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 의 편각은? [1990]

① $\dfrac{\pi}{4}$　② $\dfrac{\pi}{3}$　③ $\dfrac{\pi}{2}$　④ π

\- 정의/정리 -

\- 풀이 -

7. 방정식 $z^n = 1$의 모든 해를 극형식으로 나타낼 때 편각θ들의 합을 S_n이라 하자. 이때, $\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n}$의 값은? (단, $0 \leq \theta < 2\pi$) [1992]

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3}{2}\pi$ ④ 2π

- 정의/정리 -

- 풀이 -

8. 확장 복소평면(extended complex plane) $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$에서 정의된 일차분수변환(선형분수변환, linear fractional transformation, bilinear transformation) T가

$$T(0)=2,\ T(1)=2i,\ T(\infty)=-2$$

를 만족시킬 때, $T(2i)$의 값을 구하시오. [2018]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	복소함수 기출문제	단원	해석함수

9. 다음 조화함수(harmonic function)의 조화공액 (harmonic conjugate)을 구하시오. [1998]

$$u = \mathrm{Arg}\, z \ \ (-\pi < \mathrm{Arg}\, z < \pi)$$

\- 정의/정리 -

\- 풀이 -

10. 복소평면 $\mathbb{C}$ 안의 영역(domain) D에서 정의된 함수 $f: D \to \mathbb{C}$가 해석적(analytic)이고, 모든 $z \in D$에 대해 $\mathrm{Im}\, f(z) = 2\mathrm{Re}\, f(z)$가 성립한다.
$f(z)$는 D에서 상수임을 보이시오. [2005]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

11. 두 실수 a와 b에 대하여 복소함수

$$f(x+iy)=(x^3-2axy-bxy^2)+i\,(2x^2-ay^2+bx^2y-y^3)$$

(x, y는 실수)

가 정함수(entire function)일 때, a^2+b^2의 값은? [2013]

① 10 ② 13 ③ 17 ④ 18 ⑤ 20

- 정의/정리 -

- 풀이 -

12. 복소수 $z=x+iy$ (x, y는 실수)에 대한 정함수 (entire function) $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(-1+i)$의 값은? (단, u와 v는 실숫값 함수이다.) [2011]

〈보기〉

(가) 임의의 복소수 $z=x+iy$에 대하여

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$ 이다.

(나) $f(1)=0$, $f(i)=1+i$

① $1-i$　② $1+i$　③ $1-2i$
④ $1+2i$　⑤ $2-i$

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	복소함수 기출문제	단원	해석함수

13. 복소수 $z=x+iy$ (x, y는 실수)에 대한 함수

$$f(z)=\left(x^n y+xy^n+x+y\right)+iv(x,\ y)$$

가 $z=1$에서 해석적(analytic)이 되도록 하는 자연수 n의 값과 이때의 $f'(1)$의 값을 각각 구하시오. (단, $v(x,\ y)$는 실숫값 함수이다.) [2017]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

14. 복소수 $z=x+iy$ (x, y는 실수)에 대한 함수

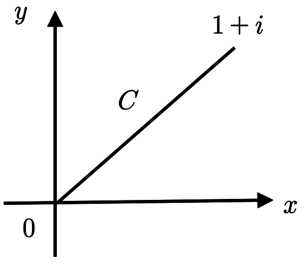
$$f(z)=e^{-3y}\cos(ax)+bx^2-4y^2+iv(x,\,y)$$

가 정함수(entire function)가 되도록 하는 양의 실수 $a,\,b$의 값과 이 때의 $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$의 값을 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오.
(단, $v(x,\,y)$는 실숫값 함수이다.) [2022]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

15. 복소평면에서 $z=0$으로부터 $z=1+i$에 이르는 선분을 C라 하자. $f(z)=y-x-i3x^2$일 때, $\int_C f(z)\,dz$의 값은? [1993]



① $1-i$ ② $1+i$ ③ $2-i$ ④ $2+i$

- 정의/정리 -

- 풀이 -

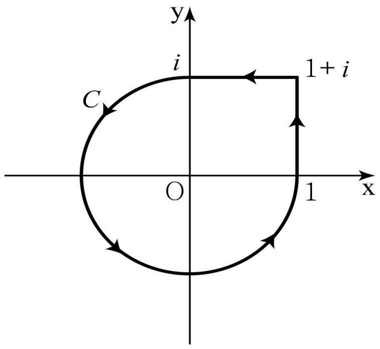
16. n이 임의의 정수일 때, 복소적분 $\oint_{|z|=1} z^n dz$의 값을 구하시오. [2001]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

17. 선 C는 다음 그림과 같이 $1, 1+i, i$를 연결한 두 선분과 단위원의 일부로 이루어져 있다.
이때, $\int_C \bar{z}\,dz$의 값을 구하시오.

(단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.) [2003]



- 정의/정리 -

- 풀이 -

18. 복소평면에서 곡선 C가

$$C: z(t)=\begin{cases} e^{i\pi t}, & 0 \le t \le 1 \\ t-2, & 1 < t \le 3 \end{cases}$$

일 때, 복소적분

$$\int_C (x^2 - y^2 - y) + i(2xy - x)\, dz$$

의 값을 구하시오.

(단, x, y는 실수이고 $z = x + iy$는 복소수이다.)

[2019]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

19. 복소함수에 대한 설명으로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2009 모의평가]

<보기>

ㄱ. 함수 $f(z) = \mathrm{Log}\,(z+3)$은 영역 $D = \{z \mid z = x+iy,\, x > -2,\, y > -1\}$에서 해석적(analytic)이다. (단, $\mathrm{Log}\,(z+3)$은 $z+3 = re^{i\theta}$라 할 때 $r > 0$, $-\pi < \theta \le \pi$인 범위에서 정의된 함수이다.)

ㄴ. 모든 복소수 $z = x+iy$(x, y는 실수)에 대하여 $f'(z) = xy^3$인 정함수(entire function) f는 존재하지 않는다.

ㄷ. 복소평면에 어떤 단일폐곡선 C가 있다. 함수 $f(z)$가 곡선 C와 그 내부에서 연속이고 $\int_C f(z)\,dz = 0$이라 하면, $f(z)$는 C의 내부에서 해석적이다.

① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

- 정의/정리 -

- 풀이 -

20. 복소평면에서 영역 $D=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\}$에 대하여 연속함수 $f:D\to\mathbb{C}$가 해석적(analytic, holomorphic)이기 위한 필요충분조건을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2012]

<보기>

ㄱ. D에서 $f(z)$로 수렴하는 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$이 존재한다.

ㄴ. D에 포함되는 모든 단순닫힌경로 (단순폐곡선, simple closed contour) C에 대하여 $\int_C f(z)\,dz=0$이다.

ㄷ. D에서 $\frac{dF}{dz}=f$를 만족하는 해석함수 F가 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

- 정의/정리 -

- 풀이 -

21. 복소평면 $\mathbb{C}$에서 미분가능한 정함수(entire function)가 임의의 $z\in\mathbb{C}$에 대하여 조건

$$f(z)=f(z+2)=f(z+i)$$

를 만족하고, $f(0)=i$라고 한다. 이때, $f(1+i)$의 값을 구하시오. [1999]

- 풀이 -

- 정의/정리 -

22. 복소평면 $\mathbb{C}$에서 해석적인 정함수(entire function) f가 임의의 $z \in \mathbb{C}$에 대하여 $\mathrm{Re}\, f(z) > 1$을 만족시킨다. 이때, f는 상수함수임을 보이시오. [2002]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

23. 다음 조건을 만족시키는 정함수(entire function) $f(z)$에 대하여 $|f(i)|$의 최솟값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [2020]

> (가) 모든 복소수 z에 대하여 $|f(z)+z^2| \geq 3$ 이다.
> (나) $|f(2)|=3$

- 정의/정리 -

- 풀이 -

24. 실숫값을 갖는 두 함수 $u(x, y)$, $v(x, y)$와 복소수 $z = x + iy$ (x, y는 실수)에 대하여 복소함수

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

는 정함수이다. $\overline{f(\overline{z})}$가 정함수임을 보이시오.
또한, $f'(i) = \pi$, $f(-i) = 1$이고 모든 실수 x, y에 대하여

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) > (u(x,\ -y))^2 + (v(x,\ -y))^2$$

일 때, $\dfrac{f'(1-i)}{f(1+i)}$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.
(단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.) [2024]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	복소함수 기출문제	단원	리우빌정리

25. 복소평면 $\mathbb{C}$에서 해석적인 함수(entire function) f가 다음 두 조건을 모두 만족시키면 $f(z)=z$임을 보이시오. [2004]

(ⅰ) $f(1)=1$
(ⅱ) 임의의 $z\in\mathbb{C}$에 대하여 $\lvert f(z)\rvert \le \lvert z\rvert$

- 정의/정리 -

- 풀이 -

26. 복소수 전체의 집합 $\mathbb{C}$에서 $\mathbb{C}$로의 정함수(entire function) f가 모든 $z \in \mathbb{C}$에 대하여 두 조건

$$|f(z)| \le 2|ze^z|,\ f'(1) = 1$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [2009]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1

④ e ⑤ $2e$

- 정의/정리 -

- 풀이 -

27. 정함수(entire function) $f(z)$가 모든 복소수 z에 대하여 부등식

$$|f(z)| \leq |e^z - 1|$$

을 만족시킨다. $f(1) = 1$일 때, $f'(0)$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [2018]

※ 다음 정리는 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

> 양수 r에 대하여 영역
> $$\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-a| < r\}$$
> 에서 함수 $g(z)$가 해석적이고 유계이면 $\lim_{z \to a} g(z)$가 존재하고 함수
> $$h(z) = \begin{cases} g(z), & 0 < |z-a| < r \\ \lim_{w \to a} g(w), & z = a \end{cases}$$
> 는 $z = a$에서 해석적이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

28. 실숫값을 갖는 두 함수

$$u(x,\ y),\ v(x,\ y)=e^{-y}(x\cos x-y\sin x)$$

와 복소수 $z=x+iy$ ($x,\ y$는 실수)에 대하여,

$$f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$$

가 정함수(entire function)이다.
곡선 C가 $x=\cos t,\ y=\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$로 정의된 원 일 때,

$$\int_C -yu(x,\ y)dx+xu(x,\ y)dy=6\pi$$

이다. $f(0)$의 값과 함수 $u(x,\ y)$를 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오. [2019]

※ 다음 정리는 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

> 복소평면의 열린 집합 D에서 해석적인 함수 $f:D\to\mathbb{C}$에 대하여, $r>0$이고
>
> $$\{z\in\mathbb{C}\mid |z-z_0|\le r\}\subset D$$
>
> 이면
>
> $$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(z_0+re^{it}\right)dt$$
>
> 이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

29. 실수 a에 대하여 함수 $u:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$를

$$u(x,\, y) = x^2 - 2xy + ay^2 + 4x - 6y$$

라 하자. $a = -1$일 때

적분 $\displaystyle\int_0^{2\pi} u(1+2\cos\theta,\, 2\sin\theta)d\theta$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 $a = 2$일 때 $u(x,\, y)$의 최솟값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [2023]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	복소함수 기출문제	단원	최대 절댓값 정리

30. 복소평면 $\mathbb{C}$안의 영역(domain) $D=\{z \mid |z|<2\}$에서 정의된 함수 $f:D\to\mathbb{C}$가 해석적(analytic)이고, 모든 $z\in D$에 대하여 $|f(z)|\le\sqrt{5}$이다. $f(0)=2+i$일 때, $f(1)+f'(i)$의 값을 구하시오. [2006]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

31. 다음은 주어진 문제의 풀이를 단계별로 제시한 것이다. (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것은? [2010]

<문제>

복소수 전체 집합을 $\mathbb{C}$라 하자.
$D=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<2\}$이고, 함수 $f:D\to\mathbb{C}$가 D에서 해석적(analytic)이라 하자.
$f(0)=f'(0)=0$, $f''(0)\neq 0$이고
$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{i}{12}$이며 모든 $z\in D$에 대해서
$|f(z)|\leq 3$일 때, $f\left(\frac{2i}{3}\right)$의 값은?

<풀이>

<1단계>
함수 f가 D에서 해석적이므로
$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$이 되고, 따라서
$f(z)=$ (가) $\cdot\, g(z)$의 꼴이다. (단, $g(z)$는 D에서 해석적이며 $g(0)\neq 0$이다.)

<2단계>
$0<r<2$인 r에 대하여 $|z|=r$일 때
$|g(z)|\leq$ (나) 이 성립한다. 여기서 최대 절댓값 정리(maximum modulus theorem)를 적용하면 $|z|\leq r$일 때 $|g(z)|\leq$ (나) 이다. 이 명제는 임의의 $r<2$에 대하여 성립하므로 모든 $z\in D$에 대하여 $|g(z)|\leq$ (다) 이다.

<3단계>
위의 결과와 $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{i}{12}$를 사용하여 $g(z)$를 구할 수 있고, 이를 이용하면
$f\left(\frac{2i}{3}\right)=$ (라) 임을 알 수 있다.

	(가)	(나)	(다)	(라)
①	z	$\frac{3}{r}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{i}{12}$
②	z	$\frac{3}{r}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{3}$
③	z^2	$\frac{3}{r}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{i}{12}$
④	z^2	$\frac{3}{r^2}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{3}$
⑤	z^2	$\frac{3}{r^2}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{i}{3}$

- 정의/정리 -

- 풀이 -

32. 복소평면 $\mathbb{C}$ 의 영역 $D=\{z\in\mathbb{C}\,|\,0<|z|<1\}$에 대하여 함수 $f:D\to\mathbb{C}$ 는 해석적(analytic)이다. 임의의 $z\in D$에 대하여 함수 $f(z)$가 부등식

$$|f(z)|\le 1+\ln\left(\frac{1+|z|}{2|z|}\right)$$

를 만족시킨다. $z=0$은 함수 $f(z)$의 제거 가능 특이점(없앨 수 있는 특이점, removable singular point)임을 보이고, $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$일 때 $f\left(\frac{1+i}{3}\right)$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [2017]

\- 정의/정리 -

\- 풀이 -

과목	복소함수 기출문제	단원	유수정리

33. 복소적분 $\oint_{|z|=1} e^{\frac{1}{z^2}} dz$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [1994]

① $2\pi i$ ② πi ③ $\frac{\pi}{2}i$ ④ 0

- 정의/정리 -

- 풀이 -

34. 복소적분 $\oint_U z^3 \cos\frac{1}{z}\,dz$의 값을 구하시오. [1997]

(단, U는 복소평면에서 원점 0을 품는 단위원이다.)

- 정의/정리 -

- 풀이 -

35. 복소평면에서 곡선 C는 $C: z(t)=e^{it}$ $(0 \le t \le 2\pi)$로 나타내어지는 단위원이다. 자연수 n에 대하여 복소적분 $\int_C z^n\left(e^z + e^{\frac{1}{z}}\right)dz$의 값을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$의 값은? [2011]

① 0　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{3}{4}$　⑤ 1

- 정의/정리 -

- 풀이 -

36. 정의역이 $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$인 함수 $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{1 - x}$ 의 $x = 0$에서의 3차 테일러 다항식을 구하시오. 또한 복소평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\dfrac{1}{2}$ 인 원을 시계반대방향으로 한 바퀴 도는 곡선 C에 대하여 선적분 $\displaystyle\int_C \frac{e^z - 1}{z^4(1-z)}\,dz$ 의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [2020]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

37. 집합 X에서 X로의 함수 f를

$$f(t)=\begin{cases} t\cos\dfrac{1}{t}, & t\neq 0 \\ 0, & t=0 \end{cases}$$ 으로 정의할 때,

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?
(단, $\mathbb{R}$는 실수 전체의 집합이고 $\mathbb{C}$는 복소수 전체의 집합이다.) [2009]

<보기>

ㄱ. $X=\mathbb{R}$일 때 f는 $t=0$에서 연속이다.
ㄴ. $X=\mathbb{C}$일 때 f는 $t=0$에서 연속이다.
ㄷ. $X=\mathbb{C}$일 때 $f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{t^{1-2n}}{(2n)!}$은 모든 $t\in\mathbb{C}-\{0\}$에 대하여 성립한다.
ㄹ. $X=\mathbb{C}$일 때 $\displaystyle\int_{|t|=1} f(t)\,dt = 2\pi i$이다.

① ㄱ, ㄷ ② ㄱ, ㄹ ③ ㄴ, ㄹ
④ ㄱ, ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄷ, ㄹ

- 정의/정리 -

- 풀이 -

38. 다음 4개의 복소함수

$f_1(z)=z$, $f_2(z)=\bar{z}$, $f_3(z)=e^z$, $f_4(z)=e^{\bar{z}}$

로 생성되는 복소 벡터 공간

$\{a_1f_1+a_2f_2+a_3f_3+a_4f_4 \mid a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{C}\}$

를 V라 하자. 여기서 $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다. 복소평면 $\mathbb{C}$ 상의 시계반대방향의 단위원 $C: |z|=1$에 대하여 사상(map) $T: V \to \mathbb{C}$를 다음과 같이 정의하자.

$$T(f)=\int_C f(z)\,dz$$

T가 선형사상임을 증명하시오.
선형사상 T의 핵(kernel) $\ker(T)$의 기저를 구하고, $\ker(T)$를 이용하여

$$T^{-1}(2)=\{f\in V \mid T(f)=2\}$$

를 나타내시오. [2014]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

39. 복소평면에서 C는 꼭짓점이 $-1, 1-i, 1+i$인 삼각형이고 방향이 반시계 방향으로 주어졌을 때, $\int_C \frac{dz}{z(z-2)}$ 의 값을 구하시오. [2007]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

40. $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{z^3+3z-1}{(z-1)(z+2)}\,dz$ 의 값은? [1995]

① $8\pi i$　② $12\pi i$　③ $16\pi i$　④ $20\pi i$

- 정의/정리 -

- 풀이 -

41. $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{e^z-1}{z(z-1)(z-i)}\,dz$을 계산하시오. [1996]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

42. $\oint_{|z|=3} \frac{z-3\cos z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}\, dz$의 값은? (단, $z\in\mathbb{C}$)

[1992]

① $5\pi i$ ② $6\pi i$ ③ $7\pi i$ ④ $8\pi i$

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	복소함수 기출문제	단원	$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\dfrac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$

43. $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{(z^2+7)e^{2z}}{(z-3)(z+1)^2}\,dz$ 의 값을 구하시오. [1999]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

44. 복소평면에서 중심이 i이고 반지름의 길이가 2인 원을 시계반대방향으로 한 바퀴 도는 곡선 C에 대하여 선적분

$$\int_C \left\{ \frac{4e^{-iz}}{(z+6i)(z-2i)} + \bar{z} \right\} dz$$

의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.
(단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.) [2022]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

45. 복소함수 $f(z) = \dfrac{e^z}{e^{2z}+1}\left(|z| < \dfrac{\pi}{2}\right)$의 점 $z_0 = 0$에 관한 테일러(Taylor) 급수 전개를 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$이라 하자. 음이 아닌 모든 정수 n에 대하여 $a_{2n+1} = 0$임을 보이시오. 또한 복소평면에서 시계반대방향의 단위원 $C : |z| = 1$에 대하여 $\int_c \dfrac{f(z)}{z^3}\, dz$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [2016]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	복소함수 기출문제	단원	$\underset{z=z_0}{\mathrm{Res}}\, f(z) = \dfrac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$

46. 복소평면에서 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원을 시계반대방향으로 한 바퀴 도는 곡선 C에 대하여 적분

$$\int_C \overline{z}dz - \frac{1}{\overline{z}}d\overline{z}$$

의 값을 구하시오.

(단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.) [2024]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

47. 복소평면에서 곡선 C가

$$C : z(t) = e^{it} \ (0 \le t \le 2\pi)$$

로 나타내지는 단위원일 때, 다음 복소적분값 A, B에 대하여 $\dfrac{A}{B}$의 값은? [2010]

$$A = \int_C \left(e^{z^2} + z^2 e^{\frac{1}{z}}\right) dz$$

$$B = \int_C \frac{1-z}{\sin z}\, dz$$

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

- 정의/정리 -

- 풀이 -

48. 복소함수 $f(z)=z^6-1$에 대하여

$$\int_C \frac{z^3 f'(z)}{f(z)}\,dz$$

의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.

여기서 C는 복소평면에서 점 $\left(\frac{1}{2},\,0\right)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원을 시계반대방향으로 한 바퀴 도는 곡선이다. [2021]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

49. 조건을 만족시키는 고립특이점(isolated singularity) $z=0$을 갖는 복소함수만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2013]

> 조건 임의의 $w \in \mathbb{C}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$이고 $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w$인 수열 $\{z_n\}$이 존재한다.

<보기>

ㄱ. $f(z) = z\sin\frac{1}{z}$

ㄴ. $f(z) = \frac{\sin z}{e^z - 1}$

ㄷ. $f(z) = \frac{1}{\sin z}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

- 정의/정리 -

- 풀이 -

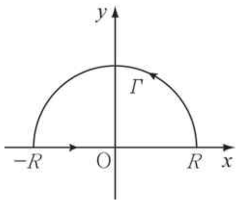
50. 다음은 복소적분을 이용하여

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$ 를 구하는 과정이다.

(가), (나), (다)에 알맞은 것은? [2009 모의평가]

함수 $f(z)=\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$ 이라 하면

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$는 복소평면에서 실축(real axis)을 따른 $f(z)$의 적분을 나타낸다. $R>1$ 이라고 하자.



그림과 같이 $-R$에서 R까지의 선분과 상반평면(upper half plane)에서 반지름이 R인 반원 Γ로 구성된 폐곡선을 C라 하면

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_\Gamma f(z)\,dz$$

이다. 이때

$$\int_C f(z)\,dz = \boxed{(가)}$$

이다. 또한

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \le \phi(R) \text{ 이고 } \lim_{R\to\infty}\phi(R)=0$$

을 만족시키는 함수 $\phi(R)=\boxed{(나)}$가 존재한다. 그러므로

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \boxed{(다)}$$

이다.

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi R^2}{(R^2-1)^2}$	$\frac{\pi}{3}$
②	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi R^3}{(R^2-1)^2}$	$\frac{\pi}{3}$
③	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi R^4}{(R^2-1)^2}$	$\frac{\pi}{2}$
④	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi R^3}{(R^2-1)^2}$	$\frac{\pi}{2}$
⑤	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi R^3}{(R^2-1)^2}$	$\frac{\pi}{2}$

\- 정의/정리 -

\- 풀이 -

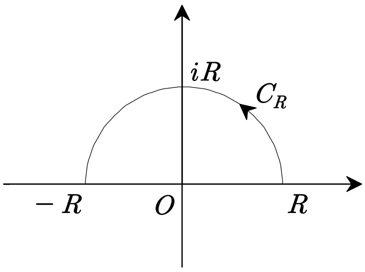
51. 복소평면 $\mathbb{C}$ 에서 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 R 인 반원을

$$C_R = \{Re^{it} \in \mathbb{C} \mid 0 \le t \le \pi\}$$

라고 할 때, $a > 0$과 $b > 0$에 대하여

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} \frac{ze^{ibz}}{z^2 + a^2}\, dz = 0$$

임을 보이고 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ibx}}{x^2 + a^2}\, dx$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [2015]



- 정의/정리 -

- 풀이 -

52. 복소평면에서 $C=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|=5\}$가 반시계방향으로 한바퀴 도는 곡선일 때,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\cos z}{\sin z}\,dz$$

의 값은? [2012]

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

- 정의/정리 -

- 풀이 -

53. 복소방정식 $z+e^{-z}=2$는 $|z-2|<2$에서 오직 한 개의 복소수 근을 가짐을 보이고, 그 근이 실근임을 보이시오. [2008]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

54. 복소방정식 $z^3-z-4=0$이 영역$\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<2\}$에서 갖는 근의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원을 시계반대방향으로 한 바퀴 도는 곡선을 C라 할 때, 선적분 $\int_C \frac{1}{(z-3)(z^3-z-4)}\,dz$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, 다중근의 경우 중복되는 수만큼 근의 개수로 인정한다.) [2023]

※ 다음 정리는 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

> 함수 $f(z)$와 $g(z)$가 단순닫힌곡선 γ와 그 내부에서 해석적이라 하자. 곡선 γ위의 모든 점 z에 대하여 부등식 $|g(z)|<|f(z)|$이 성립하면 두 함수 $f(z)$와 $f(z)+g(z)$는 γ 내부에서 같은 개수의 영점(zero)을 갖는다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -