과목	미분기하 기출문제	단원	곡선

1. 곡선 $\chi(t) = (3t,\ 3t^2,\ 2t^3)$ 위의 모든 점에서 단위 접선벡터(unit tangent vector)와 평면 $x+z=0$ 이 이루는 각을 구하시오. [2004]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

2. 호의 길이 s로 나타낸 매개변수 곡선 $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ 가 $\alpha''(s)\neq 0$이고 $\alpha(s)+\frac{1}{\kappa(s)}N(s)$ 가 고정된 점이면, α는 원의 일부임을 보이시오. (단, $\kappa(s)$는 $\alpha(s)$의 곡률(curvature)이고, $N(s)$는 주법선벡터(principal normal vector)이다.) [2005]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

3. 2차원 유클리드 평면에 곡선

$\alpha(t)=(2\sin t-\sin 2t,\ 2\cos t-\cos 2t)\ \ (0<t<\pi)$

가 있다. 곡선 α의 $t=\frac{\pi}{2}$에서의 접촉원(osculating circle)의 중심(곡률중심, center of curvature)과 반지름(곡률반경, radius of curvature)을 구하시오. [2023]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	미분기하 기출문제	단원	곡선

4. 곡선 $\alpha:(0,\infty)\to\mathbb{R}^3$, $\alpha(t)=(t^3+t, t^2+1, t)$가 있다. 이 곡선의 접촉평면($\alpha'(t)$와 $\alpha''(t)$를 포함하는 평면)과 $xy-$평면이 이루는 각이 45°가 되는 t의 값을 구하시오.
(단, $\mathbb{R}^3$은 3차원 유클리드 공간이다.) [2007]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

5. 다음은 곡선 $\alpha(t)=(\cosh t,\ \sinh t,\ t)$에 대하여 단위속력을 갖는 재매개곡선 (unit-speed reparametrization)을 구하는 과정이다. (가), (나)에 알맞은 것은? [2009 모의평가]
(단, $\cosh t=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$, $\sinh t=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ 이다.)

> 주어진 곡선 α의 속력 $\|\alpha'(t)\|$를 구하면
> $$\|\alpha'(t)\|=\boxed{\text{(가)}}$$
> 이므로 곡선 α의 호길이 함수(arc-length function) $s(t)$는
> $$s(t)=\int_0^t \|\alpha'(u)\|\,du=\sqrt{2}\sinh t$$
> 따라서 호길이 함수의 역함수는
> $$t=t(s)=\sinh^{-1}\frac{s}{\sqrt{2}}$$
> 이므로 곡선 α에 대하여 단위속력을 갖는 재매개곡선 $\beta(s)$는
> $$\beta(s)=\alpha(t(s))$$
> $$=\left(\sqrt{1+\frac{s^2}{2}},\ \boxed{\text{(나)}},\ \sinh^{-1}\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

	(가)	(나)
①	$\sqrt{2}\cosh t$	$\sqrt{2}s$
②	$\sqrt{2}\cosh t$	$\dfrac{s}{\sqrt{2}}$
③	$\sqrt{2}\lvert\sinh t\rvert$	$\sqrt{2}s$
④	$\sqrt{2}\lvert\sinh t\rvert$	$\dfrac{s}{\sqrt{2}}$
⑤	$\sinh\dfrac{\lvert t\rvert}{\sqrt{2}}$	$\cosh\dfrac{s}{\sqrt{2}}$

\- 정의/정리 -

\- 풀이 -

6. 좌표공간에서 곡선 $\gamma(t) = (a\cos t,\, a\sin t,\, bt)$는 두 점 $\mathrm{P}(2,\,0,\,4\pi)$, $\mathrm{Q}(2,\,0,\,8\pi)$를 지난다. 점 P에서 점 Q까지 곡선 $\gamma(t)$의 길이가 $4\sqrt{10}\,\pi$일 때, $a+b$의 값은? (단, $a>0$이고 $b>0$ 이다.) [2011]

① $\frac{8}{3}$ ② 3 ③ $\frac{10}{3}$

④ $\frac{11}{3}$ ⑤ 4

- 정의/정리 -

- 풀이 -

7. $a>0$일 때, 단위속력곡선(unit-speed curve)

$$X(t)=\left(a\cos\frac{t}{\sqrt{a^2+1}}, a\sin\frac{t}{\sqrt{a^2+1}}, \frac{t}{\sqrt{a^2+1}}\right)$$

의 곡률(curvature)은? [1993]

① $\dfrac{a}{a^2+1}$　② $\dfrac{\sqrt{a}}{a^2+1}$

③ $\dfrac{\sqrt{2}\,a}{a^2+1}$　④ $\dfrac{2a}{a^2+1}$

- 정의/정리 -

- 풀이 -

8. 곡선 $X=(4\cos t)e_1+(4\sin t)e_2+3te_3$에 대하여 다음 물음에 답하시오.
(단, e_1, e_2, e_3는 $\mathbb{R}^3$의 표준기저이다.) [2000]

(1) 단위 접선 벡터를 구하시오.

(2) 곡률을 구하시오.

(3) 곡률 반경을 구하시오.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

9. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 단위속력곡선(unit speed curve) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$의 점 $\gamma(s)$에서의 곡률(curvature) $\kappa(s)$는 $\kappa(s) = \sqrt{s^4 + 4s^2 + 3}$이다. 곡선 $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$을

$$\alpha(t) = \gamma(t) + \gamma'(t)$$

로 정의할 때, $t=0$에서 $t=1$까지 곡선 α의 길이를 구하시오. [2016]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

10. 3차원 공간 $\mathbb{R}^3$에 놓여 있는 정규곡선(정칙곡선, regular curve) C에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2012]

<보기>

ㄱ. C 위의 모든 점에서 곡률(curvature)이 0이면 C는 직선이거나 직선의 일부이다.

ㄴ. C 위의 모든 점에서 열률(비틀림률, 꼬임률, torsion)이 정의되고 그 값이 0이면 C는 적당한 평면에 놓여 있다.

ㄷ. C 위의 모든 점에서 곡률이 양의 실수로 일정하면 C는 원이거나 원의 일부이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

- 정의/정리 -

- 풀이 -

11. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 단위속력곡선(unit speed curve) $\alpha : (0,2) \to \mathbb{R}^3$이 모든 $s \in (0,2)$에 대하여

$$\alpha(s) \cdot \alpha'(s) = 0, \ \alpha(s) \cdot N(s) = -2s^2$$

을 만족시킨다. $\alpha(1) \cdot B(1) = 12$일 때, 곡선 $\alpha(s)$의 $s=1$에서의 곡률(curvature) $\kappa(1)$과 비틀림률(열률, 꼬임률, torsion)의 절댓값 $|\tau(1)|$을 순서대로 구하시오. (단, $N(s)$는 점 $\alpha(s)$에서의 법선벡터(normal vector)이고, $B(s)$는 점 $\alpha(s)$에서의 종법선벡터(binormal vector)이다.) [2026]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

12. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$의 한 평면에 있고 곡률(cuvature)이 양인 단위속력곡선(unit speed curve) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$에 대하여, 점 $\gamma(s)$에서의 접선벡터(tangent vector)를 $T(s)$, 주법선벡터(principal normal vector)를 $N(s)$라 하자.
곡선 $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$을
$$\beta(s) = \frac{1}{2}T(s) + N(s)$$
로 정의할 때, 모든 양수 t에 대하여 $s=0$에서 $s=t$까지 곡선 β의 길이는 $3t$이다. $s=1$일 때, 곡선 γ의 곡률을 구하시오. [2017]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

13. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 $\alpha(2)=(0,0,0)$인 단위속력곡선(unit speed curve) $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$에 대하여 곡선 $\beta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$을

$$\beta(t)=\int_2^t(\alpha(s)+s^2N(s))ds$$

라 하자. 두 벡터 $\alpha'(2)$, $\beta''(2)$가 서로 수직일 때, $t=2$에서 α의 곡률(curvature) κ의 값을 구하시오. (단, $N(s)$는 곡선 α의 주법벡터장(principal normal vector field)이다.) [2018]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

14. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 비틀림률(열률, 꼬임률, orsion)과 곡률(curvature)이 각각 상수 τ, 1인 단위속력 곡선 α에 대하여, 곡선 β를 다음과 같이 정의하자.

$$\beta(s) = \int_0^s N(t)\, dt$$

여기서 $N(t)$는 곡선 α의 주법벡터장(단위주법벡터장, principal normal vector field, unit principal normal vector field)이다.
곡선 β의 곡률과 비틀림률을 각각 $\kappa_\beta(>0)$, τ_β라 할 때, $\kappa_\beta + \tau_\beta$의 값을 구하시오. [2014]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

15. 단위속력곡선(unit speed curve) $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$에 대하여 점 $\alpha(t)$에서의 곡률(curvature)과 비틀림률(열률, 꼬임률, torsion)을 각각 $\kappa_\alpha(t)$, $\tau_\alpha(t)$라 할 때, $\kappa_\alpha(t) \neq 0$ $(t \in \mathbb{R})$ 이고 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 는

$$\tau_\alpha(t) = f(t)\kappa_\alpha(t), \quad f(1) = \sqrt{3}, \quad f'(1) = -2$$

를 만족한다. 점 $\alpha(t)$에서 곡선 α의 단위접벡터장(unit tangent vector field) $T(t)$와 단위종법벡터장(unit binormal vector field) $B(t)$에 대하여 곡선 $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$을

$$\beta(t) = \int_0^t \{\tau_\alpha(s)T(s) + \kappa_\alpha(s)B(s)\}\, ds$$

로 정의하고, 이 곡선 위의 점 $\beta(t)$에서의 곡률을 $\kappa_\beta(t)$라 하자. 이 때, 곡선 β가 정칙곡선(정규곡선, regular curve)임을 보이고, $\tau_\alpha(1)\kappa_\beta(1)$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [2022]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

16. 다음 곡선의 이차 곡률(second curvaure, torsion)을 구하면? [1995]

$$X=(\cos t)\overrightarrow{e_1}+(\sin t)\overrightarrow{e_2}+3t\overrightarrow{e_3}$$

(단, $\overrightarrow{e_1}=(1,0,0), \overrightarrow{e_2}=(0,1,0), \overrightarrow{e_3}=(0,0,1)$)

① $\dfrac{3}{10}$ ② $\dfrac{3}{5}$ ③ 1 ④ 3

- 정의/정리 -

- 풀이 -

17. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡선 C가
$C=\{(x,\ y,\ z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=x^3-ax+a,\ z=x-1\}$
일 때, 이 곡선의 비틀림률(열률, 꼬임률, torsion) τ를 구하시오. 또한 점 $(1,\ 1,\ 0)$에서 곡선 C의 곡률(curvature)이 3이 되도록 하는 a의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [2019]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

18. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡선

$$\gamma(t) = (2t - \cos t,\ t + \sin t,\ 2t + 1)$$
$$(0 < t < 2\pi)$$

위의 점 $\gamma(t_0)$에서의 접벡터(tangent vector)가 벡터 $(6,\ 2,\ 4)$와 평행하다. t_0의 값과 $t = t_0$일 때 곡선 γ의 비틀림률(열률, 꼬임률, tosion)을 각각 구하시오. [2020]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

19. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡선 C를

$$C=\{(x,\ y,\ z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=e^{ax},\ yz=b\}$$

(단, $a,\ b$는 상수)

라 하자. 곡선 C와 $yz-$평면의 교점 P에서 곡선 C의 접선(tangent line)이 점 $(2\sqrt{2},\ 3,\ -1)$을 지날 때, a^2+b^2의 값과 점 P에서의 곡률(curvature)을 순서대로 구하시오. [2024]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

20. 좌표공간 $\mathbb{R}^3$에서 두 곡선

$$\alpha(t) = (2t,\ t^2,\ at^3),\ \ \beta(t) = (t,\ bt,\ t^2)$$

이 합동이 되도록 하는 두 상수 a, b에 대하여, a^2+b^2의 값을 구하시오. [2015]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

21. 곡선 $\alpha : [-1,1] \to \mathbb{R}^3$을

$$\alpha(t) = \left(2t, t^2, \frac{1}{3}t^3\right)$$

으로 정의할 때, 다음 물음에 답하시오. [2002]

(1) $t=0$에서 곡선 α의 비꼬임(torsion)을 구하시오.

(2) $\Phi = y\,dx + z\,dy + xy\,dz$일 때, $\int_\alpha \Phi$를 계산하시오.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

22. 극방정식(polar equation)

$$r = 1 - \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \ (0 \le \theta \le 2\pi)$$

로 주어진 평면곡선(plane curve)의 길이와 전곡률(total curvature)의 값을 순서대로 구하시오.
(단, 곡선의 방향은 시계반대방향으로 주어져 있다.)
[2025]

\- 정의/정리 -

\- 풀이 -

23. 다음 곡선의 곡률(curvature)과 열률(torsion, 비꼬임률)을 구하고, 두 값을 모두 이용하여 곡선의 종류가 무엇인지 쓰시오. [2003]

$$\chi(\theta)=(\cos\theta-2,\cos\theta+2,\sqrt{2}\sin\theta)$$
(단, $0\le\theta<2\pi$)

- 정의/정리 -

- 풀이 -

24. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$라 하자. 3차원 유클리드 공간에 놓인 정칙 곡선 $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$에 대하여 곡선 $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$을 $\beta(t) = 2\alpha(-2t)$로 정의하자. $t=0$일 때 α의 비틀림(열률, torsion)을 $\tau(0)$이라 하면, $t=0$일 때 β의 비틀림은?
(단, 모든 점에서 α의 곡률과 비틀림은 모두 양수이다.) [2009]

① $\frac{1}{2}\tau(0)$ ② $-\frac{1}{2}\tau(0)$ ③ $-2\tau(0)$
④ $\tau(0)$ ⑤ $-\tau(0)$

- 풀이 -

- 정의/정리 -

25. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 구

$$M = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

위에 단위속력곡선(arc-length parametrized curve) $\gamma : [0,\ 1] \to M$이 있다. 각 $s \in [0,\ 1]$에 대하여 점 $\gamma(s)$에서의 γ의 종법선벡터(binormal vector)를 $B(s)$, 점 $\gamma(s)$에서의 M의 법선벡터(normal vector)를 $n(s)$라 하자. 모든 $s \in [0,\ 1]$에 대하여 $B(s) \cdot n(s) = \dfrac{1}{2}$을 만족할 때, $\gamma(s)$의 비틀림률(열률, 꼬임률, torsion) $a(s)$와 곡률(curvature) $b(s)$를 구하시오. [2021]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

26. 좌표공간에서 두 단위속력 곡선

$$\alpha(t) = \left(3\cos\frac{t}{5}, 3\sin\frac{t}{5}, \frac{4}{5}t\right)$$

$$\beta(t) = \left(3\cos\frac{t}{5}, 3\sin\frac{t}{5}, -\frac{4}{5}t\right)$$

에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2013]

<보기>

ㄱ. 곡선 α의 곡률(curvature) κ_α와 곡선 β의 곡률 κ_β에 대하여 $\kappa_\alpha = \kappa_\beta$이다.

ㄴ. 곡선 α의 열률(꼬임률, 비틀림률, torsion) τ_α와 곡선 β의 열률 τ_β에 대하여 $\tau_\alpha = -\tau_\beta$이다.

ㄷ. $\beta(t) = L(\alpha(t))$이고 L을 나타내는 행렬의 행렬식이 1인 직교변환(orthogonal transformation) L이 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

- 정의/정리 -

- 풀이 -

27. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에 있는 곡면 $\chi(\theta, \Phi)$를 다음과 같이 정의하자.
$\chi(\theta, \Phi) = ((2+\sin\Phi)\cos\theta, (2+\sin\Phi)\sin\theta, \cos\Phi)$
이때, 곡면 위의 점 $\chi(0,0)$에서의 접평면 (tangent plane)의 방정식을 구하고, 그 접평면과 곡면 $\chi(\theta, \Phi)$의 교선의 방정식을 구하시오. [2006] (단, $-\infty < \theta < \infty, -\infty < \Phi < \infty$)

\- 정의/정리 -

\- 풀이 -

28. $\mathbb{R}$을 실수 집합이라 할 때, 곡면 $\chi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$\chi(u,v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2,\, v - \frac{v^3}{3} + u^2 v,\, u^2 - v^2\right)$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오. [2008]

(1) 곡면 위의 점 $\chi(1,1)$에서의 법벡터(normal vector) $\vec{n}$을 구하시오.

(2) 위 (1)에서 구한 법벡터 $\vec{n}$과 $\vec{n}$을 xy-평면에 정사영(projection)한 벡터가 이루는 각을 α라 할 때, $\cos\alpha$를 구하시오.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

29. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡선 γ를 두 곡면

$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 = 1,\ x > 0\}$,

$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = xy\}$

의 교선이라 하자. 이때 γ 위의 점 $q = (1, 0, 0)$ 에서의 γ의 접선 벡터와 수직이고 점 q를 포함하는 평면에 속하는 점은? [2010]

① $(0, 1, 1)$ ② $(1, 0, 1)$ ③ $(1, 1, 1)$
④ $(1, -1, -1)$ ⑤ $(-1, 1, -1)$

- 풀이 -

- 정의/정리 -

30. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡면 $M: z = \frac{1}{4}(x^4+y^4)$과 평면 $H: x+y-z=d$가 한 점 p에서 접할 때, 상수 d의 값을 구하시오. 또한 접점 p에서 곡면 M의 가우스곡률(Gaussian curvature) K의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [2019]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

31. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡면

$$\mathrm{x}(u,\,v) = \left(u^2+v,\,u-v^2,\,uv\right)$$

위의 $u=1$, $v=2$인 점 P에서의 접평면(tangent plane)의 방정식을 구하시오. 또한 점 P에서 곡면 x의 평균곡률(mean curvature) H의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점] [2020]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

32. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡면

$$X(u, v) = (1+2u,\ 2\cosh u \cos v,\ 2\cosh u \sin v)$$

위의 $u=0$, $v=\frac{\pi}{4}$인 점 P에서 접평면(tangent plane)의 방정식을 풀이 과정과 함께 쓰시오.
또한 점 P에서 곡면 X의 가우스곡률(Gaussian curvature) K와 평균곡률(mean curvature) H의 값을 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오. [2025]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

33. 곡면(regular surface) M의 점 p에서의 주곡률 방향(principal direction)이 u_1과 u_2이고, 이에 대응하는 주곡률(principal curvature)이 각각 1과 $\frac{1}{3}$이다. 점 p에서의 단위접벡터(unit tangent vector) v가 u_1과 이루는 각이 $\frac{\pi}{3}$일 때, v 방향의 법곡률(normal curvature)은? [2009 모의평가]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

- 정의/정리 -

- 풀이 -

34. 좌표공간에 원환면(torus)

$$T=\left\{(x,y,z)\,|\,\left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right)^2+z^2=1\right\}$$

과 평면

$$P=\{(x,y,z)\,|\,y+z=0\}$$

이 있다. 원환면 T와 평면 P의 교집합에 놓여있는 단위속력곡선 $\alpha:(-1,1)\to T\cap P$가 $\alpha(0)=(1,0,0)$을 만족시킬 때, 점 $(1,0,0)$에서 곡선 α의 원환면 T에 대한 법곡률(normal curvature)의 절댓값은? [2013]

① 0 ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ 1 ⑤ $\frac{4}{3}$

- 정의/정리 -

- 풀이 -

35. 곡면 $M=\{(x,\ y,\ z)\in \mathbb{R}^3 \mid 4x=(y^2+z^2)^2\}$ 위의 점 $p=\left(\frac{1}{4}u^4,\ u,\ 0\right)\ (u>0)$에서의 접평면(tangent plane)을

$$T_p(M)=\{\mathrm{v}_p \in \mathbb{R}^3 | \mathrm{v}_p\text{는 } p\text{에서의 곡면 } M\text{의 접벡터}\}$$

라 하고 이 점에서의 주곡률(principal curva- ture)을 각각 $k_1(u),\ k_2(u)$라 하자. 또, $T_p(M)$에 속하는 두 개의 단위접벡터(unit tangent vector) w_p와 $(0,\ 0,\ 1)_p$가 이룬 각이 $\frac{\pi}{6}$라고 하자. 점 p에서 곡면 M의 가우스 곡률 $K(u)$를 풀이 과정과 함께 쓰고, w_p 방향으로의 법곡률(normal curvature) $k(\mathrm{w}_p)$를 $ak_1(u)+bk_2(u)$ ($a,\ b$는 상수)로 나타낼 때 ab의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [2015]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

36. 곡면

$$X(u, v) = \left(u\cos v, u\sin v, \frac{1}{u}\right) \ (u > 0, \ -\pi < v < \pi)$$

위의 점 $p = (1, 0, 1)$에서 주곡률(principal curvature) κ_1, κ_2 $(\kappa_1 > \kappa_2)$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 점 p에서 단위접벡터(unit tangent vector) $w = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)$ 방향으로의 법곡률(normal curvature)을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [2018]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

37. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에 놓인 곡면 M위의 점 p에서 모든 접벡터(tangent vector)의 집합을 $T_{\mathrm{p}}(M)$, p에서의 주벡터(principal vector) 중 하나를 e라 하자. $T_{\mathrm{p}}(M)$에 속하는 단위접벡터(unit tangent vector) v와 e의 사잇각을 θ라 할 때, p에서 v 방향으로의 법곡률(normal curvature) $\kappa_n(\theta)$가

$$\int_0^{\pi} \kappa_n(\theta)\, d\theta = \frac{11\pi}{8}$$

를 만족한다고 하자. 점 p에서 곡면 M의 가우스 곡률(Gaussian curvature)이 $\frac{3}{2}$일 때, p에서 M의 주곡률(principal curvature)의 값을 모두 쓰시오. (단, 주벡터는 주곡률방향(주방향, principal direction)의 단위접벡터이다.) [2022]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

38. 곡면 $z=1-x^2-y^2$ 에서 $z \geq 0$인 부분을 S라 할 때, S 위에서의 면적분(surface integral)

$$\iint_S \frac{1}{\sqrt{5-4z}}\, dS$$

를 계산하시오. [1999]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	미분기하 기출문제	단원	면적분

39. $\mathbb{R}^3$공간에서 $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$로 둘러싸인 정육면체 V의 표면을 S라 두고, 벡터장

$$F = 2xz\,\mathrm{i} - y^2\,\mathrm{j} + yz^2\,\mathrm{k}$$

일 때, 면적분 $\iint_S F \cdot n\,dS$의 값을 구하시오.

(단, $\mathrm{i}=(1,0,0)$, $\mathrm{j}=(0,1,0)$, $\mathrm{k}=(0,0,1)$이고, n은 V의 외부 쪽을 향하는 S의 단위 법선벡터이다.) [1999]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

40. 개집합(open set) $D \subseteq \mathbb{R}^2$에 대하여 미분가능한 함수 $z = f(x, y) : D \to \mathbb{R}$의 그래프로 이루어지는 곡면 G의 법선과 z축과의 사이각을 θ라 할 때 다음을 보이시오.

$$\iint_G \cos^2\frac{\theta}{2}\, dS = \frac{1}{2} S(G) + \frac{1}{2} A(D)$$

(단, $S(G)$는 곡면의 겉넓이, $A(D)$는 영역 D의 넓이로 둘 다 유한이고, $dS = \sec\theta\, dA$이다.) [2005]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

41. 현수선(catenary) $y = 2\cosh\left(\dfrac{x}{2}\right)$를 x축을 중심으로 회전시켜 생기는 회전면 M의 가우스곡률(Gaussian curvature)을 K라고 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 모두 고른 것은?

(단, $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ 이다.) [2011]

〈보기〉

ㄱ. $K(p) > 0$인 점 p가 존재한다.

ㄴ. K의 최솟값은 $-\dfrac{1}{4}$이다.

ㄷ. M은 평면과 거리동형(isometric)이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

- 정의/정리 -

- 풀이 -

42. 2차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^2$에서 3차원 공간 $\mathbb{R}^3$상의 매끄러운 곡면(smooth surface) S 위로의 등장사상(등거리사상, isometry) $f : \mathbb{R}^2 \to S$가 존재할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2012]

<보기>

ㄱ. f의 역사상 f^{-1}도 등장사상이다.
ㄴ. S의 모든 점에서 가우스 곡률(Gaussian curvature)이 0이다.
ㄷ. S의 모든 점에서 평균곡률(mean curvature)이 0이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

- 정의/정리 -

- 풀이 -

43. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{E}^3$의 폐곡면 S에는 가우스 곡률 K의 값이 양수가 되는 점이 항상 존재함을 증명하시오. [1999]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

44. 최고차항의 계수가 2인 삼차함수 $f(x)$가 $-1<x<2$에서 $f(x)>0$이다. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡선 $y=f(x)$, $z=0$ $(-1<x<2)$를 x축 둘레로 360° 회전시켜 얻은 회전면(surface of revolution)을 M이라 하고, 곡면 M이 평면 $x=0$과 만나서 생기는 원을 α, 평면 $x=\frac{2}{3}$와 만나서 생기는 원을 β, 평면 $x=1$과 만나서 생기는 원을 γ라 하자.
곡면 M에 놓인 곡선으로서 α, β, γ의 측지곡률(geodesic curvature)이 각각 $0, 0, \frac{2}{5}$이다. $f(0)$의 값과 곡선 α 위의 점에서 M의 가우스 곡률(Gaussian curvature)을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [2026]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	미분기하 기출문제	단원	측지곡률

45. 반지름의 길이가 r인 원 $\alpha(s)$가 어떤 곡면 위에서 측지선(geodesic)일 때, 이 원의 법곡률(normal curvature) k_n을 구하시오.
(여기에서 s는 호의 길이이고, 법곡률 k_n은 $\alpha''(s)$의 법성분(normal component)이다.) [1999]

- 정의/정리 -

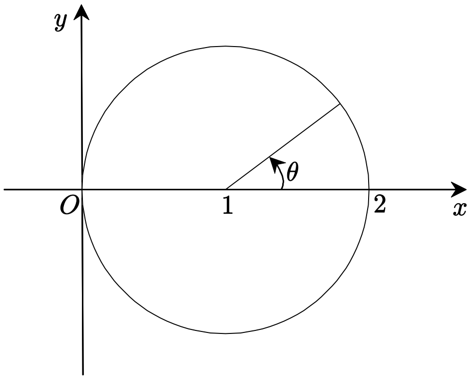
- 풀이 -

46. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡선 γ를 두 곡면

$$S_1 = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z > 0\},$$

$$S_2 = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1,\ z > 0\}$$

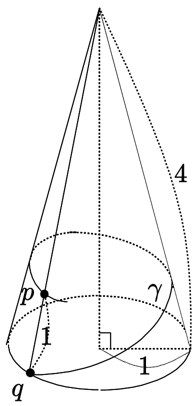
의 교선이라 하자.
아래 그림에서의 각 $\theta(0 < \theta < 2\pi)$를 매개변수로 하는 곡선 $\gamma : (0,\ 2\pi) \to \mathbb{R}^3$의 매개변수표현 (parametrized representation) $\gamma(\theta)$를 하나 구하시오. 또한 곡면 S_1위에 놓인 곡선으로서 γ의 점 $(0,\ 0,\ 2)$에서의 측지곡률(geodesic curvature)의 절댓값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [2017]



- 정의/정리 -

- 풀이 -

47. 그림과 같이 3차원 유클리드 공간에 밑면이 반지름의 길이가 1인 원이고 모선의 길이가 4인 원뿔이 있다. 이 원뿔의 옆면에 있는 점 p와 밑면에 있는 점 q는 같은 모선 위에 있고, 선분 pq의 길이는 1이다. 점 q에서 출발하여 원뿔의 옆면을 돌아 점 p를 지나는 측지선(geodesic) γ에 대하여, 점 p에서 원뿔의 옆면의 주곡률(principal curvature)을 각각 κ_1, κ_2라 하고, 점 p에서 측지선 γ의 곡률(curvature)을 κ라 하자. κ_1, κ_2의 값을 구하고, 이를 이용하여 κ의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [2016]



- 정의/정리 -

- 풀이 -

48. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 두 곡면

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z^2-x^2-y^2=2\},$$
$$P=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=2\}$$

의 교선을 α라 하자. 이때 곡면 S 위에 놓인 곡선으로서 α의 측지곡률(geodesic curva- ture)의 절댓값은? [2010]

① 0 ② $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ⑤ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

- 정의/정리 -

- 풀이 -

49. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 두 곡면 M, N을

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 - z = 0\},$$
$$N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$$

이라 하고, 곡선 γ를 M과 N의 교선이라 하자. 곡면 M에 놓인 곡선으로서 γ의 점 $p = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$에서의 측지곡률(geodesic curvature)과 법곡률(normal curvature)을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [2023]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

50. 타원면(ellipsoid) $E : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$의 가우스 곡률(Gaussian curvature)을 K라 할 때, $\displaystyle\int_E K\,dE$를 계산하시오. [1996]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

51. 토러스(torus) $S^1 \times S^1$에서의 가우스 곡률 (Gaussian curvature) K에 대하여 $K(p)=0$이 되는 점 $p \in S^1 \times S^1$가 적어도 하나 존재함을 증명하시오. [1996]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

52. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에 놓인 곡면

$$M: X(u, v) = \left(u\cos v,\ u\sin v,\ \frac{1}{2}u^2\right)$$
$$(u \geq 0,\ 0 \leq v \leq 2\pi)$$

에 포함되는 영역

$$S = \{X(u, v) \mid 0 \leq u \leq 1,\ 0 \leq v \leq \pi\}$$

가 있다. S의 경계(boundary) ∂S의 측지곡률합(전측지곡률, total geodesic curvature) $\int_{\partial S} \kappa_g\, ds$의 절댓값을 구하시오. (단, s는 호의 길이를 나타내는 매개 변수이다.) [2014]

> ◦ 도움말
> 정칙곡선(정규곡선, regular curve) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$들로 이루어진 조각별 정칙곡선(piecewise regular curve) α의 측지곡률합은
> $$\int_{\alpha} \kappa_g\, ds = \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_i} \kappa_g\, ds$$
> 로 정의된다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

53. 다음은 3차원 유클리드 공간에 놓인 곡면

$$M: \mathrm{x}(u, v) = (u, v, u^3 + 2v),$$
$$-\infty < u < \infty, \ -\infty < v < \infty$$

위의 측지삼각형(geodesic triangle)의 내각의 합을 구하는 과정이다. (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것은? [2009]

> 곡면 M은 yz평면 위의 직선 $l_0 : x = 0$, $z = 2y$를 xz평면 위의 곡선 $C : y = 0$, $\boxed{\text{(가)}}$ 을 따라 평행이동시킴으로써 얻어진다. 곡면 M의 각 점 p에 대하여 p를 지나면서 l_0와 평행인 직선을 단위속력을 갖도록 매개화한 곡선을 $l_p = l_p(t)$라 하면, l_p는 M의 점근곡선이고, 동시에 $\boxed{\text{(나)}}$ 이 된다. 따라서 모든 점에서 M의 가우스 곡률 (Gaussian curvature) K는 $\boxed{\text{(다)}}$ 를 만족한다. 곡면 M의 임의의 측지삼각형 $\triangle$에 대하여 가우스-보네(Gauss- Bonnet)의 공식을 적용하면
> $$\iint_{\triangle} K dA = (\triangle\text{의 내각의 합}) - \pi$$
> 이므로, 곡면 M의 모든 측지삼각형의 내각의 합은 $\boxed{\text{(라)}}$.

> <도움말>
> - 점근곡선(asymptotic curve) : 곡선 위의 각 점에서 접선 방향의 법곡률(normal curvature)이 0이 되는 곡면 위의 정칙곡선
> - 주요곡선(principal curve) : 곡선 위의 각 점에서 접선 방향의 법곡률이 주요곡률(principal curvature)이 되는 곡면 위의 정칙곡선
> - 측지선(geodesic) : 곡선 위의 각 점에서 측지곡률(geodesic curvature)이 0이고, 일정한 속력을 갖는 곡면 위의 정칙곡선

	(가)	(나)	(다)	(라)
①	$z = x^3$	측지선	$K \geq 0$	π보다 크다
②	$z = x^{\frac{1}{3}}$	주요곡선	$K = 0$	π이다
③	$z = x^{\frac{1}{3}}$	측지선	$K \leq 0$	π보다 작다
④	$z = x^3$	주요곡선	$K \leq 0$	π보다 작다
⑤	$z = x^3$	주요곡선	$K = 0$	π이다

\- 정의/정리 -

\- 풀이 -

54. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡선

$$\gamma(u) = (0,\ u^4 - 2u^2 + 5,\ u)\ \ (u \in \mathbb{R})$$

를 z축을 중심으로 $360°$ 회전시켜 얻은 회전체를 M이라 하고, M의 가우스 곡률(Gaussian curvature)을 K라 하자. 영역

$$S = \{(x,\ y,\ z) \in M \mid -1 \le z \le 1\}$$

에 대하여 $\iint_S K\,dA$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [2021]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

55. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$ 에서 곡면 $M : x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4,\ 0 < x < \frac{4\sqrt{5}}{5}$, $0 < z < \sqrt{3}\,y$ 위의 점 $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$에서의 가우스곡률(Gaussian curvature) K를 구하시오. 또한, 곡면 M에서의 가우스 곡률합(가우스 전곡률, total Gaussian curvature) $\iint_M K\,dA$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, dA는 곡면 M의 면적소 (area element)이다.) [2024]

- 정의/정리 -

- 풀이 -