과목	해석학 기출문제	단원	$\mathbb{R}$의 완비성

1. 유리수 집합 $\mathbb{Q}$가 실수 집합 $\mathbb{R}$에서 조밀(dense)함을 증명하시오. 즉, x와 y가 실수이고 $x<y$이면, $x<r<y$를 만족시키는 유리수 r이 존재함을 보이시오. [2005]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

2. <보기>에서의 수열 x_n에 대하여 수렴성을 판정하고 이유를 설명하시오. [2009]

<보기>

ㄱ. $x_n = (n+1)^{\frac{1}{\log(n+1)}}$

ㄴ. $x_n = \dfrac{(n+1)^n}{n!}$

ㄷ. $x_n = \dfrac{1+na}{(1+a)^n}$ (단, a는 양의 실수)

- 정의/정리 -

- 풀이 -

3. 수열 $\{a_n\}$에서

$$a_1 = 1,\ a_2 = 8,\ a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}\ (n = 3,\ 4,\ \cdots)$$

일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오. [1993]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

4. 정의역이 실수 전체의 집합인 함수

$$f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ \dfrac{1}{2} & (x=0) \end{cases}$$

에 대하여 <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2013]

<보기>

$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ 이고 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(0)$ 인 순감소 (strictly decreasing) 수열 $\{x_n\}$이 존재한다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

5. 아래와 같이 정의된 수열 $\{x_n\}$은 유계인 증가수열임을 보이고, $\lim_{n\to\infty} x_n$의 값을 구하시오.
(단, x_n은 실수이고 $x_n^k = (x_n)^k$이다.) [2004]

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_{n+1}^3 = 6x_n^2 - 8x_n \end{cases}$$

- 정의/정리 -

- 풀이 -

6. 실수열 $\{a_n\}$을

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \left(2a_n^2 + 1\right)^{\frac{1}{5}}\ (n \ge 1)$$

로 정의하자. 모든 자연수 n에 대하여 $1 \le a_n \le 2$ 임을 보이고, 수열 $\{a_n\}$이 수렴함을 보이시오. [2019]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

7. <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2009 모의평가]

<보기>

ㄱ. 수열 $\{|a_n|\}$이 0이 아닌 실수로 수렴하면 $\{a_n\}$은 수렴한다.

ㄴ. 수열 $\{a_n\}$이 0이 아닌 실수로 수렴하면 $\{(-1)^n a_n\}$은 수렴하지 않는다.

ㄷ. 부분수열 $\{a_{2n}\}$과 $\{a_{2n-1}\}$이 같은 실수로 수렴하면 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

8. <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2010]

<보기>

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|=\frac{1}{3}$ 이면 수열 $\{x_n\}$은 수렴한다.

ㄴ. 집합 $\{x_n | n$은 자연수$\}$가 단 하나의 극한점(집적점, limit point, cluster point, accumulation point)을 가지면 수열 $\{x_n\}$은 수렴한다.

ㄷ. 수열 $\{\sin x_n\}$은 수렴하는 부분수열을 갖는다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

9. 수열 $\left\{(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}$의 상극한(limit superior)을 구하시오. [1991]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	해석학 기출문제	단원	상, 하극한

10. <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2013]

<보기>

$\{a_n\}$의 상극한(limit superior, $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$, $\lim_{n\to\infty}\sup a_n$)이 1이면, 임의의 $\varepsilon>0$에 대하여 $a_n<1-\varepsilon$을 만족시키는 n의 개수는 유한하다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

11. <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2013]

<보기>

ㄱ. $\{a_n\}$이 유계(bounded)이고 실수열 $\{b_n\}$이 코시 수열(Cauchy sequence)이면 $\{a_nb_n\}$은 코시 수열이다.

ㄴ. $\{a_n\}$이 유계이고 수렴하지 않으면, $\{a_n\}$의 수렴하는 부분수열(subsequence) 중

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} \neq \lim_{k\to\infty} a_{m_k}$$

인 부분수열 $\{a_{n_k}\}$, $\{a_{m_k}\}$가 존재한다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

12. 연속함수 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ 은 실수집합)에 대하여

$$L-\frac{1}{n}<f(x_n)<L+\frac{1}{n^2}\ (n=1,2,\cdots)$$

을 만족하는 수열 $\{x_n\}$이 있다. 이 때, $\lim_{n\to\infty}x_n=c$ 라고 하면 $f(c)=L$임을 보이시오. [1999]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	해석학 기출문제	단원	연속

13. <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2011]

<보기>

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 가 연속함수이고, 실수열 $\{x_n\}$이 코시수열(Cauchy sequence)이면 $\{f(x_n)\}$도 코시 수열이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

14. 실수 집합을 $\mathbb{R}$ 이라 하고, 폐구간 $I=[0,1]$ 에서 정의된 연속함수 $f: I \to \mathbb{R}$ 가 다음 조건을 만족한다고 하자.

> 임의의 $x \in I$ 에 대하여, 적당한 $y \in I$ 가 존재하여 다음이 성립한다.
> $$|f(y)| \le \frac{1}{5}|f(x)|$$

이 때, $f(c)=0$ 을 만족하는 $c \in I$ 가 존재함을 증명하시오. [2008]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

15. 닫힌 구간(폐구간) $[-1, 1]$에서 정의된 실함수 f, g, h에 대하여 <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2009]

<보기>

유리수 전체의 집합을 $\mathbb{Q}$라 할 때,

ㄱ. 연속함수 f가 모든 $q \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}$에 대하여 $f(q) = 1$이면 f는 항등적으로 1이다.

ㄴ. 함수 g가 연속이고 $[-1, 1]$의 부분집합 S가 닫힌 집합(폐집합)이면 $g(S)$는 닫힌 집합이다.

ㄷ. $$h(x) = \begin{cases} x^2 & x \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q} \\ x \sin \dfrac{1}{x} & x \in [-1, 1] - \mathbb{Q} \end{cases}$$

로 정의된 함수 h는 $x = 0$에서 연속이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

16. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 에서 $\mathbb{R}$ 로의 함수에 대하여 <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2009 모의평가]

<보기>

ㄱ. 모든 점에서 불연속인 함수가 존재한다.

ㄴ. 함수 f가 점 a에서 연속이면 열린 구간 $(a-\delta,\ a+\delta)$에 속하는 모든 점에서 f가 연속이 되는 양수 δ가 존재한다.

ㄷ. 함수 f가 점 a에서 연속이고 $f(a)>0$ 이면 열린 구간 $(a-\delta,\ a+\delta)$에 속하는 모든 점에서 f의 함숫값이 양이 되는 양수 δ가 존재한다.

\- 정의/정리 -

\- 풀이 -

과목	해석학 기출문제	단원	연속

17. 함수 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$ 에 대하여 $x=0$에서의 연속성을 판정하시오. [1996]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

18. $x=0$의 근방에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 등식 $\lim_{x\to 0} g(f(x)) = g(\lim_{x\to 0} f(x))$를 만족시킬 수 없는 것은? [1992]

① $g(x)=x|x|$

② $g(x)=\begin{cases} 0 & (x\in\mathbb{Q}) \\ 1 & (x\in\mathbb{Q}^c) \end{cases}$

③ $g(x)=e^x$

④ $g(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$

- 정의/정리 -

- 풀이 -

19. 연속함수 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$에 대해 집합 $\{f(x)\,|\,x\in[0,1]\}$의 상한(최소상계, supremum, least upper bound) M이 존재한다.
〈정리 1〉을 증명 없이 이용하여 $f(x^*)=M$을 만족하는 $x^*\in[0,1]$이 존재함을 증명하시오. [2014]

〈정리 1〉

유계인 실수열은 수렴하는 부분수열을 갖는다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

20. 정의역이 실수 전체의 집합인 함수

$$f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ \dfrac{1}{2} & (x=0) \end{cases}$$

에 대하여 <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2013]

<보기>

$f(a)<\gamma<f(b)$이면 $f(c)=\gamma$를 만족시키는 c가 a와 b 사이에 존재한다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

21. 정의역이 실수 전체의 집합인 함수

$$f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ \dfrac{1}{2} & (x=0) \end{cases}$$

에 대하여 다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 이유를 설명하시오. [2013]

> 함수 $g(x)=xf(x)$는 구간 $(0, 1)$에서 균등연속(평등연속, 고른연속, uniformly continuous) 이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	해석학 기출문제	단원	균등연속

22. 주어진 정의역에서 다음 함수의 균등연속 여부를 판정하고 그 이유를 설명하시오. [2010]

(1) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2x^2+3}$

(2) $g : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$

(3) $h : [0, 3) \to \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x-3}$

- 정의/정리 -

- 풀이 -

23. <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2011]

<보기>

(1) 함수 $g : [0, 1] \to [0, 1]$에 대하여 합성함수 $g \circ g$가 연속함수이면 g도 연속함수이다.

(2) $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$가 연속인 단사함수이면 역함수 $h^{-1} : h([0, 1]) \to [0, 1]$도 연속함수이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

24. 다음과 같이 주어진 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$에 대하여 $x=0$에서 f가 미분가능(differentiable)한지 판정하시오.

(1) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x\text{가 유리수}) \\ 1 & (x\text{가 무리수}) \end{cases}$ [2005]

(2) $f(x)=\begin{cases} x+x^2 & , x\in\mathbb{Q} \\ x\cos x & , x\in\mathbb{Q}^c \end{cases}$ [2011]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

25. $f(0)=f'(0)=0$인 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 에 대하여 함수 g를

$$g(x)=\begin{cases} f(x)\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$$

이라 하자. 함수 g가 $x=0$에서 미분가능함을 보이고, $g'(0)$의 값을 구하시오. [2018]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

26. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 f에 대하여

$$S=\{x\,|\,f(x)=0,\ -1\le x\le 1\}$$

라 하자. 다음 명제 P의 대우명제를 쓰고, P를 증명하시오. [2020]

> P : 모든 $x\in\mathbb{R}$ 에 대하여 $f(x)\neq 0$이거나 $f'(x)\neq 0$이면 S는 유한집합이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

27. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases},$$

$$g(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

에 대하여 <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [1996]

<보기>

(1) $f'(0)=0$
(2) $g'(0)=0$
(3) $g'(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

28. 양수 $r>0$에 대하여 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x)=\begin{cases} x^6\sin\dfrac{1}{x^r}+x^r\sin\dfrac{1}{x^2}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

함수 f의 도함수 f'이 $x=0$에서 연속이기 위한 필요충분조건을 r에 대한 부등식으로 나타내시오. [2014]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

29. 열린구간 $(0,1)$에서 미분가능한 함수 $f:(0,1)\to\mathbb{R}$에 대하여 <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2012]

<보기>

ㄱ. f의 도함수 f'은 연속이다.

ㄴ. 모든 $x\in(0,1)$에 대하여 $f'(x)<0$이면 f의 역함수 $f^{-1}:D\to(0,1)$이 존재한다. (단, D는 f의 치역이다.)

ㄷ. f의 역함수 $f^{-1}:\mathbb{R}\to(0,1)$이 존재하면 f^{-1}는 미분가능하다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

30. 평균값 정리를 이용하여, 임의의 두 실수 x, y에 대하여 다음 식이 성립함을 보이시오. [2006]

$$|\sin x - \sin y| \le |x - y|$$

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	해석학 기출문제	단원	평균값 정리

31. 다음 문제를 해결해 보이시오. [1996]

(1) $x>0$일 때, $\log(x+1) < \frac{1}{x} + \log x$임을 평균값의 정리를 이용하여 증명하시오. (단, $\log$는 자연로그이다.)

(2) $a>b>0$일 때, $\left(1+\frac{1}{a}\right)^{a+1} < \left(1+\frac{1}{b}\right)^{b+1}$을 증명하시오.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

32. 함수 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$가 구간 $[0,\infty)$에서 미분가능하다. 모든 점 $x\in[0,\infty)$에 대하여 $|f'(x)|\le M$이고 $f(0)>0$ 일 때, $f(x)\le f(0)+Mx$임을 보이시오. 또한 $0\le M<1$이면 방정식 $f(x)=x$는 단 하나의 해를 가짐을 보이시오.
(단, M은 상수이다.) [2016]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

33. 연속함수 $f:[0,1]\to[0,1]$은 $(0,1)$에서 미분가능하다. 모든 $x\in(0,1)$에 대하여 $f'(x)\neq 1$일 때, $f(a)=a\ (0\le a\le 1)$을 만족하는 a가 유일하게 존재함을 증명하시오. [2021]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

34. 미분가능한 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$와 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$에 대하여 <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오.

<보기>

(1) 모든 양수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이면 $f'(0)=0$이다. [2013]

(2) 어떤 점 $c\in\mathbb{R}$에서 $g'(c)>0$이라 하자. 그러면 적당한 양수 δ가 존재해서 임의의 $x,\,y\in(c-\delta,\,c+\delta)$에 대하여 $x<y$이면 $g(x)<g(y)$이다. [2010]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

35. 연속함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 에 대하여 다음 명제의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2012]

(1) f가 미분가능하고 f의 도함수가 유계이면 f는 균등연속이다.

(2) 닫힌구간 $[0,1]$에서 f는 균등연속(평등연속, 고른 연속, uniformly continuous)이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	해석학 기출문제	단원	Darboux 정리

36. 미분가능한 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$에 대하여 <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오.

<보기>

(1) f'이 단조함수(monotone function)이면 f'은 연속함수이다. [2010]

(2) $(f')^3$이 단조증가(monotone increasing) 함수이면 f'은 연속함수이다. [2013]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

37. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$라 하자. 다음 정리의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [2009]

〈정리〉

함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 미분가능하고 $f'(a) > f'(b)$이면, $f'(a) > k > f'(b)$인 실수 k에 대하여 $f'(c) = k$를 만족시키는 점 $c \in (a, b)$가 존재한다.

◇ 참고 : f가 열린 구간 (a, b)에서 미분가능하고 a에서의 우미분계수와 b에서의 좌미분계수가 존재할 때 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$가 $[a, b]$에서 미분가능하다' 라고 한다.

〈증명〉

함수 $g : [a, b] \to \mathbb{R}$를 $g(x) = f(x) - kx$로 정의하면, g는 연속이므로 어떤 점 $c \in [a, b]$에서 $\boxed{\text{(가)}}$을 갖는다.

그런데 $\boxed{\text{(나)}}$ 이(하)므로 $g(x_1) > g(a)$와 $g(x_2) > g(b)$를 각각 만족시키는 점 x_1, $x_2 \in (a, b)$가 존재하게 되어 a와 b에서 g는 $\boxed{\text{(가)}}$을 가질 수 없다.

따라서 g는 점 $c \in (a, b)$에서 $\boxed{\text{(가)}}$을 갖고 $\boxed{\text{(다)}}$ 이(하)므로, $g'(c) = 0$이다. 그러므로 $f'(c) = k$를 만족시키는 점 $c \in (a, b)$가 존재한다.

	(가)	(나)	(다)
①	최솟값	g가 감소	g'이 연속
②	최댓값	$g'(a) > 0$이고 $g'(b) < 0$	g가 미분 가능
③	최댓값	g가 증가	g가 미분 가능
④	극댓값	$g'(a) > 0$이고 $g'(b) < 0$	g'이 연속
⑤	최솟값	$g'(a) > 0$이고 $g'(b) < 0$	g가 미분 가능

- 정의/정리 -

- 풀이 -

38. <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오.

<보기>

(1) 벡터함수 $F:[0,1]\to\mathbb{R}^2$이 연속함수이고 구간 $(0,1)$에서 미분가능하면 $F(1)-F(0)=F'(c)$를 만족시키는 점 $c\in(0,1)$이 존재한다. [2011]

(2) 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 f에 대하여 $f(1)-f(0)=\dfrac{f'(c)}{2c}$를 만족시키는 실수 c가 0과 1사이에 존재한다. [2013]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

39. 미분가능한 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 와 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 에 대한 다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 이유를 설명하시오. [2010]

$L \in \mathbb{R}$ 일 때, $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$ 이면 $\lim_{x \to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ 이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

40. 다음 극한을 구하시오.

(1) $\lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$ [1990]

(2) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$ [1990]

(3) $\lim_{x \to \infty} \left(\cos \dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$ [1993]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	해석학 기출문제	단원	테일러 정리

41. 테일러급수를 이용하여 무한급수

$$1+2+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\cdots+\frac{2^n}{n!}+\cdots$$

의 합을 구하시오. [1992]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

42. 매클로린(Maclaurin) 급수를 이용하여 다음 극한값을 구하시오. [2008]

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{(x^2 \cos x)^{\frac{5}{2}}}$$

- 정의/정리 -

- 풀이 -

43. 상수함수가 아닌 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 무한번 미분 가능하고 모든 실수 x와 자연수 n에 대하여

$$|f^{(n)}(x)|\le n^2(|x|+2)$$

를 만족시킬 때, 집합 $\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)=0,\ |x|<1\}$이 유한집합임을 보이시오. [2017]

※ 다음 정리들은 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

〈보기〉

(가) $c\in(a,b)$이고 함수 $f(x)$가 열린구간 (a,b)에서 $(n+1)$번 미분가능할 때,

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k,$$

$$R_n(x)=f(x)-T_n(x)$$

로 놓으면

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

이 되는 t_x가 c와 x사이에 존재한다.

(나) 함수 $g(x)$가 $|x-c|<r$ ($r>0$, c는 상수)인 모든 $x\in\mathbb{R}$에 대하여

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$$

일 때, 모든 자연수 n에 대하여 $x_n\neq c$, $g(x_n)=0$이고 $\lim_{n\to\infty}x_n=c$인 수열 $\{x_n\}$이 존재하면 $|x-c|<r$인 모든 $x\in\mathbb{R}$에 대하여 $g(x)=0$이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

44. 실수의 집합 $\mathbb{R}$ 에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오. [2003]

(1) 모든 n에 대하여 n계도함수 $f^{(n)}(x)$가 존재함을 보이고 함수 f의 $x=0$에서의 테일러급수를 구하시오.

(2) (1)의 결과를 이용하여 실함수와 복소함수의 미분가능성이 갖는 특징의 차이를 서술하시오.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	해석학 기출문제	단원	테일러 정리

45. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$, 복소수 전체의 집합을 $\mathbb{C}$ 라 하자. 집합 X가 $\mathbb{R}$ 또는 $\mathbb{C}$일 때, 미분 가능한 함수 $f_i : X \to X$ $(i=1,\,2,\,3,\,4)$가 상수 함수가 될 충분조건으로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고르고 이유를 설명하시오. [2010]

<보기>

ㄱ. $X=\mathbb{R}$ 일 때,

$f_1^{(n)}(0)=0 \ \ (n=0,\,1,\,2,\,\cdots)$

ㄴ. $X=\mathbb{C}$ 일 때,

$f_2^{(n)}(0)=0 \ \ (n=0,\,1,\,2,\,\cdots)$

ㄷ. $X=\mathbb{R}$ 일 때,

$f_3\left(\dfrac{1}{n}\right)=0 \ \ (n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$

ㄹ. $X=\mathbb{C}$ 일 때,

$f_4\left(\dfrac{1}{n}\right)=0 \ \ (n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$

(단, $f_i^{(0)}=f_i$이고 $f_i^{(n)}$은 f_i의 n계 도함수이다.)

- 정의/정리 -

- 풀이 -

46. 다음 함수 중

$$f(ta+(1-t)b) \le tf(a)+(1-t)f(b)$$

를 만족시키지 않는 것은? (단, $0 \le t \le 1$)
[1992]

① $f(x) = x^2$

② $f(x) = \sin x \;\; (0 \le x \le \frac{\pi}{2})$

③ $f(x) = \tan x \;\; (0 \le x \le \frac{\pi}{2})$

④ $f(x) = e^x$

- 정의/정리 -

- 풀이 -

47. 폐구간 $[0, 2]$에서 정의된 함수 f가 아래와 같을 때, 다음 물음에 답하시오. [2004]

$$f(x) = \begin{cases} x & , x\text{가 유리수} \\ x^2 & , x\text{가 무리수} \end{cases}$$

(1) 함수 f는 $x=1$에서 연속임을 보이시오.

(2) 함수 f의 리만(Riemann) 적분가능성을 판별하시오.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

48. 실수 집합을 $\mathbb{R}$ 이라 하자. n차 다항식 x^n이 주어질 때, 함수 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$가 연속이면 다음 식을 만족하는 $c\in[0,1]$가 존재함을 보이시오. [2006]

$$(n+1)\int_0^1 f(x)x^n dx = f(c)$$

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	해석학 기출문제	단원	적분

49. 함수 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 가 연속일 때, 리만적분의 정의를 이용하여 극한 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$가 존재함을 보이시오. [2002]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

50. 다음을 읽고 물음에 답하시오.

> 유계인 닫힌 구간 $[a, b]$에서 유계함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$와 $[a, b]$의 분할 P에 대한 하합(lower sum)과 상합(upper sum)을 각각 $L(f, P)$, $U(f, P)$로 나타내고,
>
> $A = \sup\{L(f, P) \mid P\text{는 } [a, b]\text{의 분할}\}$
>
> $B = \inf\{U(f, P) \mid P\text{는 } [a, b]\text{의 분할}\}$
>
> 이라 두자.
>
> 이때 $[a,b]$의 임의의 분할 P, Q에 대하여 $L(f, P) \le U(f, Q)$이므로
>
> $A \le B$··········(가)
>
> 가 성립한다. 만약
>
> $A \ge B$··········(나)
>
> 도 성립하면 f는 $[a, b]$에서 리만적분가능하다고 한다.
>
> 한편, 고등학교 교과서에서는 "함수 f가 $[a, b]$에서 연속이면 극한
>
> $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \left(\Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_k = a + k\Delta x\right)$$
>
> ···(다)
>
> 는 항상 존재함이 알려져 있다."라고 설명하고 이 극한을 정적분의 정의로 사용하고 있다.

부등식 (가)를 증명하고, $[a, b]$에서 정의된 연속함수 f에 대하여 (나)가 성립함을 증명하시오. 그리고 이를 토대로 $[a, b]$에서 정의된 연속함수 f의 경우, (다)의 극한

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

가 존재함을 보이시오. [2015]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	해석학 기출문제	단원	적분

51. 정적분을 이용하여 극한값

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\ \cdots\ +\sqrt{2n}}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ \cdots\ +\sqrt{n}}$$

의 값을 구하시오. [2000]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

52. $x \neq 0$인 모든 실수에서 정의된 함수

$$f(x)= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kx^2+2n}$$

에 대하여 $\lim_{x\to 0} f(x)$의 값을 구하시오. [1996]

- 풀이 -

- 정의/정리 -

53. 닫힌 구간 $[a, b]$에서 정의된 실함수 f, g에 대하여 <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2009]

<보기>

ㄱ. 임의의 $x, y \in [a, b]$에 대하여

$$|f(x) - f(y)| \le |x - y|^{\frac{1}{2}}$$

을 만족하면 f는 $[a, b]$에서 리만적분 가능하다.

ㄴ. $[a, b]$에서 리만적분가능한 함수의 불연속점은 기껏해야 유한개이다.

ㄷ. g^2이 $[a, b]$에서 리만적분가능하면 g도 $[a, b]$에서 리만적분가능하다.

\- 정의/정리 -

\- 풀이 -

54. 함수 $f(x)$는 $f(0)=0$, $\int_0^1 f(x)dx=1$을 만족하고 그 도함수 $f'(x)$는 연속이다. 이 때, 구간 $[0,1]$에서의 도함수 $f'(x)$의 최대값 M의 범위를 구하시오. [1992]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	해석학 기출문제	단원	적분

55. <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2012]

<보기>

ㄱ. 닫힌구간 $[0,1]$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\\ 0, & x\in[0,1]-\mathbb{Q}\end{cases}$$

는 $[0,1]$에서 리만(Riemann)적분가능하다.

ㄴ. $[0,1]$에서 적분가능한 함수 f에 대하여

$$F(x)=\int_0^x f(y)\,dy$$

로 정의된 함수 F는 열린구간 $(0,1)$에서 미분가능하다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	해석학 기출문제	단원	적분

56. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 를

$$f(x)=\int_{1+2x}^{1-2x}(1-t^3\sqrt{1+3t^2})dt$$

로 정의할 때, $f'(0)$의 값을 구하시오. [2011]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	해석학 기출문제	단원	적분

57. 다음 극한 값 A, B, C 사이의 대소 관계를 구하시오. [2009 모의평가]

$$A=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$$

$$B=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_2^x e^{\sqrt{1+t^2}}dt$$

$$C=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n}{n}}\right)$$

- 정의/정리 -

- 풀이 -

58. 다음 관계식

$$\int_1^{x^2}(x^2-t)f(t)dt=\frac{1}{2}x^6+ax^4+x^2+a+1$$

을 만족하는 다항함수(polynomial function) $f(x)$ 와 상수 a를 구하시오. [2008]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

59. 폐구간 $[1,2]$에서 정의된 실함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 연속이고,

$$f(1)=f(2)=0,\ \int_1^2 f^2(x)dx=2$$

일 때, $\int_1^2 xf(x)f'(x)dx$의 값을 구하시오.

[1994]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

60. $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^4}\,dx$ 의 값을 구하시오. [1992]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

61. 구간 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수 $f(x) = \tan x$의 역함수를 $g : \mathbb{R} \to \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$라 하자. $\lim_{n \to \infty} n\left\{g\left(1+\frac{3}{n}\right) - g(1)\right\}$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 $\int_0^\infty \frac{g(x)}{1+x^2}\,dx$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [2023]

\- 정의/정리 -

\- 풀이 -

62. 다음 이상적분의 수렴, 발산을 판정하고 이유를 설명하시오.

(1) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+2\sin^2 x+x^2}}\,dx$ [2000]

(2) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$ [2012]

(3) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x+1}{x\sqrt{x^4+1}}\,dx$ [2013]

(4) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{\ln x}\,dx$ [2013]

(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x+\sqrt{1-\sin x}}\,dx$ [2013]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

63. 이차함수 $f(x)=\frac{1}{2}(x-10)^2$과 양의 정수 n에 대하여 a_n을 특이적분(이상적분, improper integral) $\int_1^\infty (f(n))^t dt$의 수렴 또는 발산에 따라 다음과 같이 정의하자.

$$a_n=\begin{cases} \int_1^\infty (f(n))^t dt &, \int_1^\infty (f(n))^t dt \text{가 수렴} \\ 0 &, \int_1^\infty (f(n))^t dt \text{가 발산} \end{cases}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값을 구하시오. [2016]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

64. 함수열 $\{f_n\}$의 A에서의 극한함수를 구하고 평등수렴여부를 판정하시오.

(1) $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$, $A = \mathbb{R}$ [1995]

(2) $f_n(x) = \dfrac{x^2 + nx}{n}$, $A = \mathbb{R}$ [1995]

(3) $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\sin(nx + n)$, $A = \mathbb{R}$ [1995]

(4) $f_n(x) = n(1-x)x^n$, $A = [0, 1]$ [2002]

(5) $f_n(x) = \dfrac{3x^n}{2x^n + 1}$, $A = [0, 2]$ [2006]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

65. 다음은 테일러(Taylor) 정리와 관련된 내용이다.

> $0 \in (a,\, b)$이고 함수 f가 $(a,\, b)$에서 무한번 미분 가능할 때, f의 n차 도함수를 $f^{(n)}$으로 나타내고
>
> $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k,\ R_n(x) = f(x) - f_n(x)$
>
> 로 놓으면
>
> $$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$
>
> 이 되는 t_x가 0과 x 사이에 존재한다.

함수 $f(x) = \ln(1+x)$에 대하여 $f_n(x)$를 구하고, $R_n(x)$를 이용하여 구간 $[0,\, 1]$에서 f_n이 f로 평등수렴(uniform convergence)함을 보이시오. [2007]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

66. 닫힌구간 $[0,1]$에서 연속함수열 $\{f_n\}$이 함수 f로 균등수렴(평균수렴, 고른수렴, uniform convergence)하고, 열린구간 $(0,1)$에서 균등연속함수열 $\{g_n\}$은 함수 g로 균등수렴한다. <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2012]

<보기>

ㄱ. f는 $[0,1]$에서 적분가능하다.
ㄴ. f와 g의 곱 fg는 $(0,1)$에서 연속이다.
ㄷ. g는 $(0,1)$에서 균등연속이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

67. $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 n^2 x e^{-2nx}\,dx$ 의 값을 구하시오. [2014]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

68. 다음 함수열 $\{f_n\}$ 중에서

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

가 성립하지 않는 것은? [2009 모의평가]

① $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$

② $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$

③ $f_n(x) = x^n$

④ $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx^2)}{n}$

⑤ $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$

- 정의/정리 -

- 풀이 -

69. 구간 $[0, 1]$에서 미분가능한 함수열 $\{f_n\}$이 함수 f로 점별수렴(pointwise convergence)한다. <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2013]

<보기>

ㄱ. 함수열 $\{f_n\}$이 균등수렴(평등수렴, 고른수렴, uniform convergence)하면 f는 균등연속 (평등연속, 고른연속, uniformly continuous) 함수이다.

ㄴ. 함수 f가 $[0, 1]$에서 리만적분가능 (Riemann integrable)하면 $\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx$ 이다.

ㄷ. 함수열 $\{f_n{}'\}$이 균등수렴하면 함수열 $\{f_n\}$도 균등수렴한다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

70. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 는 미분가능하고 도함수 f'이 $\mathbb{R}$ 에서 연속이다. 자연수 n에 대하여 함수 g_n을

$$g_n(x)=2^n\{f(x+2^{-n})-f(x)\}$$

라 하자. 함수열 $\{g_n\}$이 닫힌구간 $[0,1]$에서 f'으로 평등수렴(균등수렴, 고른수렴, uniform convergence)함을 보이시오.

또한 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g_n(x)dx=f(1)-f(0)$임을 보이시오.

[2017]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

71. 자연수 n에 대하여 함수 $f_n:[0,\infty)\to\mathbb{R}$를

$$f_n(x)=\max\left\{0,\ \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}|x-2n|\right)\right\}$$

으로 정의할 때,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)\,dx+\int_0^\infty\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)dx$$

의 값을 구하시오.
(단, $\max\{a,b\}$는 a와 b 중 작지 않은 수이다.)
[2018]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	해석학 기출문제	단원	함수열

72. 자연수 n에 대하여 함수 $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ 이

$$f_n(x) = \frac{x}{1+e^{nx}} + \sum_{k=0}^{n-1} x^k \left(e^{-kx} - e^{-(k+1)x}\right)$$

일 때, 함수열 $\{f_n\}$이 $[0,\infty)$에서 고른수렴(평등수렴, 균등수렴, uniform convergence)함을 보이시오. 또한, $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [2024]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

73. 자연수 n에 대하여 함수 $g_n : [0,\, 1] \to \mathbb{R}$ 을

$$g_n(x) = \int_0^x \{1 + (x-y)^n \sin^n(xy)\} dy$$

로 정의하고, $a_n = \int_0^1 g_n(x) dx$라 하자.

함수열 $\{g_n\}$이 $[0,\, 1]$에서 어떤 함수 g로 균등수렴(고른수렴, 평등수렴, uniform convergence)함을 보이고, $\lim_{n \to \infty} a_n$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [2020]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

74. 함수 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 가 정의역 $[0,1]$에서 연속이고, 조건

$$\int_0^1 f(x)x^n dx = 0 \ (n=0,1,2,\cdots)$$

을 만족할 때, f는 상수함수임을 증명하시오. [1998]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

75. 실함수 $f(x)$가 폐구간 $[-1,1]$에서 연속일 때, 다음 중 옳은 것은?
(단, $n=0,1,2,\cdots$) [1994]

① $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$이면 $f(x)=0$이다.

② $\int_{-1}^{1} f(x)\cos x\,dx = 0$이면 $f(x)=0$이다.

③ $\int_{-1}^{1} f(x)\sin x\,dx = 0$이면 $f(x)=0$이다.

④ $\int_{-1}^{1} f(x)x^n dx = 0$이면 $f(x)=0$이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

76. 음이 아닌 정수 n에 대하여 함수 $f_n : [0,\,1] \to \mathbb{R}$를 다음과 같이 정의 하자.

$$f_0(x) = e^x,\ f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)dt\ \ (n \ge 1)$$

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$는 $[0,\,1]$에서 고른수렴(평등수렴, 균등수렴, uniform convergence)함을 보이고, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$를 구하시오. [2021]

※ 다음 정리는 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

> 함수 $g(x)$가 미분가능하면
> $$\int_0^x g(t)e^{-t}dt = [-g(t)e^{-t}]_0^x + \int_0^x g'(t)e^{-t}dt$$
> 이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

77. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$ 라 하자. 자연수 n에 대하여 $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 와 $g_n : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ 를 각각

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x^2 + k^3},\ g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 x}$$

로 정의할 때, <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2009]

<보기>

ㄱ. $\{f_n\}$은 균등수렴(평등수렴, uniform convergence)한다.
ㄴ. $\{f_n\}$의 극한함수는 연속이다.
ㄷ. $\{g_n\}$은 균등수렴한다.
ㄹ. $\{g_n\}$의 극한함수는 연속이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

78. 함수 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 가

$$h(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+t^2}\,dt, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

일 때, 극한값 $\lim_{x\to 0} h(x)$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 자연수 n에 대하여 함수 $h_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 가 $h_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{nx^2}{n^2x^4+k^2}$ 일 때, $\mathbb{R}$ 에서 함수열 $\{h_n\}$ 이 h로 평등수렴(균등수렴, 고른수렴, uniform convergence)하는지를 판별하고 그 이유를 쓰시오. [2019]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

79. 양의 정수 n에 대하여 함수 $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ 를

$$f_n(x) = e^{\frac{x}{n^2}} - \cos\frac{x}{n^2}$$

로 정의할 때, 함수급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$가

구간 $[-1, 1]$에서 미분가능한 함수로 평등수렴(균등수렴, 고른수렴, uniform convergence)함을 보이시오. [2016]

※ 다음 정리는 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

<정리>

구간 $[a, b]$에서 정의된 미분가능한 함수열 $\{f_n\}$에 대하여, 다음 두 조건 (가), (나)를 모두 만족하는 함수급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$는 $[a, b]$에서 미분가능한 함수로 평등수렴한다.

(가) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$가 수렴하는 점 $x_0 \in [a, b]$가 존재한다.

(나) 함수급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n{}'(x)$가 $[a, b]$에서 평등수렴한다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

80. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$ 라 하자.
자연수 n에 대하여 함수 $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ 와
$g_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ 를 각각

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{n^2} & , x \le n \\ 0 & , x > n \end{cases}, \quad g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-kx}}{k^3}$$

로 정의할 때, <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2010]

<보기>

ㄱ. $\{f_n\}$과 $\{g_n\}$은 모두 균등수렴(평등수렴, 고른수렴, uniform convergence)한다.

ㄴ. $\{f_n\}$의 극한함수를 f라 하면 수열 $\left\{\int_0^\infty f_n(x)dx\right\}$는 $\int_0^\infty f(x)dx$로 수렴한다.

ㄷ. $\{g_n\}$의 극한함수를 g라 하면 $\{g_n{}'\}$은 g'으로 점별수렴(pointwise convergence) 한다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

81. 함수항 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\tan^{-1}\frac{x}{n}$가 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$에서 점별수렴(pointwise convergence)함을 보이시오. 또 함수 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\tan^{-1}\frac{x}{n}$는 균등연속(고른연속, 평등연속, uniformly continuous)임을 보이시오.

(단, $\tan^{-1}:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$는 탄젠트함수의 역함수이다.) [2018]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

82. 함수항 급수 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(3^n x)$에 대하여 다음 물음에 답하시오. [2003]

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(3^n x)$가 실수의 집합 $\mathbb{R}$에서 평등수렴함을 보이시오.

(2) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(3^n x)$라 할 때 f의 리만적분 가능성을 판별하고 $\int_0^{2\pi} f(x)dx$를 구하시오.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

83. 실수열 $\{r_k\}$ $(0 < r_k < 1,\ k = 1, 2, 3, \cdots)$이 있다. 자연수 n에 대하여 함수 $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ 를

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & , x \le r_n \\ \dfrac{1}{2^n} & , x > r_n \end{cases}$$

로 정의하면 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$가 수렴한다.

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 일 때, <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2011]

<보기>

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$은 $[0, 1]$에서 균등수렴(고른수렴, 평등수렴, uniform convergence)한다.

ㄴ. f는 $[0, 1] - \{r_k \mid k$는 자연수$\}$에서 연속이다.

ㄷ. $\int_0^1 f(x)dx = f(1)$

- 정의/정리 -

- 풀이 -

84. 자연수 n에 대하여 함수 $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$를

$$f_n(x) = \frac{8(\sin x)^{2n-1}\cos x}{1+(\sin x)^{2n}}$$

로 정의하자. $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,dx$ 일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+2}$ 의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한, 함수항 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$가 닫힌구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 균등수렴(평등수렴, 고른수렴, uniform convergence)하는지를 판별하고 그 이유를 쓰시오. [2022]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

85. 다음 급수의 수렴, 발산을 판정하고 이유를 설명하시오.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ [1992]

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$ [1992]

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ [1992]

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$ [1992]

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ [1996]

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n$ [1996]

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ [1996]

(8) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ [1996]

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ [1997]

(10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^n}$ [2005]

(11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2+7}}$ [2011]

(12) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin\frac{\pi}{\sqrt{n}}$ [2011]

- 정의/정리 -

과목	해석학 기출문제	단원	급수

- 풀이 -

86. 교대급수판정법을 기술하고, 교대급수판정법을 이용하여 무한급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!}{(2^n\cdot n!)^2}$$

가 수렴함을 보이시오.

(단, $\dfrac{(2n-1)!}{(2^n\cdot n!)^2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\cdots\times\dfrac{2n-1}{2n}\times\dfrac{1}{2n}$ 이다.) [2007]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

87. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_n = \int_0^1 (1-x^2)^n \, dx$$

일 때, $a_{n+1} = f(n)a_n$을 만족시키는 $f(n)$을 구하고, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^{\alpha}$이 수렴하는 실수 α의 범위를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [2024]

※ 다음 식은 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

모든 자연수 n에 대하여

$$n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n} \le n! \le n^{n+\frac{1}{2}}e^{1-n}$$

이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

88. 연속함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 와 실수열 $\{x_n\}$에 대하여 다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 이유를 설명하시오. [2012]

(1) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^3$이 수렴하면 수열 $\{f(x_n)\}$은 코시수열 (Cauchy sequence)이다.

(2) f가 단조증가이고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$이 수렴하면 $\{x_n\}$은 수렴한다.

(3) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$이 수렴하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$도 수렴한다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -

89. 모든 항이 양수인 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴할 때, <보기>의 급수에 대하여 수렴여부를 판정하고 이유를 설명하시오. [2013]

<보기>

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + 1}$

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{a_n} - 1\right)$

- 정의/정리 -

- 풀이 -

90. 멱급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(x-3)^n$을 수렴하도록 하는 정수 x의 개수를 구하시오. [2012]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

91. 다음 거듭제곱급수의 수렴반경을 구하시오.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$ [1992]

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n + 12^n} x^{2n}$ [2011]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	해석학 기출문제	단원	멱급수의 수렴반경, 수렴구간

92. 거듭제곱급수(멱급수, power series)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{5^n \sqrt{n}}$ 의 수렴구간을 구하시오. [2014]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	해석학 기출문제	단원	멱급수의 수렴반경, 수렴구간

93. 자연수 n에 대하여 함수 $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ 를

$$f_n(x) = (nx)^n (1-x)^{n^2}$$

으로 정의하고, f_n의 최댓값을 M_n이라 하자.

거듭제곱 급수(멱급수, power series) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n x^n$의 수렴반경(수렴반지름, radius of convergence)을 풀이 과정과 함께 쓰시오.

또한 함수항 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$가 $[0, 1]$에서 고른수렴(평등수렴, 균등수렴, uniform convergence)하는지 판별하고 그 이유를 쓰시오. [2023]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

과목	해석학 기출문제	단원	멱급수의 수렴반경, 수렴구간

94. $|x|<1$일 때 $\dfrac{x}{(1+x)^2}$의 매클로린 급수 (Maclaurin series)를 구하시오. [2009 모의평가]

[도움말 : $|x|<1$일 때 $\dfrac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n$이다.]

- 정의/정리 -

- 풀이 -

95. $|x|<1$인 실수 x에 대하여

$$\frac{1}{(1-x)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n,\quad \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.

또한, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$의 값을 쓰시오. [2022]

※ 다음 식은 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

> $|x|<1$인 실수 x에 대하여
> $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ 이다.

- 정의/정리 -

- 풀이 -