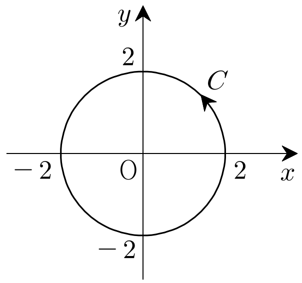
[정현민 전공수학 2026대비 교재 수정사항]

*공통사항: 2026학년도 기출문제 추가

미분적분학			
위치	수정 전	수정 후	비고
유제 3-21	$=-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+u}\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}\,\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}d\theta$ $=-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(1+u)^2}d\theta$	$g'\left(\frac{1}{2}\right)$ 계산 과정에서 $d\theta$를 du로 수정 $=-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+u}\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}\,\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du$ $=-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(1+u)^2}du$	풀이 수정
유제 3-21		x, y축을 $\frac{\pi}{4}$만큼 회전한 u, v축을 생각하자. $u=\frac{x+y}{\sqrt{2}},\ v=\frac{-x+y}{\sqrt{2}} \Rightarrow J=1$ $D(t)=\left\{(u,v) \mid u^2+v^2\le 1,\ -u\le v\le u,\ u\ge \frac{t}{\sqrt{2}}\right\}$ 이므로 $g(t)=g(0)-\int_0^{t/\sqrt{2}}\int_{-u}^{u} f(u,v)dvdu$ 이다. 그러므로 $h(u)=\int_{-u}^{u} f(u,v)dv$라 하면 $g'(t)=\frac{d}{dt}\left(-\int_0^{t/\sqrt{2}} h(u)du\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}h\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$ 이다. 따라서 $g'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}h\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ $=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1/2\sqrt{2}}^{1/2\sqrt{2}} f\left(\frac{1}{2\sqrt{2}},v\right)dv$ $=-2\int_{-1/2\sqrt{2}}^{1/2\sqrt{2}} \lvert v\rvert dv$ $=-4\int_0^{1/2\sqrt{2}} vdv$ $=-\frac{1}{4}$ 이다.	풀이 추가

미분적분학			
위치	수정 전	수정 후	비고
유제 3-25	(1) E는 평면 $z=1+x+y$ 아래와 xy평면에서 곡선 $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $x=1$에 의해 유계된 영역	(1) E는 평면 $z=0$와 평면 $z=1+x+y$ 그리고 xy평면상의 곡선 $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $x=1$로 둘러싸인 입체 영역	문제 수정
필수예제 43	(ⅱ) $\Leftrightarrow$ $\tan\phi \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ $(\because \cos\phi > 0)$	(ⅱ) $\Leftrightarrow$ $\tan\phi \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ $(\because \cos\phi > 0)$	풀이 수정
유제 4-4			내용 추가
유제 4-8		A는 장축이 $\frac{2}{\sqrt{2}}$, 단축이 $\frac{2}{\sqrt{3}}$인 타원의 내부이므로 $D=A$의 넓이는 $\frac{\pi}{\sqrt{6}}$이다.	풀이 추가
필수예제 52 뒤		**필수예제 53 라이프니츠 법칙, 정리, 유제 추가** **미적 부록 1)**	내용 추가
필수예제 52 뒤		유제 3-21 이동	내용 이동

<table>
<tr><th colspan="4">미분적분학</th></tr>
<tr><th>위치</th><th>수정 전</th><th>수정 후</th><th>비고</th></tr>
<tr><td>종합문제 3</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{a_n}$이 수렴한다고 가정하자.
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n}$은 교대급수 판정법에 의해 수렴하므로
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{a_n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n}$$
도 수렴한다. 그러면
$$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{2n}=\begin{cases}\frac{1}{2n}, & n\text{이 홀수}\\ 0, & n\text{이 짝수}\end{cases}$$
이므로
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{a_n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n}&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{a_n}-\frac{(-1)^{n+1}}{2n}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{2n}\right)(-1)^{n+1}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=\infty\end{aligned}$$
가 되어 모순이다.</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{a_n}$이 수렴한다고 가정하자.
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n}$은 교대급수 판정법에 의해 수렴하므로
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{a_n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n}$$
도 수렴한다. 그러면
$$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{2n}=\begin{cases}\frac{1}{2n}, & n\text{이 홀수}\\ 0, & n\text{이 짝수}\end{cases}$$
이므로
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{a_n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{2n}\right)(-1)^{n}&=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(2n-1)}\\&=-\infty\end{aligned}$$
가 되어 모순이다.</td><td>풀이 수정</td></tr>
<tr><td>종합문제 6</td><td>$D=e^{\frac{-x^2+y^2}{2}}\begin{vmatrix}x^4+x^2y^2-5x^2-y^2+2 & -x^3y-xy^3\\ -x^3y-xy^3 & y^4+x^2y^2+5y^2+x^2+2\end{vmatrix}$</td><td>$D=e^{-x^2+y^2}\begin{vmatrix}x^4+x^2y^2-5x^2-y^2+2 & -x^3y-xy^3\\ -x^3y-xy^3 & y^4+x^2y^2+5y^2+x^2+2\end{vmatrix}$</td><td>풀이 수정</td></tr>
<tr><td>종합문제 6</td><td>$D(\pm\sqrt{2},0)=e^{-1}\begin{vmatrix}-4 & 0\\ 0 & 4\end{vmatrix}=-\frac{16}{e}<0$</td><td>$D(\pm\sqrt{2},0)=e^{-2}\begin{vmatrix}-4 & 0\\ 0 & 4\end{vmatrix}=-\frac{16}{e^2}<0$</td><td>풀이 수정</td></tr>
<tr><td>라이프니츠 법칙
유제 1-2
(보충자료)</td><td>$G''(x)=2+2e^{-x}>0$</td><td>$G''(x)=2-2e^{-x}\geq 0$</td><td>풀이 수정</td></tr>
</table>

해석학			
위치	수정 전	수정 후	비고
정의 2.13 (1), (2)	$\exists M>0$	$\exists M\in\mathbb{R}$	내용 수정
정리 2.20		(2) $\mathbb{R}$의 유계인 무한집합은 집적점을 갖는다.	내용 추가
필수예제 11 뒤		**(정리)** 유계수열 $\{x_n\}$에 대하여 s가 $\{x_n\}$의 상극한일 필요충분조건은 다음 두 가지를 만족하는 것이다. (1) 임의의 $\varepsilon>0$에 대하여 적당한 $N\in\mathbb{N}$이 존재하여 $n\geq N$인 모든 자연수 n에 대하여 $x_n<s+\varepsilon$이 성립한다. (2) 임의의 $\varepsilon>0$에 대하여 $s-\varepsilon<x_n$를 만족하는 무한히 많은 n이 존재한다. **(정리)** 유계수열 $\{x_n\}$에 대하여 t가 $\{x_n\}$의 하극한일 필요충분조건은 다음 두 가지를 만족하는 것이다. (1) 임의의 $\varepsilon>0$에 대하여 적당한 $N\in\mathbb{N}$이 존재하여 $n\geq N$인 모든 자연수 n에 대하여 $t-\varepsilon<x_n$이 성립한다. (2) 임의의 $\varepsilon>0$에 대하여 $x_n<t+\varepsilon$를 만족하는 무한히 많은 n이 존재한다.	정리 추가
필수예제 11 뒤		유제 2-13 이동	내용 수정
유제 4-2	$\varepsilon:=\dfrac{f(c)}{2}>0$에 대하여 $\|x-c\|<\delta \Rightarrow \|f(x)-f(c)\|<\dfrac{f(c)}{2}$ $\Rightarrow 0<\dfrac{f(c)}{2}<f(x)$ 을 만족하는 $\delta>0$가 존재한다.	$\varepsilon:=f(c)>0$에 대하여 $\|x-c\|<\delta \Rightarrow \|f(x)-f(c)\|<f(c)$ $\Rightarrow 0<f(x)$ 을 만족하는 $\delta>0$가 존재한다.	풀이 수정
필수예제 17	(1) Dirichlet 함수 $f(x)=\begin{cases}1\,,\ x\in\mathbb{Q}\\0\,,\ x\in\mathbb{Q}^c\end{cases}$는 $\mathbb{R}$의 모든 점에서 불연속이다.	(1) Dirichlet 함수 $f(x)=\begin{cases}1\,,\ x\in\mathbb{Q}\\0\,,\ x\in\mathbb{Q}^c\end{cases}$는 $\mathbb{R}$의 모든 점에서 불연속임을 보이시오.	내용 수정
필수예제 19	(i) f는 $\mathbb{R}$에서 연속인 함수	(i) g는 $\mathbb{R}$에서 연속인 함수	내용 수정

해석학			
위치	수정 전	수정 후	비고
유제 4-12		ㄴ. (풀이2) $y\in\overline{g(S)} \Rightarrow y\in g(S)$임을 보이자. $y\in\overline{g(S)}$ $\Rightarrow \exists\{y_n\}$ s.t $\forall n\in\mathbb{N}$, $y_n\in g(S)$, $\lim_{n\to\infty}y_n=y$ $\Rightarrow \exists\{x_n\}$ s.t $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_n\in S$, $g(x_n)=y_n$ $S\subset[-1,1]$이므로 Bolzano-Weierstrass 정리에 의해 $\{x_n\}$은 수렴하는 부분수열 $\{x_{n_k}\}$가 존재한다. $\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=x$라 하면 $\{x_{n_k}\}$은 S에서의 수열이므로 $x\in\overline{S}=S$이고 g가 연속함수이므로 $$y=\lim_{k\to\infty}g(x_{n_k})=g(x)$$ 가 성립하여 $y\in g(S)$이다. 따라서 $\overline{g(S)}=g(S)$이므로 $g(S)$는 닫힌집합이다.	풀이 추가
유제 4-21	(ⅰ) $x\in[0,\infty)$라 하자.	(ⅰ) $x\in(0,\infty)$라 하자.	풀이 수정
유제 4-25 (2)	$\lvert f'(x)\rvert=\left\lvert\frac{1}{x^2}\right\rvert\lvert\sin x\rvert+\left\lvert\frac{1}{x}\right\rvert\lvert\cos x\rvert\le 2$	$\lvert f'(x)\rvert\le\left\lvert\frac{1}{x^2}\right\rvert\lvert\sin x\rvert+\left\lvert\frac{1}{x}\right\rvert\lvert\cos x\rvert\le 2$	풀이 수정
유제 4-25 (3)	$\Rightarrow \left\lvert\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right\rvert=\frac{\lvert x-y\rvert}{xy}\le\frac{\delta}{a^2}=\varepsilon$	$\Rightarrow \left\lvert\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right\rvert=\frac{\lvert x-y\rvert}{xy}<\frac{\delta}{a^2}=\varepsilon$	풀이 수정
유제 6-5	$\lvert f(c)\rvert>0$이고 $\lvert f(x)\rvert$는 c에서 연속이므로	$\lvert f(c)\rvert-(M-\varepsilon)>0$이고 $\lvert f(x)\rvert$는 c에서 연속이므로	풀이 수정
정의 6.12	$[a,b]$의 임의의 분할 $P=\{x_0,\cdots,x_n\}$에 대하여 $$\lVert P\rVert=\max\{\Delta x_k \mid k=1,2,\cdots,n\}$$ 을 분할 P의 **노름(norm)**이라고 한다.	정의 6.1로 이동	내용 수정

해석학			
위치	수정 전	수정 후	비고
유제 6-11	주어진 $\varepsilon>0$에 대하여 $\frac{1}{N}<\frac{\varepsilon}{4}$인 자연수 $N(>1)$이 존재한다. $\parallel P\parallel<\frac{\varepsilon}{4N}$을 만족하도록 $[0,1]$의 분할 $P=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 을 선택하자. $A=\left\{\frac{1}{m}\mid m\in\{1,2,\cdots,N\}\right\}$에 대하여 $I:=\{k\in\{1,2,\cdots,n\}\mid [x_{k-1},x_k]\cap A\neq\varnothing\}$, $J:=\left\{k\in\{1,2,\cdots,n\}\mid x_k>\frac{1}{N}\right\}-I$ 라고 하면 $\lvert I\rvert\le 2N$이다. $U(f,P)-L(f,P)=U(f,P)$ $\le\frac{1}{N}+\sum_{k\in I}M(f,I_k)\Delta x_k+\sum_{k\in J}M(f,I_k)\Delta x_k$ $<\frac{\varepsilon}{4}+\sum_{k\in I}\frac{\varepsilon}{4N}<\varepsilon$ 이므로 f는 $[0,1]$에서 적분가능하다. $\forall P\in\wp[0,1],\ L(f,P)=0$ 이므로 $\int_0^1 f(x)\,dx=\underline{\int_0^1} f\,dx=0$ 이 성립한다.	주어진 $\varepsilon>0$에 대하여 $y<\varepsilon$인 $y\in(0,1)$이 존재한다. $\frac{1}{N}<y$를 만족하는 자연수 N에 대하여 $\parallel P'\parallel<\frac{\varepsilon-y}{2N}$인 $[y,1]$의 분할 $P'=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ 을 고려하면 $P=\{0,y\}\cup P'$은 $[0,1]$의 분할이다. $I:=\{k\in\{1,2,\cdots,n\}\mid [x_{k-1},x_k]\cap E\neq\varnothing\}$, 라고 하면 $\lvert I\rvert<2N$이다. $U(f,P)-L(f,P)=U(f,P)$ $\le y+\sum_{k\in I}\parallel P'\parallel$ $<y+2N\parallel P'\parallel$ $<\varepsilon$ 이므로 f는 $[0,1]$에서 적분가능하다. $\forall P\in\wp[0,1],\ L(f,P)=0$ 이므로 $\int_0^1 f(x)\,dx=\underline{\int_0^1} f\,dx=0$ 이 성립한다.	풀이 수정
필수예제 57 (1), (3)	$\sup\{\lvert f_n(x)-f(x)\rvert : x\in\mathbb{R}\}$	$\sup\{\lvert f_n(x)-f(x)\rvert : x\in A\}$	내용 수정
유제 7-28	$\lvert f_n(x)\rvert=\max\left\{\frac{1}{n^2\ln(2n)},\frac{1}{n^2}\right\}=\frac{1}{n^2}$	$\lvert f_n(x)\rvert\le\max\left\{\frac{1}{n^2\ln(2n)},\frac{1}{n^2}\right\}=\frac{1}{n^2}$	풀이 수정
필수예제 70 뒤		**필수예제 71 비판정법, 근판정법, 정리, 유제 추가** **해석 부록 1)**	내용 추가

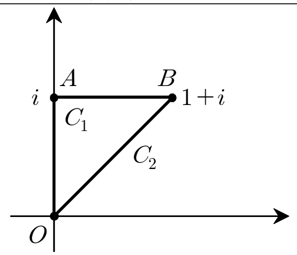
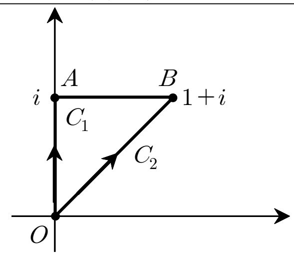
해석학			
위치	수정 전	수정 후	비고
정리 8.17 뒤		**(정리)** 구간 $[a, b]$에 대하여 $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$가 $[a, b]$에서 수렴하면 다음이 성립한다. (1) $f(x)$는 $[a, b]$에서 연속이다. (2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$은 $[a, b]$에서 $f(x)$로 균등수렴한다.	정리 추가
종합문제 3	주어진 정리에 의하여 $$\int_0^{1/\sqrt{n}} nf(x)e^{-nx}dx = f(x_n)\int_0^{1/\sqrt{n}} ne^{-nx}dx$$ 을 만족하는 $x_n \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$이 존재한다.	일반화된 적분의 평균값 정리에 의하여 $$\int_0^{1/\sqrt{n}} nf(x)e^{-nx}dx = f(x_n)\int_0^{1/\sqrt{n}} ne^{-nx}dx$$ 을 만족하는 $x_n \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$이 존재한다.	풀이 수정
종합문제 24	$\forall x_0 \in [0, x_0+1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$	$\forall x IN[0, x_0+1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$	풀이 수정
일반화된 적분의 평균값 정리 (보충자료)	(i) $g(0)=0$	$g(x)=0$	내용 수정

현대대수학			
위치	수정 전	수정 후	비고
정의 1.30	※ 순환군은 가환군이다. 또한 순환군의 생성원은 유일하지 않다.	※ 순환군은 가환군이다. 또한 순환군의 생성원은 유일하지 않을 수 있다.	내용 수정
정리 1.33 뒤		정리 1.67 이동	정리 이동
유제 1-35 (1)	$(\subset)$ $f\in LHS$ $\Rightarrow$ $f(n) = nf(1) = n(a,b) = (na, nb)$ $\uparrow$ $\le t f(1) = (a, b)$	$(\subset)$ $f\in LHS$ $\Rightarrow$ $f(n) = nf(1) = n(a,b) = (na, nb)$	풀이 수정
필수예제 26	(3) 서로 다른 우잉여류는	(3) 서로 다른 좌잉여류는	풀이 수정
필수예제 27	또한 G의 위수가 pq이면 $G=HK$임을 보이시오.	또한 $G=HK$임을 보이시오.	문제 수정
정리 1.66		(3) G가 순환군이면 G/N도 순환군이다.	내용 추가
정리 1.83	유한 가환군 G에 대하여 $\|H\| \mid \|G\|$를 만족하는 부분군 H가 존재한다.	유한 가환군 G와 $d \mid \|G\|$를 만족하는 d에 대해 $\|H\|=d$인 부분군 H가 존재한다.	내용 수정
필수예제 46	그러면 $H \le N(H\cap K)$이므로 $9=\|H\| \mid \|N(H\cap K)\|$이고, $H\cup K \subset N(H\cap K) \le G$ 이므로 $15 = \|H\cup K\| \le \|N(H\cap K)\|$, $\|N(H\cap K)\| \mid \|G\| = 36$ 이다. 그러면 $N(H\cap K)$의 위수는 18 또는 36이다. ① $\|N(H\cap K)\| = 18$ $\Rightarrow$ $[G : N(H\cap K)] = 2$ $\Rightarrow$ $N(H\cap K)$는 G의 정규부분군 ② $\|N(H\cap K)\| = 36$ $\Rightarrow$ $H\cap K$는 $N(H\cap K) = G$의 정규부분군	그러면 $HK \subset N(H\cap K) \le G$ 이므로 $27 = \|HK\| \le \|N(H\cap K)\|$, $\|N(H\cap K)\| \mid \|G\| = 36$ 이다. 그러면 $N(H\cap K)$의 위수는 36이므로 $H\cap K$는 $N(H\cap K) = G$의 정규부분군이다. 따라서 단순군이 아니다.	풀이 수정
필수예제 51	(2) (ⅰ) $x-y=(a-a')1+(b+b')i+(c+c')j+(d+d')k\in H$	(2) (ⅰ) $x-y=(a-a')1+(b-b')i+(c-c')j+(d-d')k\in H$	풀이 수정
정리 2.39	$\mathbb{Z}_n/\langle a\rangle$는 $\mathbb{Z}_{\gcd(a,\,n)}$과 환동형이다.	$\mathbb{Z}_n/\langle a\rangle$는 $\mathbb{Z}_{\gcd(a,\,n)}$과 환동형이다. ※ 군에서도 성립한다.	내용 추가
유제 2-29	(5) $(\subset)$ $\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}_p/M$라 하자.	(5) $(\subset)$ $\frac{a}{b}+M\in\mathbb{Q}_p/M$라 하자.	풀이 수정
유제 2-29	(7) $\frac{a}{b}(\neq 0)\in I$라 하고 $a>0$라 하자.	(7) $\frac{a}{b}(\neq 0)\in I$라 하자.	풀이 수정
필수예제 80	(ⅲ) $\langle x\rangle$는 $\mathbb{Z}[x]$의 극대 아이디얼이다.	(ⅲ) $\langle x, 2\rangle$는 $\mathbb{Z}[x]$의 극대 아이디얼이다.	풀이 수정

현대대수학			
위치	수정 전	수정 후	비고
정리 2.95	D는 주 아이디얼 정역은 유일인수분해정역이다.	주 아이디얼 정역은 유일인수분해정역이다.	내용 수정
정리 2.95 뒤		정리 2.111, 정리 2.112, 유제 2-94 이동	내용 수정
정리 2.100	d는 square free라 하자. 만약 $p\in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$이고 $N(p)$가 소수이면 p는 $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$에서 기약원이다.	d는 square free라 하자. 만약 $p\in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$이고 $\lvert N(p)\rvert$가 소수이면 p는 $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$에서 기약원이다.	내용 수정
정리 2.103 뒤		홀수인 소수 p에 대하여 $p=a^2+b^2$인 정수 a, b가 존재하기 위한 필요충분조건은 $p\equiv 1 \pmod 4$이다.	내용 추가
필수예제 107	$g(x)\in F[x]$, $g(u)=0 \Rightarrow irr(u, F) \mid g(x)$	차수가 서로소인 경우의 확대체 차수	제목 수정
유제 3-16	$F[x]$에서 최소다항식이 홀수 차수이면	$F[x]$에서 u에 대한 최소다항식이 홀수 차수이면	문제 수정
유제 3-31	$[K:\mathbb{Z}_2]=6$ 이므로 $\lvert K\rvert=2^6$ 이다.	$[F:\mathbb{Z}_2]=6$ 이므로 $\lvert F\rvert=2^6$ 이다.	풀이 수정
정리 3.48	$K=F(u_1,\cdots,u_n)$는 F의 확대체일 때, 만약 $\sigma,\tau\in G(K/F)$이고 각각의 $i=1,2,\dots,n$에 대하여 $\sigma(u_i)=\tau(u_i)$이면 $\sigma=\tau$이다.	$G(F(u_1,\cdots,u_n)/F)$의 두 원소 σ,τ가 각각의 $i=1,2,\dots,n$에 대하여 $\sigma(u_i)=\tau(u_i)$이면 $\sigma=\tau$이다.	내용 수정
유제 3-45		($\mathbb{Q}(\alpha\zeta,\zeta^2)=\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2},i)$인 이유) ($\subset$) $\alpha\zeta=\dfrac{1+i}{\sqrt[4]{2}}\in\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2},i)$, $\zeta^2=i\in\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2},i)$이므로 $\mathbb{Q}(\alpha\zeta,\zeta^2)\subset\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2},i)$이다. ($\supset$) $\zeta=\dfrac{\zeta^2(1+\zeta^2)}{(\alpha\zeta)^2}\in\mathbb{Q}(\alpha\zeta,\zeta^2)$이므로 $\sqrt[4]{2}=\dfrac{\alpha\zeta}{\zeta}\in\mathbb{Q}(\alpha\zeta,\zeta^2)$, $i=\zeta^2\in\mathbb{Q}(\alpha\zeta,\zeta^2)$ 가 성립하여 $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2},i)\subset\mathbb{Q}(\alpha\zeta,\zeta^2)$이다.	풀이 추가

위상수학			
위치	수정 전	수정 후	비고
정리 1.8 뒤		함수 $f: X \to Y$와 $A_i, A, A' \subset X$, $B_i, B, B' \subset Y$에 대하여 다음이 성립한다. (1) $f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$ (1′) $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$ (2) $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i)$ (2′) $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$ (3) $f(A - A') \supset f(A) - f(A')$ (3′) $f^{-1}(B - B') = f^{-1}(B) - f^{-1}(B')$ f가 단사인 경우 (2), (3)은 등호가 성립한다.	정리 추가
정의 2.7 뒤		**유제 2-16을 정리 2.8로 추가** **위상 부록 1)**	정리 추가
유제 2-16	(1) 여유한위상공간 $(X, \mathfrak{I}_f)$에서 닫힌집합이 될 필요충분조건을 제시하시오. (2) 여가산위상공간 $(X, \mathfrak{I}_c)$에서 닫힌집합이 될 필요충분조건을 제시하시오.	여유한 위상공간 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_f)$와 여가산 위상공간 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_c)$에서 다음 집합의 폐집합 여부를 판정하시오. (1) $(0, 1)$ (2) $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (3) $\mathbb{Q}^c$ (4) $\{1, 2, 3, \cdots, 100\}$	문제 추가
정리 2.12 뒤		**정리** A를 위상공간 X의 부분집합이라 하자. $\overline{A} = A \cup A'$이다.	정리 추가
필수예제 19 뒤		**필수예제 20 국소기저 추가, 정의 5.1을 정의 2.24로 이동** **위상 부록 2)**	내용 추가
정리 2.22 뒤		**정리 2.22의 국소기저ver 추가** 위상공간 X에 대하여 $\mathscr{B}$는 p의 국소기저라 하자. 그러면 다음이 성립한다. (1) $p \in A'$ $\Leftrightarrow$ 임의의 $B \in \mathscr{B}$에 대하여 $(B - \{p\}) \cap A \neq \varnothing$. (2) $p \in \overline{A}$ $\Leftrightarrow$ 임의의 $B \in \mathscr{B}$에 대하여 $B \cap A \neq \varnothing$. (3) $p \in b(A)$ $\Leftrightarrow$ 임의의 $B \in \mathscr{B}$에 대하여 $B \cap A \neq \varnothing$, $B \cap A^c \neq \varnothing$. (4) $a_n \to p$ $\Leftrightarrow$ 임의의 $B \in \mathscr{B}$에 대하여 $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geq N \Rightarrow a_n \in B$.	정리 추가
유제 2-48	폐포을 구하시오.	폐포를 구하시오.	문제 수정
유제 2-53 (2)	$C = \{a \in \mathbb{Z} \mid a_n \to a\}$	$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid a_n \to x\}$	문제 수정
유제 3-21	(2) (ⅱ) x를 포함하는 열린집합 $G = ((-\infty, 0) \cup (0, \infty)) \cap \mathbb{Q}$	(2) (ⅱ) x를 포함하는 열린집합 $B = ((-\infty, 0) \cup (0, \infty)) \cap \mathbb{Q}$	풀이 수정

위상수학			
위치	수정 전	수정 후	비고
필수예제 37		(1) $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}$에 보통위상이 주어져 있다.	문제 수정
필수예제 38 뒤		**필수예제 40 수열, 코시수열, 정의, 유제 추가** **위상 부록 3)** **필수예제 41 여러 가지 거리 추가. 정의 4.8을 이동** **위상 부록 4)**	내용 추가
유제 4-11 풀이		전체 풀이에서 d_1을 e로 수정	풀이 수정
필수예제 43 뒤		**필수예제 46 (제1 가산공간) $x\in\overline{A} \Leftrightarrow x$에 수렴하는 점열이 A에 존재, 정리 추가**	내용 추가
유제 6-7		$\mathbb{R}$에 보통위상이 주어져 있다.	문제 수정
정리 6.8	(1) X가 정칙공간이다.	(1) X가 정규공간이다.	정리 수정
유제 7-13		(단, $\wp(\mathbb{N})=\{G \mid G\subseteq \mathbb{N}\}$, $Y\subset X$일 때 $\mathfrak{I}_Y=\{G\cap Y \mid G\in\mathfrak{I}\}$이다.)	문제 수정
유제 7-20	(2) $\mathbb{R}=(\mathbb{R}-G)\cup\{p\}\cup A^c$이므로	(2) $\mathbb{R}=(\mathbb{R}-G)\cup\{x\}\cup A^c$이므로	풀이 수정
유제 8-8	정답: $p\in A$ 또는 $\lvert A\rvert=1$ 또는 $A=\varnothing$이면 연결집합이고 그 외에는 비연결집합이다.	정답: 연결집합	풀이 수정
정리 8.6 뒤		**정리** A가 위상공간 X에서 연결집합이면 $A\subset B\subset\overline{A}$인 B도 X에서 연결집합이다.	정리 추가
정리 8.6 뒤		**정리** $\{X_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$를 연결공간들의 한 족이라 하자. 그러면 연결공간들의 적공간 $\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$는 연결공간이다.	정리 추가
정리 8.9 뒤		**정리** A가 위상공간 X에서 공집합이 아닌 연결집합이고 개폐집합이면 성분이다.	정리 추가
유제 8-15	(1) X의 부분공간 $\mathbb{Q}$의 연결공간이다.	(1) X의 부분공간 $\mathbb{Q}$는 연결공간이다.	문제 수정

복소함수론			
위치	수정 전	수정 후	비고
유제 1-13	(sol2) $\cos\alpha=\frac{5}{4}$, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$인 α에 대하여	(sol2) $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$인 α에 대하여	풀이 수정
필수예제 9	$u(x,\,y)$, $v(x,\,y)$를 구하시오.	$u(x,\,y)$, $v(x,\,y)$, $u(r,\,\theta)$, $v(r,\,\theta)$를 구하시오.	문제 수정
유제 2-21		삭제	내용 수정
필수예제 32	$$\frac{w(b)-w(a)}{b-a}=w'(c)$$ 인 $c\in(a,\,b)$가 존재하지 않음을 보이시오.	$$\frac{w(2\pi)-w(0)}{2\pi-0}=w'(c)$$ 인 $c\in(0,\,2\pi)$가 존재하지 않음을 보이시오.	문제 수정
필수예제 35	 	 	그림 수정
유제 4-5	함수 $f(z)=\begin{cases}1 & (y<0)\\ 4y & (y>0)\end{cases}$와 $y=x^3$ 중에서 $z=-1-i$부터 $z=1+i$까지의 호 C에 대하여 $\int_C f(z)\,dz$의 값을 구하시오.	복소평면에서 곡선 C는 $y=x^3$를 따라 점 $-1-i$에서 점 $1+i$로 이동하는 경로이다. 함수 $f(z)$가 다음과 같이 정의 될 때 $\int_C f(z)\,dz$의 값을 구하시오. $$f(z)=\begin{cases}1 & ,\ Re(z)\le 0\\ 4Im(z) & ,\ Re(z)>0\end{cases}$$	문제 수정
유제 4-9	$z=e,\ 0\le t\le 2\pi$ $$\oint_{\lvert z\rvert=1} z^n dz=\int_0^{2\pi} ie^{(n+1)it}dt$$	$z=e^{it},\ 0\le t\le 2\pi$ $$\oint_{\lvert z\rvert=1} z^n dz=\int_0^{2\pi} ie^{(n+1)it}dt$$	풀이 수정
필수예제 36 뒤		**필수예제 37 경로 적분 Ⅲ, 정의 추가** **복소 부록 1)**	내용 추가
필수예제 36 뒤		유제 6-6 이동	문제 이동
유제 4-17	(6) $f(z)=\mathrm{Log}(z+2)$는 $x<-2\ (y=0)$를 제외한	(6) $f(z)=\mathrm{Log}(z+2)$는 $x\le -2\ (y=0)$를 제외한	풀이 수정
유제 4-23 앞		유제 4-18 이동	문제 이동

<table>
<tr><th colspan="4">복소함수론</th></tr>
<tr><th>위치</th><th>수정 전</th><th>수정 후</th><th>비고</th></tr>
<tr><td>정리 4.27 뒤</td><td></td><td>(일반화된 리우빌 정리)
정함수 $f(z)$에 대하여 $M>0$, $\lambda \ge 0$, $R>0$가 존재하여 $|z|>R$인 모든 z에 대하여
$$|f(z)| \le M|z|^{\lambda}$$
이 성립하면 $f(z)$는 차수가 $[\lambda]$이하인 다항함수이다. (단, $[\lambda]$는 λ를 넘지 않는 최대 정수이다.)</td><td>정리 추가</td></tr>
<tr><td>유제 4-34</td><td>$g(z)=\dfrac{f(z)}{e^z-i}$라 하자.
$$e^z-i=0 \Leftrightarrow z=\left(\frac{1}{2}+2n\right)\pi i$$
이므로 g는 $D-\left\{\frac{\pi}{2}i\right\}$에서 해석적이고 유계이므로 $\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{2}i} g(z)$가 존재한다.
$$h(z)=\begin{cases} g(z) & , z\ne\frac{\pi}{2}i \\ \lim\limits_{w\to z} g(w) & , z=\frac{\pi}{2}i \end{cases}$$
라 하면 h는 D에서 해석적이다. 모든 $z\in D$에 대해 $|g(z)|\le 1$이고
$$|g(0)|=\left|\frac{f(0)}{e^0-i}\right|=\left|\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right|=1$$
이므로 최대 절댓값 정리에 의해 g는 D에서 상수함수 $g(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}$이다. 따라서
$$f\left(-\frac{\pi i}{2}\right)=\left(e^{-\frac{\pi}{2}i}-i\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)=\sqrt{2}(1-i)$$
이다.</td><td>$g(z)=\dfrac{f(z)}{e^z-i}$라 하자. $D-\left\{\frac{\pi}{2}i\right\}$에서
$$|g(z)|\le 1=|g(0)|$$
이고 $0\in D-\left\{\frac{\pi}{2}i\right\}$이므로 최대 절댓값 정리에 의해 g는 $D-\left\{\frac{\pi}{2}i\right\}$에서 상수함수 $g(z)=\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}$이다. 따라서
$$f\left(-\frac{\pi i}{2}\right)=\left(e^{-\frac{\pi}{2}i}-i\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)=\sqrt{2}(1-i)$$
이다.</td><td>풀이 수정</td></tr>
<tr><td>필수예제 46 뒤</td><td></td><td>필수예제 48 항등정리, 정리, 유제 추가
복소 부록 2)</td><td>내용 추가</td></tr>
<tr><td>정의 6.6</td><td></td><td>삭제</td><td>내용 수정</td></tr>
</table>

복소함수론			
위치	수정 전	수정 후	비고
유제 7-8	(7) $\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^{2n}\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{C}\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^{2n}\frac{dz}{iz}$ $=\frac{1}{2^{2n+1}(-1)^{n}i}\int_{C}\frac{\left(z-z^{-1}\right)}{z}\,dz$	(7) $\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^{2n}\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{C}\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^{2n}\frac{dz}{iz}$ $=\frac{1}{2^{2n+1}(-1)^{n}i}\int_{C}\frac{\left(z-z^{-1}\right)^{2n}}{z}\,dz$	풀이 수정
필수예제 70	$z^{8}+1$은 C 내부에서 3개의 영점	$z^{8}+1$은 C 내부에서 2개의 영점	풀이 수정
정리 7.6 뒤		**(일반화된 편각원리)** $f(z)$가 양의 방향의 단순닫힌경로 C와 C의 내부에서 유한개의 극을 제외하고는 해석적이라 하자. 그리고 C위에는 $f(z)$의 영점이 없다고 하자. C의 내부에 있는 $f(z)$의 영점을 z_1, z_2, $\cdots$, z_n라 하고 극점을 w_1, w_2, $\cdots$, w_m이라 하자. 만일 $g(z)$가 C의 내부와 그 위에서 해석적일 때 다음이 성립한다. $$\frac{1}{2\pi i}\int_{C}g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{i=1}^{n}g(z_i)-\sum_{j=1}^{m}g(w_j)$$ 여기서 각 영점과 극은 그의 위수만큼 합에서 나타난다.	정리 추가
종합문제 16		**(풀이3)** $$g(z)=\frac{z^{2}f'(z)}{f(z)}=\frac{4z^{5}-5z^{2}}{z^{4}-5z+5}$$ 은 C 내부에 속한 유한개의 특이점을 제외하고 복소평면의 모든 점에서 해석적이므로 $$\int_{C}g(z)dz=2\pi i\,\underset{z=0}{Res}\left\{\frac{1}{z^{2}}g\left(\frac{1}{z}\right)\right\}$$ 이다. $$\frac{1}{z^{2}}g\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{4}{z^{3}}+15-20z+\cdots$$ 이므로 $\underset{z=0}{Res}\left\{\frac{1}{z^{2}}g\left(\frac{1}{z}\right)\right\}=0$이다. 따라서 $$\int_{C}g(z)dz=0$$ 이다.	풀이 추가

미분기하학			
위치	수정 전	수정 후	비고
유제 1-9	성립한다.	성립함을 보이시오.	문제 수정
필수예제 14	$\cos\theta$를 구하시오.	$\cos\theta$를 구하시오. (단, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$이다.)	문제 수정
정의 2.17	정칙곡선 α에 대하여	단위속력곡선 α에 대하여	내용 수정
정리 2.18	정칙곡선 α에 대하여	단위속력곡선 α에 대하여	내용 수정
정리 2.18	접촉원은 $\alpha(s)$에서 α에 접하고, $\alpha(s)$에서 곡선 α의 곡률과 같다.	접촉원은 $\alpha(s)$에서 α에 접하고, $\alpha(s)$에서 접촉원의 곡률은 곡선 α의 곡률과 같다.	내용 수정
필수예제 26 (1)		삭제	문제 수정
필수예제 26 (2)	곡선 $\alpha(t)=\left(1+t^2, t, \frac{2}{3}t^3\right)$의 T, N, B와 κ, τ를 구하시오.	곡선 $\alpha(t)=\left(1+t^2, t, \frac{2}{3}t^3\right)$의 T, N, B와 κ, τ를 구하시오. 또한 $\alpha(0)$에서 곡률중심과 곡률반경을 구하시오.	문제 수정
필수예제 30 뒤		**필수예제 31 회전수 정리와 펜첼 정리 추가, 정의, 정리 추가** **미기 부록 1)** **유제 2-44 이동**	내용 추가
필수예제 36	D	$\mathbb{R}^2$	풀이 수정
정리 4.22 뒤		곡면 $M(\subset \mathbb{R}^3)$에 놓은 정칙곡선 α에 대하여 α가 M의 주곡선이 될 필요충분조건은 $\alpha' /\!/ (U(\alpha))'$이다.	정리 추가
유제 4-10	**정답:** 1	**정답:** $K=H=1$, $\lvert\kappa_n(\mathrm{v})\rvert=1$	정답 수정
유제 4-13	$$LN-M^2=-\frac{1}{1+u^2+v^2}<0$$ 이므로 곡면 M의 모든 점은 쌍곡점이다. 따라서 각 점에서의 점근방향은 2개다. 또한 $$L=N=0$$ 이므로 점근선은 매개변수곡선들이다. 그러므로 점 $\mathrm{x}(u_0, v_0)$에 대해 점근선은 $$\mathrm{x}(u, v_0),\ \mathrm{x}(u_0, v)$$ 이고 곡면 M의 점근선은 $$\{\mathrm{x}(u, v_0), \mathrm{x}(u_0, v) \mid u_0, v_0 \in \mathbb{R}\}$$ 와 같다.	$$L=N=0$$ 이므로 매개변수곡선들은 점근선이다.	풀이 수정
필수예제 65	따라서 $\theta=\alpha$이고 $\cos\theta=0$이다.	따라서 $\cos\alpha=0$이다.	풀이 수정

미분기하학			
위치	수정 전	수정 후	비고
정리 4.26	(2) $K(p) < 0$이면 p에서 오직 두 개의 점근방향이 존재하고, 이들이 이루는 각 α은 $$\tan^2\theta = -\frac{\kappa_1(p)}{\kappa_2(p)}$$ 로 얻어지는 각 θ로 두 주방향에 의하여 이등분된다. (단, κ_1, κ_2는 주곡률이다.) (3) $K(p) = 0$이면 p가 평탄적 제점인 경우 모든 방향이 점근방향이고 그렇지 않으면 주방향이기도 한 점근방향이 하나만 존재한다.	(2) $K(p) < 0$이면 p에서 서로 다른 두 개의 점근방향이 존재한다. 이때 두 점근방향이 이루는 각을 α라 하면 α는 다음 식을 만족하는 각 θ에 의하여 두 주방향으로 이등분된다. $$\tan^2\theta = -\frac{\kappa_1(p)}{\kappa_2(p)}$$ (단, κ_1, κ_2는 주곡률이다.) (3) $K(p) = 0$이면 p가 평탄적 제점인 경우 모든 방향이 점근방향이고 그렇지 않으면 주방향과 일치하는 하나의 점근방향이 존재한다.	내용 수정
유제 4-14	$0 < u < 2\pi$, $0 < v < 2\pi$	$0 \le u < 2\pi$, $0 \le v < 2\pi$	문제 수정
유제 4-14	$$\tan^2\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \tan\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$ 이므로 $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ 또는 $-\frac{3}{5}$이다. $0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}$이므로 $\cos\alpha = \frac{3}{5}$이다.	$$\tan^2\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$ 이므로 $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ 또는 $-\frac{1}{3}$이다. $0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}$이므로 $\cos\alpha = \frac{1}{3}$이다.	풀이 수정
정의 5.9	$\int_{s(a)}^{s(b)} \kappa_g(s)ds = \int_a^b \kappa_g(t)\, \frac{ds}{dt}\, dt$	$\int_{s(a)}^{s(b)} \kappa_g(s)ds = \int_a^b \kappa_g(s(t))\, \frac{ds}{dt}\, dt$	내용 수정

미분기하학			
위치	수정 전	수정 후	비고
필수예제 75	※ $\iint_S K\,dM = -\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(1+u^2+v^2)^{-\frac{3}{2}}\,du\,dv$을 직접 구하는 방법 $\iint_S K\,dM = -\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(1+u^2+v^2)^{-\frac{3}{2}}\,du\,dv$ $= -4\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}(1+u^2+v^2)^{-\frac{3}{2}}\,du\,dv$ $= 4\left\{-\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{0}^{\frac{1}{\cos\theta}}(1+r^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot r\,dr\,d\theta\right.$ $\left.-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\frac{1}{\sin\theta}}(1+r^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot r\,dr\,d\theta\right\}$ $= 4\left\{\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{1+\sec^2\theta}}\,d\theta\right.$ $\left.+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1+\csc^2\theta}}\,d\theta-\frac{\pi}{2}\right\}$ $= 8\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{1+\sec^2\theta}}\,d\theta-2\pi$ ($t=\theta-\frac{\pi}{2}$ 치환) $= 8\cdot\frac{\pi}{6}-2\pi$ ($x=\cos\theta$ 치환) $= -\frac{2\pi}{3}$	※ $\iint_S K\,dM = -\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(1+u^2+v^2)^{-\frac{3}{2}}\,du\,dv$을 직접 구하는 방법 $\iint_S K\,dM = -\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(1+u^2+v^2)^{-\frac{3}{2}}\,du\,dv$ $= -8\iint_D (1+u^2+v^2)^{-\frac{3}{2}}\,dA$ (단, $D=\{(u,v)\mid 0\le u\le 1,\ 0\le v\le u\}$) $= -8\int_{0}^{\pi/4}\int_{0}^{\sec\theta} r(1+r^2)^{-\frac{3}{2}}\,dr\,d\theta$ $= 8\int_{0}^{\pi/4}\frac{1}{\sqrt{1+\sec^2\theta}}\,d\theta-2\pi$ $= 8\int_{0}^{\pi/4}\frac{\cos\theta}{\sqrt{2-\sin^2\theta}}\,d\theta-2\pi$ $= 8\left[\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]_{0}^{1/\sqrt{2}}-2\pi$ ($x=\sin\theta$ 치환) $= -\frac{2\pi}{3}$	풀이 수정

정수론			
위치	수정 전	수정 후	비고
정리 2.4	(2)~(7)	(3)~(8)	내용 수정
유제 2-10 문제	다음을 만족하는 정수 x, y를 구하시오.	다음을 만족하는 정수 x, y를 하나 구하시오.	내용 오류
정리 4.5	법 n에 대한 완전 잉여집합 $a_1, a_2, \cdots, a_n$에 대하여 다음이 동치이다.	법 n에 대하여 다음이 동치이다.	내용 오류
유제 4.3 풀이	$c+ia=c+ja\ (\mathrm{mod}\ n)$인 $0 \le i, j \le n-1$이 존재한다고 가정하자.	$c+ia=c+ja\ (\mathrm{mod}\ n)$, $0 \le i, j \le n-1$인 서로 다른 i, j가 존재한다고 가정하자.	내용 보완
유제 7-3 풀이	**정답:** 10 이므로 $\mathrm{ord}_5 3=2$, $\mathrm{ord}_{11} 3=5$이다. 따라서 $\mathrm{ord}_{55} 3=\mathrm{lcm}(2, 5)=10$이다.	**정답:** 20 이므로 $\mathrm{ord}_5 3=4$, $\mathrm{ord}_{11} 3=5$이다. 따라서 $\mathrm{ord}_{55} 3=\mathrm{lcm}(4, 5)=20$이다.	내용 오류
유제 7-14 풀이	(ⅲ)에서 6번째 줄 8은 짝수이므로	8은 홀수인 소수를 약수로 갖지 않으므로	내용 보완
필수예제 29 뒤		**필수예제 30 합동식의 해의 개수, 근과 계수의 관계 추가, 유제 추가 정수 부록 1)**	내용 추가
필수예제 37 풀이	또한 $b=4k+1$꼴이므로 $\left(\frac{b}{n}\right)=(-1)^{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{b-1}{2}}\left(\frac{n}{b}\right)=(-1)^{\frac{n-1}{2}\cdot 2k}\left(\frac{b}{p}\right)\left(\frac{b}{q}\right)=\left(\frac{b}{p}\right)\left(\frac{b}{q}\right)=-1$	또한 $b=4k+1$꼴이고 $n-1$이 짝수이므로 $-1=\left(\frac{n}{b}\right)=(-1)^{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{b-1}{2}}\left(\frac{b}{n}\right)=(-1)^{\frac{n-1}{2}\cdot 2k}\left(\frac{b}{p}\right)\left(\frac{b}{q}\right)=\left(\frac{b}{p}\right)\left(\frac{b}{q}\right)$	내용 보완
필수예제 40 뒤		**필수예제 37 이동**	내용 이동
필수예제 41		**필수예제 42 고차합동식의 해 문제 수정, 유제 추가 정수 부록 2)**	내용 추가

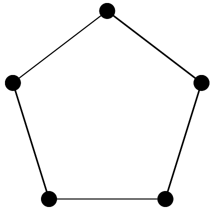
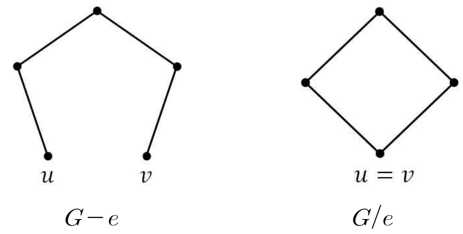
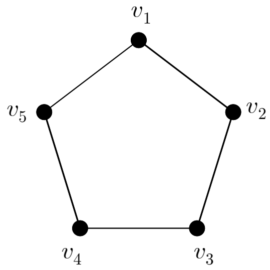
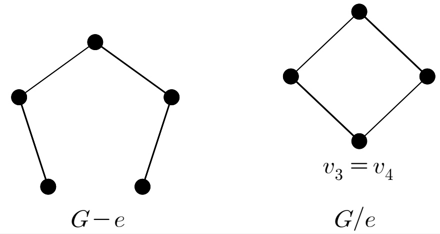
정수론			
위치	수정 전	수정 후	비고
필수예제 31 풀이	(풀이&답 전체) ① $x^{14}\equiv 1 \pmod{57}$의 해는 $\gcd(14, 56)=14$개 ② $x^{21}\equiv 1 \pmod{57}$의 해는 $\gcd(21, 56)=7$개 ③ $x^{8}\equiv 1 \pmod{57}$의 해는 $\gcd(8, 56)=8$개 이다. ①, ②의 공통해는 $x^{\gcd(14,\ 21)}\equiv 1 \pmod{57}$의 해와 같으므로 $\gcd(\gcd(14, 21), \varphi(57))=7$개다. ①, ③의 공통해는 $x^{\gcd(14,\ 8)}\equiv 1 \pmod{57}$의 해와 같으므로 $\gcd(\gcd(14, 8), \varphi(57))=2$개다. ②, ③의 공통해는 $x^{\gcd(21,\ 8)}\equiv 1 \pmod{57}$의 해와 같으므로 $\gcd(\gcd(21, 8), \varphi(57))=1$개다. ①, ②, ③의 공통해는 $x^{\gcd(14,\ 21,\ 8)}\equiv 1 \pmod{57}$의 해와 같으므로 $\gcd(\gcd(14, 21, 8), \varphi(57))=1$개다. 따라서 주어진 합동식의 해의 개수는 $(14+7+8)-(7+2+1)+1=20$개다.	**정답:** 8 $(x^{14}-1)(x^{21}-1)(x^{8}-1)\equiv 0 \pmod{57}$ $\Leftrightarrow \begin{cases}(x^{14}-1)(x^{21}-1)(x^{8}-1)\equiv 0 \pmod{3} \\ (x^{14}-1)(x^{21}-1)(x^{8}-1)\equiv 0 \pmod{19}\end{cases}$ (i) $(x^{14}-1)(x^{21}-1)(x^{8}-1)\equiv 0 \pmod{3}$ $x=0, 1, 2$를 각각 대입하여 해를 구하면 $x\equiv 1, 2 \pmod{3}$인 2개다. (ii) $(x^{14}-1)(x^{21}-1)(x^{8}-1)\equiv 0 \pmod{19}$ ① $x^{14}\equiv 1 \pmod{19}$의 해는 $\gcd(14, 18)=2$개 ② $x^{21}\equiv 1 \pmod{19}$의 해는 $\gcd(21, 18)=3$개 ③ $x^{8}\equiv 1 \pmod{19}$의 해는 $\gcd(8, 18)=2$개 이다. ①, ②의 공통해는 $x^{\gcd(14,\ 21)}\equiv 1 \pmod{19}$의 해와 같으므로 $\gcd(\gcd(14, 21), 18)=1$개다. ①, ③의 공통해는 $x^{\gcd(14,\ 8)}\equiv 1 \pmod{19}$의 해와 같으므로 $\gcd(\gcd(14, 8), 18)=2$개다. ②, ③의 공통해는 $x^{\gcd(21,\ 8)}\equiv 1 \pmod{19}$의 해와 같으므로 $\gcd(\gcd(21, 8), 18)=1$개다. ①, ②, ③의 공통해는 $x^{\gcd(14,\ 21,\ 8)}\equiv 1 \pmod{19}$의 해와 같으므로 $\gcd(\gcd(14, 21, 8), 18)=1$개다. 따라서 $(x^{14}-1)(x^{21}-1)(x^{8}-1)\equiv 0 \pmod{19}$의 해의 개수는 $(2+3+2)-(1+2+1)+1=4$개다. 따라서 법 57에 대한 해의 개수는 $2\cdot 4=8$개다.	내용 오류

선형대수학			
위치	수정 전	수정 후	비고
정리 3.4 뒤		벡터공간 V의 부분공간 W_1, W_2에 대하여 $$W_1+W_2=\{\mathrm{w}_1+\mathrm{w}_2 \mid \mathrm{w}_1\in W_1, \mathrm{w}_2\in W_2\}$$ 라 정의하면 $W_1\cap W_2$, W_1+W_2는 V의 부분공간이다.	정리 추가
유제 3-29	(2) ($\Rightarrow$) 두 번째 줄 $\mathrm{v}=a_1\mathrm{u}_1+\cdots+a_r\mathrm{u}_n$	$\mathrm{v}=a_1\mathrm{u}_1+\cdots+a_n\mathrm{u}_n$	풀이 수정
정리 4.5		등호가 성립할 필요충분조건은 u, v가 일차종속인 것이다.	내용 수정
유제 5-5	① ($\supset$) 증명 마지막 부분 $P(w)=w\in W$	$w=P(w)\in Im(P)$	풀이 수정
유제 6-39	3×3 실계수 행렬 A에 대하여 $\det(A)=1$일 때 다음을 물음에 답하시오. (1) $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$가 A의 고윳값일 때, A의 고윳값을 모두 구하시오. (2) $A^{100}=aA^2+bA+cI_3$일 때, $a+b+c$의 값을 구하시오.	3×3 실계수 행렬 A에 대하여 $\det(A)=1$이고 $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$가 A의 고윳값일 때, 다음 물음에 답하시오. (1) A의 고윳값을 모두 구하시오. (2) $A^{100}=aA^2+bA+cI_3$일 때, $a+b+c$의 값을 구하시오.	문제 수정
종합문제 3	(단, $M_n(\mathbb{R})$은 $n\times n$ 실계수 행렬 전체의 집합이다.)	삭제	문제 수정
종합문제 14	θ만큼 회전한 후 회전한 축에서 x축으로 a만큼 y축으로 b만큼 이동한 그래프이다.	θ만큼 회전한 후 회전한 축을 x', y'이라 할 때 x'축으로 a만큼 y'축으로 b만큼 이동한 그래프이다.	문제 수정

이산수학

위치	수정 전	수정 후	비고
필수예제 13	(2) $=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n}\binom{n}{i}(n-i)!$	$=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\binom{n}{i}(n-i)!$	풀이 수정
유제 1-63	비둘기집 원리에 의하여 원소의 합이 같은 두 부분집합 C, D가 존재한다. $X=C-(C\cap D),\ Y=D-(C\cap D)$ 라 하면 X, Y는 서로 소이며 원소의 합이 같은 두 부분집합이다.	비둘기집 원리에 의하여 원소의 합이 같은 서로 다른 두 부분집합 C, D가 존재한다. $X=C-(C\cap D),\ Y=D-(C\cap D)$ 라 하자. 일반성을 잃지 않고 $X=\varnothing$라 가정하면 $C\subsetneq D$이므로 $\sum_{x\in C}x<\sum_{x\in D}x$가 되어 모순이다. 따라서 X, Y는 공집합이 아니고 서로 소이며 원소의 합이 같은 두 부분집합이다.	풀이 수정
필수예제 26	아래와 같이 정의된 세 수 a_7, b_7, c_7은 모두 같은 수이다. (1) a_7 : 세 문자 A, B, C 에서 중복을 허락하여 7개의 문자를 뽑는 방법 중 A는 2개 이하, B와 C는 3개 이하가 되도록 뽑는 방법의 수 (2) b_7 : 다음 방정식의 정수해 (x_1, x_2, x_3)의 개수 $x_1+x_2+x_3=7$ (단, $0\le x_1\le 2,\ 0\le x_2, x_3\le 3$) (3) c_7 : 다항식 $f(x)=(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)^2$에서 x^7의 계수	아래와 같이 정의된 세 수 a_5, b_5, c_5은 모두 같은 수이다. (1) a_5 : 각 부분이 3을 넘지 않는 5의 분할 (2) b_5 : 방정식 $x_1+2x_2+3x_3=5$의 음이 아닌 정수해 (x_1, x_2, x_3)의 개수 (3) c_5 : 다항식 $f(x)=\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^3}$에서 x^5의 계수	내용 수정

이산수학			
위치	수정 전	수정 후	비고
필수예제 31	(나) 4의 사용 횟수는 각각 음이 아닌 정수이다. 6자리 자연수를 만들려고 할 때, 만들 수 있는 서로 다른 자연수의 개수를 구하시오. (풀이) $1, 2, 3$의 사용 횟수의 합이 짝수면 각각의 사용횟수를 순서쌍으로 나타낼 때 다음의 경우를 갖는다. (홀수, 홀수, 짝수), (홀수, 짝수, 홀수), (짝수, 홀수, 홀수), (짝수, 짝수, 짝수) 따라서 이 조건을 만족하는 경우의 수는 다음 지수생성함수의 $\frac{x^6}{6!}$의 계수와 같다. $3\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)e^x+\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^3e^x$ $=\frac{3}{8}\left(e^{4x}-e^{2x}+e^{-2x}-1\right)+\frac{1}{8}\left(e^{4x}+3e^{2x}+e^{-2x}+3\right)=\frac{1}{2}\left(e^{4x}+e^{-2x}\right)$ $=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(4^n+(-2)^n\right)\frac{x^n}{n!}$ 이므로 $2^{11}+2^5=2080$이다.	(나) 4의 사용 횟수는 음이 아닌 정수이다. 6자리 자연수를 만들 때, 가능한 서로 다른 자연수의 개수를 구하시오. (풀이) 다음 지수생성함수의 $\frac{x^6}{6!}$의 계수와 같다. $\left(\frac{(3x)^0}{0!}+\frac{(3x)^2}{2!}+\frac{(3x)^2}{4!}+\cdots\right)\left(\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)$ $=\frac{e^{3x}+e^{-3x}}{2}\cdot e^x=\frac{1}{2}\left(e^{4x}+e^{-2x}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(4^n+(-2)^n\right)\frac{x^n}{n!}$ 이므로 $\frac{4^6+(-2)^6}{2}=2^{11}+2^5=2080$이다.	내용 수정
유제 2-56	$2\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2\left(e^x-1\right)^2$ $=\frac{1}{2}\left(e^{2x}+e^{-2x}-2\right)\left(e^{2x}-2e^x+1\right)$ $=\frac{1}{2}\left(e^{4x}-2e^{3x}-e^{2x}+4e^x-2e^{-x}+e^{-2x}+1\right)$ $=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(4^n-2\cdot3^n-2^n+4-2(-1)^n+(-2)^n\right)\frac{x^n}{n!}+\frac{1}{2}$ 이므로 $2^{11}-3^6+1=1320$이다.	$2\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\left(e^x-1\right)^2$ $=\frac{1}{2}\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)\left(e^{2x}-2e^x+1\right)$ $=\frac{1}{2}\left(e^{4x}-2e^{3x}+e^{2x}+2e^{-x}-e^{-2x}-1\right)$ $=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(4^n-2\cdot3^n+2^n+2(-1)^n-(-2)^n\right)\frac{x^n}{n!}-\frac{1}{2}$ 이므로 $2^{11}-3^6+1=1320$이다.	풀이 수정
유제 3-8 (2)		삭제	내용 수정
필수예제 42 (5)	$K_{3,3}$의 부분분할그래프를 포함	$K_{3,3}$의 부분분할그래프와 동형인 부분그래프를 포함	내용 수정
정의 3.18 (2)	그에 따라 분할된 모든 변을 첨가한 그래프를	그에 따라 분할된 모든 변을 첨가한 그래프 또는 그래프 $G(V, E)$를	내용 수정
유제 3-20	$K_{3,3}$의 부분분할그래프를 포함	$K_{3,3}$의 부분분할그래프와 동형인 부분그래프를 포함	풀이 수정
유제 3-20 (3)		(풀이2) 삭제	내용 수정

이산수학			
위치	수정 전	수정 후	비고
유제 3-39	(문제)  (풀이)  	(문제)  (풀이)  	내용 수정
유제 3-53	길이가 3인 길의 개수 $a_{i,\,j}$라	길이가 3인 길의 개수를 $a_{i,\,j}$라	문제 수정
필수예제 56		(문제 삭제) D의 $(1,1)$성분이 4일 때 (풀이 삭제) D의 $(1,1)$성분이 4이므로	내용 수정
유제 3-57	$BB^T = D' - A' = \begin{pmatrix} 3&0&0&0&0 \\ 0&3&0&0&0 \\ 0&0&2&0&0 \\ 0&0&0&3&0 \\ 0&0&0&0&3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0&1&1&1&0 \\ 1&0&0&1&1 \\ 1&0&0&0&1 \\ 1&1&0&0&1 \\ 0&1&1&1&0 \end{pmatrix}$ 이므로 $(3,3)$성분은 2이고 $(3,4)$성분은 -1이다.	$BB^T = D' - A' = \begin{pmatrix} 4&0&0&0&0 \\ 0&4&0&0&0 \\ 0&0&2&0&0 \\ 0&0&0&3&0 \\ 0&0&0&0&3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0&2&1&1&0 \\ 2&0&0&1&1 \\ 1&0&0&0&1 \\ 1&1&0&0&1 \\ 0&1&1&1&0 \end{pmatrix}$ 이므로 $(3,3)$성분은 2이고 $(3,5)$성분은 -1이다.	풀이 수정

<table>
<tr><th colspan="4">확률과 통계</th></tr>
<tr><th>위치</th><th>수정 전</th><th>수정 후</th><th>비고</th></tr>
<tr>
<td>유제 2-29</td>
<td>X와 Y는 서로 독립이므로 X와 Y의 결합확률질량함수는
$f_{X,\,Y}(x,\,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = {}_nC_x\,{}_nC_y\,p^{x+y}(1-p)^{2n-x-y}$,
$x,\,y = 0,\,1,\,2,\,\cdots,\,n$
이다. $V = X+Y$, $U = X$라 하면 $X = U$, $Y = V-U$이므로
$f_{U,\,V}(u,\,v) = f_{X,\,Y}(x=u,\,y=v-u) = {}_nC_u\,{}_nC_{v-u}\,p^v(1-p)^{2n-v}$,
$u,\,v = 0,\,1,\,2,\,\cdots,\,n$
이다. 따라서 V의 주변확률분포는
$f_V(v) = \sum_{u=0}^{\infty} f_{U,\,V}(u,\,v) = \sum_{u=0}^{n} {}_nC_u\,{}_nC_{v-u}\,p^v(1-p)^{2n-v}$
$= p^v(1-p)^{2n-v}\sum_{u=0}^{n} {}_nC_u\,{}_nC_{v-u} = {}_{2n}C_v\,p^v(1-p)^{2n-v}$,
$v = 0,\,1,\,2,\,\cdots,\,2n$
이다.</td>
<td>X와 Y는 서로 독립이므로 X와 Y의 결합확률질량함수는
$f_{X,\,Y}(x,\,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$
$= {}_nC_x\,{}_nC_y\,p^{x+y}(1-p)^{2n-x-y}$, $x,\,y = 0,\,1,\,2,\,\cdots,\,n$
이다. 따라서 다음이 성립한다.
$f_V(v) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{v} f_{X,\,Y}(k,\,v-k) & ,\,0 \le v \le n \\ \sum_{k=0}^{2n-v} f_{X,\,Y}(n-k,\,v-n+k) & ,\,n < v \le 2n \end{cases}$
$= \begin{cases} p^v(1-p)^{2n-v}\sum_{k=0}^{v} {}_nC_k\,{}_nC_{v-k} & ,\,0 \le v \le n \\ p^v(1-p)^{2n-v}\sum_{k=0}^{v} {}_nC_{n-k}\,{}_nC_{v-n+k} & ,\,n < v \le 2n \end{cases}$
$= {}_{2n}C_v\,p^v(1-p)^{2n-v}$, $v = 0,\,1,\,2,\,\cdots,\,2n$ ~(*)
(*): $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$에서 x^v의 계수를 비교.</td>
<td>풀이 수정</td>
</tr>
</table>

확률과 통계			
위치	수정 전	수정 후	비고
유제 2-44	$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(x+y^2)}dy$ $=\frac{e^{-x}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}dy$ $=\frac{e^{-x}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{2}\quad(x>0)$ $(\because \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}dy=1,\ e^{-\frac{y^2}{2}}$는 y축 대칭) $f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(x+y^2)}dx$ $=\frac{e^{-y^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}dx=\frac{2e^{-y^2}}{\sqrt{2\pi}}\quad(y>0)$ 따라서 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$이므로 독립이다. $P(X\le 2\mid Y\le 2)=\frac{P(X\le 2,\ Y\le 2)}{P(Y\le 2)}$ $=\frac{P(X\le 2)P(Y\le 2)}{P(Y\le 2)}$ ($\because X$와 Y가 독립) $=P(X\le 2)$ $=\int_0^2\frac{e^{-x}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{2}dx$ $=1-e^{-1}$	$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(x+y^2)}dy$ $=\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}dy$ $=\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\quad(x>0)$ $(\because \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}dy=1,\ e^{-\frac{y^2}{2}}$는 y축 대칭) $f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(x+y^2)}dx$ $=\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}dx=\frac{2e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\quad(y>0)$ 따라서 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$이므로 독립이다. $P(X\le 2\mid Y\le 2)=\frac{P(X\le 2,\ Y\le 2)}{P(Y\le 2)}$ $=\frac{P(X\le 2)P(Y\le 2)}{P(Y\le 2)}$ ($\because X$와 Y가 독립) $=P(X\le 2)$ $=\int_0^2\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx$ $=1-e^{-1}$	풀이 수정
정의 3.11 뒤		두 확률변수 X, Y에 대하여 다음이 성립한다. $E[X]=E[E[X\mid Y]]$	정리 추가
필수예제 37	$\Rightarrow\ E(X^2)=V(X)+E(X)^2=11$	삭제	풀이 수정
정의 4.3	n번의 베르누이 시행에서 k번 성공하기까지 필요한 총 시행 횟수에 대응한 확률변수를 **음이항확률변수(negative binomial random variable)**라 하고	성공확률이 p인 베르누이 시행에서 k번 성공하기까지 필요한 총 시행 횟수에 대응한 확률변수를 **음이항확률변수(negative binomial random variable)**라 하고	내용 수정

확률과 통계			
위치	수정 전	수정 후	비고
정의 4.7	주어진 시간간격 t 동안에 또는 일정영역 t에서 발생하는 결과의 수를 나타내는 확률변수를 **포아송확률변수(Poisson random variable)**라 하고, 이 확률변수 X의 확률질량함수는 $$f(x)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!},\ x=0,1,2,\cdots$$ 이다. 이때, 확률변수 X의 확률분포를 **포아송분포(Poisson distribution)**라 하고 $Poi(\lambda t)$로 표시한다. 여기서 λ는 단위시간 또는 단위면적에서 발생하는 결과의 수이고, 발생률이 λ인 포아송 과정에 의해 사건이 발생한다고 한다.	일정한 단위 내에서 발생하는 사건의 평균 횟수가 λ일 때, 그 단위 내에서 사건이 발생하는 횟수에 대응한 확률변수를 **포아송확률변수(Poisson random variable)**라 하고, 이 확률변수 X의 확률질량함수는 $$f(x)=\frac{e^{-\lambda}(\lambda)^x}{x!},\ x=0,1,2,\cdots$$ 이다. 이때, 확률변수 X는 포아송분포를 따른다고 하고 $X\sim Poi(\lambda)$로 표시한다.	내용 수정
정리 4.8	포아송분포 $Poi(\lambda t)$의 평균과 분산은 다음과 같다. $$E(X)=\lambda t,\ V(X)=\lambda t$$	포아송분포 $Poi(\lambda)$의 평균과 분산은 다음과 같다. $$E(X)=\lambda,\ V(X)=\lambda$$	내용 수정
필수예제 58	평균 35인 정규모집단에서	정규모집단에서	문제 수정
종합문제 2	따라서 Z의 확률밀도함수는 $$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2} & ,1<z<e\\ \frac{e-1}{z^2} & ,z\ge e\\ 0 & ,z\le 1\end{cases}$$ 이고 $P(\lvert Z-2\rvert<1)$의 값은 $$\begin{aligned}P(\lvert Z-2\rvert<1)&=P(1<Z<3)\\&=\int_1^3 f_Z(z)\,dz\\&=\int_1^e \frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}\,dz+\int_e^3\frac{e-1}{z^2}\,dz\\&=\frac{4-e}{3}\end{aligned}$$ 이다.	따라서 $$P(\lvert Z-2\rvert<1)=P(1<Z<3)=F_Z(3)-F_Z(1)=\frac{4-e}{3}$$ 이다.	풀이 수정

필수예제 53 라이프니츠 법칙

함수 $y(x)=\dfrac{1}{k}\displaystyle\int_0^x \sin(k(x-t))f(t)\,dt$는 미분방정식 $y''+k^2y=f(x)$의 해가 됨을 보이시오.

정리 4.11 구간 I에 대하여
(1) $u(x)$, $v(x)$는 미분가능하고 $c \le u(x) \le d$, $c \le v(x) \le d$
(2) $f(x,\,t)$, $f_x(x,\,t)$는 $I\times[c,\,d]$에 포함되는 열린 사각형에서 연속
를 만족하면 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,\,t)\,dt = f(x,\,v(x))\frac{dv}{dx} - f(x,\,u(x))\frac{du}{dx} + \int_{u(x)}^{v(x)} f_x(x,\,t)\,dt$$

풀이 $y' = \displaystyle\int_0^x \cos(k(x-t))f(t)\,dt$

$$\begin{aligned} y'' &= \cos(k(x-x))f(x)\frac{dx}{dx} - k\int_0^x \sin(k(x-t))f(t)\,dt \\ &= f(x) - k\int_0^x \sin(k(x-t))f(t)\,dt \\ &= f(x) - k^2y(x) \end{aligned}$$

이므로 $y''+k^2y=f(x)$이 성립한다.

유제 4-11 함수 $V:[0,\,\infty)\to\mathbb{R}$을 $V(r)=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{r}} (r^2t)e^{-rt}\,dt$으로 정의할 때, $V'(r)$을 구하시오.

유제 4-12 함수 $G:[0,\,\infty)\to\mathbb{R}$을 $G(x)=\displaystyle\int_0^x (x-t)^2e^{-t}\,dt$으로 정의할 때, 모든 극점을 찾아 극대, 극소를 판별하시오.

유제 4-13 y는 x에 대하여 미분가능한 함수이다. $\displaystyle\int_y^{x^2} \ln(t+x)\,dt=4$를 만족할 때, $(x,\,y)=(2,\,1)$에서 $\dfrac{dy}{dx}$의 값을 구하시오.

유제 4-14 좌표평면의 영역

$$D(t) = \left\{(x, y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x + y \geq t\right\} \ \ (0 \leq t \leq 1)$$

과 함수 $f(x, y) = \sqrt{|8x^2 + 8y^2 - 1|}$ 에 대하여 $g(t) = \iint_{D(t)} f(x, y)\,dxdy$ 라 하자.

$g(0)$과 $g'\left(\frac{1}{2}\right)$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. **[2024학년도 기출]**

유제 풀이

유제 4-11

정답: 0

$$V'(r)=\left(r^2\frac{1}{r}\right)e^{-r\frac{1}{r}}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)+\int_0^{\frac{1}{r}}(2rt-r^2t^2)e^{-rt}\,dt$$

$$=-\frac{1}{re}+\int_0^{\frac{1}{r}}(2rt-r^2t^2)e^{-rt}\,dt$$

$$=-\frac{1}{re}+r\left[t^2e^{-rt}\right]_0^{\frac{1}{r}}$$

$$=0$$

유제 4-12

정답: $x=0$**에서 극솟값** $G(0)=0$

$$G'(x)=\int_0^x 2(x-t)e^{-t}\,dt$$

$$=\int_0^x\left(2xe^{-t}-2te^{-t}\right)dt$$

$$=2x-2+2e^{-x}$$

$G'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

$G''(x)=2-2e^{-x}\ge 0$

이므로 $x=0$에서 극솟값 $G(0)=0$을 갖는다.

유제 4-13

정답: $\dfrac{5\ln 2}{\ln 3}+4$

$$\ln(x^2+x)\frac{d}{dx}x^2-\ln(y+x)\frac{dy}{dx}+\int_y^{x^2}\frac{1}{t+x}dt=0$$

$$4\ln 6-\ln(3)\frac{dy}{dx}+\int_1^4\frac{1}{t+2}dt=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5\ln 2}{\ln 3}+4$$

유제 4-14

정답: $g(0)=\dfrac{\pi}{48}\left(7^{\frac{3}{2}}+1\right)$, $g'\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}$

$$g(0)=\iint_{D(0)}\sqrt{|8x^2+8y^2-1|}\,dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\sqrt{|8r^2-1|}\,drd\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{\frac{1}{8}}}r\sqrt{1-8r^2}\,drd\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\sqrt{\frac{1}{8}}}^1 r\sqrt{8r^2-1}\,drd\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{24}(1-8r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{\frac{1}{8}}}+\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{24}(8r^2-1)^{\frac{3}{2}}\right]_{\sqrt{\frac{1}{8}}}^1$$

$$=\frac{\pi}{48}\left(7^{\frac{3}{2}}+1\right)$$

(sol1)

x, y축을 $\dfrac{\pi}{4}$만큼 회전한 u, v축을 생각하자.

$$u=\frac{x+y}{\sqrt{2}},\ v=\frac{-x+y}{\sqrt{2}} \Rightarrow J=1$$

$$D(t)=\left\{(u,v)\mid u^2+v^2\le 1,\ -u\le v\le u,\ u\ge\frac{t}{\sqrt{2}}\right\}$$

이므로

$$g(t)=g(0)-\int_0^{t/\sqrt{2}}\int_{-u}^{u}f(u,v)\,dvdu$$

이다. 그러므로 $h(u)=\displaystyle\int_{-u}^{u}f(u,v)\,dv$라 하면

$$g'(t)=\frac{d}{dt}\left(-\int_0^{t/\sqrt{2}}h(u)\,du\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}h\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

이다. 따라서

$$g'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}h\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1/2\sqrt{2}}^{1/2\sqrt{2}}f\left(\frac{1}{2\sqrt{2}},v\right)dv$$

$$=-2\int_{-1/2\sqrt{2}}^{1/2\sqrt{2}}|v|\,dv$$

$$=-4\int_0^{1/2\sqrt{2}}v\,dv$$

$$=-\frac{1}{4}$$

이다.

(sol2)

$$g(t)=\int_0^{\pi/2}\int_{\frac{t}{\cos\theta+\sin\theta}}^1 r\sqrt{|8r^2-1|}\,drd\theta$$

에 대하여 라이프니츠 법칙을 적용하면

$$g'(t)=-\int_0^{\pi/2}\frac{t}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}\sqrt{\left|\frac{8t^2}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}-1\right|}\,d\theta$$

이므로

$$g'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{|2-(\cos\theta+\sin\theta)^2|}}{(\cos\theta+\sin\theta)^3}\,d\theta$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{|\cos\theta-\sin\theta|}{(\cos\theta+\sin\theta)^3}\,d\theta$$

$$=-\int_{0}^{\pi/4}\frac{\cos\theta-\sin\theta}{(\cos\theta+\sin\theta)^{3}}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^{2}}\right]_{0}^{\pi/4}$$

$$=-\frac{1}{4}$$

필수예제 71 비판정법, 근판정법

(1) $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \left(3 + (-1)^n \dfrac{n}{n+1}\right)x_n$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$의 수렴성을 판정하시오.

(2) $x_n = \left(\dfrac{n}{3n+1} + \dfrac{(-1)^n}{4}\right)^n$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$의 수렴성을 판정하시오.

정리 8.9

(1) **(비판정법)**

$\overline{\lim}\left(\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right) < 1$이면 $\sum x_n$은 절대수렴하고 $\underline{\lim}\left(\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right) > 1$이면 $\sum x_n$은 발산한다.

또한 $\underline{\lim}\left(\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right) = \infty$이면 $\sum x_n$은 발산한다.

(2) **(근판정법)**

$\overline{\lim}\left(|x_n|^{1/n}\right) = r \in \mathbb{R}$ 이면, $r < 1$일 때 $\sum x_n$은 절대수렴하고 $r > 1$일 때 $\sum x_n$은 발산한다.

또한 $r = \infty$이면, $\sum x_n$은 발산한다.

풀이 (1) $t_n = \inf\left\{\left|\dfrac{x_{m+1}}{x_m}\right| \mid m \ge n\right\} = 2$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \underline{\lim}\left(\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right) = 2 > 1$이다. 따라서 비판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$은 발산한다.

(2) $s_n = \sup\left\{|x_m|^{1/m} \mid m \ge n\right\} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{12}$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \overline{\lim}\left(|x_n|^{1/n}\right) = \dfrac{7}{12} < 1$이다. 따라서 근판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$은 수렴한다.

유제 8-14 다음 물음에 답하시오.

(1) $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{(-1)^n n}{3n+3}\right)x_n$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$의 수렴성을 판정하시오.

(2) $x_n = \left(2 + \dfrac{(-1)^n(2n+1)}{n}\right)^n$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$의 수렴성을 판정하시오.

유제 풀이

유제 8-14

정답: (1) 수렴 (2) 발산

(1) $s_n = \sup\left\{\left|\dfrac{x_{m+1}}{x_m}\right| \mid m \geq n\right\} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{6}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \overline{\lim}\left(\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right) = \frac{5}{6} < 1$$

이다. 따라서 비판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$은 수렴한다.

(2) $s_n = \sup\{|x_m|^{1/m} \mid m \geq n\} = \begin{cases} 2 + \dfrac{2n+1}{n}, n: \text{짝수} \\ 2 + \dfrac{2n+3}{n+1}, n: \text{홀수} \end{cases}$

이므로

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \overline{\lim}\left(|x_n|^{1/n}\right) = 4 > 1$$

이다. 따라서 근판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$은 발산한다.

필수예제 11 닫힌집합

$(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_i)$에서 $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$의 닫힌집합 여부를 판단하시오.

(1) 보통위상 $\mathfrak{I}_1$　　　(2) 하한위상 $\mathfrak{I}_2$　　　(3) 상한위상 $\mathfrak{I}_3$

정의 2.7 X를 위상공간이라 하자. X의 부분집합 C의 여집합 C^c이 열린집합일 때 C를 **닫힌집합(closed set)**이라 한다.

정리 2.8

(1) X 위에 여유한 위상을 줄 때, X의 부분집합 A가 폐집합일 필요충분조건은 A가 유한집합이거나 전체집합인 것이다.

(1) X 위에 여가산 위상을 줄 때, X의 부분집합 A가 폐집합일 필요충분조건은 A가 가산집합이거나 전체집합인 것이다.

풀이 (1) $\mathbb{R} - A \in \mathfrak{I}_1$라 가정하면 $0 \in \mathbb{R} - A$이므로 $0 \in (a, b) \subset \mathbb{R} - A$인 실수 a, b가 존재한다.

$b > 0$이므로 $\frac{1}{m} < b$인 자연수 m이 존재한다. 그러면 $\frac{1}{m} \in (a, b) \subset \mathbb{R} - A$가 되어 모순이다.

(2) $\mathbb{R} - A \in \mathfrak{I}_2$라 가정하면 $0 \in \mathbb{R} - A$이므로 $0 \in [0, a) \subset \mathbb{R} - A$인 실수 a가 존재한다.

$a > 0$이므로 $\frac{1}{m} < a$인 자연수 m이 존재한다. 그러면 $\frac{1}{m} \in [0, a) \subset \mathbb{R} - A$가 되어 모순이다.

(3) $x \in \mathbb{R} - A$라 하자.

(i) $x \le 0$인 경우

$x \in (x-1, 0] \subset \mathbb{R} - A$

(ii) $x > 1$인 경우

$x \in (1, x] \subset \mathbb{R} - A$

(iii) $0 < x \le 1$인 경우

$m = \min\left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{n} < x \right\}$라 하면 $x \in \left(\frac{1}{m}, x \right] \subset \mathbb{R} - A$

따라서 $\mathbb{R} - A \in \mathfrak{I}_3$이므로 A는 닫힌집합이다.

정답 (1) 닫힌집합 아니다.　(2) 닫힌집합 아니다.　(3) 닫힌집합이다.

유제 2-16 여유한 위상공간 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_f)$와 여가산 위상공간 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_c)$에서 다음 집합의 폐집합 여부를 판정하시오.

(1) $(0, 1)$　　(2) $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$　　(3) $\mathbb{Q}^c$　　(4) $\{1, 2, 3, \cdots, 100\}$

유제 풀이

유제 2-16

(1) $(0, 1)$은 비가산무한집합이고 $\mathbb{R}$이 아니므로
여유한위상, 여가산위상 모두에서 닫힌집합이 아니다.

(2) $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$은 가산무한집합이고 $\mathbb{R}$이 아니므로
여유한위상에서는 닫힌집합이 아니고 여가산위상에서는 닫힌집합이다.

(3) $\mathbb{Q}^c$는 비가산무한집합이고 $\mathbb{R}$이 아니므로
여유한위상, 여가산위상 모두에서 닫힌집합이 아니다.

(4) $\{1, 2, 3, \cdots, 100\}$은 유한집합이고 가산집합이므로
여유한위상, 여가산위상 모두에서 닫힌집합이다.

필수예제 20 국소기저

다음 위상공간에서 0에 대한 국소기저를 구하시오.

(1) 보통위상공간 $\mathbb{R}$　(2) 하한위상공간 $\mathbb{R}_l$　(3) 이산위상공간 $\mathbb{R}_D$

정의 2.24 위상공간 $(X, \mathfrak{I})$와 $p \in X$에 대하여 다음을 만족하는 $\mathscr{B}_p$를 p의 **국소기저(local basis)**라 한다.

(1) 임의의 $B \in \mathscr{B}_p$에 대하여 B는 p를 포함하는 열린집합이다.

(2) p를 포함하는 임의의 열린집합 G에 대해서 $p \in B \subset G$를 만족하는 $B \in \mathscr{B}_p$가 존재한다.

풀이 (1) $\mathscr{B}_0 = \left\{\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$라 하자.

(i) 임의의 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$은 0을 포함하는 열린집합이다.

(ii) 0을 포함하는 열린집합 G에 대하여 적당한 $\varepsilon > 0$이 존재하여 $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset G$이므로 아르키메데스 성질에 의해 $\frac{1}{N} < \varepsilon$인 자연수 N이 존재하여 $0 \in \left(-\frac{1}{N}, \frac{1}{N}\right) \subset (-\varepsilon, \varepsilon) \subset G$이다.

따라서 $\mathscr{B}_0$은 0의 국소기저이다.

(2) $\mathscr{B}_0 = \left\{\left[0, \frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$라 하자.

(i) 임의의 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $\left[0, \frac{1}{n}\right)$은 0을 포함하는 열린집합이다.

(ii) 0을 포함하는 열린집합 G에 대하여 적당한 $\varepsilon > 0$이 존재하여 $[0, \varepsilon) \subset G$이므로 아르키메데스 성질에 의해 $\frac{1}{N} < \varepsilon$인 자연수 N이 존재하여 $0 \in \left[0, \frac{1}{N}\right) \subset [0, \varepsilon) \subset G$이다.

따라서 $\mathscr{B}_0$은 0의 국소기저이다.

(3) $\mathscr{B}_0 = \{\{0\}\}$라 하자.

(i) $\{0\}$은 0을 포함하는 열린집합이다.

(ii) 0을 포함하는 열린집합 G에 대하여 $0 \in \{0\} \subset G$이다.

따라서 $\mathscr{B}_0$은 0의 국소기저이다.

정답 (1) $\mathscr{B}_0 = \left\{\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$　(2) $\mathscr{B}_0 = \left\{\left[0, \frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$　(3) $\mathscr{B}_0 = \{\{0\}\}$

필수예제 40 수열, 코시수열

실수 집합 $\mathbb{R}$ 위에서 거리를 다음과 같이 정의하자.

$$d(x,\ y) = |\arctan x - \arctan y|$$

$a_n = n$의 수렴 여부를 판정하시오. 또한 코시수열 여부를 판정하시오.

정의 4.3 $\{x_n\}$을 거리공간 $(X,\ d)$에서의 한 수열이라 하자.

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \ \exists\ N \in \mathbb{N}\ \text{ s.t. }\ n \geq N\ \Rightarrow\ d(x_n,\ x) < \epsilon$$

일 때, 수열 $\{x_n\}$이 점 $x \in X$로 수렴한다고 한다.

정의 4.4 $\{x_n\}$을 거리공간 $(X,\ d)$에서의 한 수열이라 하자.

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \ \exists\ N \in \mathbb{N}\ \text{ s.t. }\ m, n \geq N\ \Rightarrow\ d(x_m,\ x_n) < \epsilon$$

일 때, 수열 $\{x_n\}$을 **코시수열(Cauchy sequence)**이라 한다.

풀이 (ⅰ) a_n이 실수 a로 수렴한다고 가정하자. $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(a)\right) > 0$에 대하여 적당한 자연수 N_1이 존재하여

$$n \geq N_1\ \Rightarrow\ d(a_n,\ a) < \varepsilon_0\ \Rightarrow\ \arctan(n) < \arctan(a) + \varepsilon_0$$

이다. 또한 적당한 자연수 N_2가 존재하여

$$n \geq N_2\ \Rightarrow\ \left|\arctan(n) - \frac{\pi}{2}\right| < \varepsilon_0\ \Rightarrow\ \frac{\pi}{2} - \varepsilon_0 < \arctan(n)$$

이다. 그러므로 $N = \max\{N_1,\ N_2\}$라 하면

$$n \geq N\ \Rightarrow\ \frac{\pi}{2} - \varepsilon_0 < \arctan(n) < \arctan(a) + \varepsilon_0\ \Rightarrow\ \varepsilon_0 < \varepsilon_0$$

이므로 모순이다. 따라서 a_n은 수렴하지 않는다.

(ⅱ) $\varepsilon > 0$에 대하여 적당한 자연수 N이 존재하여

$$n \geq N\ \Rightarrow\ \left|\arctan(n) - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned} n,\ m \geq N\ \Rightarrow\ d(a_n,\ a_m) &= |\arctan(n) - \arctan(m)| \\ &\leq \left|\arctan(n) - \frac{\pi}{2}\right| + \left|\frac{\pi}{2} - \arctan(m)\right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

이다. 따라서 $a_n = n$은 코시수열이다.

유제 4-7 집합 $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1\le x<1\}$ 위에서 거리함수 d를

$$d((x,y),(x',y'))=\min\left\{\sqrt{(x-(x'+k))^2+(y-y')^2}\ \middle|\ k=-2,0,2\right\}$$

라 하자. 집합 $\left\{(x,0)\in A\ \middle|\ d((-1,0),(x,0))\le\dfrac{1}{2}\right\}$에 속하는 점의 x좌표 중 가장 작은 양의 실수를 풀이 과정과 함께 쓰시오.

또한 $\mathbb{R}^2_*=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$에 대하여 함수 $f:A\to\mathbb{R}^2_*$을 $f(x,y)=e^y(\cos\pi x,\sin\pi x)$라 하고, $\mathbb{R}^2_*$ 위에서 거리함수 d_*을 $d_*((u,v),(u',v'))=d\left(f^{-1}(u,v),\ f^{-1}(u',v')\right)$이라 하자. 거리공간 $(\mathbb{R}^2_*,d_*)$의 수열(sequence) $\left\{\left(0,\dfrac{1}{n}\right)\right\}$이 코시수열(Cauchy sequence)이 아님을 보이시오.

[2026학년도 기출]

유제 풀이

유제 4-7

정답: $\frac{1}{2}$

$d((-1,0),(x,0))=\min\{|x-1|,|x+1|,|x+3|\}$
이므로 양의 실수 $0<x<1$에 대해

$$d((-1,0),(x,0))\le\frac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{2}\le x<1$$

이므로 조건을 만족하는 가장 작은 양의 실수는 $\frac{1}{2}$이다.

$a_n=\left(0,\frac{1}{n}\right)$이라 하자. a_n이 코시수열이라고 가정하면
$\epsilon_0=1$에 대하여 적당한 자연수 N이 존재하여

$$n,m\ge N\ \Rightarrow\ d_*(a_n,a_m)<1$$

을 만족해야한다. $n=N$, $m=3N$으로 택하면

$$\begin{aligned}d_*(a_N,a_{3N})&=d\left(f^{-1}\left(0,\frac{1}{N}\right),f^{-1}\left(0,\frac{1}{3N}\right)\right)\\&=d\left(\left(\frac{1}{2},\ln\frac{1}{N}\right),\left(\frac{1}{2},\ln\frac{1}{3N}\right)\right)\\&=\ln3>\ln e=1=\epsilon_0\end{aligned}$$

이므로 모순이다. 따라서 코시수열이 아니다.

필수예제 41 여러 가지 거리

(1) d는 $\mathbb{R}$ 상의 이산 거리함수이다. $B_d(0, 1)$, $B_d(0, 2)$를 구하시오.

(2) d_1, d_2, d_∞는 $\mathbb{R}^2$상의 거리함수이고, $\mathbb{R}^2$의 원소 $p=(x_1, x_2)$, $q=(y_1, y_2)$에 대하여

$$d_1(p, q)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|,$$

$$d_2(p, q)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2},$$

$$d_\infty(p, q)=\max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$$

이다. $B_{d_1}((0, 0), 1)$, $B_{d_2}((0, 0), 1)$, $B_{d_\infty}((0, 0), 1)$를 구하시오.

(3) d, e는 $C[0, 1]=\{f\,|\,f:[0, 1]\to\mathbb{R}$ 은 연속함수$\}$상의 거리함수이고, $f, g\in C[0, 1]$에 대하여

$$d(f, g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|\,dx, \qquad e(f, g)=\sup\{|f(x)-g(x)|\,|\,x\in[0, 1]\}$$

이다. h를 치역이 0인 상수함수라 할 때, $B_e(h, 1)\subsetneq B_d(h, 1)$임을 보이시오.

정의 4.5

(1) **이산 거리(discrete metric)함수**

집합 X와 $a, b\in X$에 대하여 $d(a, b)=\begin{cases}1, & a\neq b\\ 0, & a=b\end{cases}$

(2) $\mathbb{R}^n$상의 거리함수

$p=(a_1, \cdots, a_n)$, $q=(b_1, \cdots, b_n)$를 $\mathbb{R}^n$의 원소라 하자.

① $d_1(p, q)=\sum_{k=1}^{n}|a_k-b_k|$

② $d_2(p, q)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)^2}$

③ $d_\infty(p, q)=\max\{|a_k-b_k|\,|\,k=1, \cdots, n\}$

(3) $C[0, 1]=\{f\,|\,f:[0, 1]\to\mathbb{R}$ 은 연속함수$\}$상의 거리함수

$f, g\in C[0, 1]$라 하자.

① $d(f, g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|\,dx$

② $e(f, g)=\sup\{|f(x)-g(x)|\,|\,x\in[0, 1]\}$

풀이 (1) $B_d(0, 1)=\{x\in\mathbb{R}\mid d(x, 0)<1\}=\{0\}$,

$B_d(0, 2)=\{x\in\mathbb{R}\mid d(x, 0)<2\}=\mathbb{R}$

(2) $B_{d_1}((0, 0), 1)=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2\,|\,d_1((x, y), (0, 0))<1\}=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2\,|\,|x|+|y|<1\}$,

$B_{d_2}((0, 0), 1)=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2\,|\,d_2((x, y), (0, 0))<1\}=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2\,|\,\sqrt{x^2+y^2}<1\}$

$=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x^2+y^2<1\}$,

$B_\infty((0, 0), 1)=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2\,|\,d_\infty((x, y), (0, 0))<1\}=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2\,|\,\max\{|x|, |y|\}<1\}$

$=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2\,|\,|x|<1, |y|<1\}=(-1, 1)\times(-1, 1)$

(3) $B_d(h, 1) = \{f \in C[0, 1] \mid d(f, h) < 1\} = \left\{f \in C[0, 1] \mid \int_0^1 |f(x)|dx < 1\right\}$,

$B_e(h, 1) = \{f \in C[0, 1] \mid e(f, h) < 1\} = \{f \in C[0, 1] \mid \sup\{|f(x)| \mid x \in [0, 1]\} < 1\}$

$= \{f \in C[0, 1] \mid \forall x \in [0, 1], |f(x)| < 1\}$

이므로 $B_e(h, 1) \subset B_d(h, 1)$이다.

또한 $f(x) = \frac{3}{2}x$라 하면, $f(x) \in B_d(h, 1)$, $f(x) \not\in B_e(h, 1)$이다. 따라서 $B_e(h, 1) \subsetneq B_d(h, 1)$이다.

정답 (1) $B_d(0, 1) = \{0\}$, $B_d(0, 2) = \mathbb{R}$

(2) $B_{d_1}((0, 0), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 1\}$,

$B_{d_2}((0, 0), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$

$B_\infty((0, 0), 1) = (-1, 1) \times (-1, 1)$

필수예제 37 경로 적분 III

복소평면에서 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원을 반시계방향으로 한 바퀴 도는 곡선 C에 대하여 적분

$$\int_C z^2 \overline{z}\, d\overline{z}$$

의 값을 구하시오. (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

정의 4.10 점 $z_1 = z(a)$부터 점 $z_2 = z(b)$까지 연결하는 경로 C를 나타내는 $z = z(t)$, $a \le t \le b$에 대해 함수 $f(z)$는 C에서 조각마다 연속이라 하면

$$\int_C f(z)\, d\overline{z} = \int_a^b f(z(t))\overline{z'(t)}\, dt$$

이다.

풀이 **(sol1)** $z = e^{it}$, $\overline{z} = e^{-it}$이므로

$$\int_C z^2 \overline{z}\, d\overline{z} = \int_0^{2\pi} (e^{it})^2 (e^{-it})(-ie^{-it}) dt = \int_0^{2\pi} -i dt = -2\pi i$$

이다.

(sol2) $z \in C$에 대하여 $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$이므로

$$\int_C z^2 \overline{z}\, d\overline{z} = \int_C z^2 \left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right) dz = -\int_C \frac{1}{z} dz = -2\pi i$$

이다.

정답 $-2\pi i$

필수예제 48 항등정리

복소평면 $\mathbb{C}$의 영역 $D=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$에서 해석적인 함수 $f(z)$가 모든 자연수 n에 대하여 다음을 만족할 때, $|f(i)|$의 값을 구하시오.

$$f\left(\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2n}$$

정리 4.35 항등정리
f와 g가 영역 D에서 해석적이고 $\{z_n\}$은 $f(z_n)=g(z_n)$을 만족하는 D의 서로 다른 점들의 수열이라 하자. 이때 $\{z_n\}$의 극한점이 D에 존재하면 D에서 $f\equiv g$이다.

풀이

$$z_n=\frac{1}{2n+1} \;\Rightarrow\; 2n=\frac{1}{z_n}-1=\frac{1-z_n}{z_n}$$

이므로 $f(z_n)=\dfrac{z_n}{1-z_n}$이다. 또한 $\dfrac{z}{1-z}$는 D에서 해석적이고 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=0\in D$이므로 항등정리에 의해 $f(z)=\dfrac{z}{1-z}$이다. 따라서 $|f(i)|=\left|\dfrac{i}{1-i}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$이다.

정답 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

유제 4-37 복소평면 $\mathbb{C}$의 영역 $D=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$에서 $f(z)$는 해석적이다. 2이상의 자연수 n에 대하여 다음 두 조건을 동시에 만족하는 $f(z)$가 존재하는지 판별하시오.

(ⅰ) n이 짝수일 때, $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n+1}$

(ⅱ) n이 홀수일 때, $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n}$

유제 풀이

유제 4-37

정답: 존재하지 않는다.

두 조건을 동시에 만족하는 f가 존재한다고 가정하자.

$z_n = \frac{1}{n}$이라 하면

$$\lim_{n\to\infty} z_{2n} = \lim_{n\to\infty} z_{2n+1} = 0 \in D$$

이고

$$f(z_{2n}) = \frac{z_{2n}}{1+z_{2n}},\ f(z_{2n+1}) = z_{2n+1}$$

이므로 항등정리에 의해 D에서

$$\frac{z}{1+z} = f(z) = z$$

이다. $z = \frac{1}{2}$를 대입하면

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

이므로 이는 모순이다. 따라서 f는 존재하지 않는다.

필수예제 31 회전수 정리와 펜첼 정리

극방정식 $r(\theta)=2\sin(4\theta)$, $\theta\in\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$가 나타내는 곡선 α의 전곡률을 구하시오.

정의 2.32 $\mathbb{R}^2$의 단위속력곡선 $\gamma(s)$의 단위접벡터장 $T(s)$에 대하여 $T(s)$를 반시계 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 회전시켜 얻은 단위벡터장을 $\gamma(s)$의 **부호가 있는 단위법벡터장(signed unit normal vector field)** $N_S(s)$라고 정의한다. 또한 $\langle T'(s), N_S(s)\rangle$를 **부호가 있는 곡률(signed curvature)** $\kappa_S(s)$라고 정의한다.

정리 2.33 $\mathbb{R}^2$의 단위속력곡선 $\gamma(s)$의 곡률 $\kappa(s)$와 부호가 있는 곡률 $\kappa_S(s)$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\kappa(s)=|\kappa_S(s)|$$

정의 2.34 $\mathbb{R}^2$의 단위속력곡선 $\gamma(s)$의 단위접벡터장 $T(s)$에 대하여

$$T(s)=(\cos\varphi(s),\ \sin\varphi(s))$$

를 만족하는 매끄러운 함수 $\varphi(s)$가 존재하고 초기값에 의해 결정된 $\varphi(s)$를 $\gamma(s)$의 **회전각(turning angle)**이라 한다.

정리 2.35 $\mathbb{R}^2$의 단위속력곡선 $\gamma(s)$의 부호가 있는 곡률 $\kappa_S(s)$대하여 다음이 성립한다.

$$\kappa_S(s)=\varphi'(s)$$

정의 2.36 $\mathbb{R}^2$의 단위속력곡선 $\gamma(s)$이 주기가 l인 닫힌곡선일 때

$$m=\frac{1}{2\pi}(\varphi(l)-\varphi(0))$$

를 $\gamma(s)$의 **회전수(rotation index)**이라 한다.

정리 2.37 $\mathbb{R}^2$의 단위속력곡선 $\gamma(s)$이 주기가 l인 닫힌곡선일 때 다음이 성립한다. (단, m은 $\gamma(s)$의 회전수이다.)

$$\int_0^l \kappa_S(s)ds=2\pi m$$

정리 2.38 펜첼 정리

$\mathbb{R}^3$의 단위속력곡선 $\gamma(s)$이 주기가 l인 닫힌곡선일 때 다음이 성립한다.

$$\int_0^l \kappa(s)ds\geq 2\pi$$

등호가 성립할 필요충분조건은 $\gamma(s)$가 한 평면에 속하는 볼록곡선인 것이다.

※ 정칙인 평면곡선 γ가 각 접선의 한쪽에 놓여있을 때, γ를 볼록곡선이라 한다.

미기 부록 1

풀이 전곡률은

$$\int_{\alpha} \kappa(s)ds = \text{회전수} \times 2\pi = \frac{5}{8} \times 2\pi = \frac{5\pi}{4}$$

이다.

정답 $\frac{5\pi}{4}$

필수예제 30 합동식의 해의 개수, 근과 계수의 관계

각각의 합동식에 대하여 근의 개수를 찾고 근과 계수의 관계의 성립여부를 판정하시오.

(1) $x^2 - 3x + 2 \equiv 0 \pmod{6}$

(2) $x^2 - 3x + 2 \equiv 0 \pmod{5}$

(3) $x^3 - 1 \equiv 0 \pmod{5}$

정리 7.19 p가 소수이고

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_n \not\equiv 0 \pmod{p}$$

가 정수 계수를 가지고 차수 $n \ge 1$인 다항식이면 합동식

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

는 법 p에 대하여 많아야 n개의 합동이 아닌 해를 가진다.

풀이 (1) $x^2 - 3x + 2 \equiv (x-1)(x-2) \pmod{6}$이므로 $x^2 - 3x + 2 \equiv 0 \pmod{6}$의 해는

$$x \equiv 1 \pmod{6},\ x \equiv 2 \pmod{6},\ x \equiv 4 \pmod{6},\ x \equiv 5 \pmod{6}$$

이다. 해의 개수는 4개이고

$$1 + 2 + 4 + 5 \equiv 12 \not\equiv 3 \equiv -\frac{-3}{1} \pmod{6}$$

이므로 근과 계수의 관계는 성립하지 않는다.

(2) $x^2 - 3x + 2 \equiv (x-1)(x-2) \pmod{5}$이므로 $x^2 - 3x + 2 \equiv 0 \pmod{5}$의 해는

$$x \equiv 1 \pmod{5},\ x \equiv 2 \pmod{5}$$

이다. 해의 개수는 2개이고

$$1 + 2 \equiv 3 \equiv -\frac{-3}{1} \pmod{5},\ 1 \cdot 2 \equiv 2 \equiv \frac{2}{1} \pmod{5}$$

이므로 근과 계수의 관계는 성립한다.

(3) $x^3 - 1 \equiv (x-1)(x^2 + x + 1) \pmod{5}$이므로 $x^3 - 1 \equiv 0 \pmod{5}$의 해는 $x \equiv 1 \pmod{5}$이다.

해의 개수는 1개이고 $1 \not\equiv 0 \equiv -\frac{0}{1} \pmod{5}$이므로 근과 계수의 관계는 성립하지 않는다.

정답 (1) 4개, 성립하지 않음
(2) 2개, 성립함
(3) 1개, 성립하지 않음

유제 7-28 각각의 합동식에 대하여 근의 개수를 찾고 근과 계수의 관계의 성립여부를 판정하시오.

(1) $x^2 - 4x + 3 \equiv 0 \pmod{8}$

(2) $x^2 - 5x + 6 \equiv 0 \pmod{8}$

유제 풀이

유제 7-28

정답: (1) 4개, 성립하지 않음

(2) 2개, 성립함

(1) $x^2-4x+3\equiv(x-1)(x-3)\pmod 8$이므로

$x^2-4x+3\equiv 0\pmod 8$의 해는

$$x\equiv 1\pmod 8,\ x\equiv 3\pmod 8,$$
$$x\equiv 5\pmod 8,\ x\equiv 7\pmod 8$$

이다. 해의 개수는 4개이고

$$1+3+5+7\equiv 16\not\equiv 4\equiv -\frac{-4}{1}\pmod 8$$

이므로 근과 계수의 관계는 성립하지 않는다.

(2) $x^2-5x+6\equiv(x-2)(x-3)\pmod 8$이므로

$x^2-5x+6\equiv 0\pmod 8$의 해는

$$x\equiv 2\pmod 8,\ x\equiv 3\pmod 8$$

이다. 해의 개수는 2개이고

$$2+3\equiv 5\equiv -\frac{-5}{1}\pmod 8,\ 2\cdot 3\equiv 6\equiv \frac{6}{1}\pmod 8$$

이므로 근과 계수의 관계는 성립한다.

필수예제 42 고차합동식의 해

합동식 $x^5+3x^4+5x^3+x^2+5x+13\equiv 0 \pmod{7^2}$의 해를 구하시오.

정의 8.17 다항식 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$에 대하여 다항식

$$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1$$

를 다항식 $f(x)$의 **형식적 미분(formal derivative)**이라고 한다.

정리 8.18 정수 p가 소수일 때, 정수를 계수로 가지는 다항식 $f(x)$와 임의의 정수 c와 양의 정수 t, k에 대하여 다음이 성립한다.

$$f(c+p^kt)\equiv f(c)+f'(c)p^kt \pmod{p^{k+1}}$$

정리 8.19 p가 소수이고 $k\geq 1$일 때, 정수를 계수로 가지는 다항식 $f(x)$에 대하여 c_k가 합동식 $f(x)\equiv 0 \pmod{p^k}$의 해일 때, c_k+p^kt형태인 $f(x)\equiv 0 \pmod{p^{k+1}}$의 근은 다음과 같다.

(1) $\gcd(f'(c_k),p)=1$인 경우

$x\equiv c_k+p^kt_k \pmod{p^{k+1}}$ (단, t_k는 $f'(c_k)t\equiv -\dfrac{f(c_k)}{p^k} \pmod{p}$의 해)

(2) $p\mid f'(c_k)$, $p^{k+1}\mid f(c_k)$인 경우

$x\equiv c_k$, $x\equiv c_k+p^k$, $x\equiv c_k+2p^k$, $\cdots$, $x\equiv c_k+(p-1)p^k \pmod{p^{k+1}}$

(3) $p\mid f'(c_k)$, $p^{k+1}\nmid f(c_k)$인 경우

존재하지 않는다.

풀이 $f(x)=x^5+3x^4+5x^3+x^2+5x+13$라 하자.

$f(x)\equiv 0 \pmod 7$의 해는 $x\equiv 1 \pmod 7$, $x\equiv 2 \pmod 7$, $x\equiv 3 \pmod 7$이다.

① $x\equiv 1 \pmod 7$인 경우

$f(1)=28$, $f'(1)=39$, $\gcd(f'(1),7)=1$이므로

$$f'(1)t\equiv -\frac{f(1)}{7} \pmod 7 \iff t\equiv 6 \pmod 7$$

이다. 그러므로 $x\equiv 1+7\cdot 6\equiv 43 \pmod{7^2}$은 $f(x)\equiv 0 \pmod{7^2}$의 해이다.

② $x\equiv 2 \pmod 7$인 경우

$7^2\mid f(2)=147$, $7\mid f'(2)=245$이므로 $k\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$에 대하여 $x\equiv 2+k\cdot 7 \pmod{7^2}$이 $f(x)\equiv 0 \pmod{7^2}$의 해이다.

③ $x\equiv 3 \pmod 7$인 경우

$7^2\nmid f(3)=658$, $7\mid f'(3)=875$이므로 법 7에 대해 3와 합동이 되는 $f(x)\equiv 0 \pmod{7^2}$의 해는 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)\equiv 0 \pmod{7^2}$의 해는

$$x\equiv 2 \pmod{7^2},\ x\equiv 9 \pmod{7^2},\ x\equiv 16 \pmod{7^2},\ x\equiv 23 \pmod{7^2},$$
$$x\equiv 30 \pmod{7^2},\ x\equiv 37 \pmod{7^2},\ x\equiv 43 \pmod{7^2},\ x\equiv 44 \pmod{7^2}$$

이다.

정답 $x \equiv 2 \pmod{7^2}$, $x \equiv 9 \pmod{7^2}$, $x \equiv 16 \pmod{7^2}$, $x \equiv 23 \pmod{7^2}$
$x \equiv 30 \pmod{7^2}$, $x \equiv 37 \pmod{7^2}$, $x \equiv 43 \pmod{7^2}$, $x \equiv 44 \pmod{7^2}$

유제 8-28 합동식 $x^3 + 8x^2 - x - 1 \equiv 0 \pmod{11^2}$의 해를 구하시오.

유제 8-30 합동식 $x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 12x^2 + 9x - 5 \equiv 0 \pmod{5^2}$의 해를 구하시오.

유제 풀이

유제 8-28

정답: $x \equiv 59 \pmod{11^2}$

$f(x)=x^3+8x^2-x-1$이라 하자. $f(x)\equiv 0 \pmod{11}$의 해는 $x\equiv 4 \pmod{11}$과 $x\equiv 5 \pmod{11}$이다.

① $f(4)=187$, $f'(4)=111$, $\gcd(f'(4), 11)=1$이므로

$$f'(4)t \equiv -\frac{f(4)}{11} \pmod{11} \iff t\equiv -17\equiv 5 \pmod{11}$$

이다. 그러므로 $x\equiv 4+11\cdot 5\equiv 59 \pmod{11^2}$은 $f(x)\equiv 0 \pmod{11^2}$의 해이다.

② $11^2 \nmid f(5)=319$, $11 \mid f'(5)=154$이므로 법 11에 대하여 5와 합동인 $f(x)\equiv 0 \pmod{11^2}$의 해는 존재하지 않는다.

따라서 주어진 합동식의 해는 $x\equiv 59 \pmod{11^2}$뿐이다.

유제 8-30

정답: $x\equiv 1 \pmod{5^2}$, $x\equiv 6 \pmod{5^2}$,
$x\equiv 11 \pmod{5^2}$, $x\equiv 16 \pmod{5^2}$,
$x\equiv 20 \pmod{5^2}$, $x\equiv 21 \pmod{5^2}$

$f(x)=x^5-6x^4+13x^3-12x^2+9x-5$라 하자.

$f(x)\equiv 0 \pmod 5$의 해는

$$x\equiv 0 \pmod 5,\ x\equiv 1 \pmod 5,\ x\equiv 2 \pmod 5$$

이다.

① $x\equiv 0 \pmod 5$인 경우

$f(0)=-5$, $f'(0)=9$, $\gcd(f'(0), 5)=1$이므로

$$f'(0)t\equiv -\frac{f(0)}{5} \pmod 5 \iff t\equiv 4 \pmod 5$$

이다. 그러므로 $x\equiv 0+5\cdot 4\equiv 20 \pmod{5^2}$은 $f(x)\equiv 0 \pmod{5^2}$의 해이다.

② $x\equiv 1 \pmod 5$인 경우

$5^2 \mid f(1)=0$, $5 \mid f'(1)=5$이므로 $k\in\{0, 1, 2, 3, 4\}$에 대하여 $x\equiv 1+k\cdot 5 \pmod{5^2}$이 $f(x)\equiv 0 \pmod{5^2}$의 해이다.

③ $x\equiv 2 \pmod 5$인 경우

$5^2 \nmid f(2)=5$, $5 \mid f'(2)=5$이므로 법 5에 대해 2와 합동이 되는 $f(x)\equiv 0 \pmod{5^2}$의 해는 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)\equiv 0 \pmod{5^2}$의 해는

$x\equiv 1 \pmod{5^2}$, $x\equiv 6 \pmod{5^2}$, $x\equiv 11 \pmod{5^2}$,
$x\equiv 16 \pmod{5^2}$, $x\equiv 20 \pmod{5^2}$, $x\equiv 21 \pmod{5^2}$

이다.