[정현민 전공수학]

미적분, 해석학

고난도 기출문제

G스쿨

1. 구간 $[0,3]$에서 정의된 두 함수 f와 α가 다음과 같을 때, f는 α에 관하여 Riemann-Stieltjes 적분가능함을 보이고, RS-적분 $\displaystyle\int_0^3 f\,d\alpha$의 값을 구하시오.

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & 0\le x<2\\ 3x, & 2\le x\le 3\end{cases},\qquad \alpha(x)=\begin{cases}2, & 0\le x\le 2\\ 4, & 2<x\le 3\end{cases}$$

2. 좌표평면의 영역

$$D(t)=\left\{(x,y)\;\middle|\;x\ge 0,\ y\ge 0,\ x^2+\frac{y^2}{9}\le 1,\ x+\frac{y}{3}\ge t\right\}$$

과 함수 $f(x,y)=\sqrt{|9x^2+y^2-2|}$에 대하여

$$g(t)=\iint_{D(t)} f(x,y)\,dx\,dy$$

라 하자. $g(0)$과 $g'\left(\dfrac{2}{3}\right)$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.

3. 함수 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$를 $f(x,y)=x^6+y^6-x^2y^3$이라 하자. $t\neq 0$인 상수 t에 대하여 직선 $y=tx$와 등위곡선(level curve) $f(x,y)=0$의 원점 이외의 교점을 구하시오. 또한 영역 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid f(x,y)\le 0,\ x\ge 0\}$의 넓이를 풀이 과정과 함께 쓰시오.

※ 다음은 필요하면 사용할 수 있다.

〈도움말〉

$$\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^6}=\frac{\pi}{3}$$

4. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$는 미분가능하고 도함수 f'이 $\mathbb{R}$에서 연속이다. 자연수 n에 대하여 함수 g_n을

$$g_n(x)=\frac{n}{2}\left\{f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f\left(x-\frac{1}{n}\right)\right\}$$

이라 하자. 함수열 $\{g_n\}$이 닫힌구간 $[0,1]$에서 f'으로 평등수렴(균등수렴)함을 보이시오. 또한 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g_n(x)\,dx$의 값을 f를 이용하여 나타내시오.

5. 자연수 n에 대하여 함수 $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$을

$$g_n(x) = \int_0^x \{3x^2 + (x-y)^n \ln^n(1+xy)\}\, dy$$

로 정의하고, $a_n = \int_0^1 g_n(x)\, dx$라 하자. 함수열 $\{g_n\}$이 $[0,1]$에서 어떤 함수 g로 균등수렴(고른수렴, 평등수렴, uniform convergence)함을 보이고, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.

6. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 f에 대하여 집합 A를

$$A = \{x \mid f(x) = x,\ 0 \le x \le 2\}$$

라 하자. 다음 명제의 대우명제를 쓰고, 명제를 증명하시오.

〈명제〉

모든 실수 x에 대하여 $f(x) \neq x$ 이거나 $f'(x) \neq 1$이면, 집합 A는 유한집합이다.

7. 상수함수가 아닌 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 무한번 미분가능하고 모든 실수 x와 자연수 n에 대하여

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le n^3 e^{|x|}$$

를 만족시킬 때, 집합 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0,\ |x| < 1\}$이 유한집합임을 보이시오.

※ 다음 정리들은 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

〈도움말〉

(가) $c \in (a,b)$이고 함수 $f(x)$가 열린구간 (a,b)에서 $(n+1)$번 미분가능할 때,

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k, \quad R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

로 놓으면 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$이 되는 t_x가 c와 x 사이에 존재한다.

(나) 함수 $g(x)$가 $|x-c| < r$ ($r > 0$, c는 상수)인 모든 $x \in \mathbb{R}$에 대하여

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

일 때, 모든 자연수 n에 대하여 $x_n \neq c$, $g(x_n) = 0$이고 $\lim_{n\to\infty} x_n = c$인 수열 $\{x_n\}$이 존재하면 $|x-c| < r$인 모든 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 $g(x) = 0$이다.

8. 함수 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$가 $[0,1]$에서 연속이고, 조건

$$\int_0^1 f(x) e^{nx}\, dx = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

을 만족할 때, 변수변환 $y = e^x$를 사용하여 f는 상수함수임을 증명하시오.

9. 음이 아닌 정수 n에 대하여 함수 $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$를 다음과 같이 정의하자.

$$f_0(x) = \cos x, \quad f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)\,dt \quad (n \geq 1)$$

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$는 $[0,1]$에서 고른수렴(평등수렴, 균등수렴, uniform convergence)함을 보이고, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$를 구하시오.

※ 다음 정리는 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

〈도움말〉

함수 $g(x)$가 미분가능하면

$$\int_0^x g(t)e^{-t}\,dt = \left[-g(t)e^{-t}\right]_0^x + \int_0^x g'(t)e^{-t}\,dt$$

이다.

10. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$$

일 때, $a_{n+2} = f(n)\,a_n$을 만족시키는 $f(n)$을 구하고, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^{\alpha}$이 수렴하는 실수 α의 범위를 풀이 과정과 함께 쓰시오.

※ 다음 식은 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

〈도움말〉

모든 자연수 n에 대하여

$$n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n} \leq n! \leq n^{n+\frac{1}{2}}e^{1-n}$$

이다.

11. 함수항 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right)$가 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$에서 점별수렴(pointwise convergence)함을 보이시오. 또 함수

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right)$$

는 균등연속(고른연속, 평등연속, uniformly continuous)임을 보이시오.

12. 함수 $f(x)$는

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 1, \quad \int_0^1 f(x)\,dx = 0$$

을 만족하고 그 도함수 $f'(x)$는 구간 $[0,1]$에서 연속이다. 이 때, 구간 $[0,1]$에서의 $|f'(x)|$의 최댓값 M의 범위를 구하시오.

13. 자연수 n에 대하여 함수 $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$이

$$f_n(x) = \frac{x}{1+e^{n^2 x}} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k+1}\left(e^{-kx} - e^{-(k+1)x}\right)$$

일 때, 함수열 $\{f_n\}$이 $[0, \infty)$에서 고른수렴(평등수렴, 균등수렴, uniform convergence)함을 보이시오. 또한,

$$A = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} \ln(e^x - x)\, dx$$

에 대하여 $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (f_n(x) + A)\, dx$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.