2024학년도 전공수학 중등교원임용시험

정현민 전공수학

2024 기출풀이

해커스임용

A형 기입형

2. 복소평면에서 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원을 시계반대방향으로 한 바퀴 도는 곡선 C에 대하여 적분

$$\int_C \bar{z}dz - \frac{1}{z}d\bar{z}$$

의 값을 구하시오. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.) [2점]

3. 순환군(cyclic group) G의 한 부분군(subgroup) H에 대하여 G에서의 H의 지수(index) $|G:H|$는 520이다. 잉여군(상군, factor group, quotient group) G/H의 생성원(generator)의 개수를 구하시오. 또한, G/H의 한 생성원 aH와 G의 한 부분군 K에 대하여 $K/H=\langle (aH)^{35} \rangle$일 때, $G/H=(K/H)(L/H)$를 만족시키는 G의 부분군 L의 개수를 구하시오. [2점]

4. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡선 C를

$$C=\{(x,\ y,\ z)\in \mathbb{R}^3 \mid y=e^{ax},\ yz=b\}$$

(단, a, b는 상수)

라 하자. 곡선 C와 $yz-$평면의 교점 P에서 곡선 C의 접선(tangent line)이 점 $(2\sqrt{2},\ 3,\ -1)$을 지날 때, a^2+b^2의 값과 점 P에서의 곡률(curvature)을 순서대로 구하시오. [2점]

A형 서술형

7. 좌표평면의 영역

$$D(t) = \{(x,\ y) \mid x\ge 0,\ y\ge 0,\ x^2+y^2\le 1,\ x+y\ge t\}$$

$(0\le t\le 1)$

과 함수 $f(x,\ y)=\sqrt{|8x^2+8y^2-1|}$에 대하여 $g(t)=\iint_{D(t)} f(x,\ y)dxdy$라 하자.

$g(0)$과 $g'\left(\frac{1}{2}\right)$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

8. 모든 성분이 실수인 3×3 행렬 A와 행렬 $B=A^2-A+5I$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 행렬 $A-3I$는 역행렬을 갖지 않는다. (나) 행렬 A의 특성방정식(고유방정식, characteristic equation)은 허근 α를 가지고 $\lvert\alpha\rvert=\sqrt{2}$이다. (다) 행렬 B의 최소다항식(minimal polynomial)의 차수는 B의 특성다항식(고유다항식, characteristic polynomial)의 차수보다 낮다.

행렬 A의 모든 고윳값(eigenvalue)과 대각합(trace) 및 행렬식(determinant)을 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오.
(단, I는 3×3 단위행렬이다.) [4점]

9. 보통 위상(usual topology)이 주어진 4차원 좌표공간 $\mathbb{R}^4$에서

$$A=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \mid a^2+b^2=1,\ c^2+d^2=1,\ ac+bd=0\}$$

이 컴팩트(긴밀, 옹골, compact) 집합임을 보이시오. 또한, 집합 A에서 정의된 함수 $f(a,b,c,d)=ad-bc$의 치역을 구하고, 이를 이용하여 집합 A가 연결집합(connected set)인지 판별하고 그 이유를 쓰시오. [4점]

10. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_n=\int_0^1(1-x^2)^n\,dx$$

일 때, $a_{n+1}=f(n)a_n$을 만족시키는 $f(n)$을 구하고, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^{\alpha}$이 수렴하는 실수 α의 범위를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

※ 다음 식은 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

모든 자연수 n에 대하여 $n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\le n!\le n^{n+\frac{1}{2}}e^{1-n}$ 이다.

11. 연속확률변수 X의 누적분포함수(cumulative distribution function) $F(x)$가 연속인 순증가함수(strictly increasing function)라 하자. 확률변수 $F(X)$의 확률밀도함수(probability density function)를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한, $\mathrm{P}(-2<\ln F(X)<1)$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

12. 체(field) K를 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서 $x^{23}-88$의 분해체(splitting field)라 하자. K의 $\mathbb{Q}$ 위에서의 차수(degree) $[K:\mathbb{Q}]$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.
또한, $[K:E]-[E:\mathbb{Q}]$가 1010의 양의 약수이고 $\mathbb{Q}\le E\le K$를 만족시키는 체 E의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

B형 기입형

2. 포아송분포(Poisson distribution) $Poisson(5)$로부터의 확률표본(random sample) $X_1, X_2, \cdots, X_n$에 대하여 $\overline{X}$를 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$라 하자. $\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right)=140$일 때, n의 값을 구하시오. [2점]

※ 다음은 필요하면 사용할 수 있다.

확률변수 X가 $Poisson(\lambda)$를 따르면 $\mathrm{P}(X=x)=\dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}\quad (x=0,\,1,\,2,\,\cdots)$이다.

B형 서술형

6. 다항식환(polynomial ring) $\mathbb{Z}_n[x]$의 주 아이디얼(principal ideal) $I=\langle x^2+ax+1-a\rangle$에 대하여 잉여환(상환, factor ring, quotient ring) $\mathbb{Z}_n[x]/I$가 홀수인 표수(특성, characteristic)를 갖고 위수(order)가 40 이하인 정역(integral domain)이 되도록 하는 정수의 순서쌍 (n, a)를 풀이 과정과 함께 모두 쓰시오. (단, $0\le a<n$이다.) [4점]

7. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡면

$$M: x^2+4y^2+4z^2=4,\ 0<x<\frac{4\sqrt{5}}{5},\quad 0<z<\sqrt{3}\,y$$

위의 점 $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$에서의 가우스곡률(Gaussian curvature) K를 구하시오. 또한, 곡면 M에서의 가우스곡률합(가우스 전곡률, total Gaussian curvature) $\iint_M K\,dA$를 풀이 과정과 함께 쓰시오.
(단, dA는 곡면 M의 면적소(area element)이다.) [4점]

8. 수열 $\{a_n\}$이 $a_0 = a_1 = 0,\ a_n = 1\ (n \geq 2)$를 만족시킬 때, $\{a_n\}$의 생성함수(generating function) $f(x)$를 구하시오.

또한, 수열 $\{b_n\}$이 $0 < x < 1$에서 $\sqrt{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$을 만족시킬 때, b_5의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

9. r을 홀수인 소수 p의 원시근(primitive root)이라 하고 $X = \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k < p-1,\ \gcd(k,\ p-1) = 1\}$이라 하자. 임의의 $a, b \in X$에 대하여 r^{ab}이 p의 원시근임을 보이시오. 또한, $a, b \in X$에 대하여 $r^{ab} \equiv r^a \pmod{p}$ 또는 $r^{ab} \equiv r^b \pmod{p}$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수를 $|X|$의 식으로 나타내고, 이러한 순서쌍의 개수가 15가 되도록 하는 모든 소수 p의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $|X|$는 집합 X의 원소의 개수이다.) [4점]

10. 자연수 n에 대하여 함수 $f_n : [0,\ \infty) \to \mathbb{R}$ 이

$$f_n(x) = \frac{x}{1+e^{nx}} + \sum_{k=0}^{n-1} x^k \left(e^{-kx} - e^{-(k+1)x}\right)$$

일 때, 함수열 $\{f_n\}$이 $[0,\ \infty)$에서 고른수렴(평등수렴, 균등수렴, uniform convergence)함을 보이시오. 또한, $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

11. 실숫값을 갖는 두 함수 $u(x,\ y)$, $v(x,\ y)$와 복소수 $z = x + iy$ ($x,\ y$는 실수)에 대하여
복소함수 $f(z) = u(x,\ y) + iv(x,\ y)$는 정함수(전해석함수, entire function)이다. $\overline{f(\overline{z})}$가 정함수임을 보이시오.
또한, $f'(i) = \pi$, $f(-i) = 1$이고 모든 실수 x, y에 대하여

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$
$$> (u(x,\ -y))^2 + (v(x,\ -y))^2$$

일 때, $\dfrac{f'(1-i)}{\overline{f(1+i)}}$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.

(단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.) [4점]

수고하셨습니다. ^^

정답 및 풀이

충분히 고민 후 참고용으로 사용해주세요. ^^

A형 기입형

A02. 정답: $4\pi i$

$z\in C$에 대하여 $\bar{z}=\dfrac{1}{z}$이므로

$$(\text{준식})=\int_C \frac{1}{z}dz-\int_C z d\bar{z}$$
$$=\int_C \frac{1}{z}dz-\int_C z\left(-\frac{1}{z^2}\right)dz$$
$$=4\pi i$$

이다.

A03. 정답: 생성원 개수 192개, L의 개수 8개

G/H는 위수가 520인 순환군이므로 생성원의 개수는

$$\varphi(520)=\varphi(8)\varphi(5)\varphi(13)=2^6\cdot 3=192$$

이다.

$$|K/H|=|(aH)^{35}|=\frac{520}{\gcd(35,\,520)}=104$$

이므로

$$G/H=(K/H)(L/H)$$

를 만족시키기 위해서는

$$|(K/H)\cap(L/H)|=b,\ |L/H|=5b$$

를 만족해야한다. $b\mid 104$이므로 b가 될 수 있는 것은 104의 약수 개수인 8가지이다.

A04. 정답: $\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

곡선 C를

$$C(t)=\left(t,\ e^{at},\ be^{-at}\right)$$

와 같이 매개화할 수 있다.

$$\mathrm{P}=C(0)=(0,\,1,\,b)$$

이고 점 P에서 교선을 $\mathrm{x}(t)$라 하면

$$\mathrm{x}(t)=C(0)+tC'(0)=(t,\ 1+at,\ b-abt)$$

이다.

$$(t,\ 1+at,\ b-abt)=\left(2\sqrt{2},\ 3,\ -1\right)$$
$$\Rightarrow\ t=2\sqrt{2},\ a=\frac{1}{\sqrt{2}},\ b=1$$

이므로 $a^2+b^2=\dfrac{3}{2}$이다.

$$C'(0)=\left(1,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad C''(0)=\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

이므로

$$\kappa=\frac{\|C'\times C''(0)\|}{\|C'(0)\|^3}=\frac{\|C''(0)\|}{\|C'(0)\|^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

이다.

A형 서술형

A07. 정답: $g(0)=\dfrac{\pi}{48}\left(7^{\frac{3}{2}}+1\right)$

$$g(0)=\iint_{D(0)}\sqrt{|8x^2+8y^2-1|}\,dxdy$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\sqrt{|8r^2-1|}\,drd\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{\frac{1}{8}}} r\sqrt{1-8r^2}\,drd\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\sqrt{\frac{1}{8}}}^1 r\sqrt{8r^2-1}\,drd\theta$$
$$=\frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{24}(1-8r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{\frac{1}{8}}}+\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{24}(8r^2-1)^{\frac{3}{2}}\right]_{\sqrt{\frac{1}{8}}}^1$$
$$=\frac{\pi}{48}\left(7^{\frac{3}{2}}+1\right)$$

$t>\dfrac{1}{2}$에 대하여

$$g(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{t}{\cos\theta+\sin\theta}}^1 r\sqrt{8r^2-1}\,drd\theta$$

이므로 $h(\theta,\,t)=\displaystyle\int_{\frac{t}{\cos\theta+\sin\theta}}^1 r\sqrt{8r^2-1}\,dr$라 하면

$$g'(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial}{\partial t}h(\theta,\,t)d\theta$$
$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t}{1+\sin2\theta}\sqrt{\frac{8t^2}{1+\sin2\theta}-1}\,d\theta$$

이다. 그러므로

$$g'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin2\theta}\sqrt{\frac{1-\sin2\theta}{1+\sin2\theta}}\,d\theta$$
$$=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin2\theta}\sqrt{\frac{1-\sin2\theta}{1+\sin2\theta}}\,d\theta$$
$$=-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{1+u}\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}d\theta$$
$$\left(u=\sin2\theta\ \Rightarrow\ du=2\sqrt{1-u^2}\,d\theta\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{(1+u)^2}d\theta$$
$$=-\frac{1}{4}$$

이다.

A08. 정답: 고윳값 $\dfrac{1+\sqrt{7}i}{2}$, $\dfrac{1-\sqrt{7}i}{2}$, 3

$$tr(A)=4,\ \det(A)=6$$

조건 (가)에 의해 $\det(A-3I)=0$이므로 3은 A의 고윳값이다. 또한 (나)에 의해

$$\det(A-\lambda I)=-(\lambda-\alpha)(\lambda-\overline{\alpha})(\lambda-3)$$

이다. (단, $\overline{\alpha}$는 α의 켤레복소수) 그러므로

$$\det(A)=-(-\alpha)(-\overline{\alpha})(-3)=3\alpha\overline{\alpha}=3|\alpha|^2=6$$

이다.

α에 대응하는 A의 고유벡터를 v_1, $\overline{\alpha}$에 대응하는 A의 고유벡터를 v_2, 3에 대응하는 A의 고유벡터를 v_3이라 하면

$$Bv_1=(\alpha^2-\alpha+5)v_1,\ .Bv_2=(\overline{\alpha}^2-\overline{\alpha}+5)v_2,\ Bv_3=11v_3$$

이다. 일반성을 잃지 않고 $\alpha^2-\alpha+5=11$이라 가정하면 α는 -2 또는 3이므로 $|\alpha|=\sqrt{2}$임에 모순이다. 그러므로 조건 (다)에 의해 $\alpha^2-\alpha+5=\overline{\alpha}^2-\overline{\alpha}+5$이다.

$$\begin{aligned}\alpha^2-\alpha+5=\overline{\alpha}^2-\overline{\alpha}+5 &\Rightarrow \alpha^2-\overline{\alpha}^2=\alpha-\overline{\alpha}\\ &\Rightarrow \alpha+\overline{\alpha}=1,\ (\because \alpha:\text{ 허근})\\ &\Rightarrow \alpha=\frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}\end{aligned}$$

이므로 A의 모든 고윳값은

$$\frac{1+\sqrt{7}i}{2},\ \frac{1-\sqrt{7}i}{2},\ 3$$

이고 대각합은 4이다.

A09. 정답: A는 컴팩트 & 비연결, $f(A)=\{\pm1\}$

(ⅰ) ① $\forall (a,b,c,d)\in A$,

$$\|(a,b,c,d)\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}=\sqrt{2}$$

이므로 A는 유계이다.

② $B=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4\,|\,ac+bd=0\}$라 하고

$$g:B\to\mathbb{R}^2,\ g(a,b,c,d)=(a^2+b^2,\ c^2+d^2)$$

라 하자. g는 연속함수이고 $(1,1)$이 $\mathbb{R}^2$의 폐집합이므로 $g^{-1}(1,1)=A$는 B의 폐집합이다.

즉 A는 유계, 폐집합이므로 Heine-Borel 정리에 의해 컴팩트이다.

(ⅱ) $(a,b,c,d)\in A$라 하자.

$$\begin{aligned}ac=-bd &\Rightarrow a^2c^2=b^2d^2\\ &\Rightarrow a^2(1-d^2)=(1-a^2)d^2\\ &\Rightarrow a^2=d^2\\ &\Rightarrow a=\pm d\end{aligned}$$

① $a=d=0$인 경우

$b^2=c^2=1$이므로 $ad-bc=-bc\in\{\pm1\}$

② $a=d\neq0$인 경우

$c=-b$이므로 $ad-bc=a^2+b^2=1$

③ $a=-d\neq0$인 경우

$c=b$이므로 $ad-bc=-(a^2+b^2)=-1$

따라서 $f(A)=\{\pm1\}$이고 f가 연속이므로 A는 연결집합이 아니다.

A10. 정답: $f(n)=\dfrac{2n+2}{2n+3}$, $\alpha>2$

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=\int_0^1(1-x^2)^{n+1}dx\\ &=\left[x(1-x^2)^{n+1}\right]_0^1+\int_0^1 2x^2(n+1)(1-x^2)^n dx\\ &=2(n+1)\int_0^1(x^2-1+1)(1-x^2)^n dx\\ &=2(n+1)(a_n-a_{n+1})\end{aligned}$$

이므로 $f(n)=\dfrac{2n+2}{2n+3}$이다. $a_1=\displaystyle\int_0^1(1-x^2)dx=\frac{2}{3}$이므로

$$a_n=f(n-1)\cdots f(1)a_1=\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$$

이다. 임의의 자연수 n에 대하여

$$4^n n^{2n+1}e^{-2n}\le 4^n(n!)^2\le 4^n n^{2n+1}e^{2-2n}$$

$$(2n+1)^{2n+\frac{3}{2}}e^{-2n-1}\le(2n+1)!\le(2n+1)^{2n+\frac{3}{2}}e^{-2n}$$

이므로

$$b_n=\left(\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2n+1}}\right)^{\alpha}$$

$$c_n=\left(\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1}\cdot\frac{e^3}{2\sqrt{2n+1}}\right)^{\alpha}$$

에 대하여 $b_n\le(a_n)^\alpha\le c_n$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{1/n^{\alpha/2}}=\left(\frac{e^2}{2\sqrt{2}}\right)^{\alpha},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{1/n^{\alpha/2}}=\frac{1}{(2\sqrt{2}e)^{\alpha}}$$

이므로 비교판정, 극한비교판정, p-판정법에 의하여

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^\alpha$이 수렴하는 실수 α의 범위는 $\alpha>2$이다.

A11. 정답: $f_Y(y)=1,\ 0<y<1$

$$P(-2<\ln F(X)<1)=1-e^{-2}$$

$Y=F(X)$에 대해

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P(Y\le y),\ 0<y<1\\ &=P(F(X)\le y),\ 0<y<1\\ &=P(X\le F^{-1}(y)),\ 0<y<1\\ &=F(F^{-1}(y)),\ 0<y<1\end{aligned}$$

$$=y,\ 0<y<1$$
이므로 $f_Y(y)=1,\ 0<y<1$이다. 또한

$$\begin{aligned}P(-2<\ln F(X)<1)&=P(e^{-2}<F(X)<e)\\&=P(e^{-2}<F(X)<1)\\&=1-P(0<F(X)<e^{-2})\\&=1-e^{-2}\end{aligned}$$

이다.

A12. 정답: $[K:\mathbb{Q}]=506$, 2개

$\alpha=\sqrt[23]{88}$, $\zeta=e^{i\frac{2\pi}{23}}$라 하면 $K=\mathbb{Q}(\alpha,\zeta)$이다.

$[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]=\deg(x^{23}-88)$ ($\because$ $p=11$, Eisenstein 판정법)
$=23$

$[\mathbb{Q}(\zeta):\mathbb{Q}]=\varphi(23)=22$

이고 $\gcd(23,22)=1$이므로

$$[K:\mathbb{Q}]=23\cdot 22=506$$

이다.

$[K:E]-[E:\mathbb{Q}]$가 1010의 양의 약수가 되는 경우는

$[K:E]=506$, $[E:\mathbb{Q}]=1$ 또는 $[K:E]=23$, $[E:\mathbb{Q}]=22$

이다.

① $[K:E]=506$, $[E:\mathbb{Q}]=1$인 경우
$[E:\mathbb{Q}]=1$이므로 $E=\mathbb{Q}$이다. 그러므로 1개.

② $[K:E]=23$, $[E:\mathbb{Q}]=22$인 경우
K가 $\mathbb{Q}$위에서 $x^{23}-88$의 분해체이므로 갈루아기본정리에 의해 $|G(K/\mathbb{Q})|=23\cdot 22$이고 $|G(K/E)|=23$이다. n_{23}을 sylow 23-부분군 개수라 하면 $n_{23}=23k+1\mid 22$이므로 $n_{23}=1$이다. 그러므로 조건을 만족시키는 중간체 E의 개수는 1개이다.

따라서 ①, ②에 의해 E의 개수는 2개이다.

B형 기입형

B02. 정답: 29

$X_i\sim Poisson(5)$이므로 $E(X_i)=5$, $V(X_i)=5$이다.

$$5=E\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\overline{X})^2}{n-1}\right)=\frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right)=\frac{140}{n-1}$$

이므로 $n=29$이다.

B형 서술형

B06. 정답: $(3,0)$, $(3,2)$, $(5,2)$, $(5,3)$, $(5,4)$

$|\mathbb{Z}_n[x]/I|=n^2\le 40$, $\mathbb{Z}_n[x]/I$: 홀수인 표수
$\Rightarrow n\in\{3,5\}$

$f(x)=x^2+ax+1-a$라 하자. $n\in\{3,5\}$인 경우

$\mathbb{Z}_n[x]/I$: 정역 $\Leftrightarrow$ $f(x)$: $\mathbb{Z}_n[x]$에서 기약
$\Leftrightarrow$ $f(x)$: $\mathbb{Z}_n[x]$에서 근을 갖지 않는다.

가 성립한다.

① $n=3$인 경우

$$f(0)=1-a,\ f(1)=2,\ f(2)=2+a$$

이므로 $a\in\{0,2\}$일 때 $\mathbb{Z}_n[x]/I$가 정역이다.

② $n=5$인 경우

$$f(0)=1-a,\ f(1)=2,\ f(2)=a,\ f(3)=2a,\ f(4)=2+3a$$

이므로 $a\in\{2,3,4\}$일 때 $\mathbb{Z}_n[x]/I$가 정역이다.

따라서 순서쌍은 $(3,0)$, $(3,2)$, $(5,2)$, $(5,3)$, $(5,4)$이다.

B07. 정답: $\dfrac{16}{25}$, $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{6}$

주어진 곡면 M은 회전면의 일부이므로 점 $\left(\sqrt{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$의 가우스곡률은 점 $\left(\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$에서의 가우스곡률과 같다.

$\left(\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$을 지나는 위선은 반지름이 $\frac{1}{\sqrt{2}}$인 원이고

$$N=(0,-1,0),\ U=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$$

이므로 법곡률은 $-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$이다.

$\left(\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$을 지나는 경선은 $\gamma(u)=(2\cos u,\sin u,0)$이므로

$$\gamma'=\left(-\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\ \gamma''=\left(-\sqrt{2},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$$

$$U=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$$

이다. 그러므로 법곡률은 $\frac{\langle\gamma'',U\rangle}{\langle\gamma',\gamma'\rangle}=-\frac{4\sqrt{2}}{5\sqrt{5}}$이다. 따라서 $\left(\sqrt{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$에서의 가우스곡률은

$$\left(-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)\left(-\frac{4\sqrt{2}}{5\sqrt{5}}\right)=\frac{16}{25}$$

이다.

곡면 M의 경계는 회전면과 네 평면

$$x=0,\ x=\frac{4\sqrt{5}}{5},\ z=0,\ z=\sqrt{3}y$$

이 각각 만나 생기는 위선과 경선의 일부로 이루어진다.

$$\chi(M)=4-4+1=1,\ \sum_{i=1}^{4}\varepsilon_i=2\pi$$

이고 경선 위에서 측지곡률은 0이므로 $x=0$, $x=\frac{4\sqrt{5}}{5}$와 회전면이 만나 생기는 위선의 일부로 이루어진 경계를 α, β

라 하면 가우스-보네 정리에 의해

$$\iint_M K dA = 2\pi\chi(M) - \sum_{i=1}^{4}\varepsilon_i - \int_{\partial M}\kappa_g ds$$
$$= -\left(\int_\alpha \kappa_g ds + \int_\beta \kappa_g ds\right)$$

이다.

곡선 α위의 점 $(0,1,0)$에 대해 $\langle B, U\rangle = 0$이므로 $\kappa_g = 0$이다. 그러므로 α위에서 측지곡률은 0이다

곡선 β위의 점 $\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$에서 위선은 반지름이 $\frac{1}{\sqrt{5}}$이고

$$B = (-1, 0, 0),\ U = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$$

이므로 $\kappa_g = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$이다. 그러므로 β위에서 측지곡률은 $-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$이므로

$$\iint_M K dA = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\cdot 2\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{6} = \frac{\sqrt{2}\pi}{6}$$

이다.

B08. 정답: $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$, $b_5 = \frac{35}{128}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1 - x = \frac{x^2}{1-x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\frac{x^2}{1-x}} = \frac{x}{(1-x)^{1/2}}$$
$$= x\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-1)^n x^n$$
$$= x\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}x^n$$

이므로 $b_5 = \binom{8}{4}\frac{1}{4^4} = \frac{35}{128}$이다.

B09. 정답: $2|X|-1$, $p = 17, 31$

(ⅰ) $a, b \in X$에 대해 r^{ab}가 p이 원시근이기 위해 $\gcd(ab, p-1) = 1$를 보이면 충분하다.
$\gcd(a, p-1) = \gcd(b, p-1) = 1$이므로
$$1 = ax_1 + (p-1)y_1 = bx_2 + (p-1)y_2$$
인 정수 x_1, x_2, y_1, y_2가 존재한다.
그러면 $1 = abx_1x_2 + (p-1)t$인 $t \in \mathbb{Z}$가 존재하므로 성립한다.

(ⅱ) $a, b \in X$라 하자.
$r^{ab} \equiv r^a \pmod p$ 또는 $r^{ab} \equiv r^b \pmod p$
$\Rightarrow\ (r^a)^b \equiv r^a \pmod p$ 또는 $(r^b)^a \equiv r^b \pmod p$
$\Rightarrow\ b \equiv 1 \pmod{p-1}$ 또는 $a \equiv 1 \pmod{p-1}$
따라서 순서쌍 (a, b)는 $(1, b)$ 또는 $(a, 1)$ 꼴이다.
즉 $(1, 1)$과 모든 $a(\neq 1) \in X$에 대해 $(1, a)$, $(a, 1)$가 만족하므로 $2|X|-1$개다.

(ⅲ) $15 = 2|X|-1 = 2\varphi(p-1)-1\ \Rightarrow\ \varphi(p-1) = 8$ 인 소수 p를 찾자.
$p-1 = 2^r p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_k^{r_k}$, p_i는 홀수인 소수라 하면
$\varphi(p-1) = \varphi\left(2^r p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_k^{r_k}\right)$
$= 2^{r-1}p_1^{r_1-1}p_2^{r_2-1}\cdots p_k^{r_k-1}(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_k-1)$
이고 16은 짝수이므로 모든 i에 대해 $r_i < 2$이다.
즉 $p-1$은 2^r 또는 $2^r p_1p_2\cdots p_k$꼴이다.
$\varphi(2^r) = 8$인 경우 $p-1 = 2^4$이므로 $p = 17$이다.
$\varphi(2^r p_1p_2\cdots p_k) = 8$인 경우
$$8 = 2^{r-1}(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_k-1)$$
$$= 2\cdot(5-1) = 4\cdot(3-1) = (3-1)(5-1)$$
이므로 $p-1$은 $20, 24, 15, 30$이다.
여기서 소수인 p는 31 뿐이다.
따라서 p는 $17, 31$이다.

B10. 정답: $\ln(e-1)$

$f(x) = \frac{1-e^{-x}}{1-xe^{-x}}$라 하자.

$$f_n(x) = \frac{x}{1+e^{nx}} + \sum_{k=0}^{n-1}x^k\left(e^{-kx} - e^{-(k+1)x}\right)$$
$$= \frac{x}{1+e^{nx}} + \sum_{k=0}^{n-1}x^k e^{-kx}\left(1-e^{-x}\right)$$
$$= \frac{x}{1+e^{nx}} + \frac{\left(1-e^{-x}\right)\left(1-\left(xe^{-x}\right)^n\right)}{1-xe^{-x}}$$

이다. 또한 $g_n(x) = \frac{x}{e^{nx}}$라 하면

$$g_n{}'(x) = \frac{e^{nx} - nxe^{nx}}{e^{2nx}} = \frac{1-nx}{e^{nx}}$$

이므로 $0 \le x \le \frac{1}{n}$일 때 $g_n{}'(x) > 0$이고

$x > \frac{1}{n}$일 때 $g_n{}'(x) < 0$이다.

즉 $g(x)$는 $x = \frac{1}{n}$에서 최댓값 $\frac{1}{ne}$을 갖는다.

따라서 $x \in [0, \infty)$에 대해

$$|f_n(x) - f(x)| \le \left|\frac{x}{1+e^{nx}}\right| + \left|\frac{(1-e^{-x})(xe^{-x})^n}{1-xe^{-x}}\right|$$
$$\le \left|\frac{x}{1+e^{nx}}\right| + \left|\frac{(1-e^{-x})(xe^{-x})^n}{1-xe^{-x}}\right|$$

$$\le \left|\frac{x}{e^{nx}}\right| + \left|\frac{(xe^{-x})^n}{1-xe^{-x}}\right|$$
$$\le \left|\frac{1}{ne}\right| + \left|\frac{\left(\frac{1}{e}\right)^n}{1-\frac{1}{e}}\right| \to 0$$

이므로 $\{f_n\}$은 $[0,\infty)$에서 균등수렴한다.
또한 $\{f_n\}$가 $[0,\infty)$에서 균등수렴하므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx &= \int_0^1 f(x)dx \\ &= \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{1-xe^{-x}}dx \\ &= \int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x-x}dx \\ &= [\ln(e^x-x)]_0^1 \\ &= \ln(e-1)\end{aligned}$$

이다.

B11. 정답: π

$$\overline{f(\overline{z})} = u(x,\,-y) - iv(x,\,-y)$$
$$U(x,y) = u(x,\,-y),\;\; V(x,y) = -v(x,\,-y)$$

라 하면

$$U_x = u_x(x,\,-y) = v_y(x,\,-y) = V_y$$
$$U_y = -u_y(x,\,-y) = v_x(x,\,-y) = -V_x$$

이고 이 함수들은 $\mathbb{C}$에서 연속이므로 $\overline{f(\overline{z})}$는 정함수이다.

$$|f'|^2 = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$
$$> (u(x,\,-y))^2 + (v(x,\,-y))^2 = \left|\overline{f(\overline{z})}\right|^2 \ge 0$$

이므로 $\frac{1}{f'(z)}$는 정함수이고 $\left|\frac{\overline{f(\overline{z})}}{f'(z)}\right|^2 < 1$이다. $\frac{\overline{f(\overline{z})}}{f'(z)}$는 정함수이고 $\frac{\overline{f(\overline{z})}}{f'(z)}$는 유계함수이므로 리우빌 정리에 의해 $\frac{\overline{f(\overline{z})}}{f'(z)}$는 상수함수이다. $\frac{\overline{f(\overline{i})}}{f'(i)} = \frac{\overline{f(-i)}}{f'(i)} = \frac{1}{\pi}$이므로 $\frac{f'(1-i)}{f(1+i)} = \pi$이다.