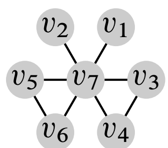
2025학년도 중등학교교사 임용후보자 선정경쟁시험 교과부분 모범답안

2024년 12월 19일

A-2 (2)	$\mathcal{D}$의 넓이를 $\lvert\mathcal{D}\rvert$라 두면 $\lvert\mathcal{D}\rvert = 2\int_a^{a+1}\frac{dx}{x} = \ln\left(1+\frac{1}{a}\right) = 2\ln 2$. 따라서 $\boxed{a=1}$. $L = M = 2x-y$라 두면 그린 정리에 의해 선적분의 값은 $\iint_{\mathcal{D}} M_x - L_y\,dA$. $M_x = 2,\ L_y = -1$이므로 $\boxed{\int_{\mathcal{C}} L\,dx + M\,dy = \iint_{\mathcal{D}} 3\,dA = 3\lvert\mathcal{D}\rvert = 6\ln 2}$.
A-3 (2)	$\mathbb{K}$가 유한체 $\iff$ $\lvert\mathbb{K}\rvert = p^n$. (단, p는 소수, n은 자연수.) 위수가 p^n인 체(즉, 표수는 p.)를 $\mathbb{F}_{p^n}$라 하자. 유한체 $\mathbb{K}$에 대해 $\mathbb{K}^*$는 위수가 $\lvert\mathbb{K}\rvert-1$인 순환군이니, $G \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{F}^*_{p^n-1} \cong C_4 \times C_{p^n-1}$. $C_p \times C_q$는 순환군 $\iff$ $\gcd(p,q)=1$이므로 p^n-1은 홀수, 즉, $\boxed{p=2=a}$. 순환군 $C_p\times C_q$의 위수는 pq이니 $4(2^n-1)\le 160$을 만족하는 n의 개수는 $\boxed{5=b}$.
A-4 (2)	서로 독립인 $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i,\sigma_i^2)$에 대해 $\sum_i c_iX_i \sim \mathcal{N}\left(\sum_i c_i\mu_i, \sum_i c_i^2\sigma_i^2\right)$이니 $Y \sim \mathcal{N}\left(0,3^2\right)$. 즉, $\boxed{\mathrm{V}(Y)=9}$. Y를 정규화 하면 $\frac{Y-0}{3} \sim \mathcal{N}(0,1)$이 되니 $\mathrm{P}(Y \ge -7) \iff \mathrm{P}\left(\frac{Y}{3} \ge -\frac{7}{3}\right)$. 대칭성에 의해 $\mathrm{P}(Z\ge -z) = \mathrm{P}(Z \le z)$이니 $\boxed{a=\frac{7}{3}}$.
A-7 (4)	일차분수변환은 비조화비를 보존하므로 네 점 $(z,0,i,2)$과 $(T(z),-1,-i,3)$에 대해 $\frac{(0-i)(2-z)}{(0-z)(2-i)} = \frac{(-1-(-i))(3-T(z))}{(-1-T(z))(3-(-i))}$. 방정식 $\frac{i}{2-i}\frac{2-z}{z} = \frac{1+i}{3+i}\frac{T(z)-3}{T(z)+1}$을 $T(z)$에 대해 풀면 $\boxed{T(z) = \frac{z+1}{z-1}}$. 일차분수변환은 원 또는 직선을 원 또는 직선으로 보내고 $T(1) = \infty$이니 $T(W)$는 직선이다. $T(-1) = 0$, $T(i) = -i$이니 $T(W)$는 허수축이고, 따라서 $T(W)$와 $1+i$ 사이의 거리는 $\boxed{1}$. $\frac{(z_3-z_1)(z_4-z_2)}{(z_3-z_2)(z_4-z_1)}$ $[a,b,c,d] = \frac{(a-b)(c-d)}{(a-d)(c-b)}$
A-8 (4)	$(A^{-1}-\frac{1}{2}I)x = 0 \iff Ax = 2x$이니 $v' = (1,-2,1)$과 $w' = (1,2,-3)$은 고윳값 2에 대응되는 A의 고유벡터. A의 고윳값의 곱이 $\det(A)$이니 마지막 고윳값은 8. A는 $\mathbb{R}^3$의 정규직교기저를 이루는 고유벡터들을 갖는다. v'의 정규화는 $(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}) = v$. v와 직교인 w'성분: $w' - \langle v, w'\rangle\, v = (2,0,-2)$. 정규화하면 $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}) = w$. 정규직교기저의 나머지 성분은 $v \times w = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. 따라서 $\boxed{D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}}$, $\boxed{P = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}}$이면 $D = P^{\intercal}AP$.
A-9 (4)	$X_u = (2, 2\sinh u\cos v, 2\sinh u \sin v)$, $X_v = (0, -2\cosh u \sin v, 2\cosh u \cos v)$. 이제부터 모든 값은 $(0, \frac{\pi}{4})$에서 계산한 값이라 간주한다. $X = (1, \sqrt{2}, \sqrt{2})$, $X_u = (2,0,0)$, $X_v = (0, -\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $\frac{X_u\times X_v}{\lvert X_u \times X_v\rvert} = (0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}) = n$. 접평면의 방정식은 $n\cdot(x-1, y-\sqrt{2}, z-\sqrt{2}) = 0$. 즉, $\boxed{y+z = 2\sqrt{2}}$. 제 1기본계수 $E = X_u\cdot X_u = 4$, $F = X_u \cdot X_v = 0$, $G = X_v\cdot X_v = 4$. $X_{uu} = X = -X_{vv} = (1,\sqrt{2},\sqrt{2})$, $X_{uv} = X_{vu} = (0,0,0)$. 제 2기본계수 $L = n\cdot X_{uu} = -2$, $M = n\cdot X_{uv} = 0$, $N = n\cdot X_{vv} = 2$. 따라서 $\boxed{K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = -\frac{1}{4}}$, $\boxed{H = \frac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)} = 0}$.
A-10 (4)	$\chi(K_n) = n$, $\chi(K_{n,n}) \equiv 2$이므로 $\deg(v_1) \le 1$, $\deg(v_7)\le 7$인데, 단순그래프이므로 $\deg(v_7) \le 6$. $n = 2,3,4,5,6$에 대해 $\deg(v_n) \le 2$임 또한 안다. $\sum_{n=1}^{7}\deg(v_n)$의 상한은 17이다. 변의 개수를 E라 두면 $\sum_{n=1}^{7}\deg(v_n) = 2E$이니 $\sum_{n=1}^{7}\deg(v_n)$은 짝수여서 $E = 6$이 상한이다. 다음 그래프는 $E=6$인 실례이므로, $\boxed{E=6}$. 
A-11 (4)	5가 원시근이니 $x^6 \equiv -1 \pmod{p}$, $p = 157$의 해는 $x = 5^t$중 모두 존재한다. 대입하면 $-1 \equiv 5^{\frac{p-1}{2}}$에서 $6t \equiv 78 \pmod{156}$. 이를 풀면 $t \equiv 13 \pmod{26}$, 즉, $1 \le t \le 100$에서 $t = 13, 39, 65, 91$로 개수는 $\boxed{4}$. i가 1에서 155까지 변할 때 5^i은 법 157에서 2에서 156까지의 값을 정확히 한 번씩 가지니 $\displaystyle\sum_{i=1}^{155}\left(\frac{5^i}{157}\right)\left(\frac{i^3}{157}\right)\left(\frac{157-i}{157}\right) + \left(\frac{5^i-1}{157}\right) = \sum_{i=1}^{156}\left(\frac{5^i}{157}\right)\left(\frac{-1}{157}\right) - \left(\frac{-1}{157}\right)^2 + \sum_{k=1}^{156}\left(\frac{k}{157}\right) - \left(\frac{1}{157}\right) = \boxed{-2}$.
A-12 (4)	$f(x)$는 $x=0$에서 연속 $\iff \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$. $\lvert\cos\frac{1}{x}\rvert \le 1$이므로 $-\sqrt[3]{x} \le f(x) \le \sqrt[3]{x}$인데 $\sqrt[3]{x}$는 $x = 0$에서 연속이므로 조임 정리에 의해 $\lim_{x\to 0} f(x) \to 0$. $p = -1$인 경우 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해 $x_n = \frac{1}{2n\pi}$이라면 $f(x_n) = 2n\pi$, $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$이라면 $f(y_n) = -(2n+1)\pi$. 따라서 사잇값 정리에 의해 폐구간 $[\frac{1}{(2n+1)\pi}, \frac{1}{2n\pi}]$에서 $f_n(x)$는 $[-(2n+1)\pi, 2n\pi]$의 모든 값을 취함. 따라서 $L < 2n\pi$가 되는 충분히 큰 n을 잡으면 $L \in [-(2n+1)\pi, 2n\pi]$이 되어 $f(x_0) = L$이 되는 x_0가 $[\frac{1}{(2n+1)\pi}, \frac{1}{2n\pi}]$에 존재한다.

B-2 (2)	길이 $\int_0^{2\pi}(r^2+(\frac{dr}{d\theta})^2)^{\frac{1}{2}}\,d\theta = \int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos(\theta-\frac{\pi}{3})}\,d\theta = \int_0^{2\pi}\lvert 2\sin\frac{\theta-\frac{\pi}{3}}{2}\rvert\,d\theta = \boxed{8}$. 전곡률은 각의 변화이니 곡선 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$는 $\theta \to \frac{\pi}{3}^-$일 때 원점을 거쳐 나온다. 따라서 $\frac{\pi}{3}$ 방향에서 출발해 $3\pi+\frac{\pi}{3}$ 방향을 향하며 원점으로 돌아오는 셈이니 회전한 각은 3π다. 즉, 전곡률은 $\boxed{3\pi}$.
B-6 (4)	주변확률밀도함수는 구간 $(0,\infty)$에서 각각 $f_X(x)=\int_0^\infty f(x,y)\,dy=\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$, $f_Y(y)=\int_0^\infty f(x,y)\,dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$. 구간 $(-\infty,0]$에서 두 주변확률밀도함수는 모두 0이다. 따라서 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$이니 X와 Y는 독립이다. X와 Y가 독립이므로 $\boxed{\mathrm{P}(X\le 2 \mid Y\le 2)=\mathrm{P}(X\le 2)=\int_0^2 \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\,dx = 1-\frac{1}{e}}$.
B-7 (4)	$Z=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0, y=\sin\frac{1}{x}\}$라 두자. $(X,\mathcal{T}_X)$, $(Y,\mathcal{T}_Y)$의 곱공간과 곱위상에 대해 $(X\times Y)^\circ = X^\circ\times Y^\circ$, $\overline{X\times Y}=\overline{X}\times\overline{Y}$. 여기서 우변의 내부와 폐포는 각 공간의 위상에 대한 내부와 폐포이다. 모든 $A\subseteq(0,1)$에 대해 $(1,\infty)\subset A^\complement$이니 $(0,1)$에 속하는 유일한 열린 집합은 $\varnothing$이며 따라서 $(0,1)^\circ\times Z^\circ=\varnothing$. 즉, $\boxed{S^\circ=(0,1)^\circ=\varnothing}$. $\mathcal{T}_1$에 대해 닫힌 집합은 가산 또는 $\mathbb{R}$이며, $(0,1)$을 포함하는 유일한 닫힌 집합은 $\mathbb{R}$이다. 폐구간 $I_n=[\frac{2}{(3+4n)\pi},\frac{2}{(1+4n)\pi}]$에서 $y=\sin\frac{1}{x}$은 사잇값 정리에 의해 $[-1,1]$의 모든 값을 취하므로 임의의 $a\in[-1,1]$에 대해 $d_{\mathrm{H}}(a,Z)<\frac{2}{(1+4n)\pi}$. ($d_{\mathrm{H}}(a,Z)$는 $\{a\}$와 Z 사이의 하우스도르프 거리이다.) 즉, $\overline{Z}=(\{0\}\times[-1,1])\cup Z$. 따라서 $\boxed{\overline{S}=\mathbb{R}\times\overline{Z}\times((\{0\}\times[-1,1])\cup Z)}$.
B-8 (4)	갈루아 이론의 기본 정리에 의해 $\mathbb{Q}$위에 $[E:\mathbb{Q}]=6$을 만족하는 K의 부분체와 $\mathrm{G}(K/\mathbb{Q})$의 위수가 2인 부분군은 일대일 대응되니 $\mathbb{Z}_2\times S_3$의 위수 2인 부분군의 개수를 구하면 되며, 이는 위수가 2인 원소의 개수와 같다. (a,b)의 위수가 2인 경우의 수는 $\mathbb{Z}_2$ 위수 2 이하, S_3 위수 2 이하인 경우에서 항등원을 제거하면 되니 이는 $2\times4-1=\boxed{7}$. 이제 $\mathrm{G}(K/\mathbb{Q})$의 부분군은 $\mathbb{Z}_2\times S_3$의 부분군과 일대일로 대응된다. $\mathbb{Z}_2\times S_3$는 $\mathbb{Z}_2\times\{e\}$를 정규 부분군으로 가지니 이에 대응하는 $\mathrm{G}(K/\mathbb{Q})$의 정규 부분군 H를 생각하자. $F=K_H$라 할 때 이는 $\mathbb{Q}$위의 정규 확대체가 된다. 또한 $\mathrm{G}(F/\mathbb{Q})\simeq\mathrm{G}(K/\mathbb{Q})/\mathrm{G}(K/F)\simeq\mathbb{Z}_2\times S_3/\mathbb{Z}_2\times\{e\}\simeq\mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2\times S_3/\{e\}\simeq S_3$이니 조건을 만족하는 F가 존재한다.
B-9 (4)	$f(z)$에 대해 코시-리만 방정식이 성립하니 $u_x=-e^{-x}\cos y=v_y$, $u_y=-e^{-x}\sin y=-v_x$. u_x의 y에 대한 한 부정적분 $-e^{-x}\sin y$와 x에 대해 미분 가능한 함수 $F(x)$에 대해 $v(x,y)=-e^{-x}\sin y+F(x)$임을 첫 식에서 얻는다. 이 식의 양변을 x에 대해 편미분하면 $v_x=e^{-x}\sin y+F'(x)\equiv -u_x=e^{-x}\sin y$, 따라서 $F'(x)=0$, 즉 $F(x)$는 상수함수다. $f(0)=1+iF(0)=1$이니 $F(x)=0$. 따라서 $\boxed{f(z)=f(x+iy)=e^{-x}\cos y-ie^{-x}\sin y=e^{-x}(\cos y-i\sin y)=e^{-z}}$. $f(\frac{1}{z})=e^{-\frac{1}{z}}$의 로랑 급수 $1-\frac{1}{z}+\cdots$의 $\frac{1}{z}$의 계수 a_{-1}은 -1이다. 유수 정리에 의해 $\boxed{\int_C f\left(\frac{1}{z}\right)dz=2\pi i a_{-1}=-2\pi i}$.
B-10 (4)	$f_n(x)$는 $0\le x\le\ln(2n)$에서 y절편이 $\frac{1}{n^2\ln(2n)}$이고 x절편이 $\ln(2n)$인 일차 함수고, $\ln(2n)<x<2\ln(2n)$에서 진폭이 $\frac{1}{n^2}$이고 주기가 $\ln(2n)$인 사인 함수이며, 나머지 구간에서는 0이다. 따라서 모든 $n\ge2$과 $x\in\mathbb{R}$ 대해 $\lvert f_n(x)\rvert\le\frac{1}{n^2}$이며, $M_n=\frac{1}{n^2}$으로 두면 $\lvert\sum_{n=1}^\infty f_n(x)\rvert\le\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}<\infty$이므로 M-판정에 의해 $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$는 $[0,\infty)$에서 평등수렴한다. $f_n(x)$는 $[0,\infty)$에서 연속이므로 a_n은 $f_n(x)$의 그래프와 축 사이의 부호를 감안한 넓이이고, 사인 함수 부분이 정확히 한 주기이니 이는 높이가 $\frac{1}{n^2\ln(2n)}$이고 밑변의 길이가 $\ln(2n)$인 삼각형의 넓이 $\frac{1}{2n^2}$이다. 따라서 $\boxed{\sum_{n=1}^\infty a_n=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}}$.
B-11 (4)	$\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_{12}$의 $(3,8)$을 포함하는 가장 작은 아이디얼은 $(3,8)$로 생성된 주아이디얼 $\langle(3,8)\rangle=\langle3\rangle\times\langle8\rangle$를 포함하니 이것이 가장 작은 아이디얼이다. $\gcd(3,10)=1$이니 $\langle3\rangle=1\mathbb{Z}_{10}=\mathbb{Z}_{10}$, $\gcd(8,12)=4$이니 $\langle8\rangle=4\mathbb{Z}_{12}$. 즉, $\boxed{\mathbb{Z}_{10}\times4\mathbb{Z}_{12}}$. 조건이 만족된다면 동형사상정리에 의해 $S\cong R/\operatorname{Ker}(\phi)$다. $(3,8)\in\operatorname{Ker}(\phi)$이며 $\operatorname{Ker}(\phi)$은 R의 아이디얼이므로 $\mathbb{Z}_{10}\times4\mathbb{Z}_{12}\subseteq\operatorname{Ker}(\phi)\subseteq\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_{12}$. 이것이 가능한 $\operatorname{Ker}\phi$는 $\mathbb{Z}_{10}\times4\mathbb{Z}_{12}$, $\mathbb{Z}_{10}\times2\mathbb{Z}_{12}$, $\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_{12}$밖에 없으므로 동형 아닌 S들은 $\boxed{\frac{\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_{12}}{\mathbb{Z}_{10}\times4\mathbb{Z}_{12}}\cong\mathbb{Z}_{12}/4\mathbb{Z}_{12}\cong\mathbb{Z}_4}$, $\boxed{\frac{\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_{12}}{\mathbb{Z}_{10}\times2\mathbb{Z}_{12}}\cong\mathbb{Z}_{12}/2\mathbb{Z}_{12}\cong\mathbb{Z}_2}$, $\boxed{\frac{\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_{12}}{\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_{12}}\cong\{0\}}$. 여기서 $\{0\}$은 자명환이다.