# 탐구 주제 :운동경기속의 포물선

성복중학교 3학년 8반 22번 이름:박주영

## Ⅰ. 탐구 동기 및 목적

예전부터 축구를 했었는데 축구를 할 때 보면 축구공의 궤적이찰 때마다 달라져서 신기했었다. 그리고 축구경기를 할때는 상황에 따라서 공의 궤적을 다르게 해서 차야 하는데 궤적을 다르게 하면 어떤 점에서 좋고 어떤 점에서 안 좋은지에 대해 알고 싶었다 .그런데 마침 이번에 수학책에 2차함수(포물선)단원이 있어서 이것과 연관지어서 탐구를 해보면 궁금했던 점에 대해 알 수 있을 것 같다는 생각이 들어서 탐구하게 되었다. 그리고 포물선하면 생각나는 운동 중 하나인 농구와도 비교해보면서 탐구를 하면 농구는 실내운동이고 축구는 실외운동이 때문에 축구는 바람에 의한 영향이 큰데 이게 어떤 영향을 끼치는지 알아볼 수 있을 것 같아서 비교하면서 탐구하게 되었다

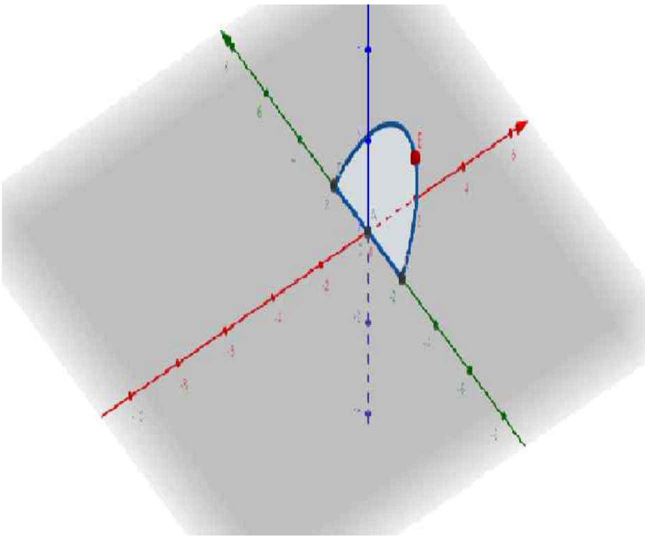
## Ⅱ. 연구 과정 및 결과

[1]축구공의 궤적
  (1)감아차기
  (2)무회전슛
  (3)로빙슛 <- 이부분을 집중적으로 연구
[2]농구공의 궤적
[3]축구공과 농구공의 궤적 비교

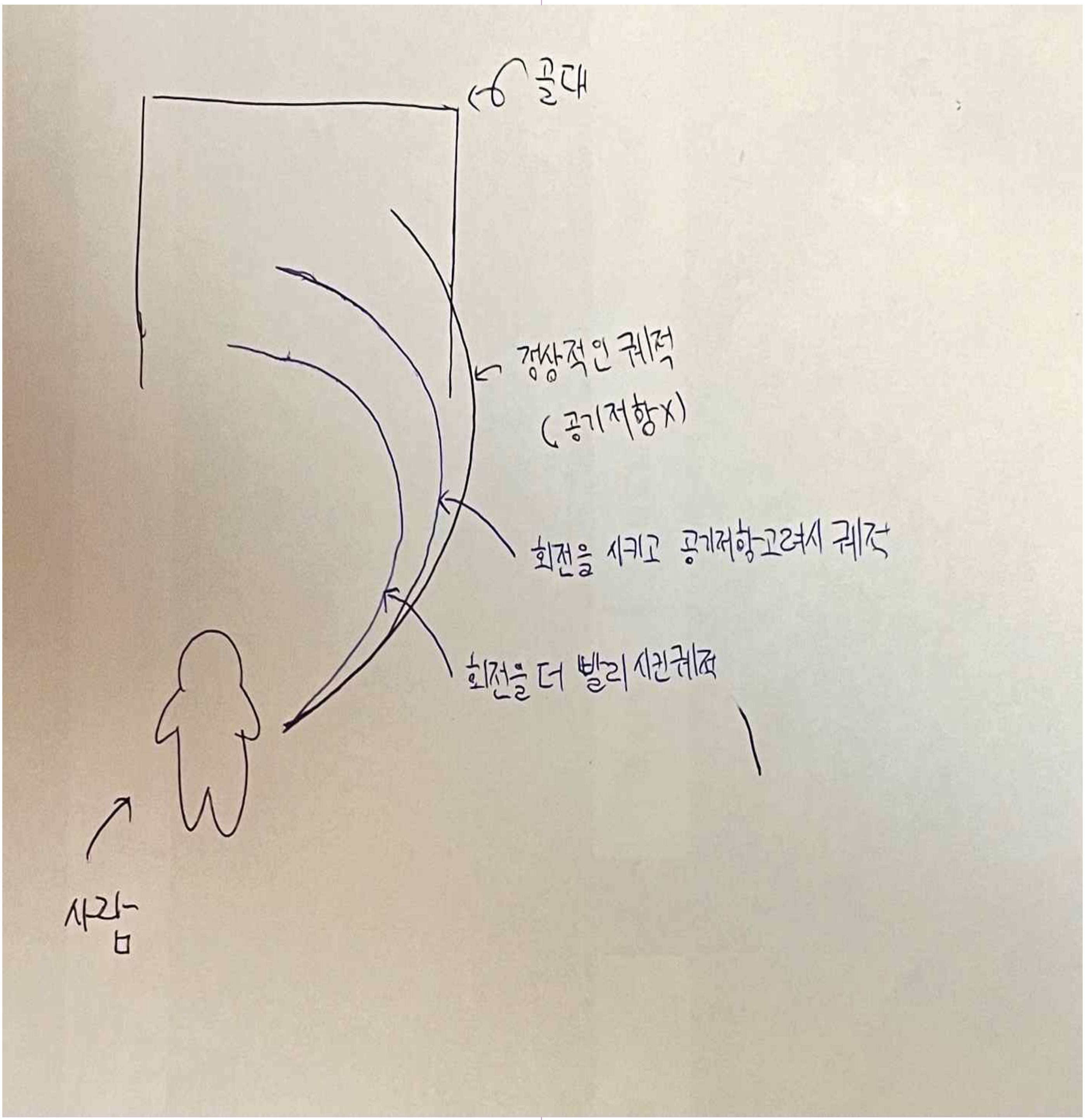
## [1]축구공의 궤적:

### (1)감아차기:

감아 차기의 원리는 우리가 공을 찰 때 공의 회전하게 되는데 이때 공의 회전하게 되는데 공의 한쪽(오른쪽 or 왼쪽)은 공기가 흐르는 방향과 공의 회전 방향이 같다. 이렇게 되면 공의 회전에 의해 공기가 빨리 흐르고 압력이 작아지게 된다. 이때 반대쪽은 공의 회전방향과 공기가 흐르는 방향이 반대여서 공기가 느리게 흐르므로 압력이 커진다. 그러면 압력이 큰 쪽으로부터 압력이 작은 쪽으로 힘이 발생해서 공이 휘게 되는 것이다. 원래 공기저항이 없었다면 공의 궤적은



이러한 모양이 되게 된다. 하지만 현재는 공기저항이 있으므로 공이 이 궤도에서 안쪽으로 힘을 받게 된다. 그러면 공이 떨어지는 부분이 이 그래프보다 앞쪽에 떨어지게 된다. 이렇게 되면 골키퍼 입장에서는 공이 갑자기 휘어서 들어가는 것처럼 보일 것이다.
감아 차기를 할 때에는 아까 앞에서 말한 것처럼 공기의 압력에 의해 감긴다. 그러면 공이 회전하는 속도가 빨라지면 공기의 속도 차이가 더 나게 된다. 그러면 힘이 더 세게 작용한다. 따라서 회전속도가 빨라지면 더 많이 휘어지게 된다.

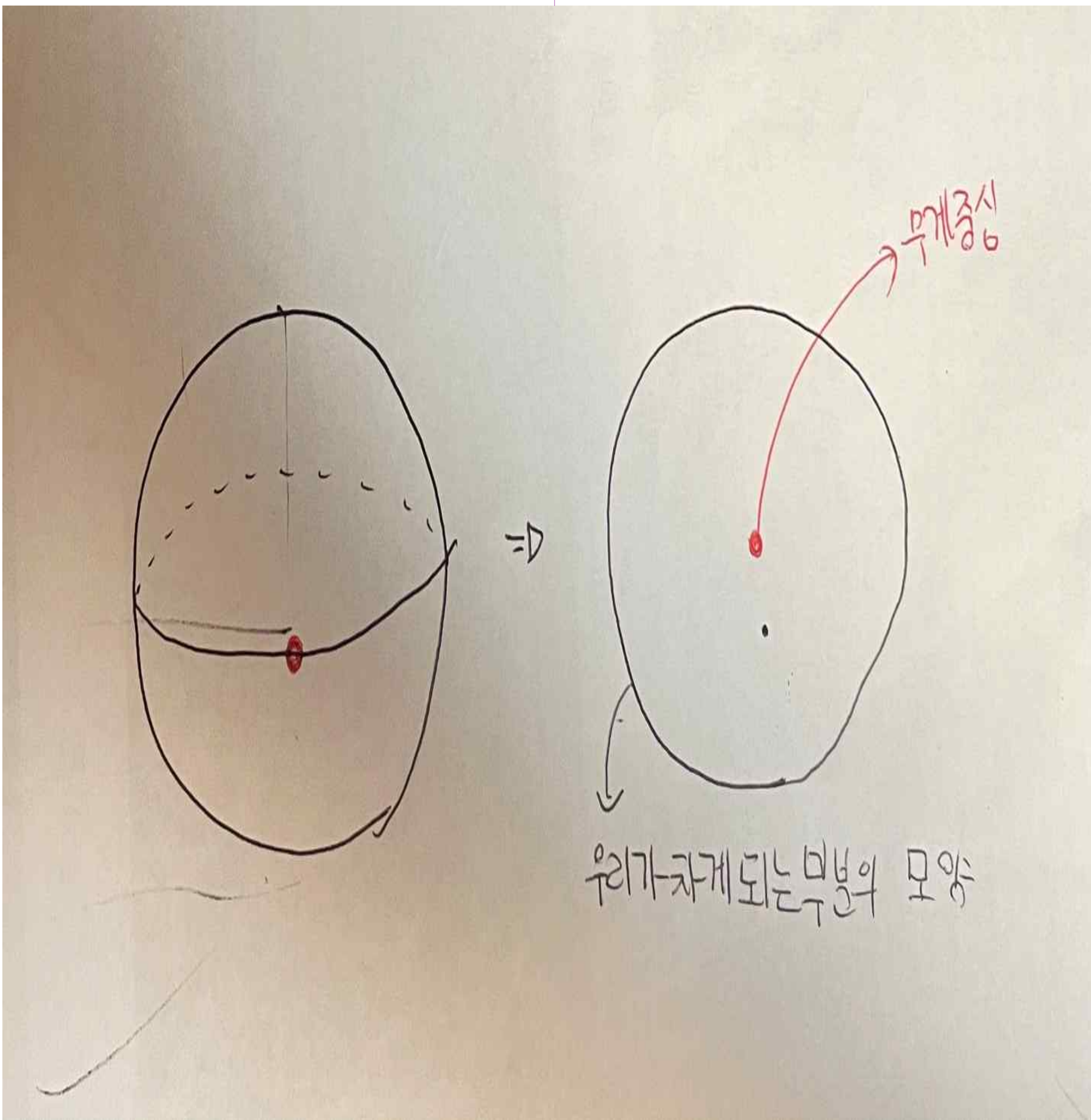



위의 그림과 같은 궤적이 나타나게 된다.

## (2)무회전슛:

무회전 슛은 감아 차기가 아니므로 왼쪽 오른쪽 공기의 압력이 같으면 된다. 이렇게 차려면 축구공의 회전이 없어야 한다. 축구공의 회전이 거의 없게 하기 위해서는 찰 때 축구공의 무게중심에 힘을 주면 된다. 공의 모양은 구 모양이고 우리가 차는 것의 모양은 아래에 그림에 표현된 것 같이 원 모양이 되게 된다.

이러한 원 모양에서의 무게중심은 원의 중심이 되게 된다. 따라서 우리는 무회전 슛을 차기 위해 축구공의 중심 부분을 차야 된다는 점을 알 수 있다. 무회전 슛의 궤도는 원래 궤도처럼 운동하다가 갑자기 뚝 떨어지거나 좌우로 흔들리는 형태가 된다. 이러한 이유는 공 뒤에 생기는 공기의 소용돌이 때문이다.

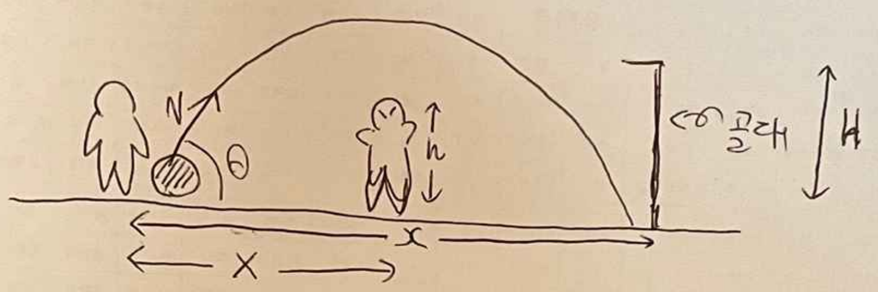


## (3)로빙슛:

위에 두 가지 슈팅은 공의 궤적이 포물선과 많이 닮아 있지 않기 때문에 수학적인 계산을 하기 쉽지 않았지만 로빙슛은 이 3가지 슈팅 중 그나마 포물선과 비슷한 것 같다. 로빙슛은 보통 골대 가까이에서 골기퍼를 넘겨서 골대에 공이 들어가게 차는 슛이다. 이 때 우리는 슛을 찰 때 공을 차는 각도와 속도 차는 힘에 의해서 공의 포물선이 어떻게 달라지는지에 대해 수학적으로 알아볼 수 있다. 위에 계산을 하기 위해서 로빙슛의 궤적이 포물선 모양이라 한다면

sol1)

Sol 1)




공을 차는 각도 : $\theta$ 처음 공의 속도 : $v$ 골기퍼 키 : $h$ 골대 높이 : $H$ 골대까지 거리 : $x$

골기퍼 까지 거리 : $X$ 공의 질량 : $m$

공의 속도는 $v$이다 이때 공이 오른쪽 (수평) 방향으로 가는 속도는

$\rightarrow : v\cos\theta$ ⇐ 삼각비 사용

공이 위로 가는 속도는

$\uparrow : v\sin\theta$ ⇐ 삼각비 사용

∴ 공이 수평쪽으로 봤을 때 위치가 골기퍼 위치일 때 공의 수직위치가 골기퍼의 키보다 높아야 골기퍼를 넘어간다.

수직으로 이동한 거리는 아래로 중력을 받으므로 아래쪽 방향의 가속도 $g$가 존재한다 $\therefore$ 이동거리 $= v\sin\theta\, t + \frac{1}{2}(-g)t^2$

이 거리가 골키퍼의 키 $h$보다 커야하므로

$$v\sin\theta\, t + \frac{1}{2}(-g)t^2 > h \quad \cdots ①$$

운동시간 $t$는 수평방향으로도 구할수있다

수평이동거리 $= x$ 수평속도 $= v\cos\theta$

$\therefore t = \dfrac{x}{v\cos\theta}$ 이 $t$를 ①에 대입하면

$$\cancel{v}\sin\theta \times \frac{x}{\cancel{v}\cos\theta} + \frac{1}{2}(-g)\frac{x^2}{v^2\cos^2\theta} > h$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times x + \frac{1}{2}(-g)\frac{x^2}{v^2\cos^2\theta} > h$$

$$x\tan\theta - \frac{x^2 g}{2v^2\cos^2\theta} > h \qquad x\tan\theta \times 2v^2\cos^2\theta - x^2 g > h \times 2v^2\cos^2\theta$$

$\therefore \boxed{(x\tan\theta - h)\, 2v^2\cos^2\theta > x^2 g}$ ← 이때 성인남자평균키 $= 175\text{cm}$ $= 1.75\text{m}$

$g$는 $10\text{m/s}^2$ 이라하면

$$(x\tan\theta - 1.75)\, 2v^2\cos^2\theta > 10x^2$$

$$\frac{10x^2}{2(x\tan\theta - 1.75)\cos^2\theta} < v^2$$

$$\therefore \boxed{v > \frac{x}{\cos\theta}\sqrt{\frac{5}{(x\tan\theta - 1.75)}}}$$

골기퍼를 넘긴후에는 골대에 공이 들어가는 것이 중요하다.

수평위치가 골대에 있을때 수직위치가 골대의 높이보다 작아야한다.

수평위치를 이용해 운동시간을 구한다.

위치 : $x$ (이동거리) 속도 : $v\cos\theta$ $\therefore T = \dfrac{x}{v\cos\theta}$

수직위치 : $v\sin\theta T + \frac{1}{2}(-g)T^2$

$$v\sin\theta T + \frac{1}{2}(-g)T^2 < H$$

↳ 이식은 ①식에서 부등호가 바뀐다 $t \to T$, $h \to H$ 된식이다

∴ 결과는 ②식을 조금바꾸면

$$\boxed{v < \frac{x}{\cos\theta}\sqrt{\frac{5}{(x\tan\theta - H)}}}$$

← 이때 축구골대 높이는 보통 2.5m

$$\therefore v < \frac{x}{\cos\theta}\sqrt{\frac{5}{(x\tan\theta - 2.5)}} \quad \cdots ③$$

② 와 ③ 에 의해

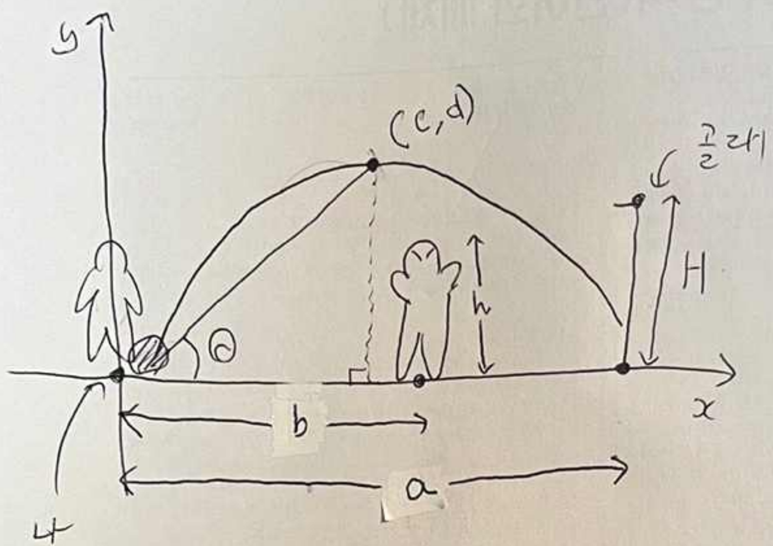
$$\boxed{\frac{x}{\cos\theta}\sqrt{\frac{5}{(x\tan\theta - 1.75)}} < v < \frac{x}{\cos\theta}\sqrt{\frac{5}{(x\tan\theta - 2.5)}}}$$

위와 같이 속도 v의 범위가 세타와 골키퍼까지의 거리(X)와 골대까지의 거리(x)로 나타내어지게 된다.(물론 골대의 높이와 골키퍼의 높이도 포함되지만 이 값들은 평균값들이나 일반적인 값들로 두어서 상수가 되었다) 위의 식으로 알수 있는 점은 우리가 공을 찰 때 그 공의 초기 속도 즉 우리가 어느 정도 공을 세게 차야 하는지는 공의 각도에 의해 결정되고 골기퍼와의 거리와도 관련 있고 X,x,세타 모두 분모분자에 존재하고 특히 cos세타와 tan세타가 있는데 cos세타는 세타가 증가할수록 작아지는데 tan세타는 세타가 증가할수록 커진다 .따라서 함부로 세타가 커질수록 v의 최솟값이 작아진다고 말할 수 없다. 왜냐하면 분모의 값은 cos세타와 tan세타가 곱해져 있기 때문이다. 게다가 tan 세타 앞에는 X,x가 곱해져있으므로 cos과 tan의 곱은 X,x에도 영향을 받는다. 이를 통해서 v의 범위는 세타나 X,x각각의 변화로 단정 지을 수 없고 이 모든 수들의 관계를 통해서 알아낼 수 있다는 것을 알았다. 축구를 할 때 만약 로빙슛을 하게 되면 골기퍼와의 거리 골대와의 거리 공의 각도 등을 고려하여서 공을 차는 속도를 조정해야지 골을 넣을 수 있을 것 같다.

sol2)

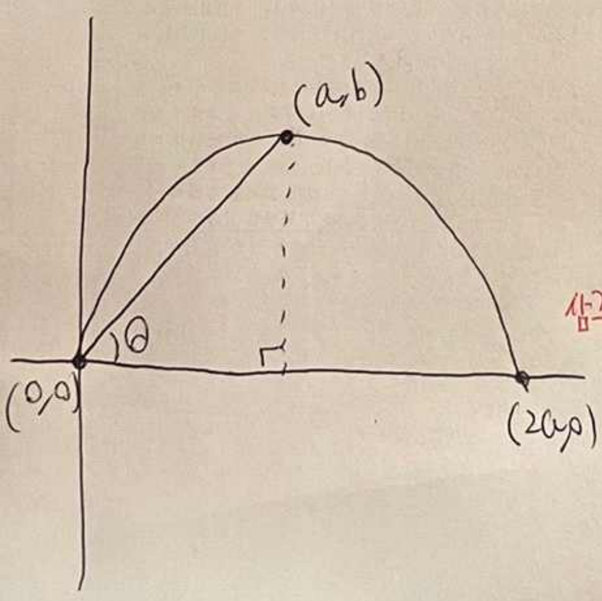
sol2)

이 방법은 좌표를 이용해서 하게된다.




위의 값들을 활용해서 식을 세울려면 알아야하는 것이 있다.

2차함수와 $x$축의 교점과 2차함수의 꼭짓점을 이었을 때 $x$축과 이루는 각을 $\theta$라하면 2차함수 $ax^2+bx+c$ 에서 $a$의 값의 표현 방법이다.




⇒ 꼭짓점이 $(a,b)$ ∴ 나머지 $x$축과 만나는 점은 $(2a,0)$ 따라서 이 이차함수 식은

$k(x-2a)x = y$ 이라고 쓸수있다.

삼각비 — 그리고 $b = a\tan\theta$ 이다. ∴ $(a, a\tan\theta)$ 를 이 그래프가 지나므로 대입하면

$k \times -a \times a = a\tan\theta$

∴ $\boxed{k = -\dfrac{\tan\theta}{a}}$ 이다.

앞의 사실을 이용하면 식을 세울수 있다.

먼저 그래프 위의 점중에서 $x$좌표가 $b$인 점의 $y$좌표가 $h$보다 커야한다.

이때 그래프의 식은 $(0,0)$과 $(2c,0)$을 지나므로 $k(x-2c)x=y$이고

$k=-\frac{\tan\theta}{c}$ 이므로 $y=-\frac{\tan\theta}{c}(x^2-2cx)$ 이다

여기에 $b$를 대입하면 $-\frac{\tan\theta}{c}(b^2-2bc)>h$ 이다

$\frac{b\tan\theta}{c}(2c-b)>h$ $\therefore$ $\boxed{\tan\theta>\frac{hc}{b(2c-b)}}$ ... ①

골키퍼를 넘긴후 골대에 들어갈려면

$x$좌표가 $a$일때 $y$좌표가 $H$보다 작아야한다.

$\therefore$ $a$를 대입하면

$-\frac{\tan\theta}{c}a(a-2c)<H$ 이다

$\frac{a}{c}\tan\theta(2c-a)<H$, $\boxed{\tan\theta<\frac{Hc}{a(2c-a)}}$ ... ②

①, ② 에 의해서

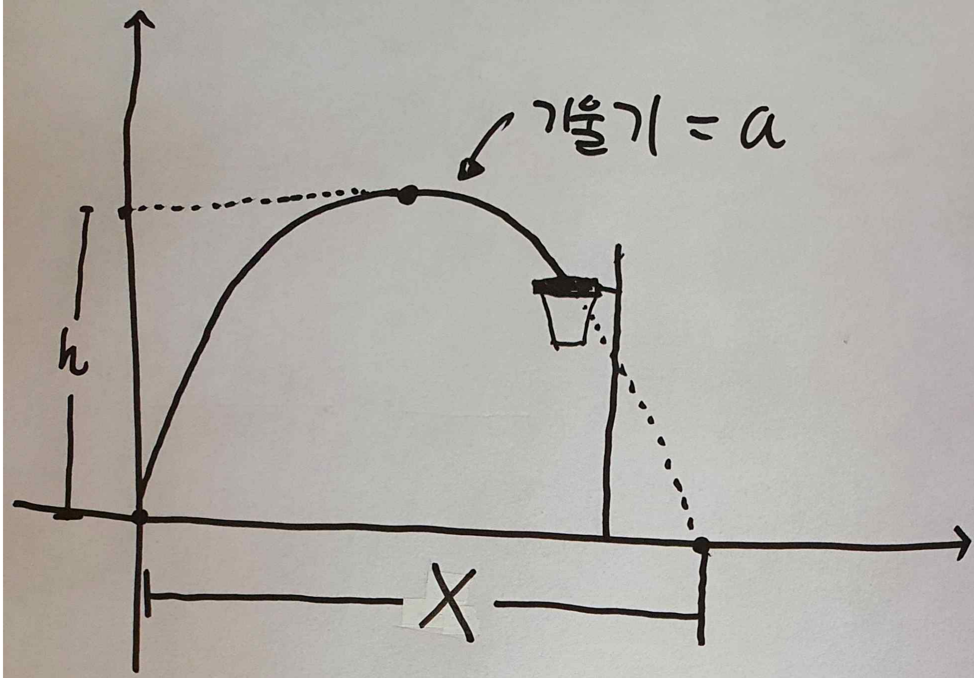
$$\boxed{\frac{hc}{b(2c-b)}<\tan\theta<\frac{Hc}{a(2c-a)}}$$

이 방법을 통해서는 tan세타의 범위를 구할 수 있었다.
{tan세타의 범위는 골기퍼의 키, 골대의 높이, 골키퍼와의 거리, 골대와의 거리 그리고 이차함수 그래프의 꼭짓점의 x 좌표}와 관련 있다는 점을 알 수 있었다. 그런데 sol1에서 보면 {속도와 세타, 골키퍼와의 거리, 골대와의 거리, 골키퍼의 키, 골대의 높이}가 관련되어 있다.
sol1과 sol2의 두 중괄호 즉 관련되어 있는 값들을 살펴보면 유일하게 겹치지 않는 것이 속도와 2차함수 그래프의 x좌표이다. 이것을 보면 만약 이 두 값을 제외한 나머지 값들은 일정하다고 하면 속도가 만약 달라지면 2차함수 그래프의 x좌표가 달라진다. 만약 속도가 빨라지면 x좌표도 증가하고 속도가 느려지면 x 좌표도 감소하게 된다. 사실상은 속도가 증가하면 운동시간은 일단 일정하다고 가정하였으므로 (x좌표이동거리)=vt에서 t는 일정하고 v가 증가면 x좌표 이동거리도 증가하고 감소하면 x좌표 이동거리도 감소하는 것이 당연하긴 하지만 이러한 식이 어떤 과정을 통해서 나오는지도 중요한데 이 sol1과 sol2 두 가지 방법의 결과를 조합해보면 왜 이러한 결과와 식이 나오는지 알 수 있다. 사실 제일 처음 이 연구를 시작했을 때는 sol1을 넣을 생각은 없었다. 왜냐하면 중간에 약간 수학 계산도 있긴 하지만 물리를 할 때 보게 되는 식들이 중간에 들어가기 때문이다. 하지만 이러한 식들을 사용하면 속도라는 개념을 사용할 수 있으므로 이 값을 좌표평면을 사용했을 때 결과와 연관지어 생각하면 좋을 것 같아서 sol1 도 넣게 되었다.

# [2]농구공의 궤적

농구공의 궤적은 완전한 포물선 궤적이라고 볼 수 있다. 어떤 상황이든 어떻게 날리든 충돌만 일어나지 않는다면 포물선 궤적이 유지 될 것이다.
먼저 농구공이 골대에 들어가기 위해서는 농구공의 궤적과 골대가 이루는 각도가 30도보다 커야 한다. 왜냐하면 각도가 점점 작아지면 작아질수록 골대 입장에서는 농구공의 모양이 마치 타원모양으로 느껴지기 때문에 나중에는 골대에 들어가지 못하는 상황이 발생한다. 따라서 농구를 할 때 골을 넣기 위해서는 내가 날린 농구공의 궤적이 골대와 이루는 각도도 중요하고 만약 덩크슛을 할 때에는 사람이 점프하는 각도가 중요하다.
덩크슛을 할 때 사람이 떠있게 되는 시간과 최대로 뜰 수 있는 높이를 계산해 본다. 먼저 포물선운동을 할 때에는 수평속도와 수직속도가 있는데 수평속도는 항상 일정하다. 그렇기 때문에 총 떠있게 되는 시간을 계산할 때에는 그냥 속도가 일정한 수평속도를 이용해 계산하면 편하다. 골대까지의 거리를 X라고 하고 초기에 속도를 V 점프각도를 O라고하면 수평속도는 앞에서 한 것과 같이 삼각비를 사용하면 VcosO가 된다. 그러면 운동시간=거리/속력 이므로 운동시간=X/VcosO가 되게 된다. 위에 식을 통해 떠 있는 시간은 VcosO에 반비례하고 X에는 비례한다는 사실을 알게 되었다.
결과를 정리하면 점프속도가 빠르거나 각도가 작으면 (왜냐하면 cos값은 O가 작아질수록 커지기 때문이다) 떠 있는 시간이 짧아지게 되고 만약 골대까지 거리가 짧아지면 점프시간도 짧아지게 된다.
그다음 점프했을 때 최대 높이를 구한다. 포물선운동이기 때문에 최대 높이는 이차함수의 꼭짓점의 y좌표값이다. 따라서 먼저 사람이 땅에 다시 올 때까지 수평으로 이동한 거리를 x라고하고 이차함수의 기울기를 a라고 한다

sol2)




위의 상황에서 최대 높이 $h$를 구한다.

먼저 이차함수의 식을 써보면 $(0,0)$과 $(X,0)$을 지나므로 $a(x-X)x$ 이다. 이때 이차함수는 꼭짓점에 대해서 '대칭' 이라는 성질을 가지고 있으므로 꼭짓점의 $x$좌표는 $\frac{X}{2}$ 일것이다.

∴ 대입하면

$$a\left(-\frac{X}{2}\right)\frac{X}{2} = \boxed{-\frac{a}{4}X^2}$$ 이 된다.

↳ a가 음수이기 때문이다

그림과 같이 계산한 값은 -aX제곱/4 이다. 이 값을 보고 알수있는 것은 최대높이는 기울기와 X와만 관련 있다는 것이다.
결과를 정리하면 X가 커지면 높이는 X의 제곱배만큼 커진다는 것이다. 그리고 기울기가 작으면 작을수록(a값이 음수이므로 a가 작을수록 -a가 크다)최대 높이는 높아진다는 것이다.

## Ⅲ. 결 론

결론은 먼저 축구와 농구 둘다 포물선을 적용한 숏이 있고, 농구는 모든 숏이 다 포물선 모양이라는 것이다.
축구를 할 때에는 발사각도와 속도가 중요했고 농구는 이차함수의 기울기와 공의 낙하거리가 중요했다.
결국 사실 이 두 개의 말은 거의 같은 말이라고 할 수 있다. 즉 운동경기를 할 때 공을 가지고하고 공이 나의 손을 떠난 뒤 더 이상의 충돌이 없는 경우에는 포물선의 원리를 적용할 수 있다는 것이다. 이 원리는 골프나 양궁 그리고 테니스에도 적용할 수 있다. 양궁이나 테니스는 직선으로 가는 것 처럼 보일 수도 있지만 실제로는 포물선 운동을 하고 있다. 그리고 운동경기뿐만 아니라 미사일발사 로켓발사 등에도 적용시킬 수 있다.

<탐구를 하면서 느낀점>
나는 이 탐구를 하면서 운동경기를 할 때 포물선이 많이 사용되고 식을 세워서 어떠한 값들이 이 궤적에 영향을 미치는지 알아볼 수 있었고, 예전부터 궁금했던 점을 해결할 수 있어서 좋았다. 그리고 이 원리를 ,로켓발사에도 적용시킬 수 있기 때문에 나중에 실력이 더 쌓이면 이러한 연구도 해보고 싶다.