2022학년도 3월 고1 전국연합학력평가 대비 자기주도 학습자료 1회

정답 및 해설

• 수학 영역 •

1	②	2	④	3	②	4	①	5	⑤
6	①	7	③	8	④	9	②	10	⑤
11	③	12	④	13	③	14	④	15	③
16	⑤	17	⑤	18	②	19	④	20	①
21	⑤	22	7	23	22	24	9	25	22
26	87	27	9	28	76	29	31	30	135

해 설

1. [출제의도] 유리수의 연산 원리를 이용하여 식의 값을 계산한다.

$\frac{4}{3}\div\left(-\frac{2}{3}\right)+2\times\left(\frac{2}{3}\right)=(-2)+\frac{4}{3}$

$=-\frac{2}{3}$

2. [출제의도] 다항식의 연산을 이용하여 식을 간단히 한다.

$2x(3x-1)-x(2x+3)=6x^2-2x-2x^2-3x$

$=6x^2-2x^2-2x-3x$

$=(6-2)x^2-(2+3)x$

$=4x^2-5x$

따라서 x^2의 계수는 4

3. [출제의도] 함수의 뜻을 이해하고 상수의 값을 구한다.

함수 $y=\frac{6}{x}$의 그래프가 점 $(3, a)$를 지나므로

$x=3,\ y=a$를 대입하면

$a=\frac{6}{3}=2$

4. [출제의도] 일차식을 계산하여 방정식의 해를 구한다.

$x+5=3(x-1)$

$x+5=3x-3$

$2x=8,\ x=4$

5. [출제의도] 부채꼴의 넓이를 이해하여 부채꼴의 반지름의 길이를 구한다.

부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하자.

중심각의 크기가 $150°$인 부채꼴의 넓이는

$\pi r^2\times\frac{150}{360}$

주어진 조건에서 부채꼴의 넓이가 15π이므로

$\pi r^2\times\frac{150}{360}=15\pi$

$r^2\times\frac{5}{12}=15$

$r^2=36$

$r>0$이므로 $r=6$

따라서 부채꼴의 반지름의 길이는 6이다.

[보충 설명] 부채꼴의 호의 길이와 넓이

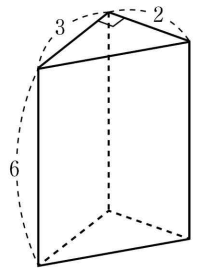
반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 $x°$인 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면

$l=2\pi r\times\frac{x}{360}$

$S=\pi r^2\times\frac{x}{360}$

$S=\frac{1}{2}rl$

6. [출제의도] 전개도로 만들어지는 입체도형의 부피를 구한다.



주어진 전개도로 만들어지는 기둥은 그림과 같이 밑면이 직각삼각형인 삼각기둥이다.

이 삼각기둥의 밑면의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times3=3$

이 삼각기둥의 높이는 6이므로 구하는 부피는

$3\times6=18$

7. [출제의도] 지수의 성질을 이해하고 주어진 식의 값을 구한다.

$(7^3\times9)^3=(7^3\times3^2)^3$

$=7^{3\times3}\times3^{2\times3}$

$=7^9\times3^6$

$7^9\times3^6=7^a\times3^b$이고 $a,\ b$는 자연수이므로

$a=9,\ b=6$

따라서 $a+b=9+6=15$

8. [출제의도] 유한소수의 성질을 이해하여 조건을 만족시키는 값을 구한다.

$\frac{n}{2^4\times7}$을 소수로 나타낼 때 유한소수가 되기 위해서는 기약분수로 나타내었을 때 분모의 소인수가 2나 5 이외에는 없어야 한다.

$\frac{n}{2^4\times7}$의 분모의 소인수인 7이 약분되어야 하므로

n은 반드시 7을 소인수로 가지고 있어야 한다.

따라서 n의 값이 될 수 있는 두 자리 자연수 중 가장 작은 수는 $7\times2=14$

9. [출제의도] 편차의 성질을 이해하여 자료의 분산을 구한다.

편차의 합은 0이므로

$1+(-1)+(-5)+a+(a+1)=0$

$2a-4=0$

$a=2$

따라서 자료의 편차는

$1,\ -1,\ -5,\ 2,\ 3$

분산은 편차의 제곱의 평균이므로 구하는 값은

$\frac{1^2+(-1)^2+(-5)^2+2^2+3^2}{5}=\frac{40}{5}=8$

10. [출제의도] 연립부등식의 정수인 해의 개수를 구한다.

주어진 연립부등식

$\begin{cases}2x<x+9\\x+5\le5x-3\end{cases}$

에서 부등식 $2x<x+9$를 풀면

$2x-x<9$

$x<9$ …… ㉠

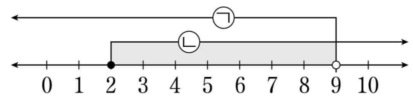
마찬가지로 부등식 $x+5\le5x-3$을 풀면

$x-5x\le-3-5$

$-4x\le-8$

$x\ge2$ …… ㉡

두 부등식 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위를 수직선에 나타내면 다음과 같다.



위 그림에서 구하는 x의 값의 범위는

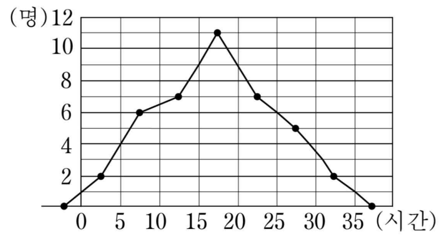
$2\le x<9$

이 부등식을 만족시키는 정수 x는

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8이다.

따라서 구하는 정수의 개수는 7

11. [출제의도] 도수분포다각형을 이해하여 조건을 만족시키는 값을 구한다.



위의 도수분포다각형으로부터 도수분포표를 만들면 다음과 같다.

사용 시간	도수(명)
0 이상 ~ 5 미만	2
5 ~ 10	6
10 ~ 15	7
15 ~ 20	11
20 ~ 25	7
25 ~ 30	5
30 ~ 35	2
합계	40

도수의 총합은

$2+6+7+11+7+5+2=40$(명)

사용 시간이 10시간 미만인 학생의 수는

$2+6=8$(명)

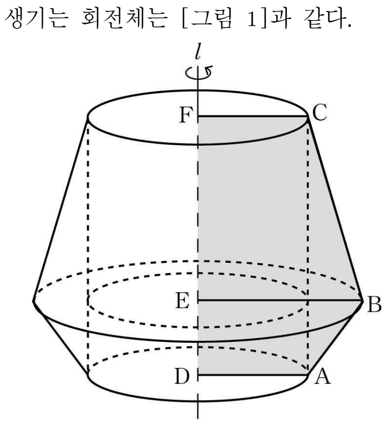
학생의 비율은

$\frac{8}{40}\times100=20$ (%)

따라서 a의 값은 20

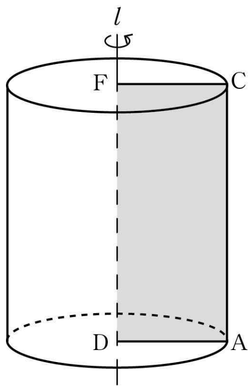
12. [출제의도] 회전체의 모양을 추측하여 조건을 만족시키는 값을 구한다.

오각형 FDABC를 직선 l을 회전축으로 하여 1회전시킬 때 생기는 회전체는 [그림 1]과 같다.



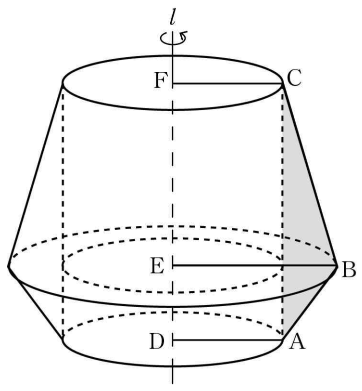
[그림 1]

사각형 FDAC를 직선 l을 회전축으로 하여 1회전 시킬 때 생기는 회전체는 [그림 2]와 같이 밑면의 반지름의 길이가 4인 원기둥이다.



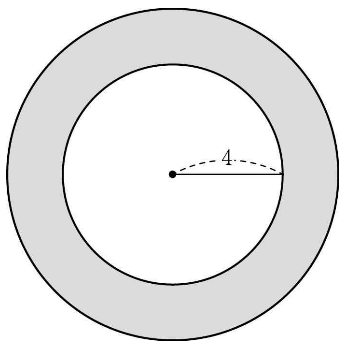
[그림 2]

삼각형 ABC를 직선 l을 회전축으로 하여 1회전시킬 때 생기는 회전체는 [그림 1]의 입체도형에서 [그림 2]의 원기둥을 제외시킨 입체도형으로 [그림 3]과 같다.



[그림 3]

이를 회전축 l에 수직인 평면으로 자른 단면은 [그림 4]와 같다.

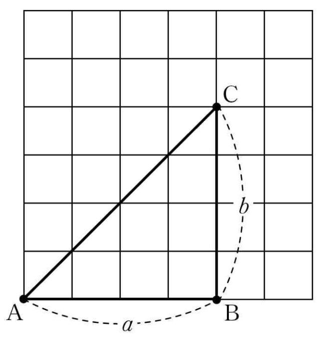


[그림 4]

[그림 4]의 안쪽 원의 반지름의 길이는 4이며
넓이는 16π이다.
한편 $\overline{BE}=6$이므로 바깥쪽 원의 반지름의 길이는
4보다 크고 6보다 작거나 같다.
그러므로 바깥쪽 원의 넓이의 최댓값은 반지름의
길이가 6일 때 36π이다.
따라서 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자른
단면의 넓이의 최댓값은
$36\pi-16\pi=20\pi$

13. [출제의도] 확률의 뜻을 이해하여 실생활 문제를 해결한다.

한 개의 주사위를 두 번 던져 첫 번째 나온 눈의 수를 a, 두 번째 나온 눈의 수를 b라 하면 삼각형 ABC는 밑변의 길이가 a, 높이가 b인 직각삼각형이므로 넓이는 $\frac{1}{2}\times a\times b=\frac{1}{2}ab$



직각삼각형 ABC의 넓이가 15 이상이기 위해서는 ab의 값이 30 이상이어야 한다.

(ⅰ) $a=1,\ 2,\ 3,\ 4$일 때, ab의 값이 30 이상이 되는 b의 값은 존재하지 않는다.

(ⅱ) $a=5$일 때, $b=6$이면 $ab=30$이므로 가능한 경우의 수는 1

(ⅲ) $a=6$일 때, $b=5$이면 $ab=30$이고 $b=6$이면 $ab=36$이므로 가능한 경우의 수는 2

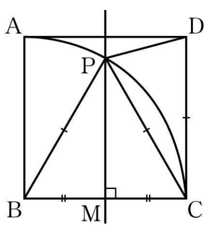
그러므로 ab의 값이 30 이상인 순서쌍 (a,b)의 경우의 수는 $1+2=3$
한 개의 주사위를 두 번 던져서 나올 수 있는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$
따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

[다른 풀이]
한 개의 주사위를 두 번 던져 첫 번째 나온 눈의 수를 a, 두 번째 나온 눈의 수를 b라 할 때, 주사위를 두 번 던져서 나올 수 있는 모든 경우를 순서쌍으로 나타내면 다음 표와 같다.

a \ b	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

이 중에서 ab의 값이 30 이상인 경우는 다음과 같다.
(ⅰ) $ab=30$인 경우
(5, 6), (6, 5)
(ⅱ) $ab=36$인 경우
(6, 6)
그러므로 구하는 경우의 수는 3
한 개의 주사위를 두 번 던져서 나올 수 있는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$
따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

14. [출제의도] 삼각형의 성질을 이용하여 각의 크기를 구한다.



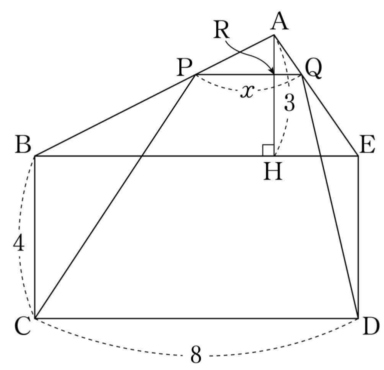
그림과 같이 변 BC의 중점을 M이라 하면
$\overline{BM}=\overline{MC}$, $\angle PMB=\angle PMC=90°$, $\overline{PM}$은 공통이므로
두 삼각형 PBM, PCM은 서로 합동이다.
따라서 $\overline{PB}=\overline{PC}$
$\overline{BP}$와 $\overline{BC}$는 부채꼴 BCA의 반지름이므로
$\overline{BP}=\overline{BC}$
따라서 $\overline{BP}=\overline{BC}=\overline{PC}$이므로
삼각형 PBC는 정삼각형이다.
$\angle CPB=\angle BCP=60°$ …… ㉠
$\angle PCD=\angle BCD-\angle BCP$
$=90°-60°$
$=30°$
한편 사각형 ABCD는 정사각형이므로
$\overline{PC}=\overline{BC}=\overline{CD}$
즉 삼각형 CDP는 $\overline{CP}=\overline{CD}$인 이등변삼각형이다.
따라서 $\angle CPD=\frac{1}{2}(180°-30°)=75°$ …… ㉡
㉠, ㉡에서
$\angle BPD=\angle BPC+\angle CPD$
$=60°+75°$
$=135°$

15. [출제의도] 미지수가 2개인 연립일차방정식을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

A가 이긴 횟수를 a, 비긴 횟수를 b라 하면
A가 진 횟수는 $10-a-b$이다.
A가 얻은 점수는
$4\times a+2\times b+1\times(10-a-b)=27$
$3a+b=17$ …… ㉠
B가 이긴 횟수는 A가 진 횟수와 같으므로
B가 얻은 점수는
$4\times(10-a-b)+2\times b+1\times a=21$
$3a+2b=19$ …… ㉡
㉠, ㉡에서
$a=5,\ b=2$
따라서 A가 이긴 횟수는 5이다.

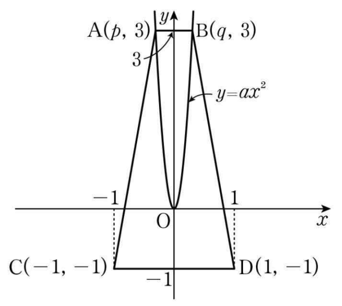
[다른 풀이]
가위바위보를 10번 하고 난 결과, A의 점수가 B의 점수보다 6점이 많다. 한 번의 가위바위보에서 이긴 사람과 진 사람의 점수 차이는 3점이므로 A의 이긴 횟수는 B가 이긴 횟수보다 2만큼 많다.
A가 이긴 횟수를 a라 하면 B가 이긴 횟수는 $a-2$이고 비긴 횟수는 $10-(a+a-2)=12-2a$이다.
따라서 가위바위보를 10번 하고 난 결과, A의 점수는 27점이므로
$4\times a+2\times(12-2a)+1\times(a-2)=27$
$a=5$
따라서 A가 이긴 횟수는 5

16. [출제의도] 삼각형의 닮음과 이차방정식을 이용하여 선분의 길이를 구한다.



$\overline{PQ}\,/\!/\,\overline{BE}$이므로 $\triangle APQ\backsim\triangle ABE$
두 선분 AH, PQ가 만나는 점을 R, $\overline{PQ}=x$라 하면
$\overline{AR}:\overline{PQ}=\overline{AH}:\overline{BE}$
$\overline{AR}:x=3:8$
$\overline{AR}=\frac{3}{8}x$
따라서 사다리꼴 PCDQ의 높이는
$\left(3-\frac{3}{8}x\right)+4=7-\frac{3}{8}x$
사다리꼴 PCDQ의 넓이는 직사각형 BCDE의 넓이와 같으므로
$\frac{1}{2}(x+8)\left(7-\frac{3}{8}x\right)=32$
$(x+8)(56-3x)=512$
$-3x^2+32x+448-512=0$
$3x^2-32x+64=0$
$(x-8)(3x-8)=0$
$x<8$이므로 $x=\frac{8}{3}$

17. [출제의도] 이차함수의 그래프와 제곱근의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.



점 A$(p, 3)$이 이차함수 $y=ax^2$의 그래프 위의 점이므로

$3=ap^2$, $p^2=\frac{3}{a}$, $p=\pm\sqrt{\frac{3}{a}}$

$p<0$이므로 $p=-\sqrt{\frac{3}{a}}$이다.

$y=ax^2$의 그래프는 y축에 대칭이므로 $q=\sqrt{\frac{3}{a}}$이다.

$\overline{\mathrm{CD}}=1-(-1)=2$,

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\frac{3}{a}}-\left(-\sqrt{\frac{3}{a}}\right)=2\sqrt{\frac{3}{a}}$

이고 사다리꼴 ACDB의 높이는 $3-(-1)=4$이므로

$$\square\mathrm{ACDB}=\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{AB}})\times 4$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(2+2\sqrt{\frac{3}{a}}\right)\times 4$$
$$=4+4\sqrt{\frac{3}{a}}$$
$$=4+\sqrt{\frac{48}{a}}$$

사각형 ACDB의 넓이가 자연수가 되려면

$\sqrt{\frac{48}{a}}$ 이 자연수이어야 한다.

$\sqrt{\frac{48}{a}}=\sqrt{\frac{3\times 4^2}{a}}$ 이 자연수가 되기 위한 자연수 a의 값은 3×1^2, 3×2^2, 3×4^2이다.

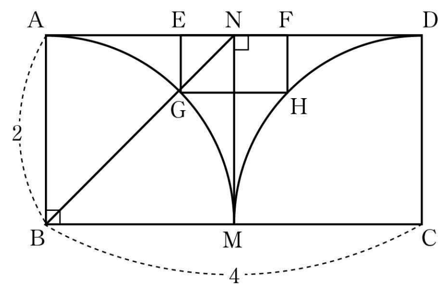
따라서 a의 최댓값은 48이다.

$a=48$일 때, 사각형 ACDB의 넓이는 5이다.

따라서 $m=48$, $n=5$이므로

$m+n=53$

18. [출제의도] 피타고라스 정리를 이용하여 직사각형의 넓이를 구한다.



그림과 같이 점 M에서 변 AD에 내린 수선의 발을 N이라 하자.

조건에 의해 $\overline{\mathrm{EG}}:\overline{\mathrm{GH}}=1:2$이므로 점 N은 변 EF의 중점이 되고 선분 MN은 사각형 EGHF를 두 개의 합동인 정사각형으로 나눈다.

$\overline{\mathrm{AB}}=2$이므로 사각형 ABMN은 한 변의 길이가 2인 정사각형이다.

점 G는 이 정사각형의 대각선 BN 위에 있고,

직각삼각형 BMN에서 피타고라스 정리에 의해

$\overline{\mathrm{BN}}^2=\overline{\mathrm{BM}}^2+\overline{\mathrm{MN}}^2$

$\overline{\mathrm{BN}}^2=2^2+2^2=8$

$\overline{\mathrm{BN}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{GN}}=\overline{\mathrm{BN}}-\overline{\mathrm{BG}}$

$\quad=2\sqrt{2}-2$

한편 사각형 ABCD와 사각형 EGHF는 각각 가로와 세로의 길이의 비가 2:1인 직사각형이므로 서로 닮은 도형이다.

두 사각형 ABCD와 EGHF의 닮음비는 선분 BN과 선분 GN의 길이의 비와 같으므로

$\overline{\mathrm{BN}}:\overline{\mathrm{GN}}=2\sqrt{2}:2(\sqrt{2}-1)$

$\quad=\sqrt{2}:(\sqrt{2}-1)$

따라서 넓이의 비는

$(\sqrt{2})^2:(\sqrt{2}-1)^2=2:(3-2\sqrt{2})$

$\quad=1:\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$

조건에서 사각형 ABCD의 넓이가 8이므로

구하는 사각형 EGHF의 넓이는

$8\times\frac{3-2\sqrt{2}}{2}=12-8\sqrt{2}$

19. [출제의도] 정비례 관계와 반비례 관계를 이해하여 반비례 관계식을 구한다.

두 점 A, B의 x좌표의 합이 0이므로 점 A의 x좌표를 양수 p라 하면 점 B의 x좌표는 $-p$이다.

직선 $y=-\frac{1}{2}x$가 두 점 A, B를 지나므로

두 점 A, B의 좌표는

A$\left(p, -\frac{1}{2}p\right)$, B$\left(-p, \frac{1}{2}p\right)$

그러므로 점 C의 좌표는 C$\left(-p, -\frac{1}{2}p\right)$이다.

삼각형 ABC의 넓이가 16이므로

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}\times 2p\times p$$
$$=p^2$$
$$=16$$

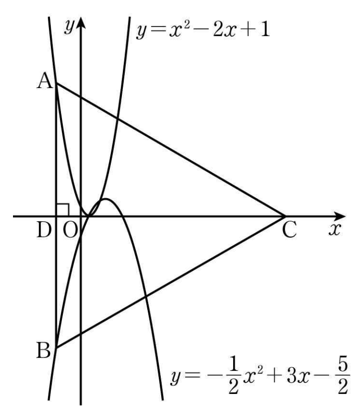
$p=4$이므로 A$(4, -2)$이다.

점 A$(4, -2)$가 반비례 관계 $y=\frac{a}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$-2=\frac{a}{4}$

$a=-8$

20. [출제의도] 이차함수의 그래프를 이용하여 정삼각형의 한 변의 길이를 구하는 과정을 추론한다.



두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식을

$x=t$라 하면

두 점 A, B의 x좌표는 t이므로

이차함수 $y=x^2-2x+1$에 $x=t$를 대입하여

점 A의 좌표를 구하면 다음과 같다.

A(t, t^2-2t+1)

마찬가지로 이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{2}$에 $x=t$를 대입하여 점 B의 좌표를 구하면 다음과 같다.

B$\left(t, -\frac{1}{2}t^2+3t-\frac{5}{2}\right)$

삼각형 ABC가 정삼각형이 되기 위해서는 직선 CD가 선분 AB를 수직이등분해야 하므로

두 점 A, B에서 점 D를 잇는 두 선분의 길이가 서로 같아야 한다.

따라서 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BD}}$

선분 $\overline{\mathrm{AD}}$의 길이는

$\overline{\mathrm{AD}}=t^2-2t+1$

선분 $\overline{\mathrm{BD}}$의 길이는

$\overline{\mathrm{BD}}=-\left(-\frac{1}{2}t^2+3t-\frac{5}{2}\right)$

$\quad=\frac{1}{2}t^2-3t+\frac{5}{2}$

두 선분의 길이가 같아야 하므로

$t^2-2t+1=\frac{1}{2}t^2-3t+\frac{5}{2}$

정리하면

$\frac{1}{2}t^2+t-\frac{3}{2}=0$

양변에 2를 곱하면

$t^2+\boxed{2t-3}=0$

$(t-1)(t+3)=0$

따라서 $t=1$ 또는 $t=\boxed{-3}$

(i) $t=1$인 경우

$\overline{\mathrm{AD}}=1^2-2+1=0$이므로 $\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{AD}}=0$이 되어 삼각형이 만들어지지 않는다.

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $t=-3$인 경우

$\overline{\mathrm{AD}}=(-3)^2-2\times(-3)+1=16$이므로

정삼각형 ABC의 한 변의 길이는

$16\times 2=32$

정삼각형 ABC의 높이는

$\frac{\sqrt{3}}{2}\times 32=16\sqrt{3}$

이때, 점 C의 x좌표는

$-3+16\sqrt{3}$ 또는 $-3-16\sqrt{3}$이다.

(i), (ii)에 의해

양수 k의 값은 $\boxed{-3+16\sqrt{3}}$이다.

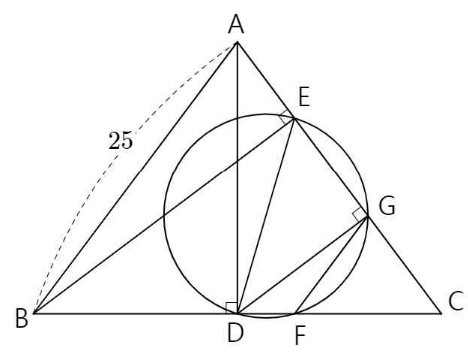
$f(t)=2t-3$, $a=-3$, $b=-3+16\sqrt{3}$이므로

구하는 값은

$f(a)+b=2\times(-3)-3+(-3+16\sqrt{3})$

$\quad=-12+16\sqrt{3}$

21. [출제의도] 원의 성질을 이용하여 주어진 <보기>의 참, 거짓을 추론하여 판별한다.



ㄱ. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}=25$이므로

삼각형 ABC는 이등변삼각형이다.

점 D가 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=30$에서 $\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{DC}}=15$이다.

피타고라스 정리에 의하여 선분 $\overline{\mathrm{AD}}=20$이므로

삼각형 ABC의 넓이는 300이다.

따라서 $300=\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BE}}\times\frac{1}{2}=25\times\overline{\mathrm{BE}}\times\frac{1}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{BE}}=24$이다.(참)

ㄴ. 두 삼각형 ADC, BEC에서

$\angle\mathrm{C}$가 공통이고 $\angle\mathrm{ADC}=\angle\mathrm{BEC}=90°$이므로

$\triangle\mathrm{ADC}\backsim\triangle\mathrm{BEC}$이다.

$\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{BC}}:\overline{\mathrm{CE}}$이고

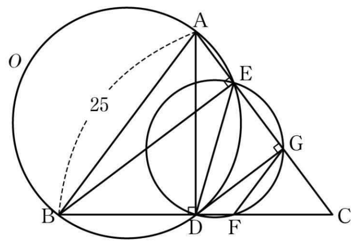
$25:15=30:\overline{\mathrm{CE}}$이므로 $\overline{\mathrm{CE}}=18$이다.(참)

ㄷ. $\overline{\mathrm{DE}}$가 원의 지름이므로 $\angle\mathrm{DGE}=90°$

$\angle\mathrm{BEC}=\angle\mathrm{DGC}=90°$이므로 $\overline{\mathrm{DG}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{BE}}$

점 D가 변 BC의 중점이므로 $\overline{EG}=\overline{GC}=9$
$\overline{DE}$가 원의 지름이므로 $\angle EFD=90°$가 되어
삼각형 EFC는 직각삼각형이다.
점 G는 선분 EC의 중점이므로
직각삼각형 EFC의 외심이다.
따라서 $\overline{FG}=\overline{GC}=9$
두 삼각형 ADC, EFC에서
$\angle C$는 공통이고 $\angle ADC=\angle EFC=90°$이므로
$\triangle ADC \backsim \triangle EFC$이다.
$\overline{CA}:\overline{CE}=\overline{CD}:\overline{CF}$이고
$25:18=15:\overline{CF}$이므로 $\overline{CF}=\frac{54}{5}$이다.
그러므로 삼각형 GFC의 둘레의 길이는
$\overline{GF}+\overline{FC}+\overline{CG}=9+\frac{54}{5}+9=\frac{144}{5}$이다.(참)
그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[다른 풀이]



ㄱ. $\overline{AB}=\overline{AC}=25$이므로
삼각형 ABC는 이등변삼각형이다.
점 D가 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발이므로
$\overline{BC}=30$에서 $\overline{BD}=\overline{DC}=15$
직각삼각형 ABD에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{AD}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BD}^2}$
$=\sqrt{25^2-15^2}$
$=20$
삼각형 ABC의 넓이에서
$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AD}=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BE}$
$\frac{1}{2}\times30\times20=\frac{1}{2}\times25\times\overline{BE}$
$\overline{BE}=24$ (참)

ㄴ. 직각삼각형 BCE에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{CE}=\sqrt{\overline{BC}^2-\overline{BE}^2}$
$=\sqrt{30^2-24^2}$
$=18$ (참)

ㄷ. 선분 DE가 원의 지름이므로 $\angle DGE=90°$
$\angle BEC=\angle DGC=90°$이므로 $\overline{DG}/\!/\overline{BE}$
$\overline{BD}=\overline{DC}$이므로 삼각형의 중점연결정리에 의하여
$\overline{EG}=\overline{GC}=9$
조건에 의해 사각형 EDFG는 원에 내접한다.
원에 내접하는 사각형에서 두 대각의 합은
$180°$이므로
$\angle FGE+\angle EDF=180°$
또, $\angle FGE+\angle CGF=180°$이므로
$\angle FGE+\angle EDF=\angle FGE+\angle CGF$
$\angle EDF=\angle CGF$ …… ㉠
이때 $\angle GCF$는 공통이므로
두 삼각형 CGF, CDE는 닮음이다.
삼각형 ABD의 외접원을 O라 하자.
$\angle AEB=90°$이므로 점 E는 원 O 위에 있다.
즉, 사각형 ABDE는 원 O에 내접한다.
원에 내접하는 사각형에서 두 대각의 합은
$180°$이므로
$\angle BAE+\angle BDE=180°$
또, $\angle BDE+\angle CDE=180°$이므로
$\angle BAE+\angle BDE=\angle BDE+\angle CDE$
$\angle BAE=\angle CDE$ …… ㉡
두 각 CDE, EDF는 같은 각이므로
㉠, ㉡에서 $\angle BAE=\angle CGF$
두 각 BAC, BAE는 같은 각이므로
$\angle BAC=\angle CGF$
삼각형 ABC와 삼각형 GFC에서 $\angle C$는 공통이고
$\angle BAC=\angle FGC$이므로 $\triangle ABC \backsim \triangle GFC$
삼각형 ABC가 이등변삼각형이므로
삼각형 GFC도 이등변삼각형이다.
그러므로 $\overline{GF}=\overline{GC}=9$
$\overline{AC}:\overline{GC}=\overline{BC}:\overline{FC}$에서 $25:9=30:\overline{FC}$이므로
$\overline{FC}=\frac{54}{5}$
그러므로 삼각형 GFC의 둘레의 길이는
$\overline{GF}+\overline{FC}+\overline{CG}=9+\frac{54}{5}+9=\frac{144}{5}$이다. (참)
그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

22. [출제의도] 등식의 성질을 이해하여 일차방정식의 해를 구한다.

$\frac{5-x}{2}=x-8$의 양변에 2를 곱하면
$5-x=2x-16$
$3x=21$
$x=7$
따라서 $a=7$

23. [출제의도] 일차함수를 이해하여 일차함수 그래프의 y절편을 구한다.

y절편을 b라고 하면 기울기가 4이므로 구하는 일차함수의 식은
$y=4x+b$ …… ㉠
㉠의 그래프가 점 $(2, 30)$을 지나므로
㉠에 $x=2$, $y=30$을 대입하면
$30=4\times2+b$
$b=22$
따라서 구하는 일차함수 그래프의 y절편은 22

24. [출제의도] 제곱근과 부등식의 성질을 이해하여 조건을 만족시키는 정수의 개수를 구한다.

$\sqrt{3x}$에서 $3x\geq0$이므로 $x\geq0$이다.
부등식 $0\leq\sqrt{3x}<\sqrt{26}$에서
$0\leq\sqrt{3x}<\sqrt{26}$이므로 제곱근의 대소 관계에 의해
$0\leq3x<26$
이 부등식의 양변을 3으로 나누면
$0\leq x<\frac{26}{3}$
이 부등식을 만족시키는 정수 x는
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8이다.
따라서 구하는 정수 x의 개수는 9이다.

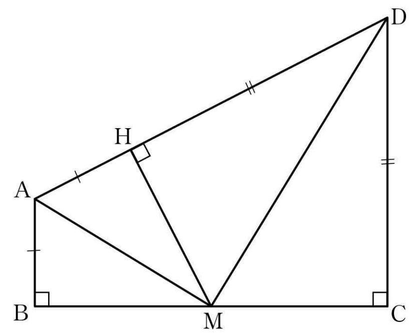
25. [출제의도] 주어진 상황을 이해하고 이에 맞는 경우의 수를 구한다.

문화의 날 오전에 가능한 체험은 미술관 관람, 고궁 관람, 야구 경기 관람, 박물관 견학의 4가지이다.
오후에 가능한 체험은 전통 시장 방문, 뮤지컬 관람, 축구 경기 관람, 박물관 견학의 4가지이다.
한편 야간에 가능한 체험은 고궁 관람, 뮤지컬 관람 2가지 이다.
오전과 오후, 야간에 각각 한 가지씩 선택하여 서로 다른 3가지를 체험하는 방법의 수는
$4\times4\times2=32$
그런데 오전과 오후에 모두 박물관 견학을 선택하는 경우는 제외하여야 하므로 구하는 방법의 수는 2가지
(박물관, 박물관, 고궁), (박물관, 박물관, 뮤지컬)
오전에 고궁, 오후에 뮤지컬을 선택하는 방법의 수는 2가지
(고궁, 뮤지컬, 고궁), (고궁, 뮤지컬, 뮤지컬)
오전에 고궁, 야간에 고궁을 선택하는 방법의 수는 3가지
(고궁, 전통시장, 고궁), (고궁, 축구, 고궁), (고궁, 박물관, 고궁)
오후에 뮤지컬, 야간에 뮤지컬을 선택하는 방법의 수는 3가지
(미술관, 뮤지컬, 뮤지컬), (야구, 뮤지컬, 뮤지컬), (박물관, 뮤지컬, 뮤지컬)
이므로 제외하여야 하는 방법은 수는 10
따라서 서로 다른 3가지를 체험하는 방법의 수는
$32-10=22$
따라서 구하는 방법의 수는 22이다.

26. [출제의도] 확률의 성질을 이용하여 주어진 사건의 확률을 구한다.

같은 색의 공을 꺼내는 경우는 다음의 두 가지 경우이다.
(ⅰ) A와 B가 동시에 자신의 주머니에서 흰 공 한 개를 꺼내는 경우
A가 자신의 주머니에서 흰 공 한 개를 꺼낼 확률은 $\frac{9}{10}$이고, B가 자신의 주머니에서 흰 공 한 개를 꺼낼 확률은 $\frac{4}{5}$이다.
따라서 A와 B가 동시에 자신의 주머니에서 흰 공 한 개를 꺼낼 확률은
$\frac{9}{10}\times\frac{4}{5}=\frac{18}{25}$
(ⅱ) A와 B가 동시에 자신의 주머니에서 검은 공 한 개를 꺼내는 경우
A가 자신의 주머니에서 검은 공 한 개를 꺼낼 확률은 $\frac{1}{10}$이고, B가 자신의 주머니에서 검은 공 한 개를 꺼낼 확률은 $\frac{1}{5}$이다.
따라서 A와 B가 동시에 자신의 주머니에서 검은 공 한 개를 꺼낼 확률은
$\frac{1}{10}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{50}$
(ⅰ)의 경우와 (ⅱ)의 경우는 동시에 일어나지 않으므로 구하는 확률은
$\frac{18}{25}+\frac{1}{50}=\frac{37}{50}$
따라서
$p=50$, $q=37$이므로 $p+q=87$

27. [출제의도] 삼각형의 합동을 이해하여 주어진 선분의 길이를 구한다.



두 직각삼각형 ABM, AHM에서
$\angle ABM=\angle AHM=90°$, $\overline{BM}=\overline{HM}$, $\overline{AM}$은 공통이므로
$\triangle ABM\equiv\triangle AHM$
두 직각삼각형 MCD, MHD에서
$\angle MCD=\angle MHD=90°$, $\overline{CM}=\overline{HM}$, $\overline{DM}$은 공통이므로
$\triangle MCD\equiv\triangle MHD$
그러므로 $\square ABCD=2\triangle AHM+2\triangle MHD$

$\triangle AHM=\frac{1}{2}\times4\times\overline{AH}=2\overline{AH}$

$\triangle MHD=\frac{1}{2}\times4\times\overline{HD}=2\overline{HD}$ 이므로

$\square ABCD=2\times2\overline{AH}+2\times2\overline{HD}$

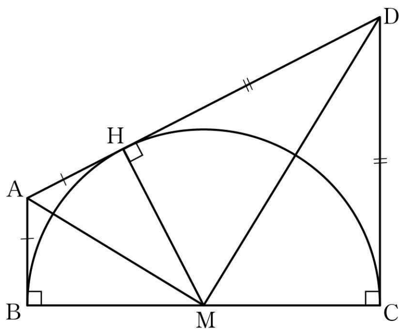
$\quad=4(\overline{AH}+\overline{HD})$

$\quad=4\overline{AD}$

$\quad=36$

따라서 $\overline{AD}=9$

[다른 풀이]



$\overline{BM}=\overline{MH}$, $\overline{AD}\perp\overline{MH}$ 이므로 선분 BC를 지름으로 하는 반원은 점 H에서 선분 AD와 접한다.

선분 AB, AD, DC는 모두 이 반원의 접선이므로

$\overline{AB}=\overline{AH}$, $\overline{DC}=\overline{DH}$

사다리꼴 ABCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(\overline{AB}+\overline{CD})\times\overline{BC}=36$

$\overline{BC}=8$ 이므로 $\overline{AB}+\overline{CD}=9$

따라서 $\overline{AD}=\overline{AH}+\overline{HD}=\overline{AB}+\overline{CD}=9$

[참고]

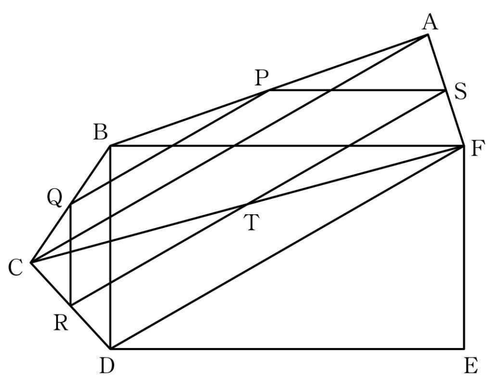
두 삼각형은 다음 각 경우에 서로 합동이다.

① 세 쌍의 대응변의 길이가 각각 같을 때

② 두 쌍의 대응변의 길이가 각각 같고, 그 끼인 각의 크기가 같을 때

③ 한 쌍의 대응변의 길이가 같고, 그 양 끝 각의 크기가 각각 같을 때

28. [출제의도] 삼각형의 성질을 이용하여 사각형의 둘레의 길이를 구한다.



선분 CF와 선분 RS의 교점을 T라 하면,

$\overline{RT}\,/\!/\,\overline{DF}$ 이므로 $\triangle CRT\backsim\triangle CDF$

닮음비는 $\overline{CR}:\overline{CD}=1:2$ 이므로 $\overline{RT}:\overline{DF}=1:2$

$\overline{RT}=\frac{1}{2}\overline{DF}$

$\overline{TS}\,/\!/\,\overline{CA}$ 이므로 $\triangle FST\backsim\triangle FAC$

닮음비는 $\overline{FS}:\overline{FA}=1:2$ 이므로 $\overline{TS}:\overline{CA}=1:2$

$\overline{TS}=\frac{1}{2}\overline{CA}$ 이므로

$\overline{RS}=\overline{RT}+\overline{TS}$

$\quad=\frac{1}{2}(\overline{DF}+\overline{CA})$

$\quad=\frac{1}{2}\times(32+38)=35$

삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질에 의해

삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=38$ 이므로 $\overline{PQ}=\frac{1}{2}\overline{AC}=19$

$\overline{BD}=a$, $\overline{BF}=b$라 하면

직사각형 BDEF의 둘레의 길이는 $2(a+b)=88$

$a+b=44$

삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질에 의해

$\overline{QR}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}a$

$\overline{PS}=\frac{1}{2}\overline{BF}=\frac{1}{2}b$

따라서 사각형 PQRS의 둘레의 길이는

$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RS}+\overline{PS}$

$=19+\frac{1}{2}a+35+\frac{1}{2}b$

$=54+\frac{1}{2}(a+b)$

$=54+22=76$

29. [출제의도] 이차함수의 성질과 삼각형의 넓이를 이용하여 함수의 식을 구한다.

이차함수 $y=-x^2+2x$ 에서

$y=-x^2+2x$

$\;=-(x-1)^2+1$

이므로 꼭짓점 A의 좌표는 $A(1,1)$이다.

이차함수 $y=ax^2+bx+c\,(a>0)$의

꼭짓점의 좌표가 $(1,1)$이므로

$y=ax^2+bx+c$

$\;=a(x-1)^2+1$

$\;=ax^2-2ax+a+1$

따라서 $b=-2a$, $c=a+1$ …… ㉠

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가

y축과 만나는 점이 $(0,c)$이므로

점 B의 좌표는 $B(0,c)\,(c>1)$이다.

두 점 B와 C는 y좌표가 같고,

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 축인 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 점 C의 좌표는 $C(2,c)$이다.

두 점 A와 C를 지나는 직선은 기울기가

$\frac{c-1}{2-1}=c-1$ 이고 점 $(1,1)$을 지나므로

직선의 방정식은 $y=(c-1)x+2-c$ 이다.

직선의 y절편이 $2-c$ 이므로

점 D의 좌표는 $D(0,2-c)$이다.

$\overline{BC}=2$, $\overline{BD}=2c-2$ 이므로

삼각형 BDC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times(2c-2)=12$

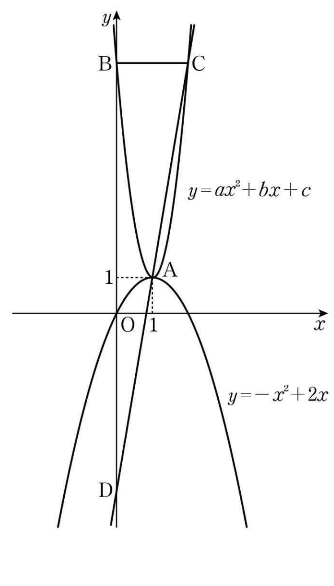
$2c-2=12$

$2c=14$

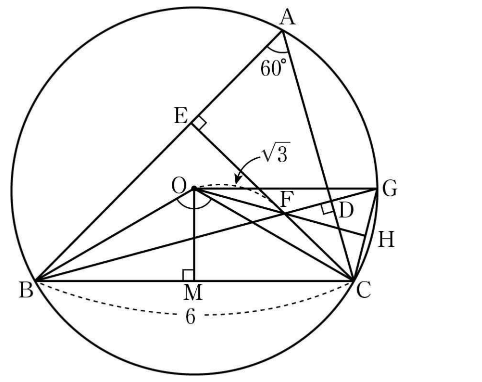
$c=7$

㉠에서 $a=6$, $b=-12$

따라서 $2a-b+c=12+12+7=31$



30. [출제의도] 원의 성질을 이용하여 선분의 길이를 구하는 문제를 해결한다.



그림과 같이 선분 BF의 연장선이 원과 만나는 점을 G, 선분 OF의 연장선이 선분 CG와 만나는 점을 H라 하자.

호 BC에 대한 원주각의 크기는 일정하므로

$\angle BGC=\angle A=60°$

사각형 AEFD의 내각의 합은 $360°$이고

$\angle AEF=\angle ADF=90°$ 이므로

$\angle EFD=180°-\angle A=180°-60°=120°$

$\angle CFD=180°-\angle EFD=60°$

따라서 삼각형 CGF는 정삼각형이고

$\overline{CF}=\overline{FG}$

호 BC에 대한 중심각의 크기는

원주각의 크기의 2배이므로

$\angle BOC=2\angle BAC=120°$

삼각형 OBC는 이등변삼각형이므로 변 BC의 중점을 M이라 하면 직각삼각형 OBM에서

$\angle BOM=\frac{1}{2}\angle BOC=60°$

$\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=3$

$\sin60°=\frac{\overline{BM}}{\overline{OB}}$

$\overline{OB}=\frac{\overline{BM}}{\sin60°}$

$\quad=3\times\frac{2}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

즉 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{3}$이다.

두 선분 $\overline{OC}$, $\overline{OG}$는 모두 원의 반지름이므로

$\overline{OC}=\overline{OG}=2\sqrt{3}$

$\overline{OF}$는 공통이므로 삼각형 OFC와 삼각형 OFG는 합동이고

$\angle COF=\angle GOF$

즉 선분 OH는 $\angle COG$의 이등분선이고 삼각형 OCG는 이등변삼각형이므로

$\angle CHO=90°$

$\overline{CF}=x$라 하면 $\overline{CH}=\frac{1}{2}x$, $\overline{FH}=\frac{\sqrt{3}}{2}x$

직각삼각형 OCH에서 피타고라스 정리에 의해

$\overline{OC}^2=\overline{CH}^2+\overline{OH}^2$

$(2\sqrt{3})^2=\left(\frac{1}{2}x\right)^2+\left(\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2$

$12=x^2+3x+3$

$x^2+3x-9=0$

근의 공식에 의해

$x=\frac{-3\pm3\sqrt{5}}{2}$

$x>0$ 이므로 $x=\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$

따라서 삼각형 OCF의 둘레의 길이는

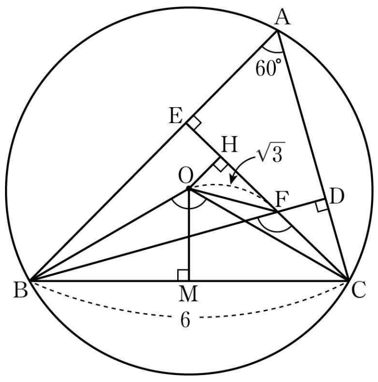
$\overline{OC}+\overline{OF}+\overline{CF}=2\sqrt{3}+\sqrt{3}+\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{5}\right)$

$\quad=-\frac{3}{2}+3\sqrt{3}+\frac{3}{2}\sqrt{5}$

$10(a^2+b^2+c^2)==10\left(\frac{9}{4}+9+\frac{9}{4}\right)$

$\quad=135$

[다른 풀이]



호 BC에 대한 중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배이므로

$\angle BOC = 2\angle BAC = 120°$

삼각형 OBC는 이등변삼각형이고

$\angle COB = 120°$ 이므로

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{3}$ 이다.

한편 사각형 AEFD의 내각의 합은 $360°$ 이고

$\angle AEF = \angle ADF = 90°$ 이므로

$\angle EFD = 180° - \angle A = 180° - 60° = 120°$

맞꼭지각의 크기는 같으므로

$\angle BFC = \angle EFD = 120°$

따라서 $\angle BFC = \angle BOC = 120°$ 이고

네 점 B, O, F, C는 한 원 위에 있다.

한 원에서 같은 호에 대한 원주각의 크기는 같으므로

$\angle BCO = \angle BFO = 30°$

점 O에서 선분 CE에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle OFH = 180° - (30° + 120°) = 30°$

직각삼각형 OHF에서

$\overline{HF} = \overline{OF} \times \cos 30°$

$= \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$

$\overline{OH} = \overline{OF} \times \sin 30°$

$= \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{CF} = x$ 라 하면 직각삼각형 OCH에서 피타고라스 정리에 의해

$\overline{OC}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{CH}^2$

$(2\sqrt{3})^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2} + x\right)^2$

$12 = 3 + 3x + x^2$

$x^2 + 3x - 9 = 0$

근의 공식에 의해

$x = \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2}$

$x > 0$ 이므로 $x = \frac{-3 + 3\sqrt{5}}{2}$

따라서 삼각형 OCF의 둘레의 길이는

$\overline{OC} + \overline{OF} + \overline{CF} = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} + \left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{5}\right)$

$= -\frac{3}{2} + 3\sqrt{3} + \frac{3}{2}\sqrt{5}$

$10(a^2 + b^2 + c^2) = 10\left(\frac{9}{4} + 9 + \frac{9}{4}\right)$

$= 135$