제 2 교시

수학 영역(B 형)

홀수형

5지선다형

1. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 $AB=A$일 때, $A+B$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{an^2-1}{2n^2+1}=2$일 때, 상수 a의 값은? [2점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

3. 좌표공간에서 점 $(3,\ 1,\ 4)$를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점을 A, y축에 내린 수선의 발을 B라 할 때, 선분 AB의 길이는? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 쌍곡선 $x^2-2y^2=1$ 위의 점 $(3,\ 2)$에서의 접선이 포물선 $y^2=ax$의 초점을 지날 때, a의 값은? [3점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

5. 같은 종류의 모자 7개, 같은 종류의 바지 3벌을 세 모둠에게 남김없이 나누어 주려고 한다. 각 모둠은 모자를 1개 이상 받는다고 할 때, 나누어 줄 수 있는 경우의 수는? [3점]

① 120 ② 150 ③ 180 ④ 210 ⑤ 240

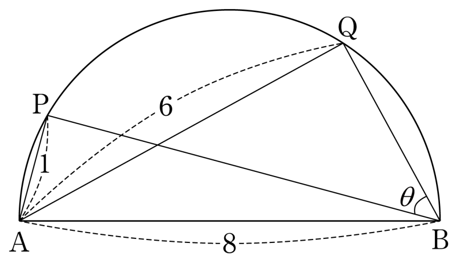
6. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르고,

$$\mathrm{E}(2X+5)=9, \quad \mathrm{E}(X^2)=5$$

일 때, $\mathrm{P}(X=1)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{5}{16}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{7}{16}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

7. 그림과 같이 길이가 8인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 두 점 P, Q에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}=1$, $\overline{\mathrm{AQ}}=6$이다. $\angle\mathrm{PBQ}=\theta$라 할 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]



① $\frac{2\sqrt{7}}{9}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{7}}{3}$
④ $\frac{4\sqrt{7}}{9}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{2}$

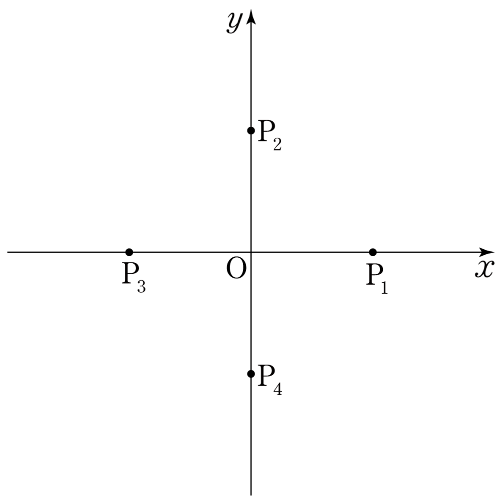
[8～9] 일차변환을 나타내는 행렬을 원소로 하는 집합 S가

$$S=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right\}$$

이고, 좌표평면 위에 4개의 점

$\mathrm{P}_1(1,\ 0)$, $\mathrm{P}_2(0,\ 1)$, $\mathrm{P}_3(-1,\ 0)$, $\mathrm{P}_4(0,\ -1)$

가 있다. 8번과 9번의 두 물음에 답하시오.



8. 집합 S에 속하는 행렬로 나타내어지는 일차변환에 의하여 점 P_1이 점 P_4로 옮겨진다. 이 일차변환에 의하여 점 $(5,\ 1)$이 점 $(p,\ q)$로 옮겨질 때, $p+q$의 값은? [3점]

① -4　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 4

9. 집합 S에 속하는 행렬 중에서 중복을 허락하여 2개의 행렬 A, B를 택하였을 때, 두 행렬 A, B로 나타내어지는 일차변환을 각각 f, g라 하자. 합성변환 $f \circ g$에 의하여 점 P_1이 점 P_3로 옮겨질 확률은? [3점]

① $\frac{1}{16}$　② $\frac{1}{8}$　③ $\frac{3}{16}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{5}{16}$

10. 무리방정식

$$\sqrt{x^2-2x}=x^2-2x+a$$

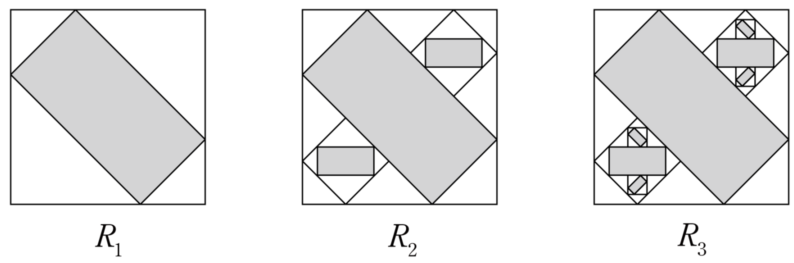
의 모든 실근의 합이 2일 때, a의 최댓값은? [3점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{3}{16}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{5}{16}$ ⑤ $\frac{3}{8}$

11. 주머니에 흰 공 3개, 검은 공 5개가 들어 있다. 이 주머니에서 3개의 공을 차례로 꺼내었더니 세 번째로 꺼낸 공이 검은색이었다. 첫 번째로 꺼낸 공이 흰색일 확률은? (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.) [3점]

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{7}$ ④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

12. 한 변의 길이가 1인 정사각형에 내접하고 두 변의 길이의 비가 $1:2$인 직사각형을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 직사각형의 긴 변을 빗변으로 하는 2개의 직각이등변삼각형에 각각 내접하는 두 정사각형에 대하여 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 두 변의 길이의 비가 $1:2$인 2개의 직사각형을 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에서 2개의 작은 직사각형의 긴 변을 빗변으로 하는 4개의 직각이등변삼각형에 각각 내접하는 4개의 정사각형에 대하여 그림 R_2를 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 두 변의 길이의 비가 $1:2$인 4개의 직사각형을 색칠하여 얻은 그림을 R_3라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



① $\frac{31}{65}$ ② $\frac{36}{65}$ ③ $\frac{41}{65}$ ④ $\frac{46}{65}$ ⑤ $\frac{51}{65}$

13. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$이고,

$$2a_{n+1} = a_n + \frac{n-1}{n(n+1)} \quad (n \ge 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

> 주어진 식 $2a_{n+1} = a_n + \frac{n-1}{n(n+1)}$의 양변에 2^n을 곱하면
>
> $$2^{n+1}a_{n+1} = 2^n a_n + \frac{n-1}{n(n+1)}2^n \quad (n \ge 1)$$
>
> 이다. $b_n = 2^n a_n$이라 하면
>
> $$b_{n+1} = b_n + \frac{n-1}{n(n+1)}2^n \quad (n \ge 1)$$
>
> 이고, $b_1 = 2$이므로
>
> $$b_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k-1}{k(k+1)}2^k \quad (n \ge 2) \cdots\cdots (*)$$
>
> 이다. 한편
>
> $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k-1}{k(k+1)}2^k &= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k-(k+1)}{k(k+1)}2^k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2^{k+1}}{k+1} - \frac{2^k}{k}\right) \\ &= \boxed{(가)}\end{aligned}$$
>
> 이므로 $(*)$에 의하여
>
> $$a_n = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ \boxed{(나)} & (n \ge 2)\end{cases}$$
>
> 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(8) \times g(6)$의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

14. 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$의 두 초점을 F, F$'$이라 하자. y좌표의 부호가 서로 다른 타원 위의 두 점 A, B에 대하여

$$\overline{\mathrm{AF}} \times \overline{\mathrm{BF}} = 2, \quad \overline{\mathrm{AF'}} \times \overline{\mathrm{BF'}} = 6$$

일 때, 사각형 AFBF$'$의 넓이는? [4점]

① $1+\sqrt{2}$ ② $1+\sqrt{3}$ ③ $2+\sqrt{2}$
④ $2+\sqrt{3}$ ⑤ $1+2\sqrt{2}$

15. 두 이차정사각행렬 A, B가

$$AB = A + E, \quad BA = -B$$

를 만족시킨다. 행렬 B의 모든 성분의 합이 5일 때, $(A-B)^2$의 모든 성분의 합은? [4점]

① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

16. 평면에서 삼각형 ABC 가

$\overline{\mathrm{AB}}=6,\quad \overline{\mathrm{AC}}=a,\quad \angle\mathrm{B}=30^\circ$

를 만족시킬 때, 만들어질 수 있는 삼각형 ABC 의 개수를 $f(a)$라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 합동인 도형은 하나로 본다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(5)=2$

ㄴ. $\lim_{a\to 3-0} f(a)=\lim_{a\to 3+0} f(a)$

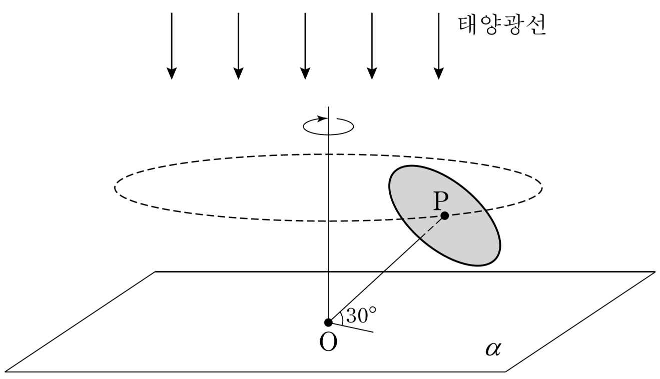
ㄷ. 구간 $(0,\ \infty)$에서 함수 $f(a)$의 불연속점은 2개이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 모평균이 120이고 모표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 25인 표본을 임의추출하였을 때 표본평균이 구간 $[116,\ 124]$에 포함될 확률이 0.9544이었다.
이 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출할 때, 표본의 총합이 α 이상일 확률이 0.0228이다. $\alpha+\sigma$의 값은?
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이다.) [4점]

① 500 ② 510 ③ 520 ④ 530 ⑤ 540

18. 그림과 같이 평면 α와 점 O 에서 만나고 길이가 3 인 선분 OP 와 점 P 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1 인 원판이 있다. 선분 OP 는 원판의 면과 수직이고, 평면 α와 이루는 각의 크기가 $30°$ 이다. 태양광선이 그림과 같이 평면 α에 수직인 방향으로 비춘다.
원판을 점 O 를 지나고 평면 α에 수직인 직선의 둘레로 회전시킬 때, 원판에 의해 평면 α에 생기는 그림자가 지나가는 부분의 넓이는? [4점]

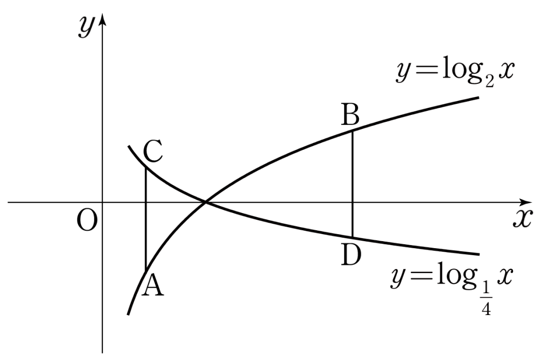


① $2\sqrt{3}\pi$　② $3\sqrt{2}\pi$　③ $2\sqrt{5}\pi$　④ $2\sqrt{6}\pi$　⑤ $3\sqrt{3}\pi$

19. 그림과 같이 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 서로 다른 두 점 A, B 에 대하여 점 A 를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_{\frac{1}{4}} x$와 만나는 점을 C 라 하자. 점 B 를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_{\frac{1}{4}} x$와 만나는 점을 D 라 하자. 다음 조건을 만족시키는 점 B 의 x좌표는? [4점]

> (가) $\overline{AC}=\overline{BD}$
> (나) 선분 AB 를 $2:5$로 내분하는 점의 x좌표는 1 이다.

① $\frac{5}{2}$　② 3　③ $\frac{7}{2}$　④ 4　⑤ $\frac{9}{2}$



20. 곡선 $y=\frac{1}{4}x^2$ 위의 점과 점 $(0,\ t)$ 사이의 거리의 최솟값을 $f(t)$라 할 때, $\int_1^5 f(x)dx$의 값은? [4점]

① $\frac{61}{6}$ ② $\frac{31}{3}$ ③ $\frac{21}{2}$ ④ $\frac{32}{3}$ ⑤ $\frac{65}{6}$

21. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 집합 X를

$$X=\left\{f(x)\,\middle|\,\int_0^1 f(x)dx \le \frac{f(0)+f(1)}{2}\right\}$$

라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $4x^3-2x \in X$

ㄴ. $f(x)\in X$이면 구간 $(0,\ 1)$에서 $f''(x)\ge 0$이다.

ㄷ. $f'(0)\le f'(1)$이면 $f(x)\in X$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

22. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = 30, \quad a_3 - a_5 = 6$$

일 때, $a_k + a_8 = 0$을 만족시키는 k의 값을 구하시오. [3점]

23. 함수 $f(x) = 3\sin x - \sqrt{7}\cos x + 2$는 $x = \alpha$에서 최댓값 M을 갖는다. $M + 16\sin^2\alpha$의 값을 구하시오. [3점]

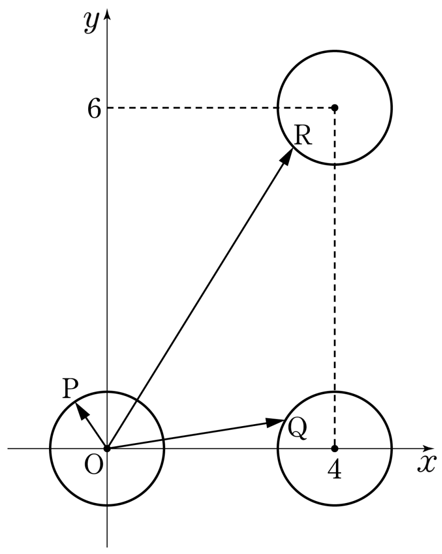
24. A 마을은 정기적으로 축제를 열고 있다. 주변 마을에서 A 마을에 축제를 보러 오는 여행자의 인구밀도 T와 여행자의 마을에서 A 마을까지의 거리 d(km)는 다음 식을 만족시킨다.

$$\log T = 4.6 - k\log_2(5d+1) \text{ (단, } k\text{는 상수이다.)}$$

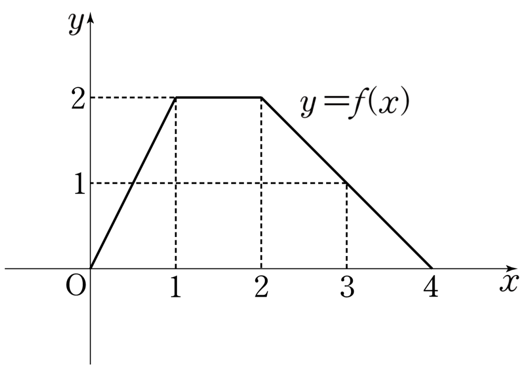
A 마을에서 3(km) 떨어진 마을에서 A 마을에 축제를 보러 오는 여행자의 인구밀도를 T_1, A 마을에서 6.2(km) 떨어진 마을에서 A 마을에 축제를 보러 오는 여행자의 인구밀도를 T_2라 할 때, $T_2 = (T_1)^2$이다. $30k$의 값을 구하시오. [3점]

25. 투자자 A는 증권과 채권을 각각 7천만 원, 3천만 원어치 보유하고 있고, 투자자 B는 증권과 채권을 각각 3천만 원, 1억 2천만 원어치 보유하고 있다.
투자자 A는 증권을 x천만 원어치 샀고, 투자자 B는 증권을 x천만 원어치 샀고 채권을 $(x+5)$천만 원어치 팔았다.
투자자 A가 보유하고 있는 증권과 채권을 합한 금액 중 증권 금액의 비율을 $f(x)$, 투자자 B가 보유하고 있는 증권과 채권을 합한 금액 중 증권 금액의 비율을 $g(x)$라 할 때, $f(x) > g(x)$를 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

26. 좌표평면에서 중심이 각각 O(0, 0), A(4, 0), B(4, 6)이고 반지름의 길이가 1인 세 원 C_1, C_2, C_3가 있다.
세 점 P, Q, R이 각각 세 원 C_1, C_2, C_3 위를 움직일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}|$의 최솟값을 구하시오. [4점]



27. 닫힌 구간 $[0,\ 4]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



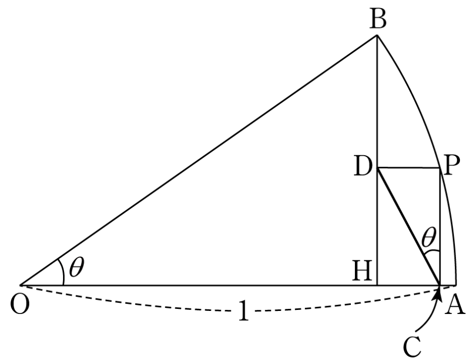
$\int_{1}^{2} \frac{f(x^2)}{x}dx=p\ln 2+q$일 때, $10p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [4점]

28. 좌표공간에서 직선 l이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 평면 $2x+y-z=6$은 직선 l을 포함한다.
(나) 원점에서 직선 l에 내린 수선의 발은 x축 위에 있다.

직선 l은 점 $(a,\ b,\ 5)$를 지난다. $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

29. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 AOB가 있다. 점 B에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고, 호 AB 위의 점 P에서 선분 AH, 선분 BH에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 할 때, $\angle \mathrm{PCD} = \theta$가 되도록 호 AB 위에 점 P를 잡는다. $\lim_{\theta \to +0} \frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\theta} = p\sqrt{2} + q$일 때, $10p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [4점]



30. 함수 $f(x) = (\ln x)^n + nx\ (x > 0)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

> (가) $f(x)$는 극값을 갖는다.
> (나) 곡선 $y = f(x)$의 변곡점의 x좌표가 e^{10}보다 작다.

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.